



**Universidad Nacional Autónoma
de México**

Instituto de Geofísica

**UNA ECUACIÓN DE ESTADO SIMPLIFICADA PARA
LA DENSIDAD DE MAGMAS SILÍCEOS
HIDRATADOS: APLICACIÓN A LA MODELACIÓN
DEL CRECIMIENTO DE DOMOS DEL VOLCÁN
POPOCATÉPETL POR EFECTO DE FUERZAS DE
FLOTACIÓN**

Tesis

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

presenta

Alex Onar González Mellado

Ciudad Universitaria, México

Noviembre 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo con todo mi amor
a mi compañera Mercedes Cortés
y a mi familia mexicana-chilena.

Espero que el mismo represente un
estímulo para todos los jóvenes
de mi familia y del mundo en general.

Agradecimientos

A lo largo de casi 20 años mi vida ha girado alrededor de unos de los guardianes más imponentes del valle del Anáhuac: el volcán Popocatepetl. Objeto de las más variadas expresiones humanas, este volcán ha cautivado a cientos de miles de personas desde la primera vez que lo han conocido. En mi caso este primer encuentro íntimo y personal lo tuve a través de la actividad de montañismo, y sin duda mi primer ascenso realizado, por la Ruta de las Cruces a su cumbre principal, en agosto de 1989 me dejó hechizado por siempre.

En ese año el Popocatepetl parecía una montaña como las demás pero se sabía que en su interior existía siempre un nivel de actividad casi imperceptible. Esto lo delataba su característico olor a "huevo podrido" (ácido sulfhídrico) que se hacía más intenso conforme se alcanzaba el gigantesco cráter. La vista desde esas alturas era deslumbrante. Todo estaba inmerso en una quietud casi irreal y nada indicaba un peligro mayor a parte de los inherentes a la escalada misma de este coloso.

A mediados de noviembre de 1994, percibí que la actividad del Popocatepetl había cambiado drásticamente cuando realicé mi último ascenso por la Ruta de la Central. Subí con el equipo de montañismo de la Universidad de Chapingo los cuales tenían una práctica de caída en las Rampas de la Central. Allí pasamos la noche y al día siguiente yo decidí hacer cumbre en solitario con la idea de tomar fotos y ver personalmente como estaba el volcán. En esa fecha el glaciar tenía grandes depósitos de una sustancia que lo hacía parecer rosado. No sabía que era y los pantalones del traje de tormenta que llevaba puesto quedaron totalmente manchados de ese color. Al llegar al cráter, apenas pude permanecer allí cinco minutos. De esa enorme vorágine, como si fuera un gigantesco temazcal, salía una intensa emanación de gases con diversos tonos de color gris-rosado que nunca antes había visto. El olor a azufre era nauseabundo. Los ojos me lagrimeaban sin parar, y se me hacía difícil respirar. Me acuerdo que tosía constantemente y en cada respiración sentía mi garganta más irritada. Pude tomar pocas fotos, y me apresuré a bajar lo más rápido posible.

Pocas semanas después, a partir de diciembre de 1994, una secuencia de explosiones expulsó una gran cantidad de fragmentos líticos hacia las faldas del volcán iniciando, por primera vez, un episodio de emisión de ceniza no-juvenil después de casi 70 años de quietud. El Popocatepetl había despertado. Desde entonces se prohibió el ascenso a su cumbre. El volcán había dejado de ser un lugar seguro para los amantes del montañismo y posiblemente para los pobladores aledaños.

Ahora se había vuelto un objeto de estudio. En todos los sentidos. Desde el simplemente observacional que realizaban y siguen realizando temerosos los pobladores cercanos a Don Goyo, como cariñosamente conocen al Popocatepetl, hasta los realizados por sofisticados equipos tecnológicos para obtener información científica de la actividad.

Es aquí, donde otra vez, toqué este enigmático volcán vía la carrera que había estudiado: física. Pese a que ahora ya no era la actividad deportiva mi punto de contacto con él, sí lo era la vulcanología física, la cual también es una actividad increíble y muy apasionante.

Cuando escogí mi proyecto doctoral quería un tema que tuviera mucha física y mucha vulcanología. Uno de estos temas es el estudio de *problema del exceso de SO₂* en la desgasificación pasiva de varios volcanes en el mundo, porque este problema lleva a realizar un estudio sistemático del sistema magmático vía un análisis de estabilidad hidrodinámica. Los problemas de estabilidad hidrodinámica siempre han cautivado a los físicos y hoy en día sigue siendo un área de intensa investigación. Pero en la ruta que nos lleva a este problema aún existen varias piezas sueltas que antes hay que encontrar.

Una de ellas era conocer una ecuación de estado (EOS, siglas en inglés de Equation Of State) que fuera precisa y a la vez relativamente sencilla de usar para la densidad, con el objeto que fuera útil para posteriores análisis de tipo hidrodinámico. No existían hasta ese momento expresiones simples en ese sentido. Ello llevó a la motivación de una búsqueda de una EOS simplificada para la densidad y a una aplicación posterior inmediata que puede llegar a ser útil en un futuro en el área de crecimientos de domos volcánicos que es un tema de investigación actual y de primera línea en el mundo y muy importante en el estudio del volcán Popocatépetl ya que hasta el día de hoy han habido varios episodios de crecimientos de domos en el interior del cráter desde 1994. La idea propuesta para explicar el crecimiento de domos del Popocatépetl es, en realidad sencilla y fue bien recibida por varios especialistas que asistieron a la sesión donde se expusieron las principales ideas de esta investigación en la XXIV Asamblea General de la IUGG realizada en Perugia, Italia en 2007.

Un trabajo de esta amplitud no es el producto de uno solo individuo, sino el resultado de la ayuda de muchas personas. Agradezco a mi Comité Tutorial, la Dra. Leticia Flores Márquez y al Dr. Gonzalo Alduncin González y muy especialmente a mi tutor el Dr. Servando de la Cruz Reyna por su paciente asesoría a lo largo de todos estos años. A todo el personal de la Biblioteca de Geofísica por su ayuda, en particular al Lic. Arturo Méndez Flores por su cordial asistencia. A la Dirección General de Estudios de Posgrado DGEP-UNAM por la beca otorgada en el oficio DGEP/SPIAP/PB/666/2002. A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA, UNAM) por el soporte económico obtenido con cargo del Proyecto DGAPA-PAPIIT IN114808. Al Posgrado en Ciencias de la Tierra, UNAM, por su ayuda económica con la que me fue posible realizar la impresión de este documento. Al jurado de mi Examen de Candidatura: Dr. Servando de la Cruz Reyna, Dr. Juan Manuel Espíndola Castro, Dr. Hugo Delgado Granados, Dra. María Aurora Armienta Hernández, Dr. José Luis Macías Vázquez y al jurado de mi Examen de Grado: Dr. Hugo Delgado Granados, Dr. Peter Schaaf, Dr. Servando de la Cruz Reyna, Dra. Julie Roberge y el Dr. Edgar Santoyo por su valiosas sugerencias que me se sirvieron para mejorar y concluir este trabajo.

También agradezco a la Dra. Alejandra Arciniega por su atención y sugerencias en diversas consultas sobre sismología volcánica del Popocatépetl. A Angel Gómez (CENAPRED) por la gentileza de proporcionarme datos importantes de las dimensiones de los domos del Popocatépetl y fotos de los mismos (ver páginas 29 y 30). Al Dr. Servando de la Cruz Reyna por donarme las imágenes de crecimiento de domo del Popocatépetl que componen la portada (foto tomada el 20 de agosto de 2001 por él mismo) y contraportada (foto tomada el 24 de enero de 2002 por la Dirección General de Carreteras de la SCT) de esta tesis. Al personal de todo el Posgrado en especial a Araceli Chamán quien siempre fue muy amable y paciente conmigo. Y en general a todas las amistades del Instituto de Geofísica que me apoyaron y se solidarizaron a lo largo de esta intensa etapa estudiantil. También un

agradecimiento muy especial a mi hermana Tatiana por la elaboración del diseño gráfico de la portada de la tesis y por su paciente apoyo con el que pude lograr una mejor diagramación de la misma y a toda mi familia mexicana-chilena que nunca me dejaron de animar.

Por último, para concluir, quiero remarcar mi agradecimiento más profundo a mi compañera Mercedes Cortés por su apoyo incondicional que me brindó a lo largo de todos estos años. Bajo vientos favorables y desfavorables su asistencia fue definitiva para que pudiera concluir mi investigación. No me concibo en el lugar que estoy sin ella. Por ello le estaré eternamente reconocido. ¡Meche, corazón mío, un gran abrazo y beso para ti!

Índice

Agradecimientos	(I)
Resumen	(V)
Introducción	(1)
Capítulo 1. Ecuación de estado de la densidad para fundidos magmáticos hidratados	(3)
1.1 Ecuación de Shaw-Charmichael-Spera, 1980	(3)
1.2 Ecuación de Bagdassarov-Fradkov, 1993	(4)
1.3 Densidad Estándar: ecuación de Lange-Carmichael-Spera, 2000	(6)
1.4 Propuesta de una EOS simplificada	(8)
1.4.1 EOS lineal	(9)
1.4.2 EOS no-lineal	(12)
1.5 La distribución de la densidad del magma en el conducto del volcán Popocatepetl	(15)
Capítulo 2. Mecanismo de crecimiento de domos propuesto para el volcán Popocatepetl	(21)
2.1 Ecuación de la isostasia y solución	(23)
2.2 La altura máxima de un domo en crecimiento	(27)
Capítulo 3. Resultados	(34)
Capítulo 4. Conclusiones	(42)
Bibliografía	(44)
Apéndice A	(50)
Apéndice B	(62)
Anexo 1	(96)

Resumen

Se presenta una ecuación de estado (EOS, en inglés) simplificada para calcular la densidad de magmas silíceos hidratados en un intervalo de presiones, temperaturas y contenidos de agua disuelta de interés, para el estudio de diversos procesos en conductos magmáticos. Se propone una forma lineal y una forma no-lineal más precisa (y más simple que la ecuación original), ambas válidas en el intervalo de 0 a 0.25 GPa, 800 a 1000 K (o bien de 1000 K a 1200 K tomado como segundo intervalo de temperatura), 0 a 7 wt% H₂O para composiciones de fundidos magmáticos dacíticos y andesíticos, como los del volcán Popocatépetl.

Estas ecuaciones se aplican para explicar algunos aspectos de la actividad efusiva de formación de domos volcánicos que han sido observados en el volcán Popocatépetl desde 1996. Este modelo contempla una densidad que depende principalmente del contenido de volátiles del magma que llena el sistema del volcán y que provoca la fuerza de flotación que controla la extrusión del magma y el crecimiento de los domos.

Abstract

We present a simplified equation of state (EOS) for calculating the density of hydrous siliceous magmas in a range of pressures, temperatures and dissolved water content of interest to study several magma conduit processes. A linear form and a more precise non-linear (and simpler than the original equation), both valid in the range 0 to 0.25 GPa, 800 to 1000 K (or from 1000 K to 1200 K taking account this interval as a second rank of temperature), and 0 to 7 wt.% H₂O are proposed for the dacitic and andesitic magma melt compositions, similar to those of Popocatépetl volcano.

We apply these equations to explain some aspects of the dome-forming effusive activity that has been observed at Popocatépetl volcano since 1996. This model poses a density reduction dependent mainly on the volatile contents of the magma filling the volcano conduit system as the driving buoyancy force causing magma extrusions and dome growths.

Introducción

La densidad es una de los principales parámetros que controlan el comportamiento y la evolución del magma. La convección en los reservorios de magmas, el flujo del magma en conductos, la tasa de ascenso o asentamiento de los cristales son solo algunos ejemplos de procesos en los cuales la densidad del magma y su contraste con la roca de los alrededores juega un papel determinante.

Considerando la amplia variedad de magmas que existen y el hecho de que son mezclas multicomponentes complejas, el poder describir la densidad del magma como una función de la temperatura, presión, composición y contenido de volátiles representa un problema termodinámico difícil. Particularmente, el bajo peso molecular del agua y los demás volátiles hace que su contribución a la densidad del magma sea bastante significativa.

De especial interés es el caso del volcán Popocatépetl. Después de 70 años de quietud, el Popocatépetl despertó el 21 de diciembre de 1994 produciendo emisiones de gas y ceniza. Muchas de ellas fueron explosiones de baja intensidad y larga duración, referidas como “exhalaciones”. Algunas veces ellas estuvieron compuestas en su mayor parte de gas y vapor, acarreado poca ceniza.

Este tipo de actividad, rica en exhalaciones de gas, persistió a través de 1995 hasta principios de 1996. A finales de marzo de 1996 se observó por primera vez el crecimiento de un domo de lava en el fondo del cráter. La primera explosión de destrucción de domo ocurrió el 30 de abril de 1996 (De la Cruz-Reyna y Siebe, 1997). Este evento marcó el inicio de una serie de al menos 26 episodios de crecimiento y destrucción de domo que continúan hasta la fecha (2008).

En este trabajo se discute un modelo en el cual la extrusión de los domos se produce básicamente por el ascenso del magma en el interior de un conducto volcánico por efecto de las fuerzas de flotación (boyantes) derivadas del contraste de densidades entre el magma y la roca encajonante. Se encuentra que el contraste de densidad, causado principalmente por el contenido de volátiles del magma del Popocatépetl, puede explicar el grado de ascenso observado del magma y la formación de domos.

En la modelación física del proceso de ascenso del magma, se aplican las ecuaciones de estado (EOS) simplificadas para la densidad propuesta en este trabajo a lo largo de toda la longitud del conducto volcánico y se encuentran las condiciones requeridas por la columna magmática para generar el desplazamiento del magma y la actividad efusiva consecuente. Estas condiciones resultan ser consistentes con los datos observados tales como las composiciones de la muestra, algunos aspectos de la sismicidad y volumen y altura de los domos emplazados.

El contraste de densidad es por lo tanto el parámetro principal que gobierna la altura que alcanzará la columna magmática en este tipo de erupciones efusivas. Aún más, la posibilidad de una convección inducida por la densidad en el conducto magmático puede ayudar a explicar el comportamiento paradójico conocido como el *problema del exceso de*

azufre (Wallace y Anderson, 2000), que produce cantidades de gas que requerirían concentraciones de volátiles disueltos poco probables en el volumen del magma desgasificado, ya que deberá alcanzar niveles de sobresaturación inaceptables.

Kazahaya et al. (1994) han propuestos una posible convección inducida por el contenido de volátiles para explicar la desgasificación excesiva observada en algunos volcanes. El Popocatépetl ha estado desgasificando pasivamente enorme cantidades de gases volcánicos. A lo largo de varios años de actividad moderada, ha liberado a la atmósfera cantidades comparables con la emisiones de corta duración de las erupciones altamente explosivas de El Chichón en 1982 o el Pinatubo en 1991 (Delgado-Granados et al., 2001). No obstante la pequeña tasa de salida de magma, el flujo medio de SO₂ ha sido típicamente de 5000 t/d, e incluso en ciertos periodos (e.g., en enero de 1997 y septiembre-diciembre de 1998) las emisiones alcanzaron valores hasta de 40,000-50,000 t/d (Wright et al., 2002).

Aquí nos concentraremos en describir la densidad del magma rico en gases involucrado en la actividad del Popocatépetl durante el periodo 1996-2000, cuando las muestras de lava fueron analizadas (Straub y Martín-Del Pozzo, 2001; Witter, 2003; Schaaf et al., 2005; Witter et al., 2005; Atlas et al., 2006). Este magma puede tener varias composiciones las cuales varían desde la andesítica hasta la dacítica. Para el propósito de este trabajo, se pone especial atención a los extremos de este intervalo.

CAPÍTULO 1. Ecuación de estado de la densidad para fundidos magmáticos hidratados

A la fecha existen pocos trabajos sobre ecuaciones de estado (EOS) propuestas para describir la densidad de fundidos magmáticos hidratados monofásicos (Spera, 1980; Bagdassarov y Fradkov, 1993; Lange y colaboradores, 1987-1999 [ver abajo, para más detalle]; Spera, 2000). No obstante los resultados espectaculares que produjo la EOS para la densidad de los materiales del manto terrestre (Busse, 1989; Jarvis y Peltier, 1989) en la solución del problema convectivo en su interior, la misma no toma en cuenta el contenido de H₂O, y es solo posteriormente que se encuentran expresiones para EOS desarrolladas a partir de datos experimentales de fundidos hidratados, especialmente en el área de modelación convectiva en cámaras magmáticas. Estas últimas se expondrán a continuación con cierto detalle. Así mismo se plantearán las propuestas de EOS simplificadas, investigadas en este trabajo y se mostraran algunas aplicaciones para calcular la densidad del fundido dacítico del volcán Popocatépetl.

1.1 Ecuación de Shaw-Charmichael-Spera, 1980

Una de las primeras ecuaciones de estado para la densidad de un magma hidratado que aparecen en la literatura al estudiar un proceso de convección libre en un fundido basáltico está dada por Spera (1980),

$$-\frac{\Delta\rho}{\rho_r} = 5.2 \times 10^{-5} \theta + 1.0 \omega_{H_2O}, \quad (1)$$

donde $\rho_r = 2750 \text{ kg/m}^3$ es la densidad de referencia de un magma basáltico seco y θ se define por

$$\theta = T - 1437.$$

La ecuación (1) basada completamente en datos experimentales (Carmichael et al., 1977 y Shaw, 1974), tiene unidades de densidad ρ en kg/m^3 , temperatura T en K y la fracción de masa ω_{H_2O} es adimensional.

Suponiendo un gradiente de temperatura probable que se establezca a lo largo y ancho de un dique delgado, y permitiendo la posibilidad de una transferencia de H₂O desde la roca que rodea al sistema hacia el fundido contenido en el interior de esta estructura, las perturbaciones locales en la densidad pueden llegar a ser significativas. En efecto, si se toma $\theta = 273 \text{ K}$ y $\omega_{H_2O} = 0.03$ (3% del peso del fundido como H₂O), se obtiene una variación de la densidad de

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_r} = -0.04,$$

y a pesar de parecer una pequeña diferencia puede provocar una fuerza de flotación significativa.

La ecuación (1) se puede reescribir también como,

$$\rho(T, w) = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) - \beta(w - w_r)] \quad , \quad (2)$$

donde $\rho_r = 2750 \text{ kg/m}^3$, $T_r = 1473 \text{ K}$, $w_r = 0 \text{ wt\%}$, $\alpha = 5.2 \times 10^{-5} \text{ 1/K}$ y $\beta = 1 \times 10^{-2} \text{ 1/wt\%}$. Las unidades de cantidad de H_2O disuelta están dadas en wt% o peso porcentual. Considerando un cambio de la densidad únicamente por variación del contenido de H_2O , de la Ec. (2) se obtiene,

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \rho(1473 \text{ K}, 0 \text{ wt\%}) - \rho(1473 \text{ K}, 5 \text{ wt\%}) \\ &= 2750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 2612.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ &= 137.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} , \end{aligned}$$

es decir si un fundido basáltico seco a 1473 K se hidrata con 5 wt% de H_2O su peso disminuye en 137.5 kg por cada m^3 (ver Fig. (1)).

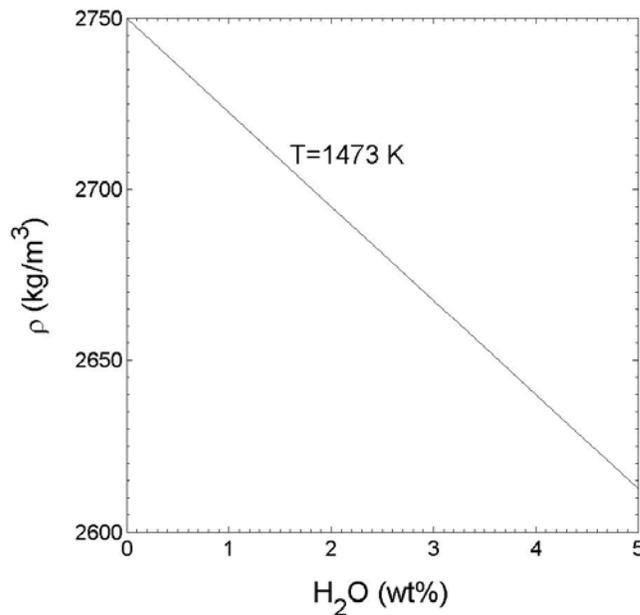


Fig 1. Variación de la densidad ρ con el contenido de H_2O disuelta en el fundido basáltico usando la Ec. (2).

1.2 Ecuación de Bagdassarov-Fradkov, 1993

Una EOS que ha sido propuesta para modelar la densidad de un fundido silíceo en el interior de una cámara magmática es la de Bagdassarov y Fradkov (1993)

$$\rho = \rho_o(1 - \alpha\Delta T - \beta\Delta C) \quad , \quad (3)$$

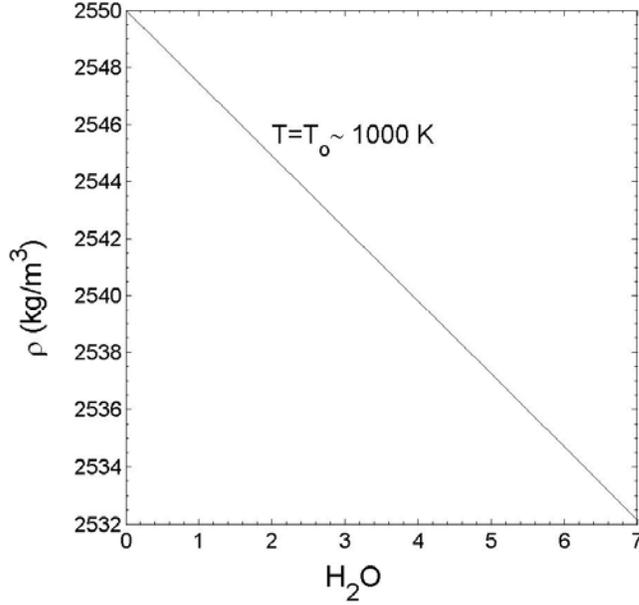


Fig 2. Variación de la densidad ρ con el contenido de H_2O disuelta en un fundido silíceo usando la Ec. (3).

donde ρ_o es la densidad de referencia, α el coeficiente de expansión térmica, β el coeficiente de expansión por concentración, y ΔT y ΔC son las desviaciones de la temperatura y de la concentración a partir del punto de referencia. Se asume que ΔT y ΔC se anulan en la frontera superior.

Esta misma ecuación se puede describir como

$$\rho(T, w) = \rho_o [1 - \alpha(T - T_o) - \beta(w - w_o)] \quad , \quad (4)$$

donde ρ_o es la densidad de referencia del fundido seco a la temperatura y contenido de H_2O de referencia T_o y w_o , valores que los autores ubican en la parte superior de la cámara magmática (o bien en la base de la chimenea volcánica); α es el coeficiente de expansión térmica y β es el coeficiente de expansión por contenido de H_2O . Las unidades de densidad, temperatura y contenido de H_2O están dadas respectivamente por kg/m^3 , K y wt%.

En esta modelación $\rho_o = 2250 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 5 \times 10^{-5} \text{ 1/K}$ y $\beta = 1 \times 10^{-3} \text{ 1/wt\%}$. Los autores no proporcionan los valores explícitos de los puntos de referencia T_o y w_o ya que ellos trabajan su modelo con las diferencias ΔT y Δw . Se toman arbitrariamente los valores medios de temperatura y contenido de H_2O de referencia como $T_o \sim 1000 \text{ K}$ (fundido granítico) y $w_o = 0 \text{ wt\%}$. Considerando un cambio de la densidad únicamente por variación del contenido de H_2O , de la Ec. (4) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= \rho(1000\text{ K}, 0\text{ wt}\%) - \rho(1000\text{ K}, 7\text{ wt}\%) \\
&= 2550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 2532.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
&= 17.8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},
\end{aligned}$$

es decir, si un fundido silíceo seco a 1000 K se hidrata con 7 wt% de H₂O, por cada m³ el peso del fundido disminuye en 17.8 kg (ver Fig. (2)).

Comp. <i>i</i>	1 ^{er} elemento Masa molar (10 ⁻³ kg/mol)	Número De átomos	2° elemento Masa molar (10 ⁻³ kg/mol)	Número de átomos	Molécula Masa molar <i>M_{mi}</i> (10 ⁻³ kg/mol)
SiO ₂	28.0855	1	15.9994	2	60.0843
TiO ₂	47.9	1	15.9994	2	79.8988
Al ₂ O ₃	26.98154	2	15.9994	3	101.96128
Fe ₂ O ₃	55.847	2	15.9994	3	159.6922
FeO	55.847	1	15.9994	1	71.8464
MgO	24.305	1	15.9994	1	40.3044
MnO	54.938	1	15.9994	1	70.9374
CaO	40.08	1	15.9994	1	56.0794
Na ₂ O	22.98977	2	15.9994	1	61.97894
K ₂ O	39.0983	2	15.9994	1	94.1960
Li ₂ O	6.941	2	15.9994	1	29.8814
P ₂ O ₅	30.97376	2	15.9994	5	141.94452
CO ₂	12.011	1	15.9994	2	44.0098
H ₂ O	1.0079	2	15.9994	1	18.0152

Tabla 1. Valores de *M_{mi}* para cada componente (Sargent-Welch, 1980; Dobran, 2001).

1.3 Densidad Estándar: ecuación de Lange-Carmichael-Spera, 2000

La densidad del magma de los fundidos silíceo puede ser determinada por (Spera, 2000)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i M_{mi}}{\sum_{i=1}^n n_i V_{mi}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i M_{mi}}{\sum_{i=1}^n X_i V_{mi}}, \quad (5)$$

donde n_i es el número de moles y M_{mi} , V_{mi} son la masa y el volumen molar respectivos de la i -ésima componente a una temperatura y presión dada. Valores típicos de estas variables para algunos componentes que constituyen un fundido se pueden consultar las Tablas 1 y 2. Si n_T es el número total de moles y X_i la fracción molar de la i -ésima componente, la expresión anterior también se puede expresar en términos de este parámetro.

Comp. i	$(V_{mi})_{p_r, T_r}$ (10^{-6} m ³ /mol)	$(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ (10^{-9} m ³ /mol-K)	$(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ (10^{-6} m ³ /mol-GPa)
SiO ₂	26.86 ± 0.30	0.0	-1.89 ± 0.02
TiO ₂	23.16 ± 0.26	7.24 ± 0.46	-2.31 ± 0.06
Al ₂ O ₃	37.42 ± 0.09	0.0	-2.26 ± 0.09
Fe ₂ O ₃	42.13 ± 0.28	9.09 ± 3.49	-2.53 ± 0.09
FeO	13.65 ± 0.15	2.92 ± 1.62	-0.45 ± 0.03
MgO	11.69 ± 0.08	3.27 ± 0.17	0.27 ± 0.07
MnO	-	-	-
CaO	16.53 ± 0.06	3.74 ± 0.12	0.34 ± 0.05
Na ₂ O	28.88 ± 0.06	7.68 ± 0.10	-2.40 ± 0.05
K ₂ O	45.07 ± 0.09	12.08 ± 0.20	-6.75 ± 0.14
Li ₂ O	16.85 ± 0.15	5.25 ± 0.81	-1.02 ± 0.06
P ₂ O ₅	-	-	-
CO ₂	33.0 ± 1.0	0.0	0.0
H ₂ O	26.27 ± 0.50	9.46 ± 0.83	-3.15 ± 0.61

Tabla 2. Valores de $(V_{mi})_{p_r, T_r}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ para cada componente a 1 bar y 1673 K (Spera, 2000; Dobran, 2001; Lange y Carmichael 1990; Lange 1997; Ochs y Lange 1997, 1999). Las incertidumbres son de origen experimental.

La ecuación de estado empírica más simple para el volumen V tiene la estructura siguiente

$$V = \sum_{i=1}^n X_i \left[(V_{mi})_{p_r, T_r} + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p (T - T_r) + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T (p - p_r) \right], \quad (6)$$

por lo que la Ec. (5) se puede reescribir como

$$\rho_s(p, T, X_i) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i M_{mi}}{\sum_{i=1}^n X_i \left[(V_{mi})_{p_r, T_r} + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p (T - T_r) + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T (p - p_r) \right]}, \quad (7)$$

donde ρ_s , de ahora en adelante, se denota como la densidad estándar, n es el número de componentes en el fundido, X_i la composición del fundido magmático en unidades de

fracción molar, M_{mi} la masa molar de la i -ésima componente. $(V_{mi})_{pr,Tr}$ es el volumen molar parcial inicial, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ son las variaciones de los volúmenes molares parciales con la temperatura y presión respectivamente de cada componente a la presión y temperatura de referencia p_r y T_r , generalmente 1673 K y 10^{-4} GPa (1 bar). Los valores de $(V_{mi})_{pr,Tr}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ medidos para líquidos magmáticos silíceos se muestran en la Tabla 2. Esta ecuación es recomendable que se use dentro de un intervalo de presiones entre 0 y 2 GPa (correspondientes a profundidades de 0 a 80 km aproximadamente). Para profundidades mayores los cambios en la compresibilidad de los fundidos silíceos con la presión llegan a ser importantes (Lange, 1994).

Históricamente, en los experimentos de laboratorio lo primero que se encontró fue la existencia de una dependencia lineal del volumen V con la temperatura T . También se publicaron los valores de los parámetros físicos $(V_{mi})_{pr,Tr}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ a una temperatura y presión de referencia de 1773 K y 10^{-4} GPa para casi todos los óxidos excepto para el MnO, P₂O₅, H₂O y CO₂. La mayoría de los datos experimentales de la densidad fueron obtenidos entre los 1573 K y 1873 K (Lange y Carmichael, 1987). Posteriormente se encontró que el volumen V también tenía una dependencia lineal con la presión p . Lange y Carmichael (1990) publicaron las Ecs. (5) y (6) y los valores de los parámetros físicos $(V_{mi})_{pr,Tr}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ ahora a una temperatura y presión de referencia de 1673 K y 10^{-4} GPa para casi todos los óxidos excepto para el MnO, P₂O₅, H₂O y CO₂. Se puede anticipar que la dependencia del volumen con la presión decrece más rápidamente a bajas que a altas presiones. Hablando en general, la primera derivada del volumen con respecto a la presión $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ es suficiente para describir el volumen de los líquidos naturales hasta los 2-3 GPa (Lange y Carmichael, 1990; Lange, 1994).

Poco después, el modelo de Lange y Carmichael de 1987 válido para altas temperaturas, fue recalibrado, extendiendo su aplicabilidad para valores de temperatura entre 701 y 1896 K mejorando con ello también la precisión de los valores de las derivadas de la expansión térmica $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ (Lange, 1997). Al mismo tiempo se propuso para $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ una dependencia lineal con la temperatura, y con ello la Ec. (7) modificada es válida desde 600 a 1873 K y hasta 1 GPa (Ochs y Lange, 1997).

En 1999 por primera vez se publicaron los valores de $(V_{mi})_{pr,Tr}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ para el H₂O a una temperatura y presión de 1000 C y 10^{-4} GPa (Ochs y Lange, 1999) y en el 2000 se realizó un trabajo de recopilación y síntesis de todos los resultados más relevantes que se extiende a lo largo de muchos artículos y se estandarizan los valores de los parámetros físicos $(V_{mi})_{pr,Tr}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ a la temperatura y presión de referencia de 1673 K y 10^{-4} GPa respectivamente. Se publicaron los datos completos para el H₂O, parciales para el CO₂ (ya que sólo se reportó el valor de $(V_{mi})_{pr,Tr}$) y siguen faltando los valores experimentales para MnO y P₂O₅ (Spera, 2000).

1.4 Propuesta de una EOS simplificada

Para construir una EOS relativamente simple capaz de reproducir los valores de densidad calculados y medidos por otros autores para un amplio intervalo de composiciones,

temperaturas y contenido de volátiles, inicialmente asumimos una densidad del fundido, la cual depende de su composición, temperatura T , presión p y contenido de agua w .

Para magmas ácidos el dominio de variables termodinámicas D_T , que se espera describir con la EOS, corresponde para el fundido magmático del Popocatepetl a

$$D_T = \{(p, T, w) \mid p \in [0, 0.25] \text{ GPa}, T \in [800, 1000] \text{ K}, w \in [0, 7] \text{ wt\%}\} \quad (8)$$

en el intervalo de profundidades

$$\{z \mid z \in [0, 10000] \text{ m}\} \quad (9)$$

donde el origen $z=0$ se coloca en el nivel de compensación isostático del sistema de conductos magmáticos o “*magma plumbing system*” (como también es referido en la literatura especializada) y el valor más alto corresponde al nivel de la salida del conducto a la atmósfera, esto es del cráter volcánico. Este valor por lo tanto es igual a la profundidad asumida del sistema de conductos que contribuye a los procesos efusivos, el cual limitamos hasta un máximo de 10 km.

Es importante en este punto recalcar que el análisis siguiente no depende de la geometría del sistema de conductos, ya que las consideraciones hidrostáticas sólo requieren que exista algún tipo de conexión entre los conductos, diques, o cualquier tipo de estructura por la cual el magma pueda transportarse hacia la superficie durante la actividad efusiva.

1.4.1 EOS lineal

La densidad de los fundidos silíceos ha sido analizada y revisada por varios autores (e.g., Burnham y Davis, 1971, 1974; Lange y Carmichael, 1987, 1990; Ochs y Lange, 1997, 1999; Richet et al., 2000; Bouhifd et al., 2001; Lange, 2002). Considerando su aplicación sobre un amplio intervalo de presiones y temperaturas, se usará como punto de partida la Ec. (7) que es una función $(n+2)$ -dimensional en donde dos variables independientes corresponden a la presión p y la temperatura T y las n restantes son las componentes X_i del fundido magmático expresadas en fracción molar. Efectuando una simple manipulación algebraica, descrita en detalle en el apéndice A, la ecuación (7) se transforma en

$$\rho_s(p, T, w_i) = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]} \quad (10)$$

siendo A_i , α_i y κ_{Ti} con $i=1, \dots, n$ parámetros constantes definidos como

$$A_i = \frac{(V_{mi})_{p_r, T_r}}{(100 \text{ wt}\%)M_{mi}} \quad (11)$$

y

$$\alpha_i = \frac{1}{V_{mi}} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p$$

$$\kappa_{Ti} = -\frac{1}{V_{mi}} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T \quad (12)$$

α_i y κ_{Ti} representan respectivamente la expansión térmica y la compresibilidad isotérmica de la i -ésima componente del fundido magmático. Valores típicos de estos parámetros calculados utilizando las Ecs. (12), con los datos de la Tabla 2 se listan en la Tabla 3.

Comp. i	α_i (10^{-6} K^{-1})	κ_{Ti} (10^{-4} GPa^{-1})
SiO ₂	0.0	703.65 ± 15.31
TiO ₂	312.61 ± 23.37	997.41 ± 37.10
Al ₂ O ₃	0.0	603.96 ± 25.50
Fe ₂ O ₃	215.76 ± 84.27	600.52 ± 25.35
FeO	213.92 ± 121.03	329.67 ± 25.60
MgO	279.73 ± 16.46	-230.97 ± 61.46
MnO	-	-
CaO	226.26 ± 8.08	-205.69 ± 30.99
Na ₂ O	265.93 ± 4.02	831.03 ± 19.04
K ₂ O	268.03 ± 4.97	1497.67 ± 34.05
Li ₂ O	311.57 ± 50.84	605.34 ± 41.00
P ₂ O ₅	-	-
CO ₂	0.0	0.0
H ₂ O	360.11 ± 38.45	1199.09 ± 255.03

Tabla 3. Valores de α_i y κ_{Ti} para cada componente a 1 bar y 1673 K, calculados de las Ecs. (12) usando los valores dados en la Tabla 2. En el Apéndice A se explican los valores negativos de κ_{Ti} . Las incertidumbres se estimaron usando propagación de errores.

La cantidad ubicada en el denominador de (10) y denotada por v aparece frecuentemente en los cálculos, y físicamente representa el volumen específico del fundido magmático (ver Apéndice A: Transformación $\rho_s(p, T, X_i) \rightarrow \rho_s(p, T, w_i)$).

La Ec. (10) es una función no-lineal $(n+2)$ -dimensional, análoga en forma a la Ec. (7), donde dos variables independientes son la presión p y la temperatura T y las restantes w_i con $i=1,\dots,n$ son las componentes del fundido ahora expresadas en unidades de peso porcentual. En general es una expresión algebraica compleja difícil de manejar desde el punto de vista analítico.

