



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

LA GRÁFICA DE BASES DE UN MATROIDE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA

ANA PAULINA FIGUEROA GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. EDUARDO RIVERA CAMPO

MÉXICO, D.F.

ENERO, 2009





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La Gráfica de Bases de un Matroide

Ana Paulina Figueroa Gutiérrez



*A Gustavo,
Guillermina,
Laura y
V́ctor.*

Agradecimientos

En este pequeño espacio quiero expresar lo mucho que agradezco a las personas y a las instituciones que me rodean:

A la UNAM por su papel fundamental en mi formación como matemática y como persona. Así como por el apoyo económico que me proporcionó durante el Doctorado por medio del Posgrado de Matemáticas y de la beca DGEP. Al CONACyT por la beca que me otorgó para realizar mis estudios en la UNAM y para estudiar en Hungría por medio del programa de Becas Mixtas. Al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por haberme dado un lugar de estudio desde el inicio de la tesis de licenciatura hasta la fecha. A la UAM-I en donde trabajé con mi asesor de tesis. Al Instituto Renyi de Budapest que me recibió con gran hospitalidad durante un año, me brindó un lugar para trabajar y en donde viví muchas experiencias nuevas.

A mi familia por que todo lo que soy y lo que he logrado se los debo a ellos. A mi papá y mi mamá por ser los pilares de mi vida. Me siento muy afortunada por tenerlos. A mi hermanita por ser mi orgullo y mi compañía durante todos estos años. A mis tíos por estar al pendiente de mí. A mi compañero de batallas, Víctor, con el que he empezado y terminado muchos proyectos y siempre ha estado ahí para apoyarme y consentirme.

A la memoria de Víctor Neumann Lara por todo lo que aprendí de él y por todo lo que significa para mí. La herencia que me dejó fue este doctorado que tanto he disfrutado. Al Asesor Eduardo Rivera por su paciencia, su comprensión y todo lo que he aprendido de él. Su apoyo y sus consejos son algo muy preciado para mí.

A mi Comité Tutorial: Javier Bracho, Francisco Larrión y Eduardo Rivera. Por estar al pendiente de mi trabajo y por apoyarme para continuar con el Doctorado después de la muerte de Víctor. A mis sinodales oficiales: Francisco Larrión, Luis Montejano, Juan José Montellano, Eduardo Rivera y Luis Verde por haber leído pacientemente este trabajo y por sus sugerencias. En especial quiero agradecer a Paquito por que sus observaciones me servirán para toda la vida. A Gyula Károlyi, y Geza Tóth por sus enseñanzas y su hospitalidad. A Gelasio, Jorge, Bernardo, Silvia, Rafael ... en general a todo el grupo de Combinatoria en México por ser un grupo cálido en el que me he apoyado.

A mis sinodales no oficiales: Berni y Ritina que, por amistad, me han leído y corregido la tesis. Los quiero mucho y les estoy profundamente agradecida porque me han sostenido para cerrar este maratón. A Miguel por su amistad, sus consejos y sus pláticas clanísticas. A Sergio Macías por su amistad y consejos.

Al Consejo: Chov, Dino, Lalo y Berni por brindarme su amistad y por las horas en la Oficina que le dieron un toque mágico al Doctorado. A mis profesores queridos: Isabel Puga, Miguel Ángel Pizaña, Pepe Ríos y Jorge Arocha por los cursos que disfruté tanto. A Ángel Carrillo que me ha apoyado desde que lo conocí. A Don Luis por estar siempre pendiente de mi asistencia al Instituto y por consentirme tanto.

Finalmente a mis amigos Daniel Labardini, Daniel Pellicer, Coty, Chavez, Mariano, Pedro, Cruz, Mukuy, Fernanda, Claudia, José Luis y Orlando. Espero apoyarlos tanto como lo han hecho conmigo.

Índice general

Abstract	1
Introducción	3
1. Preliminares	7
1.1. Matroides	7
1.2. Gráficas	12
1.3. Matroides orientados	18
1.4. Gráficas orientadas	20
2. La gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas	25
2.1. La conexidad de la gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas	25
2.2. La gráfica de bases respecto a una familia de circuitos	38
2.3. Una partición de la Gráfica de Bases	39
3. Consecuencias y el número cromático de algunas subgráficas de árboles	45
3.1. Consecuencias	45
3.2. El número cromático de $T_\phi(G)$ y de $T_{ci}(G)$	49

4. La gráfica de árboles respecto a una familia de ciclos	51
4.1. Nueva condición suficiente	52
4.2. Una familia especial de ciclos	59
Preguntas	65
Índice de símbolos	67
Índice alfabético	68
Bibliografía	71

Abstract

The basis graph of a matroid N is the graph $\mathcal{B}[N]$ whose vertices are given by all the basis of N and in which two basis B and B' are adjacent if $B \cup B'$ contains a unique circuit.

In this thesis we will define and study the following subgraphs of the basis graph of a matroid:

1) Let N be a matroid and $\phi : E(N) \longrightarrow \{1, 2\}$ a surjective mapping. The bicolor basis graph of N , $\mathcal{B}[N, \phi]$ is the spanning subgraph of $\mathcal{B}[N]$ in which two basis B and B' of N are adjacent if $(B - e) \cup f = B'$ for $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$ such that $\phi(e) \neq \phi(f)$.

2) Let M be an oriented matroid and \underline{M} be the underlying matroid of M . We define the *circuit basis graph* $\mathcal{B}_{ci}[M]$ of M as the spanning subgraph of $\mathcal{B}[N]$ in which two basis B and B' are adjacent if $(B - e) \cup f = B'$ for $e \in B - B'$ and $f \in B' - B$ with $e, f \in X^+$ where X is a circuit of M whose support \underline{X} is the unique circuit of \underline{M} contained in $B \cup B'$.

3) We define the *cocircuit basis graph* $\mathcal{B}_{co}[M]$ of M as the spanning subgraph of $\mathcal{B}[N]$ in which two basis B and B' are adjacent if $(B - e) \cup f = B'$ for $e \in B - B'$ and $f \in B' - B$ with $e \in X^+$, $f \in X^-$ where X is a circuit of M whose support \underline{X} is the unique circuit of \underline{M} contained in $B \cup B'$.

We will give sufficient and necessary conditions for $\mathcal{B}[N, \phi]$ to be connected and also sufficient conditions for the connectivity of $\mathcal{B}_{ci}[M]$ and $\mathcal{B}_{co}[M]$ are given.

Let G be a graph and C be a set of cycles of G . The tree graph of G defined

by C us the graph $T(G, C)$ that has one vertex for each spanning tree of G . In which two trees T and T' are adjacent if their symmetric difference consist of two edges and the unique cycle contained in $T \cup T'$ is an element of C . In the second part of this thesis a necessary and sufficient condition for this graph to be connected are given for the case where every edge of G belongs to at most two cycles in C .

Introducción

La gráfica de bases de un matroide N es la gráfica $\mathcal{B}[N]$ cuyo conjunto de vértices es el conjunto de bases de N y en la cual dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si $B' = (B - e) \cup f$ para dos elementos $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$.

La gráfica de árboles, $T(G)$, de una gráfica G es la gráfica que tiene como vértices a los árboles generadores de G y en la que dos vértices T y T' son adyacentes si y solamente si existen dos aristas $e \in E(T) - E(T')$ y $f \in E(T') - E(T)$ tales que $T' = (T - e) + f$. Es decir, $T(G)$ es la gráfica de bases del matroide de G . Cummins probó en [4] que $T(G)$ es hamiltoniana. El resultado análogo para $\mathcal{B}[N]$, fue probado en [10] por Holzmann y Harary.

La gráfica de árboles de cambios adyacentes, $T_a(G)$, de una gráfica G es la subgráfica generadora de $T(G)$ en la cual dos árboles T y T' son adyacentes si y solamente si $T' = (T - e) + f$ para dos aristas $e \in E(T) - E(T')$ y $f \in E(T') - E(T)$ que tienen un vértice en común.

Zhang y Chen probaron en [17] que para toda gráfica conexa G , no necesariamente simple pero sin lazos, $T_a(G)$ es ρ -conexa, donde ρ es la dimensión del espacio de ciclos de G . Algunos resultados relacionadas fueron estudiados por Heinrich y Guizhen [9].

Otra subgráfica generadora de $T(G)$ es la gráfica de árboles por intercambio de hojas, $T_l(G)$. En ésta dos árboles generadores T y T' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $T(G)$ y las dos aristas $e \in E(T) - E(T')$ y $f \in E(T') - E(T)$ son hojas de los árboles T y T' respectivamente.

Harary, Mokken y Plantholt, [8], probaron que $T_l(G)$ es conexa para cualquier gráfica 2-conexa G . Finalmente, Broersma y Li [3], caracterizaron las gráficas para las cuales $T_l(G)$ es conexa.

Sean G una gráfica conexa y C una familia de ciclos de G . En el 2003 Li, Neumann-Lara y Rivera-Campo [14], definieron la gráfica de árboles respecto a C , $T(G, C)$, como la subgráfica generadora de $T(G)$, en la cual dos árboles T y T' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $T(G)$ y el único ciclo contenido en $T \cup T'$ es un elemento de C . Ellos encontraron tanto condiciones necesarias como condiciones suficientes para que esta gráfica sea conexa.

En ese mismo artículo, para un matroide N y una familia de circuitos C de N , definieron la gráfica de bases respecto a C , $\mathcal{B}(N, C)$, en la que los vértices son las bases de N y dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $\mathcal{B}[N]$ y el único circuito contenido en $B \cup B'$ es un circuito de la familia C . Ellos generalizaron algunos de sus resultados sobre $T(G, C)$ a $\mathcal{B}(N, C)$ cuando N es un matroide binario.

Siguiendo el mismo corte, en este trabajo definimos y estudiamos las siguientes tres subgráficas de la gráfica de bases de un matroide, de las cuales las dos últimas están sumamente relacionadas.

1) Sea N un matroide y $\phi : E(N) \rightarrow \{1, 2\}$ una función suprayectiva. Definimos a la gráfica de bases de N por adyacencias bicoloreadas, $\mathcal{B}[N, \phi]$, como la subgráfica generadora de $\mathcal{B}[N]$ en la que B y B' son adyacentes si y solamente si $(B - e) \cup f = B'$ para dos elementos, $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$, que cumplan que $\phi(e) \neq \phi(f)$.

2) Sea M un matroide orientado y \underline{M} su matroide subyacente. La gráfica de bases por adyacencias cíclicas, $\mathcal{B}_{ci}[M]$, de M es la subgráfica generadora de $\mathcal{B}[\underline{M}]$ en la que dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si $B' = (B - e) \cup f$ y los elementos $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$ de \underline{M} están en la parte positiva de un circuito orientado de M cuyo soporte es el único circuito de \underline{M} contenido en $B \cup B'$.

3) Sea M un matroide orientado y \underline{M} su matroide subyacente. La gráfica de bases por adyacencias cocíclicas, $\mathcal{B}_{co}[M]$, de M es la subgráfica generadora de $\mathcal{B}[\underline{M}]$ en la que dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si los elementos $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$ de \underline{M} son tales que $(B - e) \cup f = B'$ y existe un circuito orientado de M en el que el elemento e está en su parte positiva, f en su parte negativa y cuyo soporte es el único circuito de \underline{M} contenido en $B \cup B'$.

En el Capítulo 1 encontraremos los conceptos básicos de la Teoría de las Gráficas, de los Matroides y de los Matroides Orientados necesarios para los resultados que damos en la tesis. Los resultados expuestos en este capítulo no incluyen demostraciones pero se indicará la bibliografía en donde el lector las puede encontrar.

En la primera sección del Capítulo 2 estudiaremos condiciones suficientes para que la gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas de un matroide sea conexa. En la segunda sección generalizaremos un resultado de Li et al. [14] para $\mathcal{B}(N, C)$. La tercera sección estará dedicada a demostrar condiciones necesarias para que la gráfica de bases por adyacencias cíclicas y la gráfica de bases por adyacencias cocíclicas sean conexas. También se probará un teorema que relaciona estas dos gráficas. Por último, demostraremos el teorema principal de la sección que afirma que $\mathcal{B}_{ci}[M]$ es conexa o $\mathcal{B}_{co}[M]$ es conexa cuando el matroide subyacente de M es conexo.

En la primera sección del Capítulo 3, a manera de ilustración, se mencionarán corolarios de los teoremas demostrados en el Capítulo 2 en los que se señala la interpretación de los resultados para gráficas y gráficas orientadas.

Finalmente, en el Capítulo 4, estudiaremos a la gráfica de árboles de una gráfica respecto a una familia de ciclos C , que como dijimos fue estudiada en [14]. Definiremos una nueva propiedad de la familia de ciclos C llamada Δ^+ -densidad. En la primera sección demostraremos que si C es Δ^+ -densa entonces $T(G, C)$ es conexa. Finalmente, en la segunda sección mostraremos

que si $T(G, C)$ es conexa y C cumple que cada arista de G es arista de a lo más dos ciclos de C , entonces C es Δ^+ -densa.

Por último en el apéndice titulado Preguntas se listarán algunos problemas que surgen de los resultados de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se resumen los conceptos necesarios para el desarrollo de los resultados obtenidos. Las definiciones y los teoremas expuestos en el mismo se encuentran desarrollados en [2, 5, 16, 11], por ello nos limitaremos a enunciarlos.

Para definir a nuestros objetos será necesario introducir antes algunas notaciones. Sean X y Y dos conjuntos. El conjunto $\{x \in X \mid x \notin Y\}$ será denotado por $X - Y$ (esta notación resulta necesaria para no crear confusiones con una operación matroidal mencionada posteriormente). Denotamos por $X\Delta Y$ al conjunto $(X \cup Y) - (Y \cap X)$ también conocido como la **diferencia simétrica** de X con Y . Además, en algunas ocasiones, para facilitar la escritura de las definiciones y los resultados, denotaremos por x al conjunto $\{x\}$, es decir $A \cup x = A \cup \{x\}$, $A - x = A - \{x\}$, etc.

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y X un subconjunto de A . Denotaremos por $f|_X$ a la función $f|_X : X \longrightarrow B$ tal que $f|_X(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Dicha función se conoce como **la restricción de f a X** .

1.1. Matroides

Un **matroide** N es una pareja ordenada (E, \mathcal{I}) que consiste de un conjunto finito E y una colección \mathcal{I} de subconjuntos de E , que satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como los **axiomas de independencia**.

- (\mathcal{I}_1) $\emptyset \in \mathcal{I}$;
- (\mathcal{I}_2) Si $I \in \mathcal{I}$ e $I' \subseteq I$, entonces $I' \in \mathcal{I}$;
- (\mathcal{I}_3) Si tanto I_1 como I_2 son elementos de \mathcal{I} y $|I_1| < |I_2|$, entonces existe un elemento $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Los elementos de \mathcal{I} son llamados los **independientes** de N , y el conjunto E es su **conjunto base**. Denotamos por \mathcal{B} a la familia de los conjuntos independientes maximales de N . Sus elementos, llamados **bases**, satisfacen las siguientes propiedades:

- (\mathcal{B}_1) \mathcal{B} no es vacío;
- (\mathcal{B}_2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $B_1 \subseteq B_2$, entonces $B_1 = B_2$;
- (\mathcal{B}_3) Si tanto B_1 como B_2 son elementos de \mathcal{B} y $e \in B_1 - B_2$, existe un elemento $f \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - e) \cup f \in \mathcal{B}$.

