UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA Y REGULARIDAD DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE POISSON

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

FELIPE GARCÍA RAMOS AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MÓNICA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

2008

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

Act. Mauricio Aguilar González
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Existencia y regularidad de soluciones del problema de Poisson

realizado por **García Ramos Aguilar Felipe** con número de cuenta **4-0400582-7** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Tutora	Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora	M. Clapp
Propietario	Dr. Nils-Heye Ackermann	Nils A
Propietario	Dr. Jorge Gilberto Flores Gallegos	J. Gilberto Flores
Suplente	Dr. Sergio Hernández Linares	Sergio Hernández Linares
Suplente	Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza	de Teresa

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU "
Ciudad Universitaria, D. F., a 19 de mayo de 2008
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

A mi tío Chavo
y a toda la *chaviza*,
con mucho cariño.

Muchas gracias a mis papas y a Marcela.

Muchas gracias a todos mis profesores especialmente a Mónica Clapp, Luis Briseño, Adalberto García-Maynez, Gilberto Flores y Nils Ackermann.

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es demostrar la existencia de una solución para el *problema de Poisson*

$$(\wp) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función continua dada y Δ es el *operador de Laplace*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Una *solución clásica* de $(\wp)$ es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface ambas identidades de $(\wp)$.

Si u es una solución clásica de $(\wp)$, multiplicando la primera identidad por una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u + \int_\Omega \varphi u = \int_\Omega f\varphi.$$

Integrando por partes se tiene entonces que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u + \int_\Omega \varphi u = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Observemos que el lado izquierdo de la igualdad

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_\Omega \varphi\psi + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi$$

es un producto escalar en $C^1(\overline{\Omega})$, mientras que el lado derecho es una función

$$\Phi : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(\psi) := \int_\Omega f\psi,$$

lineal y continua (respecto a la norma inducida por este producto escalar).

La identidad (1) puede expresarse entonces como sigue: Buscamos una función u que satisfaga

$$\langle \varphi, u \rangle = \Phi(\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Un resultado muy importante del Análisis Funcional es el *Teorema de Representación de Fréchet-Riesz.* Este dice que, para toda función lineal y continua $\Phi : H \to \mathbb{R}$ definida en un espacio de Hilbert H con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, existe un elemento $u \in H$ tal que

$$f(v) = \langle u, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

Para poder aplicar este resultado requerimos que el espacio $C^1(\overline{\Omega})$ sea completo. Desafortunadamente no lo es. No obstante la completación del espacio $C_c^\infty(\Omega)$ respecto a la norma inducida por el producto escalar arriba definido es el *espacio de Sobolev* $H_0^1(\Omega)$. Estos espacios fueron creados por Sobolev en 1936, cuando tuvo la idea de considerar funciones en $L^2(\Omega)$ con *derivadas débiles* que también pertenecieran a $L^2(\Omega)$.

Una *solución débil* del problema ($\wp$) es un elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (2). Usaremos el Teorema de Representación de Fréchet-Riesz para probar el siguiente resultado.

Teorema 0.1 *Para todo abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ y toda $f \in L^2(\Omega)$, el problema de Poisson ($\wp$) tiene una única solución débil.*

Si Ω y f son suficientemente regulares, esta solución débil es, de hecho, una solución clásica. En esta tesis probaremos únicamente el siguiente resultado..

Teorema 0.2 *Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y u es una solución débil del problema ($\wp$), entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y satisface*

$$-\Delta u + u = f \qquad en\ \Omega.$$

Esta tesis está organizada como sigue. En el Capítulo 2 estudiaremos principalmente el producto de convolución que más que para encontrar soluciones nos servirá para demostrar la existencia de *sucesiones regularizantes*, es decir sucesiones regulares que convergen a ciertas funciones. En el Capítulo 3 se construirán los *espacios de Sobolev,* a partir de las derivadas débiles y se trabajará con el subespacio $H_0^1(\Omega)$ que es la completación del espacio $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ con la norma de $H^2(\Omega)$. En el Capítulo 4 se demostrará la existencia de *soluciones débiles* y se dara un criterio de regularidad para saber cuando las *soluciones débiles* son *soluciones clásicas*. Por último en el Capítulo 5 se demostrará regularidad interior para *soluciones débiles*, para asi recuperar la *solucion clásica* del *problema de Poisson* sin condiciones de frontera.

Capítulo 1

Convolución y Regularización

Muchos resultados son más sencillos de probar para funciones suaves. Si se pueden encontrar sucesiones de funciones suaves que convergen en algún sentido adecuado a las funciones que nos interesan, muchas propiedades de las funciones suaves se seguiran cumpliendo para estas últimas. En este capítulo se estudian herramientas esenciales para obtener resultados de aproximación: los productos de convolución y las sucesiones regularizantes. Demostraremos que el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

1.1. Resultados básicos de Teoría de Integración

En esta sección enunciaremos, sin demostrarlos, algunos teoremas importantes de la Teoría de Integración que usaremos en la tesis.

Sean Ω, Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.1 (de Convergencia Dominada de Lebesgue) *Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ con las siguientes propiedades:*
a) $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo punto $x \in \Omega$.
b) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo punto $x \in \Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Demostración. Ver, por ejemplo, Wheeden-Zygmund [**5**]. ■

Sea $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible. Dadas $x \in \Omega_1$ y $y \in \Omega_2$ denotamos por $F_x : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ y $F^y : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ a las funciones dadas por

$$F_x(y) := F(x,y), \qquad F^y(x) := F(x,y).$$

Teorema 1.2 (de Tonelli) *Si $F_x \in L^1(\Omega_2)$ para casi todo $x \in \Omega_1$, y si la función*

$$f(x) := \int_{\Omega_2} |F_x(y)|\, dy$$

satisface $f \in L^1(\Omega_1)$, entonces $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Demostración. Ver, por ejemplo, Wheeden-Zygmund[**5**]. ■

Notación 1.3 *Sea $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, se denota la función $F_x : \Omega_2 \to \mathbb{R}^N$, como $F_x(y) = F(x, y)$ análogamente se denota $F^y : \Omega_1 \to \mathbb{R}^N$, como $F^y(x) = F(x, y)$.*

Teorema 1.4 (de Fubini) *Si $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, entonces $F_x \in L^1(\Omega_2)$ para casi todo $x \in \Omega_1$, $F^y \in L^1(\Omega_1)$ para casi todo $y \in \Omega_2$, y las funciones*

$$f(x) := \int_{\Omega_2} |F_x(y)|\, dy, \qquad g(y) := \int_{\Omega_1} |F^y(x)|\, dx,$$

satisfacen $f \in L^1(\Omega_1)$ y $g \in L^1(\Omega_2)$. Además se cumple que

$$\int_{\Omega_1} f = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F = \int_{\Omega_2} g.$$

La identidad anterior se suele escribir como

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |F(x, y)|\, dy\ dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x, y)|\, dxdy = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |F(x, y)|\, dx\ dy.$$

Demostración. Ver, por ejemplo, Wheeden-Zygmund [**5**]. ■

Definición 1.5 *Sea $p \in [1, \infty)$. Definimos*

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_\Omega |u|^p < \infty \right\},$$

con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}.$$

Definimos

$$L^\infty(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \exists C \text{ tal que } |u(x)| \le C \text{ p.c.t. } x \in \Omega \},$$

con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty := \text{ínf}\{ C \in \mathbb{R} : |u(x)| \le C \text{ p.c.t. } x \in \Omega \}.$$

Teorema 1.6 *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para toda $p \in [1, \infty]$.*

Demostración. Ver, por ejemplo, Kolmogorov-Fomin **[3]** ■

Teorema 1.7 (Desigualdad de Hölder) *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $p, q \in [1, \infty]$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Entonces $fg \in L^r(\Omega)$ y

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Demostración. Ver, por ejemplo, Kolmogorov-Fomin **[3]**. ■

Corolario 1.8 (Desigualdad de Hölder generalizada) *Si $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, ..., k$, con $p_i \in [1, \infty]$ tales que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k},$$

entonces $f_1...f_k \in L^p(\Omega)$ y

$$\|f_1...f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} ... \|f_k\|_{p_k} .$$

Demostración. Demostremoslo por inducción. Para $k = 2$, es el Teorema 1.7. Supongamos que se cumple para $k - 1$. Entonces como

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{k-2}} + \frac{1}{q},$$

donde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p_{k-1}} + \frac{1}{p_k}.$$

Entonces se llega a que

$$\|f_1...f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} ... \|f_{k-1}f_k\|_q .$$

Pero, por el Teorema 1.7 se obtiene

$$\|f_{k-1}f_k\|_q \leq \|f_{k-1}\|_{p_{k-1}} \|g_k\|_{p_k} .$$

■

Teorema 1.9 *Si (f_n) converge a f en $L^p(\Omega)$, entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge puntualmente a f en casi todo punto de Ω.*

Demostración. Ver, por ejemplo, Dieudonné [7] ■

Corolario 1.10 *Sean $(f_n) \subset L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, tal que $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$ y $f_n \to g$ en $L^q(\Omega)$.Entonces $f = g$, para casi todo $x \in \Omega$.*

Demostración. tomemos un subsucesión (f_{n_k}) de (f_n), tal que f_{n_k} converge puntualmente a f. Como $f_{n_k} \to g$ en $L^q(\Omega)$, podemos tomar otra subsucesión $(f_{n_{k_j}})$ tal que $f_{n_{k_j}}$ converge puntualmente a g. Por lo tanto $f = g$, para casi todo $x \in \Omega$. ■

Teorema 1.11 (de Densidad) *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para toda $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Ver, por ejemplo, Jost [9]. ■

1.2. El producto de convolución

En esta sección estudiaremos una herramienta que es de gran importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, el producto de convolución. En el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales se utiliza el producto de convolución para obtener soluciones de problemas no homogéneos si ya se tiene la solución del homogéneo.

En esta tesis nos servirá para probar densidad de espacios de funciones regulares, esto nos interesa ya que muchos resultados se pueden probar para funciones suaves y si convergen en un sentido adecuado a otras funciones, éstas otras heredan algunas propiedades.

Definición 1.12 *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. El producto de convolución de f y g es la función definida por*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Veremos que $f * g$ está bien definida y pertenece a $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Proposición 1.13 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^N$. Además, $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Demostración. Si $p = \infty$, entonces g es una función esencialmente acotada, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \mid f(x-y)g(y) \mid dy \\ &\leq \| g \|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \mid f(x-y) \mid dy \\ &= \| f \|_1 \| g \|_\infty .\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $p = 1$. Sea $F(x, y) = f(x-y)g(y)$. Para casi toda $y \in \mathbb{R}^N$ se cumple

$$\int |F(x,y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} \mid f(x-y) \mid dx = |g(y)| \, \| f \|_1 < \infty$$

y

$$\int\int |F(x,y)|\, dxdy = \| f \|_1 \| g \|_1 < \infty.$$

Utilizando el Teorema 1.2 se tiene que $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Aplicando el Teorema 1.4 se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} \mid \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \mid dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \mid f(x-y)g(y) \mid dydx \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \mid f(x-y)g(y) \mid dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \mid g(y) \mid \int_{\mathbb{R}^N} \mid f(x-y) \mid dxdy \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \mid g(y) \mid \|f\|_{L^1} dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} .\end{aligned}$$

Esto implica que $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} . \tag{1.1}$$

Ahora supongamos que $1 < p < \infty$. Como $|g(y)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, por lo anterior se tiene que p.c.t $x \in \mathbb{R}^N$

$$(|f| * |g|^p)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy < \infty$$

y por lo tanto $|f(x-\cdot)|^{1/p}|g(y)| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sea $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.Como $f(x-\cdot)$ es integrable, $|f(x-\cdot)|^{1/q} \in L^q(\mathbb{R}^N)$, podemos usar la desigualdad de Hölder en el siguiente producto

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}\,|g(y)|\,|f(x-y)|^{1/q},$$

para obtener

$$(|f|{*}|g|)(x) \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q}.$$

Por lo tanto

$$|(|f|*|g|)(x)|^p \le (|f|*|g|^p)(x)\,\|f\|_1^{p/q}.$$

Como $\|(|f|*|g|^p)\|_1 \le \|f\|_1\,\||g|^p\|_1 = \|f\|_1\,\|g\|_p^p$, se cumple que

$$\|f*g\|_p^p \le \|(|f|*|g|^p)\|_1\,\|f\|_1^{p/q} \le \|f\|_1\,\|g\|_p^p\,\|f\|_1^{p/q} = \|g\|_p^p\,\|f\|_1^p.$$

En consecuencia

$$\|f*g\|_p \le \|f\|_1\,\|g\|_p. \tag{1.2}$$

■

Proposición 1.14 *El producto de convolución es conmutativo.*

Demostración. Utilizando el cambio de variable $z=x-y$ obtenemos

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(z)g(x-z)dz = (g*f)(x).$$

■

Notación 1.15 *Dada una función f, denotamos $\widehat{f}(x) := f(-x)$.*

Proposición 1.16 *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Se cumple que*

$$\int (f*g)h = \int g(\widehat{f}*h).$$

Demostración. Sea $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$, por la Proposición 1.13

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dy = h(x)\int f(x-y)g(y)dy$$
$$= h(f*g)(x) < \infty$$

Usando además la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(f*g)| \leq \|f*g\|_p \|h\|_q < \infty$$

Por el Teorema de Tonelli $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ y por el Teorema de Fubini se llega a que

$$\int (f*g)(x)h(x)dx = \int\int F(x,y)dydx = \int\int f(x-y)g(y)h(x)dxdy$$
$$= \int g(y)(\widehat{f}*h)(y)dy.$$

■

Definición 1.17 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define el soporte de f como*

$$\mathrm{supp}(f) := \mathbb{R}^N \smallsetminus \omega_f,$$

donde ω_f es el máximo subconjunto abierto de Ω tal que $f(x) = 0$ para casi toda $x \in \omega_f$.