Con la finalidad de tener una expresión más simple, a continuación se linealiza la Ec.10 mediante una expansión de Taylor multidimensional alrededor del punto de referencia (p_o, T_o, w_{io}) (Ver Apéndice A). Tomando la primera aproximación se obtiene

$$\rho_{linear}(p, T, w_{io}) = \rho_o \left[1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \sum_{i=1}^n \beta_i(w_i - w_{io}) \right] , \quad (13)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{\nu_o} \sum_{i=1}^n A_i w_{io} \alpha_i , \quad (14)$$

$$\kappa_T = \frac{1}{\nu_o} \sum_{i=1}^n A_i w_{io} \kappa_{Ti} , \quad (15)$$

y

$$\beta_i = \frac{A_i}{\nu_o^2} [1 + \alpha_i(T_o - T_r) - \kappa_{Ti}(p_o - p_r)] . \quad (16)$$

$\nu_o = \nu(p_o, T_o, w_{io})$ es el volumen específico en el punto de referencia, α and κ_T son respectivamente la expansión térmica y la compresibilidad isotérmica del magma considerado como un todo y β_i es un coeficiente que representa una contribución del cambio de volumen por concentración de la i -ésima componente (ver Apéndice A: Expansión de Taylor; Dominio de validez de $\rho_{linear}(p, T, w_i)$ en R^{n+2}). Se observa que (13) sigue siendo una función $(n+2)$ -dimensional.

El paso siguiente consiste en reducir las variables independientes de $(n+2)$ a 3 en la EOS linealizada, lo cual se logra usando un modelo de disolución del H₂O. Por lo general se parte con una composición inicial w_{io} del fundido magmático de n componentes, el cual puede tener un contenido de H₂O inicial disuelta $w_{H_2O,o}$ con un valor mínimo de cero (que sería el caso de un magma anhidro). Al agregar una cantidad $w_{H_2O}^*$ de agua a ese magma, el peso porcentual de cada uno de los componentes del fundido se modifica de tal forma que el magma hidratado tiene una composición final w_i . Una forma que se ha propuesto en la literatura de cómo realizar esta modificación para cada una de las componentes, con excepción del H₂O, está dada por la expresión (Persikov, 1991)

$$w_{i \neq H_2O} = w_{io} \left[1 - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O}^* \right] , \quad (17)$$

mientras que para la componente H₂O la variación es

$$w_{H_2O} = w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^* \quad . \quad (18)$$

Este sencillo modelo de disolución tiene algunas propiedades interesante (ver Apéndice A: Propiedad del modelo de disolución del H₂O).

Introduciendo (17) y (18) en (13) y usando $w = w_{H_2O}$ se obtiene la siguiente expresión lineal aproximada en un espacio 3-dimensional

$$\rho_{linear}(p, T, w) = \rho_o [1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \beta(w - w_o)] \quad , \quad (19)$$

en la cual el efecto de las componentes del magma, además del agua, están implícitos en los coeficientes α and κ_T , como fueron definidos en (14) y (15), y en β la cual está definida como

$$\beta = \beta_{H_2O} [1 + (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O,o}] - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) \quad , \quad (20)$$

donde β_{H_2O} puede ser calculada de la Ec. (16). Físicamente β representa la expansión global del fundido debida a la concentración derivada del modelo de disolución de H₂O de arriba (ver Apéndice A: Transformación $\rho_{linear}(p, T, w_i) \rightarrow \rho_{linear}(p, T, w)$; Dominio de validez de $\rho_{linear}(p, T, w)$ en R^3).

La ecuación (19) es una EOS lineal simple de usar, capaz de describir la densidad de una gran variedad de magmas hidratados silíceos. Algunos ejemplos de la misma se dan más adelante. Cuando se requiera una precisión mayor para el cálculo de la densidad se propone la forma no-lineal presentada a continuación.

1.4.2 EOS no-lineal

Para construir el modelo no-lineal,

1. Se toma como punto de referencia

$$\begin{aligned} (p_o, T_o, w_o) &= (p_r, T_r, w_r) \\ &= (0, 1673 \text{ K}, 0) \quad , \end{aligned} \quad (21)$$

por ser un punto representativo a nivel experimental.

2. Se requiere que la expresión para la densidad tenga la misma estructura algebraica que la Ec. (19)

$$\begin{aligned}\rho(p, T, w) &= \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) + \kappa_T(p - p_r) - \beta_*(w - w_r)] \\ &= \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) + \kappa_T p - \beta_* w]\end{aligned}\quad , \quad (22)$$

lo cual es viable sólo si se especifica que el parámetro β_* ya no es constante.

Se sabe que la densidad es mucho más sensible a la temperatura que a la presión por lo que para resolver la segunda condición se propone una dependencia del tipo $\beta_* = \beta(T)$.

¿Cómo encontramos esta dependencia? Para ello, se consideran los puntos (p^*, T^*, w) con una presión y temperatura p^*, T^* fija y el contenido de agua w variable dentro del sistema magmático en dónde interesa calcular los valores de la densidad. Evaluando la densidad estándar correspondiente en estos puntos se obtiene una función no lineal $\rho_s(p^*, T^*, w)$ que depende solamente de la variable w definida en el intervalo $w \in [0, 7]$ wt%. Gráficamente esta función en el plano ρ_s vs. w es una curva suave que puede ser "aproximada" a la recta

$$\rho_{recta} = Mw + B, \quad (23)$$

la cual se requiere que pase por los puntos extremos de la curva $P_o = (0 \text{ wt}\%, (\rho_s)_o)$ y $P_I = (7 \text{ wt}\%, (\rho_s)_I)$. Tomando $w = 7 \text{ wt}\%$ la pendiente M de la recta está dada por

$$M = \frac{(\rho_s)_I - (\rho_s)_o}{w_I} \quad (24)$$

y la ordenada al origen

$$B = (\rho_s)_o, \quad (25)$$

siendo

$$(\rho_s)_o \equiv \rho_s(p^*, T^*, w_{i \neq H_2O, o}, 0 \text{ wt}\% H_2O) \quad (26)$$

y

$$(\rho_s)_I \equiv \rho_s(p^*, T^*, w_{i \neq H_2O}, 7 \text{ wt}\% H_2O) \quad (27)$$

Por los mismos puntos P_o y P_I pasa la aproximación "no-lineal" dada por (22). Evaluándola en los puntos no-hidratados $(p^*, T^*, 0 \text{ wt}\%)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\rho(p^*, T^*, 0 \text{ wt}\%) &= \rho_r [1 - \alpha(T^* - T_r) + \kappa_T p^* - \beta_* \times 0 \text{ wt}\%] \\ &= \rho_r [1 - \alpha(T^* - T_r) + \kappa_T p^*] \\ &\equiv \rho_{dry}\end{aligned}\quad , \quad (28)$$

en donde se ha definido la nueva cantidad ρ_{dry} . Con ello, (22) se puede describir ahora como la ecuación

$$\rho(p^*, T^*, w) = \rho_{dry} - \rho_r \beta^* w \quad . \quad (29)$$

Igualando ambas rectas, Ecs. (23) y (29), se obtiene

$$\begin{aligned} Mw + B &= \rho_{dry} - \rho_r \beta^* w \\ Mw + (\rho_s)_o &= \rho_{dry} - \rho_r \beta^* w \quad , \\ (\rho_s)_o \left[1 + \frac{M}{(\rho_s)_o} w \right] &= \rho_{dry} \left(1 - \frac{\rho_r \beta^*}{\rho_{dry}} w \right) \end{aligned} \quad (30)$$

y usando el hecho de que $\rho_{dry} \approx (\rho_s)_o$ y que $M < -1$ (por lo tanto $-M > 1$ o de forma equivalente $abs(M) > 1$) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{M}{(\rho_s)_o} &= -\frac{\rho_r \beta^*}{\rho_{dry}} \\ \frac{(-M)\rho_{dry}}{\rho_r (\rho_s)_o} &= \beta^* \end{aligned} \quad (31)$$

o bien

$$\beta^* = \frac{abs(M)\rho_{dry}}{\rho_r (\rho_s)_o} \quad . \quad (32)$$

Las cantidades $abs(M)$, ρ_{dry} y $(\rho_s)_o$ dependen de p^* y T^* , pero la densidad es mucho más sensible a la temperatura que a la presión, por lo que se propone para el parámetro β^* una dependencia con la temperatura dada por los siguientes ajustes posibles

$$\beta(T) = \begin{cases} c_o + c_1 T & (a) \\ c_o + c_1 T + c_2 T^2 & (b) \end{cases} \quad . \quad (33)$$

Para obtener los coeficientes c_i , se puede usar un conjunto de puntos (T^*, β^*) donde $T^* \in \{T_{*r} \mid T_{*r} = T_i + r^* \Delta T, r=0, \dots, m\}$, y β^* se calcula usando la fórmula (32), evaluándola en $p^*=0.25$ GPa, T^* y $w_o=0$ wt%.

Los valores de T_i and T_f son los extremos del intervalo de temperatura ([800, 1000] K y [1000, 1200] K en este estudio), m es el número de particiones en $[T_i, T_f]$ y $\Delta T = (T_f - T_i)/m$ es el tamaño de la partición. Para un intervalo de temperatura $(T_f - T_i)$ cuyo tamaño sea pequeño, la opción (33.a) es bastante buena; para intervalos mayores se recomienda usar la opción (33.b).

Insertando la función (33) en (22), obtenemos la función

$$\begin{aligned} \rho(p, T, w) &= \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) + \kappa_T p - \beta(T)w] \\ &= \begin{cases} \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) + \kappa_T p - (c_o + c_1 T)w] & (a) \\ \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) + \kappa_T p - (c_o + c_1 T + c_2 T^2)w] & (b) \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

Es importante notar que ρ_r , α y κ_T dependen ahora del punto de referencia ($p_r \approx 0$, T_r , w_{ir}).

1.5 La distribución de la densidad del magma en el conducto del volcán Popocatepetl

Para analizar la naturaleza boyante de la columna magmática en el conducto del volcán, se necesita integrar su densidad a lo largo de toda la columna. La tarea de integrar una EOS sobre tal intervalo de presiones, temperatura y composiciones en el conducto magmático del Popocatepetl mencionado (cualquiera que sea su geometría), el cual puede alcanzar profundidades de hasta 10 km, se puede simplificar usando las ecuaciones (19) o (34). Aún la ecuación lineal (19) es suficientemente general y puede ser aplicada para un amplio intervalo de presiones, temperatura y composiciones de magmas silíceos, por lo que puede usarse para este propósito.

A continuación se procederá a calcular la densidad del magma andesítico-dacítico en el conducto del volcán Popocatepetl. Para ello es necesario considerar que existen algunas limitaciones en el cálculo de las contribuciones de las componentes del fundido. Muchas de las composiciones publicadas de muestras de la actividad en curso (Straub y Martín-Del Pozzo, 2001; Witter, 2003; Schaaf et al., 2005; Witter et al., 2005, Atlas et al., 2006) reportan solamente el óxido de hierro total. Para calcular la contribución de ambos óxidos a la densidad, se asume que las muestras modernas de cada óxido contribuyen con la mitad del valor del hierro total. Esta hipótesis está respaldada por datos publicados de muestras más antiguas (Robin, 1984; Robin y Boudal, 1987; y Boudal y Robin, 1988), en las que se observa esta tendencia.

Asimismo, no hay datos experimentales disponibles de $(V_{mi})_{p_r, T_r}$, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ y $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ para MnO y P₂O₅, por lo que dada su pequeña concentración se normaliza la composición a 100 sin tomarlos en cuenta (ver Tabla 4). La mayoría de las composiciones son muestras de fragmentos de roca de domos volcánicos lanzados al exterior, medidas por diferentes autores, correspondientes a las explosiones del 30 de abril de 1996 y 30 de junio de 1997. En el estudio presente se seleccionó el extremo más máfico de la composición andesítica y el extremo más silíceo de la composición dacítica de las muestras ya publicadas, que de aquí en adelante serán referidas simplemente como muestras *andesítica* y *dacítica* del fundido magmático del volcán Popocatepetl durante la presente actividad.

Para el cálculo se usa el siguiente dominio discretizado para la presión $\{p_i | p_i [\text{GPa}] = 0.25 - i \cdot 0.125, i=0,1,2\}$, la temperatura $\{T_j | T_j [\text{K}] = 1000 - j \cdot 40, j=0, \dots, 5\}$ y el contenido de H_2O $\{w_k | w_k [\text{wt}\%] = 7 - k, k=0, \dots, 7\}$ dando un total de 144 (p_i, T_j, w_k) puntos para graficar.

Las Figuras 3 y 4 muestran la comparación de la densidad estándar ρ_s (Ec. 10) del magma dacítico del Popocatepetl con la densidad lineal ρ_{lineal} definida por la ecuación (19) dentro del dominio D_T , usando los valores de la Tabla 5 en el punto de referencia $p_o = 0.25 \text{ GPa}$, $T_o = 1000 \text{ K}$, $w_o = 3.5$ y $7 \text{ wt}\% \text{ H}_2\text{O}$. La línea en la Figuras 3 y 4 representan la región donde la correlación es perfecta. Las correlaciones entre la densidad estándar (10) y la densidad lineal (19) son bastante satisfactorias para estos puntos de referencia.

Del cálculo del mejor ajuste lineal ($r = 0.9999$) para los valores de β^* y T^* , (ver Tabla 6), recordando que esta tabla fue generada calculando β^* con la fórmula (32) en $p^* = 0.25 \text{ GPa}$, $w_o = 0 \text{ wt}\% \text{ H}_2\text{O}$ y $T^* \in \{T_{*r} | T_{*r} [\text{K}] = 800 + r \cdot 20, r=0, \dots, 10\}$ y usando la opción lineal (a) de (33), se obtiene el parámetro $\beta(T)$ para el magma del Popocatepetl

$$\beta(T) = 5.735068 \times 10^{-3} + (9.916851 \times 10^{-6})T \quad T \in [800 \text{ K}, 1000 \text{ K}] \quad , \quad (35)$$

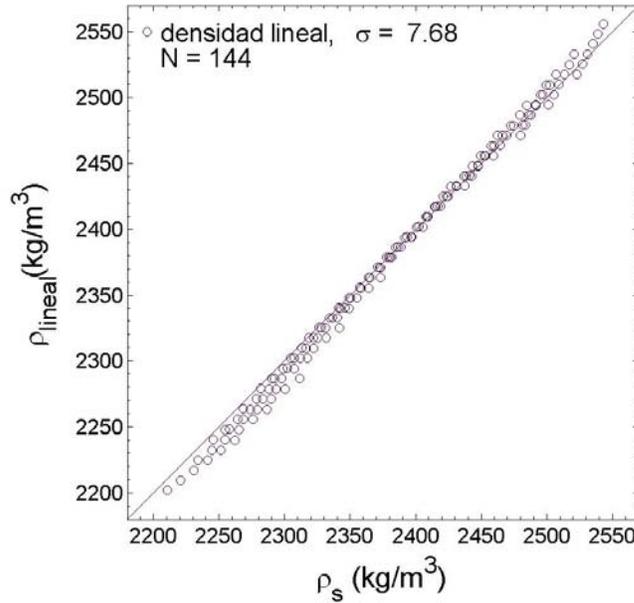


Figura 3. Comparación de la densidad estándar ρ_s (Ec. 10) con el modelo de densidad lineal ρ_{lineal} (Ec. 19) para el magma dacítico del Popocatepetl en el dominio D_T , y punto de referencia $p_o = 0.25 \text{ GPa}$, $T_o = 1000 \text{ K}$, $w_o = 3.5 \text{ wt}\% \text{ H}_2\text{O}$. La línea representa la región de más alta correlación. N representa el número de puntos del dominio que se han graficado. La desviación estándar de la

muestra se calcula usando $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \langle r \rangle)^2}$ siendo N el número de datos, r_i los residuales y $\langle r \rangle$ el valor medio.

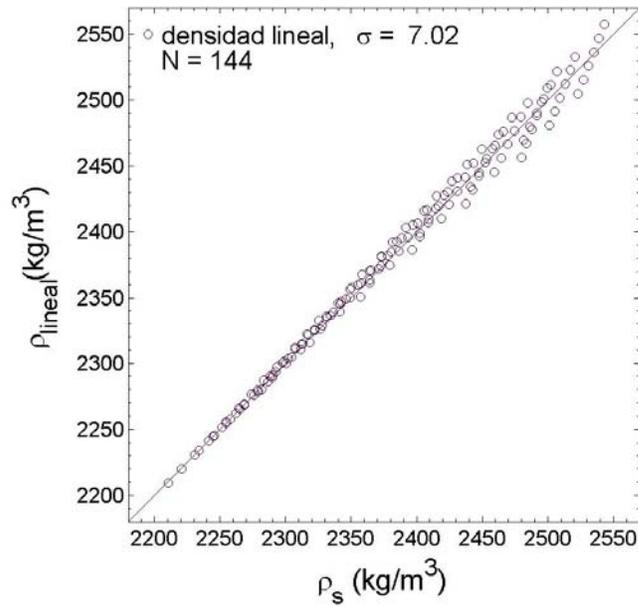


Figura 4. ρ_{lineal} vs. ρ_s para el magma dacítico del Popocatepetl en el dominio D_T y punto de referencia $p_o = 0.25$ GPa, $T_o = 1000$ K y $w_o = 7.0$ wt% H_2O .

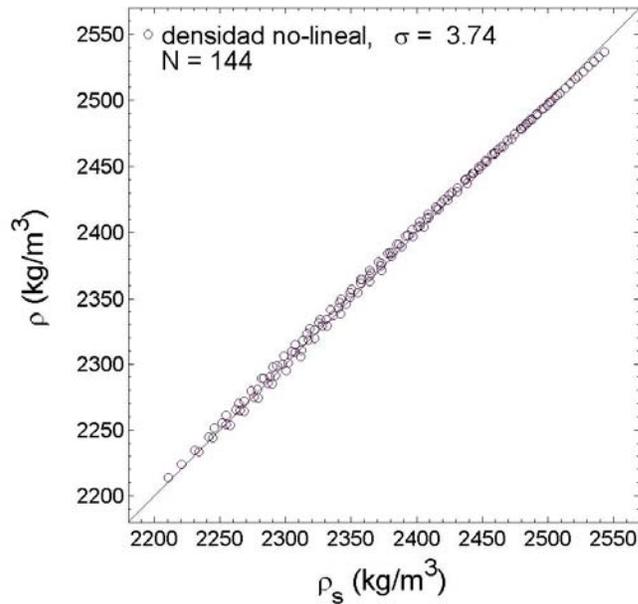


Figura 5. Comparación de la densidad estándar ρ_s (Ec. 10) con el modelo de densidad no-lineal ρ (Ec. 34a) para el magma dacítico del Popocatepetl en el dominio D_T , y punto de referencia $p_o = 0$ GPa, $T_o = 1673$ K, $w_o = 0$ wt% H_2O .

Introduciendo (35) en (34), junto con los demás parámetros dados en la Tabla 5, se obtienen resultados muy satisfactorios para la densidad del magma dacítico del Popocatepetl dentro del dominio D_T , en el punto de referencia de un laboratorio estándar, como se muestra en la Figura 5 y más específicamente en la Tabla 7.

Las correlaciones ilustradas en las figuras 3, 4 y 5 fueron también probadas con una prueba t de Student para corroborar la aproximación lineal y con la χ^2 para corroborar la bondad de ajuste, resultando que en todos los casos la hipótesis de correlación lineal entre los modelos propuestos y la densidad estándar es aceptable con niveles de confianza superiores al 99%.

La ecuación no-lineal (34) es, como la ecuación (19), muy general y ligeramente más precisa. Estas ecuaciones pueden ser usadas para calcular la densidad de otras composiciones magmáticas, solamente recalculando los valores de ρ_r , α , κ_T y $\beta(T)$, permitiendo con ello un cálculo más simple y directo de la densidad.

Muestra	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	FeO	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O	P ₂ O ₅	FeO _{tot}	SUM	Ref.
30496/Pro	59.80	0.76	16.03	-	-	0.09	5.43	5.61	3.92	1.44	0.15	5.56	98.79	1
30496/RXT	61.02	0.76	16.30	-	-	0.09	4.02	5.16	4.03	1.68	0.16	5.43	98.65	1
30697/MAN	58.32	0.86	15.99	-	-	0.09	5.92	5.90	3.92	1.39	0.18	6.01	98.58	1
30697/P.C.	63.97	0.71	16.76	-	-	0.08	3.18	4.87	4.26	1.77	0.15	4.73	100.48	1
96D3-1	60.81	0.67	15.84	-	-	0.09	3.48	5.04	4.21	1.67	0.17	5.80	97.78	3
96D3-Com	63.23	0.71	16.28	-	-	0.08	3.39	4.96	4.36	1.75	0.17	5.11	100.04	3
97D1	58.20	0.92	16.06	-	-	0.10	6.97	6.24	4.21	1.34	0.22	6.58	100.84	3
97D2	62.92	0.73	16.58	-	-	0.10	3.55	5.05	4.56	1.81	0.17	5.05	100.52	3
TETEL-4B	62.76	0.94	18.09	-	-	0.05	2.03	4.84	1.44	1.76	0.28	3.35	95.54	4
SEMPOPO	65.00	0.63	16.57	-	-	0.08	2.19	4.91	4.53	1.95	0.14	4.12	100.12	2
Andesitic	58.20	0.92	16.06	3.29	3.29	0	6.97	6.24	4.21	1.34	0	6.58	100.52	-
Dacitic	65.00	0.63	16.57	2.06	2.06	0	2.19	4.91	4.53	1.95	0	4.12	99.90	-

Tabla 4. Composición de diferentes muestras de rocas del volcán Popocatepetl (en wt%), la mayoría fragmentos de domo emitidos el 30 de abril de 2006 y el 30 de junio de 1997 obtenidos por diferentes autores: 1 = Straub and Martin-del Pozzo, 2001; 2 = Witter, 2003 and Witter et al., 2005; 3 = Schaaf et al., 2005; 4 = Atlas et al., 2006. SEMPOPO se denomina al miembro final silíceo del Popocatepetl, y las dos últimas filas (andesítica y dacítica) muestran valores generales utilizados en este estudio como composición magmática característica para la densidad y un modelo de fuerza de flotación.

Prueba	Muestra	Intervalo de Temperatura	p_o	T_o	w_o	ρ_o	α	κ_T	β	c_o	c_l	σ
			(GPa)	(K)	(wt%)	(kg/m ³)	(1/K)	(1/GPa)	(1/wt%)	(1/wt%)	1/(wt%K)	(kg/m ³)
A	dacítica	[800,1000]	0.25	1000	3.5	2383.06	8.0	77.741	16.172	-	-	7.68
B	dacítica	[800,1000]	0.25	1000	7.0	2257.88	11.6	85.305	15.635	-	-	7.02
C	dacítica	[800,1000]	0	1673	0	2416.48	3.8	66.365	-	5.735068	9.91685	3.74
A	dacítica	[1000,1200]	0.25	1200	3.5	2345.53	7.9	76.517	18.309	-	-	7.64
B	dacítica	[1000,1200]	0.25	1200	7.0	2206.66	11.3	83.370	17.534	-	-	7.64
C	dacítica	[1000,1200]	0	1673	0	2416.48	3.8	66.365	-	6.355503	9.295871	3.84
A	andesítica	[1000,1200]	0.25	1200	3.5	2423.12	9.3	72.365	19.246	-	-	7.70
B	andesítica	[1000,1200]	0.25	1200	7.0	2272.64	12.7	79.821	18.357	-	-	8.86
C	andesítica	[1000,1200]	0	1673	0	2491.58	5.2	61.307	-	7.668689	8.993692	4.56

Tabla 5. Valores calculados de los parámetros ρ_o , α , κ_T , β y los valores c_o y c_l usados para calcular los valores $\beta(T)$ en la ecuación (34a), para fundidos dacíticos y andesíticos del volcán Popocatepetl, en diferentes intervalos de temperatura. La prueba A y la prueba B representan el modelo de densidad lineal (19) y la prueba C representa el modelo de densidad no-lineal (34), con diferentes contenidos de agua, intervalos de temperatura y composiciones. σ es la desviación estándar de la muestra, como se ha definido en el pie de Figura 1.

Punto	T^*	β^*
	(K)	(1/wt%)
1	800	0.013659
2	820	0.013863
3	840	0.014066
4	860	0.014267
5	880	0.014468
6	900	0.014667
7	920	0.014864
8	940	0.015061
9	960	0.015256
10	980	0.015450
11	1000	0.015642

Tabla 6. Valores calculados del parámetro termodinámico β^* para la composición dacítica del Popocatepetl en el intervalo de [800 K, 1000 K] como una función de la temperatura T^* a $p^* = 0.25$ GPa y $w_o = 0$ wt% H_2O .

Punto i	p (GPa)	T (K)	w (wt%)	ρ_s (kg/m ³)	ρ (kg/m ³)	Residual r_i (kg/m ³)
1	0.25 (~10 km)	1000	7	2257.9	2253.6	4.3
2	0.25	1000	4	2364.3	2367.1	-2.8
3	0.25	1000	0	2522.9	2518.4	4.5
4	0.25	800	7	2311.5	2305.5	6.0
5	0.25	800	4	2405.4	2404.6	0.8
6	0.25	800	0	2543.2	2536.7	6.5
7	0.125 (~5 km)	1000	7	2234.1	2233.6	0.5
8	0.125	1000	4	2341.3	2347.0	-5.7
9	0.125	1000	0	2501.3	2498.3	3.0
10	0.125	800	7	2286.6	2285.5	1.1
11	0.125	800	4	2381.5	2384.6	-3.1
12	0.125	800	0	2521.1	2516.7	4.4
13	0 (~0 km)	1000	7	2210.7	2213.5	-2.8
14	0	1000	4	2318.6	2327.0	-8.4
15	0	1000	0	2480.0	2478.3	1.7
16	0	800	7	2262.1	2265.4	-3.3
17	0	800	4	2358.1	2364.5	-6.4
18	0	800	0	2499.5	2496.6	2.9

Tabla 7. Comparación de valores de la densidad estándar ρ_s dadas por la Ec. (10) con valores de la densidad ρ calculados con la ecuación (34a) para la dacita del Popocatepetl en el intervalo de temperaturas [800 K, 1000 K] en 18 puntos (p, T, w). La discrepancia máxima es de sólo el 0.36%. La presión p se da también en unidades de profundidad aproximada de la presión litostática equivalente.

CAPÍTULO 2. Mecanismo de crecimiento de domos propuesto para el volcán Popocatépetl

El domo del Popocatépetl es un domo compuesto, porque el mismo representa el resultado neto de aproximadamente 26 eventos efusivos. Este proceso de construcción de domos puede ser descrito como el ascenso lento y periódico de magma en un conducto de dimensiones y geometría desconocidas. Ya que el método utilizado en este estudio es independiente de la geometría del sistema de tuberías o sistema de conductos (plumbing system), para propósitos de este trabajo el *conducto volcánico* se puede visualizar como un largo sistema vertical de grietas, diques y tubos *hidráulicamente conectados* con una longitud probable en el intervalo de 6 a 10 km, como ha sido sugerido por estudios de sismología (Valdés et al., 1995; Valdés et al., 1997; Arciniega-Ceballos et al., 2003; Shapiro et al., 2000; Cruz-Atienza et al., 2001; Novelo-Casanova y Martínez-Bringas, 2005), deformación (Espíndola et al., 2004), y petrología (Schaaf et al., 2005; Witter et al., 2005). El fundido magmático que rellena el conducto volcánico, tal cual como ha sido definido previamente, es lo que se conoce como *columna magmática*, ya que está sujeta en toda su extensión a una presión hidrostática equivalente a la que tendría una columna cilíndrica vertical a la misma profundidad.

Los eventos de ascenso de magma en el interior de este conducto y el consecuente crecimiento de domo son episódicos con una tasa media de 3.5 eventos de emplazamientos y destrucción de domos por año en el periodo 1996-2003 (A. Gómez, CENAPRED. Com. Personal). Esta tasa disminuye drásticamente después del 2003. Estos episodios de movimiento lento y hacia arriba de nuevo material finalizan con una violenta explosión o secuencia de varias explosiones, que expulsa hacia el exterior fragmentos de diferentes tamaños del domo. Aun considerando velocidades de ascenso relativamente bajas, el desplazamiento hacia arriba ocurre en una escala de tiempo que es corta comparado con el tiempo entre emplazamientos, como se evidencia por la duración del tremor armónico asociado al crecimiento de domo: con frecuencia los eventos de crecimiento tardan de horas a días, mientras que los eventos de emplazamiento de domo están separados por meses.

¿Qué causa los episodios de ascenso de magma? Se intenta responder a esta pregunta proponiendo una fuerza de flotación derivada del contraste de densidades entre el magma del conducto y la roca encajonante. Esta fuerza empuja la columna de magma hacia arriba cuando el contenido de volátiles excede cierto límite, y se detienen cuando el magma ha perdido algunos de estos volátiles. Para modelar este proceso se usa una compensación isostática simple tipo Pratt en la columna magmática. Consideremos la profundidad z_c por abajo del nivel del cráter tal que

$$p_{CR}(z_c) = p_{magma}(z_c) \quad , \quad (36)$$

donde p_{CR} es la presión litostática a la profundidad z_c en la roca encajonante y p_{magma} es la presión hidrostática del fundido magmático en el interior del sistema de conductos a la misma profundidad. De modo que z_c , es el nivel de compensación isostática el cual puede estar localizado en cualquier punto de la columna magmática. Bajo una compensación

isostática de Pratt, el tirante de magma estaría controlado por el contraste de densidades entre el magma y la roca encajonante arriba de este punto.

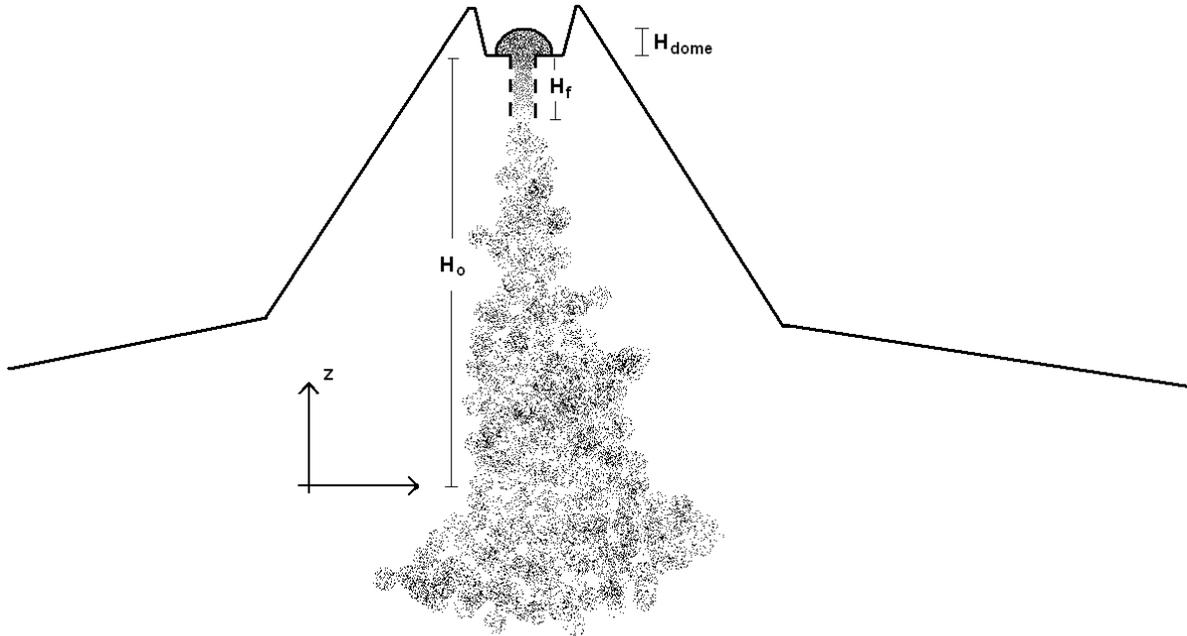


Figura 6. Diagrama esquemático de la configuración del conducto volcánico (plumbing system) utilizada en este estudio. H_o es la altura de la columna magmática en el conducto volcánico, H_{Dome} es la altura del domo por arriba del piso del cráter y H_f es la profundidad de la región donde existe un alto contenido de burbujas.

Se propone que en un volcán como el Popocatepetl, el cual tiene una sistema de conductos magmáticos profundo y una desgasificación excesiva acompañadas de erupciones efusivas consistentes en un lento crecimiento de domo con episodios de destrucción, la altura del domo por arriba del fondo del cráter debe corresponder al tirante de la columna magmática (Fig 6).

Escogiendo un sistema de coordenadas con origen en la profundidad z_c con la parte positiva del eje Z de coordenadas orientado hacia arriba y llamando H_o al nivel del piso del cráter por arriba de este punto, se seleccionan cuatro valores posibles de prueba de nivel de compensación isostática (ver Tabla 8). Pueden existir burbujas de gas exsueitas en el magma en casi cualquiera de estas cuatro profundidades de prueba. Sin embargo, se asume que los volúmenes relativos de burbujas y su contribución al balance de densidad son pequeños por abajo de un punto localizado a una profundidad H_f . Esto es equivalente a decir que el magma en la columna es monofásico en la región de $z_o=0$ a $z=H_o-H_f$. Desde la profundidad H_f hasta la superficie (i.e. en el intervalo de $z=H_o-H_f$ a $z=H_o$) se asume que el volumen de las burbujas de gas (mayormente H_2O) exceden el 50% del volumen total y el magma en esta región es considerado una mezcla bifásica (Fig 6).

CAPÍTULO 2. Mecanismo de crecimiento de domos propuesto para el volcán Popocatépetl

El valor de H_f además de la solubilidad depende de parámetros del magma tales como el coeficiente de difusión, la viscosidad y la tasa de cristalización, las cuales no conocemos con certeza. No obstante, se asume $H_f=100$ m basándose en las siguientes consideraciones.

Variables	Valores
$T_{Min}=T_f$	800 K, 1000 K
T_{Max}	1000 K, 1200 K
H_{Max}	10000 m
ρ_{CR}	2500, 2400, 2300 kg/m ³
H_o	4000, 6000, 8000, 10000 m
$H_{Min}=H_f$	100 m
g	9.81 m/s ²

Tabla 8. Valores y intervalos de las variables utilizadas en el cálculo del modelo de crecimiento de domo del Popocatépetl.

Esta profundidad es probablemente muy cercana a la profundidad de fragmentación en donde el volumen de burbujas es suficientemente grande para producir las explosiones de destrucción de domo. Este valor también es consistente con modelos de flujo de magmas en conductos que muestran que las burbujas exceden el 50% del volumen total a profundidades muy someras (e.g. Melnik y Sparks, 2005). Algunas observaciones directas efectuadas después de haber ocurrido este tipo de explosiones muestran un cráter superficial con profundidades alrededor de 40-50 m después de haber sido rellenado parcialmente con escombros de la misma explosión. Además, las explosiones de destrucción de domo del Popocatépetl han estado típicamente en un intervalo de 2 a 3 VEI, porque ellas nunca han producido grandes cantidades de material juvenil. Esto coloca al volumen del domo más el del magma del conducto involucrado en las explosiones en el orden de 10^5 - 10^6 m³, valor consistente con el valor seleccionado para H_f . Esta profundidad somera, es muy pequeña comparada con la longitud total del conducto, por lo que podemos ignorarla en este análisis y considerar solamente el balance isostático de la parte “monofásica” de la columna magmática.

