



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tráfico Vehicular: Un Estudio Probabilístico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
JORGE CABALLERO ENRÍQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ARMANDO GARCÍA MARTÍNEZ

2009





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. Herramienta de probabilidad	7
1.2. Resultados generales	10
2. Teoría de colas	17
2.1. Definiciones básicas	17
2.2. Tráfico como proceso de Poisson homogéneo	18
2.3. Salidas con distribución desconocida	24
2.4. Servicio regular	29
2.5. Periodo de ocupación	31
2.6. Valores medios	37
3. Características del tráfico vehicular	41
3.1. El diagrama fundamental de tráfico	41
3.2. Deducción del diagrama fundamental	43
3.3. Modelos de vehículos consecutivos	46
3.4. Dos modelos empíricos	48
3.5. Comparación de las relaciones flujo-densidad	49
3.6. Una quinta condición	50
4. Arreglos de vehículos	53
4.1. Función de densidad inicial	53
4.2. Relaciones entre métodos de conteo	57
4.3. El proceso Gama de tiempos	62
4.4. Traslación de distribuciones de espaciamiento	68
4.5. Distribuciones de gaps compuestos	71

4.6. Distribuciones de velocidad	73
4.7. Teoría de renovación	76
4.8. Tráfico como variable continua	77
4.9. Gaps dependientes	79
5. Problemas de retrasos	81
5.1. Peatones retrasados por t.v.	81
5.2. Retraso por t.v. con llegadas Poisson	84
5.3. Peatones con llegadas Poisson	87
5.4. Bloqueos	88
Código de simuladores	93
Simulador de un tope	96
Simulador de un cuello de botella	111
Simulador de un paso peatonal	126
Conclusiones	145
Bibliografía	149

Introducción

Esta tesis presenta un estudio del tráfico vehicular (t.v), principalmente desde un punto de vista probabilístico. Utilizamos resultados básicos de teoría de colas, así como de procesos estocásticos.

El estudio teórico debería ser comprensible para cualquier estudiante de los últimos semestres de la carrera de Actuaría.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es analizar el comportamiento del tráfico vehicular, desde un punto de vista poco común, ya que en general este fenómeno es analizado a través de la teoría de redes. Con esto brindamos al lector herramientas para analizar el tráfico vehicular desde distintos puntos de vista.

Los factores que consideramos como variables aleatorias en dicho estudio teórico, quedarán completamente definidos por la transformada de Laplace asociada, o bien, por la función generadora de probabilidad, que definimos en el capítulo de preliminares.

En el capítulo de teoría de colas presentamos las bases de dicha teoría para quien no las conoce, así como generalizaciones de la misma enfocadas al estudio de tráfico vehicular.

Posteriormente, presentamos el diagrama fundamental del tráfico, que es una de las herramientas más utilizadas para el análisis del tráfico vehicular. También presentamos ciertos modelos obtenidos bajo diferentes supuestos, así como su comparación y un breve análisis de cuándo debe ser utilizado cada modelo.

En el capítulo 5 tomamos en cuenta el tráfico vehicular cuando tomamos una serie de vehículos, que en este estudio nombramos arreglos de vehículos, nombre que hace alusión a arreglos de datos en el lenguaje de programación C++.

Finalmente en el capítulo 6 presentamos algunos resultados relativos a los retrasos en la vía. Estos pueden ser causados por diferentes situaciones y

factores.

Con los resultados teóricos que desarrollamos en este estudio, podemos plantear problemas de optimización, así como proponer posibles soluciones a los problemas de congestión. Proponemos dichas posibles soluciones en el capítulo de conclusiones.

Además del estudio teórico, presentamos simuladores gráficos, hechos con C++. Estos tienen la finalidad de proporcionar una forma gráfica, en la que se pueda apreciar cualitativamente el comportamiento del tráfico vehicular. En estos analizamos situaciones específicas del tráfico.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo hacemos un breve resumen de la herramienta más importante utilizada en esta tesis.

En la mayoría de los casos incluimos la demostración de los teoremas, aunque en algunas ocasiones, debido a la complejidad de las mismas y a la finalidad de la tesis, omitimos la demostración de algunos de los resultados.

Así pues iniciamos con una exposición de herramienta probabilística relativamente avanzada.

1.1. Herramienta de probabilidad

Al modelar el comportamiento de una cola, es natural suponer que las llegadas de los “clientes” a la cola son de tipo Poisson con tasa de llegadas λ . Una de las razones más importantes para suponer esta distribución para las llegadas a una cola, es que es una distribución discreta cuya variable toma valores no negativos. Esto es importante, ya que necesitamos calcular la probabilidad de n llegadas a la cola en un intervalo de tiempo. De ahí que n deba ser discreta y definida sobre los enteros no negativos.

Una propiedad fundamental, que se obtiene de la suposición de que las llegadas a la cola tienen una distribución Poisson(λ), es que obtenemos una distribución del tiempo entre llegadas (que llamaremos tiempo interarribo) exponencial con el mismo parámetro λ . Por ser éste un resultado básico de procesos estocásticos omitimos la demostración.

Suponemos también, de manera análoga, que las salidas de la cola tienen distribución Poisson(μ), y por esto el tiempo entre salidas será distribuido

exponencial(μ).

Para simplificar la notación en secciones posteriores, definimos la función gama incompleta.

Definición. Definimos la función gama incompleta con parámetros n y x como:

$$\gamma(n, x) = \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt \quad (1.1)$$

Asímismo el complemento de la función gama incompleta con parámetros n y x :

$$\Gamma(n, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{n-1} dt \quad (1.2)$$

Con esta definición obtenemos una propiedad natural para procedimientos en el futuro: la función gama es la suma de la función gama incompleta y su complemento.

$$\gamma(n) = \gamma(n, x) + \Gamma(n, x) \quad (1.3)$$

Dadas las definiciones de la función gama y su complemento, podemos demostrar la siguiente propiedad.

Propiedad. Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ su función de distribución puede ser expresada como:

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = \frac{\Gamma(n+1, \lambda)}{\Gamma(n+1)} \quad (1.4)$$

donde n es la parte entera de x

Demostración (Por inducción). Para $n=1$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2, \lambda)}{\Gamma(2)} &= \int_\lambda^\infty \frac{e^{-t} t^1}{1!} dt \\ &= (-te^{-t})|_\lambda^\infty + \int_\lambda^\infty e^{-t} dt \\ &= \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=0}^1 \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \end{aligned}$$

Supongamos válido para n .

Probemos para $n+1$

$$\frac{\Gamma(n+1, \lambda)}{\Gamma(n+1)} = \int_\lambda^\infty \frac{e^{-t} t^1}{n!} dt$$

Integrando por partes y utilizando el hecho de que $\Gamma(n+1)=n!$ para n entera obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left(-(n+1)t^n e^{-t} \Big|_{\lambda}^{\infty} + \int_{\lambda}^{\infty} n t^n e^{-t} dt \right) \\
 &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

Definición. Definimos la función generadora de probabilidad de la función de densidad discreta $f(x)$ con probabilidades p_n como:

$$\pi(s) = \sum_n p_n s^n, 0 \leq s < 1 \tag{1.6}$$

Notemos que $\pi(s)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Sus derivadas sucesivas evaluadas en uno valen:

- $\pi'(1) = \sum n p_n = E(n)$
- $\pi''(1) = \sum n(n-1) p_n = E(n^2) - E(n) = \text{var}(n) + E(n^2) - E(n)$

⋮

2. Si p_n son los coeficientes de una serie convergente, las derivadas sucesivas evaluadas en $s = 0$ nos dan los valores de dichos coeficientes.

El teorema de probabilidad total es una herramienta básica cuando se trata con probabilidades condicionales, éste enuncia lo siguiente:

Teorema 1 (Probabilidad total) Sean A_1, A_2, \dots, A_n eventos que forman una partición del espacio muestral tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión: $P(B) = \sum_{i=0}^n P(B|A_i)P(A_i)$

En muchos de los desarrollos encontramos que el espacio muestral es un conjunto no numerable de eventos. De ahí la necesidad de recordar una generalización para espacios muestrales no numerables del teorema de probabilidad

total. En este caso y siguiendo la notación del teorema anterior, la última ecuación se transforma en:

$$P(B) = \int_{-\infty}^{\infty} P(B|x)f(x)dx \quad (1.7)$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X .

1.2. Resultados generales

En esta sección nos enfocamos a tratar herramienta que suele estudiarse como material de un primer curso de procesos estocásticos; así como ciertos teoremas de convergencia necesarios para el desarrollo de gran parte de las demostraciones que serán expuestas en secciones posteriores.

Iniciemos definiendo una función que será útil en el estudio de las colas con tiempos de servicio regular:

Definición. Definimos la función $\delta : \mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}$ como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Dentro de la herramienta que necesitamos del curso de procesos estocásticos, es importante puntualizar ciertas definiciones, entre éstas se encuentran:

Definición. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizadas por un conjunto T llamado espacio parametral y que toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados

De esta definición podemos decir que un estado del proceso estocástico es un posible valor de alguna de las variables aleatorias.

Necesitamos definir ahora, tanto las probabilidades de transición de un proceso estocástico, como la matriz de probabilidades de transición.

Definición. Sea S el espacio de estados de un proceso estocástico $\{X(t) : t \in T\}$, definimos las probabilidades de transición como:

$$P_{ij} = \text{Prob}[X_{n+1} = j | X_n = i] \quad i, j \in S$$

Igualmente, la matriz de probabilidades de transición, es la matriz que tiene por entradas a las probabilidades P_{ij} . Finalmente decimos que un proceso estocástico es estacionario si la probabilidad pasar del estado i al estado j en k pasos (conocida como probabilidad de transición en k pasos) satisface:

$$P_{ij}^k = \text{Prob}[X_{n+k} = j | X_n = i] \quad i, j \in S$$

Podemos clasificar ahora los posibles estados de un proceso estocástico.

Definición. Decimos que un estado es recurrente si la probabilidad de regresar al estado i partiendo del estado i es uno, es decir:

$$\text{Prob}(X_n = i \text{ para alguna } n \geq 1 \mid X_0 = i) = 1$$

y un estado que no sea recurrente será transitivo.

En esta clasificación de estados existe una subclasificación para los estados recurrentes:

Definición. Decimos que un estado recurrente es recurrente positivo si el número de pasos esperados para regresar al estado en que el proceso se encuentra, es finito. Y el estado será recurrente nulo en caso contrario.

Es decir, si T_i es el número de pasos necesarios para llegar al estado i y X_0 el estado inicial del proceso estocástico, el estado i será recurrente positivo si:

$$E(T_i | X_0 = i) < \infty$$

y será recurrente nulo en caso contrario.

Dentro de los resultados de teoría de la medida necesarios para algunos desarrollos de esta tesis se encuentran los teoremas de convergencia monótona y convergencia dominada.

Teorema 2 (Convergencia monótona) Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea (f_n) una sucesión creciente de funciones medibles y positivas. Sea $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu = \int f(x) d\mu$$

Teorema 3 (Convergencia dominada) Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea (f_n) una sucesión de funciones medibles y g una función integrable tales que:

1. $|f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbf{N}$
2. Para casi toda $x \in X$ existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Entonces f es integrable y:

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Enunciemos ahora otro teorema, necesario en secciones posteriores con el mismo fin:

Teorema 4 *Sea f_n una sucesión de funciones, diferenciables en $[a, b]$ y tales que $f_n(x_0)$ converge para algún punto x_0 en $[a, b]$. Si f'_n converge uniformemente en $[a, b]$, entonces f_n converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f , y:*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

En ocasiones necesitamos condiciones para intercambiar una derivada con una integral, es decir, condiciones bajo las cuales la derivada de una integral sea lo mismo que la integral de dicha derivada.

Teorema 5 *Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $a < b \in \mathbf{R}$ fijas. Si $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ es una función tal que $f^t : X \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f^t(x) = f(x, t)$ es S -medible $\forall t \in (a, b)$ y $f_x : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f_x(t) = f(x, t)$ es continua $\forall x \in X$ y además $\exists t_0 \in (a, b)$ tal que $f^{t_0} \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu)$, que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe en $X \times (a, b)$ y que $\exists g \in \tilde{\mathcal{L}}_1(X, S, \mu)$ tal que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$, entonces $F(t) = \int_X f^t d\mu$ es diferenciable en t y $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu$.*

Para los desarrollos que haremos en secciones futuras podremos suponer la derivabilidad de f , ya que al hablar de la integral de f , estaremos suponiendo que f es una función de densidad continua y derivable. En algunos casos dicha función será la exponencial o podrá ser la función de densidad gama, en ambos casos podemos asegurar la derivabilidad.

Una de las herramientas más utilizadas a lo largo de este trabajo es la transformada de Laplace, ya que al ser similar a la función generadora de momentos centrales, definirá por completo la distribución de una variable aleatoria.

Aunque no es una condición necesaria, definiremos la transformada de Laplace para variables aleatorias no negativas, ya que a lo largo de este trabajo las variables que manejamos como aleatorias son tiempos y conteos de vehículos, que serán siempre mayores o iguales a cero.

Definición. *Sea $f(x)$ una función definida para $x \geq 0$; entonces la integral:*

$$\phi(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-sx} f(x) dx \quad (1.8)$$

se llama transformada de Laplace de f , siempre que el límite exista.

Notemos que la función generadora de momentos centrales es precisamente la transformada de Laplace evaluada en $-s$. De ahí que podemos obtener los momentos centrales con las derivadas sucesivas. Para este fin será de utilidad la siguiente propiedad:

Propiedad. *Los momentos centrales de una función de densidad pueden ser encontrados como:*

$$E(X^n) = (-1)^n \phi^{(n)}(s) \quad (1.9)$$

donde $\phi(s)$ es la transformada de Laplace de $f(x)$.

Demostración. Los momentos centrales están definidos como las derivadas sucesivas de la función generadora de momentos centrales evaluadas en $s = 0$. Sea $\varphi(s)$ la función generadora de momentos centrales.

$$\phi^{(n)}(s) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

utilizando el teorema 5

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-sx} f(x) dx \\ &= (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx} f(x) dx \\ \Rightarrow \phi^{(n)}(0) &= (-1)^n \int_0^\infty x^n f(x) dx \\ &= (-1)^n E(X^n) \\ &= (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Aún más, a continuación demostramos que la transformada de Laplace de una función acumulativa es precisamente la transformada de Laplace de la función de densidad sobre s .

Tomemos $f(x)$ una función de densidad, $F(x)$ su función de distribución, y $\phi(s)$ y $\Phi(s)$ sus transformadas de Laplace respectivamente (dichas transformadas de Laplace existirán gracias a las propiedades de las funciones de densidad y distribución).

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (1.11)$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
 &= \left[e^{-sx} F(x) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} s e^{-sx} F(x) dx \\
 &= s \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx \\
 &= s\Phi(s)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Así

$$\Phi(s) = \frac{\phi(s)}{s} \tag{1.13}$$

Finalmente, demostremos que la transformada de Laplace de una suma de variables aleatorias independientes, es el producto de las transformadas de Laplace individuales.

Tomemos dos variables aleatorias X y Y , con funciones de densidad $f(x)$ y $g(y)$, y funciones de distribución $F(x)$ y $G(y)$ respectivamente. Sea $Z = X+Y$ con función de densidad $h(z)$ y función de distribución $H(y)$. Así:

$$H(u) = \text{Prob}[z \leq u] = \text{Prob}[x + y \leq u]$$

Notemos que al graficar en el plano (x,y) , la desigualdad $x + y \leq u$ define una región bajo la línea $x + y = u$, así:

$$\begin{aligned}
 H(u) &= \int_0^{\infty} \int_0^{u-y} f(x)g(y) dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} F(u-y)g(y) dy
 \end{aligned}$$

gracias al teorema de convergencia dominada podemos diferenciar con respecto a u para obtener:

$$h(u) = \int_0^{\infty} f(u-y)g(y) dy$$

llamamos a esta función h , que es la función de densidad de $x + y$, la convolución de las funciones f y g .

Calculemos ahora la transformada de Laplace de la función h :

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-us} \left(\int_0^{\infty} f(u-y)g(y) dy \right) du$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-us} f(u-y)g(y)dydu \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(z+y)s} f(z)g(y)dydz \\ &= \int_0^\infty e^{-zs} f(z)dz \int_0^\infty e^{-zy} g(y)dy \\ &= \Phi_x(s)\Phi_y(s) \end{aligned}$$

las últimas integrales son, precisamente, las transformadas de Laplace de las funciones f y g .

Capítulo 2

Teoría de colas

2.1. Definiciones básicas

Existen diferentes formas de modelar el comportamiento del tráfico vehicular, por ejemplo, utilizando la teoría de gráficas, sistemas dinámicos, procesos estocásticos, entre otros. Para esta tesis tomamos elementos de la teoría de colas para modelar dicho comportamiento. De aquí la necesidad de contar con cierta herramienta de probabilidad y procesos estocásticos.

Como hemos mencionado en la sección 2.1, es de gran utilidad el suponer que los arribos a la cola de vehículos siguen una distribución Poisson con parámetro λ , y de forma análoga suponemos que las salidas (servicios) de la cola siguen una distribución Poisson con parámetro μ .

De esta forma podemos calcular de manera sencilla la media del tiempo interarribo, ya que, como mencionamos anteriormente, los arribos Poisson generan tiempos interarribo exponenciales, y basta recordar que una distribución exponencial con parámetro λ tiene media $1/\lambda$.

Es lógico pensar que la intensidad del tráfico en una vía depende de las tasas de llegada y de salida, de ahí que definimos la variable ρ como:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Notemos que ρ es el resultado de tomar la fracción de dos cantidades no negativas. De ahí que ρ es una cantidad no negativa también. De esta forma tenemos tres casos para ρ , que nos hablan de la clasificación del número de vehículos en la vía como estados del proceso estocástico. Estos casos son:

1. $\rho < 1$. En este caso, el proceso estocástico formado por el número de vehículos tendrá estados recurrentes positivos. Es decir, si iniciamos en una cola sin vehículos, en un número finito de pasos tendremos una cola vacía de nuevo.
2. $\rho = 1$. El proceso tendrá estados recurrentes nulos. Es decir, si iniciamos en una cola vacía, en promedio nos tomará una infinidad de pasos volver a vaciar la cola.
3. $\rho > 1$. El proceso tendrá estados transitorios. Es decir, si iniciamos con una cola sin vehículos, nunca volverá a estar vacía.

Recordemos que la transitividad o recurrencia de un estado en un proceso estocástico es una propiedad de clase, es decir, al poseer esta propiedad un estado de la clase, la tendrán todos los estados dentro de la misma clase. Notemos que en el proceso estocástico del número de vehículos en la vía, todos los estados pertenecen a la misma clase, así basta con demostrar que un estado tiene dicha propiedad para que todos los estados del proceso la tengan.

Aunque hasta el momento hemos tratado a λ y a μ como constantes, en general esto no es cierto. En general λ y μ son funciones del tiempo ($\lambda(t)$ y $\mu(t)$). Es lógico pensar que la tasa de llegadas varía dependiendo de la hora, ya que en un sistema real de tránsito vehicular tenemos horas pico, donde la tasa de llegadas es mayor que en horas no pico.

Para simplificar la notación en secciones futuras, hacemos el supuesto de que tomamos un intervalo de tiempo pequeño de forma que las tasas no cambian drásticamente y podemos tratarlas como constantes.

2.2. Tráfico como proceso de Poisson homogéneo

Al suponer que las llegadas a la vía son un proceso de Poisson y que la tasa de llegadas λ es constante, obtenemos un proceso de Poisson homogéneo de tasa λ , con esto podemos afirmar que el proceso tiene las siguientes propiedades:

1. $\Pr(\text{No tener arribos en un intervalo de tiempo } \Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$
2. $\Pr(\text{Tener un arribo en un intervalo de tiempo } \Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$

3. $\Pr(\text{Tener más de un arribo en un intervalo de tiempo } \Delta t) = o(\Delta t)$

donde $o(\Delta t)$ es el orden de anulación de Δt y por definición satisface:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Utilizando estas probabilidades en donde sólo hemos supuesto llegadas con tasa λ tomamos en cuenta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales: La probabilidad de tener n vehículos en la cola al tiempo t ($p_n(t)$) se puede ver como la suma de las probabilidades de transición:

$$\sum_{i=0}^n P_{in} = p_n$$

pero notemos que al considerar un intervalo de longitud Δt las primeras $n - 1$ probabilidades se pueden agrupar en una función $o(\Delta t)$ y usando las probabilidades que acaban de definirse obtenemos:

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= \lambda \Delta t p_{n-1}(t) + (1 - \lambda \Delta t) p_n(t) + o(\Delta t) \\ \Rightarrow \frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} &= \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \\ \Rightarrow p'_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t), \forall n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, cuando $n = 0$, sólo debemos considerar la probabilidad de encontrarnos con 0 vehículos en la vía y tomar el caso de que no llegue ningún vehículo en el intervalo de tiempo Δt , y así obtenemos de forma análoga:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \quad (2.2)$$

Con esto hemos conseguido el sistema de ecuaciones diferenciales antes mencionado, notemos que para resolver dicho sistema requerimos primero resolver la ecuación para p_0 y, con ésta, obtener el valor de p_1 y proceder de esta forma sucesivamente. Al aplicar este procedimiento, encontramos el hecho nada sorprendente de que las probabilidades de tener n arribos al tiempo t siguen una probabilidad de Poisson(λ).

El siguiente paso lógico es pensar al proceso de tránsito como un proceso de vida y muerte, donde hacemos la analogía pensando que las salidas del sistema son muertes y las llegadas son nacimientos. De esta forma tenemos que analizar los siguientes casos para $n \geq 1$:

1. El proceso se encontraba en el estado n al tiempo t y no ocurrieron llegadas ni salidas en el intervalo Δt .
2. El proceso se encontraba en el estado $n - 1$ al tiempo t , ocurrió una llegada y no ocurrieron salidas en el intervalo Δt .
3. El proceso se encontraba en el estado $n + 1$ al tiempo t , ocurrió una salida y no hubieron llegadas en el intervalo Δt .
4. El proceso se encontraba en el estado n al tiempo t y ocurrieron una llegada y una salida en el intervalo Δt .

Utilizando el mismo procedimiento que en el caso donde sólo consideramos llegadas, podemos obtener la ecuación diferencial:

$$p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (2.3)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} |p'_n(t)| &\leq | -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) | \\ &\leq | -(\lambda + \mu)p_n(t) | + | \lambda p_{n-1}(t) | + | \mu p_{n+1}(t) | \\ &\leq 2(\lambda + \mu), \end{aligned} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Y con un análisis similar de los casos posibles para tener el proceso en el estado 0, es decir, sin considerar que el proceso está en el estado anterior (que no tiene sentido si $n = 0$), obtenemos la ecuación diferencial:

$$p'_0 = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \quad (2.4)$$

Ahora utilicemos la función generadora de probabilidad (que desde ahora llamaremos función generadora) para expresar las probabilidades de que el proceso se encuentre en cierto estado ($p_n(t)$) en términos de ρ .