Observemos que $\mathrm{supp}(f)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$.

Proposición 1.18 *Para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$ se cumple que*

$$\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g).$$

Demostración. Si $x \notin \mathrm{supp}(f)+ \mathrm{supp}(g)$, entonces $x - y \notin \mathrm{supp}(f)$ para toda $y \in \mathrm{supp}(g)$. Por lo tanto,

$$(f*g)(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \smallsetminus (\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)) =: \omega_0.$$

En particular

$$(f*g)(x) = 0 \qquad \forall x \in \left(\mathbb{R}^N \smallsetminus (\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g))\right)^0 =: \omega_0.$$

Como ω_0 es abierto en $\mathbb{R}^N$, se tiene que $\omega_0 \subset \omega_f$. En consecuencia,

$$\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathbb{R}^N \setminus \omega_0 = \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g).$$

■

Proposición 1.19 *Si $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión tal que $x_n \to x$ en $\mathbb{R}^N$, definamos

$$F_n(y) := f(x_n - y)g(y)$$
$$F(y) := f(x - y)g(y)$$

Para cada y en $\mathbb{R}^N, F_n(y) \to F(y)$, como $\{x_n\}$ está acotada existe un compacto K tal que , para toda n, $(x_n - \mathit{supp}\ f) \subset K$, asi que $f(x_n - y) = 0$ si y $\notin K$. Definamos

$$G(y) := \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin K, \\ \|f\|_\infty |g(y)| & \text{si } y \in K. \end{cases}$$

Claramente $|F_n(y)| \leq G(y)$, y $G(y)$ es integrable porque $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 1.1)

$$(f * g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F_n(y)dy \to \int_{\mathbb{R}^N} F(y)dy = (f * g)(x).$$

■

Proposición 1.20 *Sea $1 \leq k \leq \infty$. Si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ y además*

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Demostración. Basta probar el caso $k = 1$. El caso general se sigue aplicando éste k veces. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ y sea $t \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < 1$

$$\left| \frac{(f * g)(x + te_i) - (f * g)(x) - \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g(x)\right) t}{t} \right|$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x + te_i - y) - f(x - y) - t\frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)}{t} g(y)dy \right|.$$

Por otra parte por el teorema de valor medio

$$f(x+te_i-y)- \ f(x-y)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y+\theta te_i)\ t \quad \text{con} \ \ 0<\theta<1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x+te_i-y)-f(x-y)-t\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)}{t}g(y)\right|\\ &=\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y+\theta te_i)\ -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\ \right|\left|g(y)\right|.\end{aligned}$$

Como $f\in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, se tiene que $\frac{\partial f}{x_i}\in C_c^0(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto $\frac{\partial f}{x_i}$ tiene soporte compacto y por lo tanto es uniformemente contínua. Esto quiere decir que dada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que si $|\theta t|<\delta$, entonces

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y+\theta te_i)\ -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\ \right|<\varepsilon$$

para toda $y\in\mathbb{R}^N$. En consecuencia si $|t|<\delta$, se cumple que

$$\begin{aligned}&\int\left|\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y+\theta te_i)\ -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\right|\left|g(y)\right|dy\\ &\le\varepsilon\left\|g\right\|_1.\end{aligned}$$

Como $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)*g$ es contínua, queda demostrado que $f*g\in C^1(\mathbb{R}^N)$ y que

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)*g. \tag{1.3}$$

■

1.3. Sucesiones Regularizantes

Definición 1.21 *Una sucesión de funciones* (ρ_n) *se llama regularizante si*

$$\rho_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\qquad \operatorname{supp}(\varphi_n)\subset B_{1/n}(0),\qquad \rho_n(x)\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}^N\qquad y\qquad \int_{\mathbb{R}^N}\rho_n=1.$$

Ejemplo 1.22 *Existen sucesiones regularizantes. Por ejemplo, sea*

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & si \ |x| \geq 1, \\ e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & si \ |x| < 1, \end{cases}$$

y sea $C := (\int_{\mathbb{R}^N} \rho)^{-1}$. *Entonces*

$$\rho_n(x) := Cn^N \rho(nx)$$

es una sucesión regularizante.

Proposición 1.23 *Sean* $f \in C(\mathbb{R}^N)$ *y* (ρ_n) *una sucesión regularizante. Entonces* $(\rho_n * f) \to f$, *uniformemente en cualquier subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^N$.

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto, como f es uniformemente contínua en K , para todo $\varepsilon > 0, existe \ \delta > 0$, talque

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in K \ \ \forall y \in B_\delta(0).$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} (f * \rho_n)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)] \, \rho_n(y)dy \\ &= \int_{B_{1/n}(0)} [f(x-y) - f(x)] \, \rho_n(y)dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $n > 1/\delta$

$$|(f * \rho_n)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{B_{1/n}(0)} \rho_n(y)dy = \varepsilon.$$

■

Proposición 1.24 *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 \leq p < \infty$, *y sea* (ρ_n) *una sucesión regularizante. Entonces*

$$\rho_n * f \to f \qquad en \ L^p(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.11 sabemos que existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f_1 - f\|_{L^p} < \varepsilon$.

Por la Proposición 1.18 se tiene

$$supp(\rho_n * f_1) \subset B_{1/n}(0) + supp\ (f_1) \subset K$$

para algún compacto K. Por la proposición anterior, para n suficientemente grande se tiene

$$\|f_1 * \rho_n - f_1\|_{L^p}^p = \int_K |f_1 * \rho_n - f_1|^p \leq \|f_1 * \rho_n - f_1\|_{L^\infty}^p |K| \leq \varepsilon^p |K|.$$

Se desarrolla

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_n * f_1 - f_1] + [f_1 - f]$$

y utilizando la Proposición 1.13 y la proposición anterior , para n suficientemente grande, se llega a que

$$\|\rho_n * f - f\|_p \leq 2\|f - f_1\|_p + \|\rho_n * f_1 - f_1\|_p \leq 3\varepsilon.$$

■

Observación 1.25 *Si Ω es abierto en $\mathbb{R}^N$, consideramos a $L^p(\Omega)$ como el subconjunto de las funciones de $L^p(\mathbb{R}^N)$ que se anulan en casi todo punto de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y (ρ_n) es una sucesión regularizante, la función $\rho_n * f$ no necesariamente pertenece a $L^p(\Omega)$, pues no necesariamente se anula fuera de Ω. Sin embargo, si* supp(f) *es compacto y está contenido en Ω, entonces $\rho_n * f \in L^p(\Omega)$ para n suficientemente grande y, por la proposición anterior,*

$$(\rho_n * f) \to f \qquad en\ L^p(\Omega).$$

Corolario 1.26 *El espacio $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sean $f \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ y $f_1 \in C_c(\Omega)$ tales que

$$\|f - f_1\|_p < \varepsilon$$

Consideremos la función $\overline{f_1}$ definida por

$$\overline{f_1} := \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in \Omega, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por lo tanto $\overline{f_1} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, además por el teorema anterior $\left\|\overline{f}_1 * \rho_n - \overline{f}_1\right\|_p \to 0$. Por otra parte, para n suficientemente grande

$$supp(\overline{f} * \rho_n) \subset B_{1/n}(0) + supp(f_1) \subset\subset \Omega.$$

La sucesión que buscamos es $u_n = (\overline{f}_1 * \rho_n)\big|_\Omega$, ya que para n suficientemente grande

$$\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

por lo tanto

$$\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon.$$

■

1.4. Algunos lemas técnicos

A continuación daremos algunos lemas técnicos que usaremos más adelante. El resultado que enunciamos a continuación es una versión diferenciable del Lema de Uryssohn en $\mathbb{R}^N$.

Lemma 1.27 *Sean $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ cerrados no vacíos, con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Además supongamos que K_1 es compacto. Entonces existe una función $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0 \leq u_0(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in K_1, \\ 0 & si \;\; x \in K_2. \end{cases}$$

Demostración. Como los cerrados son ajenos y uno de ellos es compacto, su distancia $d(K_1, K_2)$ es positiva. Definimos $\varepsilon := d(K_1, K_2)/5 > 0$, $K_1' := K + B_\varepsilon(0)$ y

$$v(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; d(x, K_1') \geq \varepsilon, \\ 1 - d(x, K_1')/\varepsilon & \text{si} \;\; d(x, K_1') \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Esta es una función contínua que cumple lo que deseamos, pero no es suave. Sea m tal que $1/m \leq \varepsilon$. Definamos $v_1 := v * \rho_m$. Por la Proposición 1.18,

$$\text{supp}(v_1) \subset \text{supp}(v) + B_\varepsilon(0) = K_1' + 2B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^N \setminus K_2.$$

Por otra parte, si $x \in K_1$, se tiene que

$$v_1(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_m(x-y)v(y)dy = \int_{K_1'} \rho_m(x-y)v(y)dy = \int_{K_1'} \rho_m(x-y)dy = 1.$$

Por lo tanto v_1 tiene las propiedades deseadas. ■

Observación 1.28 Del lema anterior se obtiene inmediatamente la siguiente afirmación: *Sean $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ cerrados, con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Además supongamos que K_1 es compacto. Entonces existe una función $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $|u(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in K_1, \\ -1 & si \;\; x \in K_2. \end{cases}$$

En efecto, basta tomar u_0 como en el lema anterior y definir $u(x) := 2u_0(x) - 1$.

Lemma 1.29 *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $f = 0$.

Demostración. Primero supongamos que $|\Omega| < \infty$ y que $f \in L^1(\Omega)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Corolario 1.26, existe una función $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, tal que $\|f - f_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$. Definamos

$$K_1 := \{x \in \Omega : f_\varepsilon(x) \geq \varepsilon\}, \qquad K_2 := \{x \in \Omega : f_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon\}, \qquad K := K_1 \cup K_2.$$

K_1 y K_2 son cerrados ajenos, además K_1 es compacto . Por la observación anterior existe $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $|u(x)| \leq 1$ y

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; x \in K_1, \\ -1 & \text{si} \;\; x \in K_2. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_1 &= \int_K |f_\varepsilon| + \int_{\Omega \setminus K} |f_\varepsilon| \leq \int_K f_\varepsilon u + |\Omega|\, \varepsilon \\ &= |\Omega|\, \varepsilon + \int_\Omega f_\varepsilon u - \int_{\Omega \setminus K} f_\varepsilon u \leq 2\, |\Omega|\, \varepsilon + \int_\Omega f_\varepsilon u. \end{aligned}$$

También se tiene que

$$\|f\|_1 \leq \|f_\varepsilon\|_1 + \varepsilon \quad \text{ y } \quad \int_\Omega (f_\varepsilon - f)u \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &\leq \varepsilon + 2\,|\Omega|\,\varepsilon + \int_\Omega f_\varepsilon u \leq 2\varepsilon(1+|\Omega|) + \int_\Omega fu \\ &= 2\varepsilon(1+|\Omega|).\end{aligned}$$

Como esta desigualdad es válida para toda $\varepsilon > 0$, concluímos que $f = 0$. Ahora consideremos el caso general. Existe una familia numerable de abiertos Ω_n, cuya cerradura $\overline{\Omega}_n$ en $\mathbb{R}^N$ es compacta, que cumplen que $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ y

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Aplicando el caso anterior a $f\,|_{\Omega_n}$, se tiene $f = 0$ en casi todo punto de Ω_n y, como son una cantidad numerable de abiertos, se concluye que $f = 0$ en casi todo punto de Ω. ■

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

Intuitivamente, un espacio de Sobolev es un espacio de funciones suficientemente diferenciables, con una norma que incluye tanto a la norma L^p de la función como la de sus derivadas. La noción de derivada se entiende en un sentido más débil que el usual, a fin de que el espacio sea un espacio de Banach.