2.1 Ecuación de la isostasia y solución

Describiendo la densidad de la columna magmática con (34), la condición de Pratt (36) se transforma en la ecuación de la isostasia

$$\rho_{CR}gH_o = \int_o^z \rho_r g \{1 - \alpha[T(\xi) - T_r] + \kappa_T p(\xi) - \beta[T(\xi)]w(\xi)\} d\xi \equiv I_o(z) \quad , \quad (37)$$

o bien

$$0 = \int_o^z \rho_r g \{1 - \alpha[T(\xi) - T_r] + \kappa_T p(\xi) - \beta[T(\xi)]w(\xi)\} d\xi - \rho_{CR}gH_o = I_o(z) - \rho_{CR}gH_o \equiv I(z) \quad (38)$$

CAPÍTULO 2. Mecanismo de crecimiento de domos propuesto para el volcán Popocatepetl

donde ρ_{CR} es la densidad efectiva o equivalente de la roca que rodea al conducto volcánico referida de aquí en adelante simplemente como densidad de la roca encajonante. Las distribuciones de temperatura $T(z)$, contenido de agua $w(z)$ y presión $p(z)$ están dadas respectivamente por

$$T(z) = a_o + a_1 z \quad , \quad (39)$$

$$w(z) = w_o = \text{const.} \quad \text{desde } z = 0 \text{ hasta } z = H_o - H_f, \quad (40)$$

y

$$p(z) = \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + U e^{-Rz} \quad , \quad (41)$$

siendo a_o , a_1 , w_o , M , N , R y U valores constantes. Se asume que el equilibrio isostático entre el magma en el interior del conducto y la roca encajonante se alcanza en condiciones adiabáticas y por lo tanto no existen un transporte significativo de calor entre el magma y la roca de su alrededor. Por lo tanto se tiene un perfil lineal de temperaturas donde a_o y a_1 son coeficientes constantes dados por (ver Apéndice B: Perfil de temperatura $T(z)$)

$$a_o = T_o \quad (42)$$

y

$$a_1 = \frac{T_f - T_o}{z_f - z_o} \quad . \quad (43)$$

Ambos coeficientes a_o y a_1 dependen de la temperatura T_o y profundidad H_o . Considerando $dT/dH = (T_f - T_{Maf}) / (H_{Max} - H_f)$, esta dependencia está dada por

$$T_o = T(H_o) = \left(\frac{dT}{dH} \right) (H_{Max} - H_o) + T_{Max} \quad . \quad (44)$$

De aquí, que para cada una de las cuatro profundidades indicadas en la Tabla 8, tendremos una distribución de temperaturas particular.

También se asume que el magma no está saturado y tiene una concentración de volátiles constante $w_o \leq w_s$, donde w_s es el valor máximo de H₂O disuelta en algún punto de la columna magmática (ver Apéndice B: Perfil de contenido de agua $w(z)$). La Figura 7 muestra la distribución vertical de saturación de agua w_s , como función de la presión de exsolución, obtenidos a partir del programa VolatileCalc1.1 (Newman y Lowenstern, 2002). Las curvas de saturación

$$\begin{aligned} w_{s1}(P) &= 0.193 P^{1/2.166} & T \in [800K, 1000K] \\ w_{s2}(P) &= 0.113 P^{1/1.933} & T \in [1000K, 1200K] \end{aligned} \quad (45)$$

ajustan los resultados obtenidos de VolatileCalc1.1 bastante bien ($r=0.999$). P es la presión de exsolución en bar.

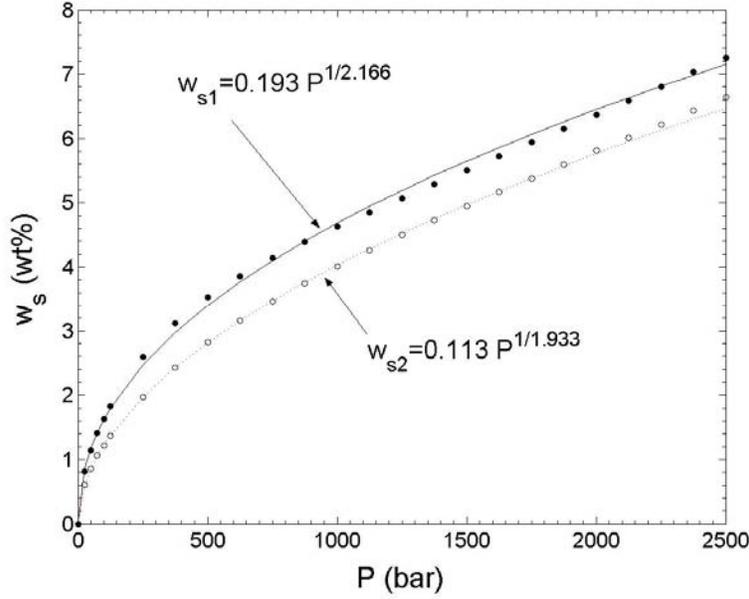


Figura 7. Curvas de saturación del agua w_s como una función de la presión de exsolución P para un magma riolítico. Los círculos son 25 puntos (P_k, w_{sk}) calculados con el programa VolatileCalc 1.1 (Newman y Lowenstern, 2002), y las curvas representan la aproximación en términos de una ley de potencia. La curva superior es para $T \in [800, 1000]$ K y la curva inferior es para $T \in [1000, 1200]$ K.

El perfil de presión (41) a lo largo de la columna magmática se obtuvo a partir de la ecuación de la hidrostática (ver Apéndice B: Perfil de presión $p(z)$)

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_r g \{ 1 - \alpha [T(z) - T_r] + \kappa_T p(z) - \beta [T(z)] w(z) \} \quad , \quad (46)$$

Considerando que los parámetros M , N , R y U de la ecuación (41) se definen como

$$\begin{aligned} M &= -\rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) \\ N &= -\rho_r g (d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) \\ R &= \rho_r g \kappa_T \\ U &= p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \end{aligned} \quad , \quad (47)$$

y

$$p_o = \rho_{CR} g H_o \quad (48)$$

$$d_o = 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_1 a_o + c_o) w_o \quad (49)$$

$$d_1 = -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o. \quad (50)$$

Insertando (39), (40) y (41) en la Ec. (38) e integrando, se obtiene

$$I(z) = h_o + e_o z + g_o e^{-Rz} = 0 \quad (51)$$

donde

$$\begin{aligned} e_o &= -\frac{N}{R} \\ g_o &= -U \\ h_o &= U - \rho_{CR} g H_o \end{aligned} \quad (52)$$

Calculando el valor numérico de R se tiene que $R \sim 10^{-6}$ y $|Rz| \sim 10^{-3} \ll 1$, de modo que el término exponencial e^{-Rz} se puede aproximar por el polinomio de segundo orden $1 - Rz + (Rz)^2 / 2$. Finalmente, tomando en consideración que $h_o + g_o = -\rho_{CR} g H_o$, $e_o - g_o R = \rho_r g d_o$ y $g_o R^2 / 2 = \rho_r g d_1 / 2$ la ecuación (51) se transforma en

$$I(z) = \left(\frac{\rho_r g d_1}{2} \right) z^2 + (\rho_r g d_o) z - \rho_{CR} g H_o = 0, \quad (53)$$

siendo

$$z_r(w_o) = -\frac{d_o(w_o)}{d_1(w_o)} - \sqrt{\left[\frac{d_o(w_o)}{d_1(w_o)} \right]^2 + 2 \frac{\rho_{CR} H_o}{\rho_r d_1(w_o)}}, \quad (54)$$

una solución de $I(z)$ (raíz real del polinomio cuadrático). Es decir hemos encontrado z_r , la altura de la columna magmática necesaria para preservar el equilibrio isostático. La expresión (54) deberá ser utilizada con cuidado porque es bastante sensible a los valores de d_o y d_1 particularmente para contenidos altos de H_2O . Una expresión más estable para calcular z_r se obtiene al considerar que la ecuación (53) es casi lineal en el intervalo de interés (aunque estrictamente no lo es). Aplicando el método de Newton, con sólo una iteración

$$z_r = z_* - \frac{I(z_*)}{I'(z_*)}, \quad (55)$$

y simplificando resulta

$$z_r(w_o) = \frac{\left[d_1(w_o)/2 \right] z_*^2 + \left(\rho_{CR}/\rho_r \right) H_o}{d_1(w_o) z_* + d_o(w_o)}. \quad (56)$$

2.2 La altura máxima de un domo en crecimiento

Ahora podemos usar la ecuación previa para obtener una estimación de la altura que puede alcanzar el domo, ignorando los efectos que tiene su esparcimiento lateral. Escogiendo $z_* = z_r(0 \text{ wt\% H}_2\text{O})$ en (54) como punto inicial del método iterativo de Newton, se puede estimar la altura del domo H_{Dome} por arriba del piso del cráter como función del contenido de H_2O a partir de

$$H_{Dome}(w_o) = \frac{\left[d_1(w_o)/2 \right] z_*^2 + \left(\rho_{CR}/\rho_r \right) H_o}{d_1(w_o) z_* + d_o(w_o)} - H_o. \quad (57)$$

Recíprocamente se puede estimar el contenido de agua w_o característico del magma en el conducto a partir de la altura del domo H_{Dome} (ver Apéndice B: Máxima altura del domo H_{Dome} y contenido de agua w_o). Insertando (49) y (50) en (57) y despejando w_o se obtiene

$$w_o(H_{Dome}) = \frac{1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T P_o}{\left\{ c_1 a_1 \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right] \right.} \\ \left. c_1 a_o + c_o + \frac{\left(\rho_{CR}/\rho_r \right) H_o + \alpha a_1 \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]}{\left(H_{Dome} + H_o \right) - \rho_r g \kappa_T \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]} \right\}} \\ \frac{\left(c_1 a_o + c_o \right) \left(H_{Dome} + H_o \right) - \rho_r g \kappa_T \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]}{\left(H_{Dome} + H_o \right) - \rho_r g \kappa_T \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]} + c_1 a_1 \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]} \quad (58)$$

Como ejemplo del uso de las ecuaciones anteriores, introducimos algunos de los valores reportados de alturas de domos observados en el Popocatepetl. El domo más alto alcanzó

CAPÍTULO 2. Mecanismo de crecimiento de domos propuesto para el volcán Popocatepetl

Densidad de la roca encajonante	Contenido de agua	Presión de exsolución	Raíz	Profundidad de exsolución
ρ_{CR} (kg/m ³)	w_o (wt%)	P (bar)	r (m)	$H_{ex}=6000\text{ m} - r$ (m)
2500	2.21	197	5352	648
2490	2.49	254	5108	892
2480	2.77	321	4820	1180
2470	3.05	395	4500	1500
2460	3.33	478	4139	1861
2450	3.62	572	3729	2271
2400	5.02	1162	1097	4903
2350	6.43	1986	-2701	8701
2300	7.83	3043	-7763	13763

Tabla 9. Presiones y profundidades de exsolución requeridas para que crezca un domo dacítico del Popocatepetl hasta una altura de 180 m, asumiendo una profundidad de compensación de 6000 m, para diferentes valores de contenido de agua y densidad de la roca encajonante. La raíz r , en la cuarta columna, es solución algebraica de la ecuación (41) aproximada por un polinomio de Taylor de segundo orden.

una altura aproximada de 180 m por arriba del nivel del punto más bajo del fondo del cráter medido previamente a 1994 y que estaba ubicado aproximadamente a 5000 m.s.n.m. (Angel Gómez, CENAPRED, Com. Pers., ver Fig. 8 y 9). En la Fig. 10 se muestran dos cortes de este crecimiento: en (a) la altura que tenía el día 4 de noviembre del 2000 es de ~60 m, mientras que (b) testifica que para el día 18 de diciembre del 2000 el domo alcanzó una altura de ~180 m.

Adicionalmente, existe la evidencia de que la profundidad en la cual las burbujas tienen una fuerte influencia en el comportamiento del magma están en el intervalo de 800-1500 m por debajo de la cima (Chouet et al., 2005; Arciniega-Ceballos et al., 2008).

Asumiendo un intervalo de densidad de la roca encajonante de $\rho_{CR}=2300\text{-}2500\text{ kg/m}^3$, $H_o=6000\text{ m}$ y una distribución de temperatura T en [800 K, 1000 K], se tiene que para $\rho_{CR}=2500\text{ kg/m}^3$ únicamente se necesita 2.21 wt% de H₂O disuelta en el fundido para que

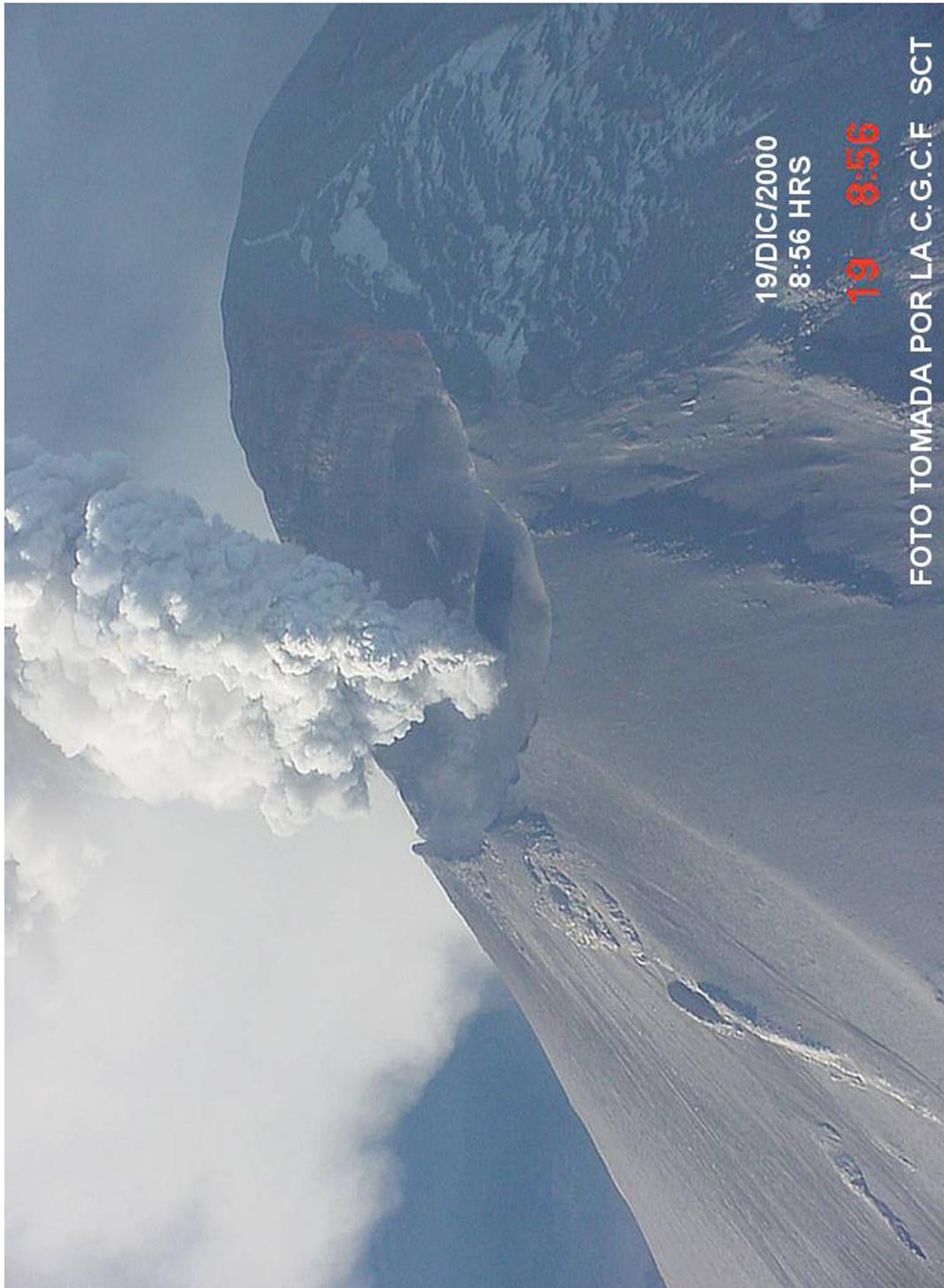


Figura 8. Fotografía del domo dacítico del Popocatepetl tomada el día 19 de diciembre del 2000 (vista lateral del cráter) y que alcanzó una altura máxima de 180 m sobre el nivel del piso del cráter (Foto proporcionada por Angel Gómez, CENAPRED).

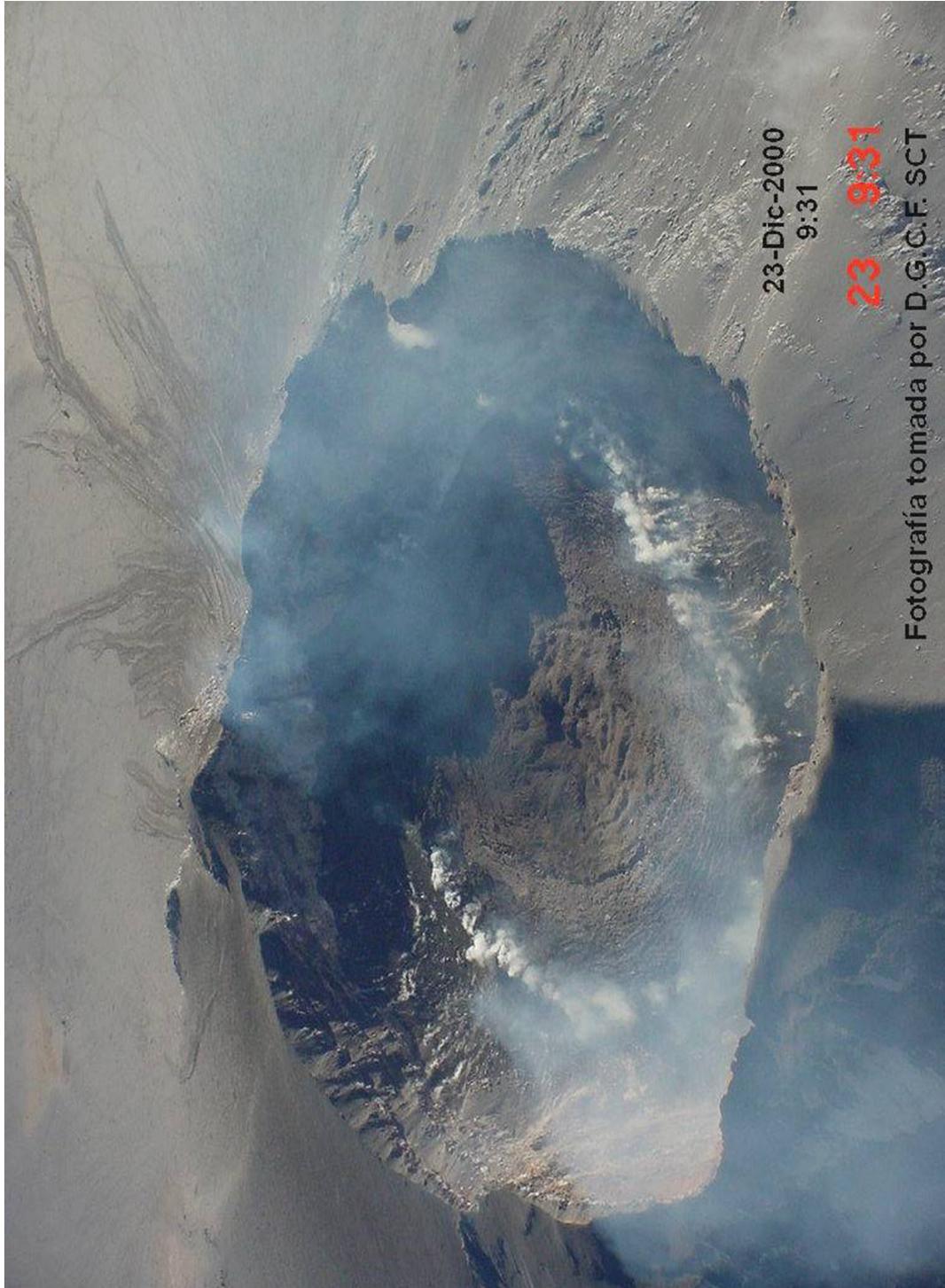
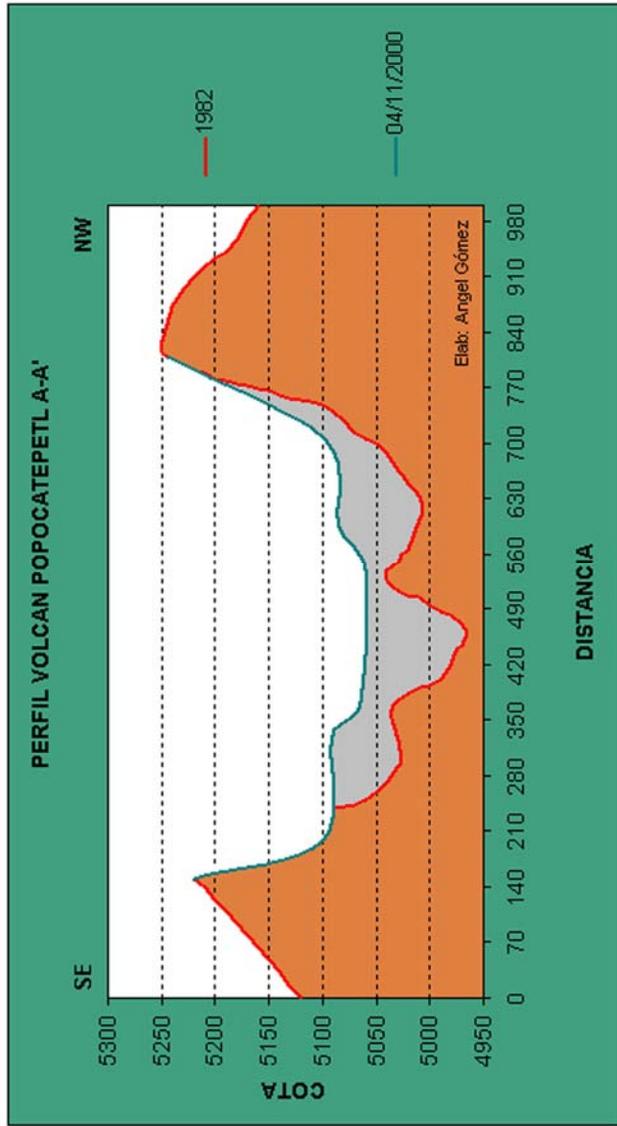
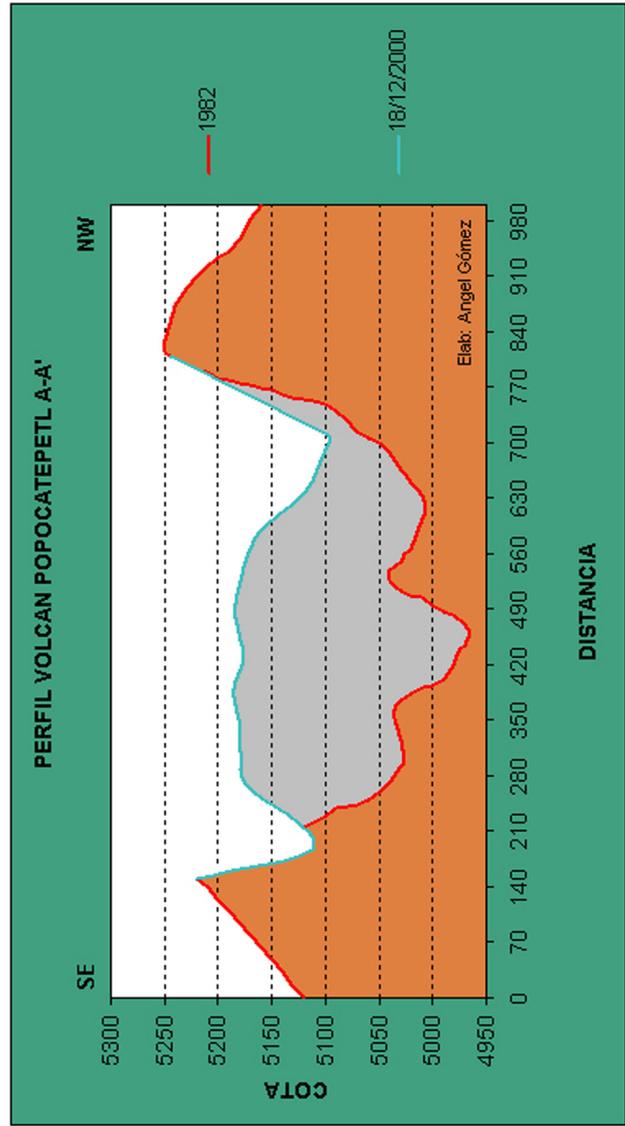


Figura 9. Fotografía del domo dacítico del Popocatepetl tomada el día 23 de diciembre del 2000 (vista interna del cráter) y que alcanzó una altura máxima de 180 m sobre el nivel del piso del cráter (Foto proporcionada por Angel Gómez, CENAPRED).



a)



b)

Figura 10. Dos cortes del domo del Popocatepetl que creció a fines del 2000 y que alcanzó una altura máxima de 180 m sobre el nivel del piso del cráter (imágenes proporcionadas por Angel Gómez, CENAPRED).

a) 4 de noviembre de 2000

b) 18 de diciembre de 2000

el domo alcance una altura de 180 m sobre el nivel del cráter. De forma similar, de la Ec. (45) obtenemos para este ejemplo particular una presión de exsolución

$$P(2.21 \text{ wt\% } H_2O) = \left[\frac{2.21 \text{ wt\%}}{0.193 \text{ wt\%}/(\text{bar})^{1/2.166}} \right]^{2.166} \cong 197 \text{ bar} \quad (59)$$

La Tabla 9 muestra diferentes combinaciones de densidad de roca encajonante, contenido de agua y profundidad de exsolución resultante para tener un domo de 180 m de altura, calculados a partir de la Ecs. (41), (45) y (58). Para hacer esto se toma el perfil de presiones dado por la Ec. (41) como la presión de exsolución. Aproximando el término trascendente por un polinomio de Taylor de 2°-grado se encuentran raíces analíticas. En esta modelación se asume una profundidad de compensación $H_o=6000$ m, basada en la información de que es a esta profundidad donde los mecanismos focales de los sismos volcano-tectónicos cambian de ser predominantemente inversos a predominantemente normales (Carlos Valdés Com. Pers.; Arámbula, 2007).

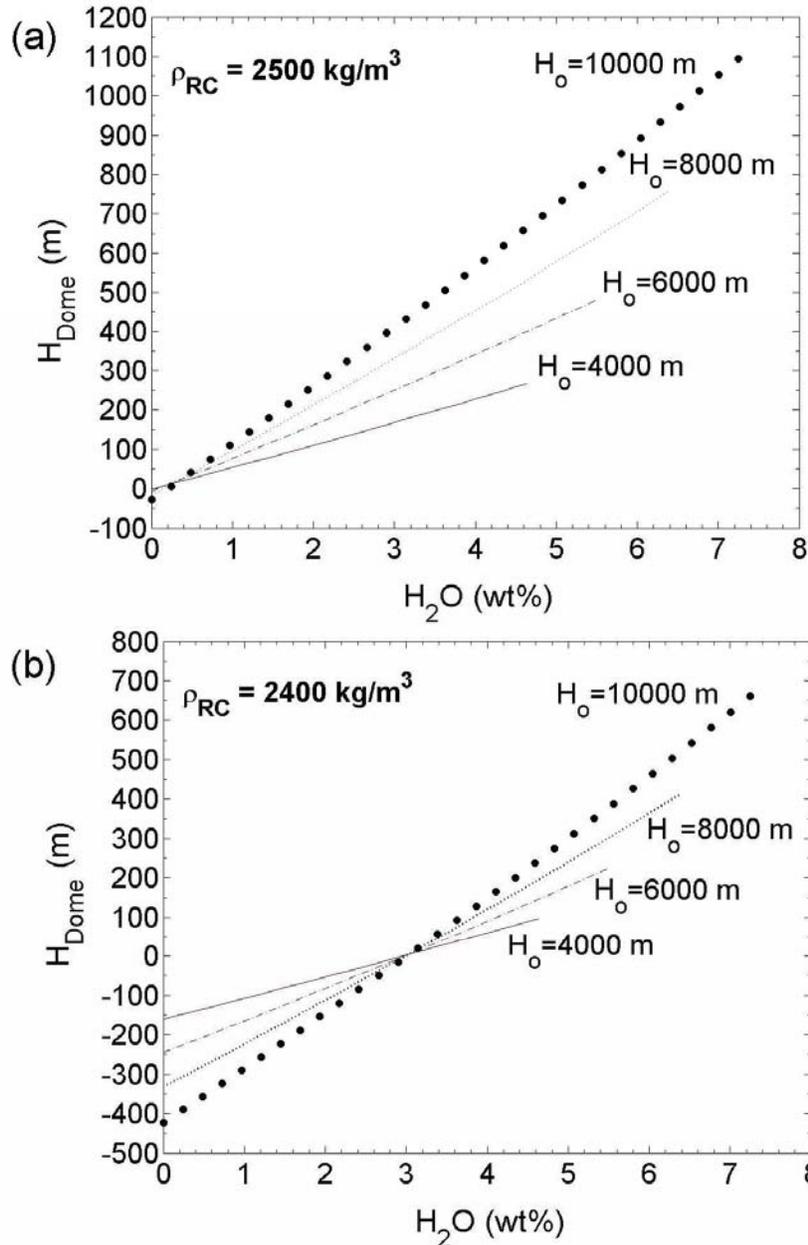
Una inspección de la Tabla 9 (ver Apéndice B: Profundidad de exsolución H_{ex}) muestra que para $H_o=6000$ m, el intervalo de la densidad de la roca encajonante ρ_{CR} que mejor consistencia tiene con las fuentes sísmicas-LP es 2470-2490 kg/m^3 y el intervalo de contenido de agua w_o es de 2.49-3.05 wt%.

Por último, es importante mencionar que con respecto a la altura del domo, durante el periodo eruptivo reciente, la base del cráter del volcán Popocatepetl ha sufrido cambios de nivel producidos por el emplazamiento y destrucción de los domos, provocando que en ciertas temporadas exista un balance positivo del volumen de material acumulado (Schaaf et al., 2005; Macías y Siebe, 2005), y en otras, cuando disminuye la tasa de producción de magma y se mantiene la actividad explosiva que desaloja el material acumulado en el cráter, se produzca un balance negativo que tiende a reducir las cotas. A partir de 2003 esta situación predomina y la tasa media de destrucción tiende a exceder la tasa media de crecimiento (Angel Gómez, Com. Pers.).

Sin embargo esto no afecta los resultados de este modelo que se desarrolla en su mayor parte en el interior del conducto volcánico y dado que los cambios en el nivel del fondo del cráter son pequeños comparados con la extensión vertical del conducto volcánico.

CAPÍTULO 3. Resultados

La fuerza de flotación de una columna magmática en un conducto volcánico causa la extrusión del domo, el cual resulta de una combinación de varios factores y propiedades materiales que no se conocen con precisión y que no pueden medirse en forma directa.



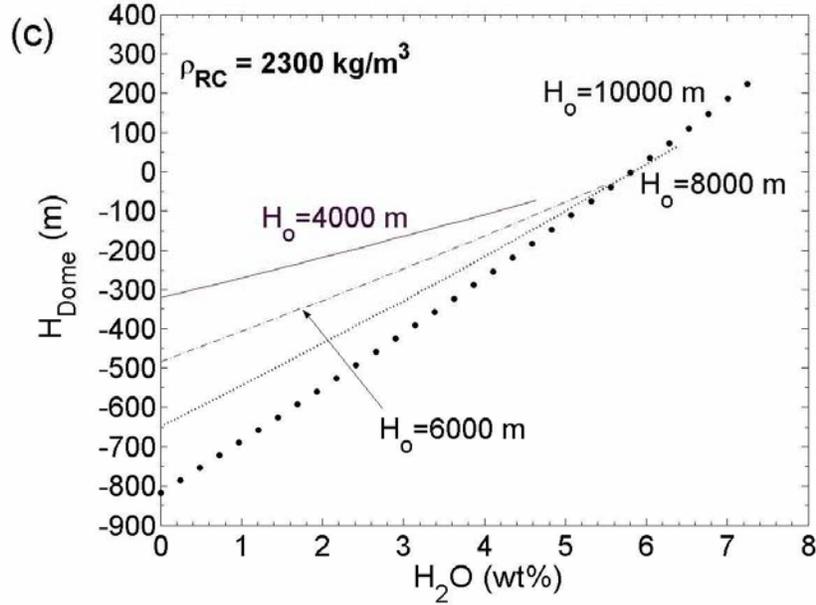


Figura 11. Altura de los domos como función del contenido de agua H_2O en una columna de magma dacítico (Ec. (57)), en el intervalo de temperaturas $T \in [800 \text{ K}, 1000 \text{ K}]$, y diferentes densidades de roca encajonante ρ_{RC} y profundidades de compensación isostática H_o . Las curvas terminan en el valor de saturación $w_{sl}(H_o)$.

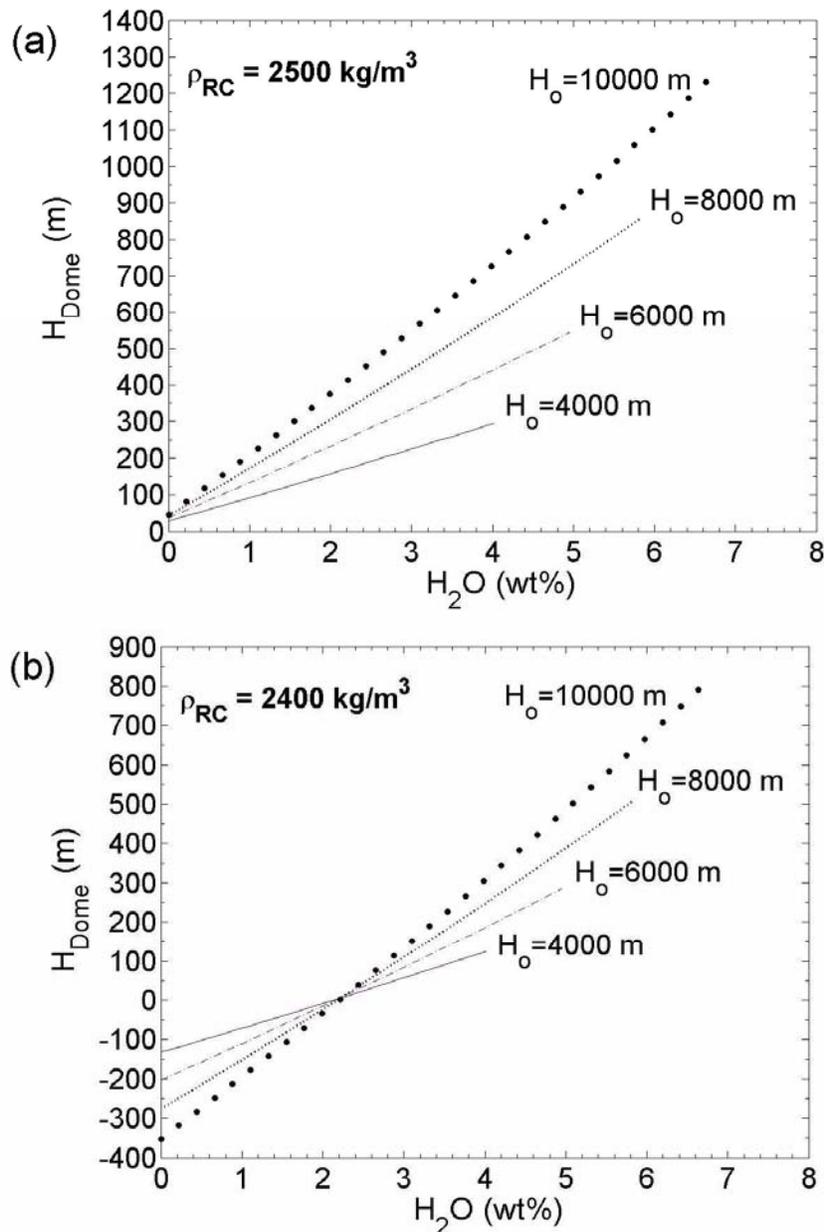
En este modelo, el principal factor que controla las alturas y volúmenes del domo es la variable del contraste de densidad entre la roca encajonante y la columna magmática. La primera depende de la litología de las rocas que constituyen el edificio volcánico, y la última depende de la composición, el contenido de volátiles, temperatura, presión y la longitud de la columna magmática en el conducto volcánico.

Las rocas adensíticas-dacíticas que forman el edificio volcánico del Popocatepetl probablemente tienen una densidad equivalente ubicada en el intervalo de 2400 a 2500 kg/m^3 . La densidad de la columna magmática en el conducto puede ser calculado integrando la EOS propuesta aquí con relativa facilidad. Para obtener una imagen más amplia de ambos conjuntos de densidad en la Fig. 11 se muestra una serie de gráficas de H_{Dome} vs. H_2O para diferentes densidades de roca encajonante y probables longitudes de columna magmática H_o , para el intervalo de temperaturas [800K, 1000K].