Por definición tenemos:

$$\pi(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) s^n$$

multiplicando la n -ésima ecuación 3.3 por s^n , sumando sobre n , usando el teorema 4 y el hecho de que $|p'_n(t)| \leq 2(\lambda + \mu)$ nos garantiza la convergencia uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} p'_n(t) s^n$, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(s, t) = \pi(s, t) \left[\mu \frac{1-s}{s} - \lambda(1-s) \right] - \mu \frac{1-s}{s} p_0(t)$$

En este momento nos interesa la forma de la función generadora bajo condiciones de equilibrio, es decir, con ρ menor a 1, de aquí que tomamos las probabilidades independientes del tiempo, en condiciones de equilibrio la ecuación anterior se convierte en:

$$\pi(s)(\mu - \lambda s) - \mu p_0 = 0 \Rightarrow \pi(s) = \frac{p_0}{1 - s\rho}$$

De esta última ecuación y usando las propiedades de la función generadora podemos obtener el valor de p_0 al evaluar la función generadora en $s = 1$:

$$1 = \frac{p_0}{1 - \rho} \Rightarrow p_0 = 1 - \rho$$

Al sustituir en $\pi(s)$ el valor de p_0 , obtenemos:

$$\pi(s) = \frac{1 - \rho}{1 - s\rho} \quad (2.5)$$

Esta última es la función generadora de la longitud de la cola bajo condiciones de equilibrio. Es sencillo ver que ésta es la función generadora de una variable aleatoria con distribución geométrica con parámetro ρ :

Recordemos que las probabilidades en una distribución geométrica son de la forma: $p_n = (1 - \rho)\rho^n$, de ahí que la función generadora es:

$$\pi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^n s^n = \frac{1 - \rho}{1 - s\rho}$$

Y de este desarrollo podemos obtener datos del comportamiento de la cola. Debemos calcular únicamente las tasas de llegada y de salida de la cola, ya que con estas cantidades podemos calcular ρ . Con esto podemos clasificar el comportamiento de los estados de la cola en transitivos o recurrentes y en caso de ser recurrentes, qué tipo de recurrencia.

Finalmente, en caso de que los estados sean recurrentes positivos, podemos obtener la longitud media de la cola. Con el simple hecho de suponer que $\rho < 1$, obtenemos que la longitud de la cola sigue una distribución geométrica con parámetro ρ . Y recordando que la media de una variable aleatoria distribuída geométrica(ρ) es $\rho/(1 - \rho)$.

El siguiente problema a tratar es el tiempo de espera de un usuario en nuestro sistema de tránsito. Recordemos que hasta el momento hemos visualizado el tránsito vehicular como una cola.

Para este análisis suponemos que $w(x, t)$ es la función de densidad del tiempo de espera al tiempo t , y $W(x, t)$ su función de distribución. Utilizando las probabilidades obtenidas en los desarrollos relativos a la longitud de la cola podemos afirmar que la probabilidad de que la cola se encuentre vacía es $1 - \rho$. En este caso, el tiempo de espera es cero. De ahí que la distribución del tiempo de espera es mixta, es decir, tiene un “salto” en el origen y después se comporta como una distribución continua.

En caso de que la longitud de la cola sea mayor a 0, tenemos que el tiempo de espera es, para el n -ésimo vehículo formado, el tiempo de servicio de $n - 1$ vehículos, más el tiempo residual del servicio en proceso. Recordemos entonces que uno de los supuestos básicos de este trabajo es que, al igual que las llegadas a la cola, las salidas (o servicios) tienen distribución Poisson. De aquí se obtiene que la distribución de los tiempos de servicio es exponencial con parámetro μ . Así, el tiempo de espera del n -ésimo vehículo es la suma de n variables aleatorias con distribución exponencial.

Se puede demostrar utilizando el teorema de Bayes que, al tomar una fracción de tiempo de un total distribuido exponencial negativo, esta fracción mantiene la distribución exponencial. Esto es importante para la primera fracción de tiempo.

Una de las propiedades básicas de la distribución exponencial es que la suma de n variables aleatorias con distribución exponencial con parámetro λ , tiene una distribución gama con parámetros n y λ . Por lo tanto, el tiempo de espera de un vehículo dado que es el n -ésimo en la cola es precisamente gama, es decir:

$$w(x|n) = \frac{\mu^n}{\Gamma(n)} e^{-\mu x} x^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (2.6)$$

utilizando el teorema de la probabilidad total podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n w(x|n) \\ &= (1 - \rho) \delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n e^{-\mu x} x^{n-1}}{\Gamma(n)} (1 - \rho) (\rho)^n \\ &= (1 - \rho) \delta(x) + e^{-\mu x} (1 - \rho) \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \\ &= (1 - \rho) \delta(x) + \rho (\mu - \lambda) e^{-\mu x + \lambda x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

A continuación encontramos una relación sencilla entre la transformada de Laplace y la función generadora del tiempo de espera. Esta igualdad es

válida siempre y cuando el tiempo de servicio de cada vehículo en la cola sea exponencial negativo.

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \int_{n=0}^{\infty} w(x)e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{\infty} \sum_0^{\infty} p_n \frac{\mu^n x^{n-1} e^{-sx}}{\Gamma(n)} dx\end{aligned}$$

gracias a que se cumplen las hipótesis del teorema de convergencia monótona podemos intercambiar la suma con la integral y de esta forma obtener:

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mu^n \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} e^{-sx}}{\Gamma(n)} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\mu^n}{(s + \mu)^n} \int_0^{\infty} \frac{(s + \mu)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-sx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\mu^n}{(s + \mu)^n} \\ &= \pi \left(\frac{\mu}{s + \mu} \right)\end{aligned}\tag{2.8}$$

que podemos expresar en el caso de equilibrio, gracias a la ecuación 3.5, como:

$$\phi(s) = \frac{(1 - \rho)(s + \mu)}{s + \mu - \lambda}\tag{2.9}$$

La importancia de esta última ecuación es que, gracias a esta relación, podemos encontrar los momentos centrales del tiempo de espera en términos de ρ , λ y μ derivando la transformada de Laplace. Basta recordar que una de las propiedades de la transformada de Laplace es la obtención de los momentos centrales de la distribución a través de las derivadas sucesivas de dicha transformada. De aquí que la media de los tiempos de espera, cuando el sistema se encuentra en equilibrio ($\rho < 1$) es:

$$\begin{aligned}\phi'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \phi(s) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{(1 - \rho)(s + \mu)}{s + \mu - \lambda} \\ &= \frac{(s + \mu - \lambda)(1 - \rho) - (1 - \rho)(s + \mu)}{(s + \mu - \lambda)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\lambda(1-\rho)}{(s+\mu-\lambda)^2} \\
\Rightarrow E(X) &= -\phi'(0) \\
&= \frac{\lambda(1-\rho)}{(\mu-\lambda)^2} \\
&= \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \tag{2.10}
\end{aligned}$$

De igual forma podemos obtener el segundo momento para así calcular la varianza:

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= \frac{-\lambda(1-\rho)}{(s+\mu-\lambda)^2} \\
\phi''(s) &= \frac{2\lambda(1-\rho)(s+\mu-\lambda)}{(s+\mu-\lambda)^4} \\
\Rightarrow E(X^2) &= \phi''(0) \\
&= \frac{2\lambda(1-\rho)}{(\mu-\lambda)^3} \\
&= \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^2} \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Calculemos ahora la varianza haciendo uso de la definición de la misma:
 $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$\begin{aligned}
var(X) &= \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^2} - \frac{\rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2} \\
&= \frac{2\rho - \rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2} \tag{2.12}
\end{aligned}$$

2.3. Salidas con distribución desconocida

El objetivo de esta sección es proveer una generalización del modelo anterior, usando únicamente el supuesto de que las llegadas siguen una distribución Poisson(λ), y las salidas tienen distribución de probabilidades desconocida.

Notaremos que en el caso de encontrarnos con un periodo de servicio constante, las ecuaciones que a continuación se desarrollan no pierden validez,

ya que podemos pensar que la distribución de dichas salidas es representada por la función indicadora.

Supongamos ahora que la función de distribución del tiempo de las salidas es $B(x)$, con función de densidad $b(x)$ y transformada de Laplace $\beta(x)$, y consideremos sólo los puntos en el tiempo donde ocurre una salida (desde ahora llamaremos a estos puntos “puntos de regeneración”).

El primer paso para este análisis es encontrar la probabilidad de obtener n arribos en un periodo de servicio (p.s.), para esto requerimos hacer uso del teorema de probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 k_n &= \Pr(n \text{ arribos en un p.s.}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(n \text{ arribos en un p.s.} | \text{p.s.} = v) \Pr(\text{p.s.} = v) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^n}{n!} b(v) dv \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^n}{n!} b(v) dv
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Al igual que en secciones anteriores podemos encontrar la función generadora de las probabilidades de obtener n arribos en un periodo de servicio.

$$\begin{aligned}
 K(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n s^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^n}{n!} b(v) dv s^n \\
 &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^n}{n!} b(v) s^n dv \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda v} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda v s)^n}{n!} \right] b(v) dv \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda v} e^{\lambda v s} b(v) dv \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda v(1-s)} b(v) dv \\
 &= \beta[\lambda(1-s)]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Una vez más hicimos uso del teorema de convergencia monótona para intercambiar la suma infinita con la integral. En general, en problemas de probabilidad no encontramos dificultades para demostrar que se satisfacen

las hipótesis de dicho teorema ya que, al trabajar con probabilidades, en realidad estamos manejando cantidades positivas y menores a uno, lo que facilita la convergencia de la serie.

Ahora, demostremos que bajo condiciones de equilibrio ($\rho < 1$) se tiene $p_0 = 1 - \rho$, como hicimos en la sección anterior. Para esto requerimos el valor de la derivada de la función generadora de las llegadas por periodo de servicio evaluada en 1, es decir, $K'(1)$.

$$\begin{aligned}
K'(s) &= \beta'[\lambda(1-s)] \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\infty e^{-\lambda v(1-s)} b(v) dv, \quad \text{usando el teorema 5} \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-\lambda v(1-s)} b(v) dv \\
&= \int_0^\infty \lambda v e^{-\lambda v(1-s)} b(v) dv \\
\Rightarrow K'(1) &= \int_0^\infty \lambda v b(v) dv \\
&= \lambda \int_0^\infty v b(v) dv, \quad \text{por definición de esperanza} \\
&= \lambda \frac{1}{\mu} \\
&= \rho
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Podemos obtener una relación entre las probabilidades de n llegadas en un periodo de servicio y las probabilidades de transición de un proceso estocástico. Debemos definir a p_{ij} como la probabilidad de encontrarnos en el estado j en un punto de regeneración, dado que nos encontrábamos en el estado i en el punto de regeneración anterior, entendiendo por el estado i , que contábamos con i vehículos en cierto tiempo. Así, estas probabilidades de transición no son más que las probabilidades de cierto número de llegadas en un periodo de servicio. Podemos ver que:

$$p_{0j} = k_j \tag{2.16}$$

$$p_{ij} = k_{j-i+1}, \quad j - i + 1 \geq 0, \quad j > 0 \tag{2.17}$$

$$p_{ij} = 0 \quad \text{en otro caso} \tag{2.18}$$

Con esto tenemos toda la herramienta necesaria para calcular la función generadora asociada al proceso del número de vehículos en la cola, en tiempos de regeneración.

$$\begin{aligned}
\pi(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} p_i k_{j-1} s^j + \sum_{j=0}^{\infty} p_0 k_j s^j \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} p_j k_{j-i+1} s^j + p_0 K(s) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_i k_l s^{l+i-1} + p_0 K(s) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_i s^{i-1} K(s) + p_0 K(s) \\
&= \frac{1}{s} K(s) [\pi(s) - p_0] + p_0 K(s) \\
\Rightarrow \pi(s) - \frac{1}{s} K(s) \pi(s) &= p_0 K(s) \frac{s-1}{s} \\
\Rightarrow \pi(s) \left[1 - \frac{1}{s} K(s)\right] &= p_0 K(s) \frac{s-1}{s} \\
\Rightarrow \pi(s) &= \frac{p_0 K(s)(1-s)}{K(s) - s} \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Recordemos que una de las propiedades fundamentales de la función generadora es que $\pi(1) = 1$, en este caso encontramos un problema, ya que la evaluación de π en uno está indeterminada. Sin embargo, podemos tomar el límite de la función cuando s tiende a 1. De esta forma obtenemos el valor de p_0 bajo condiciones de equilibrio.

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{s \rightarrow 1} \pi(s), \\
&= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{p_0 K(s)(1-s)}{K(s) - s} \quad \text{usando L'Hopital} \\
&= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{p_0(1-s)K'(s) - p_0 K(s)}{K'(s) - 1} \\
&= \frac{p_0}{1 - \rho} \\
\Rightarrow p_0 &= 1 - \rho \\
\Rightarrow \pi(s) &= \frac{(1 - \rho)(1 - s)K(s)}{K(s) - s} \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Con esto hemos encontrado la función generadora para el proceso, donde la distribución de las salidas es desconocida, más aún, es sencillo encontrar

la matriz de transición en términos de las probabilidades k 's:

$$P = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Con esta matriz es posible encontrar las probabilidades de n pasos, que representan la probabilidad de que en n periodos de servicio nos encontremos en un estado, dado que actualmente nos encontramos en otro.

Otro posible desarrollo surge de considerar el tiempo total de espera en el sistema (T). Donde este tiempo representa el tiempo de espera en la fila (que corresponde a la suma de $n - 1$ servicios) más el tiempo de servicio del vehículo, es decir, si el vehículo en cuestión es el n -ésimo en la fila, este tiempo es la suma de n tiempos de servicio. De ahí que al calcular la función generadora análogamente al caso anterior, obtenemos:

$$\pi(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda T + s\lambda T} f(T) dT \quad (2.21)$$

donde f es la función de densidad de la variable aleatoria T .

Recordemos que previamente calculamos la transformada de Laplace del tiempo de espera en la fila ($\phi(s)$), así como la del tiempo de servicio ($\beta(s)$). Suponiendo que el tiempo de espera en la fila es una variable independiente del tiempo de servicio de un vehículo (en realidad no es una suposición fuerte, ya que en general un vehículo no tarda más o menos en cruzar una vía, por ejemplo, si su tiempo de espera antes de cruzar fue mayor o menor), y gracias al resultado para las transformadas de Laplace de la convolución de variables aleatorias independientes, que se presenta en el capítulo 2, obtenemos que la función generadora del tiempo total ($\pi(s)$) es el producto de las transformadas de Laplace del tiempo de espera en la fila y del tiempo de servicio evaluadas en $\lambda(1 - s)$. De esta forma podemos despejar la transformada de Laplace del tiempo de espera en términos de la función generadora del tiempo total y la transformada de Laplace del tiempo de servicio, para finalmente obtener una expresión en términos de ρ , λ , μ y $\beta(s)$ de la transformada de Laplace del tiempo de espera.

$$\pi(s) = \phi(\lambda(1 - s))\beta(\lambda(1 - s))$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \phi(\lambda(1-s)) &= \frac{\pi(s)}{\beta(\lambda(1-s))} \\
\Rightarrow \phi(s) &= \frac{\pi\left(\frac{\lambda-s}{\lambda}\right)}{\beta(s)}, \text{ sustituyendo } \pi\left(\frac{\lambda-s}{\lambda}\right) \\
&= \frac{(1-\rho)\left(1-\frac{\lambda-s}{\lambda}\right)K\left(\frac{\lambda-s}{\lambda}\right)}{\beta(s)\left[K\left(\frac{\lambda-s}{\lambda}\right)-1+\frac{\lambda}{s}\right]} \\
&= \frac{(1-\rho)\left(\frac{s}{\lambda}\right)\beta(s)}{\beta(s)\left[\beta(s)-1+\frac{s}{\lambda}\right]} \\
&= \frac{1-\rho}{\frac{\lambda}{s}\beta(s)-\frac{\lambda}{s}+1} \\
&= \frac{1-\rho}{1-\frac{\lambda}{s}[1-\beta(s)]} \tag{2.22}
\end{aligned}$$

De esta forma hemos definido completamente el proceso del tiempo de espera de un vehículo a través su transformada de Laplace, utilizando las tasas de llegada y la transformada de Laplace de la función de distribución de los tiempos de servicio.

2.4. Servicio regular

En esta sección analizamos un caso particular, ¿qué pasa cuando el servicio en la cola es regular?, es decir, el tiempo de servicio para cada vehículo es una constante. Hasta el momento hemos discutido casos distintos, pero hemos supuesto que, tanto las llegadas como los servicios o salidas son aleatorios. Este caso no es muy distinto, basta hacer adecuaciones a los resultados previamente obtenidos para que sean aplicables en este caso.

Comenzamos construyendo una función de densidad para el tiempo de servicio, de forma tal que mantenemos la suposición de que el tiempo de servicio es constante para cada vehículo. Hacemos esto usando la función δ , mencionada en el capítulo de herramienta preliminar, de esta forma obtenemos que:

$$b(x) = \delta\left(x - \frac{1}{\mu}\right) \tag{2.23}$$

Una vez obtenida esta función de densidad, que induce un tiempo de servicio constante, es importante obtener la transformada de Laplace asociada

a esta función de densidad. En este caso, la función de densidad ya no es de tipo continua, sino que es mixta, tiene un valor de cero para los intervalos $[0, \frac{1}{\mu})$ y $(\frac{1}{\mu}, \infty)$, y tiene un valor de 1 para $x = \frac{1}{\mu}$, por esto tenemos que calcular la transformada de Laplace a través de una integral con respecto a una medida de masa puntual.

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \\ &= e^{-\frac{s}{\mu}}\end{aligned}\tag{2.24}$$

Notemos que podemos usar cualquiera de los resultados de la sección anterior, ya que hemos obtenido una función de densidad que induce un periodo de servicio constante. De esta forma usemos los resultados obtenidos para una distribución del tiempo de servicio desconocida. Únicamente sustituimos la función de densidad por nuestra función de densidad particular para obtener resultados de los tiempos de servicio. Esto es precisamente lo que hacemos para obtener la función generadora del tiempo de espera:

$$\begin{aligned}\pi(s) &= \phi(\lambda(1-s))\beta(\lambda(1-s)) \\ &= \frac{(1-\rho)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda(1-s)}[1 - \beta(\lambda(1-s))]} \beta(\lambda(1-s)) \\ &= \frac{(1-\rho)(1-s)}{1-s - [1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-s)}]} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-s)} \\ &= \frac{(1-\rho)(1-s)}{[-s + e^{-\rho(1-s)}]e^{\rho(1-s)}} \\ &= \frac{(1-\rho)(1-s)}{1 - se^{-\rho(s-1)}}\end{aligned}\tag{2.25}$$

Podemos expresar el denominador de esta última ecuación como el resultado de una suma geométrica, así obtenemos la siguiente ecuación:

$$\pi(s) = (1-\rho)(1-s) \sum_{i=0}^{\infty} (se^{\rho}e^{-\rho s})^i$$

Notemos que las condiciones para obtener un comportamiento límite convergente, en este caso, están dadas por los términos de la suma geométrica, de forma que debemos pedir $se^{\rho}e^{-\rho s} < 1$, es decir, $se^{\rho} < e^{\rho s}$ para obtener un comportamiento límite con estados recurrentes positivos.

Por otra parte podemos escribir la función $\pi(s)$ como:

$$\begin{aligned}\pi(s) &= (1 - \rho)(1 - s) \sum_{i=0}^{\infty} \left(s^i e^{\rho i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s\rho i)^j}{j!} \right) \\ &= (1 - \rho)(1 - s) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s^i e^{\rho i} \frac{(-s\rho i)^j}{j!}\end{aligned}\tag{2.26}$$

y así de esta última ecuación obtenemos los coeficientes de s^i que representarán las probabilidades p_i respectivamente, dada la definición de la función generadora ($\pi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$). Por lo tanto podemos afirmar que las probabilidades correspondientes son:

$$p_0 = 1 - \rho \tag{2.27}$$

$$p_1 = (1 - \rho)(e^\rho - 1) \tag{2.28}$$

\vdots

$$\begin{aligned}p_n &= (1 - \rho) \sum_{i+j=n} \frac{(-\rho i)^j e^{\rho i}}{j!} - (1 - \rho) \sum_{i+j=n-1} \frac{(-\rho i)^j e^{\rho i}}{j!} \\ &= (1 - \rho) \left[\sum_{i=0}^n \frac{(-\rho i)^{n-i} e^{\rho i}}{(n-i)!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-\rho i)^{n-i-1} e^{\rho i}}{(n-i-1)!} \right]\end{aligned}\tag{2.29}$$

Con esto finalizamos el análisis del caso, en el que las llegadas son aleatorias y el periodo de servicio es una constante ($1/\mu$).

2.5. Periodo de ocupación

Esta sección es un análisis del tiempo que permanece ocupada nuestra cola. Aunque durante el desarrollo de esta sección encontramos resultados que parecen un tanto abstractos, serán de gran utilidad en secciones futuras. No sólo por la notación que utilizaremos, sino por el uso de las probabilidades que son parte de los resultados aquí presentados.

Iniciemos esta sección usando la probabilidad de que en una cola con intensidad ρ , que por el momento pensaremos es menor a 1, en el estado r tengan que pasar exactamente n vehículos antes de que la cola se vacíe por primera vez ($p_n(r, \rho)$). Para esto requerimos que arriben $n - r$ vehículos antes de que la cola se vacíe por primera vez, denotamos esta probabilidad

como $R_{n-r,n}$. Si tomamos como desconocida la distribución de los tiempos de servicio, y asumimos que estos tiempos son independientes del número de vehículos en la cola, podemos escribir dicha probabilidad como:

$$R_{n-r,n} = \int_0^\infty \frac{(\lambda v)^{n-r} e^{-\lambda v}}{(n-r)!} b^{n*}(v) dv \quad (2.30)$$

donde $b^{n*}(v)$ es la n -ésima convolución de la función b .

En esta sección profundizamos los desarrollos de las distribuciones más comunes en teoría de colas para los tiempos de servicio, que son tiempos de servicio distribuidos exponencial negativo (inducidos por salidas Poisson), y tiempos de servicio constantes.