Su importancia radica en que las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales viven de manera natural en estos espacios, como veremos más adelante.

2.1. Derivadas débiles

Empecemos observando lo siguiente.

Proposición 2.1 *Si $f \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, se cumple que*

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. Sea $\psi \in C_c^1(\Omega)$. Entonces existe $M > 0$ tal que

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset Q := \{(x_1, ..., x_N) \in R^N : |x_i| \leq M \quad \forall i = 1, ..., N\}.$$

Del Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que

$$\int_{-M}^{M} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, ...x_N)}{\partial x_1} dx_1 = \psi(M, x_2, ...x_N) - \psi(-M, x_2, ...x_N) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \int_Q \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} \ldots \left(\int_{-M}^{M} \frac{\partial \psi(x_1, x_2, \ldots x_N)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_N = 0.$$

Análogamente se prueba que

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, 2 \ldots, N.$$

Dado que $f\varphi \ \in C_c^1(\Omega)$, concluímos que

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_i} = \int_\Omega \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right) = \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi,$$

para cada $i = 1, \ldots, N$. ■

El resultado anterior sugiere la siguiente definición de derivada débil.

Definición 2.2 *Sean $u, v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se dice que v_i es la i-ésima derivada débil de u si*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega v_i \varphi \quad \forall \varphi \ \epsilon \ C_c^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Se dice que una función es débilmente diferenciable si tiene i-ésima derivada débil, para toda $i = 1, 2, \ldots n$.

Proposición 2.3 *La i-ésima derivada débil es única.*

Demostración. Si v_i y w_i son derivadas débiles de u entonces

$$\int_\Omega v_i \varphi = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega w_i \varphi \qquad \forall \varphi \ \epsilon \ C_c^\infty(\Omega).$$

Esto implica que

$$\int_\Omega (v_i - w_i) \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \ \epsilon \ C_c^\infty(\Omega).$$

Por el Lema 1.29, $(v_i - w_i) = 0$. ■

Notación 2.4 *La i-ésima derivada débil v_i de u se denota como*

$$D_i u := v_i, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

y se define

$$\nabla u := (D_1 u, \ldots, D_N u).$$

Proposición 2.5 *El operador derivada débil i-ésima es lineal.*

Demostración. Es evidente considerando la linealidad de la integral. ■

Proposición 2.6 *Si $f \in C^1(\Omega)$ entonces f tiene i-ésima derivada débil y*

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. Esto se sigue directamente de la Proposición 2.1 y la unicidad de la derivada débil. ■

El recíproco es falso, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7 *No toda función débilmente diferenciable es diferenciable.*

Demostración. Tomemos $\Omega = (-1, 1)$ y sea

$$f(x) := |x|.$$

Probaremos que f es débilmente diferenciable en $(-1, 1)$ con derivada débil

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Tomemos $\varphi \ \epsilon \ C_c^\infty(\Omega)$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto g es la derivada débil de f. ■

A continuación damos un ejemplo de una función que no es débilmente diferenciable.

Ejemplo 2.8 *La función g del ejemplo anterior no tiene derivada débil en $(-1, 1)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea h la derivada débil de g, y sea (φ_n) una sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$, tal que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset B_{1/n}(0)$ y $\varphi_n(0) = 1$, como por ejemplo

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/n, \\ e^{\left(\frac{1}{x^2-(1/n)^2}+n^2\right)} & \text{si } |x| < 1/n. \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n'(x)dx = -\int_{-1}^{0} \varphi_n'(x)dx + \int_{0}^{1} \varphi_n'(x)dx = -2\varphi_n(0) = -2.$$

Por otra parte, como $\|\varphi_n\|_\infty = 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{1} h(x)\varphi_n(x)dx \right| &\leq \int_{-1}^{1} |h(x)\varphi_n(x)|\, dx = \int_{-1/n}^{1/n} |h(x)\varphi_n(x)|\, dx \\ &\leq \left(\int_{-1/n}^{1/n} |h(x)|\, dx \right) \|\varphi_n\|_\infty \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n'(x)dx \neq \int_{-1}^{1} h(x)\varphi_n(x)dx$$

para n suficientemente grande, contradiciendo nuestra suposición. ■

2.2. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Definición 2.9 *Sea $p \in [1, \infty]$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable, } D_i u \in L^p(\Omega)\ \forall i = 1, ..., N\},$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_p^p \right)^{1/p},$$

si $p \in [1, \infty)$, y

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,\infty}} := \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_\infty .$$

Proposición 2.10 $\|u\|_{W^{1,p}}$ *es una norma en* $W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Si $\|u\|_{W^{1,p}} = 0$, entonces $\|u\|_p^p = 0$ y por lo tanto $u = 0$. Si $u = 0$, entonces $D_i u = 0$ y por lo tanto $\|u\|_{W^{1,p}} = 0$.

Además si $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_{W^{1,p}}^p &= \|\alpha u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \|D_i(\alpha u)\|_p^p \\
&= \alpha^p \|u\|_{W^{1,p}}^p .
\end{aligned}$$

Por último se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{1,p}} &= \left(\|u+v\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \|D_i u + D_i v\|_p^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_p^p \right)^{1/p} + \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \|D_i v\|_p^p \right)^{1/p} \\
&= \|u\|_{W^{1,p}} + \|v\|_{W^{1,p}} .
\end{aligned}$$

■

Observación 2.11 *Denotamos*

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

La norma $\|u\|_{W^{1,2}}$ *está inducida por el producto escalar*

$$(u,v)_{H^1} := (u,v)_2 + \sum_{i=1}^{N} (D_i u, D_i v)_2 = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Este es el espacio que más nos interesa ya que es el único con producto interno.

Teorema 2.12 $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$, *y* $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$, esto implica que para $1 \leq i \leq N$ las sucesiones (u_n) y $(D_i u_n)$ son de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y, por lo tanto, existen $u, u^i \in L^p(\Omega)$ tales que $u_n \to u$ y $D_i u_n \to u^i$ en $L^p(\Omega)$. Sabemos que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se cumple que

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (D_i u_n)\, \varphi.$$

Usando la Desigualdad de Hölder obtenemos, para cada $i = 1, ..., N$,

$$\left| \int_\Omega (u_n - u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \|u_n - u\|_p \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \to 0,$$
$$\left| \int_\Omega \left(D_i u_n - u^i\right) \varphi \right| \leq \left\|D_i u_n - u^i\right\|_p \|\varphi\|_\infty \to 0.$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega u^i \varphi.$$

Es decir u^i es la i-ésima derivada parcial de u. Por lo tanto,

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u_n - u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|D_i u_n - D_i u\|_p^p \right)^{1/p} \to 0.$$

Esto prueba que $W^{1,p}(\Omega)$ es completo. ∎

Observación 2.13 Queremos resaltar el siguiente hecho, que probamos en la demostración del Teorema 2.12: *Si una sucesión (u_n) en $W^{1,p}(\Omega)$ cumple que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_n \to u^i$ en $L^p(\Omega)$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u^i = D_i u$, y $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

2.3. Aproximación por funciones suaves

A diferencia de los espacios $L^p(\Omega)$ donde toda función se puede aproximar por funciones suaves con soporte compacto contenido en Ω, los elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ no se pueden aproximar de esta manera. Sin embargo, veremos que se pueden aproximar, en un cierto sentido, por funciones suaves con soporte compacto en $\mathbb{R}^N$.

Empezamos con el siguiente resultado.

Lemma 2.14 *Sea* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *y sea* $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces* $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$D_i(\rho * v) = \rho * D_i v \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. Por la Proposición 1.13, $\rho * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\rho * D_i v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para toda $i = 1, ..., N$. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Utilizando las Proposiciones 1.16 y 1.20 obtenemos

$$\begin{aligned}\int (\rho * v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int v\left(\widehat{\rho} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \int v\frac{\partial(\widehat{\rho} * \varphi)}{\partial x_i} \\ &= -\int (D_i v)\,(\widehat{\rho} * \varphi) = -\int (\rho * D_i v)\varphi.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{ y } \quad D_i(\rho * v) = \rho * D_i v,$$

como afirma el enunciado. ■

Notación 2.15 *Dada una función* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *denotamos por* $\overline{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *a la función*

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & si \;\; x \in \Omega \\ 0 & si \;\; x \in \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega \end{cases}$$

No es cierto en general que, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.16 *La función* $u : (0,1) \to \mathbb{R}$, *dada por* $u(x) = 1$ *para todo* $x \in (0,1)$, *es tal que* $\overline{u}$ *no es débilmente diferenciable (ver Ejemplo 2.8)* .

Sin embargo, se cumple lo siguiente.

Lemma 2.17 *Sean* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *y* $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$. *Entonces*

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad y \qquad D_i(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha D_i u + u\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}} \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces $\alpha\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y, como u es débilmente diferenciable en Ω, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega u(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) = \int_\Omega u\left(\frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_i} - \varphi\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right)$$
$$= \int_\Omega -\alpha\varphi D_i u - \varphi u\frac{\partial\alpha}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^N}\left(\overline{\alpha D_i u + u\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}}\right)\varphi.$$

En consecuencia, $\overline{\alpha u}$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^N$ y

$$D_i(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha D_i u + u\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}}.$$

Además, como $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $u\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}, \alpha D_i u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $D_i(\overline{\alpha u}) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Lemma 2.18 *Sea (v_n) una sucesión de funciones en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \,|_\Omega \to v$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \,|_\omega \to w_i$ en $L^p(\omega)$, $i = 1, ..., N$, con ω, Ω abiertos en $\mathbb{R}^N$, .tal que $\omega \subset \Omega$ Entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (que no depende de ω ni de Ω) tal que $u_n \,|_\Omega \to v$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \,|_\omega \to w_i$ en $L^p(\omega)$, $i = 1, ..., N$.*

Demostración. Fijamos una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 2, \end{cases}$$

y definimos $\zeta_n(x) := \zeta(\frac{x}{n})$. Observemos que, por el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.1), se tiene que $\zeta_n u \to u$ en $L^p(\Omega)$ para toda $u \in L^p(\Omega)$.