Las propiedades $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ y \mathcal{B}_3 son conocidas como los **axiomas de las bases**. En particular, \mathcal{B}_3 , llamado usualmente el **axioma de intercambio**, está íntimamente ligado con las adyacencias de la gráfica de bases que definiremos en el siguiente capítulo. La razón de llamarlos axiomas resulta del siguiente hecho: si definimos a un matroide como una pareja (E, \mathcal{B}) , donde \mathcal{B} es una familia de subconjuntos de E que cumplen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ y \mathcal{B}_3 , se tiene que $\{S \mid S \subseteq B \text{ para alguna base } B \text{ de } N\}$ es una familia de subconjuntos de E que cumple con los axiomas de independencia antes mencionados. Es decir, la definición de un matroide que utiliza a la familia de independientes es equivalente a la que utiliza a la familia de las bases. [16, pp.16-18]

Denotaremos por \mathcal{C} a la colección de los subconjuntos minimales de N con la propiedad de no ser independientes. Estos subconjuntos se conocen como los **circuitos** de N y, como se puede ver en [16, p.9], cumplen que:

(\mathcal{C}_1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

(\mathcal{C}_2) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$;

(\mathcal{C}_3) Si tanto C_1 como C_2 son circuitos de N , $e \in C_1 \cap C_2$ y $f \in C_1 - C_2$, existe $C_3 \in \mathcal{C}$ que contiene a f y tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Como en el caso de las bases, se puede definir a un matroide como la pareja (E, \mathcal{C}) , donde \mathcal{C} es una familia de subconjuntos de E que cumplen los axiomas \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 . En este caso, la familia cuyos elementos son los subconjuntos de E que no contienen circuitos, cumple con los axiomas de independencia. Así, \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 son llamados los **axiomas de los circuitos** de un matroide. En particular, \mathcal{C}_3 es el **axioma de eliminación** y será sumamente socorrido en la mayoría de las demostraciones del segundo capítulo.

Con lo anterior, podemos pensar en un matroide N como un conjunto finito E junto con una familia de bases, \mathcal{B} , una de independientes, \mathcal{I} , y una de circuitos, \mathcal{C} , que están íntimamente relacionadas.

Cuando sea necesario especificar que E es el conjunto base del matroide N , lo denotaremos por $E(N)$. Análogamente, escribiremos $\mathcal{I}(N)$, $\mathcal{B}(N)$ y $\mathcal{C}(N)$ para el conjunto de independientes, bases y circuitos de N respectivamente.

Terminaremos esta sección con una aplicación del axioma de eliminación. Sabemos que una base B es un independiente maximal, lo que significa que si tomamos a un elemento $e \in E - B$, el conjunto $B \cup e$ contiene por lo menos un circuito. Si $B \cup e$ tiene por lo menos dos circuitos C_1 y C_2 , ambos contendrían al nuevo elemento e , ya que B es independiente. Por el axioma de eliminación existiría un circuito contenido en $(C_1 \cup C_2) - e$, lo que claramente es imposible. Así, denotaremos por $C(B, e)$ al único circuito contenido en $B \cup e$. Análogamente, si B y B' son dos bases tales que $B' = (B - e) \cup f$ para $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$, es decir adyacentes en $\mathcal{B}[N]$, entonces existe un único circuito contenido en $B \cup B'$ que denotaremos por $C(B, B')$.

Dualidad, eliminación y contracción de un conjunto

A continuación definiremos ciertos matroides relacionados con un matroide N y mencionaremos algunas operaciones para construirlos.

Sean X un subconjunto de E e $\mathcal{I}|X$ el subconjunto de \mathcal{I} que tiene como elementos a los independientes de N contenidos en X . La pareja $(X, \mathcal{I}|X)$ es un matroide, conocido en la literatura como **la restricción de N a X** y denotado por $N|X$.

Otro matroide importante es el **dual** del matroide N , (E, \mathcal{B}^*) , donde $\mathcal{B}^* = \{E - B \mid B \in \mathcal{B}\}$. Este matroide es denotado por N^* . Los circuitos del matroide N^* – llamados cocircuitos de N – están relacionados con los circuitos de N por el siguiente teorema. Ver [2, Lema 3.4.2].

Teorema 1.1.1. *Dados un circuito X de un matroide N y dos elementos $e, f \in X$, existe un cocircuito Y de N tal que $X \cap Y = \{e, f\}$.*

Sea $X \subseteq E$, existen dos operaciones fundamentales de un matroide N que involucran a X . La primera operación es la **eliminación de X** , con la que se obtiene un nuevo matroide denotado por $N \setminus X$. Éste tiene como conjunto base a $E - X$ y sus independientes son aquellos independientes de N que están totalmente contenidos en $E - X$. En términos de lo visto anteriormente, $N \setminus X$ no es otra cosa que el matroide $N|(E - X)$.

La otra operación es la **contracción de X** . Al matroide que obtenemos con esta operación lo denotamos por N/X y esta definido como $N/X = (N^* \setminus X)^*$.

El siguiente teorema es la caracterización de los circuitos de N/X que nosotros ocuparemos, y su demostración, así como la del Teorema 1.1.3 pueden ser encontradas en la sección 3.1 de [16].

Teorema 1.1.2. *Los circuitos de N/X son los conjuntos minimales no vacíos del conjunto $\{C - X \mid C \in \mathcal{C}(N)\}$.*

Las bases de N/x están relacionadas con las bases de N por el siguiente teorema:

Teorema 1.1.3. *Sea B una base de un matroide N , $x \in B$ y B_x una base de N/x . Entonces,*

- i. El conjunto $B - x$ es una base de N/x y*
- ii. $B_x \cup x$ es una base de N .*

Conexidad

Definiremos a un matroide conexo a partir de una relación entre sus elementos. Sea N un matroide, para cada elemento $x \in E$ definimos el conjunto $\gamma(x) = \{x\} \cup \{y \mid x, y \in C \text{ p.a. } C \in \mathcal{C}\}$. La relación en E definida por

$$x \sim_\gamma y \text{ si y solamente si } y \in \gamma(x),$$

es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia definidas por γ son las **componentes conexas** de N . Si N tiene una sola componente conexa entonces diremos que es un **matroide conexo**, de lo contrario diremos que N es **disconexo**.

Por otra parte, a cada subconjunto X del conjunto base de un matroide N , podemos asignarle un entero $r_N(X)$ que denota la cardinalidad de una base de $N|X$. Dicho entero es el **rango** de X en el matroide N y $r_N : E \rightarrow \mathbb{N}$ es llamada la **función de rango** de N . Los matroides desconexos están relacionados con su función de rango por el siguiente teorema:

Teorema 1.1.4. *Un matroide N es desconexo si y solamente si existe un subconjunto $K \subset E$ no vacío tal que*

$$r_N(K) + r_N(E - K) = r_N(E).$$

La relación entre la conexidad de N y la de su dual, N^* , está dada a continuación.

Teorema 1.1.5. *N es un matroide conexo si y solamente si N^* es conexo.*

La demostración de los teoremas 1.1.4 y 1.1.5 pueden ser encontrados en la página 129 del libro [16].

Finalmente, decimos que un elemento x de un matroide N es **contraible** si y solamente si N/x es un matroide conexo.

Bicoloración de un matroide

Una **k -coloración efectiva** de los elementos de un matroide N es una función suprayectiva $\phi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Si $k = 2$ entonces diremos que ϕ es una bicoloración efectiva de N .

1.2. Gráficas

Sea V un conjunto, denotamos por $[V]^2$ al conjunto que tiene como elementos a los subconjuntos de dos elementos de V . Una **gráfica** es una pareja de conjuntos, $G = (V, E)$, que cumple que E es un subconjunto de $[V]^2$. Los elementos de V son los **vértices** de la gráfica G y los elementos de E son las **aristas**. Para evitar confusiones, en algunas ocasiones, $V(G)$ denotará al conjunto de vértices de la gráfica G y $E(G)$ al conjunto de aristas de G .

La arista $\{x, y\}$ se escribe usualmente como xy (o yx). Dos vértices x y y son **adyacentes** si y solamente si xy es una arista de G . Decimos que x y y son los **extremos** de una arista u si $u = xy$.

Dos gráficas, G y G' , son **isomorfas**, $G \cong G'$, si existe una biyección $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ tal que $xy \in E(G)$ si y solamente si $\varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$, para todo $x, y \in V(G)$. Cuando dicha biyección sea evidente, trataremos a dos gráficas isomorfas como iguales.

Coloraciones

Una **k -coloración efectiva de las aristas** de una gráfica G es una función suprayectiva $\phi : E \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Si $k = 2$ entonces diremos que ϕ es una bicoloración efectiva de las aristas de G .

Una **k -coloración propia de los vértices** de una gráfica G es una función $c : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $c(v) \neq c(w)$ si v y w son adyacentes. Si k es el entero más pequeño tal que G tiene una k -coloración propia de vértices, entonces k , denotado por $\chi(G)$ es llamado el **número cromático** de G . Si $\chi(G) \leq k$ entonces decimos que G es **k -coloreable por vértices**.

También podemos colorear a las aristas de una gráfica. Una **k -coloración propia de las aristas** de G es una función $c' : E \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que cumple que $c'(e) \neq c'(f)$ si e y f comparten a uno de sus extremos. Si k es el entero más pequeño que tiene la propiedad de que G tiene una k -coloración propia de aristas, entonces k es el **índice cromático de G** y es denotado por $\chi'(G)$. Si $\chi'(G) \leq k$ entonces decimos que G es **k -coloreable por aristas**.

Subgráficas

Sea $G' = (V', E')$ una gráfica. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, diremos que G' es una **subgráfica** de G . Algunas de las subgráficas importantes de una gráfica G son las llamadas **subgráficas generadoras**: G' es una subgráfica generadora de G si y solamente si G' es una subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es justamente el de G , es decir, $V = V'$.

Como en el caso de matroides, con una gráfica G se pueden realizar ciertas operaciones para obtener nuevas gráficas. Para definir las necesitamos primero definir la **gráfica completa** de n elementos, K_n , que tiene como conjunto de vértices a un conjunto V de cardinalidad n y como aristas al conjunto $[V]^2$.

Sean G una gráfica con n vértices y F un subconjunto de las aristas de G . La

gráfica $G - F$, tiene como vértices al conjunto V y como conjunto de aristas al conjunto $E - F$, la operación que estamos realizando es borrar las aristas de F de la gráfica G . También podemos agregar aristas, $G + F$ es la gráfica que se obtiene de G añadiendo las aristas de F .

Otra gráfica que podemos obtener a partir de G es la **gráfica complemento**. Si G es una gráfica con n vértices, el complemento de G , denotado por G^c , es la gráfica $K_n - E$.

Trayectorias, ciclos y cortes

Una **trayectoria** es un gráfica $P = (V, E)$ tal que $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ y $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$. El número de aristas de P , $k - 1$, es la **longitud de la trayectoria**.

Usualmente nos referimos a una trayectoria por una sucesión de vértices y escribimos $P = x_0x_1 \dots x_k$. Decimos indistintamente que P es una x_0x_k -trayectoria, que es una trayectoria de x_0 a x_k , que es una trayectoria que conecta a x_0 con x_k o que es una trayectoria entre x_0 y x_k .

Si $P = x_0x_1 \dots x_{k-1}$ es una trayectoria y $k \geq 3$, entonces la gráfica $C := P + x_{k-1}x_0$ es llamada **ciclo** y, como en el caso de las trayectorias, la **longitud del ciclo** es su número de aristas. Una gráfica G es **acíclica** si ninguna de sus subgráficas es un ciclo.

Sea G una gráfica. Si V_1 y V_2 forman una partición de V , el conjunto $E(V_1, V_2)$ de aristas de G que tienen un extremo en V_1 y otro en V_2 es un **corte** de G .

Conexidad y 2-conexidad

Una gráfica G es **conexa** si y solamente si cualquier par de vértices está conectado por una trayectoria de G , de lo contrario, G será llamada **disconexa**.

Una gráfica G es k -**conexa**, para un entero positivo k , si y solamente si $|V| > k$ y $G - X$ es conexa para todo subconjunto $X \subseteq V$ tal que $|X| < k$. El siguiente teorema caracteriza, de forma equivalente, cuándo una gráfica G es 2-conexa. Ver [5] Capítulo 3 Ejercicio 8.

Teorema 1.2.1. *G es una gráfica 2-conexa si y solamente si $|V| > 2$ y cada par de aristas de G está contenido en un ciclo de G .*

Un corte $E(V_1, V_2)$ de una gráfica conexa es **minimal** si y solamente si $G - S$ es conexa para todo $S \subset E(V_1, V_2)$.

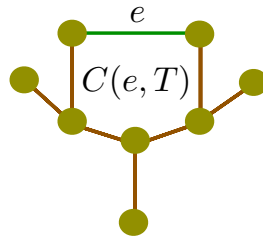
Árboles

Un **árbol** es una gráfica conexa $T = (V, E)$ con $|V| - 1$ aristas. El siguiente teorema caracteriza a las gráficas que son árboles ([5, Teorema 1.5.1]).

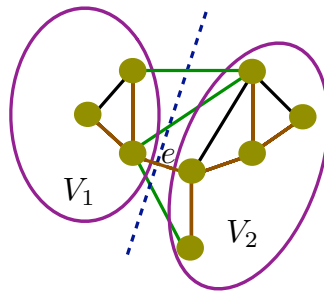
Teorema 1.2.2. *Sea T una gráfica. Son equivalentes*

1. *T es un árbol*
2. *T es una gráfica acíclica maximal*
3. *T es una gráfica conexa minimal*

El segundo inciso del Teorema 1.2.2, caracteriza un árbol T como una gráfica (V, E) que no contiene ciclos, pero tal que $T + e$ si los contiene para toda $e \in E(K_V) - E$. De hecho, como podemos ver en la Figura 1.1, $T + e$ contiene exactamente un ciclo, $C(e, T)$, que contiene a e .

Figura 1.1. $C(T, e)$

Por otra parte, el tercer inciso del Teorema 1.2.2 caracteriza a un árbol T como una gráfica conexa tal que $T - e$ es desconexo para toda arista e de T . Gracias a esta caracterización, dado un árbol generador T de una gráfica G y una arista $e \in E - E(T)$, está definido de forma natural un corte minimal de G , $E(V_1, V_2)$, en el que V_1 y V_2 son los conjuntos de vértices de las dos componentes conexas de $T - e$. A este corte lo denotaremos por $co(e, T)$. Es importante notar que la única arista de T en $co(e, T)$ es e como se ve en la Figura 1.2.

Figura 1.2. El corte definido por T y e

La relación entre las gráficas y los matroides

Íntimamente relacionado con la estructura de una gráfica conexa G , existe un matroide, N_G , que tiene como conjunto base al conjunto de aristas de G , y como independientes a $\mathcal{I}(N_G) = \{E(G') \mid G' \text{ es una subgráfica acíclica de } G\}$. A N_G se le conoce como el **matroide de G** . En este caso, $\mathcal{B}(N_G) = \{E(T) \mid T \text{ es un árbol generador de } G\}$, lo cual no es sorprendente, pues de la caracterización de los árboles podemos inferir que los árboles generadores son las subgráficas acíclicas maximales de G . Además se tiene que $\mathcal{C}(N_G) = \{E(C) \mid C \text{ es un ciclo de } G\}$.

Como N_G es un matroide, una de las preguntas que surgen naturalmente es ¿Quién es su matroide dual, N_G^* ? Se sabe que este matroide no siempre es el matroide de una gráfica. Su familia de circuitos — cocircuitos de N_G — tiene como elementos a los cortes minimales de G .

Para los objetivos de este trabajo es importante mencionar que la conexidad de N_G es equivalente a la 2-conexidad de la gráfica G y que una bicoloración efectiva de las aristas de G es también una bicoloración efectiva de N_G .

El espacio de ciclos

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con m aristas. El **espacio de aristas** de G , $\mathcal{E}(G)$, es el espacio vectorial de todas las funciones $f : E \rightarrow \mathbb{F}_2$ donde \mathbb{F}_2 es el campo de dos elementos, $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ con la operación $(f + g) : E \rightarrow \mathbb{F}_2$ es tal que $(f + g)(e) = f(e) + g(e)$.

Cada elemento de $\mathcal{E}(G)$, f , corresponde naturalmente al subconjunto de E al que se le asignó el valor 1 bajo f , es decir al conjunto $Im^{-1}(1)$. Entonces, podemos pensar en este espacio vectorial como un conjunto que tiene como elementos a los subconjuntos de E ; como suma a $S + S' := S \Delta S'$; el inverso de cada subconjunto U es el mismo U y el cero de $\mathcal{E}(G)$ es el conjunto vacío.

El **espacio de ciclos**, $\Gamma(G)$, es el subespacio de $\mathcal{E}(G)$ generado por los ciclos de G . Como la diferencia simétrica de dos ciclos es una unión de ciclos ajenos en aristas, este subespacio consiste sólo de dichas uniones y del conjunto vacío.

Si T es un árbol generador de una gráfica conexa G con n vértices y m aristas y F es la familia de ciclos $\{C(T, e) \mid e \notin E(T)\}$, se puede demostrar que F es una base del espacio de ciclos de G y de ahí que la dimensión de $\Gamma(G)$ sea $m - n + 1$.