En la Fig. 11a, para una densidad de roca encajonante $\rho_{RC} = 2500 \text{ kg/m}^3$ y un magma anhídrido ($w_o \sim 0 \text{ wt\%}$), la columna permanece en equilibrio isostático, sin producir un crecimiento de domo ($H_{Dome} = 0$). En contraste, una cantidad de cerca de 1.5 wt% de agua disuelta es suficiente para elevar una columna de 10 km de longitud vertical cerca de 180 m sobre el nivel más bajo del cráter. Y cerca de 2.5 wt% produciría el mismo efecto en una columna magmática de 6 km de longitud.

Una densidad de roca encajonante menor requeriría de una densidad de columna magmática más baja para generar una fuerza de flotación. La figura 11b muestra las alturas de domos máximas esperadas para diferentes contenidos de agua y longitudes verticales de columna

con $\rho_{RC} = 2400 \text{ kg/m}^3$: Para mantener el equilibrio isostático se necesita una cantidad mínima de 3 wt% de agua disuelta para diferentes longitudes del conducto. Por debajo de este valor puede aparecer una fuerza de flotación negativa. Cuando no existe un domo, suponemos que hay una cantidad de agua en el interior de la columna magmática encargada de mantener el equilibrio hidrostático, que de aquí en adelante llamaremos *agua residual* y denotaremos como w_{res} . Esta gráfica muestra también que el conducto debe de tener una longitud mayor a 4000 m para que sea capaz de producir un domo de 180 metros de alto. E incluso densidad más bajas de la roca encajonante tales como $\rho_{RC} = 2300 \text{ kg/m}^3$ impedirían la producción de grandes domos, excepto en los conductos más largo como se muestra en la Fig. 11c.



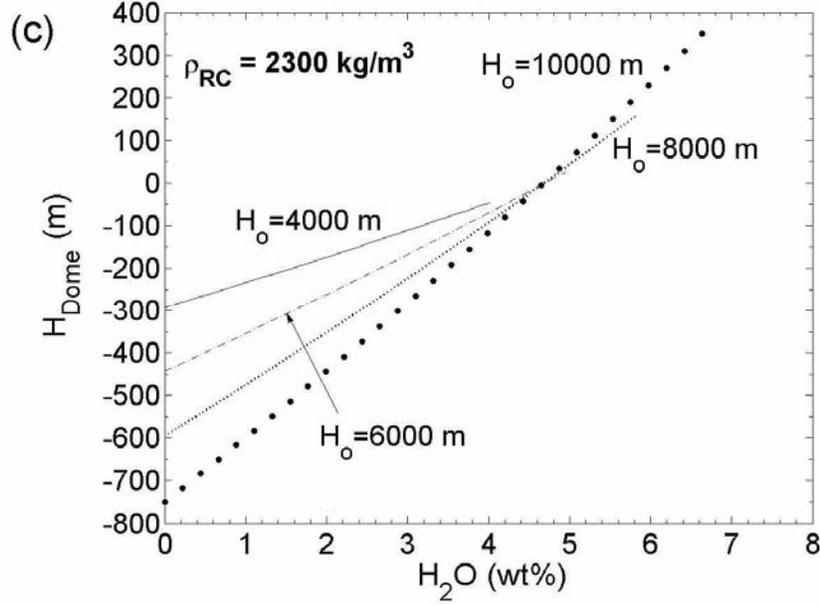


Figura 12. Altura de los domos como función del contenido de agua H_2O en una columna de magma dacítico (Ec. (57)), en el intervalo de temperaturas $T \in [1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]$, y diferentes densidades de roca encajonante ρ_{RC} y profundidades de compensación isostática H_o . Las curvas terminan en el valor de saturación $w_{s2}(H_o)$.

Para explorar los efectos de la temperatura de la columna magmática dacítica en la altura de los domos, a continuación se analiza la flotación usando la ecuación (20) en el intervalo de $[1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]$ (ver Tabla 5), con

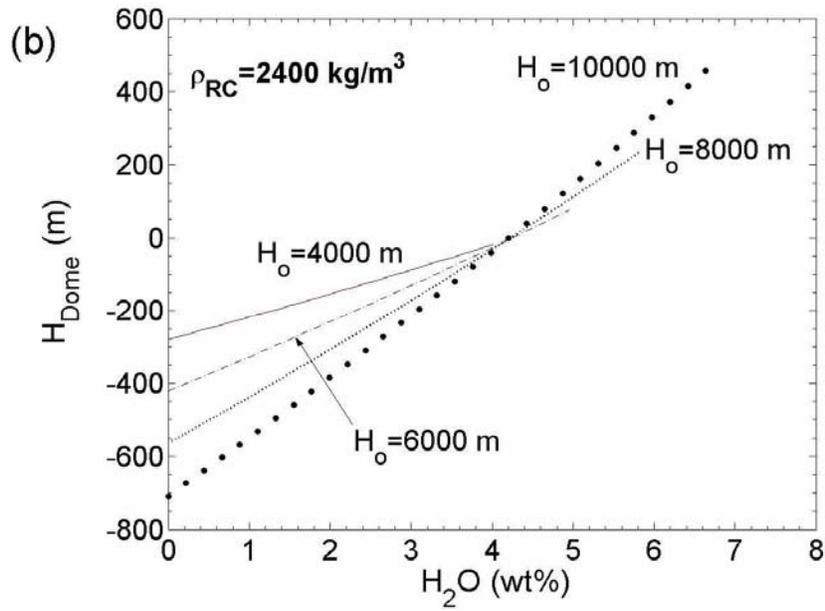
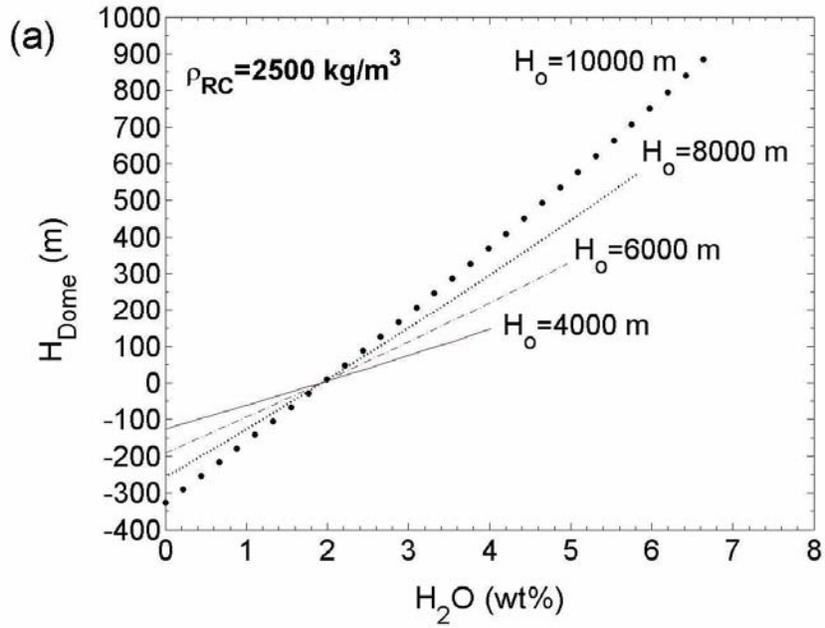
$$\beta(T) = 6.355503 \times 10^{-3} + (9.295871 \times 10^{-6})T, \quad T \in [1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]. \quad (60)$$

La Fig. 12 muestra el incremento de la flotación de un magma más caliente. Por ejemplo, una densidad de roca encajonante $\rho_{RC} = 2400 \text{ kg/m}^3$ requiere solamente $w_{res} \sim 2.2 \text{ wt\%}$ de H_2O en el magma para generar flotación.

Para explorar los efectos de la composición de la columna magmática en la altura de los domos, a continuación se analiza la flotación de un magma andesítico usando la ecuación (20) en el intervalo de $[1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]$ (ver Tabla 5), con

$$\beta(T) = 7.668689 \times 10^{-3} + (8.993692 \times 10^{-6})T, \quad T \in [1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]. \quad (61)$$

La figura 13 muestra la disminución de la flotación de un magma más andesítico. Por ejemplo, aún para una densidad de la roca encajonante relativamente alta $\rho_{RC} = 2500 \text{ kg/m}^3$ se requiere $w_{res} \sim 2.0 \text{ wt\%}$ de H_2O en el magma para generar una flotación neutra. De aquí si un volcán andesítico presenta un proceso de crecimiento de domo necesitará más volátiles que un volcán dacítico.



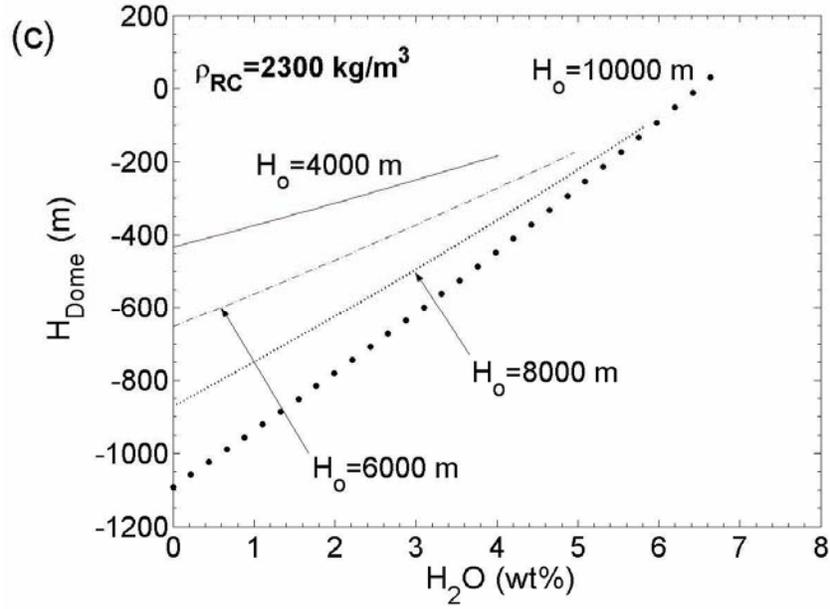


Figura 13. Altura de los domos como función del contenido de agua H_2O en una columna de magma andesítico (Ec. (57)), en el intervalo de temperaturas $T \in [1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]$, y diferentes densidades de roca encajonante ρ_{CR} y profundidades de compensación isostática H_o . Las curvas terminan en el valor de saturación $w_{s2}(H_o)$.

Para propósitos prácticos y un cálculo aproximado rápido, a continuación se presenta una expresión más simple de las ecuaciones (57) y (58). Para lograr este objetivo se observa que el cambio de la densidad debido a la temperatura y la presión es mucho más pequeño que el cambio de la densidad debido al contenido de H_2O . Por ello se hace la siguiente aproximación

$$T(z) = T_m = \frac{T_o + T_f}{2} \quad (62)$$

$$p(z) = p_m = \frac{p_o + p_f}{2} \quad (63)$$

$$\beta(T) = c_1 T + c_o = c_1 T_m + c_o \quad (64)$$

$$w(z) = w_o \quad , \quad (65)$$

donde

$$p_f = \rho_{CR} g H_f \quad (66)$$

y T_m , p_m son constantes. Por lo tanto, la densidad en la Ec. (34) también es constante y la expresión (37) es más fácil de integrar obteniendo la siguiente aproximación para H_{Dome}

$$H_{Dome}(w_o) = \frac{\left(\frac{\rho_{RC}}{\rho_r}\right)H_o}{1 - \alpha(T_m - T_r) + \kappa_T p_m - (c_1 T_m + c_o)w_o} - H_o \quad (67)$$

De aquí se puede obtener inmediatamente w_o como función de H_{Dome}

$$w_o(H_{Dome}) = \frac{1}{(c_1 T_m + c_o)} \left[1 - \alpha(T_m - T_r) + \kappa_T p_m - \frac{\left(\frac{\rho_{RC}}{\rho_r}\right)H_o}{H_{Dome} + H_o} \right] \quad (68)$$

Tomando en consideración una distribución de temperatura T en [800 K, 1000 K] la altura del domo H_{Dome} calculada con (67) tiene una diferencia de más de 1 m (alcanzando un máximo de 14 metros para un $H_o=10000$ m y 7 wt% de H₂O) respecto al valor calculado con la ecuación (57) en el intervalo de $6000 \text{ m} < H_o \leq 10000 \text{ m}$ para altos contenidos de H₂O. Por lo tanto esta aproximación es buena si $6000 \text{ m} < H_o \leq 10000 \text{ m}$ para un bajo contenido de agua (<3.0 wt% H₂O) o bien para $4000 \text{ m} \leq H_o \leq 6000 \text{ m}$ con cualquier contenido de H₂O en el intervalo de [0, 7] wt% H₂O.

De forma similar para $H_{Dome}=180$ m, el valor de w_o calculado con la expresión (68) difiere cerca de 0.009 wt% del valor calculado con (58) para $4000 \text{ m} < H_o \leq 10000 \text{ m}$.

CAPÍTULO 4. Conclusiones

La actividad de formación de domo de volcanes con altas emisiones de gas, como el Popocatepetl, puede ser explicada en términos de procesos que involucran la flotación de la columna magmática en el conducto volcánico producida principalmente por el efecto combinado del contenido de volátiles disueltos y su temperatura. Esta combinación puede producir un contraste de densidad con la roca encajonante capaz de generar una flotación neutral, positiva o negativa. La altura de la columna resulta ser muy sensible a pequeños cambios en el contenido de H₂O disuelta, el volátil más abundante en un fundido volcánico. En un grado menor es sensible también a su distribución de temperaturas.

La condición de equilibrio isostático de una columna magmática puede ser calculada con relativa facilidad usando una ecuación de estado simplificada para la densidad de magmas silíceos. La integración de una EOS simplificada para la densidad propuesta en este trabajo proporciona resultados satisfactorios que pueden contribuir al entendimiento del proceso de crecimiento y destrucción de domos volcánicos. La altura de los domos y la profundidad de la zona de sobre-saturación de volátiles resultan de concentraciones de volátiles y valores de temperatura muy razonables para un amplio intervalo de posible longitudes del conducto volcánico. En efecto, para los conductos más largos (i.e. los reservorios de magma más profundos) aún concentraciones modestas de H₂O pueden producir una flotación significativa. La altura máxima observada de los domos puede de este modo proporcionar una estimación directa del contenido de volátiles en el conducto, y de allí, el potencial de que pueda ocurrir una explosión de destrucción de domo más violenta.

Una desgasificación intensa de la columna magmática puede también producir un incremento en la densidad, deteniendo el crecimiento de domo, e incluso revirtiéndolo como algunas veces ha sido observado en los domos del Popocatepetl en la forma de depresiones o colapsos de la superficie superior del domo. El problema del transporte del gas involucra consideraciones adicionales relacionadas con la convección del magma en el conducto volcánico que están más allá de los objetivos del presente estudio. La posibilidad de una convección requiere un análisis de estabilidad hidrodinámica, pero primero se requiere desarrollar una ecuación de estado para la viscosidad.

Los resultados y conclusiones presentados en esta tesis han sido publicados en el Journal of Volcanology and Geothermal Research 171 (3-4): 287-300, doi:10.1016/j.jvolgeores.2007.12.005, artículo que se incluye en este trabajo como Anexo 1.

Bibliografía

Arámbula, R., 2007. Estado de esfuerzos en el volcán Popocatépetl obtenidos con mecanismos focales, en el periodo 1996 a 2003. MSc thesis, UNAM, Mexico 125 pp.

Arciniega-Ceballos A., Chouet B., Dawson P., Asch G. 2008. Broadband seismic measurements of degassing activity associated with lava effusion at Popocatépetl Volcano, Mexico. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 170, 12-23.

Atlas, Z.D., Dixon, J.E., Sen, G., Finny, M., Martin, Del Pozzo, A.L., 2006. Melt inclusions from Volcán Popocatépetl and Volcán de Colima, Mexico: Melt evolution due to vapor-saturated crystallization during ascent. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 153, 221-240.

Bagdassarov, N.S., Fradkov, A.S., 1993. Evolution of double diffusion convection in a felsic magma chamber. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 54, 291-308.

Boudal, C., Robin, C., 1988. Relations entre dynamismes eruptifs et réalimentations magmatiques d'origine profonde au Popocatépetl. *Can. J. Earth Sci.* 25, 955-971.

Bouhifd, M.A., Whittington, A., Richet, P., 2001. Partial molar volume of water in phonolitic glasses and liquids. *Contrib. Mineral. Petrol.* 142, 235-243.

Burnham, C.W., Davis, N.F., 1971. The role of H₂O in silicate melts. I. P-V-T relations in the system NaAlSi₃O₈-H₂O to 10 kilobars and 1000°C. *Am. J. Sci.* 270, 54-79.

Burnham, C.W., Davis, N.F., 1974. The role of H₂O in silicate melts. II. Thermodynamic and phase relations in the system NaAlSi₃O₈-H₂O to 10 kilobars, 700 to 1000°C. *Am. J. Sci.* 274, 902-940.

BIBLIOGRAFÍA

Busse F.H., 1989. Fundamental of thermal convection. En: *Mantle Convection*, editado por W.R. Peltier. Gordon and Breach Science Publishers S.A., New York, USA, 23-95.

Chouet, B., Dawson, P., Arciniega-Ceballos, A., 2005. Source mechanism of Vulcanian degassing at Popocatépetl volcano, Mexico, determined from waveform inversions of very long period signals. *J. Geophys. Res.* 110, B07301. doi:1029/2004JB003524.

Cruz-Atienza, V.M., Pacheco, J.F., Singh, S.K., Shapiro, N.M., Valdés, C., Iglesias, A., 2001. Size of Popocatépetl volcano eruptions (1997-2001) from waveform inversion. *Geophys. Res. Lett.* 28, 4027-4030.

De la Cruz-Reyna, S., Siebe, C., 1997. The giant Popocatépetl stirs. *Nature*, 388 (6639), 227.

Delgado-Granados, H., Cárdenas-González, L., and Piedad-Sánchez, N., 2001. Sulfur dioxide emissions from Popocatépetl volcano (Mexico): Case study of a high emission rate, passively degassing eruptive volcano. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 108, 107-120.

Dobran F (2001). *Volcanic processes: mechanisms in material transport*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 590 pp.

Espíndola, J.M., Godinez, M.L., Espíndola, V.H., 2004. Models of ground deformation and eruption magnitude from a deep source at Popocatépetl volcano, Central Mexico. *Natural Hazards* 31, 191-207.

Garland G.D., 1965. *The Earth's shape and gravity*. Pergamon Press, Oxford. 183 pp.

Heiskanen, W.A., Vening-Meinesz, F.A., 1958. *The earth and its gravity field*. Mc Graw-Hill, New York, 124-130.

BIBLIOGRAFÍA

Jarvis, G.T., Peltier, W.R., 1989. Convection models and geophysical observations. En: *Mantle Convection*, editado por W.R. Peltier. Gordon and Breach Science Publishers S.A., New York, USA, 479-593.

Kazahaya, K., Shinihara, H., Saito, G., 1994. Excessive degassing of Izu-Oshima volcano: magma convection in a conduit. *Bull. Volcanol.* 56, 207-216.

Kress, V.C., Carmichael, I.S.E., 1991. The compressibility of silicate liquids containing Fe_2O_3 and the effect of composition temperature, oxygen fugacity and pressure on their redox states. *Contrib Mineral Petrol* 108:82-92.

Lange, R.A., 1994. The effect of H_2O , CO_2 and F on the density and viscosity of silicate melts. In: Carrol, M.R. and Holloway, J.R. (Eds.), *Volatiles in Magmas*. *Rev. Mineral.* 30, 331-369.

Lange, R.A., 1997. A revised model for the density and thermal expansivity of K_2O - Na_2O - CaO - MgO - Al_2O_3 - SiO_2 liquids from 700 to 1900 K: Extension to crustal magmatic temperatures. *Contrib. Mineral. Petrol.* 130, 1-11.

Lange, R.A., 2002. Comment on: Supercooled diopside melt: confirmation of temperature-dependent expansivity using container-based dilatometry by J. Gottsmann and D.B. Dingwell. *Contrib. Mineral. Petrol.* 142, 753 –758.

Lange, R.A., Carmichael, I.S.E., 1987. Densities of Na_2O - K_2O - MgO - FeO - Fe_2O_3 - Al_3O_3 - TiO_2 - SiO_2 liquids: Measurements and derived molar properties. *Geochim. Cosmochim. Acta* 51: 2931-2946.

Lange, R.A., Carmichael, I.S.E., 1990. Thermodynamic properties of silicate liquids with emphasis on density, thermal expansion and compressibility. In: Nicholls, J. and Russell, J.K. (Eds.), *Modern Methods of Igneous Petrology*. *Rev. Mineral.* 24:25-64.

BIBLIOGRAFÍA

Macías, J.L., Siebe, C., 2005. Popocatepetl's crater filled to the brim: significance for hazard evaluation. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 141, 327-330.

Melnik, O., Sparks, R.S.J., 2005. Controls on conduit magma flow dynamics during lava dome building eruptions. *J. Geophys. Res.* 110, B02209, doi:10.1029/2004JB003183.

Newman, S., Lowenstern, J.B., 2002. VolatileCalc: a silicate melt-H₂O-CO₂ solution model written in Visual Basic for excel. *Computers & Geosciences* 28, 597-604.

Novelo-Casanova, D.A., Martíenz-Bringas, A., 2005. A seismic attenuation zone below Popocatepetl volcano inferred from coda waves of local earthquakes. *Geofísica Internacional* 44(2), 177-186

Ochs III, F.A., Lange, R.A., 1997. The partial molar volume, thermal expansivity, and compressibility of H₂O in AnAlSi₃O₈ liquid: New measurements and a internally consistent model. *Contrib. Mineral. Petrol.* 129, 155-165.

Ochs III, F.A., Lange, R.A., 1999. The density of hydrous magmatic liquids. *Science* 283, 1314-1317.

Persikov, E.S., 1991. The viscosity of magmatic liquid: experiment, generalized patterns. A model for calculation and prediction. Applications. In: Perchuk, L. and Kushiro, I. (Eds.), *Physical Chemistry of magmas*. New York, Springer, Vol 9, 1-40.

Richet, P., Whittington, A., Holtz, F.E., Behrens, H., Ohlhorst, S., Wilke, M., 2000. Water and the density of silicate glasses. *Contrib. Mineral. Petrol.* 138, 337-347.

Robin, C., 1984. Le volcan Popocatepetl (Mexique): Structure, evolution petrologique, et risques. *Bull. Volcanol.* 47, 1-23.

BIBLIOGRAFÍA

Robin, C., Boudal, C., 1987. A giant Bezymianny-type event at the beginning of modern Popocatepetl. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 31, 115-130.

Sargent-Welch, 1980. Periodic table of elements. Sargent-Welch Scientific Company, Illinois, USA.

Schaaf, P., Stimac, J., Siebe, C., Macías, J.L., 2005. Geochemical evidence from Mantle Origin and Crustal Processes in Volcanic rocks from Popocatépetl and Surrounding Monogenetic Volcanoes, Central Mexico. *Journal of Petrology* 46, 1243-1282.

Shapiro, N.M., Singh, S.K., Iglesias-Mendoza, A., Cruz-Atienza, V.M., Pacheco, J.F., 2000. Evidence of low Q below Popocatépetl volcano, and its implication to seismic hazard in Mexico City. *Geophys. Res. Lett.* 27, 2753-2756.

Spera, F.J., 1980. Aspect of magma transport. En: *Physics of magmatic processes*, editado por Hargraves. RB. Princeton University Press USA, 265-314.

Spera, F.J., 2000. Physical properties of magma. En: Sigurdsson, H., Houghton, B., McNutt, S., Rymer, H., Stix, J., (Eds.), *Encyclopedia of Volcanoes*. Academic Press, San Diego, 171-190.

Straub, S.M., Martin-Del Pozzo, A.L., 2001. The significance of phenocryst diversity in tephra from recent eruptions at Popocatépetl volcano (central Mexico). *Contrib. Mineral. Petrol.* 140, 487-510.

Valdés, C., González, G., Arciniega, A., Guzmán, M., Nava, E., 1995. Sismicidad del volcán Popocatépetl a partir del 21 de diciembre de 1994 al 30 de marzo de 1995. In: *Volcán Popocatépetl, estudios realizados durante la crisis 1994-1995*. CENAPRED, Mexico.

BIBLIOGRAFÍA

Valdés-González, C., González-Pomposo, G., Arciniega-Ceballos, A., 1997. El Popocatepetl, un volcán sísmicamente activo. *Ingeniería Civil* 334, 33-38

Wallace, P., Anderson, A., 2000. Volatiles in magmas. In: Sigurdsson, H., Houghton, B., McNutt, S., Rymer, H., Stix, J., (Eds.), *Encyclopedia of Volcanoes*. Academic Press, San Diego, 149-170.

Witter, J.B., 2003. Convection of Magma in Volcanic Conduits as a Degassing Mechanism at Active Volcanoes, 288 p. Ph.D. thesis, University of Washington, Seattle.

Witter, J.B., Kress, V.C., Newhall, C.G., 2005. Volcán Popocatepetl, Mexico. Petrology, Magma Mixing, and Immediate Sources of Volatiles for the 1994–Present Eruption. *Journal of Petrology* 46, 2337-2366.

Wright, R., De La Cruz-Reyna, S., Harris, A., Flynn, L., Gomez-Palacios, J.J., 2002. Infrared satellite monitoring at Popocatepetl: Explosions, exhalations, and cycles of dome growth. *J. Geophys. Res.* 107, 2-1, 2-16.

Apéndice A

En este apartado se exponen con detalle las transformaciones más importantes que se usaron para deducir una EOS simplificada para la densidad del volcán Popocatepetl.

Transformación $\rho_s(p, T, X_i) \rightarrow \rho_s(p, T, w_i)$

Esta transformación se realiza de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \rho_s(p, T, X_i) &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i M_{mi}}{\sum_{i=1}^n X_i \left[(V_{mi})_{p_r, T_r} + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p (T - T_r) + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T (p - p_r) \right]} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{n_T} M_{mi}}{\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{n_T} V_{mi} \left[1 + \frac{1}{V_{mi}} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p (T - T_r) + \frac{1}{V_{mi}} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T (p - p_r) \right]} \\
 &= \frac{\frac{1}{n_T} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i}{M_{mi}} \right) M_{mi}}{\frac{1}{n_T} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i}{M_{mi}} \right) V_{mi} [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]} \\
 &= \frac{M}{M \sum_{i=1}^n \left(\frac{V_{mi}}{100 \text{ wt}\% M_{mi}} \right) \left(\frac{M_i}{M} \times 100 \text{ wt}\% \right) [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]} \\
 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]} \\
 &= \rho_s(p, T, w_i)
 \end{aligned}$$

en donde se han utilizado la definición de por ciento en peso

$$w_i = \frac{M_i}{M} \times 100 \text{ wt}\%$$

siendo M_i la masa de la i -ésima componente, y $M = \sum M_i$ la masa total del fundido magmático; la definición de mol de la i -ésima componente n_i dada por

$$n_i = \frac{M_i}{M_{mi}}$$

APÉNDICE A

donde M_i y M_{mi} son la masa y masa molar respectivamente de la i -ésima componente; la definición de fracción molar

$$X_i = \frac{n_i}{n_T}$$

donde $n_T = \sum n_i$ es el número de moles totales existentes en el fundido. Y por último las definiciones (11) y (12) dadas para la expansión térmica y la compresibilidad isotérmica.

Aquí es oportuno comentar que los valores negativos de la compresibilidad κ_{Ti} del MgO y del CaO (ver Tabla 3) no son termodinámicamente estables por si mismos, por lo que no pueden extrapolarse a los fundidos de MgO o CaO puros (Kress y Carmichael 1991, Lange 1994). Estos valores solo tienen significado en un fundido de composición compleja, como una andesita o una dacita, en el que estos óxidos no representen una fracción molar mayor al 0.5, ya que los valores positivos reflejan las interacciones estructurales entre las diferentes respuestas a la presión de los compuestos presentes en la mezcla (Lange y Carmichael, 1990).

Expansión de Taylor

Sea la función $(n+2)$ -dimensional

$$\rho_s(p, T, w_i) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]}$$

Efectuando una expansión de Taylor alrededor del punto de referencia (p, T, w_{io}) se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_s = \rho_o &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{T, w_i} (p - p_o) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, w_i} (T - T_o) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \rho}{\partial w_j} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, T, w_i \neq w_j} (w_j - w_{jo}) + O(h^2) \end{aligned}$$

donde $h = [(\Delta p)^2 + (\Delta T)^2 + (\Delta w_1)^2 + \dots + (\Delta w_n)^2]^{1/2}$. Considerando $h \ll 1$, la expresión anterior resulta en

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 \rho_s &\cong \rho_o + \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{T, w_i} (p - p_o) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, w_i} (T - T_o) \\
 &+ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \rho}{\partial w_j} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, T, w_i \neq w_j} (w_j - w_{jo}) \\
 &= \rho_o \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, w_i} (T - T_o) + \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{T, w_i} (p - p_o) \right. \quad (\text{A-1}) \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{\partial \rho}{\partial w_j} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, T, w_i \neq w_j} (w_j - w_{jo}) \right\} \\
 &= \rho_o \left[1 - \alpha (T - T_o) + \kappa_T (p - p_o) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_o} (-\rho_o \beta_j) (w_j - w_{jo}) \right] \\
 &= \rho_o \left[1 - \alpha (T - T_o) + \kappa_T (p - p_o) - \sum_{j=1}^n \beta_j (w_j - w_{jo}) \right] \\
 &= \rho_o \left[1 - \alpha (T - T_o) + \kappa_T (p - p_o) - \sum_{i=1}^n \beta_i (w_i - w_{io}) \right].
 \end{aligned}$$

En este desarrollo se han tomado en cuenta dos definiciones relevante de la termodinámica: el coeficiente de expansión térmica α dado por

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, w_i} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_{p, w_i},$$

y la compresibilidad isotérmica κ_T definida como

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, w_i} = -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial p} \right)_{T, w_i}.$$

α y κ_T son parámetros globales que caracterizan propiedades físicas del fundido magmático considerado como un todo. Así mismo se ha definido la nueva cantidad

$$\beta_j \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_j} \right)_{p, T, w_i \neq w_j},$$

que físicamente representa a los cambios de volumen por diferencias de concentración de la i -ésima componente del fundido magmático. En términos del volumen específico ν también se puede expresar como

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 \beta_j &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_j} \right)_{p,T,w_i \neq w_j} \\
 &= -\nu \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{1}{\nu} \right) \\
 &= -\nu \left(-\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \nu}{\partial w_j} \right) \\
 &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial w_j} \right)_{p,T,w_i \neq w_j}
 \end{aligned}$$

En la última parte del desarrollo algebraico (A-1) por ser j un índice mudo, se puede realizar el cambio de índice $j \rightarrow i$ sin que cambie el significado algebraico del resultado.

Sea x es una variable cualquiera, entonces la derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \nu}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial x} \{ w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)] \}
 \end{aligned}$$

es una expresión muy útil ya que nos permite calcular distintos parámetros. Así, el coeficiente de expansión térmica α se calcula haciendo $x = T$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_{p,w_i} \\
 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial T} \{ w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)] \}, \\
 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i w_i \alpha_i
 \end{aligned}$$

similarmente, la compresibilidad isotérmica κ_T tomando $x = p$

$$\begin{aligned}
 \kappa_T &= -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial p} \right)_{T,w_i} \\
 &= -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial p} \{ w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)] \}, \\
 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i w_i \kappa_i
 \end{aligned}$$

APÉNDICE A

y β_j igualando $x = w_j$

$$\begin{aligned}
 \beta_j &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial w_j} \right)_{p, T, w_i \neq w_j} \\
 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial w_j} \{w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]\} \\
 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial w_i}{\partial w_j} \{w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]\} . \\
 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n A_i \delta_{ij} \{w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]\} \\
 &= \frac{A_j}{\nu} [1 + \alpha_j (T - T_r) - \kappa_{Tj} (p - p_r)]
 \end{aligned}$$

Por último evaluando los parámetros termodinámicos α , κ y β_j en el punto de referencia (p_o, T_o, w_{io}) , alrededor del cual se están realizando la expansión de Taylor, resulta que

$$\begin{aligned}
 \alpha(p_o, T_o, w_{io}) &= -\frac{1}{\rho(p_o, T_o, w_{io})} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, w_i} \\
 &= \frac{1}{\nu(p_o, T_o, w_{io})} \left[\frac{\partial \nu}{\partial T} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{p, w_i} , \\
 &= \frac{1}{\nu_o} \sum_{i=1}^n A_i w_{io} \alpha_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa(p_o, T_o, w_{io}) &= \frac{1}{\rho(p_o, T_o, w_{io})} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{T, w_i} \\
 &= -\frac{1}{\nu(p_o, T_o, w_{io})} \left[\frac{\partial \nu}{\partial p} (p_o, T_o, w_{io}) \right]_{T, w_i} \\
 &= \frac{1}{\nu_o} \sum_{i=1}^n A_i w_{io} \kappa_{Ti}
 \end{aligned}$$

y

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 \beta_j(p_o, T_o, w_{oi}) &= -\frac{1}{\rho(p_o, T_o, w_{oi})} \left[\frac{\partial \rho}{\partial w_j}(p_o, T_o, w_{oi}) \right]_{p, T, w_i \neq w_j} \\
 &= \frac{1}{v(p_o, T_o, w_{oi})} \left[\frac{\partial v}{\partial w_j}(p_o, T_o, w_{oi}) \right]_{p, T, w_i \neq w_j} \\
 &= \frac{A_j}{v_o} [1 + \alpha_j(T_o - T_r) - \kappa_{Tj}(p_o - p_r)]
 \end{aligned}$$

Dominio de validez de $\rho_{linear}(p, T, w_i)$ en R^{n+2}

Nos preguntamos ¿para qué valores $(p, T, w_i) \in R^{n+2}$ la densidad

$$\rho_{linear}(p, T, w_{io}) = \rho_o \left[1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \sum_{i=1}^n \beta_i(w_i - w_{io}) \right] \quad (A-2)$$

es próxima a $\rho_s(p, T, w_i)$?

Para responder esta pregunta es útil definir el concepto de entorno o vecindad generalizada para el caso de un espacio euclidiano n -dimensional de R^n . Sea $x=(x_1 \dots x_n)$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto

$$U(x; \varepsilon) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \mid \left[\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \right\}$$

se llama una bola n -dimensional con centro en el punto x y radio ε o también se conoce como un ε -entorno (a veces ε -vecindad, o más correctamente un entorno de bola) del punto x en el espacio R^n . Pero también se pueden definir vecindades no esféricas como la siguiente. Sea $x=(x_1 \dots x_n)$ y $\delta_i > 0, i=1, \dots, n$. El conjunto

$$P(x; \delta_1, \dots, \delta_n) = \{ y = (y_1, \dots, y_n) \mid |y_i - x_i| < \delta_i, i=1, \dots, n \}$$

se llama paralelepípedo n -dimensional y el punto x su centro. El conjunto $P(x; \delta)$ con el vector $\delta=(\delta_1, \dots, \delta_n)$ no es más que un vecindad poliédrica del punto x en el espacio R^n análoga a la vecindad esférica definida previamente.

En nuestro análisis el dominio termodinámico de interés $D_T^{n+2} \subset R^{n+2}$ está dado por

$$D_T^{n+2} = \{ (p, T, w_i) \mid p \in [0, 0.25] \text{ GPa}, T \in [800, 1000] \text{ K}, w_i \in [0, 100] \text{ wt}\%,$$

$$\left. \text{donde } i = 1, \dots, n \text{ y } \sum_{i=1}^n w_i = 100 \text{ wt}\% \right\}$$

APÉNDICE A

y físicamente representa todos los valores posibles que el punto (p, T, w_i) puede tomar dentro del conducto magmático que se está modelando (magma plumbing system).