Definimos $u_n := \zeta_n v_n$. Entonces $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, y satisface

$$\begin{aligned}\|u_n - v\|_{L^p(\Omega)} &= \|\zeta_n v_n - \zeta_n v + \zeta_n v - v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|\zeta_n v_n - \zeta_n v\|_{L^p(\Omega)} + \|\zeta_n v - v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|v_n - v\|_{L^p(\Omega)} + \|\zeta_n v - v\|_{L^p(\Omega)} \to 0.\end{aligned}$$

Como (v_n) converge en $L^p(\Omega)$, está acotada en $L^p(\Omega)$. Usando este hecho se obtiene que, para alguna constante C,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - w_i\right\|_{L^p(\omega)} &= \left\|\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} v_n + \zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \zeta_n w_i + \zeta_n w_i - w_i\right\|_{L^p(\omega)} \\
&\leq \left\|\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} v_n\right\|_{L^p(\omega)} + \left\|\zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \zeta_n w_i\right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \\
&\leq \frac{1}{n}\left\|\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right\|_{\infty} \|v_n\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - w_i\right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \\
&\leq \frac{C}{n} + \left\|\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - w_i\right\|_{L^p(\omega)} + \|\zeta_n w_i - w_i\|_{L^p(\omega)} \to 0.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

Notación 2.19 *Escribimos $\omega \subset\subset \Omega$ para denotar que ω es abierto, $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$.*

Teorema 2.20 (de Friedrichs) *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\begin{aligned}
u_n |_\Omega &\to u && \text{en } L^p(\Omega), \\
\frac{\partial u_n}{\partial x_i} |_\omega &\to D_i u |_\omega && \text{en } L^p(\omega) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega, \quad \forall i = 1, ..., N.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea (ρ_n) una sucesión regularizante y sea $v_n := \rho_n * \overline{u}$. Por las Proposiciones 1.13 y 1.20,

$$v_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N),$$

y por la Proposición 1.24,

$$v_n \to \overline{u} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

En particular,

$$v_n |_\Omega \to u \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Sea $\omega \subset\subset \Omega$. Tomemos una función $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$ y $\alpha(x) = 1$ para toda x en una vecindad de ω (véase Lema

1.27). Es evidente que $\operatorname{supp}(1-\overline{\alpha})$ está contenido en el complemento de dicha vecindad. Por tanto, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) &= \operatorname{supp}[\rho_n * (1-\overline{\alpha})\overline{u}] \\ &\subset \operatorname{supp}(\rho_n) + \operatorname{supp}[(1-\overline{\alpha})\overline{u}] \\ &\subset B_{1/n}(0) + \operatorname{supp}(1-\overline{\alpha}) \subset \mathbb{R}^N \setminus \omega,\end{aligned}$$

en particular,

$$\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u} =: v_n \quad \text{en } \omega.$$

Utilizando los Lemas 2.14 y 2.17 se obtiene que $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n * \overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y

$$D_i(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \overline{\left(\alpha D_i u + u\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right)},$$

y por la Proposición 1.24,

$$D_i(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha D_i u + u\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Como α es constante igual a 1 en ω, y $\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u} =: v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ en ω para n suficientemente grande, concluímos que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\mid_\omega \to D_i u \mid_\omega \quad \text{en } L^p(\omega).$$

Por el Lema 2.18 existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to v$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\mid_\omega \to D_i u\mid_\omega$ en $L^p(\omega)$, $i = 1, ..., N$. ■

Proposición 2.21 (Derivada de una composición) *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y*

$$M := \sup_{s\in\mathbb{R}} |G'(s)| < \infty.$$

Entonces, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1,\infty)$, se cumple que $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$D_i(G \circ u) = (G' \circ u) D_i u \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. Por el Teorema del Valor Medio, para cada $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$|G(s_1) - G(s_2)| = |G'(\xi)|\,|s_1 - s_2| \le M\,|s_1 - s_2|. \tag{2.2}$$

En particular, como $G(0) = 0$, obtenemos

$$|G(u(x))| \leq M\,|u(x)| \qquad \forall x \in \Omega,$$

y por consiguiente $G \circ u \in L^p(\Omega)$. Además,

$$|(G'(u(x))D_i u(x)| \leq M\,|D_i u(x)|\,,$$

por lo que también $(G' \circ u)D_i u \in L^p(\Omega)$. Probaremos ahora que $G \circ u$ es débilmente diferenciable en Ω y que $D_i(G \circ u) = (G' \circ u)D_i u$.
Sean $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $\omega \supset \mathrm{supp}(\varphi)$. Por el Teorema 2.20 existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\mid_\Omega \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\mid_\omega \to D_i u\mid_\omega$ en $L^p(\omega)$. Por la Proposición 2.1, estas funciones cumplen que

$$\int_\Omega (G \circ u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi. \tag{2.3}$$

Además, de (2.2) y de la Desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|(G \circ u_n - G \circ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| &\leq M \int_\Omega |u_n - u| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \\ &\leq M \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por otra parte, por el Teorema 1.9, una subsucesión de u_n (que denotamos de nuevo (u_n)) converge puntualmente a u en casi todo punto de Ω y, como G' es continua, $(G' \circ u_n)$ converge puntualmente a $G' \circ u$ en casi todo punto de Ω. Además,

$$|G'(u_n(x)) - G'(u(x))| \leq 2M \qquad \forall x \in \Omega.$$

Como ω tiene medida finita, $2M \in L^q(\omega)$. Usando el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.1) obtenemos que $G' \circ u_n - G' \circ u \in L^q(\omega)$ y que

$$\int_\omega |G' \circ u_n - G' \circ u|^q \to 0.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \left[(G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - (G' \circ u) D_i u \right] \varphi \right| \\
&= \int_\omega \left| (G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - (G' \circ u_n) D_i u + (G' \circ u_n) D_i u - (G' \circ u) D_i u \right| |\varphi| \\
&\leq M \int_\omega \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u \right| |\varphi| + \int_\omega |G' \circ u_n - G' \circ u| \, |D_i u| \, |\varphi| \\
&\leq M \, \|\varphi\|_{L^q(\omega)} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u \right\|_{L^p(\omega)} + \|G' \circ u_n - G' \circ u\|_{L^q(\omega)} \, \|\varphi D_i u\|_{L^p(\omega)} \\
&\to 0. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

De (2.3), (2.4) y (2.5) se sigue que

$$\int_\Omega (G \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega [(G' \circ u) D_i u] \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Es decir, $G \circ u$ es débilmente diferenciable en Ω y $D_i(G \circ u) = (G' \circ u) D_i u$.
■

2.4. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 2.22 *Sea $p \in [1, \infty)$. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura del espacio $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Si $p = 2$ se denota*

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

Observemos que, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Intuitivamente, pensamos a los elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ como aquellas funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω. Sin embargo esto no tiene mucho sentido, ya que la frontera tiene medida cero y las funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ no son necesariamente continuas. Probaremos a continuación que, si Ω es suficientemente suave y $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si u se anula en la frontera de Ω. Para esto probaremos primero el siguiente lema.

Lemma 2.23 *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, es una función con soporte compacto contenido en Ω, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Tomemos un abierto ω tal que supp $u \subset \omega \subset\subset \Omega$. Elijamos $\alpha \in C_c^\infty(\omega)$ tal que $\alpha(x) \in [0,1]$ para toda $x \in \Omega$, y $\alpha(x) = 1$ para toda $x \in$ supp u. Entonces $\alpha u = u$. Por el Teorema 2.20 existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \mid_\Omega \to u \;\text{ en } L^p(\Omega) \quad \text{ y } \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \mid_\omega \to D_i u \mid_\omega \quad \text{en } L^p(\omega).$$

En consecuencia,

$$\|\alpha u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega \alpha^p \left|u_n - u\right|^p \leq \int_\Omega \left|u_n - u\right|^p \to 0.$$

Observemos que, por el Lema 2.17,

$$\frac{\partial\left(\alpha u_n\right)}{\partial x_i} - D_i(\alpha u) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(u_n - u) + \alpha\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u\right) \quad \text{en } \Omega.$$

Por tanto, usando la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\left(\alpha u_n\right)}{\partial x_i} - D_i u\right\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\omega \left|\frac{\partial\left(\alpha u_n\right)}{\partial x_i} - D_i(\alpha u)\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq C\left(\int_\omega \left|u_n - u\right|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - D_i u\right|^p\right)^{1/p} \to 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\alpha u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ y, como $\alpha u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, concluímos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Teorema 2.24 *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $p \in [1,\infty)$. Si $u(x) = 0$ para toda $x \in \partial\Omega$, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos primero que supp(u) es acotado.Tomemos $G \in C^1(\mathbb{R})$, tal que $|G(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| \leq 1, \\ t & \text{si} \quad |t| \geq 2, \end{cases}$$

Sea $G_n(t) := \frac{1}{n}G(nt)$. Entonces,

$$G_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| \leq \frac{1}{n}, \\ t & \text{si} \quad |t| \geq \frac{2}{n}, \end{cases}, \qquad G_n'(t) = G'(nt) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si} \quad |t| \geq \frac{2}{n}, \end{cases}.$$

Definimos $u_n := G_n \circ u$. Por la Proposición 2.21, se tiene que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ y $D_i u_n = (G_n' \circ u) D_i u$. Observemos que, para $t \neq 0$, se tiene que $G_n(t) \to t$ y $G_n'(t) \to 1$. En consecuencia, $u_n(x) \to u(x)$ y $D_i u_n(x) \to D_i u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. Además, como $|G(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n} |G(nu(x))| \leq |u(x)| \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$|D_i u_n| = (G_n' \circ u) D_i u \leq |D_i u(x)| \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.1), se tiene que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_n \to D_i u$ en $L^p(\Omega)$. En consecuencia, $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.
Por otra parte, como $u \in C(\overline{\Omega})$ y $u = 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que $U_n := u^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es un abierto relativo de $\overline{\Omega}$ que contiene a $\partial\Omega$, y $u_n(x) = 0$ para todo $x \in U_n$. Por tanto

$$\operatorname{supp}(u_n) \subset \operatorname{supp}(u) \cap (\Omega \smallsetminus U_n)\,.$$

Como $\operatorname{supp}(u)$ es acotado $\operatorname{supp}(u_n)$ es compacto y está contenido en Ω. Por el lema anterior se tiene entonces que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y, por consiguiente, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Si $\operatorname{supp}(u)$ no es acotado, fijamos una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 2, \end{cases}$$

y definimos $\zeta_n(x) := \zeta(\frac{x}{n})$ y $u_n := \zeta_n u$. Por el Teorema de Convergencia Dominada, $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_n = \frac{1}{n}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(\frac{x}{n}) + \zeta_n D_i u \to D_i u$ en $L^p(\Omega)$. En consecuencia $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $u_n \in C(\overline{\Omega})$, $u_n = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $\operatorname{supp}(u_n)$ es acotado, se tiene que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y, como $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, concluímos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

El recíproco de este teorema no se cumple en general. Sin embargo, veremos a continuación que se cumple si Ω es suficientemente regular.

Notación 2.25 *Expresaremos a un punto $x \in \mathbb{R}^N$ como $x = (x', x_N)$ con $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N_+ &:= \{x = (x', x_N) : x_N > 0\}, \\ Q &:= \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \ \textit{y} \ |x_N| < 1\}, \\ Q_+ &:= Q \cap \mathbb{R}^N_+, \\ Q_0 &:= \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \ \textit{y} \ |x_N| = 0\}. \end{aligned}$$

Definición 2.26 *Se dice que un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ es de clase C^1 si para todo $x \in \partial\Omega$, existe una vecindad U de x en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación biyectiva $h : Q \to U$ tal que*

$$h \in C^1(\overline{Q}), \quad h^{-1} \in C^1(\overline{U}), \quad h(Q_+) = U \cap \Omega \quad y \quad h(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Antes de proceder veamos un lema que nos será de utilidad.

Lemma 2.27 *(Partición de la unidad) Sea Ω acotado en $\mathbb{R}^N$. Dada una cubierta abierta finita de $\overline{\Omega}$, $(U_i)_{i=1}^n$, existe una colección de funciones $(\theta_i)_{i=1}^n \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$, que verifican*

$$Supp\ \theta_i \subset U_i, \qquad \sum_{i=1}^n \theta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Demostración. Sean (A_j) abiertos en $\mathbb{R}^N$, tal que $A_j \subset\subset U_j$ y $\overline{\Omega} \subset A_1 \cup ... \cup A_n$. Definamos una función $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $f_k = 1$ en $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j \neq k} A_j$, $f_k = 0$ en $\overline{\Omega} \setminus A_k$ y $0 \leq f \leq 1$ (Proposición 1.27). Para cada i definamos la función

$$\theta_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_l f_l(x)}.$$

■

Teorema 2.28 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ de clase C^1. Si $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $p \in [1, \infty)$, entonces $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

Demostración. Para probar este teorema sera conveniente analizar localmente la frontera de Ω. Para esto tomemos una cubierta de $\overline{\Omega}$ de la siguiente manera. Para cada $x \in \partial\Omega$ tomemos una vecindad U_x, que se comporta como en la Definición 2.26 y tomemos una subcubierta finita $U_1, ...U_m$. Por último escojamos un abierto U_0, tal que $U_0 \subset\subset \Omega$ y $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$. Para cada U_i tomemos θ_i como en el Lema 2.27, entonces la función $v\theta_i \in W_0^{1,p}(U_i) \cap C(\overline{U_i})$ y además

$$v = \sum_{i=1}^n v\theta_i.$$

Por último como las vecindades U_i de puntos en la frontera son difeomorfas (con una aplicación H) a un cilindro Q (además de que $H(Q_+) = U_i \cap \Omega$

y $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$), será suficiente probar que si $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q_+})$, entonces $u = 0$ en Q_0.
Sea (u_n) una sucesión en $C_c^\infty(Q_+)$, tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(Q_+)$. Para $(x', x_N) \in Q_+$, se tiene que

$$|u_n(x', x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt$$

para $0 < \varepsilon < 1$, por el teorema del valor medio de la integral existe $\xi \in [0, \varepsilon]$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |u_n(x', x_N)|\, dx_N \leq |u_n(x', \xi)| \leq \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt$$

por consiguiente

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^\varepsilon |u_n(x', x_N)|\, dx_N dx' \leq \int_{|x'|<1} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt dx'.$$

Como $0 < \varepsilon$, $\{x \mid |x'| < 1, 0 < x_N < \varepsilon\} \subset Q_+$ y $u_n \to u$ en $W^{1,p}(Q_+)$, tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\int_{|x'|<1} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |u(x', x_N)|\, dx_N dx' \leq \int_{|x'|<1} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt dx'.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |u(x', x_N)|\, dx_N \to |u(x', 0)|$ en consecuencia

$$\int_{|x'|<1} |u(x', 0)|\, dx' = 0$$

Esto quiere decir que $u = 0$ en Q_0. ∎

2.5. Extensión de funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposición 2.29 *Sea $p \in [1, \infty)$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donde*

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & si\ x \in \Omega, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Más aún, se cumple que

$$D_i \overline{u} = \overline{D_i u} \qquad \forall i = 1, ..., N,$$

y

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demostración. Si $u \in C_c^\infty(\Omega)$,también se cumple que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C_c^\infty(\Omega)$ y es evidente que

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \quad \text{y que} \quad \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{2.6}$$

En el caso general tomemos una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Es claro que

$$\overline{u_n} \to \overline{u} \qquad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Con el mismo argumento se tiene que

$$\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}} \to \overline{D_i u} \qquad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por la Observación 2.13, se llega a que

$$D_i \overline{u} = \overline{D_i u}.$$

En consecuencia,

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

■

Capítulo 3

Existencia de una solución débil para el problema de Poisson

El objetivo de este capítulo es demostrar la existencia de una solución débil para el problema de Poisson

$$(\wp) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Para ello usaremos un resultado muy importante del Análisis Funcional: el Teorema de Representación de Fréchet-Riesz.