1.3. Matroides orientados

Antes de definir a los matroides orientados debemos ponernos de acuerdo en cierta nomenclatura.

Un **conjunto orientado** X es un conjunto \underline{X} con una partición (X^+, X^-) de \underline{X} en dos conjuntos distinguidos X^+ y X^- ; donde X^+ es llamado el **conjunto de elementos positivos** de X y X^- el **conjunto de los elementos negativos** de X .

Diremos que X es un **conjunto orientado positivo**, si $X^- = \emptyset$. El **conjunto orientado opuesto** de X , denotado por $-X$, es el conjunto \underline{X} con la partición $(-X)^+ = X^-$, $(-X)^- = X^+$.

Sean X un conjunto orientado, $-X$ su conjunto orientado opuesto y C un conjunto. Decimos que $\{X, -X\}$ es una **orientación de C** si y solamente si $\underline{X} = C$.

Sea $N = (E, \mathcal{C})$ un matroide. Para cada $C \in \mathcal{C}$ sea \vec{C} una orientación de C . Si $\vec{\mathcal{C}} = \{X \mid X \in \vec{\mathcal{C}} \text{ p.a } C \in \mathcal{C}\}$ diremos que $\vec{\mathcal{C}}$ es una orientación de \mathcal{C} .

Un matroide orientado $M = (E, \vec{\mathcal{C}})$ es un matroide $\underline{M} = (E, \mathcal{C})$ con una orientación de sus circuitos $\vec{\mathcal{C}}$ que satisface que para todo $X, Y \in \vec{\mathcal{C}}$, $X \neq$

$-Y$ y $e \in X^+ \cap Y^-$, existe $Z \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$ y $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$. Como \underline{M} es un matroide entonces M cumple en total con las siguientes propiedades:

- $(\vec{\mathcal{C}}_0)$ Si $X \in \vec{\mathcal{C}}$, entonces $\underline{X} \neq \emptyset$;
- $(\vec{\mathcal{C}}_1)$ Si $-\vec{\mathcal{C}} = \{-X \mid X \in \vec{\mathcal{C}}\}$, $\vec{\mathcal{C}} = -\vec{\mathcal{C}}$;
- $(\vec{\mathcal{C}}_2)$ Para todo $X, Y \in \vec{\mathcal{C}}$, si $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$, entonces $X = Y$ o $X = -Y$;
- $(\vec{\mathcal{C}}_3)$ Para todo $X, Y \in \vec{\mathcal{C}}$, $X \neq -Y$ y $e \in X^+ \cap Y^-$, existe $Z \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$ y $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$.

El matroide \underline{M} es el **matroide subyacente** de M , los elementos de $\vec{\mathcal{C}}$ son llamados **circuitos orientados** de M y E es el **conjunto base** de M . Cada circuito C de \underline{M} es el circuito subyacente de los circuitos orientados que pertenecen a $\vec{\mathcal{C}}$.

Otra forma de pensarlo es que cada circuito orientado X de M es tal que \underline{X} es un circuito de \underline{M} . Una definición equivalente es la siguiente: un matroide orientado es una pareja $(E, \vec{\mathcal{C}})$ de un conjunto finito E y una familia de conjuntos orientados $\vec{\mathcal{C}}$ que cumplen $\vec{\mathcal{C}}_0, \vec{\mathcal{C}}_1, \vec{\mathcal{C}}_2$ y $\vec{\mathcal{C}}_3$.

Ortogonalidad

Para cada conjunto orientado X , en particular para cada circuito orientado, existe una función $sg_X : X \rightarrow \{-1, 1\}$ que, a cada elemento $e \in X^+$ le asocia el 1 y a cada elemento $f \in X^-$ le asocia el -1 .

Dos conjuntos orientados X y Y son **ortogonales**, $X \perp Y$, si y solamente si X y Y cumplen con alguna de las siguientes propiedades:

1. $X \cap Y = \emptyset$;
2. Existen $e, f \in \underline{X} \cap \underline{Y}$ tales que $sg_X(e)sg_Y(e) = -sg_X(f)sg_Y(f)$.

El dual de un matroide orientado

Dado un matroide M con un conjunto base E . Sea \underline{M}^* el matroide dual de \underline{M} . En 1978, Bland y Las Vergnas demostraron los siguientes teoremas:

Teorema 1.3.1. *Existe una única orientación $\vec{\mathcal{C}}^*$ del conjunto de cocircuitos de \underline{M} tal que:*

1. $X \perp Y$ para todo $X \in \vec{\mathcal{C}}$ y $Y \in \vec{\mathcal{C}}^*$ y
2. $(E, \vec{\mathcal{C}}^*)$ es un matroide orientado.

Al matroide $(E, \vec{\mathcal{C}}^*)$ se le llama el **dual orientado** del matroide orientado M y es denotado por M^* .

Teorema 1.3.2. *Un elemento de un matroide orientado M pertenece a un circuito orientado positivo o a un cocircuito orientado negativo, pero la intersección de un circuito positivo y un corte positivo es vacía.*

1.4. Gráficas orientadas

Una **gráfica orientada** D es una gráfica $\underline{D} = (V, E)$ tal que cada arista $uv \in E$ tiene un **vértice inicial** y un **vértice final**; dichos vértices son sus extremos. Denotaremos por \vec{uv} a la arista uv que tiene como vértice inicial

u y vértice final v y diremos que es una flecha de u a v . Así, podemos ver a una gráfica orientada D como una pareja (V, F) donde V es su conjunto de vértices y F su conjunto de flechas. A la gráfica \underline{D} se le conoce como la **gráfica subyacente** de D . Sea $X \subseteq F$ denotaremos por \underline{X} al conjunto $\{uv \in E \mid \overrightarrow{uv} \in X \text{ o } \overrightarrow{vu} \in X\}$.

Como lo hemos venido haciendo en otros contextos, cuando sea necesario, denotaremos por $V(D)$ y $F(D)$ a los vértices y a las flechas, respectivamente, de la gráfica orientada D .

Un vértice de una gráfica orientada D es un **pozo** si no es vértice inicial de ninguna de las flechas de D . Análogamente, es una **fuentes** si no es vértice final de ninguna de las flechas de D .

Una **subgráfica orientada** D' de D es una gráfica orientada tal que $V(D') \subseteq V(D)$, $F(D') \subseteq F(D)$.

Sea D una gráfica orientada y $X \subseteq F$, la gráfica orientada $D - X$ es la subgráfica orientada de D que tiene como gráfica subyacente a $\underline{D} - \underline{X}$.

Trayectorias, ciclos y cortes orientados

Un **ciclo orientado** de una gráfica orientada D es una subgráfica orientada de D cuya gráfica subyacente es un ciclo. Por otra parte un **corte orientado** de D es un subconjunto de flechas $\overrightarrow{E}(X_1, X_2)$ de D tal que $\overrightarrow{E}(X_1, X_2)$ es un corte de \underline{D} .

Una **trayectoria dirigida** $P = (V, F)$ es una gráfica orientada cuya gráfica subyacente es una trayectoria $\underline{P} = x_0x_1 \dots x_k$, tal que $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(P)$ para toda $0 \leq i \leq k - 1$.

Si P es una trayectoria dirigida tal que $\underline{P} = x_0 \dots x_{k-1}$ es su gráfica subyacente, entonces la gráfica orientada $C := P + \overrightarrow{x_{k-1}x_0}$ es llamada **ciclo dirigido**.

Sea D una gráfica orientada y \underline{D} su gráfica subyacente. Un **corte dirigido** es un corte orientado $\vec{E}(X_1, X_2)$ que satisface una de las siguientes condiciones:

1. Si $\vec{uv} \in \vec{E}(X_1, X_2)$ entonces $u \in X_1$ y $v \in X_2$ o
2. Si $\vec{uv} \in \vec{E}(X_1, X_2)$ entonces $v \in X_1$ y $u \in X_2$.

El siguiente teorema se usará en el tercer capítulo de esta tesis.

Teorema 1.4.1. *Toda gráfica orientada D tiene un ciclo dirigido o un corte dirigido.*

La relación entre las gráficas orientadas y los matroides orientados

Sea D una gráfica orientada y C un ciclo orientado de D . Ordenemos a los vértices de C cíclicamente $(C, >)$ de tal forma que exista una flecha de C entre dos vértices de C si y solamente si dichos vértices son consecutivos en el orden. Sea X el conjunto orientado cuyo conjunto de elementos positivos, X^+ , es el conjunto de flechas \vec{uv} de C que cumplen que $v > u$ y cuyo conjunto de elementos negativos, X^- , es el conjunto de flechas \vec{uv} de C que cumplen que $u > v$. Es fácil notar que C tiene una orientación $\vec{C} = \{X, -X\}$.

Se puede demostrar que el conjunto ciclos orientados de D con la orientación $\vec{C} = \{X \mid X \in \vec{C} \text{ p.a } C \in \mathcal{C}\}$ es tal que (F, \vec{C}) es un matroide orientado.

Este matroide se conoce como el **matroide orientado de D** y se denota M_D . Un hecho importante es que $\underline{M_D} = N_{\underline{D}}$.

Dado un ciclo orientado C de D y una flecha e de C , existe un circuito orientado X de M_D tal que $e \in X^+$ y $\underline{X} = E(C)$. Cada ciclo dirigido de D tiene como orientación a dos ciclos $\{X, -X\}$ uno de los cuales es positivo y otro negativo. De esta manera es equivalente que D tenga un ciclo dirigido a que M_D tenga un circuito positivo.

Análogo al caso de los matroides, los cortes orientados son los cocircuitos orientados de M_D . Por la dualidad de los matroides, para cada flecha e de un corte orientado \vec{E} , existe un cocircuito orientado Y de M_D tal que $e \in Y^+$ y $\underline{Y} = \vec{E}$. Finalmente, es equivalente decir que D tiene un corte dirigido a decir que M_D tiene un cocircuito positivo.

Capítulo 2

La gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas

2.1. La conexidad de la gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas

La **gráfica de bases**, $\mathcal{B}[N]$, de un matroide N es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de las bases de N y en la cual dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si $B' = (B - e) \cup f$ para dos elementos $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$. Existen muchas formas para describir las adyacencias de esta gráfica:

B es adyacente a B' si y solamente si se cumple alguna de las siguientes propiedades:

1. $|B \Delta B'| = 2$.
2. La base que se garantiza en el Axioma \mathcal{B}_3 es B' .
3. Existe un único circuito, denotado por $C(B, B')$, contenido en $B \cup B'$.

Es fácil observar que el circuito $C(B, B')$ es el único circuito contenido en $B \cup f$ y también es el único circuito contenido en $B' \cup e$.

Sea N un matroide con una bicoloración efectiva ϕ . La **gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas**, $\mathcal{B}[N, \phi]$, de N es la subgráfica generadora

de $\mathcal{B}[N]$ en la que B y B' son adyacentes si y solamente si $B\Delta B' = \{e, f\}$ para dos elementos $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$ tales que $\phi(e) \neq \phi(f)$.

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

Teorema. *Si ϕ es una bicoloración efectiva de un matroide conexo N , entonces $\mathcal{B}[N, \phi]$ es una gráfica conexa.*

La hipótesis de que N es conexo es necesaria, existen matroides disconexos con una bicoloración efectiva cuyas gráficas de bases por adyacencias bicoloradas son disconexas. Un ejemplo de esto se observa en la Figura 2.1.

$$\begin{array}{lll}
 E(N) = \{1, 2, 3, 4\} & \{1, 2\} & \{1, 3\} \\
 \mathcal{B}(N) = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\} & | & | \\
 \mathcal{C}(N) = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} & \{2, 4\} & \{3, 4\}
 \end{array}$$

Figura 2.1.

Sin embargo, habiendo demostrado el teorema principal, un matroide N con una bicoloración efectiva ϕ es tal que $\mathcal{B}[N, \phi]$ es conexa si y solamente si $\phi|_X$ es una bicoloración efectiva para toda componente conexa X con más de un elemento.

También es importante notar que, como se observa en la figura 2.2, existen matroides con una 2-coloración efectiva y cuyas gráficas de bases por adyacencias bicoloradas no es 2 conexa. En ese sentido, la conclusión del teorema principal no se puede mejorar.

El Teorema Principal será demostrado por inducción sobre el número de elementos del matroide N . Utilizaremos las operaciones matroidales de contraer un elemento y borrar un subconjunto, expuestas en el primer capítulo. Con

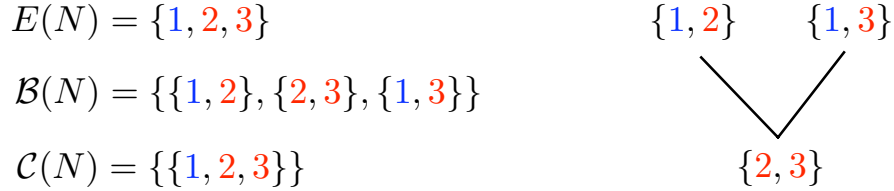


Figura 2.2.

dichas operaciones obtendremos matroides con un número menor de elementos. De esta forma, lo que debemos estudiar es: 1) ¿En qué condiciones se puede garantizar que, bajo estas operaciones, se conservan las hipótesis del Teorema Principal? y 2) ¿Cómo se relacionan los objetos obtenidos a través de la hipótesis de inducción con los objetos del matroide N ? Así, a continuación enunciaremos y demostraremos los lemas pertinentes para dicha labor.

Lema 2.1.1. *Sean N un matroide con una bicoloración efectiva ϕ y E su conjunto base. Sea $b \in E$ tal que $\phi|_{(E-b)}$ es una bicoloración efectiva de N/b y $\mathcal{B}[N/b, \phi|_{(E-b)}]$ es una gráfica conexa. Si $B, B' \in \mathcal{B}(N)$ son tales que $b \in B \cap B'$, entonces existe una trayectoria que conecta a B con B' en $\mathcal{B}[N, \phi]$.*

Demostración. Por el primer inciso del Teorema 1.1.3, tanto $B - b$ como $B' - b$ son bases de N/b . Como $\mathcal{B}[N/b, \phi|_{(E-b)}]$ es conexa, existe una trayectoria $D_0 D_1 \dots D_n$ en $\mathcal{B}[N/b, \phi|_{(E-b)}]$, en la cual, $D_0 = B - b$ y $D_n = B' - b$.

Ahora, por el segundo inciso del Teorema 1.1.3, $B_i = D_i \cup b$ es una base de N para toda $0 \leq i \leq n$. Como $|D_i \Delta D_{i+1}| = 2$ para toda $0 \leq i \leq n-1$, entonces $|(D_i \cup b) \Delta (D_{i+1} \cup b)| = 2$ para toda $0 \leq i \leq n-1$. Es decir, el hecho de que D_i sea adyacente a D_{i+1} en $\mathcal{B}[N/b, \phi|_{(E-b)}]$ para toda $0 \leq i \leq n-1$, implica que B_i es adyacente a B_{i+1} en $\mathcal{B}[N, \phi]$ para toda $0 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, $B_0 B_1 \dots B_n$ es una trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$ que conecta a B con B' . \square

Se dice que un circuito de un matroide N es un **lazo** si contiene un solo elemento. En el siguiente lema se caracteriza a los circuitos de la contracción de un elemento y será usado en numerosas ocasiones en los resultados de este capítulo.

Lema 2.1.2. *Sean x un elemento de un matroide N y $C \in \mathcal{C}(N)$ un circuito que no es un lazo.*

- i. Si $C - x$ no es un circuito de N/x , existe un circuito C' de N que contiene a x y tal que $C' - x$ es un circuito de N/x contenido en C .*
- ii. Si $x \in C$, entonces $C - x$ es un circuito de N/x .*

Demostración. (Inciso *i.*) Este inciso se sigue directamente del Teorema 1.1.2.

(Inciso *ii.*) Supongamos que $x \in C$. Como C no es un lazo, entonces $C - x$ no es vacío. Si $C - x$ no es un elemento minimal de la familia $\{C - x \mid C \in \mathcal{C}(N)\}$, entonces, por el inciso anterior, existe un circuito C' tal que $C' - x \subset C - x$. Se sigue que $C' \subseteq (C' - x) \cup x \subset (C - x) \cup x = C$, lo que contradice al axioma \mathcal{C}_2 de circuitos. Por lo que $C - x$ es no vacío y minimal y, por el Teorema 1.1.2, es un circuito de N/x . \square

Diremos que dos elementos d y e son **paralelos** si y solamente si $\{d, e\}$ es un circuito de N .