Así, cuando el tiempo de servicio es exponencial negativo con parámetro (μ) , y recordando que la n -ésima convolución de una distribución exponencial con parámetro μ es una distribución $\Gamma(n, \mu)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{n-r,n} &= \int_0^\infty \frac{(\lambda v)^{n-r} e^{-\lambda v}}{(n-r)!} \frac{\mu^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} e^{-\mu v} dv \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-r} e^{-v(\lambda+\mu)} \mu^n v^{2n-r-1}}{(n-r)!(n-1)!} dv \\ &= \binom{2n-r-1}{n-r} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-r} \mu^n e^{-v(\lambda+\mu)} v^{2n-r-1}}{\Gamma(2n-r)} dv \\ &= \binom{2n-r-1}{n-r} \frac{\lambda^{n-r} \mu^n}{(\lambda+\mu)^{2n-r}} \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{2n-r}}{\Gamma(2n-r)} e^{-v(\lambda+\mu)} v^{2n-r-1} dv \\ &= \binom{2n-r-1}{n-r} \frac{\rho^{n-r}}{(1+\rho)^{2n-r}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si consideramos tiempos de servicio constantes de tamaño $\frac{1}{\mu}$, la n -ésima convolución de la función de distribución se convierte en: $b^{n*}(v) = \delta(x - n/\mu)$, con función de distribución $B^{n*}(v)$, de esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{n-r,n} &= \int_0^\infty \frac{(\lambda v)^{n-r} e^{-\lambda v}}{(n-r)!} dB^{n*}(v) \\ &= \frac{\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{n-r} e^{-\frac{n\lambda}{\mu}}}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n\rho)^{n-r} e^{-n\rho}}{(n-r)!} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Volvamos por un instante a considerar el caso de tiempos de servicio exponenciales, el problema que a continuación encontramos es hallar constantes $A_{n,r}$ tales que:

$$\sum_{n=r}^{\infty} A_{n,r} \binom{2n-r-1}{n-r} \frac{\rho^{n-r}}{(1+\rho)^{2n-r}} = 1$$

o bien podemos expresarlo en términos de otra constante $B_{n,r}$ tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r} \frac{\rho^{n-r}}{(1+\rho)^{2n-r}} = 1$$

La idea que utilizamos a continuación es expresar las constantes $B_{n,r}$ como coeficientes de una serie de Maclaurin, y así obtener el valor de los mismos. Para esto necesitamos definir β de la siguiente forma:

$$\beta(\rho) = \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \Rightarrow d\beta = \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho$$

y a continuación definir $f(\beta)$ como:

$$f(\beta) = \sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} \beta^n = \left(\frac{\rho}{1+\rho} \right)^r$$

Podemos pensar ahora a $f(\beta)$ como una serie de Maclaurin, así, $B_{n,r}$ son los coeficientes de la serie. Dada la construcción de las series de Maclaurin, los coeficientes de dicha serie deben ser de la forma:

$$B_{n,r} = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\beta^n} f(\beta) \right]_{\beta=0}$$

Usando algunos resultados sobre teoría de funciones analíticas complejas, estos coeficientes pueden ser escritos como:

$$B_{n,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\beta)}{\beta^{n+1}} d\beta$$

donde \mathcal{C} es una trayectoria cerrada en el dominio de la función analítica.

Al sustituir los valores previamente obtenidos de $f(\beta)$ y β^n obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} B_{n,r} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \underbrace{\left(\frac{\rho}{1+\rho} \right)^r}_{f(\beta)} \underbrace{\frac{(1+\rho)^{2n+2}}{\rho^{n+1}}}_{1/\beta^{n+1}} \underbrace{\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho}_{d\beta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{(1+\rho)^{2n-r-1}}{\rho^{n-r+1}} d\rho - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{(1+\rho)^{2n-r-1}}{\rho^{n-r}} d\rho \end{aligned}$$

Ahora, volvemos a hacer uso de la misma representación de los coeficientes de la serie, para regresar la ecuación a los reales, en términos de ρ :

$$\begin{aligned}
B_{n,r} &= \frac{1}{(n-r)!} \left[\frac{d^{n-r}}{d\rho^{n-r}} (1+\rho)^{2n-r-1} \right]_{\rho=0} - \\
&\quad \frac{1}{(n-r-1)!} \left[\frac{d^{n-r-1}}{d\rho^{n-r-1}} (1+\rho)^{2n-r-1} \right]_{\rho=0} \\
&= \frac{(2n-r-1)!}{(n-r)!(n-1)!} - \frac{(2n-r-1)!}{(n-r-1)!(n)!} \\
&= \frac{n(2n-r-1)! - (n-r)(2n-r-1)!}{(n-r)!n!} \\
&= \frac{r(2n-r-1)!}{(n-r)!n!} \\
&= \frac{r}{n} \frac{(2n-r-1)!}{(n-r)!(n-1)!} \\
&= \frac{r}{n} \binom{2n-r-1}{n-1} \\
\Rightarrow A_{n,r} &= \frac{r}{n} \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Es interesante notar que para el caso de tiempos de servicio constantes se conservan los mismos coeficientes $A_{n,r}$. A continuación presentamos un procedimiento análogo para obtenerlos en el caso de tiempos de servicio constantes. Recordemos que ahora buscamos constantes $A_{n,r}$ tales que:

$$\sum_{n=r}^{\infty} A_{n,r} \frac{e^{-n\rho} (n\rho)^{n-r}}{(n-r)!} = 1$$

o bien, constantes $B_{n,r}$ tales que:

$$\sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} e^{-n\rho} \rho^{n-r} = 1$$

Para esto definimos β de la siguiente forma:

$$\beta = \beta(\rho) = \rho e^{-\rho} \Rightarrow d\beta = (e^{-\rho} - \rho e^{-\rho}) d\rho = e^{-\rho} (1 - \rho) d\rho$$

Análogamente al caso de tiempos de servicio exponenciales negativos, debemos definir una función de beta que podamos ver como una serie de

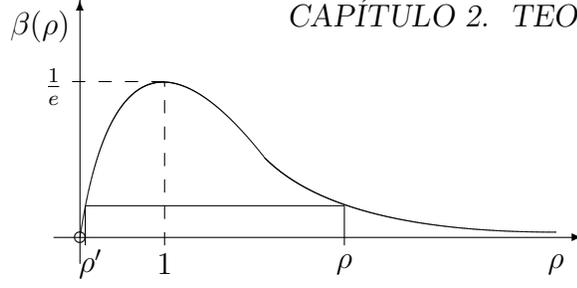
Maclaurin, y posteriormente usando la fórmula integral para los coeficientes de dicha serie, definimos $f(\beta)$ como:

$$f(\beta) = \sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} \beta^n = \rho^r$$

Pensando que $f(\beta)$ es una serie de Maclaurin, sus coeficientes $B_{n,r}$ deben ser:

$$\begin{aligned}
B_{n,r} &= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\beta^n} f(\beta) \right]_{\beta=0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\beta)}{\beta^{n+1}} d\beta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho^r}{\rho^{n+1} e^{-\rho(n+1)}} e^{-\rho} (1-\rho) d\rho \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{\rho n}}{\rho^{n-r+1}} d\rho - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-\rho n}}{\rho^{n-r}} d\rho \\
&= \frac{1}{(n-r)!} \left[\frac{d^{n-r}}{d\rho^{n-r}} e^{\rho n} \right]_{\rho=0} - \frac{1}{(n-r-1)!} \left[\frac{d^{n-r-1}}{d\rho^{n-r-1}} e^{-\rho n} \right]_{\rho=0} \\
&= \frac{n^{n-r}}{(n-r)!} - \frac{n^{n-r-1}}{(n-r-1)!} \\
&= \frac{n^{n-r} - (n-r)n^{n-r-1}}{(n-r)!} \\
&= \frac{rn^{n-r-1}}{(n-r)!} \\
&= \frac{r}{n} \frac{n^{n-r}}{(n-r)!} \\
\Rightarrow A_{n,r} &= \frac{r}{n} \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Para los desarrollos anteriores hemos supuesto que $\rho < 1$. Una pregunta lógica sería el comportamiento en caso de que $\rho \geq 1$, la respuesta a esta pregunta es sencilla, dado el comportamiento de la función $\beta(\rho)$. Notemos que el comportamiento, en caso de tener tiempos de servicio regulares, es de la siguiente forma:



Gráfica 1

Notemos que el máximo de la función β se encuentra en 1, esto nos asegura que para cada $\rho > 1$, existe una $\rho' < 1$, tal que sus valores bajo la función β son iguales, es decir, $\beta(\rho) = \beta(\rho')$, y es así como haremos el análisis para $\rho > 1$.

Agrupando todas las constantes podemos decir que:

$$\sum_{n=r}^{\infty} p_n = \sum_{n=r}^{\infty} C_{n,r} \beta^{n-r} e^{-\rho r}$$

donde

$$C_{n,r} = \frac{r}{(n-r)!} n^{n-r-1}$$

Pensemos que la probabilidad de que la cola no se vacíe de nuevo es p_{∞} , y notemos que esta probabilidad tenderá a cero, así tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 - p_{\infty} &= \sum_{n=r}^{\infty} C_{n,r} \beta^{n-r} e^{-\rho r} \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{r}{(n-r)!} n^{n-r-1} (\rho' e^{-\rho'})^{n-r} e^{-\rho r} \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{r}{(n-r)!} n^{n-r-1} \rho'^{n-r} e^{-n\rho'} e^{(\rho'-\rho)r} \\ &= e^{(\rho'-\rho)r} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{r}{n} \frac{n^{n-r}}{(n-r)!} \rho'^{n-r} e^{-n\rho'} \\ &= e^{(\rho'-\rho)r} \end{aligned} \tag{2.35}$$

ahora podemos despejar e^{ρ} de la ecuación para β , y así al sustituirlo en la ecuación anterior obtenemos el valor de p_{∞} en términos únicamente de ρ , ρ' y r .

$$p_{\infty} = 1 - \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^r \tag{2.36}$$

En el caso de tener tiempos de servicio exponenciales, podemos encontrar fácilmente que el máximo de la función β , como la definimos previamente, se encontrará una vez más en $\rho = 1$ y además podemos afirmar que $\rho\rho' = 1$ ya que:

$$\beta(\rho) = \beta\left(\frac{1}{\rho'}\right)$$

dada la definición de β que dimos para obtener $A_{n,r}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{\rho'}}{\left(1 - \frac{1}{\rho'}\right)^2} \\ &= \frac{\rho'}{(1 - \rho')^2} \\ &= \beta(\rho') \end{aligned}$$

Haciendo un desarrollo similar al caso de tiempos de servicio regulares y tomando en cuenta que:

$$1 - p_\infty = \left(\frac{1 + \rho}{\rho}\right)^r \sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} \beta^n$$

y

$$1 = \left(\frac{1 + \rho'}{\rho'}\right)^r \sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} \beta^n$$

podemos obtener que para el caso exponencial:

$$p_\infty = \left(\frac{1}{\rho}\right)^r$$

2.6. Valores medios

En esta sección hacemos conclusiones breves sobre los valores medios de los procesos estocásticos previamente analizados. Empezamos analizando la siguiente ecuación:

$$\bar{u} = \lambda\bar{v} + \lambda\bar{w} = \lambda W \quad (2.37)$$

donde \bar{u} es la longitud media de la cola, \bar{v} es el tiempo medio de servicio, \bar{w} es el tiempo medio de espera antes de ser atendido y W es el tiempo total medio de espera en la cola.

Es importante notar que estamos expresando la longitud de la cola como el producto de la tasa de llegadas y el tiempo total medio de espera en la cola. Esta ecuación es demostrable a partir de la ecuación previamente obtenida para la longitud de la cola, en caso de tener una distribución arbitraria para el tiempo de servicio.

Existe una forma de obtener la longitud media de la cola sólo conociendo la distribución de los tiempos de servicio, el desarrollo es el siguiente:

Tomemos la longitud de la cola en dos puntos de regeneración sucesivos y denotemos dichas longitudes como n y n' , y sea k el número de llegadas entre dichos puntos de regeneración. Asumiendo que el sistema se encuentra en equilibrio obtenemos:

$$\begin{aligned} n' &= \max(n - 1, 0) + k \\ &= n + k + \delta(n) - 1 \end{aligned} \tag{2.38}$$

el siguiente paso es elevar esta última ecuación al cuadrado:

$$n'^2 = n^2 + 2n(k - 1) + (k - 1)^2 + \delta(n)(2k - 1)$$

Tomemos ahora la esperanza de la última ecuación, y utilizando propiedades de cadenas de Markov obtenemos:

$$0 = 2E[n](E[k] - 1) + E[k^2] - 2E[k] + 1 + E[\delta(n)](2E[k] - 1)$$

si tomamos la esperanza de la ecuación 3.38, encontramos que la esperanza de la función δ es $1 - \rho$, que al sustituirla en la última ecuación y después de despejar tiene como resultado:

$$E[n] = \frac{E[k(k - 1)]}{2(1 - \rho)} + \rho$$

Finalmente, para obtener la esperanza de la longitud de la cola basta con calcular $E[k]$ y $E[k^2]$, a continuación presentamos el desarrollo para $E[k]$:

$$E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ke^{-\lambda v}(\lambda v)^k}{k!} b(v) dv$$

usando teoremas de convergencia para invertir el orden de la integral y la suma

$$\begin{aligned}
E[k] &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^k}{(k-1)!} b(v) dv \\
&= \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} b(v) \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda v)^{k-1}}{(k-1)!} dv \\
&= \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} e^{\lambda v} b(v) dv \\
&= \int_0^\infty \lambda v b(v) dv \\
&= \lambda \int_0^\infty v b(v) dv \\
&= \lambda E[v]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como en general $E[v]$ es $1/\mu$, podemos decir que $E[k] = \rho$, como fue previamente usado para encontrar la esperanza de la función δ . De forma similar podemos calcular $E[k^2]$.

$$\begin{aligned}
E[k^2] &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty k^2 \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^k}{k!} b(v) dv \\
&= \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} b(v) \sum_{k=1}^\infty k \frac{(\lambda v)^{k-1}}{(k-1)!} dv
\end{aligned}$$

sea $k' = k - 1$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} b(v) \sum_{k'=0}^\infty (k' + 1) \frac{(\lambda v)^{k'}}{k'!} dv \\
&= \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} b(v) \sum_{k'=0}^\infty k' \frac{(\lambda v)^{k'}}{k'!} dv + \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} b(v) \sum_{k'=0}^\infty \frac{(\lambda v)^{k'}}{k'!} dv \\
&= \int_0^\infty (\lambda v)^2 e^{-\lambda v} b(v) \sum_{k'=1}^\infty \frac{(\lambda v)^{k'-1}}{(k'-1)!} dv + \int_0^\infty (\lambda v) e^{-\lambda v} e^{\lambda v} b(v) dv \\
&= \int_0^\infty (\lambda v)^2 e^{-\lambda v} e^{\lambda v} b(v) dv + \int_0^\infty (\lambda v) b(v) dv \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty v^2 b(v) dv + \lambda \int_0^\infty v b(v) dv \\
&= \lambda^2 E[v^2] + \lambda E[v]
\end{aligned}$$

Finalmente al sustituir los valores de $E[k]$ y $E[k^2]$ en la ecuación para $E[n]$, obtenemos:

$$\bar{u} = \rho + \frac{\lambda^2 \text{var}(v) + \rho^2}{2(1 - \rho)} \quad (2.40)$$

Capítulo 3

Características del tráfico vehicular

En este capítulo analizamos ciertos modelos, en los que partimos del supuesto de que los vehículos modifican su velocidad de acuerdo al comportamiento del vehículo que los precede. De esta forma, la velocidad, aceleración o desaceleración de un vehículo depende del comportamiento del vehículo delante de él.

3.1. El diagrama fundamental de tráfico

Iniciemos este capítulo estudiando el diagrama fundamental de tráfico, que es una de las herramientas básicas para el estudio de tráfico vehicular.

En el estudio de cinemática básica, la primera fórmula que nos es presentada es la ecuación más simple para el cálculo de la velocidad promedio: $v = d/t$. A continuación modificamos esta fórmula para obtener otra que relacione el flujo de una vialidad con la concentración de vehículos y la velocidad promedio de los mismos. Si pensamos que ahora, en vez de analizar el movimiento de un vehículo, estamos tratando el movimiento de una colección de vehículos, podemos escribir la siguiente fórmula:

$$\frac{c}{t} = \frac{d}{t} \frac{c}{d}$$

donde c es el número de vehículos, t es tiempo, y d es distancia.

De esta forma podemos expresar la fórmula anterior en términos de flujos y concentraciones como:

$$\rho = \lambda u \quad (3.1)$$

donde ρ es el flujo o volumen (vehículos/tiempo), λ es la concentración o densidad (vehículos/distancia), y u es la velocidad. Podemos hacer una modificación para hacer un acercamiento a un comportamiento general, en lugar de utilizar u , la velocidad de algún vehículo, utilicemos m la velocidad promedio de los vehículos en la vía, para así obtener:

$$\rho = \lambda m \quad (3.2)$$

Existen distintas formas de calcular las variables ρ , λ y m , pero por el momento lo que nos interesa es que podemos entender a ρ como el recíproco de la distancia media entre vehículos. Y a λ como el recíproco del tiempo medio que tarda en pasar por un punto un vehículo desde que paso por dicho punto el vehículo anterior (podemos pensar que es el recíproco del tiempo entre vehículos).

El siguiente paso, para la construcción del diagrama fundamental de tráfico es, expresar el flujo y la velocidad como variables de la concentración en la vía, así:

$$\rho(\lambda) = \lambda m(\lambda)$$

Definimos ahora a λ' como la concentración máxima en la vía, es decir, es la concentración obtenida si en un espacio determinado, acomodamos los vehículos como si estuvieran estacionados, con el mínimo espacio entre ellos. Con esto obtenemos dos propiedades básicas del diagrama fundamental de tráfico:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 0 \\ \rho(\lambda') &= 0 \end{aligned}$$

El diagrama fundamental de tráfico es la gráfica del flujo como función de la concentración. Notemos que el flujo es una variable no negativa y con las propiedades anteriores podemos ver que la forma general de dicho diagrama es como se muestra en la siguiente figura:

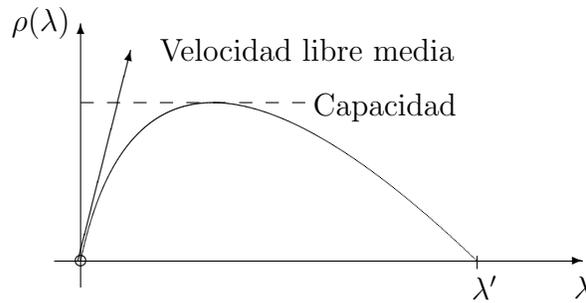


Gráfico 2

Es importante notar que con concentraciones bajas en la vía, los vehículos pueden transitar libremente, es decir, se mueven con velocidad óptima.

El punto donde se encuentra el máximo de la función $\rho(\lambda)$ es conocido como la capacidad de la vía. En una analogía con los modelos de poblaciones, podemos pensar que la capacidad de la vía es como la capacidad de sustentabilidad del medio, ya que, en los modelos de poblaciones, la capacidad de sustentabilidad del medio es el número máximo de individuos para los que existen recursos. En este caso, la capacidad de la vía es el número máximo de vehículos que soporta la vía sin que exista un congestionamiento, de ahí que en este punto encontremos el flujo máximo.

3.2. Deducción del diagrama fundamental

Aunque en la realidad los vehículos en una vía varían su velocidad, entre otros factores, de acuerdo a la forma de dicha vía, supongamos que los vehículos viajan con una velocidad constante x , siempre y cuando puedan hacerlo, teniendo en mente que, en general, los vehículos deben disminuir su velocidad para tomar una curva o al encontrarse en una vía con baches. Llamamos esta velocidad x , velocidad libre y supongamos que es una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$.

Supongamos también que dicha distribución de probabilidades tiene media $m_0 < \infty$ y varianza $v_0 < \infty$.

Como el vehículo mantiene la velocidad libre, siempre y cuando no exista otro vehículo que interfiera en su movimiento, existe el caso en el que un vehículo se ve en la necesidad de disminuir su velocidad para no chocar con el vehículo delante de él. Así, tenemos que definir también su velocidad promedio a través de la vía (y). Esta velocidad es una función de x y de λ .

En realidad es prácticamente imposible encontrar una ley que defina el comportamiento de la función $y(x, \lambda)$, ya que es una variable aleatoria que depende de la velocidad libre de un vehículo y de la concentración en la vía. Lo que podemos afirmar es el comportamiento de dicha función en situaciones específicas.

Por ejemplo, si tratamos con una vía vacía ($\lambda = 0$), dada la definición de la función y , el vehículo puede viajar con su velocidad libre, es decir, $y(x, 0) = x$. De forma similar, si la vía alcanza la concentración máxima, el vehículo no puede moverse: $y(x, \lambda') = 0$. Finalmente, si la velocidad libre del vehículo es cero, sin importar la concentración de la vía, la velocidad de dicho vehículo es cero: $y(0, \lambda) = 0$.

La función y tiene otra bondad que la variable x no tiene. Al considerar el intervalo de definición de la variable x nos damos cuenta de que $x \in [0, \infty)$ y no existe ninguna forma natural de truncar dicho intervalo. Sin embargo, la función y tiene un máximo ($\forall \lambda > 0$) cuando x tiende a infinito, de esta forma definiremos la función L como:

$$L(y) = y(\infty, \lambda)$$

Como L es simplemente el límite de la función y cuando $x \rightarrow \infty$, ésta tiene las propiedades de la función y , así, podemos afirmar que: $L(0) = \infty$ y $L(\lambda') = 0$. Estas cantidades pueden ser interpretadas como la velocidad promedio de un vehículo infinitamente veloz, cuando la vía se encuentra vacía y cuando la vía se encuentra totalmente ocupada, respectivamente.

Lo que pretendemos lograr en esta sección es encontrar una función de distribución para y , de forma que su dominio sea $[0, \infty)$, y que satisfaga las propiedades antes mencionadas para y .

Una distribución que cumple con todo esto es la distribución Beta, que podemos utilizar en caso de tener tráfico pesado, es decir, λ cerca de λ' . Recordemos que el dominio de la distribución Beta es $[0, 1]$, pero podemos definir como nuestra variable aleatoria z/L , de forma que el dominio de la función quede restringido a $[0, 1]$, y su imagen esté en el intervalo $[0, L]$. Así, al sustituir nuestra variable aleatoria en la función de distribución original obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p, q)} \Rightarrow \\ f(z) &= \frac{L \left(\frac{z}{L}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{L\beta-1}}{B(\alpha, L\beta)} \end{aligned}$$

$$= \frac{z^{\alpha-1}(L-z)^{L\beta-1}}{L^{L\beta+\alpha-1}B(\alpha, L\beta)}$$

De esta forma el cálculo de la esperanza y varianza de nuestra variable es relativamente sencillo, basta recordar la esperanza de una función de densidad Beta, y que nuestra variable z/L se distribuye Beta($\alpha, L\beta$).

$$\begin{aligned} E(z) &= E(Lz/L) \\ &= LE(z/L) \\ &= L \frac{\alpha}{\beta L + \alpha} \\ &= \frac{\alpha L}{\beta L + \alpha} \end{aligned} \quad (3.3)$$

y su varianza será:

$$\begin{aligned} var(z) &= L^2 var(z/L) \\ &= L^2 \frac{\alpha\beta L}{(\alpha + \beta L)^2(\alpha + \beta L + 1)} \\ &= \frac{\alpha\beta L^3}{(\alpha + \beta L)^2(\alpha + \beta L + 1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Es importante notar que cuando $L \rightarrow 0$, tanto la esperanza como la varianza tienden a cero, es decir, con tráfico pesado la esperanza de la velocidad será cero con muy pequeñas variaciones.

En caso de tener una vía con tráfico ligero (λ cerca de 0), podremos ajustar con precisión una distribución gama a la función de densidad de y .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} \Rightarrow \\ f(z) &= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} e^{-\beta_0 z} z^{\alpha_0-1} \end{aligned}$$

Con esperanza y varianza:

$$E(z) = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \quad (3.5)$$

$$var(z) = \frac{\alpha_0}{(\beta_0)^2} \quad (3.6)$$

De esta manera hemos encontrado de forma estadística dos distribuciones que ajustan en dos casos distintos el comportamiento de la velocidad media a través de la vía.