3.1. Espacios de Hilbert

Teorema 3.1 *Sea H un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotamos por*

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

a la norma inducida por el producto escalar.

Definición 3.2 *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H con producto escalar, que es completo con respecto a la norma inducida por dicho producto.*

Un ejemplo importante es el siguiente.

Proposición 3.3 *El espacio $L^2(\Omega)$ con el producto escalar dado por*

$$\langle u, v\rangle_2 := \int_\Omega uv$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración. Ver, por ejemplo, Wheeden-Zygmund [**5**]. ■

Proposición 3.4 *Para todo espacio vectorial H con producto escalar se cumple lo siguiente.*
(i) Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u, v \in H.$$

(ii) Identidad del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

Demostración. Ver, por ejemplo, Wheeden-Zygmund [**5**] ■

El siguiente es un resultado fundamental en la teoría de espacios de Hilbert.

Teorema 3.5 (de la Proyección Ortogonal) *Sea X un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H y sea $u \in H$. Entonces existe un único $v \in X$ tal que*

$$\|u - v\| = \inf_{x \in X} \|u - x\|.$$

Demostración. Sea (v_n) una sucesión en X tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| = \inf_{x \in X} \|u - x\| =: a. \tag{3.1}$$

Probaremos que (v_n) es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la identidad del paralelogramo (Proposición 3.4) y el hecho de que $(v_m + v_n)/2 \in X$, obtenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\|v_m - v_n\|^2 &= \|(v_m - u) + (u - v_n)\|^2 \\
&= 2\left(\|(v_m - u)\|^2 + \|u - v_n\|^2\right) - 4\,\|(v_m + v_n)/2 - u\|^2 \\
&\leq 2\left(\|(v_m - u)\|^2 + \|u - v_n\|^2\right) - 4a^2 \\
&< \varepsilon \quad \text{si } n, m \geq n_0.
\end{aligned}$$

Esto prueba que (v_n) es de Cauchy. Como H es completo y X es cerrado, $v_n \to v$ en X y v cumple que

$$a = \lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| = \|u - v\|.$$

Probaremos ahora que v es único. Sean $v_1,\ v_2 \in X$, tal que

$$\|u - v_1\| = \|u - v_2\| = a$$

Repitiendo el proceso anterior

$$\begin{aligned}
\|v_1 - v_2\|^2 &= \|(v_1 - u) + (u - v_2)\|^2 \\
&= 2\left(\|(v_1 - u)\|^2 + \|u - v_2\|^2\right) - 4\,\|(v_1 + v_2)/2 - u\|^2 \\
&\leq 2\left(\|(v_1 - u)\|^2 + \|u - v_2\|^2\right) - 4a^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

El teorema anterior nos permite definir la proyección ortogonal de H en X como sigue.

Definición 3.6 *Sea X un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H. La proyección ortogonal $p_X : H \to X$ de H en X se define como $p_X(u) := v$ donde v es el único elemento de X que cumple*

$$\|u - v\| = \inf_{x\in X} \|u - x\|.$$

Definición 3.7 *Sea X un subespacio vectorial de un espacio de Hilbert H. Definimos el complemento ortogonal de X en H como*

$$X^\perp := \{u \in H : \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in X\}.$$

Proposición 3.8 *$X^\perp$ es subespacio vectorial cerrado de H.*

Demostración. Sea $v \in X$, $\langle \cdot, v\rangle$, es una forma lineal contínua, por lo tanto, $v^\perp$ es cerrado. Además se tiene que

$$X^\perp = \bigcap_{v\in X} v^\perp.$$

Por lo tanto $X^\perp$ es cerrado. ■

En general no es cierto que el complemento ortogonal de un subespacio propio X de H sea no trivial, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9 *El subespacio de $L^2(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$, es denso en $L^2(\Omega)$, por lo tanto su complemento ortogonal es trivial.*

Sin embargo probaremos que, si X es un subespacio cerrado de H y $X \neq H$, entonces $X^\perp \neq \{0\}$.

Dada una función lineal $f : H \to \mathbb{R}$, denotaremos por

$$\mathcal{N}(f) := \{u \in H : f(u) = 0\}$$

al núcleo de f. Observemos que, si f es continua, entonces $\mathcal{N}(f) = f^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de H.

Teorema 3.10 *Sea X un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. La proyección ortogonal $p_X : H \to X$ tiene las siguientes propiedades:*
(i) El punto $v = p_X(u)$, es el único punto en X con la propiedad $\langle v - u, x\rangle = 0$ $\forall x \in X$.
(ii) p_X es lineal y continua y cumple que $p_X(v) = v$ para todo $v \in X$.
(iii)$\mathcal{N}(p_X) = X^\perp$

Demostración. *(i)* Sea $x \in X$, por definición tenemos que si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\|u - (p_X(u) + \lambda x)\|^2 > \|u - p_X(u)\|^2 .$$

Desarrollando se llega a que, para $v := p_x(u)$,

$$2\lambda \langle u - v, x\rangle + \lambda^2 \|x\|^2 > 0.$$

Por lo tanto

$$\|x\|^2 \lambda > -2 \langle u - v, x\rangle .$$

Por lo tanto para evitar una contradicción se obtiene que

$$\langle p_X(u) - u, x\rangle = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Para ver que es único, tomemos a $v' \in X$, tal que $\langle v' - u, x\rangle = 0$ $\forall x \in X$. Por lo tanto si $z \in X$

$$\|u - (v' + z)\|^2 = \|u - v'\| + \|z\|^2 .$$

En consecuencia

$$\|u - v'\| = \inf_{x \in X} \|u - x\| .$$

Se concluye que $v' = p_X(u)$.
(ii) Sean $u, w \in H$, utilizando lo anterior tenemos que si $x \in X$ entonces

$$\langle p_X(u) - u, x\rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad \text{y}$$
$$\langle p_X(w) - w, x\rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

A partir de estas igualdades se obtiene que

$$\langle p_X(u) + p_X(w) - (u+w), x\rangle = 0 \quad \forall x \in X \qquad \text{y}$$
$$\langle \lambda p_X(u) - \lambda u, x\rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

Por el inciso *(i)* se llega a que

$$p_X(u) + p_X(w) = p_X(u+w) \qquad \text{y}$$
$$\lambda p_X(u) = p_X(\lambda u).$$

Para ver que es contínuo también utilizamos la propiedad *(i)*, para obtener que

$$\|u\|^2 = \|u + p_X(u) - p_X(u)\|^2 = \|u - p_X(u)\|^2 + \|p_X(u)\|^2 .$$

Por lo tanto

$$\|p_X(u)\| \leq \|u\| .$$

Utilizando la propiedad *(i)*, es evidente que $p_X(v) = v$ para todo $v \in X$.
(iii) Sea $u \in H$, sabemos que

$$\|u - p_X(u)\| = \inf_{x \in X} \|u - x\| ,$$

Si $u \in X^{\perp}$,

$$\langle u, x \rangle = 0 \qquad \forall x \in X,$$

por lo tanto

$$p_X(u) = 0.$$

Si $p_X(u) = 0$

$$\langle u - p_x(u), x\rangle = \langle u, x\rangle = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Por lo tanto $u \in X^{\perp}$. ■

Una consecuencia de importancia de este resultado, que usaremos en la próxima sección, es la siguiente.

Corolario 3.11 *Si X es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H y $X \neq H$, entonces $X^{\perp} \neq \{0\}$.*

Demostración. Sea $u \in H \diagdown X$. Entonces $v = u - p_X(u) \in \mathcal{N}(p_X) = X^{\perp}$, además de que $v \neq 0$. ■

3.2. El Teorema de Representación de Fréchet-Riesz

Definición 3.12 *El dual topológico de un espacio de Hilbert se define como*

$$H' := \{f : H \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}.$$

La norma de $f \in H'$ está dada por

$$\|f\|_{H'} := \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

La demostración de que $\|f\|_{H'}$ es efectivamente una norma en H' se encuentra, por ejemplo, en **[3]**. Empecemos observando lo siguiente.

Proposición 3.13 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $u \in H$. La función*

$$f_u : H \to \mathbb{R}, \qquad f_u(v) \mapsto \langle u, v \rangle,$$

es lineal y continua. Además se cumple que

$$\|f_u\|_{H'} = \|u\|.$$

Demostración. Es lineal y continua porque el producto punto el bilineal y continuo. Además

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|} \leq \|u\|.$$

En particular

$$\frac{\|f_u(u)\|}{\|u\|} = \|u\|.$$

Por lo tanto $\|f_u\|_{H'} = \|u\|$. ■

El siguiente resultado describe a H'.

Teorema 3.14 (de Representación de Fréchet-Riesz) *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f : H \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$f(v) = (u, v) \qquad \forall\ v \in H. \tag{3.2}$$

Más aún, se cumple que

$$\|u\| = \|f\|_{H'} := \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Demostración. Probaremos primero la existencia. Si $f = 0$, entonces $u = 0$ satisface (3.2). Supongamos ahora que $f \neq 0$. Como f es continua, $\mathcal{N}(f)$ es un subespacio cerrado de H y, como $f \neq 0$, se cumple que $\mathcal{N}(f) \neq H$. Por el Corolario 3.11, se tiene entonces que existe $u_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, $u_0 \neq 0$. Definimos

$$u := \frac{f(u_0)}{\|u_0\|^2} u_0.$$

Probaremos que u satisface (3.2). Dado $v \in H$ definimos $z := f(v)u_0 - f(u_0)v$. Entonces

$$f(z) = f(v)f(u_0) - f(u_0)f(v) = 0.$$

Por lo tanto, $z \in \mathcal{N}(f)$ y, en consecuencia,

$$0 = (u_0, z) = f(v)(u_0, u_0) - f(u_0)(u_0, v),$$

lo que implica que

$$f(v) = \frac{f(u_0)}{\|u_0\|^2}(u_0, v) = (u, v).$$

Esto prueba que que u satisface (3.2).
Probaremos ahora la unicidad. Sean $u_1, u_2 \in H$ tales que $(u_1, v) = (u_2, v)$ para toda $v \in H$. En particular, para $v := u_1 - u_2$ se cumple que

$$0 = (u_1, v) - (u_2, v) = (u_1 - u_2, v) = \|u_1 - u_2\|.$$

En consecuencia, $u_1 = u_2$. Esto demuestra la unicidad.
La afirmación

$$\|f\|_{H'} = \|u\|$$

es consecuencia inmediata de la Proposición 3.13. ■

3.3. Existencia de una solución débil

Consideremos el problema de Poisson

$$(\wp) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Definición 3.15 *Una solución clásica de* $(\wp)$ *es una función* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *que satisface ambas identidades de* $(\wp)$.

Aquí $C^2(\overline{\Omega})$ denota al espacio de funciones $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales de orden ≤ 2 en Ω y éstas son continuas en $\overline{\Omega}$. Observemos que, si $(\wp)$ tiene una solución clásica, entonces necesariamente $f \in C(\overline{\Omega})$.