Lema 2.1.3. *Sean d y e dos elementos no paralelos de un matroide conexo N . Si K_d es una componente de N/d que no contiene a e y K_e es una componente de N/e que no contiene a d , entonces $K_d \cap K_e = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que el lema es falso y tomemos un elemento $f \in K_d \cap K_e$. Como se observa en la Figura 2.3, ya que N es un matroide conexo, existe un circuito $C \in \mathcal{C}(N)$ tal que

$$d, f \in C. \tag{2.1}$$

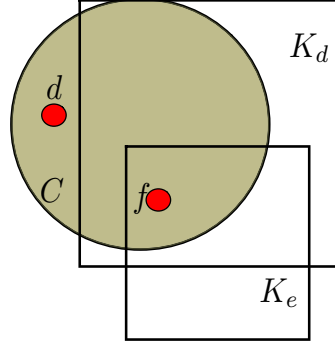


Figura 2.3.

Por el segundo inciso del Lema 2.1.2, $C - d \in \mathcal{C}(N/d)$. Como $f \in K_d$ y K_d es una componente conexa de N/d , entonces

$$C - d \subseteq K_d. \quad (2.2)$$

En la Figura 2.4 podemos ver que debido a que d y f son elementos de $C - e$ y están en distintas componentes de N/e , entonces $C - e \notin \mathcal{C}(N/e)$. Esto último, aunado al Lema 2.1.2, nos dice que

$$e \notin C, \quad (2.3)$$

que existe un circuito $D \in \mathcal{C}(N)$ tal que

$$e \in D \quad (2.4)$$

y

$$D - e \subseteq C. \quad (2.5)$$

Como d y e no son paralelos, $D - \{d, e\} \neq \emptyset$. Así, de 2.2 y 2.5,

$$\emptyset \neq D - \{d, e\} \subseteq C - \{d, e\} \subseteq K_d. \quad (2.6)$$

De 2.4, 2.6 y como $e \notin K_d$, se tiene que $D - d \notin \mathcal{C}(N/d)$. De ahí y del segundo inciso del Lema 2.1.2,

$$d \notin D. \quad (2.7)$$

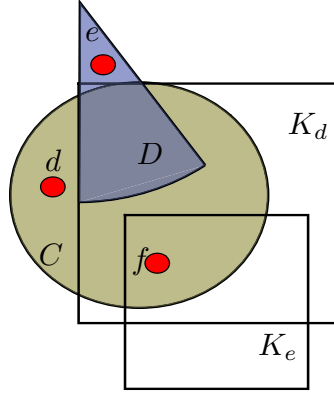


Figura 2.4.

Ahora, por el primer inciso del Lema 2.1.2, existe un circuito $F \in \mathcal{C}(N)$ tal que

$$d \in F \quad (2.8)$$

y

$$F - d \subseteq D. \quad (2.9)$$

De 2.6 y 2.9 se tiene que

$$\emptyset \neq F - \{d, e\} \subseteq D - \{d, e\} \subseteq C - \{d, e\} \subseteq K_d. \quad (2.10)$$

Por 2.8, $F - d \in \mathcal{C}(N/d)$ y por 2.10 concluimos que $F \cap K_d \neq \emptyset$. De esta manera $F - d \subseteq K_d$ y por lo tanto

$$e \notin F. \quad (2.11)$$

De 2.3, 2.10 y 2.11, se sigue que $F \subseteq (D - e) \cup d \subseteq C$, como se observa en la Figura 2.5.

Sin embargo, por el axioma \mathcal{C}_2 , la única manera de que esto suceda, es que $F = C$. Así,

$$\emptyset \neq F - \{d, e\} = D - \{d, e\} = C - \{d, e\}. \quad (2.12)$$

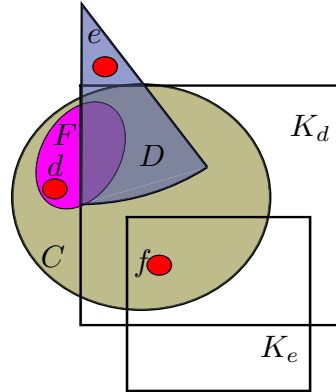


Figura 2.5.

De esta forma en el diagrama 2.6, se observa que $D - C = \{e\}$ debido a 2.12, 2.7 y 2.4, que $C - D = \{d\}$ por 2.12, 2.7, 2.4 y 2.1 y que por 2.12, $C \cap D \subseteq K_d$. De ahí que, aplicando el axioma \mathcal{C}_3 a D y a C podamos encontrar $H \in \mathcal{C}(N)$,

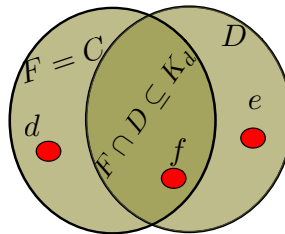


Figura 2.6.

que contiene a d y no contiene a f . Dicho circuito no puede estar contenido en C , así que $H \cap (D - C) \neq \emptyset$. Por lo tanto H contiene tanto a d como a e . Más aún, como d y e no son paralelos, entonces $H \cap (D \cap C) \neq \emptyset$.

Debido a que $D \cap C \subseteq K_d$ y $d \in H$ por el segundo inciso del Lema 2.1.2, $H - d \in \mathcal{C}(N/d)$ y $H - d \subseteq K_d$. Por lo tanto $e \in K_d$, lo que contradice nuestras hipótesis. (Figura 2.7) \square

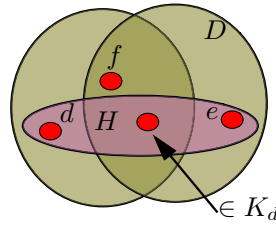


Figura 2.7.

Lema 2.1.4. Sean N un matroide conexo y e uno de sus elementos. Si K_e es una componente de N/e , entonces $N \setminus K_e$ es un matroide conexo.

Demostración. Observemos que $N \setminus K_e \neq \emptyset$, puesto que $e \notin K_e$. Supongamos que $N \setminus K_e$ es desconexo.

Sea f un elemento de $N \setminus K_e$ que no está en la misma componente que e en $N \setminus K_e$. Como N es conexo, $e, f \in C$ para algún $C \in \mathcal{C}(N)$. Además, como f y e no están en la misma componente de $N \setminus K_e$, $C \notin \mathcal{C}(N \setminus K_e)$. De esta manera, $C \cap K_e \neq \emptyset$. Por el segundo inciso del Lema 2.1.2, $C - e$ es un circuito de N/e . Por lo tanto $f \in K_e$, lo que es una contradicción. (Figura 2.8) \square

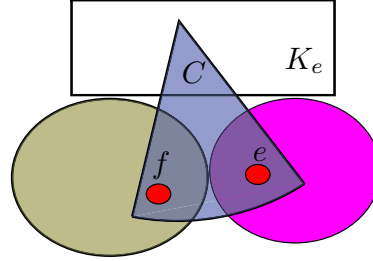


Figura 2.8.

Proposición 2.1.5. *Sea e un elemento de un matroide N y K_e una componente de N/e . Si B es una base de N que contiene a e , entonces $B - K_e$ es una base de $N \setminus K_e$.*

Demostración. Debido a que $B - K_e$ es un independiente de N totalmente contenido en $N - K_e$, podemos afirmar que $B - K_e$ también es un independiente en $N \setminus K_e$. Supongamos que $B - K_e$ no es una base, es decir, existe un elemento $f \notin B \cup K_e$ tal que $(B - K_e) \cup f$ es un independiente de $N \setminus K_e$. Esto implica que

$$(B - K_e) \cup f \text{ es un independiente de } N. \quad (2.13)$$

Por otra parte, como B una base de N , $B \cup f$ contiene un circuito C tal que $f \in C$, más aún, por 2.13, existe un elemento $d \in C \cap K_e$. Como $f \notin K_e \cup B$, se tiene que $C - e \notin \mathcal{C}(N/e)$. Por el primer inciso del Lema 2.1.2, existe un circuito $D \in \mathcal{C}(N)$ que contiene a e y tal que $D - e \subseteq C$.

Por el axioma \mathcal{C}_3 podemos asumir que $f \in D$. De esta manera, $D \cap K_e = \emptyset$. Por lo que, $D \subseteq (B - K_e) \cup f$. Así, por el axioma \mathcal{I}_2 aplicado al matroide $N \setminus K_e$, D es un independiente de $N \setminus K_e$, es decir, un independiente de N totalmente contenido en $E - K_e$, lo que contradice que D sea un circuito de N . Por lo tanto $B - K_e$ es una base de $N \setminus K_e$. \square

Lema 2.1.6. Sean N un matroide con una bicoloración efectiva ϕ , y E su conjunto base. Sean $e \in E$ y K_e una componente de N/e . Si $\mathcal{B}[N \setminus K_e, \phi|_{(E-K_e)}]$ es conexa y tanto B como B' son bases de N tales que:

1. $e \in B$.
2. B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}[N]$.
3. $B \cap K_e = B' \cap K_e$.

entonces existe una trayectoria entre B y B' en $\mathcal{B}[N, \phi]$.

Demostración. Sea $T = B \cap K_e = B' \cap K_e$. Por la Proposición 2.1.5, $D_0 = B - T$ es una base de $N \setminus K_e$. Como $|D_0| = |B' - T|$, se tiene que $B' - T$ es también una base de $N \setminus K_e$. Debido a que $\mathcal{B}[N \setminus K_e, \phi|_{(E-K_e)}]$ es conexa, existe una trayectoria $P = D_0 D_1 \dots D_n$ tal que $D_n = B' - T$ en $\mathcal{B}[N \setminus K_e, \phi|_{(E-K_e)}]$.

Sabemos que $D_0 \cup T = B$ es una base de N . Supongamos que existe un entero $1 \leq i \leq n$ tal que $B_i = D_i \cup T \notin \mathcal{B}(N)$. Sin pérdida de generalidad asumamos que D_i el primer vértice de la trayectoria P tal que B_i no es una base de N y sea $C \in \mathcal{C}(N)$ un circuito contenido en B_i . Como tanto T como D_i son independientes de N , entonces C no puede estar totalmente contenido en T y similarmente C tampoco puede estar totalmente contenido en D_i . Así $C \cap T \neq \emptyset$ y $C \cap D_i \neq \emptyset$. Por otra parte, $B_{i-1} \in \mathcal{B}(N)$, así que C tampoco está contenido en B_{i-1} . Como D_i es adyacente a D_{i-1} existe un único elemento f contenido en $B_i - B_{i-1}$, lo que implica que $f \in C$. Además $C \neq C(D_{i-1} \cup D_i)$ ya que $C(D_{i-1} \cup D_i) \cap T = \emptyset$. Por el axioma de eliminación existe $C' \subseteq (C \cup C(D_{i-1} \cup D_i))$ tal que $f \notin C'$. Esto quiere decir que C' está contenido en B_{i-1} , lo que obviamente es imposible. Se sigue que para todo $0 \leq i \leq n$, $B_i = D_i \cup T$ es una base de N .

Debido a que D_i es adyacente a D_{i+1} en $\mathcal{B}[N \setminus K_e, \phi|_{(E-K_e)}]$ para toda $0 \leq i \leq n-1$, entonces B_i es adyacente a B_{i+1} en $\mathcal{B}[N, \phi]$ para toda

$0 \leq i \leq n - 1$. De esta manera hemos encontrado una trayectoria entre B y B' en $\mathcal{B}[N, \phi]$. \square

Lema 2.1.7. *Sea N un matroide conexo que contiene un circuito de longitud por lo menos tres. Si B es una base de N y $e \in B$, entonces existe un elemento $w \in E(N) - B$ tal que $e \in C(w, B)$ y $|C(w, B)| \geq 3$, donde $C(w, B)$ es el único circuito de N contenido en $B \cup w$.*

Demostración. Como N es un matroide conexo,

$$K^* = \{g \in E(N) - B : x \in C(g, B)\} \neq \emptyset.$$

Supongamos que para toda $g \in K^*$, se tiene que $|C(g, B)| = 2$. Sea $K = K^* \cup e$. Demostraremos que $B - e$ es una base de $N \setminus K$.

Claramente, $B - e \in \mathcal{I}(N \setminus K)$. Si $B - e \notin \mathcal{B}(N \setminus K)$, entonces existe un elemento $w \in E(N \setminus K)$, tal que $(B - e) \cup w$ es una base de N y tal que $e \in C(w, B) = C(e, (B - e) \cup w)$ lo cual es imposible porque $w \notin K$. Entonces $B - e$ es una base de $N \setminus K$. Ahora observemos que:

$$r_N(K) + r_N(E(N) - K) = 1 + |B - x| = 1 + (r_N(N) - 1) = r_N(N).$$

Por el Teorema 1.1.4, N es desconexo, lo cual contradice nuestra hipótesis. \square

Ahora sí tenemos los elementos suficientes para demostrar el Teorema Principal del capítulo.

Teorema 2.1.8. *Si ϕ es una bicoloración efectiva de un matroide conexo N , entonces $\mathcal{B}[N, \phi]$ es una gráfica conexas.*

Demostración. Como prometimos demostraremos este teorema por inducción sobre el número de elementos del conjunto base E del matroide N .

Base: Debido a que N es un matroide conexo, si $E = \{e, f\}$, entonces e y f son paralelos. De ésta manera, N sólo tiene dos bases e y f que son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$ ya que e y f reciben distinto color, al ser ϕ una bicoloración efectiva.

Hipótesis de Inducción: Asumamos que la gráfica de bases por adyacencias bicoloreadas de un matroide es conexa si dicho matroide tiene menos de n elementos, es conexo y está bicoloreado con una bicoloración efectiva.

Sea N un matroide con una bicoloración efectiva ϕ que tiene n elementos. Dado que $\mathcal{B}[N]$ es conexa, nos bastará demostrar que existe una trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$ entre cualquier par de bases B y B' que son adyacentes en $\mathcal{B}[N]$ pero no lo son en $\mathcal{B}[N, \phi]$. En este caso $B' = (B - e) \cup f$ para alguna $e \in B - B'$ y $f \in B' - B$ tales que $\phi(e) = \phi(f)$.

Caso 1. $|C(B \cup B')| \geq 3$.

Si $\phi(a) \neq \phi(e)$ para algún elemento $a \in C(B \cup B')$, se tiene que la base $B^* = (B \cup B') - a$ es adyacente tanto a B como a B' en $\mathcal{B}[N, \phi]$. En este caso, B y B' están conectados en $\mathcal{B}[N, \phi]$ por una trayectoria de longitud dos: BB^*B' .

Así, podemos suponer de ahora en adelante que $C(B \cup B')$ es un circuito monocromático.

Subcaso 1. Existe un elemento $b \in C(B \cup B') - \{e, f\}$ contraíble.

En dicho caso N/b es un matroide con $n - 1$ elementos, conexo y con una bicoloración efectiva $\phi|_{(E-b)}$. Por la hipótesis de inducción $\mathcal{B}[N/b, \phi|_{(E-b)}]$ es una gráfica conexa. Como $b \in B \cap B'$, por el Lema 2.1.1, existe una BB' -trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$.

Subcaso 2. e y f son contraíbles.

Por inducción, tanto $\mathcal{B}[N/e, \phi|_{(E-e)}]$ como $\mathcal{B}[N/f, \phi|_{(E-f)}]$ son dos gráficas conexas. Sea $c \in C(B \cup B') - \{e, f\}$. Es fácil ver que $B^* = (B \cup B') - c$ es

una base de N . Como $e \in B \cap B^*$, por el Lema 2.1.1, existe una trayectoria entre B y B^* en $\mathcal{B}[N, \phi]$. De la misma manera, como $f \in B' \cap B^*$, existe una trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$ de B' a B^* . Con dichas trayectorias podemos construir una BB' -trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$.