Recordemos que nuestro estudio inicia en un espacio $(n+2)$ -dimensional. Tenemos que $x = (p, T, w_1, \dots, w_n) \in D_T^{n+2} \subset R^{n+2}$ es un punto dentro del dominio termodinámico de interés D_T^{n+2} y $x_o = (p_o, T_o, w_{1o}, \dots, w_{no}) \in D_T^{n+2} \subset R^{n+2}$ es el punto de referencia alrededor del cual se realiza la expansión de Taylor. La aproximación lineal (A-2) es válida únicamente dentro de una vecindad del punto x_o , por ejemplo dentro de la vecindad poliédrica $P(x_o; \delta)$ para un vector $\delta = \delta_{max}$ dado.

Se observa que los puntos x físicamente permitidos pertenecen a D_T^{n+2} , mientras que los puntos x que habitan en la vecindad matemática $P(x_o; \delta)$ (no todos ellos con significación física) son necesarios para que tenga sentido el fundamento matemático de la expansión de Taylor.

Aquí se tienen dos casos extremos interesantes. Cuando $D_T^{n+2} \subset P(x_o; \delta)$, significa que para cualquier punto del dominio termodinámico en el espacio $(n+2)$ -dimensional la forma linealizada $\rho_{lineal}(x)$ es buena aproximación de $\rho_s(x)$. O bien cuando $D_T^{n+2} \not\subset P(x_o; \delta)$, significa que $\rho_{lineal}(x)$ es una mala aproximación de $\rho_s(x)$.

Propiedad del modelo de disolución del H₂O

A continuación se discute una propiedad importante del modelo de disolución de H₂O propuesto por Persikov en 1991. En el estado de referencia (antes de añadir una cantidad $w_{H_2O}^*$ de agua al magma) se supone que la suma S_o de todos los componentes w_{io} del fundido es

$$S_o = \sum_{i=1}^n w_{io} = 100 \text{ wt}\%,$$

o bien

$$(0.01 \text{ wt}\%^{-1}) S_o = 1 \quad . \quad (\text{A-3})$$

¿Cuál será la suma

$$S = \sum_{i=1}^n w_i$$

de todos los componentes de la nueva composición w_i (después de añadir una cantidad $w_{H_2O}^*$ de agua) usando el modelo de disolución de Persikov?

Desarrollando S se tiene que

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n w_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i + w_{H_2O} \\
 &= \left[1 - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O}^* \right] \sum_{i=1}^{n-1} w_{i0} + w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^* \\
 &= \left[1 - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O}^* \right] (S_o - w_{H_2O,o}) + w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^* \\
 &= S_o - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) S_o w_{H_2O}^* - w_{H_2O,o} + (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O,o} w_{H_2O}^* + w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^* \\
 &= 100 \text{ wt}\% + (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O,o} w_{H_2O}^*
 \end{aligned}$$

en donde se han utilizado las definiciones (15), (16) y la hipótesis (A-3). Por lo tanto

$$S = 100 \text{ wt}\% \quad \Leftrightarrow \quad w_{H_2O,o} = 0 \quad ,$$

es decir solamente si el contenido de H₂O inicial del magma es nulo (fundido anhidro) al agregarle una cantidad $w_{H_2O}^*$ de agua la suma total de la nueva composición w_i será del 100 wt%, de lo contrario S será mayor. ¿Qué tan importante es este efecto en nuestro análisis? De antemano podemos decir que muy pequeño ya que el dominio donde varía w ([0, 7 wt%]) es reducido.

Como ejemplo, tomemos el caso extremo en que el fundido magmático ya tenga un contenido inicial de agua de $w_{H_2O,o} = 7 \text{ wt}\%$ y añadamos una cantidad de agua similar de $w_{H_2O}^* = 7 \text{ wt}\%$. Se observa inmediatamente que la composición del nuevo magma hidratado tendrá un total de agua de $w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^* = 14 \text{ wt}\%$, la cual incluso cae fuera del dominio de interés que estamos manejando en este modelo. Con todo y ello la suma S de todos los componentes del magma usando el modelo de disolución de Persikov es

$$S = 100 \text{ wt}\% + (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O,o} w_{H_2O}^* = 100.49 \text{ wt}\% \quad ,$$

exceso que resulta pequeño y dentro de los errores experimentales de las mediciones misma de los componentes del fundido magmático.

Transformación $\rho_{lineal}(p, T, w_i) \rightarrow \rho_{lineal}(p, T, w)$

Para obtener esta transformación se toman en cuenta dos resultados importantes: uno proveniente del modelo de disolución propuesto (Persikov, 1991) y el otro de la definición de volumen específico v .

Usando el modelo de disolución dado por las Ecs. (15) y (16), de la componente H₂O del fundido magmático hidratado se obtiene

APÉNDICE A

$$w_{H_2O} = w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^* \quad (A-4)$$

$$w_{H_2O} - w_{H_2O,o} = w_{H_2O}^*$$

y de la componentes restantes $i \neq H_2O$

$$w_{i \neq H_2O} = w_{io} \left[1 - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{H_2O}^* \right]$$

$$w_i = w_{io} - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{io} w_{H_2O}^*$$

$$w_i = w_{io} - (0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{io} (w_{H_2O} - w_{H_2O,o})$$

$$w_i - w_{io} = -(0.01 \text{ wt}\%^{-1}) w_{io} (w_{H_2O} - w_{H_2O,o}) \quad (A-5)$$

haciendo uso de la expresión (A-4) previamente obtenida.

Asimismo, evaluando el volumen

$$v = \sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]$$

en el punto de referencia (p_o, T_o, w_{io}) , se tiene usando la definición (14) que

$$v(p_o, T_o, w_{io}) = \sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)]$$

$$v_o = \sum_{i=1}^n A_i w_{io} [1 + \alpha_i (T_o - T_r) - \kappa_{Ti} (p_o - p_r)]$$

$$1 = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{A_i}{v_o} [1 + \alpha_i (T_o - T_r) - \kappa_{Ti} (p_o - p_r)] \right\} w_{io} \quad (A-6)$$

$$1 = \sum_{i=1}^n \beta_i w_{io}$$

Con ello ya tenemos los dos resultados que vamos a necesitar a continuación. Sea ahora la función $(n+2)$ -dimensional

$$\rho_{lineal}(p, T, w_i) = \rho_o [1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \gamma] \quad (A-7)$$

donde se ha definido la cantidad

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \beta_i (w_i - w_{io})$$

Se observa que γ se puede desarrollar de la forma siguiente

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sum_{i=1}^n \beta_i (w_i - w_{i0}) \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq H_2O}}^{n-1} \beta_i (w - w_{i0}) + \beta_{H_2O} (w_{H_2O} - w_{H_2O,0}) \\
 &= -\left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) \left(w_{H_2O} - w_{H_2O,0}\right) \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i w_{i0} + \beta_{H_2O} (w_{H_2O} - w_{H_2O,0}) \\
 &= \left[\beta_{H_2O} - \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i w_{i0} \right] (w_{H_2O} - w_{H_2O,0}) \quad , \quad (\text{A-8}) \\
 &= \left[\beta_{H_2O} - \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) \sum_{i=1}^n \beta_i w_{i0} + \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) \beta_{H_2O} w_{H_2O,0} \right] (w_{H_2O} - w_{H_2O,0}) \\
 &= \left[\beta_{H_2O} - \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) + \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) \beta_{H_2O} w_{H_2O,0} \right] (w_{H_2O} - w_{H_2O,0}) \\
 &= \left\{ \beta_{H_2O} \left[1 + \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) w_{H_2O,0} \right] - \left(0.01 \text{ wt}\%^{-1}\right) \right\} (w_{H_2O} - w_{H_2O,0}) \\
 &= \beta (w - w_o)
 \end{aligned}$$

en donde se ha tomado $w = w_{H_2O}$, la definición (18) y los resultados (A-5) y (A-6). Por último, introduciendo (A-8) en (A-7) se obtiene la ecuación 3-dimensional

$$\rho_{lineal}(p, T, w) = \rho_o \left[1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \beta(w - w_o) \right]$$

Dominio de validez de $\rho_{lineal}(p, T, w)$ en R^3

¿Para qué valores $(p, T, w) \in R^3$ la densidad

$$\rho_{lineal}(p, T, w) = \rho_o \left[1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \beta(w - w_o) \right] \quad (\text{A-9})$$

es próxima a $\rho_s(p, T, w_i)$?

Como se ha visto en el caso tridimensional se tiene que nuestro dominio termodinámico de interés $D_T \subset R^3$ está dado por

$$D_T = \left\{ (p, T, w) \mid p \in [0, 0.25] \text{ GPa}, T \in [800, 1000] \text{ K}, w \in [0, 7] \text{ wt}\% \right\}$$

y físicamente representa todos los valores posibles que el punto (p, T, w) puede tomar dentro del conducto magmático que se está modelando (magma plumbing system).

Sea $x = (p, T, w) \in D_T \subset R^3$ un punto dentro del dominio termodinámico de interés D_T y $x_o = (p_o, T_o, w_o) \in D_T \subset R^3$ el punto de referencia reducido de R^{n+2} a R^3 . La aproximación (A-9) es válida únicamente dentro de una vecindad del punto x_o , por ejemplo dentro de la vecindad poliédrica $P(x_o; \delta)$ para un vector $\delta = \delta_{max}$ dado.

APÉNDICE A

Como en el caso $(n+2)$ -dimensional en R^3 se observa que los puntos x permitidos físicamente pertenecen a D_T , mientras que los puntos x que habitan en la vecindad matemática $P(x_o; \delta)$ no todos ellos tienen significación física. También existen dos casos extremos interesantes. Cuando $D_T \subset P(x_o; \delta)$, significa que para cualquier punto del dominio termodinámico 3-dimensional la forma lineal $\rho_{lineal}(x)$ es buena aproximación de $\rho_s(x)$, o bien cuando $D_T \not\subset P(x_o; \delta)$, implica que $\rho_{lineal}(x)$ es mala aproximación de $\rho_s(x)$.

Por ejemplo, sea $x_o = (p_o, T_o, w_o) = (0.25 \text{ GPa}, 1000 \text{ K}, 7 \text{ wt}\%)$ y la vecindad poliédrica

$$\begin{aligned} P(x_o; \delta) &= P(x_o; \delta_1, \delta_2, \delta_3) \\ &= P(0.25 \text{ GPa}, 1000 \text{ K}, 7 \text{ wt}\%; 0.25 \text{ GPa}, 200 \text{ K}, 7 \text{ wt}\%) \\ &= \{(p, T, w) \mid |p - 0.25 \text{ GPa}| < 0.25 \text{ GPa}, |T - 1000 \text{ K}| < 200 \text{ K}, \\ &= |w - 7 \text{ wt}\%| < 7 \text{ wt}\% \} \end{aligned}$$

Inmediatamente se demuestra que $D_T \subset P(x_o; \delta)$. Pero si $x \in P(x_o; \delta)$ $\rho_{lineal}(x)$ es buena aproximación de $\rho_s(x)$, por lo que automáticamente todos los puntos x del dominio D_T también cumplen lo mismo.

Por el contrario si se toma

$$\begin{aligned} x_o &= (p_o, T_o, w_o) \\ &= (p_r, T_r, w_r) \\ &= (0 \text{ GPa}, 1673 \text{ K}, 0 \text{ wt}\%) \end{aligned}$$

entonces se tiene que la vecindad poliédrica

$$\begin{aligned} P(x_o; \delta) &= P(x_o; \delta_1, \delta_2, \delta_3) \\ &= P(0, 1000 \text{ K}, 0; 0.25 \text{ GPa}, 200 \text{ K}, 7 \text{ wt}\%) \\ &= \{(p, T, w) \mid |p| < 0.25 \text{ GPa}, |T - 1000 \text{ K}| < 200 \text{ K} \text{ y } |w| < 7 \text{ wt}\% \} \end{aligned}$$

no contiene a D_T en efecto $D_T \cap P(x_o; \delta) = \emptyset$. Sabemos que, sólo si $x \in P(x_o; \delta)$ $\rho_{lineal}(x)$ es buena aproximación de $\rho_s(x)$, pero como todos los puntos x_o que pertenecen a D_T están muy alejados del conjunto $P(x_o; \delta)$ entonces no cumplen esta aproximación de forma adecuada.

Aquí es importante hacer la siguiente observación relacionada con la aproximación no-lineal. Si nos fijamos, en este último ejemplo, hemos tomado el punto de referencia $x_o = (0 \text{ GPa}, 1673 \text{ K}, 0 \text{ wt}\%)$ que es justo la primera condición de la propuesta de una EOS no-lineal. Pero a diferencia del modelo lineal, el modelo no-lineal $\rho(x)$ será muy buena aproximación de la densidad estándar $\rho_s(x)$ (ver Fig. 5) incluso dentro del intervalo D_T lejos del punto x_o precisamente por la segunda condición en dónde se pide que el parámetro β^* deja de ser una constante.

Apéndice B

En este apartado se proporcionan los argumentos vulcanológicos, físicos y matemáticos que se utilizaron para explicar un posible mecanismo de formación de domo en el volcán Popocatepetl.

Perfil de temperatura $T(z)$

La hipótesis de que las paredes del conducto volcánico del Popocatepetl se consideren adiabáticas se fundamenta en que la constante de conductividad K para las rocas en general son muy pequeñas ~ 2.5 W/m-K. Se han visto en algunos domos de los volcanes Colimas y Popocatepetl, por ejemplo los formados durante el 2002, cubiertos con una capa de nieve que permanece mientras existen condiciones meteorológicas adversas. También se conoce que en volcanes donde se generan extensos campos de lava el material de abajo tarda meses o años en enfriarse.

Hasta el día de hoy en volcanes que presentan actividad de desgasificación pasiva no se ha detectado un aumento importante en la temperatura del edificio volcánico, ya que se ha observado que los glaciares perennes ubicados en las partes altas de algunos volcanes conservan su volumen durante todo el periodo de la actividad considerada. Es por ello que la hipótesis de que el flujo de calor por conducción a través de las paredes laterales del conducto volcánico es prácticamente nulo se considera no solamente buena sino ad hoc para volcanes silíceos como lo son en México el volcán Popocatepetl.

Un problema típico de flujo del calor es el siguiente: calcular la distribución de temperatura u en una varilla si la misma tiene en sus extremos la temperatura $T_1(t)$ y $T_2(t)$, sus paredes laterales adiabáticas y una distribución inicial de temperatura f . Como la varilla tiene paredes adiabáticas no existe flujo de calor lateral, por lo tanto no existe distribución de temperatura en secciones perpendiculares al eje de la varilla (la temperatura en cada sección es constante). Esto significa que el problema es unidimensional. Colocando la coordenada x a lo largo de la varilla, siendo un extremo de la misma el origen ($x=0$) y el final la coordenada $x=L$, donde L es la longitud total de la misma el problema anterior queda planteado formalmente como sigue

$$EDP: \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$CF: \begin{aligned} u(0, t) &= T_1(t) \\ u(L, t) &= T_2(t) \end{aligned}$$

$$CI: u(x, 0) = f(x)$$

donde EDP significa ecuación diferencial parcial, CF condición de frontera y CI condición inicial .

APÉNDICE A

En el caso en que la solución alcance un estado estacionario o de equilibrio $u(x,t) \rightarrow u(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$ y suponiendo que las condiciones de frontera tengan valores constantes T_1 y T_2 entonces el sistema anterior se transforma en

$$EDO: 0 = k \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$CF: \begin{cases} u(0) = T_1 \\ u(L) = T_2 \end{cases}$$

donde ahora *EDO* es una ecuación diferencial ordinaria. Esta ecuación es muy fácil de resolver mediante una doble integración se obtiene la solución

$$u(x) = c_0 + c_1 x \quad ,$$

que es la ecuación general de una recta. Usando las condiciones de frontera se encuentran los valores de los coeficientes c_0 y c_1 dados respectivamente por

$$c_0 = T_1$$

y

$$c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad .$$

En el caso del volcán Popocatepetl usando estas mismas consideraciones por analogía, no importando que tan compleja sea la geometría del conducto, se propone un perfil lineal de temperatura a lo largo eje vertical z orientado positivamente y con origen en el punto de compensación isostática dada por

$$\begin{aligned} T(z) &= a_0 + a_1 z \\ &= T_o + \left(\frac{T_f - T_o}{H_o - H_f} \right) z \quad , \\ &= T_o - \left(\frac{T_o - T_f}{H_o - H_f} \right) z \end{aligned} \quad (B-1)$$

donde T_o a su vez depende de H_o . ¿Cuál es esta dependencia?

Para encontrarla se observa que en un extremo se tiene $(H_{Max}, T_{Max}) = (10000 \text{ m}, 1000 \text{ K})$, considerado el nivel de compensación más profundo que se pueda tener el sistema roca encajonante - fundido magmático y $(H_{Min}, T_{Min}) = (100 \text{ m}, 800 \text{ K})$ el punto más somero el

APÉNDICE A

cual corresponde a $(H_{Min}, T_{Min}) = (H_f, T_f)$ el nivel de fragmentación del fundido. Tomando la distribución de la temperatura lineal se tiene para este caso que

$$\begin{aligned}
 T(H) &= \left(\frac{T_{Min} - T_{Max}}{H_{Max} - H_{Min}} \right) (H_{Max} - H) + T_{Max} \\
 &= \left(\frac{T_f - T_{Max}}{H_{Max} - H_f} \right) (H_{Max} - H) + T_{Max} \\
 &= \left(\frac{T_{Max} - T_f}{H_{Max} - H_f} \right) (H - H_{Max}) + T_{Max} \\
 &= \left(\frac{1000 - 800 \text{ K}}{10000 - 100 \text{ m}} \right) (H - 10000 \text{ m}) + 1000 \text{ K} \\
 &= \frac{2 \text{ K}}{99 \text{ m}} (H - 10000 \text{ m}) + 1000 \text{ K}
 \end{aligned}$$

y calculando cual es la temperatura T_o a la profundidad $H_o = 10000 \text{ m}$ resulta

$$\begin{aligned}
 T &= T(H_o) \\
 &= T(10000 \text{ m}) \\
 &= \frac{2 \text{ K}}{99 \text{ m}} (10000 \text{ m} - 10000 \text{ m}) + 1000 \text{ K} \\
 &= 1000 \text{ K}
 \end{aligned}$$

y para la profundidad $H_o = 8000 \text{ m}$,

$$\begin{aligned}
 T &= T(H_o) \\
 &= T(8000 \text{ m}) \\
 &= \frac{2 \text{ K}}{99 \text{ m}} (8000 \text{ m} - 10000 \text{ m}) + 1000 \text{ K} \\
 &= -\frac{2 \text{ K}}{99 \text{ m}} (2000 \text{ m}) + 1000 \text{ K} \\
 &= -40.40 \text{ K} + 1000 \text{ K} \\
 &= 959.59 \text{ K} \\
 &\approx 960 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Así mismo a las profundidades $H_o = 6000 \text{ m}$ y $H_o = 4000 \text{ m}$ se obtienen respectivamente las temperaturas $T_o \approx 919 \text{ K}$ y $T_o \approx 879 \text{ K}$.

Por lo tanto las distribuciones de temperatura $T(z)$ para cada uno de los cuatro niveles de compensación (T_o, H_o) de prueba están dadas por

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 (T_o, H_o) & \mapsto T(z) = T_o - \left(\frac{T_o - T_f}{H_o - H_f} \right) z \\
 (1000 \text{ K}, 10000 \text{ m}) & \mapsto T(z) = 1000 \text{ K} - \left(\frac{1000 - 800 \text{ K}}{10000 - 100 \text{ m}} \right) z \\
 (960 \text{ K}, 8000 \text{ m}) & \mapsto T(z) = 960 \text{ K} - \left(\frac{960 - 800 \text{ K}}{8000 - 100 \text{ m}} \right) z \\
 (919 \text{ K}, 6000 \text{ m}) & \mapsto T(z) = 919 \text{ K} - \left(\frac{919 - 800 \text{ K}}{6000 - 100 \text{ m}} \right) z \\
 (879 \text{ K}, 4000 \text{ m}) & \mapsto T(z) = 879 \text{ K} - \left(\frac{879 - 800 \text{ K}}{4000 - 100 \text{ m}} \right) z
 \end{aligned}$$

Perfil de contenido de agua $w(z)$

En la región monofásica de la columna magmática del Popocatépetl (desde $z=0$ hasta $z=H_o-H_f$) se asume que el fundido,

1. Tiene una concentración de volátiles constante

$$w = w_o = cte. \quad (B-2)$$

2. No está saturado

$$w \leq w_s,$$

siendo w_s es el valor máximo de H₂O disuelta en algún punto de la columna magmática.

Los valores de saturación del agua w_s dependen tanto de la presión de exsolución P como de la temperatura T del sistema magma-H₂O. Para el caso del volcán Popocatépetl se trabajó con 25 puntos (P_k, w_{sk}) , donde $w_s = w(P_k, T_k)$ y $k=1, \dots, 25$. Los valores de $w(P_k, T_k)$ se obtienen del programa VolatileCalc1.1 (Newman y Lowenstern, 2002).

La dependencia débil de w_s con la temperatura en el dominio de interés, nos permite utilizar un simple ajuste de ley de potencias del tipo $w_s = KP^{1/n}$ (Dobran, 2001), donde K es el coeficiente de solubilidad y $1/n$ es una constante.

A lo largo de un desnivel de presión de exsolución que va de 0 a 2500 bar (equivalente a un intervalo de profundidad de presión litostática aproximada de [0,10000 m] se selecciona dos intervalos de temperatura de interés en nuestro estudio: el primero de [800,1000] K y el segundo de [1000,1200] K.

La partición de presión P_k se calcula a intervalos de 25 bar en el intervalo de 0-125 bar y cada 125 bar en el intervalo de 125-2500 bar. Y utilizando la hipótesis de que la

APÉNDICE A

temperatura varía linealmente dentro de la columna magmática, en el primer caso la partición de temperaturas

Punto	P_k	T_{1k}	$w(P_k, T_{1k})$	T_{2k}	$w(P_k, T_{2k})$
(k)	(bar)	(K)	(wt%)	(K)	(wt%)
1	0 (~0 m)	800	0	1000	0
2	25 (~100 m)	802	0.81	1002	0.61
3	50	804	1.14	1004	0.86
4	75	806	1.41	1006	1.06
5	100	808	1.63	1008	1.22
6	125 (~500 m)	810	1.83	1010	1.37
7	250 (~1 km)	820	2.59	1020	1.97
8	375	830	3.12	1030	2.43
9	500 (~2 km)	840	3.53	1040	2.82
10	625	850	3.86	1050	3.16
11	750	860	4.14	1060	3.47
12	875	870	4.39	1070	3.75
13	1000 (~4 km)	880	4.63	1080	4.01
14	1125	890	4.85	1090	4.26
15	1250	900	5.07	1100	4.50
16	1375	910	5.29	1110	4.73
17	1500 (~6 km)	920	5.51	1120	4.95
18	1625	930	5.72	1130	5.17
19	1750	940	5.94	1140	5.38
20	1875	950	6.15	1150	5.59
21	2000 (~8 km)	960	6.37	1160	5.81
22	2125	970	6.59	1170	6.01
23	2250	980	6.81	1180	6.22
24	2375	990	7.03	1190	6.43
25	2500 (~10 km)	1000	7.25	1200	6.64

Tabla B-1. Para estudiar la saturación aproximada del H₂O en el fundido del volcán Popocatepetl se trabajó con la partición de la presión de exsolución P_k (expresadas también en unidades de profundidad aproximada de presión litostática equivalente) y las particiones de temperatura T_{1k} y T_{2k} . Los correspondientes valores de saturación del H₂O disuelta $w(P_k, T_{1k})$ y $w(P_k, T_{2k})$ fueron calculados a partir del programa VolatileCalc 1.1 (Newman y Lowenstern, 2002).

de 800 K a 810 K, T_{1k} se calcula cada 2 grados, y cada 10 grados en el intervalo de 810 a 1000 K. En el segundo caso la partición de temperatura de 1000 K a 1010 K, T_{2k} también se calcula cada 2 grados, y cada 10 grados de 1010-1200 K (ver Tabla B-1).

Realizando los ajustes de los 25 puntos $(P_k, w(P_k, T_k))$ se obtiene

$$w_{s1}(P) = 0.193 P^{(1/2.166)} \quad T \in [800K, 1000K]$$

$$w_{s2}(P) = 0.113 P^{(1/1.933)} \quad T \in [1000K, 1200K]$$

APÉNDICE A

siendo $r=0.999$ el coeficiente de correlación.

Perfil de presión $p(z)$

Para obtener el perfil de presiones vertical existente dentro de columna magmática del Popocatepetl es necesario resolver la ecuación de la hidrostática en una dimensión

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad , \quad (B-3)$$

donde en este caso la densidad ρ del magma del Popocatepetl está dada por la EOS no lineal propuesta. Sustituyendo (34) en (B-3) se obtiene que

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_r g \{1 - \alpha [T(z) - T_r] + \kappa_T p(z) - \beta [T(z)] w(z)\} \quad ,$$

e introduciendo el término $\beta(T)$,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_r g \{1 - \alpha [T(z) - T_r] + \kappa_T p(z) - [c_o + c_1 T(z)] w(z)\}.$$

Con las distribuciones de temperatura y contenido de H₂O dadas respectivamente por las Ecs. (B-1) y (B-2) la expresión anterior se transforma en

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_r g \{1 - \alpha (a_o + a_1 z - T_r) + \kappa_T p(z) - [c_o + c_1 (a_o + a_1 z)] w_o\}.$$

Desarrollando y agrupando

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho_r g (1 - \alpha a_o - \alpha a_1 z + \alpha T_r + \kappa_T p - c_o w_o - c_1 a_o w_o - c_1 a_1 w_o z) \\ &= -\rho_r g \kappa_T p - \rho_r g (1 - \alpha a_o + \alpha T_r - c_o w_o - c_1 a_o w_o) - \rho_r g (-\alpha a_1 - c_1 a_1 w_o) z \\ &= -\rho_r g \kappa_T p - \rho_r g [1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_o + c_1 a_o) w_o - \kappa_T p_o] - \rho_r g (-\alpha a_1 - c_1 a_1 w_o) z \\ &= -\rho_r g \kappa_T p - \rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) - \rho_r g (-\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o + \rho_r g \kappa_T d_o) z \\ &= -\rho_r g \kappa_T p - \rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) - \rho_r g (d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) z \\ &= -Rp + M + Nz \end{aligned}$$

o bien,

$$\frac{dp}{dz} + Rp = S(z) \quad , \quad (B-4)$$

en donde se ha definido

APÉNDICE A

$$\begin{aligned} d_o &\equiv 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_o + c_1 a_o) w_o \\ d_1 &\equiv -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o \end{aligned} \quad , \quad (B-5)$$

$$\begin{aligned} R &\equiv \rho_r g \kappa_T \\ M &\equiv -\rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) \\ N &\equiv -\rho_r g (d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) \end{aligned} \quad (B-6)$$

y

$$S \equiv M + Nz \quad .$$

La ecuación (B-4) es una ecuación diferencial lineal de primer orden del tipo

$$\frac{dy}{dx} + Ry = S(x) \quad , \quad (B-7)$$

donde R un coeficiente constante y S una función continua de x . Busquemos la solución de la forma de un producto de funciones

$$y(x) = u(x)v(x) \quad . \quad (B-8)$$

Tomando arbitrariamente una de estas funciones, la otra se determinará de la ecuación (B-5). Derivando los dos miembros de la igualdad (B-8) encontramos

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad .$$

Introduciendo dy/dx en (B-7) resulta

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Ruv = S$$

o bien

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Rv \right) + v \frac{du}{dx} = S \quad . \quad (B-9)$$

Se elige la función v de tal forma que

$$\frac{dv}{dx} + Rv = 0 \quad .$$

Separando las variables en esta ecuación diferencial respecto a la función v , encontramos

APÉNDICE A

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -R,$$

e integrando

$$\begin{aligned} \ln v &= -\int R dx + C_o \\ &= -Rx + \ln v_o \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_o}\right) = -Rx$$

$$v(x) = v_o e^{-Rx}$$

Puesto que es suficiente tener una solución cualquiera, distinta de cero, tomamos el caso más simple $v_o=1$ y la función v nos queda como

$$v(x) = e^{-Rx}.$$

Sustituyendo el valor encontrado para $v(x)$ en (B-7) inmediatamente obtenemos

$$e^{-Rx} \frac{du}{dx} = S(x) = M + Nx,$$

y

$$\begin{aligned} u(x) &= \int (M + Nx) e^{Rx} dx + C \\ &= M \int e^{Rx} dx + N \int x e^{-Rx} dx + C \\ &= M \frac{e^{Rx}}{R} + N \left(x - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{Rx}}{R} + C \\ &= \left[M + N \left(x - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{e^{Rx}}{R} + C \end{aligned}$$

Introduciendo esta expresión en (B-8) se obtiene en definitiva que

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x)v(x) \\ &= \left\{ \left[M + N \left(x - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{e^{Rx}}{R} \right\} e^{-Rx} + C e^{-Rx} \\ &= \left[M + N \left(x - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + C e^{-Rx} \end{aligned}$$

APÉNDICE A

Utilizando la condición inicial $y(x_o)=y_o$, resulta que la constante de integración C es

$$y(x_o) = \left[M + N \left(x_o - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + C e^{-R x_o}$$

$$\left\{ y_o - \left[M + N \left(x_o - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} \right\} e^{R x_o} = C$$

Por consiguiente la integral general de la ecuación dada tendrá la forma

$$y(x) = \left[M + N \left(x - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + \left\{ y_o - \left[M + N \left(x_o - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} \right\} e^{-R(x-x_o)}$$

En nuestro estudio las variables que se manejan son $y=p$, $x=z$ y la condición inicial $x_o=z_o=0$ (nivel de compensación) y la presión en ese punto es $p(0)=p_o$. Recordemos que el origen de la coordenada z ($z=0$) se ubica justo en el nivel de compensación. Por lo tanto el perfil de presión $p(z)$ de la columna magmática del volcán Popocatepetl estará dado por

$$p(z) = \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + \left\{ p_o - \left[M + N \left(z_o - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} \right\} e^{-R(z-z_o)}$$

$$= \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + \left[p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \right] e^{-Rz}$$

$$= \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + U e^{-Rz}$$
(B-10)

en donde se ha definido la cantidad

$$U \equiv p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R}$$

Ecuación de compensación isostática

Una de las expresiones más generales que describe la dinámica de un fluido monofásico simple está dada por

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Siendo ρ , p y \mathbf{v} la densidad, la presión y la velocidad de un fluido respectivamente, φ la suma de todos los potenciales por unidad de masa que describen los campos de fuerzas conservativas que actúan sobre el fluido y que se pueden derivar de él y η y η' el primer y

APÉNDICE A

segundo coeficiente de viscosidad respectivamente. Para el fluido en reposo $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, la expresión anterior se reduce a la ecuación de la hidrostática

$$0 = -\nabla p - \rho \nabla \varphi \quad ,$$

y considerando como fuerza conservativa únicamente el campo gravitacional ($\varphi=gz$) se obtiene la famosa fórmula

$$0 = -\nabla p - \rho \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \nabla p = -\rho \mathbf{g} \quad .$$

Cuando la presión depende solamente de la coordenada z la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad .$$

Si $\rho(z)=cte$, la solución de esta ecuación diferencial es una función lineal dada por

$$p(z) = -\rho g z + C \quad ,$$

que describe la presión hidrostática que producen una amplia gama de materiales que pueden ir desde un fluido incompresible hasta un sólido, por ejemplo en nuestro caso, la roca que rodea el sistema magmático del volcán Popocatepetl. En efecto siendo $\rho = \rho_{CR}$ la densidad equivalente de la roca encajonante, la presión litostática de una columna de roca de altura z por arriba del nivel de compensación está dada por

$$p_{CR}(z) = -\rho_{CR} g z + C \quad , \tag{B-11}$$

y tomando en cuenta que en el nivel de compensación se cumple que

$$(z_o, p_o) = (0, \rho_{CR} g H_o) \quad ,$$

el valor de la constante C es

$$\begin{aligned} p(0) &= -\rho_{CR} g \times 0 + C \\ p_o &= C \\ \rho_{CR} g H_o &= C \end{aligned} \quad .$$

Introduciendo este valor en (B-11) la presión litostática producida por una columna de roca en el nivel de compensación resulta

$$p_{CR}(z) = \rho_{CR} g (H_o - z) \quad . \tag{B-12}$$

Pero también la densidad puede ser variable ($\rho(z) \neq cte$), como por ejemplo la densidad vertical de la atmósfera que va disminuyendo desde el nivel del mar hasta grandes altitudes

APÉNDICE A

o bien, en nuestro caso, la densidad del fundido magmático del volcán Popocatepetl en el interior del conducto volcánico, que decrece desde el nivel de compensación hasta la salida del cráter. La ecuación diferencial

$$\frac{dp_{magma}}{dz} = -\rho_r g \{1 - \alpha [T(z) - T_r] + \kappa_T p(z) - \beta [T(z)] w(z)\} \quad ,$$

describe esa variación con detalle. Su solución general está dada por (ver sección previa)

$$p_{magma}(z) = \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + C e^{-Rz} .$$

La constante de integración C se puede calcular usando la condición inicial

$$(z_o, p_o) = (0, \rho_{CR} g H_o) \quad ,$$

que ya incluye el principio de isostasia. En efecto, el principio de isostasia (tipo Pratt), afirma que existe un nivel (el nivel de compensación) en el interior del sistema roca encajonante - fundido magmático del Popocatepetl en donde la presión de la roca ($\rho_{CR} g H_o$) es igual a la presión ejercida por la columna magmática. Por lo tanto la solución más general de la distribución de presiones dentro de la columna magmática, y que toma en cuenta el principio de isostasia, estará dada por

$$p_{magma}(z) = \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + U e^{-Rz} \quad (B-13)$$

donde

$$U = p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} = \rho_{CR} g H_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \quad .$$

A continuación se deduce la ecuación de compensación isostática del sistema roca encajonante - fundido magmático del volcán Popocatepetl. Partiendo del principio de la isostasia se proponen tres métodos diferentes, en los primeros dos se utilizan argumentos provenientes de la mecánica de fluidos, mientras que en el último básicamente se utiliza la definición de presión y argumentos de tipo intuitivo.

Método 1

La presión total de una columna de magma en el punto de compensación es $\int_0^z g \rho(\xi) d\xi$,

mientras que la presión litostática (B-12) en el mismo nivel es $p_{CR}(\zeta=0)$. Aplicando el principio de compensación isostática (tipo Pratt), se pide que en el nivel de compensación ambas presiones sean iguales

APÉNDICE A

$$\rho_{CR}g(H_o - \zeta)\Big|_{\zeta=0} = \int_0^z g\rho(\xi)d\xi.$$

Observemos aquí la distinción entre las variables ζ , ξ y z . Todas ellas representan la dimensión vertical Z , pero mientras ζ , ξ indican las regiones del dominio en donde varían las distribuciones de densidad y presión litostática respectivamente $0 \leq \zeta \leq H_o$ y $0 \leq \xi \leq z$, z representa el máximo valor que puede tomar ζ . En el primer caso la cota superior de ζ , dada por H_o es fija, pero en el segundo caso la cota superior de ζ , dada por z es variable. De la expresión anterior se deriva que la ecuación de compensación isostática es

$$\rho_{CR}gH_o = \int_0^z \rho_r g \{1 - \alpha[T(\xi) - T_r] + \kappa_T p(\xi) - \beta[T(\xi)]w(\xi)\} d\xi \quad . \quad (B-14)$$

El límite superior z de la integral físicamente representa la altura de la columna magmática y su valor se desconoce. Uno de los objetivos principales de este trabajo es encontrar z y su dependencia como función de los parámetros termodinámicos de la EOS dada para la densidad del Popocatepetl.