Definición 3.16 *Una solución débil de* $(\wp)$ *es una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que cumple*

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Notemos que el lado izquierdo de esta igualdad no es otra cosa que el producto escalar $\langle u, v \rangle_{H^1}$. Observemos primero lo siguiente.

Proposición 3.17 *Si* Ω *es un abierto acotado de* $\mathbb{R}^N$, *entonces toda solución clásica de* $(\wp)$ *es solución débil de* $(\wp)$.

Demostración. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución clásica de $(\wp)$ entonces, multiplicando la primera igualdad por $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u + \int_\Omega \varphi u = \int_\Omega f\varphi.$$

Por la Proposición 2.1 se tiene entonces que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u + \int_\Omega \varphi u = \int_\Omega f\varphi.$$

Como, por definición, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, concluímos que

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Finalmente, como Ω es acotado, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y, por el Teorema 2.24, $u \in H_0^1(\Omega)$. ■

Queremos probar que $(\wp)$ tiene una solución débil. Empezaremos demostrando la siguiente afirmación.

Lemma 3.18 *Sea* $f \in L^2(\Omega)$*. La función* $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ *dada por*

$$\phi(v) := \int_\Omega fv$$

es lineal y continua.

Demostración. Si $\|f\|_2 = 0$ la demostración es trivial. Si $\|f\|_2 \neq 0$, es claro que $\phi(v)$ es lineal. Sea $w \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\|v - w\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_2}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\left| \int_\Omega f(v - w) \right| \leq \|f\|_2 \frac{\varepsilon}{\|f\|_2} = \varepsilon.$$

■

Estamos listos para probar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.19 *Para todo abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *y toda* $f \in L^2(\Omega)$*, el problema de Poisson* $(\wp)$ *tiene una única solución débil.*

Demostración. Como se vio en la proposición anterior, $\phi(v)$ es una función lineal y contínua en un espacio de Hilbert. Por el Teorema 3.14 (Teorema de Representación de Fréchet-Riesz), sabemos que existe un único elemento u, tal que

$$\phi(v) = (u, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En otras palabras existe una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv. \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Si Ω y f son suficientemente suaves, esta solución débil es, de hecho una solución clásica. Empezaremos con el siguiente resultado.

Proposición 3.20 *Sean* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^N$*,* u *una solución débil de* $(\wp)$ *y* f *una función contínua. Si* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *y* Ω *es de clase* C^1*, entonces* u *es solución clásica de* $(\wp)$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.28, se cumple que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Por la Proposición 2.1 se tiene que

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u + \int_\Omega \varphi u = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Es decir,

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La Proposición 1.29 asegura entonces que

$$-\Delta u + u = f \quad \text{ en c.t.p. de } \Omega.$$

Como u es continua, concluímos que $-\Delta u + u = f$ en Ω. ■

Así pues, para demostrar que ($\wp$) tiene una solución clásica, necesitamos probar que la solución débil de ($\wp$) es de clase C^2 en $\overline{\Omega}$. En esta tesis demostraremos un resultado más débil: Probaremos que, si $f \in C^\infty(\Omega)$ entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y cumple que

$$-\Delta u + u = f \quad \text{ en } \Omega.$$

Ver Corolario 4.31.

Capítulo 4

Regularidad interior

En este capítulo probaremos el Teorema 0.2 enunciado en la Introducción. Para ello requerimos introducir espacios de Sobolev de funciones que tienen derivadas débiles de orden mayor que 1. Demostraremos algunas desigualdades importantes que nos servirán para ver que, mientras mayor sea el orden de las derivadas débiles del dato inicial f, mayor es el orden de las derivadas débiles de la solución débil y que, si éste es suficientemente grande, la solución débil es diferenciable en el sentido clásico en Ω.

4.1. Desigualdades de Sobolev

Empecemos demostrando el siguiente resultado técnico.

Lemma 4.1 *Sean $N \geq 2$ y $f_1, f_2, ..., f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f(x) := f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_N(\widetilde{x}_N),$$

donde

$$\widetilde{x}_i = (x_1, x_2, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}, \qquad 1 \leq i \leq N.$$

Entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}$$

Demostración. Se procederá por inducción . En el caso $N = 2$ se da la igualdad ya que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int |f_1(x_2)f_2(x_1)|\, dx_1dx_2 \\
&= \int |f_1(x_2)|\, dx_2 \int |f_2(x_1)|\, dx_1 \\
&= \prod_{i=1}^{2} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R})} .
\end{aligned}$$

Supongamos el resultado para N funciones. Sean $f_1, f_2, ...f_{N+1} \in L^N(\mathbb{R}^N)$. Para cada $t \in \mathbb{R}^N$ consideremos las funciones $f_{i,t} : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_{i,t}(x') := f_i(x', t), \qquad x' \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Se denota

$$N' = \frac{N}{N-1}.$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left(\int |f_1 f_2 ... f_N|^{N'} \, dx_1...dx_N \right)^{1/N'} .$$

Como las funciones $|f_{i,t}|^{N'} \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ para $1 \leq i \leq N$, se puede utilizar la hipótesis de inducción y se obtiene

$$\int |f_1|^{N'} ... |f_N|^{N'} \, dx_1...dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| f_{i,t}^{N'} \right\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^{N} \|f_{i,t}\|^{N'}_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} .$$

Por consiguiente

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_{i,t}\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} .$$

Definimos

$$G_i(t) := \|f_{i,t}\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} .$$

Como cada $f_i \in L^N(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$G_i \in L^N(\mathbb{R}) \qquad \text{con } 1 \leq i \leq N.$$

Utilizando la desigualdad generalizada de Hölder se sabe que $\prod_{i=1}^{N} G_i(t) \in L(\mathbb{R})$ y además

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})} \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} G_i(t)dt \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} .$$

■

Definición 4.2 *Sea* $p \in [1, N)$. *El exponente crítico de Sobolev es el número*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Notemos que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \qquad \text{y} \qquad p^* > p.$$

Se tiene el siguiente resultado fundamental.

Teorema 4.3 (Desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *Si* $p \in [1, N)$, *entonces existe una constante* K *que depende únicamente de* p *y* N *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq K \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} := K \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{1/p} \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Si $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, se tiene

$$|u(x_1, x_2, ..., x_N)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u(t, x_2, ..., x_N)}{\partial t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_N)}{\partial x_1} dx_i \right| .$$

Análogamante para cualquier $1 \leq i \leq N$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N)}{\partial x_i} \right| dx_i.$$

Definimos

$$f_i(\widetilde{x_i}) := \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1,}..., x_N)}{\partial x_i} \right| dx_i$$

Por consiguiente
$$|u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^N f_i(\widetilde{x}_i).$$
Por el lema 4.1
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N \left\| f_i(\widetilde{x}_i)^{1/(N-1)} \right\|_{N-1} = \prod_{i=1}^N \| f_i(\widetilde{x}_i) \|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{1/(N-1)} = \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1^{1/(N-1)}.$$
En consecuencia
$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1^{1/N}.$$
Sea t de tal forma que $\frac{tN}{N-1} = q(t-1)$, esto es que $t = \frac{N-1}{N} p^*$; si se aplica la ecuación anterior a $|u|^{t-1} u$, en lugar de u se obtiene que
$$\|u\|_{N/(N-1)}^t \leq t \prod_{i=1}^N \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1^{1/N}.$$
Se aplica la desigualdad de Hölder N veces para llegar a que
$$t \prod_{i=1}^N \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1^{1/N} \leq t \, \|u\|_{q(t-1)}^{t-1} \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^{1/N}.$$
Substituyendo el valor de t se obtiene
$$\|u\|_{p^*}^1 \leq t \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^{1/N}.$$
Sea $m := \max_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$, entonces se tiene que
$$\prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^{1/N} \leq m \leq \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$
Esto implica que
$$\|u\|_{p^*} \leq C \, \|\nabla u\|_p \, .$$
■

Una consecuencia importante del teorema anterior es la siguiente.

Teorema 4.4 (de Encaje para $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p < N$) *Si $p \in [1, N)$, entonces*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \qquad \textit{con } p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Además, existe una constante K que depende únicamente de p y N tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq K \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)} := K \left(\sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea (φ_n) una sucesión en $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Por el Teorema 4.3,

$$\|\varphi_m - \varphi_l\|_{p^*} \leq K \|\nabla\varphi_m - \nabla\varphi_l\|_p \leq K \|\varphi_m - \varphi_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Por lo tanto (φ_n) es de Cauchy en $L^{p^*}(\Omega)$ y, como $L^{p^*}(\Omega)$ es de Banach, $\varphi_n \to v$ en $L^{p^*}(\Omega)$. Por el Corolario 1.10, se tiene que $u(x) = v(x)$ para casi todo $x \in \Omega$**.** Finalmente, como

$$\|\varphi_m\|_{p^*} \leq K \|\nabla\varphi_m\|_p,$$

se cumple que

$$\|u\|_{p^*} \leq K \|\nabla u\|_p,$$

como afirma el enunciado. ■

Teorema 4.5 (Desigualdad de Morrey) *Si $p \in (N, \infty]$, entonces existe una constante K que depende únicamente de p y N tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Sea $B_s(x)$ la bola de radio s en $\mathbb{R}^N$ con centro en x. Para $\zeta \in \partial B_1(0)$ y $s > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} |u(x+s\zeta) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+t\zeta)dt \right| \\ &= \left| \int_0^s \nabla u(x+t\zeta) \cdot \zeta dt \right| \\ &\leq \int_0^s |\nabla u(x+t\zeta)|\, dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} |u(x+s\zeta)-u(x)|\, dS &\leq \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+t\zeta)|\, dSdt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+t\zeta)|\, \frac{t^{N-1}}{t^{N-1}} dSdt.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable, de polares en N dimensiones a cartesianas

$$(0,s)\times \partial B_1(0) \to B_s(0), \qquad (t,\zeta)\mapsto t\zeta =: y,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+t\zeta)|\, \frac{t^{N-1}}{t^{N-1}} dSdt &= \int_{B_s(0)} \frac{|\nabla u(x+y)|}{|y|^{N-1}} dy \\ &= \int_{B_s(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz \\ &\leq \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x+s\zeta)-u(x)|\, dS \leq \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz.$$

Multiplicando por s^{N-1}, e integrando de 0 a 1 con respecto a s, obtenemos

$$\int_{B_1(x)} |u(z)-u(x)|\, dz \leq \frac{1}{N} \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz. \tag{4.1}$$

Aplicando esta desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned}|u(x)| &= \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} |u(x)-u(z)+u(z)|\, dz \\ &\leq \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} |u(x)-u(z)|\, dz + \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} |u(z)|\, dz \qquad (4.2) \\ &\leq \frac{1}{N\,|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz + \frac{1}{|B_1(0)|} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Notemos que, como $p > N$, se cumple que $\frac{(N-1)p}{p-1} < N$ y, por lo tanto,

$$\int_{B_1(x)} \frac{dz}{|x-z|^{\frac{(N-1)p}{p-1}}} = \int_{B_1(0)} \frac{dy}{|y|^{\frac{(N-1)p}{p-1}}} =: K_1 < \infty.$$

De la desigualdad de Hölder se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{1/p} \left(\int_{B_1(x)} \frac{dz}{|x-z|^{\frac{(N-1)p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq K_1 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde K_1 depende únicamente de N y p. Combinando (4.2) y (4.3) obtenemos que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x)| \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

donde K depende únicamente de N y p. ■

Definición 4.6 *Sea $f : X \to Y$ una función, se dice que una f es uniformemente contínua si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\|f(x) - f(x+\delta)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X$.*

Notación 4.7 *Denotemos por $C(\overline{\Omega})$ al espacio de funciones continuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ con la norma*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Proposición 4.8 *Si $f \in C(\overline{\Omega})$, entonces f es uniformemente contínua.*

Demostración. Veáse, por ejemplo, Jost [9]. ■

Usaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.9 *Si Ω es acotado, entonces $C(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Véase, por ejemplo, Dieudonné [6]. ■

Como consecuencia de la desigualdad de Morrey se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.10 (de Encaje para $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > N$) *Si Ω es acotado y $p \in (N, \infty)$, entonces para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe $u^* \in C(\overline{\Omega})$ tal que*

$$u^*(x) = u(x) \quad \textit{para casi todo } x \in \Omega.$$

Además, existe una constante K que depende únicamente de p y N tal que

$$\|u^*\|_{C(\overline{\Omega})} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Sea $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, una sucesión tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Por la Desigualdad de Morrey (Teorema 4.5),

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Por lo tanto u_n es de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y además, como

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

entonces $u_n \to u$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como u_n es de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces es de Cauchy en $C(\overline{\Omega})$ y por lo tanto existe $u^* \in C(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \to u^* \text{ en } C(\overline{\Omega}).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} u^*(x) = u(x) \quad &\text{para casi todo } x \in \Omega \quad \text{y} \\ \|u^*\|_{C(\overline{\Omega})} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}&. \end{aligned}$$

■

4.2. Los espacios $W^{m,p}(\Omega)$

Definición 4.11 *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, \infty]$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define recursivamente como sigue:*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable}, D_i u \in W^{m-1,p}(\Omega)\ \forall i = 1, ..., N\}$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{W^{m-1,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Teorema 4.12 *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 2.12. ■

Para $p = 2$ denotamos

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

En este caso la norma está inducida por el producto escalar

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} (D_i u, D_i v)_{H^{m-1}(\Omega)}.$$

Notación 4.13 *Es conveniente usar la siguiente notación. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ denotamos por*

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

y por

$$D^\alpha u := D_N^{\alpha_N} \cdots D_1^{\alpha_1} u,$$

donde

$$D_i^0 u := u \quad y \quad D_i^{\alpha_i} u := \underbrace{D_i \cdots D_i}_{\alpha_i \text{ veces}} u \quad si\ \alpha_i \geq 1.$$

El siguiente resultado garantiza que todas las derivadas débiles múltiples son de esta forma.