Subcaso 3. N/e y N/d son dos matroides desconexos para algún $d \in C(B \cup B') - \{e, f\}$. Sean K_e y K_d componentes conexas de N/e y N/d , respectivamente, tales que $e \notin K_d$ y $d \notin K_e$. Por el Lema 2.1.3, $K_e \cap K_d = \emptyset$. Puesto que el conjunto $\{g \in E \mid \phi(g) \neq \phi(e)\}$ está contenido en $E - (K_e \cap K_d)$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\phi|_{(E-K_e)}$ es una bicoloración efectiva de $N \setminus K_e$. Mas aún, por el Lema 2.1.4, $N \setminus K_e$ es un matroide conexo con menos de n elementos. Por la hipótesis de inducción $\mathcal{B}[N \setminus K_e, \phi|_{(E-K_e)}]$ es conexo. Por lo tanto, por el Lema 2.1.6, existe una BB' -trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$.

Subcaso 4. N/f y N/d son dos matroides desconexos para algún $d \in C(B \cup B') - \{e, f\}$.

Este subcaso se demuestra como el anterior sustituyendo f por e .

Caso 2. $C(B \cup B') = \{e, f\}$.

Por el Lema 2.1.7, existe $w \in E(N) - B$ tal que $C^* = C(w, B)$ tiene longitud por lo menos 3 y $e \in C^*$. Como e y f son paralelos, por el axioma de eliminación de circuitos, $(C^* - e) \cup f$ es el único circuito de $B' \cup w$. Entonces, la base $B'' = (B - e) \cup w$ es adyacente a B y a B' en $\mathcal{B}[N]$. Por el Caso 1, existe una BB'' -trayectoria y una $B''B'$ -trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$. Así, en $\mathcal{B} - \phi[N]$ podemos encontrar una trayectoria entre B y B' . \square

2.2. La gráfica de bases respecto a una familia de circuitos

Sea C una familia de ciclos de una gráfica conexa G . La **gráfica de árboles de G respecto a C** , $T(G, C)$, tiene como vértices a los árboles generadores de G y dos árboles T y T' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $T(G)$ y $C(T \cup T') \in C$. Esta gráfica fue estudiada en [14] y también será estudiada en el Capítulo 4 de esta tesis. Una generalización natural de esta gráfica que fue también estudiada en [14] es la siguiente:

Sea \mathcal{A} una familia de circuitos de un matroide N . La **gráfica de bases de N respecto a \mathcal{A}** , $\mathcal{B}(N, \mathcal{A})$, tiene como vértices a las bases de N y dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $\mathcal{B}[N]$ y el único circuito contenido en $B \cup B'$ es un elemento de \mathcal{A} .

Uno de los resultados que se dieron en [14] fue:

Teorema 2.2.1. *Sea e una arista de una gráfica 2-conexa G . Si C_e es el conjunto de ciclos de G que contienen a la arista e , entonces $T(G, C_e)$ es conexa.*

Como resultado inmediato del Teorema 2.2.3, que demostraremos más adelante, y del Teorema 2.1.8 obtenemos la siguiente generalización del Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.2. *Sean x un elemento de un matroide conexo N y \mathcal{A}_x el conjunto de todos los circuitos de N que contienen al elemento x . Entonces, $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$ es conexa.*

Teorema 2.2.3. *Sea x un elemento de un matroide conexo N . Si \mathcal{A}_x es el conjunto de todos los circuitos de N que contienen al elemento x , entonces $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$ es conexa si y solamente si $\mathcal{B}[N, \phi]$ es conexa donde*

$$\phi : E \longrightarrow \{ \text{Rojo}, \text{Azul} \} \text{ es tal que:}$$

$$\phi(e) = \begin{cases} \text{Rojo} & \text{si } e = x \\ \text{Azul} & \text{si } e \neq x \end{cases}$$

Demostración. Probaremos primero que si $\mathcal{B}[N, \phi]$ es conexa entonces $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$ es conexa. Basta demostrar que si B y B' son dos bases de N que son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$, entonces son adyacentes en $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$.

Como B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$ entonces $B\Delta B'$ es un conjunto de dos elementos que tienen distinto color. Como x es el único elemento que tiene color Rojo, se tiene que $B\Delta B' = \{x, y\}$ para algún elemento $y \in \mathcal{B}(N)$. Por lo tanto el único circuito contenido en $B \cup B'$, $C(B, B')$, es un elemento de \mathcal{A}_x , lo que quiere decir que B es adyacente a B' en $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$.

Sigue demostrar que si $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$ es conexa entonces $\mathcal{B}[N, \phi]$ es conexa. Basta probar que si B y B' son dos bases de N que son adyacentes en $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$ pero no son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$ entonces están conectadas por una trayectoria en $\mathcal{B}[N, \phi]$.

Como B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}(N, \mathcal{A}_x)$ entonces $B' = (B - e) \cup f$ para dos elementos $e, f \in E(N)$ y además $C(B, B')$ contiene a x . Como B y B' no son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$ entonces e y f son distintos de x . Se sigue que la base $B^+ := (B - e) \cup x$ es adyacente a B en $\mathcal{B}[N, \phi]$. Además $B^+ = (B' - f) \cup x$ por lo que B^+ también es adyacente a B' en $\mathcal{B}[N, \phi]$. Por lo tanto, hemos encontrado una trayectoria entre B y B' en $\mathcal{B}[N, \phi]$. \square

2.3. Una partición de la Gráfica de Bases

Sea M un matroide orientado y N su matroide subyacente. La **gráfica de bases por adyacencias cíclicas**, $\mathcal{B}_{ci}[M]$, es la subgráfica generadora de $\mathcal{B}[N]$ en la que dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si:

1. $(B \cup e) - f = B'$, para $e \in B - B'$, $f \in B' - B$ y
2. $e, f \in X^+$ para algun circuito X de M tal que \underline{X} es el único circuito contenido en $B \cup B'$.

Teorema 2.3.1. *Sea N el matroide subyacente del matroide orientado M . Si N es conexo y M contiene a un circuito orientado positivo, entonces $\mathcal{B}_{ci}[M]$ es conexa.*

Demostración. Sea x un elemento de un circuito orientado positivo X de M . Definimos una bicoloración efectiva de los elementos de M como sigue:

$\phi : E \longrightarrow \{ \text{Rojo, Azul} \}$ es tal que:

$$\phi(e) = \begin{cases} \text{Rojo} & \text{si } e = x. \\ \text{Azul} & \text{si } e \neq x. \end{cases}$$

Por el teorema 2.1.8, $\mathcal{B}[N, \phi]$ es conexa. De esta manera sólo queda probar que dos bases B y B' de M , que son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$ pero no son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M]$, están unidas por una trayectoria en $\mathcal{B}_{ci}[M]$.

Como B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}[N, \phi]$, entonces $B \Delta B'$ es un conjunto de dos elementos que tienen distinto color. Como x es el único elemento que tiene color Rojo, se tiene que $B \Delta B' = \{x, y\}$ para algún $y \in E(N)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in B - B'$ y $y \in B' - B$.

Como B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}[N]$ pero no son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M]$, existe un circuito orientado Y de M que cumple que:

1. \underline{Y} es el único circuito de N contenido en $B \cup B'$ y
2. $x \in Y^+$ y $y \in Y^-$.

Sea Y^* el único cocircuito de M tal que $(Y^* \cap B) - x = \emptyset$ y que es también positivo en x (Teorema 1.1.1). Como Y y Y^* son ortogonales, entonces y es un elemento en la parte positiva de Y^* . Como x es un elemento de un circuito positivo X , por el Teorema 1.3.2, existe $z \in (Y^*)^-$.

Sea Z el circuito de M cuyo soporte es el único circuito contenido en $B \cup z$ y tal que $z \in Z^+$. Se tiene que B es adyacente a $(B - x) \cup z$ en $\mathcal{B}_{ci}[M]$.

Podemos probar por un argumento análogo, que B' es adyacente a $(B - x) \cup z$ en $\mathcal{B}_{ci}[M]$. Por lo tanto existe una trayectoria entre B y B' en $\mathcal{B}_{ci}[M]$. \square

Sea M un matroide orientado y N su matroide subyacente. La **gráfica de bases por adyacencias cocíclicas**, $\mathcal{B}_{co}[M]$, es la subgráfica generadora de $\mathcal{B}[N]$ en la que dos bases B y B' son adyacentes si y solamente si:

1. $(B \cup e) - f = B'$, para $e \in B - B'$, $f \in B' - B$ y
2. $e \in X^+$ y $f \in X^-$ para algun circuito X de M tal que \underline{X} es el único circuito contenido en $B \cup B'$.

Como podemos observar, dos bases B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}_{co}[M]$ si y solamente si son adyacentes en $\mathcal{B}[\underline{M}]$ y no son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M]$. De esta manera, $E(\mathcal{B}_{ci}[M])$ y $E(\mathcal{B}_{co}[M])$ forman una partición de $E(\mathcal{B}[\underline{M}])$.

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

Teorema *Si M es un matroide orientado y \underline{M} un matroide conexo, entonces $\mathcal{B}_{ci}[M]$ es conexa o $\mathcal{B}_{co}[M]$ es conexa.*

Por el Teorema 2.3.1 si M tiene un circuito positivo entonces $T_{ci}[M]$ es conexa, así, lo que restaría probar es que si M no tiene un circuito positivo entonces $T_{co}[M]$ es conexa. Para hacerlo, observemos primero los siguientes resultados.

Lema 2.3.2. *Dos bases B y B' de M son adyacentes en $\mathcal{B}_{co}[M]$ si y solamente si $E - B$ y $E - B'$ son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M^*]$.*

Demostración. Sea M un matroide orientado cuyo conjunto base es E . Como B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}_{co}[M]$, cumplen que $(B \cup e) - f = B'$, para $e \in B - B'$, $f \in B' - B$ y $e \in X^+$ y $f \in X^-$ para algún circuito X de M cuyo conjunto subyacente es el único circuito contenido en $B \cup B'$.

Sabemos por el Teorema 1.1.1 que existe un cocircuito S de \underline{M} tal que $\underline{X} \cap S = \{e, f\}$. Sea Z una orientación de S en M^* , es decir, sea Z un cocircuito orientado de M tal que $\underline{Z} = S$. Por el primer inciso del Teorema 1.3.1, X y Z son ortogonales. Como $e \in \underline{X} \cap \underline{Z}$, entonces $sg_X(e)sg_Z(e) = -sg_X(f)sg_Z(f)$. Se concluye que $e, f \in Z^+$ o $e, f \in Z^-$. Por lo tanto existe Y (en el primer caso $Y = Z$ y en el segundo $Y = -Z$) tal que $e, f \in Y^+$. Como $\underline{X} \cap \underline{Z} = \{e, f\}$ entonces \underline{Y} es el único circuito contenido en $(E - B) \cup (E - B')$. Por lo tanto $E - B$ y $E - B'$ son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M^*]$.

Por otra parte como, $E - B$ y $E - B'$ son dos bases de M^* adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M^*]$, se tiene que $((E - B) \cup e) - f = E - B'$, para $e \in (E - B') - (E - B)$, $f \in (E - B) - (E - B')$ y $e, f \in Y^+$ para algún cocircuito Y de M tal que \underline{Y} es el único circuito contenido en $(E - B) \cup (E - B')$.

Por el Teorema 1.1.1, sabemos que existe un circuito R de \underline{M} tal que $\underline{Y} \cap R = \{e, f\}$. Sea X una orientación de R en M , es decir, sea X un circuito orientado de M tal que $\underline{X} = R$. Por el primer inciso del Teorema 1.3.1, Y y X son ortogonales. Como $e \in \underline{Y} \cap \underline{X}$, entonces $sg_Y(e)sg_X(e) = -sg_Y(f)sg_X(f)$. Por lo tanto, $e \in X^+$ y $f \in X^-$. Como $\underline{X} \cap \underline{Y} = \{e, f\}$ se sigue que \underline{Y} es el único circuito contenido en $B \cup B'$. Por lo tanto B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}_{co}[M]$ \square

Teorema 2.3.3. $\mathcal{B}_{co}[M] \cong \mathcal{B}_{ci}[M^*]$

Demostración. Sean M un matroide orientado con conjunto base E y \mathcal{B} el conjunto de bases de M . Sea $\mathcal{B}^* = \{E - B : B \in \mathcal{B}\}$. Como sabemos \mathcal{B}^* es

el conjunto de bases de M^* . Así, $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ definida por $f(B) = E - B$ es una función entre los árboles generadores de M y las bases de M^* que además es biyectiva.

Notemos que por el Lema 2.3.2 $B, B' \in \mathcal{B}$ son adyacentes en $\mathcal{B}_{co}[M]$ si y solamente si $E - B$ y $E - B'$ son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M^*]$. Con lo anterior hemos demostrado que B y B' son adyacentes en $\mathcal{B}_{co}[M]$ si y solamente si $f(B)$ y $f(B')$ son adyacentes en $\mathcal{B}_{ci}[M^*]$. \square

Como consecuencia del Teorema anterior y del Teorema 2.3.1 tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.3.4. *Sea N el matroide subyacente del matroide orientado M . Si N es conexo y M contiene a un cocircuito orientado positivo, entonces $\mathcal{B}_{co}[M]$ es conexa.*

Demostración. Si M tiene un cocircuito orientado positivo, entonces M^* tiene un circuito orientado positivo. Así, de las hipótesis y del Teorema 2.3.1, se sigue que $\mathcal{B}_{ci}[M^*]$ es conexa y, por el Teorema 2.3.3, $\mathcal{B}_{co}[M]$ es conexa. \square

Con esto ya podemos demostrar el Teorema principal de la sección:

Teorema 2.3.5. *Si M es un matroide orientado y \underline{M} un matroide conexo, entonces $\mathcal{B}_{ci}[M]$ es conexa o $\mathcal{B}_{co}[M]$ es conexa.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.2 un matroide orientado M siempre tiene un circuito orientado o un cocircuito orientado positivo. En el primer caso $\mathcal{B}_{ci}[M]$ es conexa y en el segundo $\mathcal{B}_{co}[M]$ es conexa. \square

Capítulo 3

Consecuencias y el número cromático de algunas subgráficas de árboles

En la primera sección de este capítulo traduciremos los resultados demostrados en el capítulo anterior a gráficas y gráficas orientadas, con lo que intentamos ilustrar de una mejor manera algunos de los teoremas. Por otra parte daremos un ejemplo de un matroide orientado gráfico M_G que cumple con no tener un circuito orientado positivo y sin embargo $\mathcal{B}_{ci}[M]$ es conexa. En la segunda sección estudiaremos el número cromático de las gráficas definidas en la primera sección.

3.1. Consecuencias

La **gráfica de árboles**, $T(G)$, de una gráfica G es la gráfica que tiene por vértices al conjunto de árboles generadores de G y en la que dos árboles T y T' son adyacentes si $(T - e) + f = T'$ para dos aristas $e \in E(T) - E(T')$ y $f \in E(T') - E(T)$.

Como hemos visto en el primer capítulo de esta tesis, T es un árbol generador de G si y solamente si $E(T)$ es una base del matroide de G . Así $T(G)$ es isomorfa a $\mathcal{B}[N_G]$, pero por conveniencia decimos que son iguales.

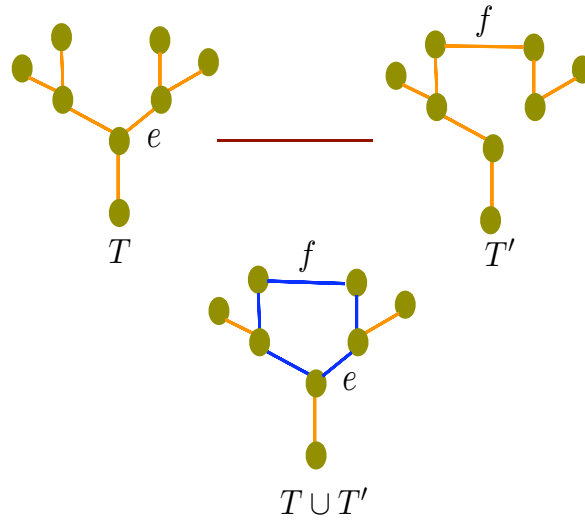


Figura 3.1. Dos árboles adyacentes en $T(G)$

Subgráficas de la gráfica de árboles

Siguiendo esta analogía, la **gráfica de árboles de adyacencias bicoloradas**, $T(G, \phi)$, de una gráfica G es la gráfica $\mathcal{B}[M_D, \phi]$. Ver la Figura 3.2

Enunciaremos a continuación un corolario directo del Teorema 2.1.8.