3.3. Modelos de vehículos consecutivos

Los modelos de vehículos consecutivos se basan en la interacción entre un vehículo y el que lo precede en la vía. Así, como se mencionó previamente, los cambios en la velocidad y aceleración de un vehículo vienen dados por los parámetros del vehículo que tiene delante.

Otro de los supuestos que hacemos en la construcción de estos modelos es que ningún vehículo puede rebasar a otro. Así podríamos pensar que este tipo de modelos se ajustan bien en calles de un solo carril o en carreteras donde no se puede rebasar.

Suponemos también que el comportamiento de los vehículos es completamente determinista y viene dado por una serie de ecuaciones diferenciales.

Para estos modelos tenemos que definir ciertas variables. Definimos así $x_n(t)$ como la posición del n -ésimo vehículo al tiempo t , $x'_n(t)$ su velocidad, y $x''_n(t)$ su aceleración.

Es importante analizar el comportamiento general del espaciamiento entre vehículos, tiende a ser mayor cuando se aumenta la velocidad y menor cuando esta disminuye. Podemos expresar este comportamiento en términos de las variables x 's como:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= C(x_n - x_{n+1}) + k \\ \Rightarrow x''_{n+1} &= C(x'_n - x'_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Este modelo únicamente considera para la aceleración y la desaceleración la diferencia de las velocidades entre los vehículos, en realidad, estos cambios en la velocidad se dan también dependiendo de la distancia entre vehículos. De esta forma, podemos considerar la distancia entre vehículos para obtener un nuevo modelo:

$$x''_{n+1} = C \frac{x'_n - x'_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} \quad (3.8)$$

Así, cuando los vehículos se encuentran lejos, los cambios en la velocidad son mínimos y cuando los vehículos se encuentran cerca, los cambios son mayores.

Una crítica al modelo anterior podría ser que no solo se deberían considerar la diferencia de las velocidades y el espaciamiento entre vehículos consecutivos, sino que debería considerarse que tan lejos se encuentra uno de otro en términos de tiempo. Podemos considerar el tiempo entre vehículos

como:

$$tpo = \frac{x_n - x_{n+1}}{x'_{n+1}}$$

Así al dividir entre esta cantidad en el modelo anterior obtenemos:

$$x''_{n+1} = Cx'_{n+1} \frac{x'_n - x'_{n+1}}{(x_n - x_{n+1})^2} \quad (3.9)$$

Hemos construído así, una serie de ecuaciones que determinan el comportamiento de un vehículo tomando en cuenta la posición, velocidad y aceleración del que le precede en una vía. Sin embargo, para expresar estos modelos en términos de λ , ρ y m , necesitamos fuertes condiciones de estabilidad que se ven reflejadas en el equilibrio del sistema, es decir, para llegar a una expresión de este tipo debemos suponer que todos los vehículos adquieren una velocidad constante a largo plazo, y que mantienen esta velocidad a través de la vía.

Aunque estas condiciones de equilibrio parezcan casi imposibles de obtener, el análisis del sistema en estas condiciones es matemáticamente rico, así que hacemos los desarrollos a continuación.

Integrando las ecuaciones para los tres modelos desarrollados, obtenemos ecuaciones para la velocidad del $n + 1$ -ésimo vehículo en cada uno de los casos:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= C(x_n - x_{n+1}) + k \\ x'_{n+1} &= C \log(x_n - x_{n+1}) + k \\ \log(x'_{n+1}) &= -C(x_n - x_{n+1})^{-1} + k \end{aligned}$$

De esta forma, cuando encontramos un sistema en equilibrio ($x'_{n+1} = m$), y gracias a las interpretaciones que obtuvimos para λ y ρ podemos expresar estas tres últimas ecuaciones como:

$$m = \frac{C}{\lambda} + k \quad (3.10)$$

$$m = C \log(1/\lambda) + k \quad (3.11)$$

$$\log(m) = -C\lambda + k \quad (3.12)$$

Utilizando las propiedades obtenidas para la función y aplicables a m , podemos obtener las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales previamente usadas, así, en las dos primeras ecuaciones usamos la condición

inicial para tránsito denso ($m(\lambda') = 0$) y en la tercera usamos la condición inicial para tránsito ligero ($m(0) = 0$). Como las dos primeras ecuaciones no tienen sentido cuando $\lambda = 0$, las restringimos al uso para tráfico pesado, de forma análoga restringimos la tercer ecuación a tránsito ligero. Así evaluando en las condiciones iniciales que presentamos, obtenemos:

$$\rho = C(1 - \lambda/\lambda') \quad (3.13)$$

$$\rho = C\lambda \log(\lambda'/\lambda) \quad (3.14)$$

$$\rho = m_0\lambda e^{-C\lambda} \quad (3.15)$$

Hemos obtenido así, las formas de tres diagramas fundamentales de tráfico a través de modelos de vehículos consecutivos. En el primer caso C debe ser un flujo, en el segundo debe ser una velocidad y en el tercero debe ser un espaciamiento, para que las ecuaciones tengan sentido.

Podemos obtener la última ecuación como una analogía del comportamiento de fluidos bajo ciertas condiciones.

3.4. Dos modelos empíricos

En el libro “**Mathematical theories of traffic flow**” de Frank A. Haight se proponen dos modelos que fueron obtenidos empíricamente, a continuación se presentan.

El primero se obtiene de la suposición de que existe una relación lineal entre la velocidad media y la concentración de vehículos en la vía, de esta forma iniciamos planteando la siguiente relación lineal:

$$\frac{m}{m_0} + \frac{\lambda}{\lambda'} = 1$$

Así, despejando y tomando en cuenta que $\rho = m\lambda$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m_0} &= 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} \\ \Rightarrow m &= m_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \\ \Rightarrow \rho &= \lambda m_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

El segundo modelo empírico es simplemente planteado como:

$$\rho = \frac{m_0\lambda(\lambda' - \lambda)^{1/2}}{Am_0\lambda^2 + (\lambda' - \lambda)^{3/2}} \quad (3.17)$$

Como veremos en secciones posteriores, estos dos modelos tienen propiedades con las que no cuentan los modelos de vehículos consecutivos y los modelos estadísticos, es por esto, que aunque no se presenta el desarrollo de la obtención de este segundo modelo empírico, consideramos que es importante incluirlo por las propiedades que posee.

3.5. Comparación de las relaciones flujo-densidad

A continuación presentamos un cuadro comparativo de las propiedades de los cinco modelos previamente mencionados, así como dos modelos estadísticos. Como vemos algunos modelos no son aplicables bajo ciertas condiciones. A partir de este punto vemos la importancia del segundo modelo empírico.

En el cuadro planteamos los modelos así como los valores en $\rho(0)$, $\rho(\lambda')$, $m(0)$, y $m(\lambda')$.

Recordemos que las propiedades deseables de una función $\rho(\lambda)$ son: $\rho(0) = 0$, $\rho(\lambda') = 0$, $m(0) = 0$ y $m(\lambda') = 0$.

Caso	Ecuación	$\rho(0)$	$\rho(\lambda')$	$m(0)$	$m(\lambda')$
I	$\rho = C \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)$	No	Si	No	Si
II	$\rho = C\lambda \log(\lambda'/\lambda)$	Si	Si	No	Si
III	$\rho = m_0\lambda e^{-C\lambda}$	Si	No	Si	No
IV	$\rho = \frac{m_0\lambda\alpha \log(\lambda'/\lambda)}{\beta \log(\lambda'/\lambda) + \alpha}$	Si	Si	Si	Si
V	$\rho = \frac{A\lambda(\lambda' - \lambda)}{B\lambda' + C\lambda}$	Si	Si	Si	Si
VI	$\rho = \lambda m_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)$	Si	Si	Si	Si
VII	$\rho = \frac{\lambda m_0(\lambda' - \lambda)^{1/2}}{Am_0\lambda^2 + (\lambda' - \lambda)^{3/2}}$	Si	Si	Si	Si

Cuadro 3.1: Comparación de modelos

En la tabla 4.2 mostramos las restricciones de los parámetros en cada caso, estas restricciones son importantes para que los modelos queden completamente definidos.

Caso	Restricciones sobre parámetros
I	Ninguna
II	C=Velocidad óptima
III	C=Tiempo entre vehículos óptimo
IV	$\alpha = \beta \ll 1$
V	$A = Bm_0$
VI	Ninguna
VII	Ninguna

Cuadro 3.2: Restricciones sobre parámetros

3.6. Una quinta condición

Consideremos una vía completamente vacía ($\lambda = 0$), hasta el momento hemos supuesto la existencia de una velocidad media libre m_0 . La quinta condición, que a continuación formulamos matemáticamente, propone que la velocidad media no debe variar cuando dicha vialidad se encuentra vacía. Es natural pensar que con una vía vacía, una vez que se adquiere la velocidad libre, la velocidad del vehículo no debe variar. La formulación matemática de esta quinta condición es:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dm}{d\lambda} = 0 \quad (3.18)$$

En realidad esta quinta condición es muy estricta, e incluso puede pensarse como irreal, ya que al transitar, un vehículo variará su velocidad de acuerdo a muchos factores y pensar que su variación será prácticamente imposible que su variación sea cero. Existe una forma de suavizar dicha hipótesis:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dm}{d\lambda} = \epsilon \quad (3.19)$$

con $\epsilon \ll 1$

Enunciada de esta forma la quinta condición pide que con una vía con poco tráfico, los cambios en la velocidad sean pequeños cuando la concentración en la vía varía poco.

Para finalizar el capítulo, hagamos otro cuadro comparativo donde mostremos cuales de los modelos antes mencionados, son viables para modelar con el método de vehículos consecutivos y cuales satisfacen esta quinta condición.

Caso	Mod. veh. cons.	$\frac{dm}{d\lambda}$	Satisface 5a cond.
I	Si	$-\frac{C}{\lambda^2}$	No
II	Si	$-\frac{C}{\lambda}$	No
III	Si	$-Cm_0e^{-C\lambda}$	Parcialmente
IV	Si	$-\frac{m_0}{\lambda[1+\log(\lambda'/\lambda)]^2}$	No
V	Si	$-Bm_0\lambda' \frac{B+C}{(B\lambda'+C\lambda)^2}$	Parcialmente
VI	Si	$-\frac{m_0}{\lambda'}$	Parcialmente
VII	Posiblemente	$-Am^2\lambda(2\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda)^{1/2}$	Si

Cuadro 3.3: Comparación de la quinta condición

Notemos que el único modelo que satisface completamente la quinta condición es el segundo modelo empírico, esta es una de las bondades previamente mencionadas de este modelo.

Entendemos que un modelo cumple parcialmente la quinta condición si cumplira dependiendo de la ϵ y las constantes elegidas.

Capítulo 4

Arreglos de vehículos

En este capítulo tratamos algunos problemas derivados de considerar una serie de vehículos en una vía. Por ejemplo, la “distancia” que existe entre dos vehículos consecutivos la cual llamaremos gap.

Aunque podríamos considerar únicamente los problemas teóricos, parte de la idea de estos desarrollos, es que los podamos utilizar de forma práctica para la solución de problemas reales de tráfico vehicular. Muchos de los desarrollos que presentamos en este capítulo, dependen del tipo de conteo que utilicemos para obtener datos estadísticos sobre el comportamiento del tráfico. Es por esta razón que explicamos los dos tipos de conteos que consideramos.

El primer método de conteo es el sincrónico. En éste, comenzamos a contar durante un periodo de conteo τ cuando pasa el primer vehículo por el punto donde nos ubicamos, de ahí su nombre.

El segundo método de conteo es el diacrónico, en donde contamos por el mismo periodo de conteo τ iniciando en un punto arbitrario en el tiempo. Así la diferencia entre los dos métodos radica en que, en el método sincrónico debemos esperar el paso del primer vehículo para iniciar la cuenta en el periodo de conteo, mientras que en el método diacrónico, iniciamos el periodo de conteo en un punto arbitrario.

4.1. Función de densidad inicial

Matemáticamente, la diferencia fundamental entre los dos tipos de conteo será la función de densidad del gap inicial. Como veremos en desarrollos futuros, esta función únicamente existe cuando se hace un conteo diacrónico.

Llamamos densidad inicial a la ley de probabilidad que sigue la longitud del primer gap de un conteo diacrónico. Debemos tratar por separado esta función de densidad, ya que, al considerar un conteo diacrónico, no podemos afirmar que el primer gap cuenta con la misma función de densidad que el resto de los gaps, debido a que no consideramos el gap completo. Para algunas funciones de densidad, como la exponencial, este gap inicial, mantiene la distribución exponencial, simplemente debemos ajustar los parámetros de dicha función de densidad.

Por el momento podemos entender por gap, la separación entre vehículos, ya sea en distancia o tiempo. Para el inicio de esta sección es indiferente si el gap se refiere a distancia o tiempo, y haremos únicamente la distinción cuando sea necesaria.

Supongamos que la función de distribución de los gaps es $G(x)$, su función de densidad es $g(x)$, y tiene media γ . Pensemos ahora que el conteo inicia un tiempo x antes del final de un intervalo de longitud y , así obtenemos:

$$g_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y} \quad 0 < x < y \quad (4.1)$$

$$g_{Y|X}(y|x) = \frac{g(y)}{1 - G(x)} \quad x < y < \infty \quad (4.2)$$

La primera ecuación es el resultado de que sea equiprobable obtener un punto en un segmento, dada la longitud de dicho segmento. La segunda ecuación es simplemente la función de distribución de los gaps en el intervalo contraído $x < y < \infty$.

Usando Bayes podemos obtener:

$$g_{X|Y}(x|y)g_1(y) = g_{Y|X}(y|x)g_0(x)$$

Esta $g_0(x)$ es precisamente la función de densidad del gap inicial para los gaps en el caso diacrónico. Y $g_1(y)$ es la función de densidad de cualquier otro gap.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{y}g_1(y) &= \frac{g(y)}{1 - G(x)}g_0(x) \\ \Rightarrow g_1(y) &= \frac{g(y)y}{1 - G(x)}g_0(x) \\ \Rightarrow \int_0^\infty g_1(y)dy &= \int_0^\infty \frac{g(y)y}{1 - G(x)}g_0(x)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 1 &= \frac{\gamma}{1 - G(x)} g_0(x) \\ \Rightarrow g_0(x) &= \frac{1 - G(x)}{\gamma}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Tomemos ahora el caso particular de encontrarnos una distribución de gaps exponencial, entonces tendríamos que la media sería: $\gamma = 1/\mu$ y utilizando las definiciones de las funciones gama incompletas que presentamos en el capítulo de preliminares podemos obtener también:

$$\begin{aligned}G(x) &= \frac{\gamma(k, \mu x)}{\Gamma(k)} \\ g_0(x) &= \frac{\mu \Gamma(k, \mu x)}{k \Gamma(k)}\end{aligned}$$

donde k es el conteo del capítulo 3.

Es posible también calcular la transformada de Laplace correspondiente a la función de densidad inicial en términos de la transformada de Laplace de la función de densidad de los gaps. Basta con tomar la expresión 5.3 y aplicar propiedades de la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}g_0(x) &= \frac{1 - G(x)}{\gamma} \\ \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} g_0(x) dx &= \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1 - G(x)}{\gamma} dx \\ \Rightarrow \phi_0(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{\gamma} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-sx} G(x)}{\gamma} dx \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty e^{-sx} dx - \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty e^{-sx} G(x) dx\end{aligned}$$

gracias a la ecuación 2.11 obtenemos:

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\gamma s} [e^{-sx}]_0^\infty - \frac{\phi(s)}{\gamma s} \\ &= \frac{1}{\gamma s} - \frac{\phi(s)}{\gamma s} \\ &= \frac{1 - \phi(s)}{\gamma s}\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde $\phi_0(s)$ es la transformada de Laplace de $g_0(x)$ y $\phi(s)$ es la transformada de Laplace de $g(x)$ la función de densidad de los gaps.

Es sencillo encontrar una ecuación que relacione los momentos centrales de la función de densidad de los gaps con los momentos centrales de la función de densidad inicial.

$$\begin{aligned}\phi_0(s) &= \frac{1 - \phi(s)}{\gamma s} \Rightarrow \\ \phi_0(s)\gamma s &= 1 - \phi(s) \Rightarrow\end{aligned}$$

derivando con respecto a s :

$$\gamma[s\phi_0'(s) + \phi_0(s)] = -\phi'(s)$$

derivando de nuevo:

$$\begin{aligned}\gamma[s\phi_0''(s) + \phi_0'(s) + \phi_0'(s)] &= -\phi''(s) \\ \gamma[s\phi_0''(s) + 2\phi_0'(s)] &= -\phi''(s)\end{aligned}$$

derivamos sucesivamente hasta obtener:

$$\gamma[s\phi_0^{(n)}(s) + n\phi_0^{(n-1)}(s)] = -\phi^{(n)}(s)$$

evaluando en 0 y multiplicando por $(-1)^n$ para obtener momentos centrales:

$$n\gamma m_{n-1}^0 = m_n$$

recordemos que γ es la media de los gaps

$$\Rightarrow nm_1 m_{n-1}^0 = m_n \tag{4.5}$$

Otro resultado importante, es la distribución de los gaps, es decir, $g_1(x)$, basta con retomar el primer paso utilizado para la obtención de $g_0(x)$ y sustituir precisamente $g_0(x)$, recordemos que este primer paso fue la aplicación del teorema de Bayes, obteniendo:

$$\frac{1}{y}g_1(y) = \frac{g(y)}{1 - G(x)}g_0(x)$$

al sustituir $g_0(x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}g_1(y) &= \frac{g(y)}{1-G(x)} \frac{1-G(x)}{\gamma} \\ &= \frac{g(y)}{\gamma} \\ \Rightarrow g_1(y) &= \frac{yg(y)}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2. Relaciones entre métodos de conteo

Los desarrollos de esta sección tienen como finalidad establecer ciertas relaciones entre las funciones obtenidas teóricamente, cuando utilizamos el método de conteo sincrónico y cuando utilizamos el método de conteo diacrónico. Iniciemos pensando en la probabilidad de contar menos de n vehículos en un periodo τ , que denotamos como $P_n(\tau)$.

Sin embargo, podemos pensar el número de vehículos contados en τ , en términos de la suma de las longitudes de los gaps relativos a los vehículos contados y así obtener que $P_n(\tau)$ es la probabilidad de que la suma de $n+1$ gaps sea menor o igual a τ . Recordemos que la función de densidad de los gaps es $g(x)$, de ahí que la suma de $n+1$ gaps tenga como función de densidad a la $n+1$ -ésima convolución de g y así podemos escribir en el caso de conteo sincrónico:

$$P_n(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} g^{(n+1)*}(x) dx \quad (4.7)$$

o en el caso diacrónico:

$$\bar{P}_n(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} g^{n*}(x) * g_0(x) dx \quad (4.8)$$

La diferencia radica en la distribución del primer gap, recordemos que para el caso de conteo sincrónico no existe la función de densidad inicial.

Para diferenciar los términos relativos al conteo diacrónico, de ahora en adelante, utilizamos una barra como se muestra en la probabilidad $\bar{P}_n(\tau)$.

Notemos que para que las probabilidades sean consistentes con la teoría, en el caso sincrónico debemos considerar como gap al periodo de tiempo desde que pasa el n -ésimo vehículo hasta que termina el periodo de conteo τ . Mientras que en el caso diacrónico, al existir la función de densidad inicial,

no se considera como gap este último periodo y es compensado con el gap entre el inicio del periodo de conteo τ y el paso del primer vehículo.

Hacemos ahora ciertos desarrollos con respecto a un conteo sincrónico que nos servirán para expresar los resultados relativos al conteo diacrónico en términos del conteo sincrónico.

Es conveniente definir el complemento de las probabilidades $P_n(\tau)$, así $Q_n(\tau) = 1 - P_n(\tau)$ tiene propiedades que nos son de utilidad. Notemos primero que:

$$Q_n(\tau) = 1 - P_n(\tau) = \int_0^\tau g^{(n+1)*}(x) dx$$

Es en el cálculo de la transformada de Laplace que podemos apreciar una de las propiedades más importantes de este complemento. Recordemos que la transformada de Laplace de una convolución de funciones independientes es el producto de sus transformadas de Laplace. Suponemos entonces que los gaps son independientes e idénticamente distribuidos, así:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Q_n(\tau)) &= \frac{\phi^{n+1}(s)}{s} \\ \Rightarrow Q_n(\tau) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\phi^{n+1}(s)}{s}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Calculemos ahora la función generadora de probabilidad considerando a $p_n(\tau)$ como la probabilidad de contar exactamente n vehículos en τ . Para simplificar la notación removemos el argumento τ .

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (P_n - P_{n-1}) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1} z^n \end{aligned}$$

no tiene sentido de hablar de P_m si $m < 0$, ya que P_m es la probabilidad de contar m vehículos en el periodo τ , y esta es cero si $m < 0$, cambiamos los límites de la segunda suma:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} z^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - Q_n) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - Q_{n-1}) z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{n-1}) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi^n z^n}{s} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi^{n+1} z^n}{s} \right]
\end{aligned}$$

utilizando el teorema de convergencia dominada para intercambiar la integral con la serie obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= 1 + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi z}{s(1 - \phi z)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi}{s(1 - \phi z)} \right] \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi z}{s(1 - \phi z)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi}{s(1 - \phi z)} \right] \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} + \frac{\phi z}{s(1 - \phi z)} - \frac{\phi}{s(1 - \phi z)} \right] \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s(1 - \phi z)} \right] \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Nuestra siguiente tarea es obtener una expresión para la función generadora, en el caso de usar un conteo diacrónico, en términos de la función generadora con conteo sincrónico. Para ésto definimos de manera análoga a $\bar{Q}_n(\tau)$, y suponemos que la función de densidad inicial es independiente a las funciones de densidad de los gaps y que estas son independientes entre sí e idénticamente distribuídas. Así podemos calcular la transformada de Laplace de $\bar{Q}_n(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{Q}_n(\tau)) &= \frac{1}{s} \mathcal{L}(g_0(x)) \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(g(x)) \\
&= \frac{1}{s} \left[\frac{\phi^n (1 - \phi)}{s\gamma} \right] \\
&= \frac{\phi^n (1 - \phi)}{s^2 \gamma} \Rightarrow \\
\bar{Q}_n(\tau) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\phi^n (1 - \phi)}{s^2 \gamma} \right] \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Para reescribir esta última ecuación, podemos derivar un resultado de la

ecuación 2.11 del capítulo 2.

$$\begin{aligned}
 \Phi_s &= \frac{\phi(s)}{s} \\
 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(G)(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}(g)(s)}{s}\right] \\
 \Rightarrow G(y) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}(g)(s)}{s}\right] \\
 \Rightarrow \int_0^y g(x)dx &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}(g)(s)}{s}\right]
 \end{aligned}$$

En realidad lo que utilizamos de este desarrollo, es el hecho de que, la transformada inversa de Laplace, de la transformada de Laplace de una función g , dividida entre s , no es más que la función acumulativa de g .