Proposición 4.14 *Para todo $u \in W^{2,p}(\Omega)$ se cumple que*

$$D_i D_j u = D_j D_i u \qquad \forall i, j = 1, ..., N.$$

Demostración. Tenemos que $\forall i, j = 1, ..., N$ se cumple que

$$\int_\Omega \varphi D_i D_j u = \int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} u = \int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} u = \int_\Omega \varphi D_j D_i u \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto por el Lema 1.29 se tiene que

$$D_i D_j u = D_j D_i u \qquad \forall i, j = 1, ..., N.$$

■

Definición 4.15 *Para $p \in [1, \infty)$ definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$ y denotamos*

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

Observación 4.16 *Notemos que si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $|\alpha| < m$, entonces $D^\alpha u \in W_0^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$, ya que si $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ y $u_n \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$, entonces $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ en $W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$.*

A continuación daremos resultados de encaje para estos espacios.

Teorema 4.17 (de Encaje para $W_0^{m,p}(\Omega)$, $mp < N$) *Si $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, \frac{N}{m})$, entonces*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \text{con } q := \frac{Np}{N - mp}.$$

Además, existe una constante K que depende únicamente de m, p y N tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Demostración. Sea $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y se probará la siguiente afirmación por inducción sobre $n \leq m$: Sea $|\beta| \leq m - n$, entonces $u \in W_0^{m-n,q_n}(\Omega)$,

$$q_{n-1} < \frac{N}{m-n-1} < N \text{ y} \tag{4.4}$$

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^{q_n}(\Omega)} \leq C_n \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \text{ donde} \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{q_n} = \frac{1}{p} - \frac{n}{N}.$$

Si $|\beta| \leq m - 1$, sabemos que $D^\beta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y que por definición $q_1 = p^*$. Como $p < \frac{N}{m} < N$, podemos utilizar el Teorema 4.4 para $D^\beta u$ y se obtiene que $D^\beta u \in L^{p^*}(\Omega)$ y que

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \left\|D^\beta u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \tag{4.6}$$

Por lo tanto $u \in W_0^{m-1,p^*}(\Omega)$. Supongamos la hipótesis de inducción, si $|\beta| \leq m - n$, entonces

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{q_n} - \frac{1}{N} > \frac{m-n}{N} - \frac{1}{N} > \frac{m-(n+1)}{N} > \frac{1}{N}.$$

Además $D^\beta u \in W_0^{1,q_n}(\Omega)$ y utilizando el Teorema 4.4 se llega a que $D^\beta u \in L^{q_{n+1}}(\Omega)$ y además se tiene que

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^{q_{n+1}}(\Omega)} \leq C \left\|D^\beta u\right\|_{W^{1,q_n}(\Omega)} \leq C \left\|u\right\|_{W^{m-n,q_n}(\Omega)} .$$

Por consiguiente $u \in W_0^{m-1,q_{n+1}}(\Omega)$, además por la desigualdad (4.4) se tiene que

$$\left\|u\right\|_{W^{m-n,q_n}(\Omega)} \leq C_n \left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)} .$$

Para $m = n$, se tiene que $W_0^{0,q_m}(\Omega) = L^q(\Omega)$ y además

$$\left\|u\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_m \left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)} .$$

■

Notación 4.18 *Denotemos por $C^k(\overline{\Omega})$ al espacio de funciones $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales de orden $\leq k$ en Ω, con extrensiones continuas a $\overline{\Omega}$, con la norma*

$$\left\|u\right\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \left\{ \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} \right\},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, y

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_1} u}{\partial x_1^{\alpha_1}}.$$

Usaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.19 *Si Ω es acotado y $k \geq 1$, entonces $C^k(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Veáse, por ejemplo, Jost [9]. ■

Como consecuencia de la desigualdad de Morrey se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.20 (de Encaje para $W_0^{m,p}(\Omega)$, $mp > N$) *Si Ω es acotado, $m \in \mathbb{N}$ y $p \in (\frac{N}{m}, \infty)$, entonces para cada $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ existe $u^* \in C^k(\overline{\Omega})$ con*

$$k := m - \left[\frac{N}{p}\right] - 1,$$

tal que

$$u^*(x) = u(x) \quad \textit{para casi todo } x \in \Omega.$$

Además, existe una constante K que depende únicamente de m, p y N tal que

$$\|u^*\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Demostración. Primero supongamos que $\frac{N}{p}$ no es un entero. Entonces para algún $l \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\left[\frac{N}{p}\right] =: l < \frac{N}{p} < l + 1. \tag{4.7}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 4.17, se obtiene que

$$u \in W^{m-l,r}(\Omega) \quad \text{ con } r := q_l = \frac{pN}{N - pl}.$$

Además, por (4.7), se tiene que $r > N$.
En consecuencia, para todo $|\alpha| \leq k := m - l - 1$ se cumple que $D^\alpha u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ con $r > N$. Por el Teorema 4.10, existe una constante K que depende únicamente de r y N tal que

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K \|D^\alpha u\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq K \|u\|_{W^{m,r}(\Omega)} \qquad \forall\, |\alpha| \leq k.$$

Como $D^\alpha u \in W_0^{1,r}(\Omega)$, entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ en $W_0^{m,r}(\Omega)$. Además se tiene que

$$\|u_n - u_m\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left\{ \left\| \frac{\partial^\alpha (u_n - u_m)}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \leq K \|u_n - u_m\|_{W^{m,r}(\Omega)}$$

Por lo tanto existe $u^* \in C^k(\overline{\Omega})$, tal que $u_n \to u^*$ en $C^k(\overline{\Omega})$.y

$$\|u^*\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Además como

$$\max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left\{ \left\| \frac{\partial^\alpha u_n}{\partial x^\alpha} - D^\alpha u \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \leq K \|u_n - u\|_{W^{m,r}(\Omega)} \to 0,$$

entonces
$$u^*(x) = u(x) \quad \text{para casi todo } x \in \Omega.$$

Si $\frac{N}{p}$ es un entero, definimos ahora $l = \frac{N}{p} - 1$, análogamente tenemos que $u \in W^{m-l,r}(\Omega)$, con $r = \frac{pN}{N-pl} = N$. Ahora si $N \leq q < \infty$ y $|\alpha| \leq m - \frac{N}{p} - 1 = k$ podemos usar la desigualdad de Sobolev como lo hicimos anteriormente para llegar a que $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$. Procediendo analogamente al caso anterior se llega a que existe $u^* \in C^k(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{C^k(\overline{\Omega})} &\leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \text{y} \\ u^*(x) &= u(x) \quad \text{para casi todo } x \in \Omega. \end{aligned}$$

■

Una de las consecuencias importantes de este teorema es que si Ω es acotado y $u \in H_0^m(\Omega)$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Esto nos servirá particularmente para demostrar la regularidad interior de la solución débil u del problema de Poisson.

4.3. Regularidad interior de la solución del problema de Poisson

Dados $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definimos

$$\delta_i^h u := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

donde $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^N$.

Lemma 4.21 *(a) Si $v, w \in L^2(\mathbb{R}^N)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\delta_i^h v) w = - \int_{\mathbb{R}^N} v(\delta_i^{-h} w),$$

para cualesquiera $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, ..., N$.
(b) Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces $\delta_i^h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$D_j(\delta_i^h u) = \delta_i^h (D_j u),$$

para cualesquiera $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, ..., N$.

Demostración. a) Sean $v, w \in L^2(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} v\partial_i^{-h} w &= \int_{\mathbb{R}^N} v(x)\frac{w(x-he_i)-w(x)}{-h}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{v(x+he_i)w(x)}{h}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v(x)w(x)}{h}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)\left(v(x+he_i)-v(x)\right)}{h}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} w\partial_i^h u.\end{aligned}$$

b) Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces por la linealidad de la derivada débil se llega a que

$$D_j(\delta_i^h u) = D_j\left(\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}\right) = \frac{D_j u(x+he_i) - D_j u(x)}{h} = \delta_i^h(D_j u).$$

■

Lemma 4.22 *Para cualesquiera $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $i = 1, ..., N$ se cumple que*

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|D_i u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración. Consideremos primero el caso $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Notemos que

$$\delta_i^h u = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t}(x+te_i)dt = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial u(x+te_i)}{\partial x_i}dt.$$

Por consiguiente utilizando la desigualdad de Hölder se llega a

$$\left|\delta_i^h u\right|^2 \leq \frac{h}{h^2}\int_0^h \left|\frac{\partial u(x+te_i)}{\partial x_i}\right|^2 dt.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\delta_i^h u\right|^2 \leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u(x+te_i)}{\partial x_i}\right|^2 dxdt = \|D_i u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Para el caso general, $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$, tomemos una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, talque $u_n \to u$, en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por lo demostrado anteriormente se tiene

$$\left\|\delta_i^h u_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|D_i u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Tomando el límite se obtiene la desigualdad

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|D_i u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

■

Lemma 4.23 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y sea $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ una función que satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N). \tag{4.8}$$

Entonces

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

para cualesquiera $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, ..., N$.

Demostración. Aplicando el Lema 4.21 con $v := u$ y $w := \delta_i^h u$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\delta_i^h u)^2 = -\int_{\mathbb{R}^N} u(\delta_i^{-h}\delta_i^h u),$$

y tomando $v := D_j u$ y $w := \delta_i^h(D_j u)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(D_j(\delta_i^h u)\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\delta_i^h D_j u)^2 \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} D_j u(\delta_i^{-h}\delta_i^h D_j u) = -\int_{\mathbb{R}^N} D_j u(D_j(\delta_i^{-h}\delta_i^h u)).\end{aligned}$$

Sumando las igualdades anteriores se tiene que

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla(\delta_i^h u)\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (\delta_i^h u)^2 = -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla(\delta_i^{-h}\delta_i^h u) - \int_{\mathbb{R}^N} u(\delta_i^{-h}\delta_i^h u).$$

Como u satisface (4.8), usando el lema 4.21 concluímos que

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = -\int_{\mathbb{R}^N} f(\delta_i^{-h}\delta_i^h u).$$

De la desigualdad de Hölder y el Lema 4.22 se sigue que

$$\begin{aligned}\left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left\|\delta_i^{-h}\delta_i^h u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left\|D_i(\delta_i^h u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Si $u = 0$ la afirmación del lema es cierta. Si $u \neq 0$, dividiendo la desigualdad anterior entre $\left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, obtenemos

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

que es la desigualdad deseada. ■

Antes del siguiente lema definamos convergencia débil.