Corolario 3.1.1. *Si ϕ es una bicoloración efectiva de las aristas de una gráfica 2-conexa G , entonces $T(G, \phi)$ es una gráfica conexa.*

La **gráfica de árboles por adyacencias cíclicas** de una gráfica orientada D , $T_{ci}(D)$, es la subgráfica de la gráfica $T(\underline{D})$ que cumple que dos árboles T y T' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $T(\underline{D})$ y las aristas de $E(T) \Delta E(T')$ están en la misma dirección cíclica. Es decir $T_{ci}(D)$ es la gráfica de bases por adyacencias cíclicas de M_D . Análogamente la **gráfica de árboles por adyacencias cocíclicas**, $T_{co}(D)$, es la subgráfica de $T(\underline{D})$ tal que dos árboles T y T' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $T(\underline{D})$ y las aristas de $E(T) \Delta E(T')$ están en distinta dirección cíclica. No

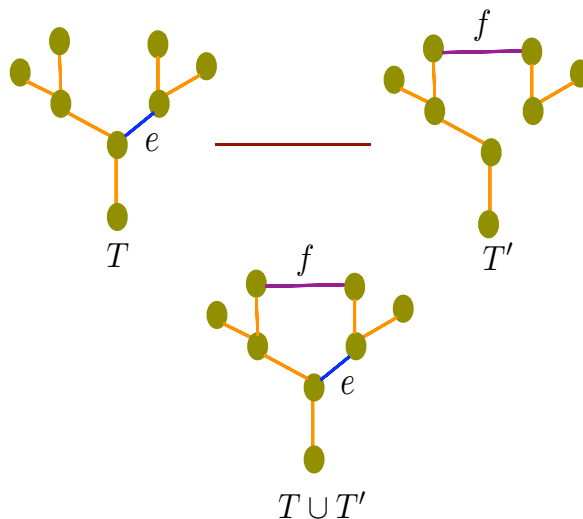


Figura 3.2. Dos árboles adyacentes en $T(G, \phi)$

nos sorprenderá para este momento que $T_{co}(D)$ sea la gráfica $\mathcal{B}_{co}(M_D)$.

Ahora, si tenemos una gráfica orientada D , C un ciclo de D y $e, f \in E(C)$ entonces e y f están en la misma dirección cíclica o en distinta dirección cíclica. Así como en el caso de los matroides $T_{ci}(D)$ y $T_{co}(D)$ inducen una partición de las aristas de $T(D)$, como se ilustra en la Figura 3.3.

Que M_D tenga un circuito orientado positivo significa que D tiene un ciclo dirigido y naturalmente que tenga un cocircuito orientado positivo significa que D tiene un corte dirigido. Así podemos enunciar los siguientes corolarios.

Corolario 3.1.2. *Sea D una gráfica orientada tal que su gráfica subyacente, \underline{D} , es 2-conexa. Si D tiene un ciclo dirigido, entonces $T_{ci}(D)$ es conexa.*

Corolario 3.1.3. *Sea D una gráfica orientada tal que su gráfica subyacente, \underline{D} , es 2-conexa. Si D tiene un corte dirigido, entonces $T_{co}(D)$ es conexa.*

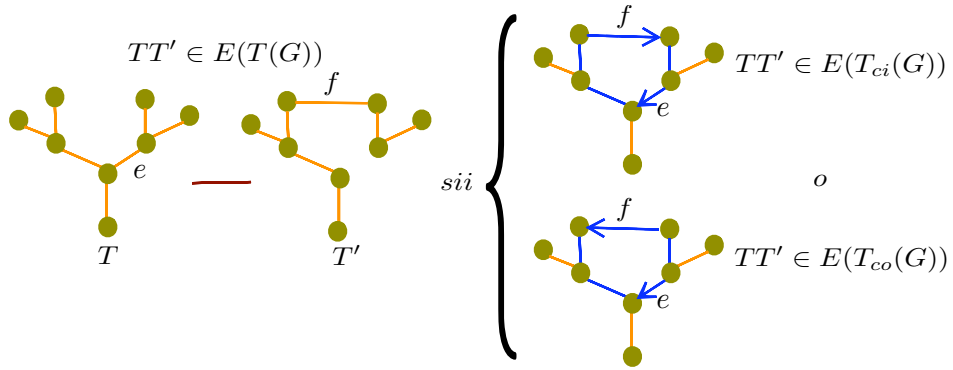


Figura 3.3. Partición de las aristas de $T(G)$

Por ultimo sabemos que:

Corolario 3.1.4. Si \underline{D} una gráfica 2-conexa, entonces $T_{ci}(D)$ es conexa o $T_{co}(D)$ es conexa.

El siguiente es un ejemplo de que la hipótesis del Corolario 3.1.2 y, por lo tanto del Teorema 2.3.1, es una condición suficiente pero no necesaria. La gráfica orientada D de la Figura 3.4 no tiene ciclos dirigidos y, sin embargo, su gráfica de árboles por adyacencias cíclicas es conexa.

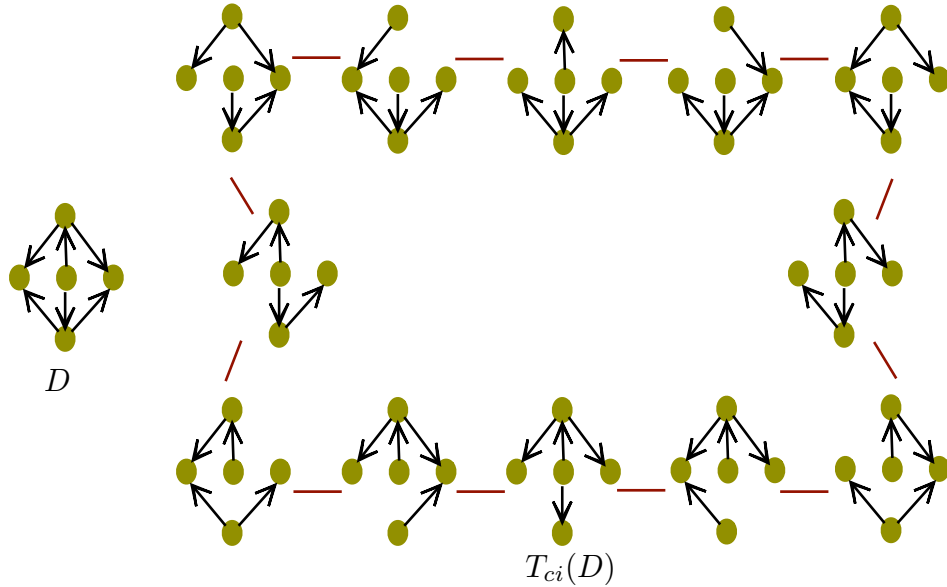


Figura 3.4.

3.2. El número cromático de $T_\phi(G)$ y de $T_{ci}(G)$

Sea $D = (V, E)$ una gráfica orientada con conjunto de flechas E . Una k -coloración ϕ de las flechas de D es una función $\phi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Diremos que la coloración ϕ es totalmente acíclica si $\phi(e) \neq \phi(f)$ si y solamente si existe un ciclo orientado C de D , que tiene como aristas a e y a f y tal que en cualquier orientación de C , e y f están en la misma dirección cíclica.

El índice cromático totalmente acíclico de D , $\chi'_{ac}(D)$, es el mínimo k tal que D tiene una coloración de las flechas totalmente acíclica.

Sean S^+ el conjunto de fuentes y S^- el conjunto de pozos de D .

Teorema 3.2.1. $\chi'_{ac}(D) \leq |V| - \max\{|S^+|, |S^-|\}$.

Demostración. Supongamos que D tiene por lo menos tantas fuentes como pozos. Numeremos los vértices de $V - S^+$ con los enteros $1, \dots, k$. La función $\varphi : E(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ definida por $\varphi(e) = i$ si $e = \overrightarrow{ji}$ para algún $j \neq i$ es totalmente acíclica. Entonces $\chi'_{ac}(D) \leq k = |V| - \max\{|S^+|, |S^-|\}$. Si D tiene más pozos que fuentes la prueba es análoga. \square

La cota del Teorema 3.2.1 es justa, un ciclo dirigido con n vértices tiene índice cromático totalmente acíclico n .

Los números cromáticos de $T(G)$ y de $T_l(G)$ fueron estudiados por Estivill-Castro et al. [6]. En dicho artículo prueban que $\chi(T(G)) \leq |E(D)|$. Usaremos la técnica de su demostración para obtener el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. *Sea D una gráfica orientada, $\chi(T_{ci}(D)) \leq \chi'_{ac}(D)$.*

Demostración. Si $\chi'_{ac}(D) = k$ sea $\varphi : E(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una k -coloración de flechas totalmente acíclica de D . Para cada árbol generador T de D definimos

$$c(T) = \sum_{a \in T} \varphi(a) \pmod{k}.$$

Si T y T' son adyacentes existe $e \in T - T'$ y $f \in T' - T$ tales que $T' = (T - e) + f$. De ahí que

$$\sum_{a \in (T-e)} \varphi(a) = \sum_{a \in (T'-f)} \varphi(a).$$

Como T y T' son adyacentes en $T_{ci}(D)$, $C(T \cup T')$ es un ciclo en el que e y f están en la misma dirección cíclica. Así $\varphi(e) \neq \varphi(f)$. Por lo tanto $c(T) \neq c(T')$. \square

Corolario 3.2.3. $\chi(T_{ci}(D)) \leq \chi'_{ac}(D) \leq |V| - \max\{|S^+|, |S^-|\}$.

Capítulo 4

La gráfica de árboles respecto a una familia de ciclos

En este capítulo estudiaremos a una subgráfica de la gráfica de árboles de un gráfica conexa G que ya se había definido y estudiado en [14].

Sea C una familia de ciclos de una gráfica conexa G . La **gráfica de árboles de G respecto a C** , $T(G, C)$, tiene como vértices a los árboles generadores de G y dos árboles T y T' son adyacentes si y solamente si son adyacentes en $T(G)$ y además $C(T \cup T') \in C$. En [14] se demostró que una condición necesaria para que $T(G, C)$ fuera conexa es que C genera al espacio de ciclos, sin embargo esta condición no fue suficiente. Para encontrar una condición suficiente se definieron las siguientes propiedades sobre la familia C .

Un ciclo σ de G tiene la **propiedad Δ^*** respecto a C si para todo unicyclo U de G que contenga a σ existen dos ciclos $\delta, \gamma \in C$ contenidos en $U + e$ para alguna $e \in E(G)$ tales que $\sigma = \delta \Delta \gamma$. Para una familia de ciclos C , la cerradura $cl_G(C)$ de C en G es el conjunto de ciclos que se obtiene de C añadiendo recursivamente nuevos ciclos de G que satisfacen la propiedad Δ^* hasta que no quede ningún ciclo que pueda ser añadido. Finalmente, C es **Δ^* -densa** si y solamente si $cl_G(C) = \Gamma(G)$. Demostraron que si C es una familia Δ^* -densa entonces $T(G, C)$ es conexa. En la primera sección daremos una nueva condición suficiente y en la segunda sección demostraremos que para ciertas familias de ciclos esta condición es también necesaria.

4.1. Nueva condición suficiente

Sean σ un ciclo y U un unicyclo de una gráfica conexa G , diremos que U es un σ -unicyclo de G si el único ciclo contenido en U es σ .

Sea G una gráfica conexa y C una familia de ciclos de G .

Para un entero positivo k y un σ -unicyclo U de G , (σ, U) tiene la **propiedad** Δ_k con respecto a una familia C si existe un conjunto de ciclos $X = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\} \subseteq C$ y un conjunto de aristas $Y = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\} \subseteq E(G) - E(U)$ que cumplen las siguientes propiedades:

(\mathcal{P}_1) X es una base de $\Gamma(U + Y)$

(\mathcal{P}_2) Si $\rho \in X$, entonces para cada arista $x \in E(\rho) - E(\sigma)$ existe un único $\rho' \in X$, tal que $\rho \neq \rho'$ y $x \in E(\rho')$.

(\mathcal{P}_3) Para cada arista $x \in E(\sigma)$ existe un único $\rho \in X$ tal que $x \in E(\rho)$.

Observacion 4.1.1. Si (σ, U) tiene la propiedad Δ_k para algún entero positivo k se tiene que $\sigma = \bigtriangleup_{i=0}^k \sigma_i$.

Demostración. La observación se sigue de que 1) cada arista de σ está en exactamente un ciclo de X y 2) cada arista que no es arista de σ y si es arista de alguno de los ciclos de X está en exactamente dos ciclos de X . \square

Diremos que un ciclo σ de G tiene la **propiedad** Δ^+ con respecto a C si para cada σ -unicyclo U de G , existe un entero positivo k tal que (σ, U) tiene la propiedad Δ_k con respecto a C .

La **cerradura superior** $cl_G(C)^+$ de la familia C en G es el conjunto de ciclos que se obtiene de C añadiendo sucesivamente nuevos ciclos de G que satisfagan la propiedad Δ^+ hasta que no quede ningún ciclo fuera del conjunto con la propiedad Δ^+ .

Observación 4.1.2. $cl_G(C)^+$ está bien definida.

Demostración. Supongamos que el resultado es falso y sean C' y C'' dos conjuntos distintos de ciclos de G que se obtienen al añadir sucesivamente nuevos ciclos de G que satisfacen la propiedad Δ^+ hasta que no quede ningún ciclo con la propiedad Δ^+ fuera de C' ni de C'' . Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ y ρ_1, \dots, ρ_m la sucesión de ciclos que se obtiene al añadir a C uno a uno los ciclos para obtener C' y C'' respectivamente. Sea k el mínimo entero tal que $\sigma_k \notin C''$. Notemos que $k \neq 1$ ya que $C \subseteq C''$ y como σ_1 tiene la propiedad Δ^+ respecto a C , también tiene la propiedad Δ^+ respecto a C'' . De ahí $D = C \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}\} \subseteq C''$. Como σ_k tiene la propiedad respecto a D entonces también la tiene respecto a C'' lo que es imposible. \square

Diremos que C es Δ^+ -densa si y solamente si $cl_G^+(C)$ es el conjunto de ciclos de G .

Proposición 4.1.3. Si C es una familia de ciclos de G es Δ^* -densa, entonces C es Δ^+ -densa.

Demostración. Un ciclo σ tiene la propiedad Δ^* con respecto a C si y solamente si (σ, U) tiene la propiedad Δ_1 respecto a C para cada σ -uniciclo U de G (Observación 4.1.1). Así σ tiene la propiedad Δ^+ respecto a C . Por lo tanto $cl_G(C) = cl_G^+(C)$ \square

Lema 4.1.4. Sea C una familia de ciclos de una gráfica conexa G , U un σ -uniciclo de G para algún ciclo $\sigma \notin C$ y k un entero positivo. Si (σ, U) tiene la propiedad Δ_k con respecto a C , entonces cada par de árboles generadores de U está conectado por una trayectoria en $T(G, C)$.

Demostración. Demostraremos este Lema por inducción sobre k . La prueba de la base se encuentra esencialmente contenida en la prueba del Lema 3.1 del artículo [14]. Sin embargo la volveremos a probar a continuación.

Sea U un σ -uniciclo de G tal que (σ, U) tiene la propiedad Δ_1 y sean T y T' dos árboles generadores de U . Existe una arista $e \notin E(U)$ y dos ciclos $\delta, \gamma \in C$ de $U + e$ tales que $\delta, \gamma \in C$ y $\sigma = \delta \Delta \gamma$. Sean $a \in E(T) - E(T')$ y $b \in E(T') - E(T)$ tales que $T' = (T - a) + b$.

Si $a \in E(\delta) - E(\gamma)$ y $b \in E(\gamma) - E(\delta)$, sea $Q = (T - a) + e$. Se sigue que $Q = (T' - b) + e$. Como el único ciclo de G contenido en $Q \cup T$ es δ y el único ciclo de G contenido en $Q \cup T'$ es γ , entonces Q es adyacente a T y a T' en $T(G, C)$. Por lo tanto encontramos un camino $\{T, Q, T'\}$ de T a T' en $T(G, C)$.

Si $a \in E(\gamma) - E(\delta)$ y $b \in E(\delta) - E(\gamma)$ podemos intercambiar γ por δ en el argumento anterior y encontramos también una TT' -trayectoria en $T(G, C)$.