Así, podemos reescribir esta última ecuación como:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_n(\tau) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\phi^n(1-\phi)}{s^2\gamma}\right] \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\tau \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\phi^n}{s} - \frac{\phi^{n+1}}{s}\right] dt \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\tau (Q_{n-1} - Q_n) dt \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\tau p_n(t) dt
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ahora hacemos un procedimiento análogo al caso de conteo sincrónico para obtener la función generadora:

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}) z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_{n-1} z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \bar{Q}_n) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{Q}_{n-1}) z^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{n-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_n z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z^n \phi^{n-1} (1 - \phi)}{s^{2\gamma}} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z^n \phi^n (1 - \phi)}{s^{2\gamma}} \right]
\end{aligned}$$

utilizando el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
&= 1 + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z(1 - \phi)}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] \\
\Rightarrow \bar{\pi}(z) - 1 &= z \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] \\
&= (z - 1) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] \\
\Rightarrow \frac{\bar{\pi} - 1}{z - 1} &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_0^\tau \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s\gamma(1 - z\phi)} \right] \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_0^\tau \pi(z) dt \tag{4.13}
\end{aligned}$$

A primera vista parece que el argumento de la integral ($\pi(z)$) no tiene dependencia en t , sin embargo recordemos que removimos el argumento de las probabilidades $P_n(\tau)$ y $Q_n(\tau)$, que tienen dependencia en t al integrar con respecto a t , de 0 a τ .

Podemos calcular la media del conteo diacrónico a partir de un punto intermedio del desarrollo anterior.

$$\bar{\pi}(z) = 1 + (z - 1) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right]$$

utilizando el teorema 5 del capítulo 2 podemos derivar para obtener:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \bar{\pi}'(z) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - \phi}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)} \right] + (z - 1) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\phi(1 - \phi)}{s^{2\gamma}(1 - z\phi)^2} \right] \\
\Rightarrow \bar{\pi}'(1) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{2\gamma}} \right] \\
\Rightarrow \bar{m} &= \frac{1}{\gamma} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] \\
\bar{m} &= \frac{\tau}{\gamma} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

ya que $\tau = \mathcal{L}^{-1}[1/s^2]$

Es por esto que la media del conteo diacrónico es $\bar{m} = \tau/\gamma$. Este es un resultado intuitivo, ya que en realidad estamos diciendo que la media del conteo es el periodo de conteo dividido entre la media de los gaps, dicha división debería tener como resultado el número medio de gaps por periodo de conteo, que corresponde, dada la construcción, a la media de vehículos observados por periodo de tiempo.

4.3. El proceso Gama de tiempos

Hasta el momento una de las distribuciones que más hemos utilizado para modelar las llegadas ha sido la distribución Poisson, ésta induce tiempos interarribo (gaps) distribuidos exponencial negativo, sin embargo, encontramos, dada la gráfica de la función $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, que los gaps con mayor probabilidad son los que se encuentran cerca del origen.

Para modelar de forma más precisa podemos pensar que dichos tiempos en realidad no son exponenciales, sino que siguen una distribución Gama, que en realidad es una distribución fuertemente ligada a la distribución exponencial, ya que podemos obtener una distribución Gama como resultado de la suma de n variables distribuidas exponencial(λ).

Suponiendo que los gaps siguen una distribución Gama(k, μ) podemos afirmar que:

$$\phi(s) = \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^k$$

Analicemos primero el caso del conteo sincrónico. Recordemos que en el caso sincrónico, la transformada de Laplace de las probabilidades $Q_n(\tau)$ esta dada por ϕ^{n+1}/s , donde ϕ es la transformada de Laplace de los gaps. Así, al suponer que los gaps tienen distribución Gama(k, μ), obtenemos que la transformada de Laplace de dichas probabilidades es:

$$\mathcal{L}(Q_n) = \frac{\phi^{n+1}}{s} = \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^{k(n+1)} \frac{1}{s}$$

Recordemos que la n -ésima convolución de funciones de densidad gama independientes con parámetros k y μ , es de nuevo una función gama, ahora

con parámetros nk y μ , así, podemos definir las probabilidades $P_n(\tau)$, usando funciones de distribución gama para los gaps:

$$P_n(\tau) = 1 - \int_0^\tau \frac{e^{-\mu t} \mu^{(n+1)k} t^{(n+1)k-1}}{\Gamma[(n+1)k]} dt$$

usando funciones gama incompletas podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{\gamma((n+1)k, \mu\tau)}{\Gamma[(n+1)k]} \\ &= \frac{\Gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} \end{aligned}$$

De esta forma podemos expresar las probabilidades de obtener exactamente n arribos como:

$$p_n(\tau) = \frac{\Gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} - \frac{\Gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} \quad (4.15)$$

A continuación demostraremos que las funciones gama incompletas complementarias, pueden ser expresadas como sumas de probabilidades de Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} &= \int_\tau^\infty \frac{e^{-\mu t} \mu^{nk} t^{nk-1}}{\Gamma(nk)} \\ &= \frac{\mu^{nk}}{\Gamma(nk)} \int_0^\infty e^{-\mu t} t^{nk-1} dt \\ &= \frac{\mu^{nk}}{\Gamma(nk)} \left\{ \left[-\frac{t^{nk-1} e^{-\mu t}}{\mu} \right]_\tau^\infty + \frac{n-1}{\mu} \int_\tau^\infty e^{-\mu t} t^{n-2} dt \right\} \\ &= \frac{\mu^{nk}}{\Gamma(nk)} \left\{ \frac{\tau^{nk-1} e^{-\mu\tau}}{\mu} + \frac{nk-1}{\mu} \int_\tau^\infty e^{-\mu t} t^{n-2} dt \right\} \\ &= \frac{\mu^{nk-1} \tau^{nk-1} e^{-\mu\tau}}{(nk-1)!} + \frac{\mu^{nk-1} (nk-1)}{\Gamma(nk)} \int_\tau^\infty e^{-\mu t} t^{n-2} dt \\ &= \frac{(\mu\tau)^{nk-1} e^{-\mu\tau}}{(nk-1)!} + \frac{\mu^{nk-1} (nk-1)}{(nk-1)!} \int_\tau^\infty e^{-\mu t} t^{n-2} dt \\ &= \frac{(\mu\tau)^{nk-1} e^{-\mu\tau}}{(nk-1)!} + \frac{\mu^{nk-1}}{(nk-2)!} \int_\tau^\infty e^{-\mu t} t^{n-2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& = \sum_{j=0}^{nk-1} \frac{e^{-\mu\tau} (\mu\tau)^j}{j!}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Notemos que cada uno de los miembros de la suma es la probabilidad de Poisson de tener exáctamente j llegadas a una cola con tasa de llegadas μ , en un intervalo de tiempo τ . Si abreviamos dichas probabilidades como:

$$B_j = \frac{e^{-\mu\tau} (\mu\tau)^j}{j!}$$

podemos expresar $p_n(\tau)$ como:

$$\begin{aligned}
p_n(\tau) &= \sum_{j=0}^{(n+1)k-1} B_j - \sum_{j=0}^{nk-1} B_j \\
&= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} B_j
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Interpretemos este último resultado como la probabilidad de que el conteo sincrónico de vehículos sea 0 en un intervalo de tiempo τ , es la suma de las primeras k probabilidades de Poisson anteriormente mencionadas. Y prosiguiendo de la misma forma podemos decir que la probabilidad de que el conteo sea 1 serán las siguientes k probabilidades de Poisson y así sucesivamente.

Calculemos ahora la función generadora de probabilidad.

$$\begin{aligned}
\pi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} - \frac{\Gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} \right] z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{\gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} \right) - \left(1 - \frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} \right) \right] z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} - \frac{\gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} \right] z^n \\
&= 1 - \frac{\gamma(k, \mu\tau)}{\Gamma(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} - \frac{\gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} \right] z^n \\
&= 1 + (z-1) \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)}
\end{aligned}$$

Hacemos ahora el desarrollo para el caso diacrónico. Sustituyendo la ecuación 5.15 y el valor $1/\gamma$ en la ecuación 5.12 obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_n(\tau) &= \frac{\mu}{k} \left[\int_0^\tau \frac{\gamma(nk, \mu t)}{\Gamma(nk)} dt - \int_0^\tau \frac{\gamma[(n+1)k, \mu t]}{\Gamma[(n+1)k]} dt \right] \\ &= \frac{\mu}{k} \left[\int_0^\tau A_{nk} dt - \int_0^\tau A_{(n+1)k} dt \right]\end{aligned}$$

donde $A_n = \frac{\gamma(n, \mu\tau)}{\Gamma(n)}$.

Notemos que $A_{(n+1)k} = A_{nk} - \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} B_j$ ya que:

$$\begin{aligned}A_{nk} - \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} B_j &= \frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} - \frac{\Gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} + \frac{\Gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} \\ &= \frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} - \frac{\gamma(nk, \mu\tau)}{\Gamma(nk)} + \frac{\gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} \\ &= \frac{\gamma[(n+1)k, \mu\tau]}{\Gamma[(n+1)k]} \\ &= A_{(n+1)k}\end{aligned}$$

Así podemos expresar las probabilidades $\bar{Q}_n(\tau)$ como:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_n(\tau) &= \frac{\mu}{k} \int_0^\tau A_{nk} - A_{(n+1)k} dt \\ &= \frac{\mu}{k} \int_0^\tau \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} B_j dt \\ &= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} \frac{\mu}{k} \int_0^\tau B_j dt\end{aligned}$$

Si integramos por partes j veces B_j obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^\tau B_j dt &= \int_0^\tau e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dt \\ &= \frac{1}{j!} \int_0^\tau e^{-\mu t} (\mu t)^j dt \\ &= \frac{1}{j!} \left(\left[-\frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{\mu} \right]_0^\tau + j \int_0^\tau e^{-\mu t} (\mu t)^{j-1} dt \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(\mu\tau)^j e^{-\mu\tau}}{\mu j!} + \frac{1}{\mu(j-1)!} \int_0^\tau e^{-\mu t} (\mu t)^{j-1} dt \\
&\quad \vdots \\
&= -\sum_{i=0}^j \frac{(\mu\tau)^i e^{-\mu\tau}}{\mu i!}
\end{aligned}$$

Que substituyendo da como resultado para \bar{Q}_n :

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_n(\tau) &= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} \frac{\mu}{k} \left[-\sum_{i=0}^j \frac{(\mu\tau)^i e^{-\mu\tau}}{\mu i!} \right] \\
&= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{k} \left[-\sum_{i=0}^j \frac{(\mu\tau)^i e^{-\mu\tau}}{i!} \right] \\
&= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{k} \left[-\sum_{i=0}^j B_j \right]
\end{aligned}$$

dado que $A_{(n+1)k} = A_{nk} - \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} B_j$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{k} (A_{j+1} - A_0) \\
&= \sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{k} (A_{j+1}) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=nk+1}^{(n+1)k} A_j \tag{4.18}
\end{aligned}$$

El siguiente paso lógico es, como lo hemos hecho a lo largo del capítulo, obtener las probabilidades no acumulativas. Lo hacemos a continuación:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_n(\tau) &= \bar{Q}_{n-1}(\tau) - \bar{Q}_n(\tau) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} A_j - \frac{1}{k} \sum_{j=nk}^{(n+1)k} A_j
\end{aligned}$$

Expresemos ahora estas probabilidades no acumulativas en términos de las probabilidades de Poisson:

$$\bar{p}_n(\tau) = \frac{1}{k} (A_{(n-1)k+1} - A_{nk+1}) + \cdots + \frac{1}{k} (A_{nk} - A_{(n+1)k})$$

$$= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} B_j + \cdots + \sum_{j=nk}^{(n+1)k+1} B_j \right) \quad (4.19)$$

Consideremos primero el caso donde $n = 0$, así la ecuación 5.19 se convierte en:

$$\begin{aligned} \bar{p}_0(\tau) &= \frac{1}{k} \left[B_0 + (B_0 + B_1) + \cdots + \sum_{j=0}^{k-1} B_j \right] \\ &= \frac{1}{k} [kB_0 + (k-1)B_1 + \cdots + B_{k-1}] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) B_j \end{aligned} \quad (4.20)$$

Retomamos la ecuación 5.19 para analizar el caso de que $n > 0$:

$$\begin{aligned} \bar{p}_n(\tau) &= \frac{B_{(n-1)k+1}}{k} + \frac{2B_{(n-1)k+2}}{k} + \\ &\quad \cdots + \frac{kB_{nk}}{k} + \frac{(k-1)B_{nk+1}}{k} + \\ &\quad \quad \quad \cdots + \frac{B_{(n+1)k-1}}{k} \end{aligned}$$

notemos que los coeficientes de el primer y el último sumando son iguales, de la misma forma, son iguales los coeficientes del segundo y penúltimo sumandos, y así sucesivamente. Así podemos reescribir esta suma como:

$$= \sum_{j=-k+1}^{k-1} \left(1 - \frac{|j|}{k}\right) B_{nk+j} \quad (4.21)$$

Finalmente podemos expresar la media del conteo diacrónico usando el hecho de que supusimos que los gaps siguen una distribución Gama. Recordemos que la media del conteo asincrónico puede ser expresada como el periodo de conteo entre la media de los gaps, así obtenemos:

$$\bar{m} = \frac{\mu\tau}{\gamma} \quad (4.22)$$

4.4. Traslación de distribuciones de espaciamiento

Hasta el momento hemos supuesto que los espaciamientos pueden tomar valores que incluyen el cero, podemos entender por espaciamiento un gap medido en distancia. En realidad al permitir que un gap tenga magnitud cero estamos tomando los vehículos como objetos puntuales, es decir, no ocupan lugar en el espacio. Para remover esta suposición basta con tratar los espaciamientos con una distribución trasladada.

Si suponemos que cada vehículo tiene una longitud constante Δ , los espaciamientos entre vehículos no pueden tomar valores menores a dicha Δ . Es por esta razón que decimos que una distribución trasladada quita la suposición de que los vehículos son objetos puntuales.

Tomemos la distribución trasladada

$$g_{\Delta}(x) = g(x - \Delta) \quad (4.23)$$

Veamos ahora cuál es la transformada de Laplace correspondiente a la distribución trasladada.

$$\phi_{\Delta} = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x - \Delta) dx$$

haciendo el cambio de variable $u = x - \Delta$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+\Delta)} g(u) du \\ &= e^{-s\Delta} \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du \\ &= e^{-s\Delta} \phi \end{aligned} \quad (4.24)$$

Utilicemos este resultado para obtener las transformadas de Laplace para los conteos sincrónico y diacrónico. Analicemos primero el conteo sincrónico. Recordemos que $Q_n(\tau)$ es la transformada inversa de ϕ^{n+1}/s , así:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Q_n^{\Delta}(\tau)) &= \frac{\phi_{\Delta}^{n+1}}{s} \\ &= e^{-s\Delta(n+1)} \frac{\phi^{n+1}}{s} \\ &= \frac{\phi^{n+1}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-s\Delta(n+1)]^j}{j!} \end{aligned}$$

recordemos que dividir entre s en la transformada de Laplace es equivalente a integrar con respecto a τ , así, multiplicar por s es equivalente a derivar con respecto a τ . Además la transformada de Laplace de ϕ^{n+1}/s es $Q_n(\tau)$, así:

$$\begin{aligned} Q_n^\Delta(\tau) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\phi^{n+1}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-s\Delta(n+1)]^j}{j!} \right) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\phi^{n+1}}{s} \right) \frac{[-s\Delta(n+1)]^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

usando el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^j \phi^{n+1}(s)}{s} \right) \frac{[-\Delta(n+1)]^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-\Delta(n+1)]^j}{j!} \frac{d^j Q_n(\tau)}{d\tau^j} \end{aligned}$$

usando ahora el teorema de Taylor podemos reescribir como:

$$Q_n^\Delta(\tau) = Q_n(\tau - \Delta(n+1)) \quad (4.25)$$

que es un resultado lógico, ya que puede ser interpretado como que las probabilidades acumuladas para el conteo sincrónico trasladado no son más que la traslación de las probabilidades acumuladas.

Notemos ahora que las probabilidades trasladadas no tienen sentido para valores de τ pequeñas, por esto debemos truncar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_n^\Delta(\tau) &= Q_n(\tau - \Delta(n+1)) && \text{si } \tau > \Delta(n+1) \\ Q_n^\Delta(\tau) &= 0 && \text{si } \tau \leq \Delta(n+1) \end{aligned}$$

Al tener dos casos para $Q_n^\Delta(\tau)$ debemos ser cuidadosos en el uso de la fórmula $p_n(\tau) = P_n(\tau) - P_{n-1}(\tau)$.

Para simplificar la notación, decimos que B_k^j es la k -ésima suma Poisson con parámetro $\mu[\tau - j\Delta]$, es decir:

$$B_k^j = \sum_{i=0}^k e^{\mu(\tau-j\Delta)} \frac{[\mu(\tau-j\Delta)]^i}{i!}$$

Así, la probabilidad de que el conteo sea 0 en un intervalo de tiempo menor o igual a Δ será 1, y es B_0^1 en caso contrario.

$$p_0^\Delta(\tau) = \begin{cases} B_0^1 & \tau > \Delta \\ 1 & \tau \leq \Delta \end{cases}$$

Procediendo de una forma similar podemos obtener las siguientes dos probabilidades:

$$p_1^\Delta(\tau) = \begin{cases} -B_0^1 + B_0^2 + B_1^2 & \tau > 2\Delta \\ 1 - B_0^1 & \Delta < \tau \leq 2\Delta \\ 0 & 0 < \tau \leq \Delta \end{cases}$$

y

$$p_2^\Delta(\tau) = \begin{cases} -B_0^2 - B_1^2 + B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 & \tau > 3\Delta \\ 1 - B_0^2 - B_1^2 & 2\Delta < \tau \leq 3\Delta \\ 0 & \Delta < \tau \leq 2\Delta \\ 0 & 0 < \tau \leq \Delta \end{cases}$$

Si procedemos de esta forma, podemos expresar en general para n :

$$p_n^\Delta(\tau) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n B_j^{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_j^n & \tau > (n+1)\Delta \\ 1 - \sum_{j=0}^{n-1} B_j^n & n\Delta < \tau \leq (n+1)\Delta \\ 0 & \tau \leq n\Delta \end{cases}$$

Si recordamos las propiedades de las sumas Poisson, podemos expresar las ecuaciones anteriores como:

$$p_n^\Delta(\tau) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1, \mu[\tau-(n+1)\Delta])}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma(n, \mu[\tau-n\Delta])}{\Gamma(n)} & \tau > (n+1)\Delta \\ 1 - \frac{\Gamma(n, \mu[\tau-n\Delta])}{\Gamma(n)} & n\Delta < \tau \leq (n+1)\Delta \\ 0 & \tau \leq n\Delta \end{cases} \quad (4.26)$$

Para dar una interpretación al parámetro de las funciones gama incompletas, sólo debemos reescribirlo como:

$$\mu(\tau - n\Delta) = \Delta\mu \left(\frac{\tau}{\Delta} - n \right)$$

ahora tenemos que $\Delta\mu$ es el porcentaje promedio de espacio ocupado por vehículos ($\Delta\mu = \lambda/\lambda'$) y τ/Δ es el intervalo de conteo expresado en longitudes de vehículos.

Es ahora tiempo de analizar el conteo diacrónico. Los procedimientos que usamos en esta parte son similares al desarrollo para el conteo sincrónico.

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_n^\Delta(\tau) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\phi_\Delta^n (1 - \phi_\Delta)}{s^2 \gamma} \right) \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\phi^n}{s} \frac{1}{s\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-sn\Delta)^j}{j!} - \frac{\phi^{n+1}}{s} \frac{1}{s\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-s\Delta(n+1)]^j}{j!} \right) \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{s} \frac{1}{s\gamma} \frac{(-sn\Delta)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\phi^{n+1}}{s} \frac{1}{s\gamma} \frac{[-s\Delta(n+1)]^j}{j!} \right)
\end{aligned}$$

usando el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\phi^n}{s} \frac{1}{s\gamma} \frac{(-sn\Delta)^j}{j!} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\phi^{n+1}}{s} \frac{1}{s\gamma} \frac{[-s\Delta(n+1)]^j}{j!} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_0^{\tau - \Delta n} Q_{n-1}(u) du - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\tau - \Delta(n+1)} Q_n(u) du
\end{aligned}$$

Con esto hemos logrado expresar las probabilidades del conteo diacrónico con distribución trasladada en términos de las probabilidades del conteo sincrónico con distribución no trasladada.

4.5. Distribuciones de gaps compuestos

Hasta el momento solamente hemos considerado un tipo de vehículos, todos con la misma distribución de gaps y con la misma longitud. A continuación presentamos los resultados que obtenemos de la suposición de que existen dos tipos de vehículos. Aunque podemos obtener sin dificultad los resultados para n tipos de vehículos, sólo presentamos los resultados para $n = 2$.

Primero supongamos que los tipos de vehículos que existen son: vehículos del tipo A y vehículos del tipo B. Los vehículos del tipo A tendrán gaps con función de densidad trasladada $g_1(x - a)$, definida sobre (a, ∞) , con transformada de Laplace $e^{-as}\phi_1$, y se encuentran en una proporción p en la vía. Por otra parte, los vehículos del tipo B tendrán gaps con función de densidad trasladada $g_2(x - b)$, definida en (b, ∞) , con transformada de Laplace $e^{-bs}\phi_2$ y proporción en la vía de $q = 1 - p$.

La función de distribución de todos los gaps sobre la vía es:

$$g(x) = pg_1(x - a) + qg_2(x - b) \quad (4.27)$$

con transformada de Laplace

$$\phi(s) = pe^{-as}\phi_1(s) + qe^{-bs}\phi_2(s) \quad (4.28)$$

Finalmente podemos expresar las probabilidades $Q_n^\Delta(\tau)$ usando los resultados de secciones anteriores, así:

$$\begin{aligned} Q_n^\Delta(\tau) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} (pe^{-as}\phi_1 + qe^{-bs}\phi_2)^{n+1} \right) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (pe^{-as}\phi_1)^j (qe^{-bs}\phi_2)^{n-j+1} \right) \end{aligned}$$

Aunque es posible, no obtenemos esta última transformada de Laplace, por no ser necesaria mayor precisión en los cálculos.

A continuación comentamos la idea general de otros modelos de tráfico vehicular.

Esta gama de modelos es el conjunto de modelos de colas independientes para tráfico. Estos modelos suelen utilizarse para modelar situaciones donde encontramos dos colas con tasas de servicio distintas.

Uno de los casos particulares más comunes es cuando modelamos una cola con tasa de servicio pequeña y otra con un flujo tal, que permita la circulación prácticamente libre. Por ejemplo, cuando encontramos una vía con dos carriles, en donde el derecho es para tomar una salida con una caseta, y el izquierdo es para continuar en dicha vía.