Método 2

Evaluando la presión litostática (B-12) en $z=0$ resulta

$$\begin{aligned} p_{CR}(z)\Big|_{z=0} &= \rho_{CR}g(H_o - z)\Big|_{z=0} \\ p_{CR}(0) &= \rho_{CR}gH_o \quad , \\ &= p_o \end{aligned}$$

mientras que la presión del magma (B-13) en ese mismo nivel es

$$\begin{aligned} p_{magma}(z)\Big|_{z=0} &= \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + Ue^{-Rz} \Big|_{z=0} \\ p_{CR}(0) &= \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} + \rho_{CR}gH_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \quad . \\ &= \rho_{CR}gH_o \\ &= p_o \end{aligned}$$

Por lo tanto en el nivel de compensación ($z=0$) se cumple el principio de isostasia (tipo Pratt) en donde la presión litostática de la roca encajonante es igual a la presión de la columna de magma,

$$p_{CR}(0) = p_o = \rho_{CR}gH_o = p_{magma}(0) \quad .$$

APÉNDICE A

En seguida se presupone que a la altura z , correspondiente al extremo superior de la columna magmática que está en contacto con la atmósfera, la presión es tan pequeña (del orden de la presión atmosférica) que se considera nula

$$p_{magma}(z) = 0$$

lo cual nos lleva a la ecuación de compensación

$$\left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + Ue^{-Rz} = 0 \quad ,$$

o bien

$$\left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} + \frac{N}{R} z + Ue^{-Rz} = 0 \quad . \quad (B-15)$$

Resolver esta ecuación para la variable z , implica encontrar la raíz de una función trascendente y con ello la altura de la columna magmática.

Método 3

Se pide que en el nivel de compensación ($z=0$) se cumpla el principio de la isostasia dado por

$$p_{CR} = p_{magma}$$

Utilizando la definición de presión: fuerza (este caso el peso de la columna Mg) entre área o superficie S , la expresión anterior, se puede describir como

$$\frac{M_{CR}g}{S_1} = \frac{M_{magma}g}{S_2} \quad ,$$

en donde S_1 es el área sobre la cual la columna de roca está ejerciendo su peso, mientras que S_2 (que puede ser igual a S_1 o no) es la superficie donde se ejerce el peso de la columna de magma, ambas ubicadas en el nivel de compensación. El cálculo de una masa heterogénea, con densidad variable, requiere de un proceso de integración por lo que

$$\frac{g}{S_1} \int_{V_1} \rho_{CR} dV = \frac{g}{S_2} \int_{V_2} \rho_{EOS-no-linear} dV \quad ,$$

o bien

APÉNDICE A

$$\frac{g}{S_1} \int_0^{H_o} \rho_{CR} S_1 d\xi = \frac{g}{S_2} \int_0^z \rho_r g \{1 - \alpha [T(\xi) - T_r] + \kappa_T p(\xi) - \beta [T(\xi)] w(\xi)\} S_2 d\xi$$

Por último simplificando se obtiene la ecuación buscada

$$\rho_{CR} H_o = \int_0^z \rho_r \{1 - \alpha [T(\xi) - T_r] + \kappa_T p(\xi) - \beta [T(\xi)] w(\xi)\} d\xi \quad (B-16)$$

Solución

Se observa que las ecuaciones (B-14) y (B-16) son prácticamente iguales, mientras que (B-15) parece radicalmente diferente. ¿Acaso lo es? Analicemos con más detalle este punto. La ecuación de compensación isostática (B-14) y (B-16) se pueden poner de forma equivalente como

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_0^z \rho_r g \{1 - \alpha [T(\xi) - T_r] + \kappa_T p(\xi) - \beta [T(\xi)] w(\xi)\} d\xi - \rho_{CR} g H_o = 0 \\ &= \int_0^z g \rho(\xi) d\xi - \rho_{CR} g H_o \end{aligned} \quad (B-17)$$

Primero encontraremos la expresión analítica más sencilla del integrando $g\rho(z)$. Introduciendo las distribuciones de temperatura y contenido de H₂O dadas por las Ecs. (B-1) y (B-2) en $g\rho(z)$ y desarrollando

$$\begin{aligned} g\rho(z) &= \rho_r g \{1 - \alpha [T(z) - T_r] + \kappa_T p(z) - \beta [T(z)] w(z)\} \\ &= \rho_r g \{1 - \alpha (a_o + a_1 z - T_r) + \kappa_T p(z) - [c_o + c_1 (a_o + a_1 z)] w_o\} \\ &= \rho_r g (1 - \alpha a_o - \alpha a_1 z + \alpha T_r + \kappa_T p - c_o w_o - c_1 a_o w_o - c_1 a_1 w_o z) \\ &= \rho_r g \kappa_T p + \rho_r g [1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_o + c_1 a_o) w_o - \kappa_T p_o] \\ &\quad + \rho_r g (-\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o + \rho_r g \kappa_T d_o) z \\ &= \rho_r g \kappa_T p + \rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) + \rho_r g (d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) z \\ &= R p - M - N z \end{aligned}$$

y sustituyendo p por la distribución de presión (B-10)

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 g\rho(z) &= R \left\{ \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + Ue^{-Rz} \right\} - M - Nz \\
 &= M + Nz - \frac{N}{R} + RUe^{-Rz} - M - Nz \\
 &= -\frac{N}{R} + RUe^{-Rz}
 \end{aligned}$$

Integrando la ecuación (B-17) resulta

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \int_0^z g\rho(\xi) d\xi - \rho_{CR} gH_o \\
 &= \int_0^z \left(-\frac{N}{R} + RUe^{-R\xi} \right) d\xi - \rho_{CR} gH_o \\
 &= -\frac{N}{R} \xi \Big|_0^z - Ue^{-R\xi} \Big|_0^z - \rho_{CR} gH_o \\
 &= -\frac{N}{R} z - Ue^{-Rz} + U - \rho_{CR} gH_o
 \end{aligned}$$

o bien

$$I(z) = (U - \rho_{CR} gH_o) - \frac{N}{R} z - Ue^{-Rz} = 0$$

Pero la ecuación de la isostasia (B-15) se puede describir consecutivamente de varias formas (el paréntesis izquierdo denota la operación que se realiza a la ecuación)

$$\begin{aligned}
 (-1) \times & \quad \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} + \frac{N}{R} z + Ue^{-Rz} &= 0 \\
 (0) + & \quad - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} - \frac{N}{R} z - Ue^{-Rz} &= 0 \\
 (p_o - p_o) & - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} - \frac{N}{R} z - Ue^{-Rz} &= 0 \\
 \left[p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \right] & - p_o - \frac{N}{R} z - Ue^{-Rz} &= 0
 \end{aligned}$$

donde nuevamente se obtiene $I(z)=0$

APÉNDICE A

$$(U - \rho_{CR}gH_o) - \frac{N}{R}z - Ue^{-Rz} = 0 \quad ,$$

con lo que se demuestra que las diferentes ecuaciones de isostasia dadas por los métodos 1,2 y 3 son equivalente.

Definiendo ahora

$$\begin{aligned} e_o &= -\frac{N}{R} \\ g_o &= -U \\ h_o &= U - \rho_{CR}gH_o \end{aligned} \quad , \quad (B-18)$$

la ecuación de la isostasia se puede expresar como

$$I(z) = h_o + e_o z + g_o e^{-Rz} \quad . \quad (B-19)$$

Esta es una ecuación trascendente y como R es del orden de 10^{-6} entonces $|Rz| \sim 10^{-3} \ll 1$, de modo que el término exponencial e^{-Rz} se puede aproximar de forma "casi" exacta por el polinomio de segundo orden $1 - Rz + (Rz)^2 / 2$, por lo tanto la ecuación (B-19) se transforma en la ecuación algebraica

$$\begin{aligned} I(z) &\cong h_o + e_o z + g_o \left(1 - Rz + \frac{1}{2} R^2 z^2 \right) \\ &= h_o + e_o z + g_o - g_o R z + \frac{1}{2} g_o R^2 z^2 \quad . \quad (B-20) \\ &= \left(\frac{1}{2} g_o R^2 \right) z^2 + (e_o - g_o R) z + (h_o + g_o) \end{aligned}$$

Simplificando los coeficientes de $(1/2g_oR^2)$, $(e_o - g_oR)$ y $(h_o + g_o)$ algunos de ellos incluso se pueden expresar en términos de los parámetros d_o y d_1 . Veamos esto con más detalle. Utilizando las definiciones (B-18) y (B-6) se tiene que $h_o + g_o$ es

$$h_o + g_o = U - \rho_{CR}gH_o - U = -\rho_{CR}gH_o$$

el coeficiente $e_o - g_oR$ esta dado por

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 e_o - g_o R &= -\frac{N}{R} - (-U)R \\
 &= -\frac{N}{R} + \left[p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \right] R \\
 &= p_o R - M \\
 &= p_o R - [-\rho_r g (d_o - \kappa_T p_o)] \\
 &= p_o R + \rho_r g d_o - \rho_r g \kappa_T p_o \\
 &= p_o R + \rho_r g d_o - p_o R \\
 &= \rho_r g d_o
 \end{aligned} \tag{B-21}$$

y por último $1/2 g_o R^2$ se simplifica a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} g_o R^2 &= \frac{1}{2} (-U) R^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \left[p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} \right] R^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \left(p_o R - M + \frac{N}{R} \right) R \\
 &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{d_1}{\kappa_T} \right) R \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{d_1}{\kappa_T} \right) (\rho_r g \kappa_T) \\
 &= \frac{1}{2} \rho_r g d_1
 \end{aligned} \tag{B-22}$$

En este último desarrollo se utilizó el hecho de que M y N también se pueden poner como

$$\begin{aligned}
 M &= -\rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) \\
 &= -\frac{\rho_r g \kappa_T}{\kappa_T} (d_o - \kappa_T p_o) \\
 &= -\frac{R}{\kappa_T} (d_o - \kappa_T p_o) \\
 &= -\frac{R}{\kappa_T} d_o + p_o R
 \end{aligned}$$

y

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 N &= -\rho_r g(d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) \\
 &= -\frac{\rho_r g \kappa_T}{\kappa_T} (d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) \\
 &= -\frac{R}{\kappa_T} (d_1 + R d_o) \\
 &= -\frac{R}{\kappa_T} d_1 - \frac{R^2}{\kappa_T} d_o
 \end{aligned}$$

por lo que la suma $p_o R - M + N/R$ resulta

$$\begin{aligned}
 p_o R - M + N/R &= p_o R - \left(-\frac{R}{\kappa_T} d_o + p_o R \right) + \left(-\frac{R}{\kappa_T} d_1 - \frac{R^2}{\kappa_T} d_o \right) \frac{1}{R} \\
 &= p_o R + \frac{R}{\kappa_T} d_o - p_o R - \frac{d_1}{\kappa_T} - \frac{R}{\kappa_T} d_o \\
 &= -\frac{d_1}{\kappa_T}
 \end{aligned}$$

La ecuación algebraica (B-20) se puede describir como

$$I(z) = \left(\frac{1}{2} \rho_r g d_1 \right) z^2 + (\rho_r g d_o) z - \rho_{CR} g H_o = 0$$

Esta ecuación cuadrática del tipo $x^2 + px + q = 0$, tiene como solución las raíces

$$x_r = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \text{ En nuestro caso}$$

$$p = \frac{\rho_r g d_o}{\frac{1}{2} \rho_r g d_1} = 2 \frac{d_o}{d_1} \quad \text{y} \quad q = \frac{-\rho_{CR} g H_o}{\frac{1}{2} \rho_r g d_1} = -2 \frac{\rho_{CR} H_o}{\rho_r d_1}$$

y tomando únicamente la raíz con el radical negativo que en nuestro estudio es la que tiene significado físico

APÉNDICE A

$$z_r = -\frac{d_o}{d_1} - \sqrt{\left(\frac{d_o}{d_1}\right)^2 + 2\frac{\rho_{CR}H_o}{\rho_r d_1}}$$

Esta expresión es muy sensible a los valores d_o y d_1 particularmente para valores altos del contenido de agua. Considerando que $I(z)$ es casi lineal en el intervalo considerado se puede tener un valor más estable para z_r . En efecto aplicando una iteración del método de Newton se tiene que

$$\begin{aligned} z_r &= z_* - \frac{I(z_*)}{I'(z_*)} \\ &= z_* - \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\rho_r g d_1\right)z_*^2 + (\rho_r g d_o)z_* - \rho_{CR}gH_o}{\rho_r g d_1 z_* + \rho_r g d_o} \right] \\ &= \frac{\rho_r g d_1 z_*^2 + \rho_r g d_o z_* - \frac{1}{2}\rho_r g d_1 z_*^2 - \rho_r g d_o z_* + \rho_{CR}gH_o}{\rho_r g d_1 z_* + \rho_r g d_o} \quad (B-23) \\ &= \frac{\frac{1}{2}\rho_r g d_1 z_*^2 + \rho_{CR}gH_o}{\rho_r g d_1 z_* + \rho_r g d_o} \\ &= \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)z_*^2 + \left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o}{d_1 z_* + d_o} \end{aligned}$$

cuyo valor nos proporciona la altura de la columna magmática $z=z_r$ necesaria para que el equilibrio isostático se mantenga.

Máxima altura del domo H_{Dome} y contenido de agua w_o

Si a la altura de la columna magmática (Ec. B-23) le restamos la distancia H_o , se obtiene la altura máxima que alcanza el material emplazado en el interior del cráter, es decir la altura del domo volcánico H_{Dome}

APÉNDICE A

$$H_{Dome} = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)z_*^2 + \left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o}{d_1z_* + d_o} - H_o \quad . \quad (B-24)$$

Recíprocamente a partir de la altura del domo H_{Dome} se puede estimar el contenido de H_2O . La ecuación anterior se puede expresar como

$$\gamma d_1z_* + \gamma d_o - \frac{1}{2}d_1z_*^2 = \left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o \quad ,$$

en donde se ha definido

$$\gamma \equiv H_{Dome} + H_o \quad . \quad (B-25)$$

Insertando la definición de d_l dada en (B-5) y desarrollando

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o &= \gamma(-\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o)z_* + \gamma d_o \\ &\quad - \frac{1}{2}(-\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o)z_*^2 \\ &= -\gamma \alpha a_1 z_* - \gamma \rho_r g \kappa_T z_* d_o - \gamma c_1 a_1 z_* w_o + \gamma d_o \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha a_1 z_*^2 + \frac{1}{2} \rho_r g \kappa_T z_*^2 d_o + \frac{1}{2} c_1 a_1 z_*^2 w_o \end{aligned} \quad .$$

Agrupando la expresión anterior se simplifica a

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o + \gamma \alpha a_1 z_* - \frac{1}{2} \alpha a_1 z_*^2 &= \left(\gamma - \gamma \rho_r g \kappa_T z_* + \frac{1}{2} \rho_r g \kappa_T z_*^2\right) d_o \\
 &\quad - \left(\gamma c_1 a_1 z_* - \frac{1}{2} c_1 a_1 z_*^2\right) w_o \\
 \left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o + \alpha a_1 \left(\gamma z_* - \frac{z_*^2}{2}\right) &= \left[\gamma - \rho_r g \kappa_T \left(\gamma z_* - \frac{z_*^2}{2}\right)\right] d_o \quad , \\
 &\quad - c_1 a_1 \left(\gamma z_* - \frac{z_*^2}{2}\right) w_o \\
 \frac{\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o + \alpha a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} &= d_o - \frac{c_1 a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} w_o
 \end{aligned} \tag{B-26}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
 \lambda &\equiv \gamma z_* - \frac{z_*^2}{2} \\
 &= \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right] \quad .
 \end{aligned} \tag{B-27}$$

Insertando la definición de d_o (Ec. (B-5)), en (B-26) se obtiene

$$\frac{\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o + \alpha a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} = 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_o + c_1 a_o) w_o - \frac{c_1 a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} w_o \quad ,$$

y agrupando nuevamente

$$\left[c_o + c_1 a_o + \frac{c_1 a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} \right] w_o = 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - \frac{\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o + \alpha a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} \quad .$$

Por último despejando el contenido de agua w_o resulta

$$w_o = \frac{1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o}{\left[c_o + c_1 a_o + \frac{c_1 a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)} \right]} - \frac{\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o + \alpha a_1 \lambda}{(c_o + c_1 a_o)(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda) + c_1 a_1 \lambda} \quad ,$$

APÉNDICE A

e insertando los valores de γ y λ definidos previamente (Ecs. (B-25) y (B-27)) se tiene que

$$w_o(H_{Dome}) = \frac{1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T P_o}{\left\{ c_o + c_1 a_o + \frac{c_1 a_1 \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]}{(H_{Dome} + H_o) - \rho_r g \kappa_T \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]} \right\} \frac{\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r} \right) H_o + \alpha a_1 \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]}{\left(c_o + c_1 a_o \right) \left\{ (H_{Dome} + H_o) - \rho_r g \kappa_T \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right] \right\} + c_1 a_1 \left[(H_{Dome} + H_o) z_* - \frac{z_*^2}{2} \right]}$$

Profundidad de exsolución H_{ex}

Se sabe que la distribución de presión dentro de una columna magmática es

$$p(z) = \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + U e^{-Rz} .$$

Utilizando el hecho de que $|Rz| \sim 10^{-3} \ll 1$, el término exponencial e^{-Rz} se puede aproximar por el polinomio de segundo orden $1 - Rz + (Rz)^2 / 2$ y la expresión anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} p(z) &= \left(M + Nz - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R} + U \left[1 - Rz + \frac{(Rz)^2}{2} \right] \\ &= \frac{M}{R} + \frac{N}{R} z - \frac{N}{R^2} + U - URz + \frac{UR^2}{2} z^2 . \\ &= \left(\frac{M}{R} - \frac{N}{R^2} + U \right) + \left(\frac{N}{R} - UR \right) z + \left(\frac{UR^2}{2} \right) z^2 \end{aligned}$$

Evaluando esta expresión en el nivel de exsolución $z = z_{ex}$ se obtiene $p(z_{ex}) = P_{ex}$, o bien

APÉNDICE A

$$P_{ex} = \left(\frac{M}{R} - \frac{N}{R^2} + U \right) + \left(\frac{N}{R} - UR \right) z_{ex} + \left(\frac{UR^2}{2} \right) z_{ex}^2$$

$$0 = \left(\frac{M}{R} - \frac{N}{R^2} + U - P_{ex} \right) + \left(\frac{N}{R} - UR \right) z_{ex} + \left(\frac{UR^2}{2} \right) z_{ex}^2 \quad ,$$

$$0 = z_{ex}^2 + pz_{ex} + q$$

en donde se han definido

$$p \equiv \frac{\left(\frac{N}{R} - UR \right)}{\left(\frac{UR^2}{2} \right)}$$

y

$$q \equiv \frac{\left(\frac{M}{R} - \frac{N}{R^2} + U - P_{ex} \right)}{\left(\frac{UR^2}{2} \right)} \quad .$$

Los parámetros p y q se pueden expresar en términos de d_o y d_l . Utilizando los resultados (B-21) y (B-22) resulta que p es

$$p = \frac{(-\rho_r g d_o)}{\left(-\frac{1}{2} \rho_r g d_l \right)} = 2 \frac{d_o}{d_l} \quad .$$

Utilizando las definiciones de (B-6) y (B-21) el término $M/R - N/R^2 + U - P_{ex}$ se puede simplificar

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{R} - \frac{N}{R^2} + U - P_{ex} &= \left(M - \frac{N}{R} + UR - P_{ex}R \right) \frac{1}{R} \\
 &= (M + \rho_r g d_o - P_{ex}R) \frac{1}{R} \\
 &= [-\rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) + \rho_r g d_o - P_{ex}R] \frac{1}{R} \quad , \\
 &= (-\rho_r g d_o + \rho_r \kappa_T p_o + \rho_r g d_o - P_{ex}R) \frac{1}{R} \\
 &= (p_o R - P_{ex}R) \frac{1}{R} \\
 &= p_o - P_{ex}
 \end{aligned}$$

y

$$q = \frac{p_o - P_{ex}}{\left(-\frac{1}{2} \rho_r g d_1 \right)} = -2 \frac{p_o - P_{ex}}{\rho_r g d_1} \quad .$$

La solución matemática de la ecuación cuadrática $z_{ex}^2 + pz_{ex} + q = 0$ son las raíces $r = z_{ex} = -p/2 \pm (p^2/4 - q)^{1/2}$. En este estudio se observa la siguiente propiedad: si $d_1 < 0$, tiene significado físico únicamente la raíz con el radical negativo

$$r = z_{ex} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad ,$$

de lo contrario (si $d_1 > 0$) la solución es la raíz con radical positivo

$$r = z_{ex} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad .$$

El algoritmo que se utiliza para obtener las profundidades de exsolución de la Tabla 9 tomando en cuenta que la máxima altura que alcanzó el domo del Popocatepetl a finales de 2000 fue de 180 m sobre el nivel del cráter consta de los siguientes pasos:

APÉNDICE A

1. Cálculo del punto inicial z_* , del método de Newton.
2. Cálculo del contenido de agua w_o .
3. Obtención de la presión de exsolución P_{ex} .
4. Obtención del nivel de exsolución $z_{ex}=r$ (medido con respecto al nivel de compensación) en donde la columna magmática tiene la presión P_{ex} .
5. Cálculo de la profundidad de exsolución H_{ex} .

Un ejemplo concreto aclara en seguida esta secuencia para el caso de una densidad de la roca encajonante $\rho_{CR}=2500 \text{ kg/m}^3$, altura del domo $H_{Dome}=180 \text{ m}$, profundidad de compensación $H_o=6000 \text{ m}$ y intervalo de temperaturas del fundido dacítico $T \in [800, 1000] \text{ K}$ (valores de la primera línea de la Tabla 9).

Cálculo de z_*

Este valor se obtiene de la expresión

$$z_* = z_r(0 \text{ wt\% } H_2O) - \frac{d_o(0 \text{ wt\% } H_2O)}{d_1(0 \text{ wt\% } H_2O)} \sqrt{\left[\frac{d_o(0 \text{ wt\% } H_2O)}{d_1(0 \text{ wt\% } H_2O)} \right]^2 + 2 \frac{\rho_{CR} H_o}{\rho_r d_1(0 \text{ wt\% } H_2O)}} .$$

El parámetro d_o esta dado por

$$d_o(w_o) \Big|_{w_o=0 \text{ wt\% } H_2O} = 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_o + c_1 a_o) w_o \quad ,$$

y la distribución de temperatura para una profundidad de compensación $H_o=6000 \text{ m}$ es

$$(919 \text{ K}, 6000 \text{ m}) \quad \mapsto \quad T(z) = 919 \text{ K} - \left(\frac{919 - 800 \text{ K}}{6000 - 100 \text{ m}} \right) z$$

en donde

APÉNDICE A

$$a_o = 919 K$$

y

$$a_1 = -\left(\frac{919 - 800 \frac{K}{m}}{6000 - 100 \frac{m}{m}}\right) = -\frac{119 \frac{K}{m}}{5900 \frac{m}{m}} \quad .$$

Así mismo

$$\begin{aligned} p_o &= \rho_{CR} g H_o \\ &= \left(2500 \frac{kg}{m^3}\right) \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) (6000 m) \\ &= 147,150,000 Pa \end{aligned}$$

Consultando los valores de la Tabla 5 el valor de d_o para el fundido anhidro esta dado por

$$\begin{aligned} d_o(0 \text{ wt}\% H_2O) &= 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o \\ &= 1 + \alpha(T_r - a_o) + \kappa_T p_o \\ &= 1 + \left(3.8 \times 10^{-5} \frac{1}{K}\right) (1673 K - 919 K) + \left(66.365 \times 10^{-12} \frac{1}{Pa}\right) (147,150,000 Pa) \\ &= 1 + 0.028652 + 0.009766 \\ &= 1.038418 \end{aligned}$$

El parámetro d_l se calcula mediante

$$d_1(w_o) \Big|_{w_o=0 \text{ wt}\% H_2O} = -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o(w_o) - c_1 a_1 w_o \quad .$$

En el caso de un fundido anhidro

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 d_1(0 \text{ wt\% } H_2O) &= -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o(0 \text{ wt\% } H_2O) \\
 &= -\left(3.8 \times 10^{-5} \frac{1}{K}\right) \left(-\frac{119 \text{ K}}{5900 \text{ m}}\right) \\
 &\quad - \left(2416.48 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \left(66.365 \times 10^{-12} \frac{1}{\text{Pa}}\right) (1.038418) \\
 &= 0.076644 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}} - 0.163366 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}} \\
 &= -0.086722 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 z_* &= -\frac{1.038418}{\left(-0.086722 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}\right)} \\
 &= -\sqrt{\left[\frac{1.038418}{\left(-0.086722 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}\right)}\right]^2 + 2 \frac{\left(2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (6000 \text{ m})}{\left(2416.48 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(-0.086722 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}\right)}} \\
 &= 1,197,410.115 \text{ m} - 1,191,417.395 \text{ m} \\
 &= 5,992.72 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Cálculo de w_o

Para ello se utiliza

$$w_o = \frac{d_o(0 \text{ wt\% } H_2O)}{\left[c_o + c_1 a_o + \frac{c_1 a_1 \lambda}{(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda)}\right]} - \frac{\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right) H_o + \alpha a_1 \lambda}{(c_o + c_1 a_o)(\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda) + c_1 a_1 \lambda}$$

donde $d_o(0 \text{ wt\% } H_2O) = 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o$, $\lambda = \gamma z_* - z_*^2/2$ y $\gamma = H_{Dome} + H_o$.

En particular, en nuestro caso se tiene que

APÉNDICE A

$$\gamma = 180\text{ m} + 6,000\text{ m} = 6,180\text{ m} \quad ,$$

y

$$\lambda = (6,180\text{ m})(5,992.72\text{ m}) - \frac{(5,992.72\text{ m})^2}{2} = 19,078,663.1\text{ m}^2$$

Utilizando los valores de la Tabla 5 resulta

$$\begin{aligned} c_o + c_1 a_o &= 5.35068 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{wt}\%} + \left(9.916851 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{wt}\% - K} \right) (919\text{ K}) \\ &= 14.848654 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{wt}\%} \end{aligned}$$

Así mismo los valores de las cantidades $\gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda$, $c_1 a_1 \lambda$, $\alpha a_1 \lambda$ y $(\rho_{CR} / \rho_r) H_o$ están dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \gamma - \rho_r g \kappa_T \lambda &= 6,180\text{ m} \\ &\quad - \left(2,416.48 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \left(66.365 \times 10^{-12} \frac{1}{\text{Pa}} \right) (19,078,663.1\text{ m}^2) \\ &= 6,180\text{ m} - 30.015\text{ m} \\ &= 6,149.985\text{ m} \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} c_1 a_1 \lambda &= \left(9.916851 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{wt}\% - K} \right) \left(-\frac{119\text{ K}}{5900\text{ m}} \right) (19,078,663.1\text{ m}^2) \\ &= -3.816 \frac{\text{m}}{\text{wt}\%} \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \alpha a_1 \lambda &= \left(3.8 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \right) \left(-\frac{119\text{ K}}{5900\text{ m}} \right) (19,078,663.1\text{ m}^2) \\ &= -14.623\text{ m} \end{aligned} \quad ,$$

APÉNDICE A

y

$$\left(\frac{\rho_{CR}}{\rho_r}\right)H_o = \left(\frac{2,500 \frac{kg}{m^3}}{2,416.48 \frac{kg}{m^3}}\right)(6,000 m) = 6,207.376 m$$

Por lo tanto la cantidad de agua w_o resulta

$$\begin{aligned} w_o &= \frac{1.038418}{\left[14.848654 \times 10^{-3} \frac{1}{wt\%} + \frac{\left(-3.816 \frac{m}{wt\%}\right)}{6,149.985 m}\right]} \\ &= \frac{1.038418}{\left(14.848654 \times 10^{-3} \frac{1}{wt\%}\right)(6,149.985 m) + \left(-3.816 \frac{m}{wt\%}\right)} \\ &= \frac{1.038418}{14.228165 \times 10^{-3} \frac{1}{wt\%}} - \frac{6,192.753 m}{87.503 \frac{m}{wt\%}} \\ &= 72.98 wt\% - 70.77 wt\% \\ &= 2.21 wt\% \end{aligned}$$

Obtención de P_{ex}

En el intervalo de temperaturas $T \in [800, 1000]$ K la curva de saturación del agua es

$$w_s = \left[0.193 \frac{wt\%}{(bar)^{1/2.166}}\right] P^{1/2.166},$$

y despejando la presión de exsolución P

APÉNDICE A

$$P = \left[\frac{1}{0.193 \frac{\text{wt}\%}{(\text{bar})^{2.166}}} w_s \right]^{2.166}$$

Por lo tanto, la presión de exsolución P_{ex} necesaria para que se mantenga disuelta una cantidad máxima de agua de 2.21 wt% está dada por

$$\begin{aligned} P_{ex} &= P(2.21 \text{ wt}\%) \\ &= \left[\frac{1}{0.193 \frac{\text{wt}\%}{(\text{bar})^{2.166}}} 2.21 \text{ wt}\% \right]^{2.166} \\ &\cong 197 \text{ bar} \\ &= 19,700,000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Obtención del nivel de exsolución $r=z_{ex}$

Este valor se calcula usando la fórmula

$$\begin{aligned} r &= z_{ex}(2.21 \text{ wt}\% H_2O) \\ &= -\frac{d_o(2.21 \text{ wt}\% H_2O)}{d_1(2.21 \text{ wt}\% H_2O)} - \sqrt{\left[\frac{d_o(2.21 \text{ wt}\% H_2O)}{d_1(2.21 \text{ wt}\% H_2O)} \right]^2 + 2 \frac{(p_o - P_{ex})}{\rho_r g d_1(2.21 \text{ wt}\% H_2O)}} \end{aligned}$$

La forma general del parámetro d_o esta dado por

$$\begin{aligned} d_o(w_o) \Big|_{w_o=2.21 \text{ wt}\% H_2O} &= 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_o + c_1 a_o) w_o \\ &= d_o(0 \text{ wt}\% H_2O) - (c_o + c_1 a_o)(2.21 \text{ wt}\% H_2O) \end{aligned}$$

e introduciendo los valores respectivos de cada término

APÉNDICE A

$$\begin{aligned}
 d_o(2.21 \text{ wt\% } H_2O) &= 1.038418 - \left(14.848654 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{wt\%}} \right) (2.21 \text{ wt\%}) \\
 &= 1.038418 - 0.032815 \\
 &= 1.005603
 \end{aligned}$$

Del mismo modo la expresión general para calcular el parámetro d_1 es

$$\begin{aligned}
 d_1(w_o) \Big|_{w_o=2.21 \text{ wt\% } H_2O} &= -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o(w_o) - c_1 a_1 w_o \\
 &= -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o(2.21 \text{ wt\% } H_2O) - c_1 a_1 (2.21 \text{ wt\% } H_2O)
 \end{aligned}$$

e insertando los valores para cada término

$$\begin{aligned}
 d_1(w_o) \Big|_{w_o=2.21 \text{ wt\% } H_2O} &= - \left(3.8 \times 10^{-5} \frac{1}{K} \right) \left(- \frac{119 \text{ K}}{5900 \text{ m}} \right) \\
 &\quad - \left(2416.48 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \left(66.365 \times 10^{-12} \frac{1}{\text{Pa}} \right) (1.005603) \\
 &\quad - \left(9.916851 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{wt\%} - K} \right) \left(- \frac{119 \text{ K}}{5900 \text{ m}} \right) (2.21 \text{ wt\%}) \\
 &= 0.076644 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}} - 0.158204 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}} + 0.044204 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}} \\
 &= -0.037356 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

De los valores d_o y d_1 calculados previamente, los cocientes d_o/d_1 y $(d_o/d_1)^2$ respectivamente son

$$\frac{d_o}{d_1} = \frac{1.005603}{-0.037356 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}} = -2,691,945.07 \text{ m}$$

Y

$$\left(\frac{d_o}{d_1} \right)^2 = 7,246,568,259,897.30 \text{ m}^2$$

APÉNDICE A

Así mismo la cantidad $2(p_o - P_{ex})/\rho_r g d_1$ tiene el valor de

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{p_o - P_{ex}}{\rho_r g d_1}\right) &= 2 \frac{(147,150,000 \text{ Pa} - 19,700,000 \text{ Pa})}{\left(2416.48 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\left(-0.037356 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}\right)} \\ &= 2 \left(\frac{127,450,000 \text{ Pa}}{-885.55 \times 10^{-5} \frac{\text{Pa}}{\text{m}^2}}\right) \\ &= -28,784,371,294.67 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el discriminante Δ es

$$\Delta = \left(\frac{d_o}{d_1}\right)^2 + 2 \frac{(p_o - P_{ex})}{\rho_r g d_1} = 7,217,783,888,602.63 \text{ m}^2$$

y su raíz

$$\sqrt{\Delta} = 2,686,593.36 \text{ m}$$

Finalmente el nivel de exsolución r esta dado por

$$\begin{aligned} r &= z_{ex} (2.21 \text{ wt}\% \text{ H}_2\text{O}) \\ &= -\frac{d_o}{d_1} - \sqrt{\Delta} \\ &= -(-2,691,945.07 \text{ m}) - 2,686,593.36 \text{ m} \\ &= 5351.71 \text{ m} \\ &\cong 5352 \text{ m} \end{aligned}$$

Cálculo de la profundidad de exsolución H_{ex}

La profundidad de exsolución viene proporcionada por la sencilla expresión

APÉNDICE A

$$\begin{aligned} H_{ex} &= H_o - r \\ &= 6000 \text{ m} - 5352 \text{ m} \quad . \\ &= 648 \text{ m} \end{aligned}$$

Anexo 1



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

Journal of Volcanology and Geothermal Research 171 (2008) 287–300

 Journal of volcanology
and geothermal research

www.elsevier.com/locate/jvolgeores

Research paper

A simplified equation of state for the density of silicate hydrous magmas: An application to the Popocatépetl buoyancy-driven dome growth process

Alex Onar González-Mellado ^{a,*}, Servando De la Cruz-Reyna ^b^a Programa de Posgrado de Ciencias de la Tierra, Universidad Nacional Autónoma de México, C. Universitaria, 04510 D.F. Mexico, Mexico^b Instituto de Geofísica Universidad Nacional Autónoma de México, C. Universitaria, 04510 D.F. Mexico, Mexico

Received 11 April 2007; accepted 11 December 2007

Available online 23 December 2007

Abstract

We present a simplified equation of state (EOS) for calculating the density of hydrous siliceous magmas in a range of pressures, temperatures and dissolved water content of interest to study several magma conduit processes. A simpler linear form and a more precise non-linear, yet simple form of the equation, both valid in the range 0 to 0.25 GPa, 800 to 1000 K, and 0 to 7 wt.% H₂O are proposed for the dacitic and andesitic Popocatépetl magma melt compositions. We apply these equations to explain some aspects of the dome-forming effusive activity that has been observed at Popocatépetl volcano since 1996. This model poses a density reduction dependent mainly on the volatile contents of the magma filling the volcano conduit system as the driving buoyancy force causing magma extrusions and dome growth.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: equation of state; density; dome growth; volatile contents; Popocatépetl**1. Introduction**

Density is one of the parameters controlling magma behavior and evolution. Convection in magma reservoirs, magma flow in conduits, rate of crystal settlement or crustal magma rise are examples of processes in which the magma density variations within the conduit, and the density contrast between magma and surrounding rocks play a determining role. Considering the ample variety and complex multicomponent mixtures of magmas, it represents a difficult problem to describe magma density as a function of temperature, pressure, composition and volatile. Particularly, the low molecular weight of water and other volatiles makes their contribution to the density of magmas quite significant.

Of special interest is the case of Popocatépetl volcano. After nearly 70 years of quiescence, the Popocatépetl volcano reawakened on December 21, 1994, producing ash and gas

emissions. Most of these emissions were low-intensity explosions and were referred to as “exhalations”. Sometimes they were predominantly gas and steam, carrying little ash. This type of gas-rich exhalation activity persisted through 1995 and early 1996. In late March 1996, a lava dome was observed growing for the first time on the crater bottom. The first dome-destruction explosion occurred on April 30, 1996 (De la Cruz-Reyna and Siebe, 1997). This event marked the beginning of a series of at least 26 dome growth and destruction episodes that continues to the date of this submission. In the present paper, we discuss a model in which the dome extrusions are produced by the buoyant ascent of magma in a volcanic conduit system extending over a long vertical distance. We find that the density contrast changes caused mainly by the volatile content variations of the Popocatépetl magma can explain its ascent and the dome formations. We apply the simplified equation of state for density proposed in the paper over the whole length of the conduit (or plumbing) system and find the conditions required by the magma column (understood as the vertical length of hydraulically-connected magma plumbing system that defines the hydrostatic pressure or head at a given depth) to generate the

* Corresponding author.

E-mail addresses: volcalex@yahoo.com (A.O. González-Mellado), sdelacr@geofisica.unam.mx (S. De la Cruz-Reyna).

magma ascent and the consequent effusive activity. These conditions result to be consistent with observed data such as sample compositions, some aspects of seismicity and the volume and height of emplaced domes.