Si $a, b \in E(\delta) - E(\gamma)$. Consideremos una arista $c \in E(\gamma) - E(\delta)$. Tomemos los árboles generadores $Q = (T - c) + e$ y $Q' = (T' - c) + e$. Notemos que Q es adyacente a T en $T(G, C)$ porque el único ciclo contenido en $Q \cup T$ es γ y que Q' es adyacente a T' en $T(G, C)$ puesto que el único ciclo contenido en $T' \cup Q'$ es γ . Aún más. Q es adyacente a Q' en $T(G, C)$ porque $Q' = (Q - a) + b$ y el único ciclo contenido en $Q \cup Q'$ es δ . Por lo tanto $\{T, Q, Q', T'\}$ es una trayectoria que conecta a T con T' en $T(G, C)$.

Finalmente, si $a, b \in E(\gamma) - E(\delta)$ intercambiamos γ con δ en el argumento anterior.

Supongamos que el resultado es cierto para todo entero positivo menor que k . Sea U un σ -uniciclo de G tal que (σ, U) tiene la propiedad Δ_k . Existe un conjunto de ciclos $X = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\} \subseteq C$ y un conjunto de aristas $Y = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$ de G que satisfacen (\mathcal{P}_1) , (\mathcal{P}_2) y (\mathcal{P}_3) .

Sean T y T' dos árboles generadores de U y $a, b \in E(U)$ tales que $T' = (T - a) + b$. Notemos que $\sigma_0 \cdots \Delta \cdots \sigma_k = \sigma$ (Observación 4.1.1). Existe al menos un ciclo $\rho \in X$ tal que $E(\rho) \cap E(\sigma) \neq \emptyset$. Se sigue que al menos una arista $e \in E(\rho) \cup Y$ es tal que $U + e$ contiene dos ciclos δ y γ tales que

$\delta\Delta\gamma = \sigma$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $e = e_{k-1}$.

Caso 1. $a \in E(\delta) - E(\gamma)$ y $b \in E(\gamma) - E(\delta)$.

Subcaso 1.1 $\delta \in X$

Podemos renombrar a los ciclos de X de tal manera que $\delta = \sigma_k$. Sea $U' = (U - a) + e_{k-1}$. Es claro que U' es un γ -uniciclo de G . Sea $X' = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}\}$ y $Y' = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-2}\}$. Demostraremos que (γ, U') tiene la propiedad Δ_{k-1} .

(a) γ, U', X' y Y' tienen la propiedad (\mathcal{P}_1) :

Si $x \in E(\rho)$, para alguna $\rho \in X'$, entonces $x \in E(U) \cup Y = (E(U') \cup Y') \cup a$. Notemos que $a \in E(\sigma_k) \cap E(\sigma)$, entonces el único ciclo en X que contiene a a es σ_k ya que σ, U, X y Y satisfacen la propiedad (\mathcal{P}_3) . Se sigue que $x \neq a$, así que $x \in E(U') \cup Y'$. Entonces cada ciclo en X' es un ciclo de $U' + Y'$. La dimensión de $\Gamma(U' \cup Y')$ es k y X' es una base de $\Gamma(U' + Y')$.

(b) γ, U', X' y Y' satisfacen (\mathcal{P}_2) :

Sea $\rho \in X'$ y $x \in E(\rho) - E(\gamma)$. Si $x \in E(\sigma)$, $x \in E(\sigma) - E(\gamma)$. Como $\sigma = \gamma\Delta\sigma_k$ y σ, U, X y Y satisfacen la propiedad (\mathcal{P}_3) , el único ciclo en X que contiene x es σ_k , lo cual es imposible puesto que $\rho \neq \sigma_k$ y $\rho \in X$. Por lo tanto $x \notin E(\sigma)$ y $x \notin E(\sigma_k)$ por que $\sigma = \sigma_k\Delta\gamma$. Como σ, U, X y Y satisfacen la propiedad (\mathcal{P}_2) , existe un único ciclo $\rho' \in X$ tal que $x \in E(\rho')$. Claramente $\rho' \neq \sigma_k$, por lo tanto $\rho' \in X'$.

(c) γ, U', X', Y' tienen la propiedad (\mathcal{P}_3) :

Sea $x \in \sigma$. Si $x \in E(\gamma)$, entonces existe un único ciclo $\rho \in X$ tal que $x \in E(\rho)$ ya que σ, U, X y Y tienen la propiedad (\mathcal{P}_3) . Como $\sigma = \delta\Delta\gamma$, entonces $\rho \neq \sigma_k$. Se sigue que $\rho \in X'$. Si $x \in E(\gamma) - E(\sigma)$ entonces $x \in E(\sigma_k)$. Sabemos que σ, U, X y Y tienen la propiedad (\mathcal{P}_2) , así que existe un único ciclo $\rho \in X - \sigma_k = X'$ cuyas aristas contienen a x .

Así, hemos demostrado que (γ, U') tiene la propiedad Δ_{k-1} . Sea $Q = (T - a) + e_{k-1}$. Como Q y T' son árboles generadores de U' , por la hipótesis de inducción existe una trayectoria entre ellos en $T(G, C)$. Y como Q es adyacente a T en $T(G, C)$ entonces existe una TT' -trayectoria en $T(G, C)$.

Subcaso 1.2 $\gamma \in X$.

Este caso se prueba de la misma manera que el anterior si intercambiamos γ por δ y a por b .

Subcaso 1.3 $\delta, \gamma \notin X$.

Como X es una base de $\Gamma(U + Y)$, podemos demostrar (reordenando a los elementos de X) que existe un entero $1 \leq r \leq k - 2$ tal que $\sigma_0 \Delta \dots \Delta \sigma_r = \delta$. Como $\delta \Delta \gamma = \sigma = \sigma_0 \Delta \dots \Delta \sigma_k$ (Observación 4.1.1), se sigue que $\gamma = \sigma_{r+1} \Delta \dots \Delta \sigma_k$.

Sea $A = \{\sigma_0, \dots, \sigma_r\}$ y $B = \{\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_k\}$. Si una arista $e_i \in Y - e_{k-1}$ es tal que $e_i \in E(\rho)$ para algún ciclo $\rho \in A$ y $e_i \in \rho'$ para algún ciclo $\rho' \in B$ entonces $e_i \in E(\delta) \cap E(\gamma)$. Como $E(\delta) \cap E(\gamma) \subseteq E(U + e_{k-1})$ entonces $e_i = e_{k-1}$ lo que es imposible. Por lo tanto A y B inducen una partición de las aristas en $Y - e_{k-1}$.

Así, podemos reordenar a las aristas en $Y - e_{k-1}$ de tal forma que exista un entero $0 \leq t \leq k - 2$, tal que $A' = \{e_0, \dots, e_{t-1}\}$ es el conjunto de aristas en $Y - e_{k-1}$ de los elementos de A y $B' = \{e_t, \dots, e_{k-2}\}$ es el conjunto de aristas en $Y - e_{k-1}$ de los elementos de B .

Sean $U_1 = (U - b) + e_{k-1}$ y $U_2 = (U - a) + e_{k-1}$. Notemos que U_1 es un δ -uniciclo de G y que U_2 es un γ -uniciclo de G . Demostraremos que U_1 y U_2 tienen la propiedad Δ_r y Δ_{k-r+1} respectivamente.

Notemos que b no es arista de algún ciclo de A y que a no es arista de algún ciclo de B . Esto significa que cada ciclo en A es un ciclo de $U_1 + A'$ y cada ciclo en B es un ciclo de $U_2 + B'$. Se sigue que A es un conjunto

linealmente independiente de $\Gamma(U_1 + A')$ y que B es un conjunto linealmente independiente de $\Gamma(U_2 + B')$. De esta manera $|A| \leq |A'| + 1$ y $|B| \leq |B'| + 1$. Esto significa que $r + 1 \leq t + 1$ y $(k + 1) - (r + 1) \leq ((k - 1) - t) + 1$. Por lo tanto $t \leq r \leq t$, es decir $r = t$.

(a) δ, U_1, A, A' satisfacen (\mathcal{P}_1) :

Como la dimensión de $\Gamma(U_1 + A')$ es $t + 1$ y A es un conjunto linealmente independiente de $\Gamma(U_1 + A')$ con $t + 1$ ciclos, entonces A es una base de $\Gamma(U_1 + A')$.

(a') γ, U_1, B, B' satisfacen (\mathcal{P}_1) :

B es un conjunto linealmente independiente con $k - t$ ciclos por lo tanto es una base de $\Gamma(U_2 + B')$.

(b) δ, U_1, A, A' satisfacen (\mathcal{P}_2) :

Sean $\rho \in A$ y $x \in E(\rho) - E(\delta)$. Si $x \in E(\sigma) \cap ((E(\rho) - E(\delta)))$, existe un único ciclo en X que contiene a x , ya que σ, U, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_3) . Entonces, ρ es el único ciclo en X que contiene a x y también es el único ciclo en A que contiene a x . Entonces, x es una arista en $\Delta_{\rho \in A} \rho = \delta$ lo que es imposible. Se sigue que $x \notin E(\sigma)$. Como σ, U, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_2) , existe un único $\rho' \in X$ tal que $\rho' \neq \rho$ y $x \in E(\rho')$. Si $\rho' \in B$ entonces $x \in E(\gamma) \cap E(\delta)$ lo que es imposible. Por lo tanto, $\rho' \in A$.

(b') γ, U_2, B y B' satisfacen (\mathcal{P}_2) :

El resultado se sigue de (b) si intercambiamos A con B y γ con δ .

(c) δ, U_1, A y A' satisfacen (\mathcal{P}_3) :

Sea $x \in E(\delta)$. Si $x \in E(\sigma)$ existe un único ciclo $\rho \in X$ tal que $x \in E(\rho)$ ya que σ, U, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_3) . Como $x \in E(\delta)$, entonces $\rho \in A$. Si $x \notin E(\sigma)$, entonces $x \in E(\gamma) \cap E(\delta)$. Como $\delta = \Delta_{\rho \in A} \rho$, entonces $x \in E(\rho)$ para algún $\rho \in A$ y como $\gamma = \Delta_{\rho \in B} \rho$, entonces $x \in E(\rho')$ para algún $\rho' \in B$.

La propiedad Δ_k de (σ, U) con respecto a C nos dice que existen a lo más dos ciclos en X que contienen a x . Por lo tanto, si $x \in E(\delta)$ existe un único ciclo $\rho \in A$ tal que $x \in E(\rho)$.

(c') γ, U_2, B y B' satisfacen (\mathcal{P}_3) :

Se sigue del argumento de (c) al intercambiar δ con γ y A con B .

Por lo tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción a (δ, U_1) y a (γ, U_2) .

Sea $R = (T - a) + e_{k-1} = (T' - b) + e_{k-1}$. Como R es un árbol generador de U_1 y U_2 , existe una trayectoria de T a R y una trayectoria de R a T' en $T(G, C)$ y, por lo tanto existe una trayectoria entre T y T' en $T(G, C)$.

Caso 2. $a \in E(\gamma) - E(\delta)$ y $b \in E(\delta) - E(\gamma)$.

Este caso se puede probar como el Caso 1, si intercambiamos a con b .

Caso 3. $a, b \in E(\delta) - E(\gamma)$.

Sea $c \in E(\gamma) - E(\delta)$. Existe el árbol generador $Q = (T - a) + c = (T' - b) + c$ de U . Si aplicamos el Caso 1 a los árboles T y Q por una parte y a los árboles Q y T' por otra, tenemos que T y Q están conectadas por una trayectoria en $T(G, C)$ y también existe una trayectoria entre Q y T' en $T(G, C)$. Por lo tanto existe una trayectoria entre T y T' en $T(G, C)$.

Caso 4. $a, b \in E(\gamma) - E(\delta)$.

La prueba de este caso es análoga a la del Caso 3, si intercambiamos δ con γ .

□

Teorema 4.1.5. *Sea C un conjunto de ciclos de una gráfica conexa G . La gráfica $T(G, C)$ es conexa si y solamente si $T(G, cl_G^+(C))$ es conexa.*

Demostración. Si $T(G, C)$ es conexa, entonces $T(G, cl_G^+(C))$ es conexa ya que $C \subseteq cl_G^+(C)$.

Sea $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ la sucesión de ciclos que se obtienen de añadir a C los ciclos para obtener $cl_G^+(C)$. Sea $C_i = C \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $T(G, C_i)$ es conexa para algún $1 \leq i \leq n$. Como σ_i tiene la propiedad Δ^+ con respecto a C_{i-1} , para cada σ_i -uniciclo U de G existe un entero positivo k tal que (σ_i, U) tiene la propiedad Δ_k con respecto a C_{i-1} . Sea T y T' dos árboles generadores de G tales que $T \cup T'$ es un σ_i -uniciclo. Por el Lema 4.1.4, existe una TT' -trayectoria en $T(G, C_{i-1})$ y por lo tanto $T(G, C_{i-1})$ es conexa. Hemos probado que para cualquier $2 \leq i \leq n$, $T(G, C_i)$ es conexa si y solamente si $T(G, C_{i-1})$ es conexa. Por lo tanto, si $T(G, cl_G^+(C))$ es conexa, entonces $T(G, C)$ es conexa.

□

Corolario 4.1.6. *Si C es una familia de ciclos de G Δ^+ -densa, entonces $T(G, C)$ es conexa.*

Demostración. Si C es Δ^+ -densa, entonces $T(G, cl_G^+(C)) = T(G)$ que es una gráfica conexa. Por el Teorema 4.1.5, $T(G, C)$ es conexa. □

4.2. Una familia especial de ciclos

Sean G una gráfica conexa, A_x el conjunto de árboles generadores de G que contienen a x y C una familia de ciclos de G tal que $T(G, C)$ es conexa. Si T y T' son árboles generadores de G , denotaremos por $d_C(T, T')$ a la distancia de T a T' en $T(G, C)$. Para un árbol generador T de G tal que $x \notin E(T)$, la distancia $d_C(T, A_x)$ de T a A_x en $T(G, C)$ es el mínimo de todas las distancias $d_C(T, R)$ donde $R \in A_x$.

Lema 4.2.1. *Sea C una familia de ciclos de una gráfica conexa G tal que cada arista de G es una arista de a lo más dos ciclos de C . Sea U un uniciclo de un ciclo σ de G que no es un ciclo en C . Si $T(G, C)$ es conexa, entonces (σ, U) tiene la propiedad Δ_k para algún entero positivo k .*

Demostración. Sea T un árbol generador de U , y $x = E(U) - E(T)$. Como $T(G, C)$ es conexa, entonces existe un árbol generador T_x tal que la trayectoria más corta entre T y T_x tiene longitud $d_C(T, A_x)$. Demostraremos por inducción sobre $d_C(T, T_x)$ que (σ, U) tiene la propiedad Δ_k para algún entero k .

Base: $d_C(T, T_x) = 2$.

Sea S un árbol generador de G tal que $\{T, S, T_x\}$ es la trayectoria más corta en $T(G, C)$ entre T y T_x . Como T es adyacente a S en $T(G, C)$, existe las aristas $a \in E(T) - E(S)$ y $e \in E(S) - E(T)$ y el ciclo $\delta \in C$ tales que $S = (T - a) + e$ y con la propiedad de que $S \cup T$ es un δ -uniciclo de G . Por otra parte, S es adyacente a T_x en $T(G, C)$, por lo que existen $b \in E(S) - E(T_x)$ y $\gamma \in C$ tal que $T_x = (S - b) + x$ y $T_x \cup S$ es un γ -uniciclo de G .

Notemos que $S \notin A_x$ por lo que $x \in E(\gamma) - E(\delta)$. Por ello, $\delta \neq \gamma$ y $U + e$ contiene tres ciclos: δ , γ y σ todos ellos diferentes. De esta forma $\sigma = \delta \Delta \gamma$. Concluimos que (σ, U) tiene la propiedad Δ_1 respecto a C .

Hipótesis inductiva:

Sea $\gamma \notin C$ y V un γ -uniciclo de G . Si existe un árbol generador R de V tal que $R + z = V$ para alguna arista $z \in E(V) - E(R)$ y $d_C(R, A_z) \leq d$, entonces (γ, V) tiene propiedad Δ_s para algún entero positivo s .