En este caso, nos gustaría ver que los vehículos en la cola para pasar la caseta, tuvieran una distribución de gaps casi determinista, es decir, el espacio que deja un vehículo entre sí y el que lo precede, es prácticamente nulo. Mientras que en el carril con flujo libre, los gaps deberían tener una distribución aleatoria, por ejemplo, una exponencial. De esta forma el modelo tendría como distribución de gaps:

$$g(x) = p\delta(x - \Delta) + q\lambda e^{-\lambda(x-\Delta)}$$

Existe otro modelo que únicamente utilizaremos para encontrar la distribución de las velocidades en la siguiente sección. Este modelo es el modelo

de velocidad constante. En éste suponemos que los vehículos pueden pasar a través de otros, o bien, que existe un carril para cada vehículo. De esta forma, todos los vehículos mantienen una velocidad constante a lo largo del trayecto.

4.6. Distribuciones de velocidad

La idea de esta sección es encontrar las distribuciones de velocidad de los vehículos con dos tipos de mediciones.

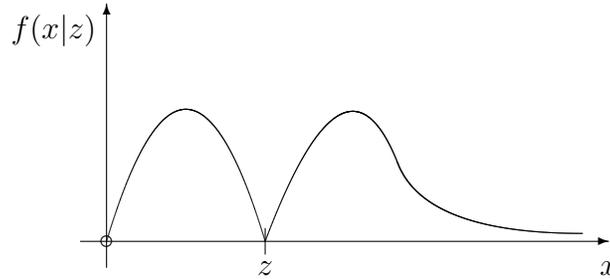
La primera de estas mediciones es la que conocemos como medición espacial de velocidades. La metodología para obtener esta distribución es irrealizable para los fines de este trabajo, por esto solo la consideramos en teoría. El procedimiento sería, tomar una fotografía aérea de un conjunto finito de vehículos (espacio finito), donde cada vehículo tiene un velocímetro, de forma que conoceríamos la velocidad de cada uno de los vehículos en un tiempo específico y espacio finito.

La segunda medición es la más real, la conocemos como medición temporal. Para obtener esta distribución deberíamos estar en un punto fijo, con un radar, registrando la velocidad de cada vehículo al pasar por dicho punto durante un periodo de tiempo finito.

Aunque en realidad es más sencillo encontrar la distribución temporal de velocidades, esta tiene un problema, tiene un sesgo a favor de los vehículos que transitan con mayor velocidad. Esto se debe a que al llevar mayor velocidad, llegan al punto de medición en menos tiempo que los vehículos con menor velocidad y esto repercute en la distribución, ya que observamos mayor número de vehículos veloces, lo que induce una proporción sesgada de vehículos veloces.

Para remover el sesgo de la distribución temporal, debemos considerar un periodo de conteo infinito. Para este fin, encontramos una distribución intermedia, para posteriormente tomar el límite cuando el tiempo o el espacio tienden a infinito.

Pensemos que nos encontramos a bordo de un vehículo que se mueve con velocidad constante z a través de la vía. La función de densidad condicional de las velocidades observadas por el vehículo de referencia, tiene la siguiente forma:



Así, $f(x|0)$ es la distribución temporal y $f(x|\infty)$ es la distribución espacial.

Notemos que $f(x = z|z) = 0$, ya que el vehículo de referencia nunca alcanza ni es alcanzado por un vehículo que lleva la misma velocidad que éste.

Estamos considerando que las velocidades medidas por el vehículo en movimiento, son las velocidades reales.

El número de vehículos que se encuentra el vehículo de referencia dependerá de la proporción de vehículos en un rango $(x, x + \Delta x)$ y de la tasa con la que los rebasa, es decir, la diferencia en las velocidades $(|x - z|)$. De aquí podemos afirmar que:

$$f(x|z) = C|x - z|f(x) \quad 0 < x < \infty$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de las velocidades suponiendo un modelo de velocidades constantes.

Podemos calcular la constante C considerando que toda función de densidad debe integrar 1:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} f(x|z) dx \\ &= \int_0^{\infty} C|x - z|f(x) dx \\ &= C \int_0^{\infty} |x - z|f(x) dx \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{\int_0^{\infty} |x - z|f(x) dx} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a:

$$f(x|z) = \frac{|x-z|f(x)}{\int_0^\infty |t-z|f(t)dt} \quad (4.29)$$

Cuando hacemos que z tienda a infinito, obtenemos la distribución real de las velocidades, es decir:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(x|z) = f(x)$$

y cuando hacemos a z tender a cero tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(x|z) &= f(x|z=0) \\ &= \frac{|-x|f(x)}{\int_0^\infty |-t|f(t)dt} \\ &= \frac{xf(x)}{\int_0^\infty tf(t)dt} \\ &= \frac{xf(x)}{m} \end{aligned}$$

donde m es la media de la distribución real de velocidades.

Si denotamos a los momentos centrales de la distribución real ($f(x|\infty) = f(x)$) con m_k , y al k -ésimo momento central de la distribución espacial ($f(x|0) = \bar{f}(x)$) con \bar{m}_k , podemos encontrar una relación entre los momentos centrales de ambas distribuciones:

$$\begin{aligned} f(x|0) &= \frac{xf(x)}{m} \\ \Rightarrow x^{k-1}\bar{f}(x)m &= x^k f(x) \\ \Rightarrow m \int_0^\infty x^{k-1}\bar{f}(x)dx &= \int_0^\infty x^k f(x)dx \\ \Rightarrow m\bar{m}_{k-1} &= m_k \end{aligned} \quad (4.30)$$

Además m es la media armónica de $\bar{f}(x)$, ya que:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \frac{xf(x)}{m} \\ \Rightarrow m \frac{\bar{f}(x)}{x} &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow m \int_0^\infty \frac{\bar{f}(x)}{x} dx &= \int_0^\infty f(x) dx \\
\Rightarrow m \bar{E}(1/x) &= 1 \\
\Rightarrow m &= \frac{1}{\bar{E}(1/x)}
\end{aligned}$$

4.7. Teoría de renovación

En esta sección estudiamos la posibilidad de ver ciertos aspectos del tráfico vehicular en términos de la teoría de renovación.

En la teoría de renovación consideramos artículos que están sujetos a fallas y necesitan ser renovados. Podemos pensar que cuando un nuevo vehículo pasa por un punto, está siendo renovado, es decir, el gap entre dos vehículos consecutivos será el tiempo de vida correspondiente a la perspectiva de la teoría de renovación.

El caso diacrónico es análogo al proceso general de renovación. Llamamos al análogo del caso sincrónico simplemente proceso de renovación. Decimos que la función de densidad inicial es la función de equilibrio de retraso.

La aplicación principal de la analogía con la teoría de renovación es otra demostración de la fórmula, que previamente obtuvimos, para la media del conteo. Cuando expresamos esta media en términos de τ la llamamos función de renovación.

Conocemos como proceso cuasi-Poisson a aquel que tiene gaps exponenciales negativos trasladados.

Para caracterizar el proceso de renovación, las funciones de renovación $m(\tau)$ y $\bar{m}(\tau)$ deben satisfacer ciertas condiciones. En este caso, pedimos únicamente que las funciones de renovación satisfagan el teorema elemental de renovación, que en este caso viene dado por la ecuación:

$$\bar{m}(\tau) = \frac{\tau}{\gamma} \tag{4.31}$$

Otro teorema afirma que el recíproco del gap medio es el límite de cualquier media de conteo cuando el periodo de conteo tiende a infinito.

Supongamos ahora que queremos encontrar la probabilidad de que un punto del camino esté cubierto por un vehículo. Si los coches tienen longitud Δ , la densidad espacial es λ y x_n es la posición del n -ésimo vehículo, la respuesta es $\lambda\Delta$. Pero tenemos además que:

$$\begin{aligned}
\lambda\Delta &= Pr[x \text{ esté cubierto}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Pr[x_n - \Delta \leq x \leq x_n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Pr[x \leq x_n \leq x + \Delta] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{x+\Delta} g^{n*}(z) dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) - P_n(x + \Delta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x + \Delta) - Q_n(x) \\
&= m(x + \Delta) - m(x)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

4.8. Tráfico como variable continua

Debemos aclarar que en esta sección hacemos una analogía con la teoría de movimiento de fluidos. Como tal, no es consistente con la teoría de renovación, ya que los puntos de renovación tendrían magnitud cero y como consecuencia probabilidad cero.

Otro punto que debemos notar antes de comenzar a hacer este desarrollo, es que solo ciertos resultados de la teoría de mecánica de fluidos son aplicables a la teoría de tráfico vehicular. La diferencia primordial entre la teoría de mecánica de fluidos y la teoría de tráfico vehicular, es una propiedad básica de los fluidos que no sólo no cumple el tráfico vehicular, sino que se comporta de forma totalmente opuesta. Esta propiedad básica es, que al aumentar la presión de un fluido, se incrementa también la velocidad de salida del mismo. Mientras que el equivalente a aumentar la presión en un sistema de tráfico vehicular sería aumentar el número de vehículos en la vía, factor que disminuye la velocidad de los vehículos.

Suponemos que existen funciones $\lambda(x, t)$ y $\rho(x, t)$ límites cuando $\tau \rightarrow 0$. En este caso vemos que desaparecen las diferencias entre los casos sincrónico y diacrónico, así como la distribución de los gaps.

Podemos pensar que el tráfico es un fluido que se mantiene constante, es

decir:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.33)$$

Para demostrarlo consideremos un camino R de longitud Δx y un intervalo de tiempo Δt , y sea N el número de vehículos entrantes a R durante el intervalo de tiempo Δt , así como N' el número de vehículos que salen en dicho intervalo. Tenemos:

$$\begin{aligned} N &= \rho(x, t)\Delta t \\ N' &= \rho(x + \Delta x, t)\Delta t \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \Delta \lambda \Delta t &= \Delta N \\ &= N - N' \\ &= [\rho(x, t) - \rho(x + \Delta x, t)]\Delta t \end{aligned}$$

Recordemos que el desarrollo en series de Taylor para dos variables es:

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) &= f(x, y) + hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \\ &\quad 1/2![h^2 f_{xx}(x, y) + 2hk f_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)] + \dots \end{aligned}$$

El desarrollo de Taylor de $\rho(x, t)$ es:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho(x, t) + 0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + 0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots \\ &= \rho(x, t) \end{aligned}$$

y el de $\rho(x + \Delta x, t)$ es:

$$\begin{aligned} \rho(x + \Delta x, t) &= \rho(x, t) + \Delta x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ &\quad 1/2![(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots] + \dots \end{aligned}$$

agrupando los términos tales que $o(\Delta x)$

$$\begin{aligned} \rho(x, t) - \rho(x + \Delta x, t) &= \rho(x, t) - [\rho(x, t) + \Delta x \frac{\partial \rho}{\partial x}] + o(\Delta x) \\ &= -\Delta x \frac{\partial \rho}{\partial x} + o(\Delta x) \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta\lambda\Delta t &= [-\Delta x \frac{\partial\rho}{\partial x} + o(\Delta x)]\Delta t \\
 \Rightarrow \Delta\lambda &= -\Delta x \frac{\partial\rho}{\partial x} + o(\Delta x) \\
 \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\Delta x} &= -\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \\
 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] \\
 &\Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{\partial\rho}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Cuando tratamos el tráfico como una “substancia” para hacer el sistema continuo, debemos considerar gran parte de las variables como continuas. Un ejemplo es la función $\lambda(x, t)$. Una obtención de esta función se deriva de pensar en que los vehículos con velocidad u que se encuentran en el lugar x al tiempo t , debieron estar en el lugar $x - ut$ al tiempo cero. Así:

$$\lambda(x, t) = \int_0^\infty \lambda(x - ut, 0) f(u) du \quad (4.34)$$

4.9. Gaps dependientes

Hasta el momento hemos supuesto que los gaps son independientes de cualquier otra variable, pero es intuitivo pensar que los gaps dependen de las velocidades de los vehículos. De hecho hicimos anteriormente modelos asumiendo este comportamiento, cuando analizamos los modelos de vehículos consecutivos. Así, suponemos en esta sección que los gaps dependen de las velocidades de cada vehículo y con esto, unos de otros.

En general vemos que vehículos rápidos tienden a tener un gap pequeño delante de ellos, mientras que vehículos lentos tienden a tener un gap grande delante de ellos y viceversa, vehículos rápidos tienden a tener un gap grande detrás y vehículos lentos un gap pequeño detras.

La diferencia con los desarrollos que hicimos en secciones anteriores, es que, dada la dependencia de los gaps, no podemos expresar la función de densidad de la suma de gaps, como el producto de las funciones de densidad de cada gap.

Supongamos que los vehículos aparecen en los puntos del espacio; x_0 , $x_0 + x_1$, $x_0 + x_1 + x_2$, ...

Supongamos también que $g_0(x)$ es la función de densidad de x_0 y que para $x_n|x_{n-1}$ es $g(x|y)$. Así, la función de densidad conjunta de x_0 y x_1 es:

$$f_{x_1, x_0}(x, y) = g(x|y)g_0(y) \quad (4.35)$$

al integrar sobre todos los valores de y , obtenemos la distribución de x_1 .

$$f_{x_1}(x) = \int_0^{\infty} g(x|y)g_0(y)dy$$

Procedemos de forma análoga para encontrar la distribución de x_2 . La distribución de conjunta de x_2 y x_1 es:

$$\begin{aligned} f_{x_2, x_1}(x, y) &= g(x|y)f_{x_1}(y) \\ &= g(x|y) \int_0^{\infty} g(y|z)g_0(z)dz \\ &= \int_0^{\infty} g(x|y)g(y|z)g_0(z)dz \end{aligned}$$

así, la distribución de x_2 es:

$$f_{x_2}(x) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(x|y)g(y|z)g_0(z)dzdy$$

Podemos encontrar la distribución de x_n procediendo análogamente. El problema es que aún tomando una distribución como la exponencial, después de pocas iteraciones, las cuentas se vuelven tediosas y pesadas.

Capítulo 5

Problemas de retrasos

En este capítulo trataremos los problemas que se derivan de que un vehículo o un peatón se vea retrasado a causa del flujo vehicular.

5.1. Peatones retrasados por t.v.

Iniciemos suponiendo que el peatón arriva al cruce al tiempo $t = 0$ y le toma un tiempo T cruzar la calle.

Supongamos también que el primer vehículo arriva al cruce al tiempo t_1 con una función de densidad inicial $g_0(x)$, con función de distribución $G_0(x)$ y con transformada de Laplace $\phi_0(s)$. Los siguientes vehículos arrivan al cruce con tiempos interarribo t_2, t_3, \dots con función de densidad $g(x)$, función de distribución $G(x)$ y transformada de Laplace $\phi(s)$.

Consideremos ahora el tiempo de espera del peatón:

$$\begin{aligned} W(x) &= \text{Prob}[\text{El peaton se tarda en comenzar a cruzar} \leq x] \\ w(x) &= W'(x) \end{aligned}$$

la transformada de Laplace de esta distribución es: $\varphi(s)$

Veamos que esta distribución tiene un pico en el origen de tamaño:

$$\text{Prob}[t_1 > T] = 1 - G_0(T)$$

Supongamos que el peatón puede cruzar la calle en el periodo $n + 1$, cuando el tiempo interarribo entre el n -ésimo y el $n + 1$ -ésimo vehículo es

mayor a T , es decir, $t_{n+1} > T$. Entonces su retraso sería:

$$\sum_{i=1}^n t_i \quad (5.1)$$

Para que suceda esto, necesitamos que el peatón no pueda cruzar en los primeros n periodos. Así, requerimos que cada gap sea menor a T . Para conseguir esto dividiremos la función de densidad entre la función de distribución evaluada en T y restringiremos a x en el intervalo $(0, T)$, es decir:

$$\frac{g_0(x)}{G_0(T)} \quad 0 < x < T$$

De forma análoga para el resto de los gaps:

$$\frac{g(x)}{G(T)} \quad 0 < x < T$$

Así la parte continua de $w(x)$ condicionada a que el peatón pueda cruzar en el $n + 1$ -ésimo periodo es:

$$\left(\frac{g_0(x)}{G_0(T)} \right) * \left(\frac{g(x)}{G(T)} \right)^{(n-1)*} \quad 0 < x < nT$$

Ahora expresaremos la distribución de $w(x)$ no-condicional, multiplicando por la probabilidad de que el peatón cruce en dicho periodo y sumando sobre todas las n 's, así obtenemos:

$$w(x) = [1 - G_0(T)]\delta(x) + [1 - G(T)] \sum_{n=1}^{\infty} g_0(x) * g(x)^{(n-1)*} \quad 0 < x < nT \quad (5.2)$$

donde por convención $g^{0*} = 1$.

Para calcular la transformada de Laplace de $w(x)$, necesitamos antes definir las siguientes dos funciones:

$$\begin{aligned} \phi_0(s; T) &= \int_0^T e^{-sx} g_0(x) dx \\ \phi(s; T) &= \int_0^T e^{-sx} g(x) dx \end{aligned}$$

Habiendo definido estas funciones podemos afirmar que la transformada de Laplace de $w(x)$ es:

$$\varphi(s) = [1 - G(T)] + \frac{[1 - G(T)]\phi_0(s; T)}{1 - \phi(s; T)} \quad (5.3)$$

Para obtener el valor medio del tiempo de espera, evaluamos en $-s$:

$$\varphi(-s) = [1 - G(T)] + \frac{[1 - G(T)]\phi_0(-s; T)}{1 - \phi(-s; T)}$$

derivando obtenemos:

$$\varphi'(-s) = \frac{[1 - \phi(-s; T)][1 - G(T)]\phi_0'(s; T) - [1 - G(T)]\phi_0(s; T)[- \phi'(s; T)]}{[1 - \phi(s; T)]^2}$$

evaluando en $s=0$:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \frac{[1 - G(T)][1 - G(T)] \int_0^T x g_0(x) dx + [1 - G(T)] G_0(T) \int_0^T x g(x) dx}{[1 - G(T)]^2} \\ \varphi'(0) &= \int_0^T x g_0(x) dx + \frac{G_0(T)}{1 - G(T)} \int_0^T x g(x) dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

Finalmente expresaremos la función $W(x)$ en términos de las probabilidades de conteo:

$$W(x) = \int_0^x w(t) dt$$

suponiendo que $(r-1)T < x < rT$ obtenemos:

$$W(x) = 1 - G_0(T) + [1 - G(T)] \int_0^x \sum_{n=r}^{\infty} g_0(t) * g^{(n-1)*}(t) dt$$

usando el teorema de convergencia dominada:

$$\begin{aligned} W(x) &= 1 - G_0(T) + [1 - G(T)] \sum_{n=r}^{\infty} \int_0^x g_0(t) * g^{(n-1)*}(t) dt \\ &= 1 - G_0(T) + [1 - G(T)] \sum_{n=r}^{\infty} \bar{Q}_{n-1}(x) \\ &= 1 - G_0(T) + [1 - G(T)] \frac{1}{\gamma} \sum_{n=r}^{\infty} \int_0^x Q_{n-2}(t) - Q_{n-1}(t) dt \\ &= 1 - G_0(T) + [1 - G(T)] \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^x Q_{r-2}(t) - Q_{r-1} + Q_{r-1} + \dots dt \right] \\ &= 1 - G_0(T) + [1 - G(T)] \frac{1}{\gamma} \int_0^x Q_{r-2}(t) dt \end{aligned} \quad (5.5)$$

con $(r-1)T < x < rT$.

5.2. Retraso por t.v. con llegadas Poisson

En esta sección nos enfocamos al caso particular del gap generado por llegadas Poisson, es decir, gaps con distribución exponencial negativo. De esta forma suponemos que:

$$g_0(x) = g(x) = \mu e^{-\mu x} \quad (5.6)$$

$$G_0(x) = G(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad (5.7)$$

$$\phi_0(s) = \phi(s) = \frac{\mu}{\mu + s} \quad (5.8)$$

donde μ es la tasa de llegadas a la vía vehicular.

Calculemos ahora el valor de $\phi(s; T)$ que será el mismo que $\phi_0(s; T)$:

$$\begin{aligned} \phi(s; T) &= \int_0^T e^{-sx} \mu e^{-\mu x} dx \\ &= -\frac{\mu}{\mu + s} \int_0^T -(\mu + s) e^{-(\mu+s)x} dx \\ &= -\frac{\mu}{\mu + s} \left[e^{-(\mu+s)x} \right]_0^T \\ &= -\frac{\mu}{\mu + s} e^{-(\mu+s)T} + \frac{\mu}{\mu + s} \\ &= \frac{\mu}{\mu + s} \left[1 - e^{-(\mu+s)T} \right] \end{aligned}$$

Así al sustituir en la ecuación 6.3 obtenida en la sección anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= [1 - G_0(T)] + \frac{[1 - G(T)]\phi_0(s; T)}{1 - \phi(s; T)} \\ &= e^{-\mu T} + \frac{e^{-\mu T} \left(\frac{\mu}{\mu+s} (1 - e^{-(\mu+s)T}) \right)}{1 - \frac{\mu}{\mu+s} (1 - e^{-(\mu+s)T})} \\ &= e^{-\mu T} \left[1 + \frac{\frac{\mu}{\mu+s} (1 - e^{-(\mu+s)T})}{\frac{\mu+s-\mu(1-e^{-(\mu+s)T})}{\mu+s}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\mu T} \left[1 + \frac{\mu(1 - e^{-(\mu+s)T})}{\mu + s - \mu(1 - e^{-(\mu+s)T})} \right] \\
&= e^{-\mu T} \left[\frac{\mu + s - \mu(1 - e^{-(\mu+s)T}) + \mu(1 - e^{-(\mu+s)T})}{\mu + s - \mu(1 - e^{-(\mu+s)T})} \right] \\
&= \frac{(\mu + s)e^{-\mu T}}{s + \mu e^{-(\mu+s)T}} \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Invertir esta función no es sencillo. Un método más apropiado para encontrar la función $w(x)$ es verificar que la ecuación 6.9 es la transformada de Laplace de la función:

$$w(x) = e^{-\mu T} \delta(x) + \mu e^{-\mu T} \sum_{j=0}^{r-1} (-e^{-\mu T})^j \left[\frac{(\mu(x - jT))^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{(\mu(x - jT))^j}{j!} \right] \tag{5.10}$$

con $(r-1)T < x < rT$ y $r = 1, 2, \dots$

Para demostrar este hecho, necesitamos hacer uso de la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}(x - b)^n = n! s^{-n-1} e^{-sb} \quad x > b$$

Hagamos ahora la demostración de esta fórmula por inducción:

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x - b)(s) &= \int_b^{\infty} e^{-sx} (x - b) dx \\
&= \int_b^{\infty} x e^{-sx} dx - b \int_b^{\infty} e^{-sx} dx \\
&= \left[-\frac{x}{s} e^{-sx} \right]_b^{\infty} + \int_b^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s} dx + \left[\frac{b}{s} e^{-sx} \right]_b^{\infty} \\
&= \frac{b}{s} e^{-sb} - \left[\frac{e^{-sx}}{s^2} \right]_b^{\infty} - \frac{b}{s} e^{-sb} \\
&= \frac{e^{-sb}}{s^2} \\
&= 1! s^{-1-1} e^{-sb}
\end{aligned}$$

Suponemos válido para $n-1$.