Definición 4.24 *Sea H un espacio de Hilbert, y $x_n, x \in H$. Se dice que (x_n) converge déblimente a x, si para cualquier $y \in H$, $(\langle x_n, y\rangle) \to (x, y)$ en $\mathbb{R}$. Se escribe*

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Observación 4.25 *Notemos que por la continuidad del producto interior se tiene que si $x_n \to x$ en H, entonces $x_n \rightharpoonup x$.*

Proposición 4.26 *Sea $(x_n) \subset H$. Si la sucesión (x_n) esta acotada entonces existe una subsucesión (y_n) de (x_n), que converge débilmente.*

Demostración. Véase por ejemplo Kolmogorov-Fomin [3]. ■

Lemma 4.27 *Sea $u \in L^2(\Omega)$. Si para algún $i = 1, ..., N$ existe $C > 0$ tal que*

$$\left\|\delta_i^h u\right\|_{L^2(\omega)} \leq C$$

para cualesquiera $\omega \subset\subset \Omega$ y $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $|h| < d \leq \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, entonces u tiene i-ésima derivada débil en Ω y

$$\|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Demostración. Tomemos una sucesión de números reales tal que $h_n \to 0$ y definamos $v_n := \delta_i^{h_n} u$. Como $\|v_n\|_{L^2(\omega)} \leq C$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$, existen $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

y una subsucesión de (v_n), (a la cual continuamos denotando v_n), tal que

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ débilmente en } L^2(\omega) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega.$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, y sea $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \omega$. Entonces, usando el Lema 4.21 obtenemos

$$\int_\Omega v_n \varphi = \int_\Omega (\delta_i^{h_n} u)\varphi = \int_\Omega u(\delta_i^{-h_n}\varphi) \to \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Por otra parte, como $v_n \rightharpoonup v$ débilmente en $L^2(\omega)$,

$$\int_\Omega v_n \varphi = \int_\omega v_n \varphi \to \int_\omega v\varphi = \int_\Omega v\varphi.$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Es decir, $-v = D_i u$ es la i-ésima derivada débil de u. ■

Proposición 4.28 (Regularidad débil de las soluciones) *Sea $f \in L^2(\Omega)$ y sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una función que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\not\leq). \tag{4.9}$$

Entonces, para todo $\omega \subset\subset \Omega$, se cumple que $u \in H^2(\omega)$ y

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

donde C es una constante que depende únicamente de la distancia de ω a la frontera de Ω.

Demostración. Fijemos $d > 0$ y escojamos $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq d, \\ 0 & \text{si } \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2}d. \end{cases}$$

Por el Lema 2.17, se tiene que $\overline{\alpha u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$D_i(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha D_i u + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}} \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Sea $g := \overline{\alpha} f - 2\nabla\overline{\alpha}\cdot\nabla\overline{u} - \overline{u}\Delta\overline{\alpha}$. Claramente $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Probaremos primero que $\overline{\alpha u}$ satisface

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\overline{\alpha u})\cdot\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{\alpha u})\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N). \tag{4.10}$$

Primero notemos que como $\overline{\alpha}\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla(\varphi\overline{\alpha}) + u(\overline{\alpha}\varphi)) = \int_{\mathbb{R}^N} f\overline{\alpha}\varphi.$$

Como $\overline{\alpha u}$ tiene derivada débil se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\overline{\alpha u})\cdot\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{\alpha u})\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha}\nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u}\nabla\overline{\alpha}\cdot\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{\alpha u})\varphi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\overline{u}\cdot\nabla(\overline{\alpha}\varphi) - \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u}\varphi\Delta\overline{\alpha} - 2\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\nabla\overline{u}\cdot\nabla\overline{\alpha} + \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u}(\overline{\alpha}\varphi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{u}\varphi\Delta\overline{\alpha} - \int_{\mathbb{R}^N} 2\varphi\nabla\overline{\alpha}\nabla\overline{u} + \int_{\mathbb{R}^N} f\overline{\alpha}\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (-2\nabla\alpha\nabla\overline{u} - u\Delta\overline{\alpha} + \overline{\alpha} f)\,\varphi. \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Esto prueba la ecuación (4.10). En consecuencia, por el Lema 4.23 y la desigualdad de Hölder, se cumple que

$$\left\|\delta_i^h(\overline{\alpha u})\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}) = C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\not\leq)}),$$

para cualesquiera $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, ..., N$, donde C depende únicamente de α y, por tanto, depende únicamente de d. Además como $u \in H_0^1(\Omega)$ y satisface (4.9), se tiene que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega fu \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

En consecuencia $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_2$ y, por lo tanto,

$$\left\|\delta_i^h(\overline{\alpha u})\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Por otra parte sea

$$\Omega_d := \{x \in \Omega : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < d\}.$$

Observemos que $\delta_i^h(\overline{\alpha u})(x) = \delta_i^h u(x)$ para cualesquiera $x \in \Omega_d$, $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ con $|h| < d$, $i = 1, ..., N$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{máx}\left\{\left\|\delta_i^h u\right\|_{L^2(\omega)}, \left\|\delta_i^h D_j u\right\|_{L^2(\omega)}\right\} &\leq \left\|\delta_i^h u\right\|_{H^1(\omega)} \\ &\leq \left\|\delta_i^h(\overline{\alpha u})\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

para todo $\omega \subset\subset \Omega_{2d}$, $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ con $|h| < d$, $i, j = 1, ..., N$. Del Lema 4.27 se sigue que

$$\left\|D_j u\right\|_{L^2(\Omega_{2d})} \leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)},$$

$D_j u$ tiene i-ésima derivada débil en Ω_{2d}, y

$$\left\|D_i D_j u\right\|_{L^2(\Omega_{2d})} \leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como lo anterior es válido para todo $d > 0$, se tiene que $u \in H^2(\omega)$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$ y se cumple que

$$\begin{aligned} \left\|u\right\|_{H^2(\omega)} &= \left(\left\|u\right\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{j=1}^{N} \left\|D_j u\right\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i,j} \left\|D_i D_j u\right\|_{L^2(\omega)}^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left\|u\right\|_{L^2(\omega)}^2 + (N + N^2)C^2 \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

donde C depende únicamente de $dist(\omega, \partial\Omega)$. ■

Observación 4.29 *Nótese que en la demostración anterior sólo usamos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *para concluir que* $\left\|u\right\|_{H^2(\omega)} \leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}$. *El resultado continúa siendo válido si en vez de suponer que* $u \in H_0^1(\Omega)$, *suponemos que* $u \in H^1(\Omega)$ *y que* $\left\|u\right\|_{H^2(\omega)} \leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}$. *Utilizando esto podemos probar el siguiente corolario.*

Corolario 4.30 *Sea* $f \in H^m(\Omega)$ *y sea* $u \in H_0^1(\Omega)$ *una función que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{4.11}$$

Entonces, para todo $\omega \subset\subset \Omega$, se cumple que $u \in H^{m+2}(\omega)$ y

$$\|u\|_{H^{m+2}(\omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)} ,$$

donde C es una constante que depende únicamente de m y de la distancia de ω a $\partial\Omega$.

Demostración. Supongamos que la afirmación es valida para $m-1$. Supongamos que $f \in H^m$, sea $|\alpha| = m$, por hipótesis de inducción $D^\alpha u \in H^1(\omega)$, queremos ver que $D^\alpha u \in H^2(\omega)$, por lo visto anteriormente es suficiente probar que

$$\int \nabla D^\alpha u \nabla \varphi + \int (D^\alpha u)\varphi = \int (D^\alpha f)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.12}$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, si sustituimos $D^\alpha \varphi$ por φ, en (4.11), obtenemos

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla D^\alpha \varphi = \int_\Omega f D^\alpha \varphi \quad .$$

A partir de 4.12 se obtiene que

$$\|D^\alpha u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|D^\alpha f\|_2 .$$

Por hipótesis de inducción se obtiene

$$\|u\|_{H^{m+2}(\omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)} .$$

■

Corolario 4.31 *Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema $(\wp)$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y satisface*

$$-\Delta u + u = f \qquad en\ \Omega.$$

Demostración. Sea $\omega \subset\subset \Omega$ y sea $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha(x) = 1\ \forall x \in \omega$. Por el Corolario 4.30, $u \in H^m(\omega)\ \forall m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\alpha u \in H_0^m(\Omega)$ El teorema 4.20, asegura que existe una función $u^* \in C^\infty(\overline{\Omega})$, tal que $u^*(x) = \alpha u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. En consecuencia

$$u^*(x) = u(x) \ \text{ para casi todo } x \in \omega.$$

Sean $\omega_n \subset\subset \Omega$ tales que $\omega_n \subset \omega_{n+1}$ y $\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$ y sea $u_n^* \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_n^*(x) = u_n(x)$ para casi todo $x \in \omega_{n.}$ Entonces la función $u^* : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u^*(x) = u_n^*(x) \text{ si } x \in \omega_{n.},$$

está bien definida y $u^* \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u^* \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

De esta igualdad se obtien que

$$\int_\Omega (-\Delta u^* + u^* - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $-\Delta u^* + u^* - f$ es contínua en Ω, se concluye que

$$-\Delta u + u = f \quad \text{ en } \Omega.$$

■

4.3.1. Comentario final

No probaremos nada más, sin embargo es importante notar que el resultado de regularidad en el interior se puede generalizar al siguiente teorema.

Teorema 4.32 *Sean Ω de clase C^∞ y $f \in H^m(\Omega)$ y sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una función que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces se cumple que $u \in H^{m+2}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)},$$

donde C es una constante que depende únicamente de la distancia de ω a la frontera de Ω.

Demostración. Véase por ejemplo Evans[2]. ■

A partir de este teorema se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.33 *Si Ω es de clase C^∞, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema $(\wp)$, entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y satisface*

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{en } \Omega. \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Notación básica

Espacios euclidianos

$\mathbb{R}$	denota al conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^N$	denota al espacio euclidiano de dimensión N, con la norma
$\lvert x\rvert$	denota a la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^N$.
Ω, Ω_i	denotan abiertos en $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	denota a la frontera de Ω.
$A+B$	$:= \{x+y \mid x \in A, y \in B\}, \quad$ para $A, B \subset \mathbb{R}^N$.
$A \subset\subset B$	quiere decir que $\overline{A}$ es compacto y $\overline{A} \subset B$.
$d(X,Y)$	$:= \text{ínf}\{d(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$.
$A \diagdown B$	es el conjunto de los elementos que estan en A y no están en B.
A^0	es el interiror del conjunto A.
$\overline{A}$	es la cerradura del conjunto A.

Espacios de funciones

$C(A)$	es el espacio de funciones reales continuas en $A \subset \mathbb{R}^N$.
$u\vert_B$	es la función definida en B como $u\vert_B(x) := u(x) \quad \forall x \in B$, donde $B \subset A$.
$\text{supp}(u)$	$:= \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) \neq 0\}} \cap \Omega, \quad$ para $u \in C(\Omega)$.
ω_f	es el máximo subconjunto abierto de Ω tal que $f(x) = 0$ para casi toda $x \in \omega_f$.
$\text{supp}(f)$	$:= \Omega \setminus \omega_f,$ para f medible.
$C^k(\Omega)$	es el espacio de funciones reales que tienen derivadas parciales . continuas de orden $\leq k$ en Ω.
$C(\overline{\Omega})$	es el espacio de funciones contínuas $u{:}\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$
$C^k(\overline{\Omega})$	es el espacio de funciones $u{:}\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales de orden $\leq$ k en Ω, con extensiones continuas a $\overline{\Omega}$.
$C^\infty(\Omega)$	$:= \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$.
$C_c^\infty(\Omega)$	$:= \{u \in C^\infty(\Omega) :$ supp(u) es compacto$\}$.
$L^p(\Omega)$	$:= \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\right\}$ con la norma
$\lVert u\rVert_{L^p(\Omega)} = \lVert u\rVert_p$	$:= \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p\right)^{1/p}, \quad$ para $p \in [1, \infty)$.
$L^\infty(\Omega)$	$:= \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \exists C \text{ tal que } \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}$
$\lVert u\rVert_{L^\infty(\Omega)} = \lVert u\rVert_\infty$	$:= \text{ínf}\{C \in \mathbb{R} : \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}$.
$L^1_{loc}(\Omega)$	es el espacio de funciones $u,$ tal que $u \in L^1(\omega),$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$.

Bibliografía

[1] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, 1984.

[2] L. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society 1998.

[3] A.N. Kolmogorov; S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, 1975.

[4] A.N. Kolmogorov; S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover Publications, 1999.

[5] R. Wheeden; A. Zygmund, *Measure and Integral*, Dekker 1977.

[6] J. Dieudonné, *Éléments D'Analyse Tome I*, Gauthier-Villars Editeur 1972.

[7] J. Dieudonné, *Elementos de Análisis Tomo II*, Gauthier-Villars Editeur 1982.

[8] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North Holland 1981.

[9] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer 2000.