Density contrast is thus the main parameter governing the height to which a magma column will rise in that type of effusive eruptions. Furthermore, the possibility of density-driven convection in the magma conduit may help to explain the paradoxical behavior known as the *excess sulfur problem* (Wallace and Anderson, 2000), producing amounts of gas that would require unlikely weight percents of volatiles in the degassing magma volume. Kazahaya et al. (1994) have proposed volatile-concentration driven convection to explain the excessive degassing observed in some volcanoes. Popocatepetl has been passively degassing enormous quantities of volcanic gases. In addition to several years of moderate activity, Popocatepetl has released amounts comparable to the short-lived emissions of the highly-explosive eruptions of El Chichón in 1982 or Pinatubo in 1991 (Delgado-Granados et al., 2001). Despite the rather low magma output, mean SO₂ fluxes have typically been about 5000 t/d, although at times (e.g., in January 1997 and September–December 1998) emissions have reached values as high as 40,000–50,000 t/d (Wright et al., 2002). The analysis of convection in the conduit is beyond the scope of this paper, and here we concentrate on describing the density of the gas-rich magma involved in the activity of Popocatepetl during the period 1996–2000, when lava samples were analyzed (Straub and Martin-Del Pozzo, 2001; Witter, 2003; Schaaf et al., 2005; Witter et al., 2005; Atlas et al., 2006). These studies show that the dome-forming magma has a composition varying from andesite to dacite. For the purpose of this work, we pay special attention to the end members of this range.

2. Magma density

To construct a relatively simple EOS capable of reproducing density values calculated and measured by other authors for a wide range of compositions, temperatures, and volatile contents, we initially assume a melt density, which depends on its composition, temperature T , pressure p and H₂O content w .

For acidic magmas the thermodynamic variable domain D_T we expect to describe with the EOS corresponds to that of the Popocatepetl magma melt is

$$D_T = \{(p, T, w) | p \in [0, 0.25] \text{ GPa}, T \in [800, 1000] \text{ K}, w \in [0, 7] \text{ wt.}\%\} \quad (1)$$

in the depth range

$$\{z | z \in [0, 10, 000] \text{ m}\} \quad (2)$$

where the origin ($z=0$) is set at the isostatic compensation level of the magma plumbing system and the highest value corresponds to the level of the crater vent. This value is thus equal to the assumed depth of the plumbing system contributing to the effusive process, which we limit to a maximum of 10 km.

The density of silicate melts and the role of water in the density of magmas has been analyzed, measured, and reviewed by several authors (e.g., Burnham and Davis, 1971, 1974; Lange and

Carmichael, 1987, 1990; Ochs and Lange, 1997, 1999; Richet et al., 2000; Bouhifd et al., 2001; Lange, 2002). Considering its application over a wide range of pressures, temperatures and compositions, here we will use the relationships discussed by Lange and Carmichael (1987, 1990), Lange (1994, 1997), and Ochs and Lange (1999), as a departure point for our study. From here on we will be referring to the relationship

$$\rho_s(p, T, X_i) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i M_{mi}}{\sum_{i=1}^n X_i \left[(V_{mi})_{p_r, T_r} + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p (T - T_r) + \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T (p - p_r) \right]} \quad (3)$$

as the “standard density” ρ_s , where n is the number of components in the melt, X_i the composition of the magma melt in mole fraction units, M_{mi} the molar mass of the i -th component, $(V_{mi})_{p_r, T_r}$ is the initial partial molar volume, $(\partial V_{mi}/\partial T)_p$ and $(\partial V_{mi}/\partial p)_T$ are, respectively, the partial molar volume variations with temperature and pressure, of each component at a reference pressure and temperature p_r and T_r , generally 1673 K and 10^{-4} GPa (see Spera, 2000 Table II). To find an equation for the density of a melt with a simpler algebraic structure than Eq. (3), it is convenient to express the standard density in terms of the specific volume v

$$\rho_s(p, T, w_i) = \frac{1}{v(p, T, w_i)}. \quad (4)$$

The dependence of the specific volume on pressure, temperature, and composition of the melt is given by the linear relationship

$$v(p, T, w_i) = \sum_{i=1}^n A_i w_i [1 + \alpha_i (T - T_r) - \kappa_{Ti} (p - p_r)] \quad (5)$$

where w_i is the weight percent of each magma melt component, and A_i is

$$A_i = \frac{(V_{mi})_{p_r, T_r}}{100 M_{mi}}. \quad (6)$$

α_i and κ_{Ti} are the thermal expansion and the isothermal compressibility of each component defined respectively as

$$\alpha_i = \frac{1}{V_{mi}} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial T} \right)_p \quad \text{and} \quad \kappa_{Ti} = - \frac{1}{V_{mi}} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial p} \right)_T. \quad (7)$$

Typical values of thermal expansion and isothermal compressibility found in the literature for some oxide components are listed in Table 1. To obtain a manageable expression for the density valid in the domain D_T , we made a Taylor expansion of Eq. (4) around a reference point (p_o, T_o, w_{io}) . Notice that this Taylor expansion is done in a space with $n+2$ dimensions, where n is the number of components in the melt. The added 2 dimensions correspond to pressure and temperature. Approximating to the first-order, we obtain the linear expression

$$\rho_{\text{linear}} = \rho_o \left[1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \sum_{i=1}^n \beta_i(w_i - w_{io}) \right], \quad (8)$$

Table 1
Values of α_i and κ_{Ti} for each component at 1 bar and 1673 K as calculated from Eq. (7)

Component	Thermal expansion	Compressibility
i	α_i	κ_{Ti}
	(10^{-6} K^{-1})	(10^{-4} GPa^{-1})
SiO ₂	0.0	703.65±15.31
TiO ₂	312.61±23.37	997.41±37.10
Al ₂ O ₃	0.0	603.96±25.50
Fe ₂ O ₃	215.76±84.27	600.52±25.35
FeO	213.92±121.03	329.67±25.60
MgO	279.73±16.46	-230.97±61.46
MnO	-	-
CaO	226.26±8.08	-205.69±30.99
Na ₂ O	265.93±4.02	831.03±19.04
K ₂ O	268.03±4.97	1497.67±34.05
Li ₂ O	311.57±50.84	605.34±41.00
P ₂ O ₅	-	-
CO ₂	0.0	0.0
H ₂ O	360.11±38.45	1199.09±255.03

where $\rho_o = \rho_s(p_o, T_o, w_{io})$, and

$$\alpha = \frac{1}{v_o} \sum_{i=1}^n A_i w_{io} \alpha_i, \quad (9)$$

$$\kappa_T = \frac{1}{v_o} \sum_{i=1}^n A_i w_{io} \kappa_{Ti}, \quad (10)$$

and

$$\beta_i = \frac{A_i}{v_o^2} [1 + \alpha_i(T_o - T_r) - \kappa_{Ti}(p_o - p_r)]. \quad (11)$$

$v_o = v(p_o, T_o, w_{io})$ is the specific volume at the reference point, α and κ_T are the total thermal expansion and isothermal compressibility of the magma, respectively, and β_i is a coefficient representing the volume-change contribution of the concentration of the i -th component. Notice that α , κ_T and β_i depend on the reference point (p_o, T_o, w_{io}) .

The multicomponent term of Eq. (8) may be simplified using the following expression for the water dissolution (Persikov, 1991)

$$w_{i \neq H_2O} = w_{io} \left(1 - 0.01 w_{H_2O}^* \right), \quad (12)$$

$$w_{H_2O} = w_{H_2O,o} + w_{H_2O}^*, \quad (13)$$

where w_{io} is the magma composition at the reference point (which may be dry or have an initial content of water $w_{H_2O,o}$), and w_i is the hydrated composition having an added H₂O weight percent $w_{H_2O}^*$, the cause of the density change. This transformation is essential for the following analysis because it reduces the number of independent variables involved in the equation of state. An equation of state such as Eq. (3) describing the density of a melt containing n -components requires $n+2$ variables. After linearizing (Eqs. (4)–(7)), and using the transformation Eqs. (12) and (13), we can now describe the EOS with only three variables (dimensions): T , p and w_{H_2O} .

Using $w = w_{H_2O}$, we now obtain the approximate linear expression in a 3-dimensional space

$$\rho_{\text{linear}} = \rho_o [1 - \alpha(T - T_o) + \kappa_T(p - p_o) - \beta(w - w_o)], \quad (14)$$

in which the effect of the magma components, other than water, are implicit in the thermal and compressibility coefficients α , κ_T as defined in Eqs. (9) and (10), and in β , which is defined as

$$\beta = \beta_{H_2O} (1 + 0.01 w_{H_2O,o}) - 0.01, \quad (15)$$

and β_{H_2O} can be calculated from Eq. (11). β represents the overall expansion due to concentration derived from the above water dissolution model. If the melt assimilates a certain amount of water, the volume contribution of the other $(n-1)$ components is incorporated in the overall concentration expansion coefficient β .

Eq. (14) is a linear, simple to use, EOS capable of describing the melt density of a variety of magmas with different water contents. The extent of its applications is discussed below. When greater precision for the calculation of densities is required, a non-linear form is also proposed below.

Table 2

Composition of Popocatepetl volcano rock samples (wt.% oxides), mostly dome fragments, ejected on April 30, 1996 and June 30, 1997 obtained by different authors: 1= Straub and Martin-del Pozzo, 2001; 2= Witter, 2003 and Witter et al., 2005; 3= Schaaf et al., 2005; 4= Atlas et al., 2006

Sample	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	FeO	Fe ₂ O ₃	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O	P ₂ O ₅	FeO _{tot}	SUM	Ref.
30496/Pro	59.80	0.76	16.03	-	-	0.09	5.43	5.61	3.92	1.44	0.15	5.56	98.79	1
30496/RXT	61.02	0.76	16.30	-	-	0.09	4.02	5.16	4.03	1.68	0.16	5.43	98.65	1
30697/MAN	58.32	0.86	15.99	-	-	0.09	5.92	5.90	3.92	1.39	0.18	6.01	98.58	1
30697/P.C.	63.97	0.71	16.76	-	-	0.08	3.18	4.87	4.26	1.77	0.15	4.73	100.48	1
96D3-1	60.81	0.67	15.84	-	-	0.09	3.48	5.04	4.21	1.67	0.17	5.80	97.78	3
96D3-Com	63.23	0.71	16.28	-	-	0.08	3.39	4.96	4.36	1.75	0.17	5.11	100.04	3
97D1	58.20	0.92	16.06	-	-	0.10	6.97	6.24	4.21	1.34	0.22	6.58	100.84	3
97D2	62.92	0.73	16.58	-	-	0.10	3.55	5.05	4.56	1.81	0.17	5.05	100.52	3
TETEL-4B	62.76	0.94	18.09	-	-	0.05	2.03	4.84	1.44	1.76	0.28	3.35	95.54	4
SEMPOPO	65.00	0.63	16.57	-	-	0.08	2.19	4.91	4.53	1.95	0.14	4.12	100.12	2
andesitic	58.20	0.92	16.06	3.29	3.29	0	6.97	6.24	4.21	1.34	0	6.58	100.52	-
dacitic	65.00	0.63	16.57	2.06	2.06	0	2.19	4.91	4.53	1.95	0	4.12	99.90	-

SEMPOPO stands for *silicic end member of Popocatepetl*, and the last two rows (andesitic and dacitic) show the generic values used in this study as characteristic magma compositions for the density and buoyancy force modeling.

Often, the available data that can be used as reference points (p_o, T_o, w_o) fall far away from the domain region of interest in which density needs to be calculated. Sometimes, they may even fall outside the domain. In such cases, the correlation between the linear density and the standard density may be less satisfactory. For instance, estimates of the linear density in domain (1), obtained from the reference point $(p_o = p_r = 1 \text{ bar} \approx 0 \text{ GPa})$, $T_o = T_r = 1673 \text{ K}$, and $w_o = w_r = 0 \text{ wt. \% H}_2\text{O}$, a point where many experimental data have been published, show significant departures from the standard density values at lower temperatures, and particularly at high water concentrations. To prevent this, we use a correction on the parameter β in Eq. (15).

Using for example $p^* = 0.25 \text{ GPa}$, and $T^* = 1000 \text{ K}$, we may linearly relate the density at this domain point to the standard density at the above point with the averaging function

$$\rho(p^*, T^*, w) = mw + (\rho_s)_o, \quad (16)$$

where

$$m = \frac{(\rho_s)_1 - (\rho_s)_o}{w_1}, \quad (17)$$

and

$$\begin{aligned} (\rho_s)_1 &\equiv \rho_s(p^*, T^*, w_{i \neq \text{H}_2\text{O}}, 7 \text{ wt. \% H}_2\text{O}) \\ (\rho_s)_o &\equiv \rho_s(p^*, T^*, w_{i \neq \text{H}_2\text{O}}, 0 \text{ wt. \% H}_2\text{O}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$w_1 = 7 \text{ wt. \% H}_2\text{O}$$

Evaluating Eq. (14) at the point (p^*, T^*, w) , and using (p_r, T_r, w_r) as a reference point, i.e., a point in which experimental points for p_r and T_r are available. Considering that w_r is an adjustable initial water content, we obtain for $w_r = 0$ and $p_r \approx 0$

$$\rho_{\text{linear}}(p^*, T^*, w) = \rho_r [1 - \alpha(T^* - T_r) + \kappa_T p - \beta_* w], \quad (19)$$

where β_* is a new parameter to be found. To do so, we equate the linear Eqs. (16) and (19), obtaining

$$\beta_* = \frac{\text{abs}(m)\rho_{\text{dry}}}{\rho_r(\rho_s)_o}. \quad (20)$$

here, the density ρ_{dry} at point $(p^*, T^*, w_o = 0)$ is

$$\rho_{\text{dry}}(p^*, T^*, w_o) = \rho_r [1 - \alpha(T^* - T_r) + \kappa_T p^*] \approx (\rho_s)_o. \quad (21)$$

With this change, Eq. (19) is an acceptable linear approximation for every domain point (p^*, T^*, w) for $w \in [0, 7] \text{ wt. \%}$.

However, with this correction, the parameter β_* is no longer constant within the D_T domain. Since density is much more sensitive to temperature than to pressure, we propose a simplified expression for the temperature dependence of this parameter using two possible fittings:

$$\beta(T) = \begin{cases} c_o + c_1 T & (a) \\ c_o + c_1 T + c_2 T^2 & (b) \end{cases}. \quad (22)$$

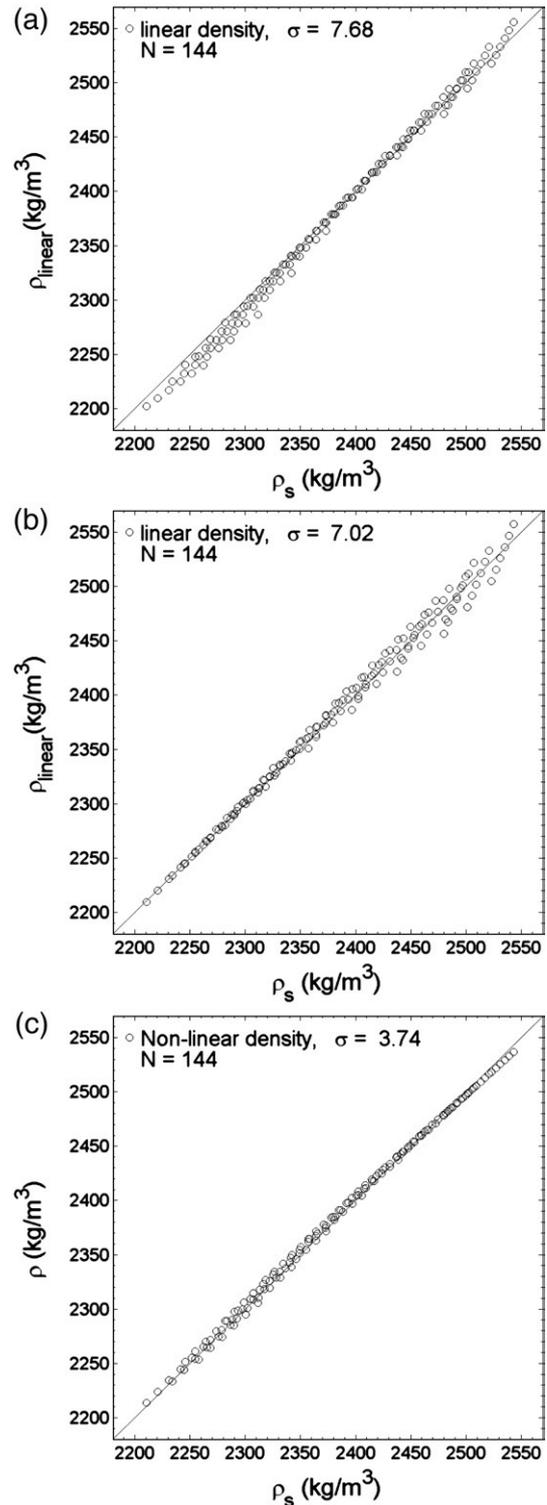


Fig. 1. (a) Comparison of the Popocatepetl dacitic standard density ρ_s (Eq. (3)) with the linear density model ρ_{linear} (Eq. (14)) in the domain D_T , at the reference point $p_o = 0.25 \text{ GPa}$, $T_o = 1000 \text{ K}$, $w_o = 3.5 \text{ wt. \% H}_2\text{O}$. (b) ρ_{linear} vs. ρ_s at the reference point $p_o = 0.25 \text{ GPa}$, $T_o = 1000 \text{ K}$, $w_o = 7.0 \text{ wt. \% H}_2\text{O}$. (c) Comparison between the Popocatepetl dacitic standard density ρ_s (Eq. (3)) and the non-linear model ρ (Eq. (23)), in the domain D_T , at the reference point $p_o = 0 \text{ GPa}$, $T_o = 1673 \text{ K}$, and $w_o = 0 \text{ wt. \% H}_2\text{O}$. The lines represent the regions of highest correlation. N is the domain points for plotting. The standard deviation is calculated from $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \langle r \rangle)^2}$ where N is the number of data, r_i are the residuals and $\langle r \rangle$ is the data mean.

Table 3

Calculated values of the thermodynamic parameters ρ_o , α , κ_T , β and the values of c_o and c_l used to calculate the values of $\beta(T)$ in Eq. (23), for dacitic and andesitic melts of Popocatepetl volcano, in different temperature ranges

Test	Sample	Temperature range (K)	p_o (GPa)	T_o (K)	w_o (wt.%)	ρ_o (kg/m ³)	$\alpha \times 10^{-5}$ (K ⁻¹)	$\kappa_T \times 10^{-3}$ (GPa ⁻¹)	$\beta \times 10^{-3}$ (wt.% ⁻¹)	$c_o \times 10^{-3}$ (wt.% ⁻¹)	$c_l \times 10^{-6}$ (wt.%-K) ⁻¹	σ (kg/m ³)
A	dacitic	[800, 1000]	0.25	1000	3.5	2383.06	8.0	77.741	16.172	–	–	7.68
B	dacitic	[800, 1000]	0.25	1000	7.0	2257.88	11.6	85.305	15.635	–	–	7.02
C	dacitic	[800, 1000]	0	1673	0	2416.48	3.8	66.365	–	5.735068	9.91685	3.74
A	dacitic	[1000, 1200]	0.25	1200	3.5	2345.53	7.9	76.517	18.309	–	–	7.64
B	dacitic	[1000, 1200]	0.25	1200	7.0	2206.66	11.3	83.370	17.534	–	–	7.76
C	dacitic	[1000, 1200]	0	1673	0	2416.48	3.8	66.365	–	6.355503	9.295871	3.84
A	andesitic	[1000, 1200]	0.25	1200	3.5	2423.12	9.3	72.365	19.246	–	–	7.70
B	andesitic	[1000, 1200]	0.25	1200	7.0	2272.64	12.7	79.821	18.357	–	–	8.86
C	andesitic	[1000, 1200]	0	1673	0	2491.58	5.2	61.307	–	7.668689	8.993692	4.56

Test A and Test B stand for the linear density model (Eq. (14)) and Test C stands for the non-linear density model (23), with different water contents, temperature ranges and compositions. σ is the standard deviation, as defined in the caption of Fig. 1.

To obtain the coefficients c_i , we can use a set of points β^* and T^* calculated with formula (20) at $p^*=0.25$ GPa. The temperature T^* may be discretized in the domain as $T^* \in \{T_{*r} | T_{*r} = T_i + r(\Delta T), r=0, \dots, m\}$, and $w_o=0$ wt.% H₂O. Notice that T_i and T_f are the end-points of the temperature domain used in this work [800, 1000] K and [1000, 1200] K), m is the number of partitions in $[T_i, T_f]$ and $\Delta T=(T_f - T_i)/m$ is the partition size. For a small size temperature range ($T_f - T_i$), Eq. (22.a) is sufficient; otherwise it is recommended to use Eq. (22.b).

Inserting the function (22) in (19), we obtain the non-linear density

$$\rho(p, T, w) = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r) + \kappa_T p - \beta(T)w]. \quad (23)$$

It is important to notice that ρ_r , α , and κ_T , now depend on the reference point ($p_r \approx 0, T_r, w_r$).

Summarizing, Eqs. (1), (14) and (23) depend on the full magma composition w_i . The main difference between the former and the proposed EOS, is that whereas the original Eq. (1) explicitly depends on the full magma composition, Eqs. (14) and (23) depend on the reference magma composition w_{io} , and incorporate such dependence implicitly in the parameters α, κ_T and β keeping an explicit dependence on the water content.

2.1. The magma density distribution in the Popocatepetl conduit

To analyze the buoyancy of the magmatic column in a volcanic conduit system, we have to integrate the magma density over the height of the column. The task of integrating an EOS over such a range of pressure, temperature, and compositions in the postulated magma conduit system of Popocatepetl, which may be as long as 10 km, can be simplified using Eqs. (14) or (23). Even the simple Eq. (14) is general enough to be applied to a wide range of silicate magma compositions, pressures and temperatures. We now proceed to calculate the density of the andesitic–dacitic magma in the volcanic conduit system of Popocatepetl. Most of the published compositions of samples of the current activity (Straub and Martin-Del Pozzo, 2001; Witter, 2003; Schaaf et al., 2005; Witter et al., 2005; Atlas et al., 2006) report only total iron oxides. To calculate the density contribution of both iron oxides to density, we assume that in the modern samples each iron oxide contributes to half the total iron oxide value. This assumption is supported by

published data of older samples (Robin, 1984; Robin and Boudal, 1987; Boudal and Robin, 1988), in which this trend is observed. Additionally, since there are no available experimental data for $(V_{mi})_{p_r, T_r}, (\partial V_{mi} / \partial T)_p$ and $(\partial V_{mi} / \partial p)_T$ for MnO and P₂O₅, and considering their small concentrations in the relevant magma, we ignored their contribution and normalized the composition to 100 without taking them into account (see Table 2). Most of the compositions listed in Table 2 are from samples of dome fragments ejected in dome-destruction explosions that occurred on April 30, 1996 and June 30, 1997. In the present study, we selected those with patent andesitic and dacitic compositions, to represent what will be referred from now on as the “andesitic” and “dacitic” magmas, as shown in the last two rows in Table 2.

In this study we used the following discrete domains for pressure $\{p_i | p_i = 0.25 - i(0.125)$ GPa, $i=0,1,2\}$, for temperature $\{T_j | T_j = 1000 - j(40)$ K, $j=0, \dots, 5\}$ and for H₂O content $\{w_k | w_k = 7 - k$ wt.%, $k=0, \dots, 7\}$ giving a total of 144 (p_i, T_j, w_k) points to plot. Fig. 1a and b show how the standard density ρ_s of a magma with the dacitic composition of Popocatepetl compares with the linear density ρ_{linear} defined by Eq. (14) within the D_T domain, using the values of Table 3 at the reference points $p_o=0.25$ GPa, $T_o=1000$ K, and $w_o=3.5$ and 7 wt.% H₂O. The lines in Fig. 1a and b represent the regions of highest correlation. The correlation between the standard density (3) and the linear density (14) are thus quite satisfactory for these reference points.

Table 4

Calculated values of the thermodynamic parameter β^* for Popocatepetl dacite in the temperature range [800 K, 1000 K] as a function of temperature T^* at $p^*=0.25$ GPa and $w_o=0$ wt.% H₂O

Point	T^* (K)	β^* (wt.% ⁻¹)
1	800	0.013659
2	820	0.013863
3	840	0.014066
4	860	0.014267
5	880	0.014468
6	900	0.014667
7	920	0.014864
8	940	0.015061
9	960	0.015256
10	980	0.015450
11	1000	0.015642

From the calculation of the best linear fit ($r=0.9999$) for the values of β_* and T_* (see Table 4), keeping in mind that this table was generated by calculating β_* with formula (21) at $p^*=0.25$ GPa, $w_o=0$ wt.% H₂O and $T_* \in \{T_{*r} | T_{*r}=800+r(20) \text{ K}, r=0, \dots, 10\}$, and using the linear option (a) in (22), we obtain the parameter $\beta(T)$ for Popocatepetl volcano

$$\beta(T) = 5.735068 \times 10^{-3} + (9.916851 \times 10^{-6}) T \quad (24)$$

$$T \in [800 \text{ K}, 1000 \text{ K}].$$

3. Popocatepetl dome growth mechanism

The dome at Popocatepetl is a composite dome, because it represents the net result of about 26 eruptive events. This dome building and destruction process may be pictured as episodes of slow magma ascent in a conduit of unknown geometry and dimensions. Since the method used in this paper is independent of the geometry of the plumbing system, and depends only of its vertical dimension, the conduit may be visualized for the purpose of the present paper as a long vertical system of connected cracks, dykes and pipes with a vertical length of approximately 6 to 10 km as suggested by seismological (Valdés et al., 1995; Valdés-González et al., 1997; Arciniega-Ceballos et al., 2003; Shapiro et al., 2000; Cruz-Atienza et al., 2001; Novelo-Casanova and Martínez-Bringas, 2005), deformation (Espíndola et al., 2004), and petrological (Schaaf et al., 2005; Witter et al., 2005) studies.

The events of magma ascent in this conduit and the consequent dome growth were episodic with a mean rate of about 3.5 dome emplacement and destruction events per year between 1996 and 2003 (A. Gómez, CENAPRED. Personal comm.). This rate has dropped drastically after 2003. These episodes of slow upward movement of new material end up with violent explosions that blast out pieces of the dome. Even considering the relatively low ascent velocities, the upward displacements occur over a time scale that is short compared with the time between emplacements, as evidenced by the duration of the harmonic tremor associated with dome growth: usually the growth events last hours to days, while the dome emplacement events are months apart.

What causes the episodic magma ascent? We attempt to answer that question by proposing a buoyancy force derived from a density contrast between the conduit magma and the country rock. This force pushes the magma column up every time its volatile content exceeds a certain limit, and stops acting whenever the magma loses some of those volatiles. To model this, we use a simple Pratt-type isostatic (Heiskanen and Vening-Meinesz, 1958; Garland, 1965) compensation on the magma column. Let's consider a depth z_c below the crater level such that

$$p_{CR}(z_c) = p_{\text{magma}}(z_c) \quad (25)$$

where p_{CR} is the lithostatic pressure at depth z_c in the country rock, and p_{magma} is the hydrostatic pressure in the magma conduit system at the same depth z_c , is thus a level of isostatic compensation which may be located at any point of the magmatic plumbing system. Under a Pratt isostatic compensation, the magma head would be controlled by the density contrast between the magma and the country rock above this point. We propose that in a volcano like Popocatepetl, having a deep magma plumbing system and producing excessive degassing accompanied of mild eruptions consistent of slow dome growth and destruction episodes, the height of the domes above the crater floor corresponds to the head of the magmatic column (Fig. 2). It is important to point out that this approach is independent of the geometry and dimensions of the volcanic conduit, provided that all the structures that may be a part of it (cracks, dykes, pipes, etc.) are hydraulically connected.

Choosing a coordinate system with its origin at a depth z_c with the z -coordinate increasing upwards, and calling H_o the level of the crater floor above this point, we test for four possible values of the isostatic compensation level. Exsolved gas bubbles may exist in the magma at almost any of those four tested depths. However, we assume that the bubbles' relative volume and their contribution to the density balance are small below a point at a depth H_f . This is equivalent to saying that the magma in the column is monophasic in the region $z=0$ to $z=H_o-H_f$. From the depth H_f to the surface (i.e. in the range $z=H_o-H_f$ to $z=H_o$), we assume that the volume of gas (mostly H₂O) bubbles exceeds 50% of the total volume, and the magma in that region is considered a biphasic mixture (Fig. 2). The value of H_f depends on magma parameters such as the diffusion coefficient, viscosity and the crystallization rate, which we do not know for certain. Nevertheless, we assume $H_f=100$ m based on the following considerations: this depth is probably very close to the fragmentation depth where the volume of bubbles is large enough to produce dome-destruction explosions. This value is also consistent with models of magma flow in the conduit showing that bubbles exceeds 50% of the total volume at very shallow depth (e.g. Melnik and Sparks, 2005). Some direct observations after this type of explosions show shallow craters with depths around 40–50 m after partial refilling with the explosion debris. Additionally, the dome-destruction explosions of Popocatepetl have been typically in the VEI 2 range, and limited to a maximum VEI of 3, because they have never produced large amounts of juvenile material. This sets the dome and conduit magma volume involved in the explosions in the order of 10^5 – 10^6 m³, a value consistent with the chosen value of H_f . This depth, although small compared to the total length of the conduit, allows us to ignore its contribution and consider the isostatic balance of the “monophasic” part of the magma column only.

Inserting this expression in (23), with the parameters listed in Table 3 yields very satisfactory results for the Popocatepetl dacitic magma density within the domain D_T as shown in Fig. 1c.

The non-linear Eq. (23) is, as Eq. (14), very general. These equations may be used to calculate the density of other magma compositions, by recalculating the values of ρ_r , α , κ_T and $\beta(T)$ allowing for a direct calculation of the density in a rather wide range of magma compositions.

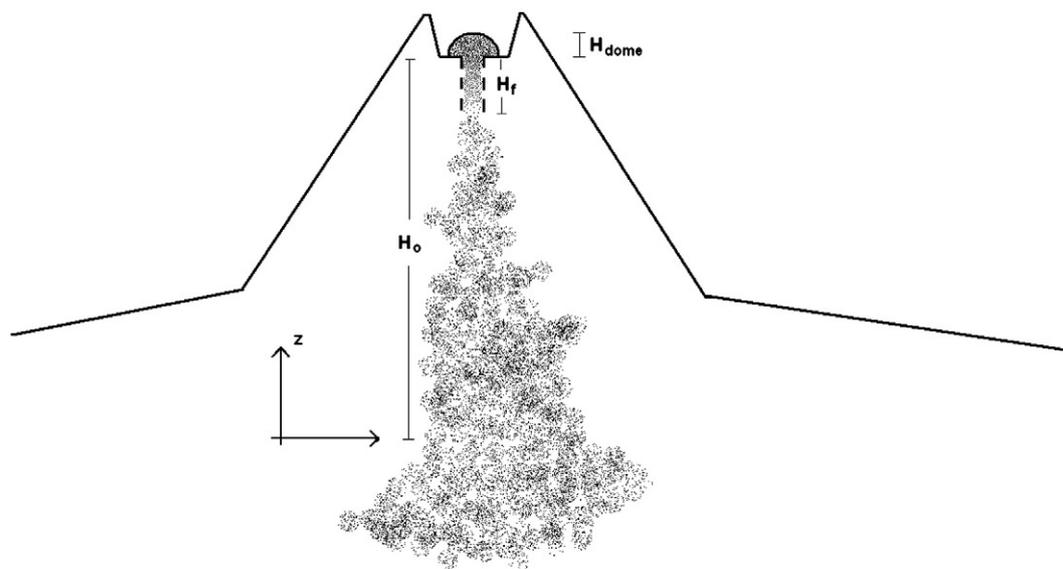


Fig. 2. Schematic diagram of the magma plumbing system configuration used in this paper. H_o is the height of the magma column in the volcanic conduit system, H_{Dome} is the height of the dome above the crater floor, and H_f is the depth of the high bubble content region. The values and ranges of the variables used here are $T_{Min} \in \{800, 1000\}$ K, $T_{Max} \in \{1000, 1200\}$ K, $H_{Max} = 10,000$ m, $\rho_{CR} \in \{2500, 2400, 2300\}$ kg/m³, $H_o \in \{4000, 6000, 8000, 10,000\}$ m, $H_f = 100$ m and $g = 9.81$ m/s².

The Pratt-type isostasy condition (25) may be obtained for the magma column by using Eq. (23) to describe its density:

$$\rho_{CR}gH_o = \int_0^z \rho_r g \{1 - \alpha[T(\xi) - T_r] + \kappa_T P(\xi) - \beta[T(\xi)]w(\xi)\} d\xi \equiv I_o(z) \quad (26)$$

where ρ_{CR} is the equivalent or effective density of the country rock surrounding the volcanic conduit referred hereinafter simply as country rock density. We assume that isostatic equilibrium between the magma in the conduit and the country rock is reached in adiabatic conditions and therefore there is no significant heat transport between the magma in the conduit and the host rock. We thus assume a vertical linear temperature gradient along the magma column in the conduit:

$$T(z) = a_o + a_1 z \quad (27)$$

where

$$a_o = T_o \quad (28)$$

and

$$a_1 = \frac{T_f - T_o}{H_o - H_f}. \quad (29)$$

Both coefficients a_o and a_1 depend on the temperature T_o at depth H_o . Considering $dT/dH = (T_f - T_{Max}) / (H_{Max} - H_f)$, this dependence is given by

$$T_o(H_o) = \left(\frac{dT}{dH}\right)(H_{Max} - H_o) + T_{Max} \quad (30)$$

Hence for each one of the four test depths indicated in the caption of Fig. 2, we will have a particular temperature distribution.

We also assume that the magma is non-saturated, with a constant volatile concentration $w_o \leq w_s$, where w_s is the maximum value of dissolved H₂O at some point of the magma column. Thus,

$$w(z) = w_o = \text{const.} \quad \text{in the depth range } z = 0 \text{ to } z = H_o - H_f. \quad (31)$$

The water saturation values w_s depend on the exsolution pressure P and temperature T of the magma. Fig. 3 shows 25 points (P_k, w_{sk}) , where $w_{sk} = w(P_k, T_k)$, and $k = 1, \dots, 25$. The points $(P_k, w(P_k, T_k))$ are obtained with the program VolatileCalc1.1 (Newman and Lowenstern, 2002). The weak dependence of w_s of the temperature in the domain allows us to use a simple power-law fit of the type $w_s = KP^{1/n}$, (Dobran, 2001), where K is a solubility constant, and $1/n$ is a constant. In the temperature range 800 K to 810 K, T_k is

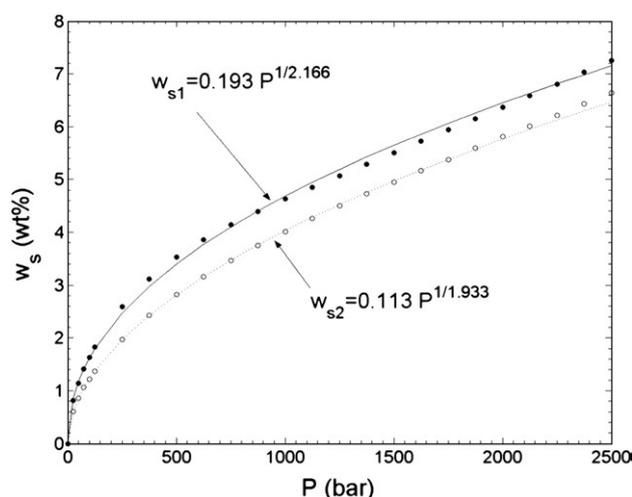


Fig. 3. Water saturation curves as a function of depth for a rhyolitic magma. The dots are the 25 points $(P_k, w_{s,k})$ calculated with the program VolatileCalc1.1 (Newman and Lowenstern 2002), and the curves represent the power-law approximation (as a function of P , the exsolution pressure). The upper curve is for T_1 in [800 K, 1000 K], and the lower curve is for T_2 in [1000 K, 1200 K].

calculated every 2° , and every 10° in the range 810 to 1000 K. The corresponding pressure values P_k were calculated at 25 bar intervals in the range 0–125 bars, and every 125 bar in the range 125–2500 bar. The best fits for the saturation curves were:

$$\begin{aligned} w_{s1}(P) &= 0.193 P^{(1/2.166)} & T \in [800K, 1000K] \\ w_{s2}(P) &= 0.113 P^{(1/1.933)} & T \in [1000K, 1200K], \end{aligned} \quad (32)$$

with a goodness of fit $r=0.999$.