Probamos para n :

$$\mathcal{L}(x - b)^n(s) = \int_b^{\infty} e^{-sx} (x - b)^n dx$$

sea $y = x - b$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x - b)^n(s) &= \int_0^\infty e^{-s(y+b)} y^n dy \\ &= e^{-sb} \int_0^\infty e^{-sy} y^n dy\end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{aligned}&= e^{-sb} \left[-\frac{ye^{-sy}}{s} \right]_0^\infty + e^{-sb} \int_0^\infty \frac{ny^{n-1}e^{-sy}}{s} dy \\ &= e^{-sb} \frac{n}{s} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-sy} dy \\ &= \frac{n}{s} \int_b^\infty e^{-s(y+b)} y^{n-1} dy \\ &= \frac{n}{s} \int_b^\infty e^{-sx} (x - b)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{s} [(n-1)! s^{-(n-1)-1} e^{-sb}] \\ &= n! s^{-n-1} e^{-sb}\end{aligned}$$

Demostremos ahora que la ecuación 6.9 en realidad es la transformada de Laplace de la función $w(x)$ propuesta:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(w)(s) &= e^{-\mu T} + \mu e^{-\mu T} \sum_{j=0}^{r-1} [-e^{-\mu T}]^j \mathcal{L} \left\{ \frac{[\mu(x - jT)]^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{[\mu(x - jT)]^j}{j!} \right\} \\ &= e^{-\mu T} + \frac{\mu}{s} e^{-\mu T} + \sum_{j=1}^{r-1} [-e^{-\mu T}]^j \left\{ \frac{\mu^{j-1} (j-1)! s^{-j} e^{-sjT}}{(j-1)!} + \frac{\mu^j j! s^{-j-1} e^{-sjT}}{j!} \right\} \\ &= e^{-\mu T} + \frac{\mu}{s} e^{-\mu T} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{s} \right) \left[\frac{-\frac{\mu}{s} e^{-(\mu+s)T} - \left(-\frac{\mu}{s}\right)^r e^{-(\mu+s)Tr}}{1 + \frac{\mu}{s} e^{-(\mu+s)T}} \right] \\ &= e^{-\mu T} + \frac{\mu}{s} e^{-\mu T} + \mu e^{-\mu T} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{s} \right) \left[\frac{-\mu e^{-(\mu+s)T}}{s + \mu e^{-(\mu+s)T}} \right] \\ &= e^{-\mu T} \left[1 - \frac{\mu}{s} + \left(1 + \frac{\mu}{s} \right) \left(\frac{-\mu e^{-(\mu+s)T}}{s + \mu e^{-(\mu+s)T}} \right) \right] \\ &= \frac{e^{-\mu T} (\mu + s)}{s + \mu e^{-(\mu+s)T}}\end{aligned}$$

Con esto demostramos que la función $w(x)$ propuesta, es en realidad la función de densidad del tiempo de espera del peatón cuando consideramos servicios exponenciales negativos con tasa μ en la vía principal.

Para calcular el tiempo medio de espera debemos calcular antes el valor de la siguiente función:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T xg(x)dx &= \int_0^T x\mu e^{-\mu x} dx \\
 &= \left[-\frac{\mu x}{\mu} e^{-\mu x} \right]_0^T - \mu \int_0^T -\frac{1}{\mu} e^{-\mu x} dx \\
 &= \left[-xe^{-\mu x} \right]_0^T + \int_0^T e^{-\mu x} dx \\
 &= -Te^{-\mu T} - \left[\frac{1}{\mu} e^{-\mu x} \right]_0^T \\
 &= \frac{1}{\mu} - Te^{-\mu T} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu T}
 \end{aligned}$$

Notemos que el valor de esta integral no se altera al sustituir $g(x)$ por $g_0(x)$.

Ahora contamos con todos los cálculos necesarios para obtener el tiempo medio de espera en este caso particular:

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \int_0^T xg_0(x)dx + \frac{G_0(T)}{1-G(T)} \int_0^T xg(x)dx \\
 &= \int_0^T x\mu e^{-\mu x} dx + \frac{1-e^{-\mu T}}{e^{-\mu T}} \int_0^T x\mu e^{-\mu x} dx \\
 &= \left(\frac{1}{\mu} - Te^{-\mu T} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu T} \right) \left(1 + \frac{1-e^{-\mu T}}{e^{-\mu T}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\mu} - Te^{-\mu T} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu T} \right) \left(\frac{1}{e^{-\mu T}} \right) \\
 &= \frac{1}{\mu} (e^{\mu T} - \mu T - 1) \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

5.3. Peatones con llegadas Poisson

Supongamos que los peatones tienen llegadas Poisson con parámetro λ . Recordemos que en el capítulo 3 obtuvimos la función generadora de las

llegadas en términos de las transformadas de Laplace del tiempo de espera y el tiempo de servicio, es decir:

$$\pi(s) = \phi(\lambda(1-s))\beta(\lambda(1-s))$$

en este caso tenemos que $\phi(s) = \varphi(s)$ y:

$$\begin{aligned}\beta(\lambda(1-s)) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-s)x} \delta(x) dx \\ &= 1\end{aligned}$$

Así, obtenemos:

$$\pi(s) = [1 - G_0(T)] + \frac{[1 - G(T)]\phi_0[\lambda(1-s); T]}{1 - \phi[\lambda(1-s); T]} \quad (5.12)$$

que al sustituir los valores de las funciones de densidad, distribución y los valores de las transformadas de Laplace incompletas podemos escribir como:

$$\pi(s) = \frac{A - Bs}{C - Ds + Pe^{Qs}}$$

donde las constantes A , B , C , D , P y Q , quedan expresadas en términos de λ , μ y T .

5.4. Bloqueos

Si pensamos en el cruce de una vía principal y una vía secundaria, podemos ver que la vía principal permitirá el cruce de un “objeto” (ya sea peatón o vehículo) de la vía secundaria, cuando el gap entre dos vehículos es mayor al tiempo que requiere el “objeto” de la vía secundaria para cruzar.

Así podemos pensar que cada vehículo de la vía principal empuja un periodo de bloqueo mientras se mueve. En caso de que el gap entre dos vehículos sea mayor al periodo de bloqueo que empuja el vehículo posterior, diremos que existe un periodo no bloqueado. Así, los “objetos” de la vía secundaria, podrán cruzar cuando exista un periodo de no bloqueo.

Un conjunto de bloqueos forma un intervalo de bloqueo, de forma análoga, un intervalo de no bloqueo está conformado por un conjunto de periodos de no bloqueo.

Digamos que la función de densidad de la longitud de los bloqueos es $b(x)$, con transformada de Laplace $\beta(s)$. Notemos que $b(x)$ esta definida en el intervalo $[T, \infty)$ ya que todo bloque debe ser mayor al tiempo que requiere un “objeto” de la vía secundaria para cruzar.

Nos interesa encontrar una relación entre bloqueos trasladados y bloqueos disminuidos, que serán bloqueos menos la longitud T , ya que en general podemos trabajar con resultados calculados para distribuciones de probabilidad con dominio en $[0, \infty)$.

Consideremos ahora un bloqueo disminuído, estos bloqueos disminuídos tendrán una función de densidad definida en el intervalo $[0, \infty)$. Si la transformada de Laplace de los bloqueos disminuídos es $\gamma(s)$, entonces tenemos la siguiente relación:

$$\beta(s) = e^{-sT}\gamma(s) \quad (5.13)$$

Notemos que la distribución de la longitud de los bloqueos disminuídos guarda con respecto a la distribución del tiempo de espera una relación análoga a la relación entre los tipos de conteo mencionados en el capítulo 5. Es decir la distribución de los bloqueos será la misma que la distribución de los gaps en un conteo sincrónico. De ahí que podemos escribirla como:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= [1 - G(T)] + \frac{[1 - G(T)]\phi(s; T)}{1 - \phi(s; T)} \\ &= \frac{[1 - G(T)](1 - \phi(s; T)) + [1 - G(T)]\phi(s; T)}{1 - \phi(s; T)} \\ &= \frac{[1 - G(T)] - [1 - G(T)]\phi(s; T) + [1 - G(T)]\phi(s; T)}{1 - \phi(s; T)} \\ &= \frac{1 - G(T)}{1 - \phi(s; T)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Con esto tenemos completamente definida la distribución de los bloqueos.

De forma análoga podemos pensar en periodos no bloqueados aumentados, que serán periodos no bloqueados trasladados una cantidad T . En realidad lo que estamos haciendo es considerar el periodo de no bloqueo en términos de gaps. Así, podemos decir que la función de densidad de los periodos no bloqueados aumentados es:

$$a(x) = \frac{g(x + T)}{1 - G(T)} \quad 0 < x < \infty \quad (5.15)$$

con transformada de Laplace:

$$\alpha(s) = \frac{e^{sT}\phi(s)}{1 - G(T)} \quad (5.16)$$

Consideremos ahora el tamaño promedio de los bloqueos B y el tamaño medio de los no bloqueos A . Estos valores medios siguen una relación sencilla.

Calculemos primero el valor de B :

$$\begin{aligned} B &= -\beta'(0) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left[e^{-sT} \gamma(s) \right]_{s=0} \\ &= \left[T e^{-sT} \gamma(s) - e^{-sT} \gamma'(s) \right]_{s=0} \\ &= \left[T e^{-sT} \frac{1 - G(T)}{1 - \phi(s; T)} + \frac{e^{-sT} (1 - G(T)) (-\phi(s; T))}{[1 - \phi(s; T)]^2} \right]_{s=0} \\ &= \frac{T(1 - G(T))(1 - \phi(0; T)) + (1 - G(T))(-\phi'(0; T))}{[1 - \phi(0; T)]^2} \\ &= \frac{T(1 - G(T))^2 + (1 - G(T)) \int_0^T xg(x)dx}{(1 - G(T))^2} \\ &= \frac{T(1 - G(T)) + \int_0^T xg(x)dx}{1 - G(T)} \end{aligned}$$

Calculemos ahora el valor de A :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty xa(x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{xg(x+T)}{1 - G(T)} dx \end{aligned}$$

sea $y = x + T$ con $T < y < \infty$

$$\begin{aligned} A &= \int_T^\infty \frac{(y - T)g(y)}{1 - G(T)} dy \\ &= \frac{\int_T^\infty yg(y)dy - \int_T^\infty Tg(y)dy + \int_0^T yg(y)dy - \int_0^T yg(y)dy}{1 - G(T)} \\ &= \frac{\gamma - \int_0^T yg(y)dy - T(1 - G(T))}{1 - G(T)} \end{aligned}$$

De esta forma podemos ver que:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{\gamma - \int_0^T yg(y)dy - T(1 - G(T)) - T(1 - G(T)) + \int_0^T yg(y)dy}{1 - G(T)} \\ &= \frac{\gamma}{1 - G(T)} \\ &= \frac{1}{g_0(T)} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Si suponemos que los gaps entre los vehículos son exponenciales negativos con parámetro μ obtenemos:

$$A + B = \frac{1}{\mu e^{-\mu T}} \tag{5.18}$$

Código de simuladores

En esta sección presentamos simuladores gráficos creados en C++. Con ellos obtenemos una descripción gráfica cualitativa del comportamiento del tráfico vehicular bajo ciertas condiciones.

Los supuestos básicos utilizados en la creación de estos simuladores son los siguientes:

1. Los vehículos aceleran y frenan instantáneamente.
2. Las llegadas a la vía se modelan con una distribución Poisson (se le pide la tasa de llegadas al usuario).
3. Cuando un vehículo tiene mayor espacio en el carril adyacente y espacio suficiente para cambiar de carril, lo hará de forma instantánea.
4. Las velocidades de los vehículos son generadas a partir de una discretización de la distribución normal.
5. Los camiones, representados gráficamente en color azul, tienen menor velocidad promedio que los automóviles, representados en color rojo.

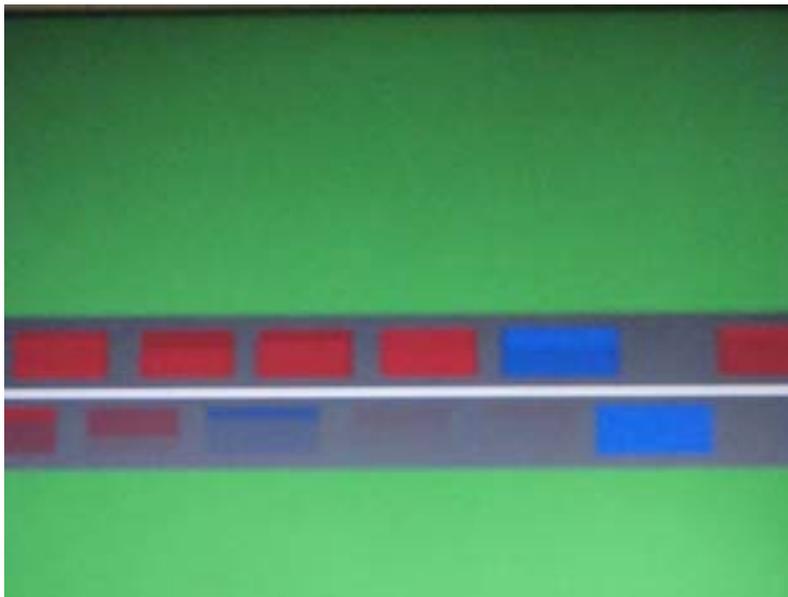
Los tres simuladores están creados bajo los mismos supuestos. Es por esto que sus códigos son similares. Las diferencias en los códigos definen los tres casos distintos.

A continuación presentamos imágenes de los simuladores.

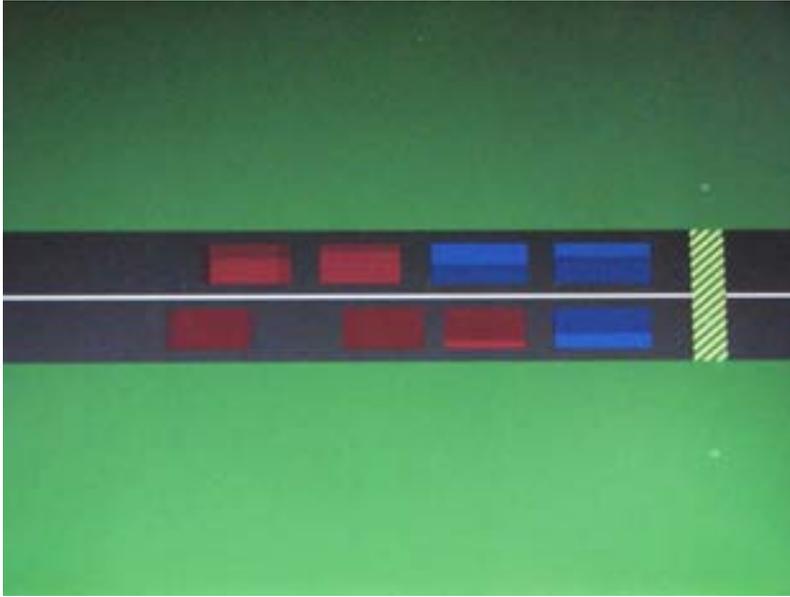
1. Simulador de un tope



2. Simulador de un cuello de botella



3. Simulador de un paso peatonal



Simulador de un tope

```

#include<graphics.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<time.h>
#include<math.h>
#include<dos.h>
#define topex 550
//define la coordenada x donde se situa el tope
#define veltope 10
//define la velocidad máxima para pasar el tope
#define MAX 100
//define el número máximo de vehículos en la vía
#define pcoches .7
//define la proporción de vehículos que son coches
#define pcamiones 1-pcoches
//define la proporción de vehículos que son camiones
#define vpcoche 60
//define la velocidad promedio de un coche (km/h)
#define divco vpcoche/12
//define el tamaño de los intervalos de la discretización normal
#define vpcamion 40
//define la velocidad promedio de un camión (km/h)
#define divca vpcamion/12
//define el tamaño de los intervalos de la discretización normal para
camiones
typedef struct{
    float vel,entra,intentra,coordx,velopt;
    int tipo,flag,coordy,sig;
}vehiculo;
void graficos();
void calle();
void inicializa(vehiculo V[MAX]);
void movimiento(vehiculo V[MAX],float *intervalo,float *inter);
int siguiente(vehiculo V[MAX],int j);
void cambiocarril(vehiculo V[MAX],int j);

```

```
void freno(vehiculo V[MAX],int j);
void acelera(vehiculo V[MAX],int j);
void frenatope(vehiculo V[MAX],int j);
void main(){
    vehiculo V[MAX];
    float *intervalo,*inter;
    *intervalo=0;
    *inter=0;
    graficos();
    inicializa(V);
    calle();
    getche();
    V[0].flag=1;
    do{
        movimiento(V,intervalo,inter);
    }while(V[MAX-1].flag==0);
    getche();
}
void graficos(){
    int gdriver = DETECT,gmode;
    initgraph(&gdriver, &gmode," ");
    cleardevice();
}
void calle(){
    cleardevice();
    setfillstyle(1,DARKGRAY);
    bar(0,200,650,300);
    setfillstyle(1,WHITE);
    bar(0,250,650,251);
    setfillstyle(4,YELLOW);
    bar(topex,200,topex+20,300);
    setbkcolor(GREEN);
}
void inicializa(vehiculo V[MAX]){
    int i;
    float aleat,altip,lambda,tpo;
    randomize();
    printf("Inserta la tasa de llegada de vehículos (por minuto): ");
```

```

scanf("%f",&lambda);
for(i=0;i<MAX;i++){
    V[i].coordx=0;
    V[i].sig=-1;
    aleat=rand()%2;
    if(aleat==0)
        V[i].coordy=210;
    else
        V[i].coordy=260;
    aleat=rand()%1000;
    aleat=aleat/1000;
    tpo=(-1)*log(1-aleat)/lambda;
    V[i].intentra=tpo*60;
    V[i].flag=0;
    altip=rand()%1000;
    altip=altip/1000;
    if(altip<=pcoches)
        V[i].tipo=0;
    else
        V[i].tipo=1;
    if(V[i].tipo==0){
        aleat=rand()%1000;
        aleat=aleat/1000;
        if(aleat<=0.54){
            if(aleat<=.0546){
                if(aleat<=.0069){
                    if(aleat<=.0011){
                        if(aleat<=.0003)
                            V[i].vel=1;
                        else
                            V[i].vel=vpcoche-11*divco;
                    }
                }
            }
            else if(aleat<=.003)
                V[i].vel=vpcoche-10*divco;
            else
                V[i].vel=vpcoche-9*divco;
        }
    }
    else if(aleat<=.0299){

```

```
        if(aleat<=.0148)
            V[i].vel=vpcoche-8*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche-7*divco;
    }
}
else if(aleat<=.319){
    if(aleat<=.1513){
        if(aleat<=.0932)
            V[i].vel=vpcoche-5*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche-4*divco;
    }
    else if(aleat<=.2264)
        V[i].vel=vpcoche-3*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche-2*divco;
}
else{
    if(aleat<=.4282)
        V[i].vel=vpcoche-divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche;
}
}
else{
    if(aleat<=.9814){
        if(aleat<=.8909){
            if(aleat<=.7488){
                if(aleat<=.6482)
                    V[i].vel=vpcoche+divco;
                else
                    V[i].vel=vpcoche+2*divco;
            }
        }
        else if(aleat<=.8291)
            V[i].vel=vpcoche+3*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche+4*divco;
    }
}
```



```
        V[i].vel=vpcamion-11*divca;
    }
    else if(aleat<=.003)
        V[i].vel=vpcamion-10*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion-9*divca;
    }
    else if(aleat<=.0299){
        if(aleat<=.0148)
            V[i].vel=vpcamion-8*divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion-7*divca;
    }
}
else if(aleat<=.319){
    if(aleat<=.1513){
        if(aleat<=.0932)
            V[i].vel=vpcamion-5*divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion-4*divca;
    }
    else if(aleat<=.2264)
        V[i].vel=vpcamion-3*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion-2*divca;
}
else{
    if(aleat<=.4282)
        V[i].vel=vpcamion-divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion;
}
}
else{
    if(aleat<=.9814){
        if(aleat<=.8909){
            if(aleat<=.7488){
                if(aleat<=.6482)
```

```

        V[i].vel=vpcamion+divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion+2*divca;
    }
    else if(aleat<=.8291)
        V[i].vel=vpcamion+3*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion+4*divca;
    }
    else if(aleat<=.9643){
        if(aleat<=.9359)
            V[i].vel=vpcamion+5*divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion+6*divca;
    }
    else
        V[i].vel=vpcamion+7*divca;
    }
    else if(aleat<=.9985){
        if(aleat<=.9962){
            if(aleat<=.9913)
                V[i].vel=vpcamion+8*divca;
            else
                V[i].vel=vpcamion+9*divca;
        }
        else
            V[i].vel=vpcamion+10*divca;
    }
    else{
        if(aleat<=.9995)
            V[i].vel=vpcamion+11*divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion+12*divca;
    }
    }
    }
    V[i].velopt=V[i].vel;
}

```

```

}
void movimiento(vehiculo V[MAX],float *intervalo,float *inter){
    int i,j;
    clock_t inicio,fin;
    for(j=0;j<MAX;j++){
        if(V[j].flag==0)
            break;
    }
    if(V[j].intentra<=(*inter)){
        V[j].sig=siguiente(V,j);
        if(V[j].sig==-1){
            V[j].flag=1;
            *inter=0;
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx>70){
                V[j].flag=1;
                *inter=0;
            }
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==1){
            if(V[V[j].sig].coordx>80){
                V[j].flag=1;
                *inter=0;
            }
        }
    }
    inicio=clock();
    setfillstyle(4,YELLOW);
    bar(topex,200,topex+20,300);
    for(i=0;i<j+1;i++){
        if(V[i].flag==0){
            break;
        }
        if(V[i].tipo==0){
            setfillstyle(1,DARKGRAY);
            bar(V[i].coordx,V[i].coordy,V[i].coordx-50,V[i].coordy+30);
        }
    }
}

```

```

else{
    setfillstyle(1,DARKGRAY);
    bar(V[i].coorcx,V[i].coorcy,V[i].coorcx-60,V[i].coorcy+30);
}
V[i].sig=siguiente(V,i);
if(V[i].sig!=-1){
    cambiocarril(V,i);
    if(V[i].sig!=-1)
        freno(V,i);
}
if(V[i].vel<V[i].velopt)
    acelera(V,i);
if(V[i].coorcx>=topex)
    frenatope(V,i);
}
for(i=0;i<j+1;i++){
    if(V[i].flag==0){
        break;
    }
    if(V[i].tipo==0){
        V[i].coorcx=V[i].coorcx+V[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;
        setfillstyle(1,RED);
        bar(V[i].coorcx,V[i].coorcy,V[i].coorcx-50,V[i].coorcy+30);
    }
    else{
        V[i].coorcx=V[i].coorcx+V[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;
        setfillstyle(1,BLUE);
        bar(V[i].coorcx,V[i].coorcy,V[i].coorcx-60,V[i].coorcy+30);
    }
}
fin=clock();
*intervalo=(fin-inicio)/CLK_TCK;
*inter=(*inter)+(*intervalo);
}
int siguiente(vehiculo V[MAX],int j){
    int i,sig=-1;
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].flag==0)