Sea U un σ -uniciclo de G para algún ciclo $\sigma \notin C$. Supongamos que existe un árbol generador T tal que $T + x = U$ y $d_C(T, A_x) = n$, entonces probaremos que (σ, U) tiene la propiedad Δ_k para algún entero positivo k .

Sea T_x un árbol generador de U tal que $d_C(T, T_x) = d_C(T, A_x)$ y $\{T = T_0, T_1, \dots, T_n = T_x\}$ es una TT_x -trayectoria de longitud n en $T(G, C)$.

Antes que nada, existe $a \in E(T) - E(T_1)$, $b \in E(T_1) - E(T)$ y un ciclo $\delta \in C$ tal que $T_1 = (T - a) + b$ y $T \cup T_1$ es un δ -uniciclo de G ya que T y T_1 son adyacentes en $T(G, C)$.

Como $x \notin E(T_1)$, $d_C(T_1, A_x) = n - 1$. Sea γ el único ciclo en $V = T_1 + x$, por la hipótesis de inducción, (γ, V) tiene la propiedad Δ_s para algún entero s . Eso implica que existe un conjunto de ciclos $X = \{\gamma_0, \dots, \gamma_s\} \subseteq C$ y un conjunto de aristas $\{e_0, \dots, e_{s-1}\} \subseteq E(G) - E(V)$ tal que γ, V, X y Y satisfacen las propiedades (\mathcal{P}_1) , (\mathcal{P}_2) y (\mathcal{P}_3) .

Caso 1. $\gamma = \sigma$.

Si $b \notin E(\rho)$ para cualquier $\rho \in X$ entonces $E(\rho) \subseteq (E(V) - b) \cup E(Y) = E(U) \cup E(Y)$. Así, (σ, U) tiene la propiedad Δ_s debido a que σ, U, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_1) , (\mathcal{P}_2) y (\mathcal{P}_3) .

Entonces podemos asumir que $b \in E(\rho)$ para algún $\rho \in X$. Claramente $b \notin E(\sigma)$ ya que $b \notin E(U)$ y U contiene a σ . Como γ, V, X y Y satisfacen la propiedad (\mathcal{P}_2) existe $\rho' \in X$ tal que $b \in E(\rho')$. Como b es una arista de δ y b es una arista de a lo más dos ciclos de C podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\rho = \delta$. Como $a \in E(\delta) - E(V)$, $a = e_t$ para algún $0 \leq t \leq s - 1$. Entonces, no es difícil probar que (σ, U) tiene la propiedad Δ_s usando el conjunto de ciclos X y el conjunto de aristas $(Y - a) \cup b$.

Caso 2. $\rho \neq \sigma$.

En este caso $U + b$ contiene exactamente tres ciclos σ, δ, γ . Como $b \notin E(\sigma)$, entonces $b \in E(\delta) \cap E(\gamma)$ y $\delta \Delta \gamma = \sigma$.

Subcaso 2.1. $a \notin E(\rho)$ para algún $\rho \in X$.

Sea $X' = X \cup \delta$ y $Y' = Y \cup a$.

Demostraremos que (σ, U) tiene la propiedad Δ_{s+1} usando a los conjuntos X' y Y' .

(a) σ, U, X' y Y' satisfacen (\mathcal{P}_1) :

Como δ es el único ciclo en X' que contiene a a , entonces X' es un conjunto linealmente independiente de $\Gamma(G)$. Notemos que cada ciclo en X' es un ciclo

de $U + Y'$ y $\Gamma(U + Y')$ tiene dimensión $s + 1$, entonces X' es una base de $\Gamma(U + Y')$.

(b) σ, U, X' y Y' satisfacen (\mathcal{P}_2) :

Sea $x \in E(\rho) - E(\sigma)$ para algún $\rho \in X$. Si $x \notin E(\gamma)$ existe $\rho' \in X$ tal que $x \in E(\rho')$ ya que γ, V, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_2) . Si $x \in E(\gamma)$ entonces $x \in E(\delta)$ por que $\sigma = \delta\Delta\gamma$. Se sigue que si $x \in E(\rho)$ entonces x es una arista de por lo menos dos ciclos de X' . Como cada arista está en a lo más dos ciclos de C , x es arista de exactamente dos ciclos en X' . En otras palabras, si $x \in E(\rho)$ para algún $\rho \in X'$ existe un único ciclo $\rho' \in X'$ tal que $x \in E(\rho')$.

(c) σ, U, X' y Y' satisface (\mathcal{P}_3) :

Sea $x \in E(\sigma)$. Si $x \notin E(\delta)$, entonces $x \in E(\gamma)$ ya que $\sigma = \delta\Delta\gamma$. Como γ, V, X , y Y satisfacen (\mathcal{P}_3) existe un único ciclo $\rho \in X$ tal que $x \in E(\rho)$. Por lo tanto, existe un único ciclo $\rho \in X'$ tal que $x \in E(\rho)$ debido a que $x \notin E(\delta)$.

Ahora supongamos que $x \in E(\delta)$, entonces $x \notin E(\gamma)$ ya que $\sigma = \delta\Delta\gamma$. Si $x \in E(\rho)$ para algún $\rho \in X$, entonces existe $\rho' \in X$ tal que $x \in E(\rho')$ ya que γ, V, X y Y satisfacen la propiedad (\mathcal{P}_2) . Entonces x es una arista de δ, ρ y ρ' , lo que es imposible puesto que x no puede ser una arista de tres ciclos en C . Por lo tanto, el único ciclo en X' que contiene a x es δ .

Subcaso 2.2. $a \in E(\rho)$ para algún $\rho \in X$.

En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = e_{s-1}$. Por la propiedad Δ_s de (γ, V) , a es una arista de exactamente dos ciclos en X . Como $a \in E(\delta)$ y a es una arista de a lo más dos ciclos de C , entonces podemos asumir que $\delta = \gamma_s$. Sea $X' = X - \gamma_s$ y $Y' = Y - e_{s-1}$. Probaremos que (σ, U) tiene la propiedad Δ_{s-1} si usamos al conjunto de ciclos X' y al conjunto de aristas Y' .

(a) σ, U, X' y Y' satisfacen (\mathcal{P}_1) :

Como $b \in E(\delta) - E(\sigma)$, y $\sigma = \delta\Delta\gamma$ entonces $b \in E(\delta) \cap E(\gamma)$. Por lo tanto,

existe un único ciclo $\rho \in X$ que contiene a b ya que γ, V, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_3) . Por lo tanto, $\delta = \rho$. Se sigue que $E(\rho) \subseteq E(V+Y) = (E(U) \cup E(Y')) - b$ para cada $\rho \in X'$. Entonces, es claro que X' es una base de $\Gamma(U + Y')$.

(b) σ, U, X' y Y' satisfacen (\mathcal{P}_2) :

Sea $x \in E(\rho) - E(\sigma)$ para algún $\rho \in X'$. Como cada arista en $E(\gamma) - E(\sigma)$ es una arista de δ , se sigue que $E(\gamma) \cap E(\rho) = \emptyset$ ya que γ, V, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_3) . Por lo tanto, $x \notin E(\gamma)$. Se sigue que existe un único $\rho' \in X$ tal que $x \in E(\rho')$ ya que V, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_2) . Si $\rho' = \delta$, entonces $x \in E(\delta) - (E(\sigma) \cup E(\gamma))$ lo que es imposible porque $\sigma = \delta \Delta \gamma$. Así $\rho' \in X'$.

(c) σ, U, X' y Y' satisfacen (\mathcal{P}_3) :

Sea $x \in E(\sigma)$. Si $x \in E(\sigma) \cap E(\gamma)$, existe un único $\rho \in X$ tal que $x \in E(\rho)$ ya que γ, V, X y Y satisfacen (\mathcal{P}_3) . Claramente $\rho \neq \delta$ ya que $E(\sigma) \cap E(\gamma) \cap E(\delta) = \emptyset$. Si $x \in E(\sigma) - E(\gamma) = E(\sigma) \cap E(\delta)$. Como $\delta \in X$ y γ, V, X y Y satisfacen propiedad (\mathcal{P}_2) , existe un único $\rho' \in X, \rho' \neq \delta$ tal que $x \in E(\rho')$.

Por lo tanto, hemos demostrado que existe un único $\rho \in X'$ tal que $x \in E(\rho)$.

□

Teorema 4.2.2. *Sea C una familia de ciclos de G tal que cada arista de G es una arista de a lo más dos ciclos en C . La familia C es Δ^+ -densa si y solamente si $T(G, C)$ es conexa.*

Demostración. Si C es Δ^+ -densa por el Teorema 4.1.5, $T(G, C)$ es conexa. Supongamos que $T(G, C)$ es conexa para una familia C de ciclos tal que cada arista de G está en a lo más dos ciclos en C , entonces cada $\sigma \notin C$ y cada σ -uniciclo U de G es tal que (σ, U) tiene la propiedad Δ_k para algún entero positivo k (Lema 4.2.1). Se sigue que cada ciclo $\sigma \notin C$ tiene la propiedad Δ^+ con respecto a C . Entonces podemos concluir que C es Δ^+ -densa.

□

Preguntas

En este apéndice se enunciarán problemas que nos hemos planteados al realizar esta tesis.

- Problema 1. ¿Cuál es el diámetro de $\mathcal{B}[N, \phi]$ para un matroide N y una bicoloración efectiva de sus aristas ϕ ?
- Problema 2. ¿Cuáles son los matroides sin circuitos positivos que cumplen que su gráfica de bases de adyacencias cíclicas es conexa?
- Problema 3. ¿Se podría acotar el número cromático de $T_{co}(D)$ con cotas mejores de $|E(D)|$ y el número de clanes de D ?
- Problema 4. ¿Será cierto que $T(G, C)$ es conexa si y solamente si C es Δ^* -densa?
- Problema 5. Más débil que la anterior: ¿Será cierto que C es Δ^+ -densa si C es Δ^+ -densa?

Índice de símbolos

B^* , 4	N/X , 4
\mathcal{B} , 2	N^* , 4
$\mathcal{B}(N, \mathcal{A})$, 32	N_G , 11
$\mathcal{B}[N, \phi]$, 19	\mathcal{I} , 1
$\mathcal{B}[N]$, 19	K_n , 7
$\mathcal{B}_{ci}[M]$, 33	$r_N(X)$, 5
$\mathcal{B}_{co}[M]$, 35	sg_X , 13
$C(B, B')$, 3	$T(G)$, 39
$C(B, e)$, 3	$T(G, C)$, 32
$C(e, T)$, 9	$T(G, \phi)$, 40
\mathcal{C} , 2	$T_{ci}(D)$, 40
$co(E, T)$, 10	$T_{co}(D)$, 40
$E(V_1, V_2)$, 8	$-X$, 12
f_x , 1	$X\Delta Y$, 1
$G + F$, 7	$X \perp Y$, 14
$G - F$, 7	$X - Y$, 1
G^e , 7	$\Gamma(G)$, 11
M_D , 16	$\chi(G)$, 7
\underline{M} , 13	$\chi'(G)$, 43
N , 4	$\chi'_{ac}(D)$
$N \setminus X$, 4	

Índice alfabético

- Adyacencias, 12
- Arbol, 15
- Aristas, 12
- Axioma
 - de eliminación, 9
 - de intercambio, 8
- Axiomas
 - de independencia, 7
 - de las bases, 8
 - de los circuitos, 9
- Bases, 8
- Bicoloración, 13
- Bicoloración efectiva, 12
- Cerradura
 - Δ^+ , 52
- Ciclo, 14
- Ciclo
 - dirigido, 21
 - orientado, 21
- Circuito
 - orientado, 19
 - subyacente, 19
- Circuitos, 8
- Cocircuitos, 10
- Coloración
 - efectiva, 13
 - propia de aristas, 13
 - propia de vértices, 13
 - totalmente acíclica, 49
- Complemento de una gráfica, 13
- Conjunto
 - orientado
 - positivo, 18
 - base, 8
 - orientado, 18
 - orientado
 - Elementos negativos, 18
 - elementos positivos, 18
 - opuesto, 18
- Contracción de subconjuntos, 10
- Corte, 14
- Corte
 - dirigido, 21
 - orientado, 21
- Diferencia Simétrica, 7
- Dual
 - de un matroide, 10
 - Matroide orientado, 20
- Elementos
 - contraíbles, 12
 - paralelos, 28
- Eliminación de subconjuntos, 10

-
- Espacio de ciclos, 17
 - Familia Δ^+ -densa, 53
 - Flecha, 20
 - Gráfica
 - acíclica, 14
 - 2-conexa, 14
 - conexa, 14
 - definición, 12
 - k-conexa, 14
 - Gráfica de árboles, 45
 - Gráfica de árboles
 - por adyacencias bicoloreadas, 46
 - por adyacencias cíclicas, 46
 - por adyacencias cocíclicas, 46
 - respecto a una familia de ciclos, 38
 - Gráfica de bases, 25
 - Gráfica de bases
 - por adyacencias bicoloreadas, 25
 - por adyacencias cíclicas, 39
 - por adyacencias cocíclicas, 41
 - respecto a una familia de circuitos, 38
 - Gráfica orientada
 - definición, 20
 - Gráfica subyacente, 20
 - Grafica
 - disconexa, 14
 - Independientes, 8
 - Índice cromático, 13
 - Índice cromático
 - totalmente acíclico, 49
 - Isomorfismo de gráficas, 12
 - Lazo, 28
 - Matroide
 - conexo, 11
 - de una gráfica, 17
 - definición, 7
 - disconexo, 11
 - Matroide orientado
 - de una gráfica orientada, 22
 - definición, 18
 - Matroide subyacente, 19
 - Número cromático, 13
 - Orientación
 - de un conjunto, 18
 - del conjunto de circuitos, 18
 - Ortogonalidad, 20
 - Propiedad
 - Δ^+ , 52
 - Δ_k , 52
 - Rango, 11
 - Restricción
 - a un conjunto, 10
 - de una función a un conjunto, 7
 - Subgráfica
 - definición, 13
 - generadora, 13

Subgráfica orientada, 21

Trayectoria

definición, 14

longitud, 14

Trayectoria dirigida, 21

Uniciclo

σ -uniciclo, 52

Vértices, 12

Bibliografía

- [1] B. Alspach and G. Liu. Paths and cycles in matroid base graph. *Graphs and Combin.*, 5(1):207–211, 1986.
- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented Matroids*. Cambridge Press, New York, 2nd edition, 1999.
- [3] H.J. Broersma and X. Li. The connectivity of the leaf-exchange spanning tree graph of a graph. *Ars. Combin.*, 43:225–231, 1996.
- [4] R. Cummins. Hamilton circuits in tree graphs. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 13:82–90, 1996.
- [5] D. Diestel. *Graph Theory*, chapter 1, pages 2–26. Springer, 1997.
- [6] V. Estivill-Castro, M. Noy, and J. Urrutia. On the chromatic number of tree graphs. *Discrete Math.*, 223(1–3):363–366, 2000.
- [7] L. Guizhen. The connectivities of adjacent tree graph. *Acta Mathematicae Appl. Sinica.*, 3(4):113–117, 1987.
- [8] F. Harary, R. Mokken, and M Plantholt. Interolation theorem for diameters of spanning trees. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 30(7):429–432, 1983.
- [9] K. Heinrich and L. Guizhen. A lower bound on the number of spanning trees with k end- vertices. *J. Graph Theory*, 1:95–100, 1988.
- [10] C.A. Holzmann and F. Harary. On the tree graph of a matroid. *SIAM J. Appl. Math.*, 22:187–193, 1972.

- [11] Bondy J.A. and Murty U.S.R. *Graph Theory with Applications*. Elsevier, North-Holland, 1976.
- [12] T. Kamae. *The existence an generation of a hamilton circuit in a tree graph*. PhD thesis, Illinois Univ. Urbana Coord. Sience Lab., September 1996.
- [13] G. Kishi and Y. Kajtani. On hamilton circuits in tree graphs. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 15:42–50, 1968.
- [14] X. Li, V. Neumann-Lara, and E. Rivera-Campo. The tree graph defined by a set of cycles. *Discrete Math.*, 271:303–310, 2003.
- [15] S.B. Maurer. Intervals in matroid basis graphs. *Discrete Math.*, 11:147–159, 1975.
- [16] J.G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [17] F.J. Zhang and Z. Chen. Conectivity of (adjacency) tree graphs. *J. Xinjiang Univ. Natur. Science*, 3(4):1–5, 1983.