The distribution of pressure along the magma in the column is given by

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_r g \{ 1 - \alpha [T(z) - T_r] + \kappa_T p(z) - \beta [T(z)] w_o \}, \quad (33)$$

which has the analytical solution

$$p(z) = \left[M + N \left(z - \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{R} + U e^{-Rz}, \quad (34)$$

where

$$\begin{aligned} M &= -\rho_r g (d_o - \kappa_T p_o) \\ N &= -\rho_r g (d_1 + \rho_r g \kappa_T d_o) \\ R &= \rho_r g \kappa_T \\ U &= p_o - \left(M - \frac{N}{R} \right) \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (35)$$

and

$$p_o = \rho_{CR} g H_o \quad (36)$$

$$d_o = 1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T p_o - (c_1 a_o - c_o) w_o \quad (37)$$

$$d_1 = -\alpha a_1 - \rho_r g \kappa_T d_o - c_1 a_1 w_o. \quad (38)$$

Inserting Eqs. (27), (31) and (34) in Eq. (26), and integrating, we obtain

$$I_o(z) = e_o z + f_o \frac{z^2}{2} - g_o e^{-Rz} + \frac{g_o}{R}, \quad (39)$$

where $I_o(z)$ is the result of the integration and

$$\begin{aligned} e_o &= \rho_r g (d_o - \kappa_T U) \\ f_o &= \rho_r g (d_1 + \kappa_T U R) \\ g_o &= \rho_r g \kappa_T U. \end{aligned} \quad (40)$$

Table 5

Exsolution pressures and depths required to grow an isostatically compensated 180 m high dome (assuming a compensation depth of 6000 m), for different values of the magma water content and country rock density

Density of country rock	H ₂ O content	Exsolution pressure	Root	Exsolution depth
ρ_{CR} (kg/m ³)	w_o (wt.%)	P (bar)	r (m)	$H_{ex} = 6000 - r$ (m)
2500	2.21	197	5355	645
2490	2.49	254	5111	889
2480	2.77	321	4822	1178
2470	3.05	395	4502	1498
2460	3.33	478	4141	1859
2450	3.62	572	3730	2270
2400	5.02	1162	1096	4904
2350	6.43	1986	-2703	8703
2300	7.83	3043	-7756	13,756

The roots in the fourth column are the algebraic solutions of the Taylor-expanded Eq. (34).

Calculating some numerical values, $e_o \sim 10^{+3}$, $f_o \sim 10^{-18}$, $g_o/R \sim 10^{+9}$ and $z \sim 10^{+3}$. Therefore the term $f_o z^2/2$ is very small compared with the others and can be neglected. Similarly, since $R \sim 10^{-6}$ and $|Rz| \sim 10^{-3} \ll 1$, the exponential term e^{-Rz} may be approximated by a polynomial of second order $1 - Rz + (Rz)^2/2$. Finally, considering that $e_o + g_o = \rho_r g d_o$ and $-g_o R/2 = \rho_r g d_1/2$, Eq. (39) yields

$$I_o(z) = \left(\frac{\rho_r g d_1}{2}\right)z^2 + (\rho_r g d_o)z. \tag{41}$$

Defining the quantity

$$I(z) \equiv I_o(z) - \rho_{CR} g H_o = \left(\frac{\rho_r g d_1}{2}\right)z^2 + (\rho_r g d_o)z - \rho_{CR} g H_o, \tag{42}$$

we can thus express Eq. (26) as

$$I(z_r) = 0, \tag{43}$$

where z_r is the root of the polynomial expression (42). In this case

$$z_r(w_o) = -\frac{d_o(w_o)}{d_1(w_o)} - \sqrt{\left[\frac{d_o(w_o)}{d_1(w_o)}\right]^2 + 2\frac{\rho_{RC} H_o}{\rho_r d_1(w_o)}}. \tag{44}$$

Expression (44) should be used carefully because it is quite sensitive to the values of d_o and d_1 , particularly at high H₂O contents. A safer way to calculate z_r is by considering that Eq. (42) is very closely linear in the range of interest. Applying the Newton method, just one iteration is needed to obtain

$$z_r = z^* - \frac{I(z^*)}{I'(z^*)}, \tag{45}$$

From here, we obtain the simplified expression

$$z_r(w_o) = \frac{[d_1(w_o)/2]z_*^2 + (\rho_{RC}/\rho_r)H_o}{d_1(w_o)z_* + d_o(w_o)}. \tag{46}$$

3.1. The maximum height of growing domes

We can now use the previous equations to obtain an estimate of the height that the dome can reach (ignoring the effect of the lateral spreading of the lava dome on its height). Choosing $z^* = z_r$ (0 wt.% H₂O) in Eq. (44) as the initial point of the Newton-method iterations, we can estimate the dome height above the crater bottom H_{Dome} as a function of H₂O content from

$$H_{Dome}(w_o) = \frac{[d_1(w_o)/2]z_*^2 + (\rho_{RC}/\rho_r)H_o}{d_1(w_o)z_* + d_o(w_o)} - H_o. \tag{47}$$

Reciprocally, we can estimate the characteristic H₂O content w_o of the magma in the conduit from the height of the dome H_{Dome} . Combining Eqs. (47), (37) and (38) we obtain

$$w_o(H_{\text{Dome}}) = \frac{1 - \alpha a_o + \alpha T_r + \kappa_T P_o}{\left\{ c_1 a_o + c_o + \frac{c_1 a_1 [(H_{\text{Dome}} + H_o) z_* - z_*^2/2]}{(H_{\text{Dome}} + H_o) - \rho_r g \kappa_T [(H_{\text{Dome}} + H_o) z_* - z_*^2/2]} \right\}} \frac{(\rho_{\text{RC}}/\rho_r) H_o + \alpha a_1 [(H_{\text{Dome}} + H_o) z_* - z_*^2/2]}{(\rho_{\text{RC}}/\rho_r) H_o + \alpha a_1 [(H_{\text{Dome}} + H_o) z_* - z_*^2/2]} \frac{1}{(c_1 a_o + c_o) \left\{ (H_{\text{Dome}} + H_o) - \rho_r g \kappa_T [(H_{\text{Dome}} + H_o) z_* - z_*^2/2] \right\} + c_1 a_1 [(H_{\text{Dome}} + H_o) z_* - z_*^2/2]} \quad (48)$$

As an example of the use of the above equations, we may introduce some of the reported values of dome heights observed at the Popocatepetl volcano. The highest domes have risen about 180 m above the level of the pre-1994 deepest point of the crater bottom (Angel Gómez, CENAPRED, Pers. Comm). Additionally, there is seismic evidence that the depths at which bubbles strongly influence the magma behavior are in the range 800–1500 m below the summit (Arciniega-Ceballos et al., 2003; Chouet et al., 2005; Alejandra Arciniega-Ceballos et al., in press).

Assuming a country rock density in the range $\rho_{\text{RC}}=2300\text{--}2500\text{ kg/m}^3$, $H_o=6000\text{ m}$, and a temperature distribution T in [800 K, 1000 K], Eq. (48) yields that for $\rho_{\text{RC}}=2500\text{ kg/m}^3$ only 2.21 wt.% of H₂O in the melt is necessary to reach such a dome height. Similarly, from Eq. (32) we obtain for this particular example

$$P(2.21\text{ wt.\% H}_2\text{O}) = \left[\frac{2.21\text{ wt.\%}}{0.193\text{ (wt.\%/bar}^{1/2.166})} \right]^{2.166} \cong 197\text{ bar.} \quad (49)$$

Table 5 shows different combinations of the country rock density, magma water content and the resulting exsolution depth for such a dome height (180 m), calculated from Eqs. (32), (34) and (48). To do this, the exsolution pressure given by Eq. (34) can be readily solved approximating the transcendent term to a 2nd-degree Taylor series expansion, and solving for the roots, the resulting analytical expression. The compensation depth $H_o=6000\text{ m}$ is assumed based on the depth at which focal mechanisms of volcanotectonic earthquakes change from predominately inverse to predominately normal (Valdés personal Comm.; Arámbula 2007).

Inspection of Table 5 shows that for $H_o=6000$ the range of the country rock density ρ_{RC} which shows a better consistency with the LP-sesimic sources is 2470–2490 kg/m^3 and a water content range w_o of 2.49–3.05%

4. Discussion

The buoyancy force on a magma column in a volcanic conduit causing dome extrusions thus results from a combination of several factors and material properties that are not precisely known. In this model, the main factor controlling the dome heights and volumes is the variable density contrast between the country rock and the magma column. The density of the former depends on the lithology of the rocks forming the volcanic cone, and the density of the latter depends on the composition, volatile contents, temperature, and depth of the magma column in the volcanic conduit.

The andesitic–dacitic rocks forming the volcanic edifice of Popocatepetl probably have a bulk equivalent density in the range 2400 to 2500 kg/m^3 . The density of the magma column in the conduit may be calculated by integrating the EOS proposed here with relative ease. To obtain a broader image of the likely combinations of both density sets, we show in Fig. 4 a series of H_{Dome} vs. H₂O plots for different country rock densities and likely column lengths H_o , for the temperature range [800 K, 1000 K]. In Fig. 4a, for a country rock density $\rho_{\text{RC}}=2500\text{ kg/m}^3$ and an anhydrous magma ($w_o \sim 0\text{ wt.\%}$), the column remains in isostatic equilibrium, producing no growing dome ($H_{\text{Dome}}=0$). In contrast, about 1.5 wt.% of dissolved water is enough to raise a 10 km long magma column about 180 m, and about 2.5 wt.% would produce the same effect on a column of 6 km in length.

A lower country rock density would require lower magma column densities to generate buoyancy. Fig. 4b shows the expected maximum dome heights for different water contents and column lengths with $\rho_{\text{RC}}=2400\text{ kg/m}^3$. To keep isostatic equilibrium, a minimum of 3 wt.% dissolved water is needed for all of the likely conduit lengths. Below this value, a negative buoyancy force may appear. This means that there is a water content required to maintain zero buoyancy and thus hydrostatic equilibrium. We call this the *residual water content* w_{res} above which positive buoyancy results. Fig. 4b also shows that the conduit must have a length greater than 4000 m to be capable of producing 180 m high domes. An even lower country rock density $\rho_{\text{RC}}=2300\text{ kg/m}^3$ would hamper the production of large domes, except for the longest conduits, as shown in Fig. 6c.

To explore the effect of the dacitic magma column temperature on the height of the domes, we now analyze the buoyancy using Eq. (23) in the range [1000 K, 1200 K] (see Table 3), with

$$\beta(T) = 6.355503 \times 10^{-3} + (9.295871 \times 10^{-6}) T, \quad T \in [1000\text{ K}, 1200\text{ K}]. \quad (50)$$

Fig. 5 shows the increased buoyancy of a dacitic hotter magma. For example, a country rock density $\rho_{\text{RC}}=2400\text{ kg/m}^3$ requires only $w_{\text{res}} \sim 2.2\text{ wt.\%}$ in the magma to maintain hydrostatic equilibrium.

Similarly, to explore the effects of magma composition on the height of domes, we now compare the above results of

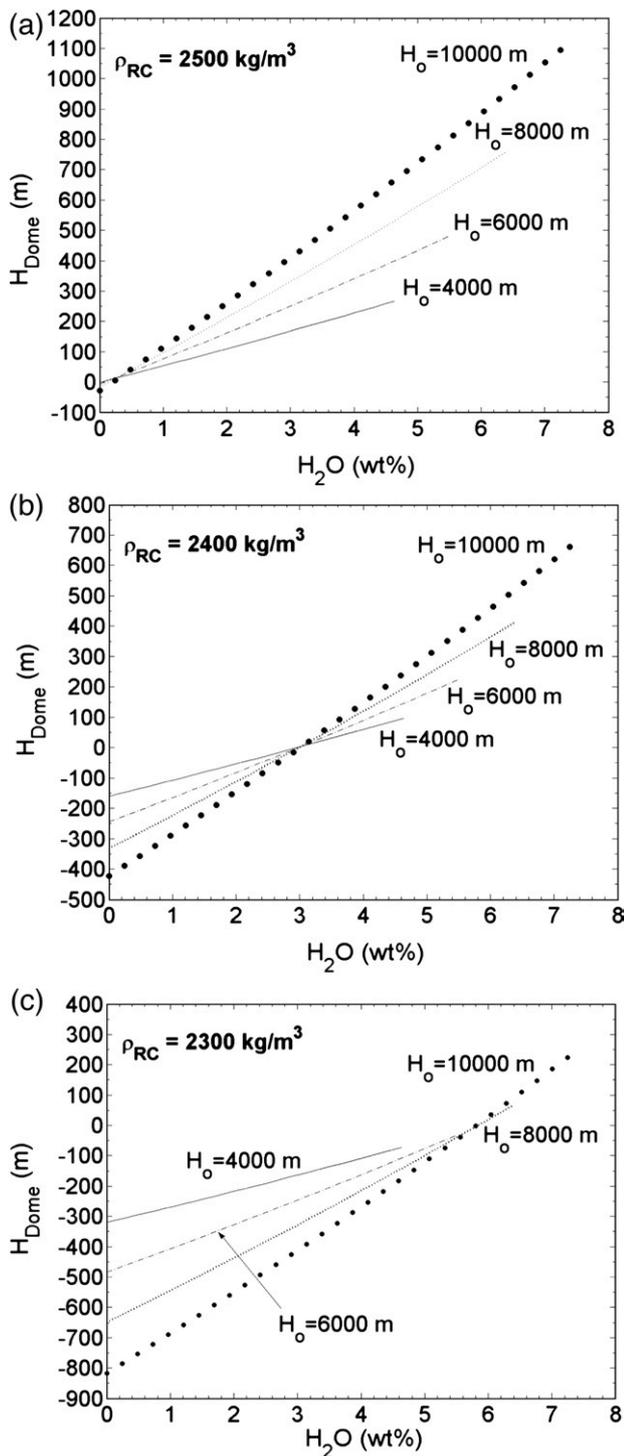


Fig. 4. Height of domes as a function of the H_2O content in a dacitic magma column (from Eq. (47)), in the temperature range T [800 K, 1000 K], and different country rock densities ρ_{RC} and depths of the isostatic compensation level H_o . The curves end at the saturation value $w_{s1}(H_o)$.

dacitic magma with an andesitic magma, using Eq. (23) in the range [1000 K, 1200 K] (see Table 3). Now

$$\beta(T) = 7.668689 \times 10^{-3} + (8.993692 \times 10^{-6}) T, \quad T \in [1000 \text{ K}, 1200 \text{ K}]. \quad (51)$$

Fig. 6 illustrates the decreased buoyancy of andesitic magmas. With a country rock density $\rho_{\text{RC}} = 2500 \text{ kg/m}^3$, a residual water content $w_{\text{res}} \sim 2.0 \text{ wt.}\%$ is needed to maintain hydrostatic equilibrium. Dome-forming activity derived from magma column buoyancy would then require more volatile

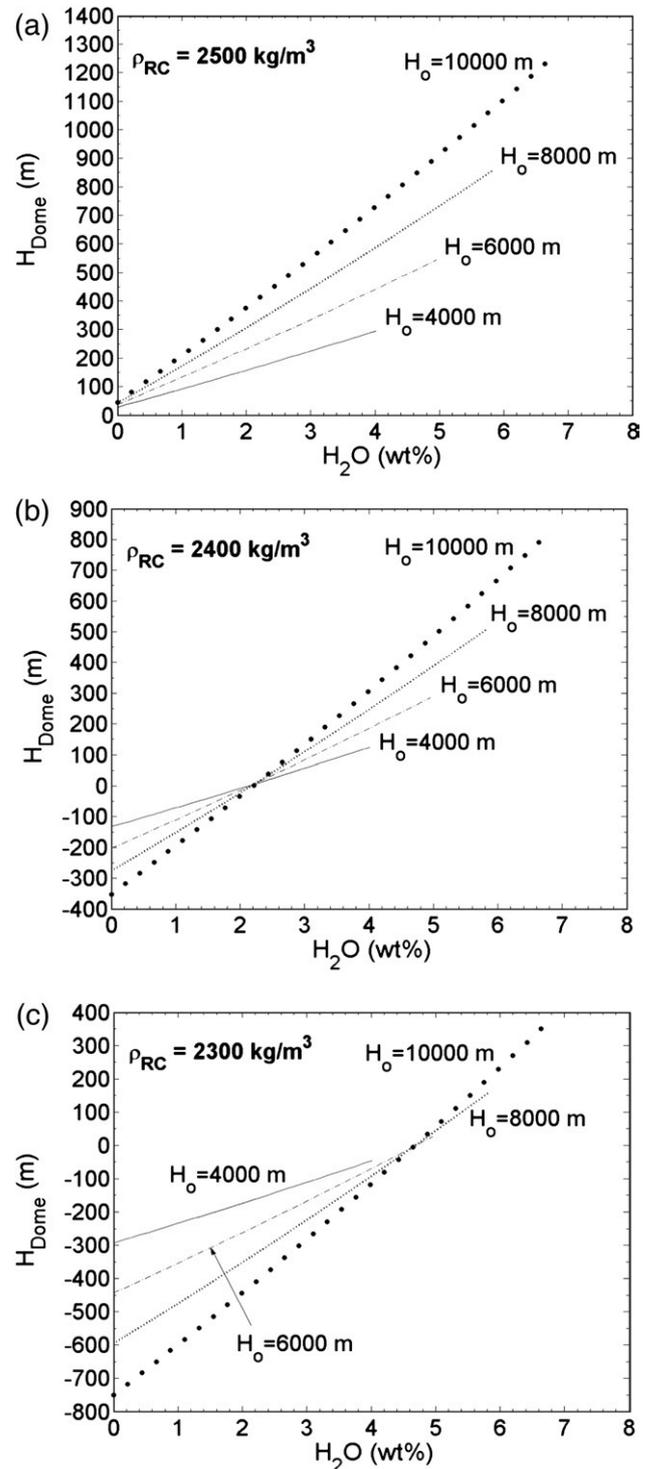


Fig. 5. Height of domes as a function of the H_2O content in a dacitic magma column (from Eq. (47)), in the temperature range T [1000 K, 1200 K], and different country rock densities ρ_{RC} and depths of the isostatic compensation level H_o . The curves end at the saturation value $w_{s2}(H_o)$.

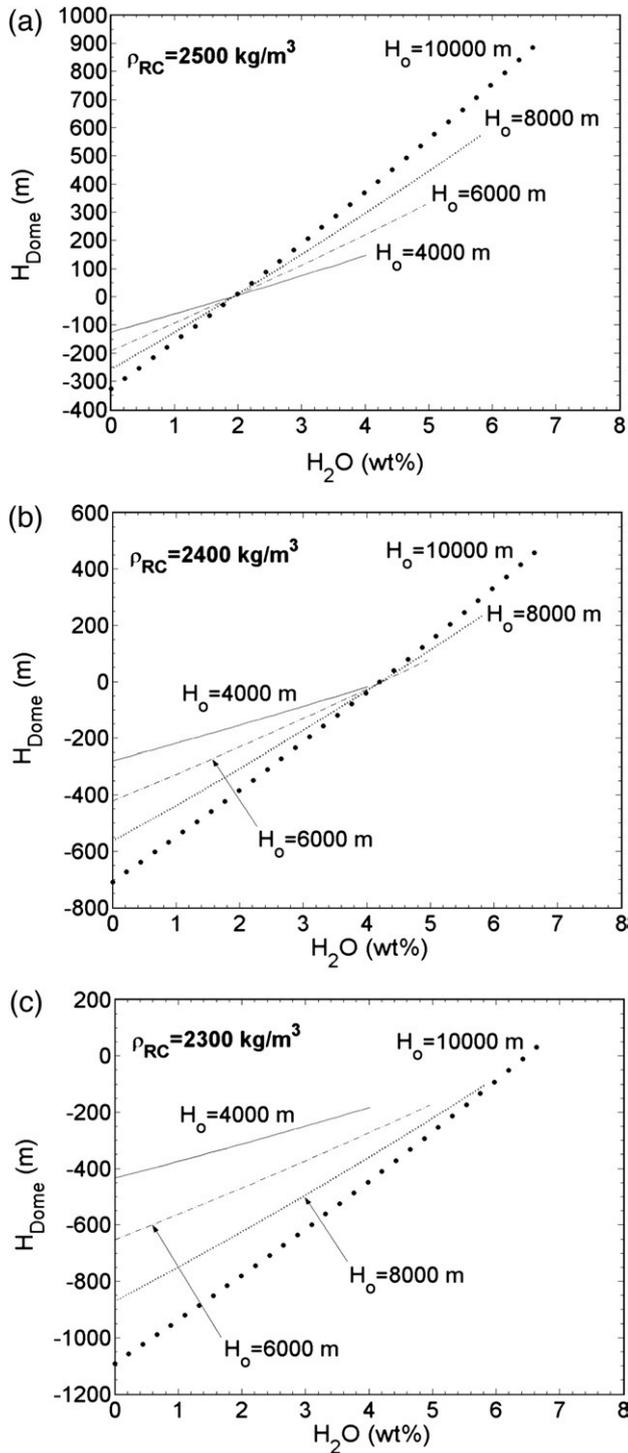


Fig. 6. Height of domes as a function of the H_2O content in an andesitic magma column (from Eq. (47)), in the temperature range T [1000 K, 1200 K] and different country rock densities ρ_{RC} and depths of the isostatic compensation level H_o . The curves end at the saturation value $w_{s2}(H_o)$.

contents as the silica content decreases. Lower country rock densities then require more volatiles in the magma (Fig. 6b), and may even inhibit positive isostatic buoyancy for any realistic conduit length (Fig. 6c).

For practical purposes and quicker approximate calculations, we now present a simpler form of Eqs. (47) and (48). To do this,

we consider that the density change with temperature and pressure is much smaller than the density change due to H_2O content. We thus make the following approximations:

$$T(z) = T_m = \frac{T_o + T_f}{2}, \quad (52)$$

$$p(z) = p_m = \frac{p_o + p_f}{2}, \quad (53)$$

$$\beta(T) = c_1 T + c_o = c_1 T_m + c_o, \quad (54)$$

$$w(z) = w_o, \quad (55)$$

where the magma pressure at depth H_f can be approximated to

$$p_f = \rho_{\text{CR}} g H_f \quad (56)$$

and T_m and p_m are constants. Therefore, the density in Eq. (23) is also constant and the expression (26) is easier to integrate to obtain the approximate value of H_{Dome} :

$$H_{\text{Dome}}(w_o) = \frac{(\rho_{\text{RC}}/\rho_r)H_o}{1 - \alpha(T_m - T_r) + \kappa_T p_m - (c_1 T_m + c_o) w_o} - H_o. \quad (57)$$

From here, w_o can be obtained immediately as a function of H_{Dome}

$$w_o(H_{\text{Dome}}) = \frac{1}{(c_1 T_m + c_o)} \left[1 - \alpha(T_m - T_r) + \kappa_T p_m - \frac{(\rho_{\text{RC}}/\rho_r)H_o}{H_{\text{Dome}} + H_o} \right] \quad (58)$$

For the temperature range [800 K, 1000 K], the dome height calculated with Eq. (57) differs from 1 m to about 14.5 m with respect to the values calculated with Eq. (47) in the conduit depth range $6000 \text{ m} < H_o \leq 10,000 \text{ m}$, with the larger differences for high H_2O contents. Therefore, this approximation is acceptable for most configurations, and very good for long conduits ($> 6000 \text{ m}$) and low water contents ($< 3 \text{ wt.}\% \text{ H}_2\text{O}$), or for medium length conduits ($4000 \text{ m} \leq H_o \leq 6000 \text{ m}$) and any water content (0–7 wt.% H_2O). Similarly, for $H_{\text{Dome}} = 180 \text{ m}$, the value of w_o calculated with expression (58) differs only 0.009 wt.% from the value calculated with Eq. (48) for $4000 \text{ m} < H_o < 10000 \text{ m}$.

5. Conclusions

The slow and episodic dome-forming activity of high-gas output volcanoes, such as Popocatepetl, may be explained in terms of a process involving the buoyancy of a magma column in the volcanic conduit. Such buoyancy may be induced by the combined effect of varying volatile contents and temperatures in a magma with a composition that would otherwise have neutral buoyancy when maintaining a residual water content w_{res} . The volatile content-temperature variations may produce density contrasts with the country rock capable of inducing neutral, positive, or negative buoyancy on the magma column. The column height proves to be quite sensitive to small changes in dissolved water content, the most abundant of the volcanic volatiles, and less sensitive to the temperature distribution. The

conditions of isostatic equilibrium of the column may be calculated with relative ease by using a simplified equation of state for the density of silicic magmas. Integration of the simplified EOS for density proposed here produced satisfactory results that may contribute to the understanding of the dome growth and destruction process.

The calculated height of domes and depths of volatile oversaturation result from very reasonable volatile concentrations and temperature values for a wide range of possible conduit lengths. In fact, for the longest conduits, even modest water concentrations may produce significant buoyancy. The observed maximum height of domes may thus provide a direct estimate of the volatile content of the magma in the conduit, and the likelihood of a stronger dome-destruction explosion.

Intense degassing of a magma column may also produce a density increase, stopping the dome growth, and even reversing it, as has been observed at times at the Popocatepetl dome in the form of depression or collapse of the dome top surface. This provides a plausible explanation for the episodic dome growth process of the Popocatepetl volcano, a process that involves variations in the volatiles content of the magma column. This process requires a transport mechanism that distributes volatiles through the column in times comparable or shorter than the time between dome emplacement episodes. However, addressing the problem of volatile transport within the magma conduit involves additional considerations related to the magma convection in the volcanic conduit that are beyond the scope of this paper. The possibility of convection has been studied (e.g. Kazahaya et al., 1994), but a detailed analysis of its dynamics and mixing capacity requires a hydrodynamical stability analysis, and an integrable EOS for the magma viscosity that should be developed first. Posing the dome growth episodes as a process involving buoyancy induced by the dissolved volatiles in the magma above the isostatic compensation depth has important consequences on the eruption scenarios of the Popocatepetl volcano. As long as the eruptive activity develops as effusive dome growth episodes, a hydrostatic equilibrium condition remains above a hypothetical magma reservoir at depth. If this equilibrium breaks, significant amounts of magma, and not only volatiles may ascend through the conduit, altering the isostatic balance. Such a condition may evolve into a major eruption.

Acknowledgments

We appreciate the valuable comments and suggestions from A. Folch. We thank Angel Gómez (CENAPRED) for kindly providing data on the dimensions of the Popocatepetl's domes, and Arturo Méndez (IGEOF-UNAM) for his helpful library assistance. The authors are grateful to the Dirección General de Estudios de Posgrado (UNAM) for its support.

References

- Alejandra Arciniega-Ceballos, A., Chouet, B., Dawson, P., Asch, G., 2007. Broadband seismic measurements of degassing activity associated with lava effusion at Popocatepetl Volcano, Mexico. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* doi:10.1016/j.jvolgeores.2007.09.007.
- Arámbula, R., 2007. Estado de esfuerzos en el volcán Popocatepetl obtenidos con mecanismos focales, en el periodo 1996 a 2003. MSc thesis, UNAM, Mexico 125 pp.
- Arciniega-Ceballos, A., Chouet, B., Dawson, P., 2003. Long-period events and tremor at Popocatepetl volcano (1994–2000) and their broadband characteristics. *Bull. Volcanol.* 65, 124–135.
- Atlas, Z.D., Dixon, J.E., Sen, G., Finny, M., Martin Del Pozzo, A.L., 2006. Melt inclusions from Volcán Popocatepetl and Volcán de Colima, Mexico: melt evolution due to vapor-saturated crystallization during ascent. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 153, 221–240.
- Boudal, C., Robin, C., 1988. Relations entre dynamismes eruptifs et réalimentations magmatiques d'origine profonde au Popocatepetl. *Can. J. Earth Sci.* 25, 955–971.
- Bouhifd, M.A., Whittington, A., Richet, P., 2001. Partial molar volume of water in phonolitic glasses and liquids. *Contrib. Mineral. Petrol.* 142, 235–243.
- Burnham, C.W., Davis, N.F., 1971. The role of H₂O in silicate melts. I. P–V–T relations in the system NaAlSi₃O₈–H₂O to 10 kilobars and 1000 °C. *Am. J. Sci.* 270, 54–79.
- Burnham, C.W., Davis, N.F., 1974. The role of H₂O in silicate melts. II. Thermodynamic and phase relations in the system NaAlSi₃O₈–H₂O to 10 kilobars, 700 to 1000 °C. *Am. J. Sci.* 274, 902–940.
- Chouet, B., Dawson, P., Arciniega-Ceballos, A., 2005. Source mechanism of Vulcanian degassing at Popocatepetl volcano, Mexico, determined from waveform inversions of very long period signals. *J. Geophys. Res.* 110, B07301. doi:10.1029/2004JB003524.
- Cruz-Atienza, V.M., Pacheco, J.F., Singh, S.K., Shapiro, N.M., Valdés, C., Iglesias, A., 2001. Size of Popocatepetl volcano eruptions (1997–2001) from waveform inversion. *Geophys. Res. Lett.* 28, 4027–4030.
- De la Cruz-Reyna, S., Siebe, C., 1997. The giant Popocatepetl stirs. *Nature*, 388 (6639), 227.
- Delgado-Granados, H., Cárdenas-González, L., Piedad-Sánchez, N., 2001. Sulfur dioxide emissions from Popocatepetl volcano (Mexico): case study of a high emission rate, passively degassing eruptive volcano. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 108, 107–120.
- Dobran, F., 2001. *Volcanic Processes: Mechanisms in Material Transport*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York. 590 pp.
- Espíndola, J.M., Godínez, M.L., Espíndola, V.H., 2004. Models of ground deformation and eruption magnitude from a deep source at Popocatepetl volcano, Central Mexico. *Nat. Hazards* 31, 191–207.
- Garland, G.D., 1965. *The Earth's Shape and Gravity*. Pergamon Press, Oxford. 183 pp.
- Heiskanen, W.A., Vening-Meinesz, F.A., 1958. *The Earth and its Gravity Field*. Mc Graw-Hill, New York, pp. 124–130.
- Kazahaya, K., Shinihara, H., Saito, G., 1994. Excessive degassing of Izu-Oshima volcano: magma convection in a conduit. *Bull. Volcanol.* 56, 207–216.
- Lange, R.A., 1994. The effect of H₂O, CO₂ and F on the density and viscosity of silicate melts. In: Carrol, M.R., Holloway, J.R. (Eds.), *Volatiles in Magmas*. *Rev. Mineral.*, vol. 30, pp. 331–369.
- Lange, R.A., 1997. A revised model for the density and thermal expansivity of K₂O–Na₂O–CaO–MgO–Al₂O₃–SiO₂ liquids from 700 to 1900 K: extension to crustal magmatic temperatures. *Contrib. Mineral. Petrol.* 130, 1–11.
- Lange, R.A., 2002. Comment on: Supercooled diopside melt: confirmation of temperature-dependent expansivity using container-based dilatometry by J. Gottsmann and D.B. Dingwell. *Contrib. Mineral. Petrol.* 142, 753–758.
- Lange, R.A., Carmichael, I.S.E., 1987. Densities of Na₂O–K₂O–MgO–FeO–Fe₂O₃–Al₂O₃–TiO₂–SiO₂ liquids: measurements and derived molar properties. *Geochim. Cosmochim. Acta* 51, 2931–2946.
- Lange, R.A., Carmichael, I.S.E., 1990. Thermodynamic properties of silicate liquids with emphasis on density, thermal expansion and compressibility. In: Nicholls, J., Russell, J.K. (Eds.), *Modern Methods of Igneous Petrology*. *Rev. Mineral.*, vol. 24, pp. 25–64.
- Melnik, O., Sparks, R.S.J., 2005. Controls on conduit magma flow dynamics during lava dome building eruptions. *J. Geophys. Res.* 110, B02209. doi:10.1029/2004JB003183.
- Newman, S., Lowenstern, J.B., 2002. VolatileCalc: a silicate melt–H₂O–CO₂ solution model written in Visual Basic for excel. *Comput. Geosci.* 28, 597–604.

- Novelo-Casanova, D.A., Martínez-Bringas, A., 2005. A seismic attenuation zone below Popocatepetl volcano inferred from coda waves of local earthquakes. *Geofis. Int.* 44 (2), 177–186.
- Ochs III, F.A., Lange, R.A., 1997. The partial molar volume, thermal expansivity, and compressibility of H₂O in AnAlSi₃O₈ liquid: new measurements and an internally consistent model. *Contrib. Mineral. Petrol.* 129, 155–165.
- Ochs, F.A., Lange, R.A., 1999. The density of hydrous magmatic liquids. *Science* 283, 1314–1317.
- Persikov, E.S., 1991. The viscosity of magmatic liquid: experiment, generalized patterns. A model for calculation and prediction. Applications. In: Perchuk, L., Kushiro, I. (Eds.), *Physical Chemistry of Magmas*, vol. 9. Springer, New York, pp. 1–40.
- Richet, P., Whittington, A., Holtz, F.E., Behrens, H., Ohlhorst, S., Wilke, M., 2000. Water and the density of silicate glasses. *Contrib. Mineral. Petrol.* 138, 337–347.
- Robin, C., 1984. Le volcan Popocatepetl (Mexique): structure, évolution pétrologique, et risques. *Bull. Volcanol.* 47, 1–23.
- Robin, C., Boudal, C., 1987. A giant Bezymianny-type event at the beginning of modern Popocatepetl. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 31, 115–130.
- Schaaf, P., Stimac, J., Siebe, C., Macías, J.L., 2005. Geochemical evidence from mantle origin and crustal processes in volcanic rocks from Popocatepetl and surrounding monogenetic volcanoes, Central Mexico. *J. Petrol.* 46, 1243–1282.
- Shapiro, N.M., Singh, S.K., Iglesias-Mendoza, A., Cruz-Atienza, V.M., Pacheco, J.F., 2000. Evidence of low Q below Popocatepetl volcano, and its implication to seismic hazard in Mexico City. *Geophys. Res. Lett.* 27, 2753–2756.
- Spera, F.J., 2000. Physical properties of magma. In: Sigurdsson, H., Houghton, B., McNutt, S., Rymer, H., Stix, J. (Eds.), *Encyclopedia of Volcanoes*. Academic Press, San Diego, pp. 171–190.
- Straub, S.M., Martín-Del Pozzo, A.L., 2001. The significance of phenocryst diversity in tephra from recent eruptions at Popocatepetl volcano (central Mexico). *Contrib. Mineral. Petrol.* 140, 487–510.
- Valdés, C., González, G., Arciniega, A., Guzmán, M., Nava, E., 1995. Sismicidad del volcán Popocatepetl a partir del 21 de Diciembre de 1994 al 30 de Marzo de 1995. Volcán Popocatepetl, Estudios Realizados Durante la Crisis 1994–1995. CENAPRED, Mexico.
- Valdés-González, C., González-Pomposo, G., Arciniega-Ceballos, A., 1997. El Popocatepetl, un volcán sísmicamente activo. *Ing. Civ.* 334, 33–38.
- Wallace, P., Anderson, A., 2000. Volatiles in magmas. In: Sigurdsson, H., Houghton, B., McNutt, S., Rymer, H., Stix, J. (Eds.), *Encyclopedia of Volcanoes*. Academic Press, San Diego, pp. 149–170.
- Witter, J.B., 2003. Convection of magma in volcanic conduits as a degassing mechanism at Active volcanoes, 288 p. Ph.D. thesis, University of Washington, Seattle.
- Witter, J.B., Kress, V.C., Newhall, C.G., 2005. Volcán Popocatepetl, Mexico. Petrology, magma mixing, and immediate sources of volatiles for the 1994–present eruption. *J. Petrol.* 46, 2337–2366.
- Wright, R., De La Cruz-Reyna, S., Harris, A., Flynn, L., Gomez-Palacios, J.J., 2002. Infrared satellite monitoring at Popocatepetl: explosions, exhalations, and cycles of dome growth. *J. Geophys. Res.* 107 (2–1), 2–16.