```

```

        break;
    if(V[i].coordy==V[j].coordy){
        if(sig==-1){
            if(V[i].coordx>V[j].coordx)
                sig=i;
        }
        else
            if(V[i].coordx>V[j].coordx&&V[i].coordx<V[sig].coordx)
                sig=i;
    }
}
return sig;
}
void cambiocarril(vehiculo V[MAX],int j){
    int i,ant=-1,soc=-1;
    if(V[V[j].sig].vel<V[j].velopt){
        if(V[j].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].tipo==0){
                for(i=0;i<MAX;i++){
                    if(V[i].flag==0){
                        break;
                    }
                    if(V[i].coordx>V[j].coordx&&V[i].coordy!=V[j].coordy){
                        if(soc==-1)
                            soc=i;
                        else if(V[i].coordx<V[soc].coordx)
                            soc=i;
                    }
                }
            }
        }
        else{
            for(i=0;i<MAX;i++){
                if(V[i].flag==0){
                    break;
                }
                if(V[i].coordx>V[j].coordx&&V[i].coordy!=V[j].coordy){
                    if(soc==-1)
                        soc=i;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
            soc=i;
    }
}
}
else{
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].flag==0){
                break;
            }
            if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
                if(soc==-1)
                    soc=i;
                else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
                    soc=i;
            }
        }
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].flag==0){
            break;
        }
        if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
            if(soc==-1)
                soc=i;
            else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
                soc=i;
        }
    }
}
}
if(V[j].tipo==0){
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].coor dx<V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){

```

```
        if(ant==-1)
            ant=i;
        else if(V[i].coordx>V[ant].coordx)
            ant=i;
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].coordx<V[j].coordx&&V[i].cooridy!=V[j].cooridy){
            if(ant==-1)
                ant=i;
            else if(V[i].coordx>V[ant].coordx)
                ant=i;
        }
    }
}
else{
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].coordx<V[j].coordx&&V[i].cooridy!=V[j].cooridy){
                if(ant==-1)
                    ant=i;
                else if(V[i].coordx>V[ant].coordx)
                    ant=i;
            }
        }
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].coordx<V[j].coordx&&V[i].cooridy!=V[j].cooridy){
            if(ant==-1)
                ant=i;
            else if(V[i].coordx>V[ant].coordx)
                ant=i;
        }
    }
}
```



```

else if(ant!=-1&&soc==-1){
  if(V[j].tipo==0){
    if(V[j].coor dx-V[ant].coor dx>60){
      V[j].coor dy=V[ant].coor dy;
      V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
  }
  else{
    if(V[j].coor dx-V[ant].coor dx>70){
      V[j].coor dy=V[ant].coor dy;
      V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
  }
}
else if(ant==-1&&soc!=-1){
  if(V[soc].tipo==0){
    if(V[soc].coor dx-V[j].coor dx>70){
      V[j].coor dy=V[soc].coor dy;
      V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
  }
  else{
    if(V[soc].coor dx-V[j].coor dx>70){
      V[j].coor dy=V[soc].coor dy;
      V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
  }
}
else if(ant==-1&&soc==-1){
  if(V[j].coor dy==210)
    V[j].coor dy=260;
  else
    V[j].coor dy=210;
  V[j].sig=siguiente(V,j);
}
}
}
void freno(vehiculo V[MAX],int j){

```

```

int i;
if(V[j].vel>V[V[j].sig].vel){
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx<70){
            V[j].vel=V[V[j].sig].vel;
        }
    }
    else if(V[V[j].sig].tipo==1){
        if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx<80){
            V[j].vel=V[V[j].sig].vel;
        }
    }
}
}
}
void acelera(vehiculo V[MAX],int j){
    int i;
    if(V[j].sig!=-1){
        if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx>80){
                V[j].vel=V[j].velopt;
            }
        }
        else{
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx>90){
                V[j].vel=V[j].velopt;
            }
        }
    }
    else
        V[j].vel=V[j].velopt;
}
void frenatope(vehiculo V[MAX],int j){
    if(V[j].tipo==0){
        if(V[j].coordx<topex+50&&V[j].velopt>veltope){
            V[j].vel=veltope;
        }
    }
    else{

```

```

        if(V[j].coordx<topex+60&&V[j].velopt>veltope){
            V[j].vel=veltope;
        }
    }
}

```

Simulador de un cuello de botella

```

#include<graphics.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<time.h>
#include<math.h>
#include<dos.h>
#define MAX 100
//define el número máximo de vehículos en la vía
#define pcoches .7
//define la proporción de vehículos que son coches
#define pcamiones 1-pcoches
//define la proporción de vehículos que son camiones
#define vpcoche 60
//define la velocidad promedio de un coche (km/h)
#define divco vpcoche/12
//define el tamaño de los intervalos de la discretización normal
#define vpcamion 40
//define la velocidad promedio de un camión (km/h)
#define divca vpcamion/12
//define el tamaño de los intervalos de la discretización normal para
camiones
typedef struct{
    float vel,entra,intentra,coordx,velopt;
    int tipo,flag,coordy,sig;
}vehiculo;
void graficos();
void calle();
void inicializa(vehiculo V[MAX]);

```

```
void movimiento(vehiculo V[MAX],float *intervalo,float *inter);
int siguiente(vehiculo V[MAX],int j);
void cambiocarril(vehiculo V[MAX],int j);
void freno(vehiculo V[MAX],int j);
void acelera(vehiculo V[MAX],int j);
void main(){
    vehiculo V[MAX];
    float *intervalo,*inter;
    *intervalo=0;
    *inter=0;
    graficos();
    inicializa(V);
    calle();
    getche();
    V[0].tipo=1;
    V[0].sig=-1;
    V[0].coordx=550;
    V[0].coorxy=260;
    V[0].vel=0;
    V[0].flag=1;
    do{
        movimiento(V,intervalo,inter);
    }while(V[MAX-1].flag==0);
    getche();
}
void graficos(){
    int gdriver = DETECT,gmode;
    initgraph(&gdriver, &gmode," ");
    cleardevice();
}
void calle(){
    cleardevice();
    setfillstyle(1,DARKGRAY);
    bar(0,200,650,300);
    setfillstyle(1,WHITE);
    bar(0,250,650,251);
    setbkcolor(GREEN);
}
```

```

void inicializa(vehiculo V[MAX]){
    int i;
    float aleat,altip,lambda,tpo;
    randomize();
    printf("Inserta la tasa de llegada de vehículos (por minuto): ");
    scanf("%f",&lambda);
    for(i=1;i<MAX;i++){
        V[i].coordx=-70;
        V[i].sig=-1;
        aleat=rand()%2;
        if(aleat==0)
            V[i].coordy=210;
        else
            V[i].coordy=260;
        aleat=rand()%1000;
        aleat=aleat/1000;
        tpo=(-1)*log(1-aleat)/lambda;
        V[i].intentra=tpo*60;
        V[i].flag=0;
        altip=rand()%1000;
        altip=altip/1000;
        if(altip<=pcoches)
            V[i].tipo=0;
        else
            V[i].tipo=1;
        if(V[i].tipo==0){
            aleat=rand()
            aleat=aleat/1000;
            if(aleat<=0.54){
                if(aleat<=.0546){
                    if(aleat<=.0069){
                        if(aleat<=.0011){
                            if(aleat<=.0003)
                                V[i].vel=1;
                            else
                                V[i].vel=vpcoche-11*divco;
                        }
                    }
                }
            }
            else if(aleat<=.003)

```

```

        V[i].vel=vpcoche-10*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche-9*divco;
    }
else if(aleat<=.0299){
    if(aleat<=.0148)
        V[i].vel=vpcoche-8*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche-7*divco;
    }
}
else if(aleat<=.319){
    if(aleat<=.1513){
        if(aleat<=.0932)
            V[i].vel=vpcoche-5*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche-4*divco;
    }
    else if(aleat<=.2264)
        V[i].vel=vpcoche-3*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche-2*divco;
}
else{
    if(aleat<=.4282)
        V[i].vel=vpcoche-divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche;
}
}
else{
    if(aleat<=.9814){
        if(aleat<=.8909){
            if(aleat<=.7488){
                if(aleat<=.6482)
                    V[i].vel=vpcoche+divco;
                else
                    V[i].vel=vpcoche+2*divco;
            }
        }
    }
}

```

```
    }
    else if(aleat<=.8291)
        V[i].vel=vpcoche+3*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche+4*divco;
}
else if(aleat<=.9643){
    if(aleat<=.9359)
        V[i].vel=vpcoche+5*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche+6*divco;
}
else
    V[i].vel=vpcoche+7*divco;
}
else if(aleat<=.9985){
    if(aleat<=.9962){
        if(aleat<=.9913)
            V[i].vel=vpcoche+8*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche+9*divco;
    }
    else
        V[i].vel=vpcoche+10*divco;
}
else{
    if(aleat<=.9995)
        V[i].vel=vpcoche+11*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche+12*divco;
}
}
}
else{
    aleat=rand()%1000;
    aleat=aleat/1000;
    if(aleat<=0.54){
        if(aleat<=.0546){
```

```

if(aleat<=.0069){
  if(aleat<=.0011){
    if(aleat<=.0003)
      V[i].vel=1;
    else
      V[i].vel=vpcamion-11*divca;
  }
  else if(aleat<=.003)
    V[i].vel=vpcamion-10*divca;
  else
    V[i].vel=vpcamion-9*divca;
}
else if(aleat<=.0299){
  if(aleat<=.0148)
    V[i].vel=vpcamion-8*divca;
  else
    V[i].vel=vpcamion-7*divca;
}
}
else if(aleat<=.319){
  if(aleat<=.1513){
    if(aleat<=.0932)
      V[i].vel=vpcamion-5*divca;
    else
      V[i].vel=vpcamion-4*divca;
  }
  else if(aleat<=.2264)
    V[i].vel=vpcamion-3*divca;
  else
    V[i].vel=vpcamion-2*divca;
}
else{
  if(aleat<=.4282)
    V[i].vel=vpcamion-divca;
  else
    V[i].vel=vpcamion;
}
}
}

```

```
else{
  if(aleat<=.9814){
    if(aleat<=.8909){
      if(aleat<=.7488){
        if(aleat<=.6482)
          V[i].vel=vpcamion+divca;
        else
          V[i].vel=vpcamion+2*divca;
      }
    } else if(aleat<=.8291)
      V[i].vel=vpcamion+3*divca;
    else
      V[i].vel=vpcamion+4*divca;
  }
  else if(aleat<=.9643){
    if(aleat<=.9359)
      V[i].vel=vpcamion+5*divca;
    else
      V[i].vel=vpcamion+6*divca;
  }
  else
    V[i].vel=vpcamion+7*divca;
}
else if(aleat<=.9985){
  if(aleat<=.9962){
    if(aleat<=.9913)
      V[i].vel=vpcamion+8*divca;
    else
      V[i].vel=vpcamion+9*divca;
  }
  else
    V[i].vel=vpcamion+10*divca;
}
else{
  if(aleat<=.9995)
    V[i].vel=vpcamion+11*divca;
  else
    V[i].vel=vpcamion+12*divca;
}
```

```

        }
    }
}
V[i].velopt=V[i].vel;
}
}
void movimiento(vehiculo V[MAX],float *intervalo,float *inter){
    int i,j;
    clock_t inicio,fn;
    for(j=1;j<MAX;j++){
        if(V[j].flag==0)
            break;
    }
    if(V[j].intentra<=(*inter)){
        V[j].sig=siguiente(V,j);
        if(V[j].sig==-1){
            V[j].flag=1;
            *inter=0;
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx>70){
                V[j].flag=1;
                *inter=0;
            }
            else
                cambiocarril(V,j);
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==1){
            if(V[V[j].sig].coordx>80){
                V[j].flag=1;
                *inter=0;
            }
            else
                cambiocarril(V,j);
        }
    }
    inicio=clock();
    for(i=1;i<j+1;i++){

```

```
    if(V[i].flag==0){
        break;
    }
    if(V[i].tipo==0){
        setfillstyle(1,DARKGRAY);
        bar(V[i].coordx,V[i].coordy,V[i].coordx-50,V[i].coordy+30);
    }
    else{
        setfillstyle(1,DARKGRAY);
        bar(V[i].coordx,V[i].coordy,V[i].coordx-60,V[i].coordy+30);
    }
    V[i].sig=siguiente(V,i);
    if(V[i].sig!=-1){
        cambiocarril(V,i);
        if(V[i].sig!=-1)
            freno(V,i);
    }
    if(V[i].vel<V[i].velopt)
        acelera(V,i);
}
if(V[0].tipo==0){
    setfillstyle(1,RED);
    bar(V[0].coordx,V[0].coordy,V[0].coordx-50,V[0].coordy+30);
}
else{
    setfillstyle(1,BLUE);
    bar(V[0].coordx,V[0].coordy,V[0].coordx-60,V[0].coordy+30);
}
for(i=1;i<j+1;i++){
    if(V[i].flag==0){
        break;
    }
    if(V[i].tipo==0){
        V[i].coordx=V[i].coordx+V[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;
        setfillstyle(1,RED);
        bar(V[i].coordx,V[i].coordy,V[i].coordx-50,V[i].coordy+30);
    }
    else{
```

```

        V[i].coorcx=V[i].coorcx+V[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;
        setfillstyle(1,BLUE);
        bar(V[i].coorcx,V[i].coorcy,V[i].coorcx-60,V[i].coorcy+30);
    }
}
fin=clock();
*intervalo=(fin-inicio)/CLK_TCK;
*inter=(*inter)+(*intervalo);
}
int siguiente(vehiculo V[MAX],int j){
    int i,sig=-1;
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].flag==0)
            break;
        if(V[i].coorcy==V[j].coorcy){
            if(sig==-1){
                if(V[i].coorcx<V[j].coorcx)
                    sig=i;
            }
        }
        else
            if(V[i].coorcx>V[j].coorcx&&V[i].coorcx<V[sig].coorcx)
                sig=i;
    }
}
return sig;
}
void cambiocarril(vehiculo V[MAX],int j){
    int i,ant=-1,soc=-1;
    if(V[V[j].sig].vel<V[j].velopt){
        if(V[j].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].tipo==0){
                for(i=0;i<MAX;i++){
                    if(V[i].flag==0){
                        break;
                    }
                }
                if(V[i].coorcx>V[j].coorcx&&V[i].coorcy!=V[j].coorcy){
                    if(soc==-1)
                        soc=i;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
            soc=i;
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].flag==0){
            break;
        }
        if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
            if(soc== -1)
                soc=i;
            else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
                soc=i;
        }
    }
}
else{
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].flag==0){
                break;
            }
            if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
                if(soc== -1)
                    soc=i;
                else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
                    soc=i;
            }
        }
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].flag==0){
            break;
        }
    }
}

```

```

        if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
            if(soc==-1)
                soc=i;
            else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
                soc=i;
        }
    }
}
if(V[j].tipo==0){
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].coor dx<V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
                if(ant==-1)
                    ant=i;
                else if(V[i].coor dx>V[ant].coor dx)
                    ant=i;
            }
        }
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].coor dx<V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
            if(ant==-1)
                ant=i;
            else if(V[i].coor dx>V[ant].coor dx)
                ant=i;
        }
    }
}
}
else{
    if(V[V[j].sig].tipo==0){
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].coor dx<V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
                if(ant==-1)
                    ant=i;
                else if(V[i].coor dx>V[ant].coor dx)

```



```

        V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
}
else if(V[V[ant].sig].tipo==1){
    if(V[V[ant].sig].coor dx-V[j].coor dx>70){
        V[j].coor dy=V[ant].coor dy;
        V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
}
}
}
}
}
else if(ant!=-1&&soc==-1){
    if(V[j].tipo==0){
        if(V[j].coor dx-V[ant].coor dx>60){
            V[j].coor dy=V[ant].coor dy;
            V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
    }
    else{
        if(V[j].coor dx-V[ant].coor dx>70){
            V[j].coor dy=V[ant].coor dy;
            V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
    }
}
else if(ant==-1&&soc!=-1){
    if(V[soc].tipo==0){
        if(V[soc].coor dx-V[j].coor dx>70){
            V[j].coor dy=V[soc].coor dy;
            V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
    }
    else{
        if(V[soc].coor dx-V[j].coor dx>70){
            V[j].coor dy=V[soc].coor dy;
            V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
    }
}

```

```

        }
    }
}
else if(ant==-1&&soc==-1){
    if(V[j].coordy==210)
        V[j].coordy=260;
    else
        V[j].coordy=210;
    V[j].sig=siguiente(V,j);
}
}
}
void freno(vehiculo V[MAX],int j){
    int i;
    if(V[j].vel>V[V[j].sig].vel){
        if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx<70){
                if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx<60)
                    V[j].vel=0;
                else
                    V[j].vel=V[V[j].sig].vel;
            }
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==1){
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx<80){
                if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx<70)
                    V[j].vel=0;
                else
                    V[j].vel=V[V[j].sig].vel;
            }
        }
    }
}
void acelera(vehiculo V[MAX],int j){
    int i;
    if(V[j].sig!=-1){
        if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx>80){

```

```

        V[j].vel=V[j].velopt;
    }
}
else{
    if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx>90){
        V[j].vel=V[j].velopt;
    }
}
}
else
    V[j].vel=V[j].velopt;
}

```

Simulador de un paso peatonal

```

#include<graphics.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<time.h>
#include<math.h>
#include<dos.h>
#define paspeat 550
//define la coordenada x donde se sitúa el paso peatonal
#define velpeat 10
//define la velocidad de los peatones
#define MAX 50
//define el número máximo de vehículos en la vía
#define MAX2 50
//define el número máximo de peatones
#define pcoches .7
//define la proporción de vehículos que son coches
#define pcamiones 1-pcoches
//define la proporción de vehículos que son camiones
#define vpcoche 60
//define la velocidad promedio de un coche (km/h)
#define divco vpcoche/12

```

```
//define el tamaño de los intervalos de la discretización normal
#define vpcamion 40
//define la velocidad promedio de un camión (km/h)
#define divca vpcamion/12
//define el tamaño de los intervalos de la discretización normal para
camiones
typedef struct{
    float vel,entra,intentra,coordx,velopt;
    int tipo,flag,coordy,sig;
}vehiculo;
typedef struct{
    float entra,intentra,coordy;
    int flag,coordx,vel;
}peaton;
void graficos();
void calle();
void inicializa(vehiculo V[MAX],peaton P[MAX2]);
void movimiento(vehiculo V[MAX],peaton P[MAX2],float *intervalo,float
*inter,float *inter2);
int siguiente(vehiculo V[MAX],int j);
void cambiocarril(vehiculo V[MAX],int j);
void freno(vehiculo V[MAX],int j);
void acelera(vehiculo V[MAX],int j);
void frenapeat(vehiculo V[MAX],peaton P[MAX2],int j);
void main(){
    vehiculo V[MAX];
    peaton P[MAX2];
    float *intervalo,*inter,*inter2;
    *intervalo=0;
    *inter=0;
    *inter2=0;
    graficos();
    inicializa(V,P);
    calle();
    getche();
    V[0].flag=1;
    do{
        movimiento(V,P,intervalo,inter,inter2);
```

```

    }while(V[MAX-1].flag==0);
    getch();
}
void graficos(){
    int gdriver = DETECT,gmode;
    initgraph(&gdriver, &gmode," ");
    cleardevice();
}
void calle(){
    cleardevice();
    setfillstyle(1,DARKGRAY);
    bar(0,200,650,300);
    setfillstyle(1,WHITE);
    bar(0,250,650,251);
    setfillstyle(4,YELLOW);
    bar(paspeat,200,paspeat+20,300);
    setbkcolor(GREEN);
}
void inicializa(vehiculo V[MAX],peaton P[MAX2]){
    int i;
    float aleat,altip,lambda,lambda2,tpo,tpo2;
    randomize();
    printf("Inserta la tasa de llegada de vehículos (por minuto): ");
    scanf("%f",&lambda);
    printf("Inserta la tasa de llegada de peatones (por minuto): ");
    scanf("%f",&lambda2);
    for(i=0;i<MAX2;i++){
        P[i].coorxy=500;
        aleat=rand() %2;
        if(aleat==0)
            P[i].coordx=paspeat+10;
        else
            P[i].coordx=paspeat+15;
        aleat=rand() %1000;
        aleat=aleat/1000;
        tpo2=(-1)*log(1-aleat)/lambda2;
        P[i].intentra=tpo2*60;
        P[i].flag=0;
    }
}

```

```
    P[i].vel=velpeat;
}
for(i=0;i<MAX;i++){
    V[i].coordx=-70;
    V[i].sig=-1;
    aleat=rand() %2;
    if(aleat==0)
        V[i].coordy=210;
    else
        V[i].coordy=260;
    aleat=rand() %1000;
    aleat=aleat/1000;
    tpo=(-1)*log(1-aleat)/lambda;
    V[i].intentra=tpo*60;
    V[i].flag=0;
    altip=rand() %1000;
    altip=altip/1000;
    if(altip<=pcoches)
        V[i].tipo=0;
    else
        V[i].tipo=1;
    if(V[i].tipo==0){
        aleat=rand() %1000;
        aleat=aleat/1000;
        if(aleat<=0.54){
            if(aleat<=.0546){
                if(aleat<=.0069){
                    if(aleat<=.0011){
                        if(aleat<=.0003)
                            V[i].vel=1;
                        else
                            V[i].vel=vpcoche-11*divco;
                    }
                }
            }
        }
        else if(aleat<=.003)
            V[i].vel=vpcoche-10*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche-9*divco;
    }
}
```

```

else if(aleat<=.0299){
  if(aleat<=.0148)
    V[i].vel=vpcoche-8*divco;
  else
    V[i].vel=vpcoche-7*divco;
}
}
else if(aleat<=.319){
  if(aleat<=.1513){
    if(aleat<=.0932)
      V[i].vel=vpcoche-5*divco;
    else
      V[i].vel=vpcoche-4*divco;
  }
  else if(aleat<=.2264)
    V[i].vel=vpcoche-3*divco;
  else
    V[i].vel=vpcoche-2*divco;
}
else{
  if(aleat<=.4282)
    V[i].vel=vpcoche-divco;
  else
    V[i].vel=vpcoche;
}
}
else{
  if(aleat<=.9814){
    if(aleat<=.8909){
      if(aleat<=.7488){
        if(aleat<=.6482)
          V[i].vel=vpcoche+divco;
        else
          V[i].vel=vpcoche+2*divco;
      }
    }
    else if(aleat<=.8291)
      V[i].vel=vpcoche+3*divco;
    else

```

```
        V[i].vel=vpcoche+4*divco;
    }
    else if(aleat<=.9643){
        if(aleat<=.9359)
            V[i].vel=vpcoche+5*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche+6*divco;
    }
    else
        V[i].vel=vpcoche+7*divco;
}
else if(aleat<=.9985){
    if(aleat<=.9962){
        if(aleat<=.9913)
            V[i].vel=vpcoche+8*divco;
        else
            V[i].vel=vpcoche+9*divco;
    }
    else
        V[i].vel=vpcoche+10*divco;
}
else{
    if(aleat<=.9995)
        V[i].vel=vpcoche+11*divco;
    else
        V[i].vel=vpcoche+12*divco;
}
}
}
else{
    aleat=rand() %1000;
    aleat=aleat/1000;
    if(aleat<=0.54){
        if(aleat<=.0546){
            if(aleat<=.0069){
                if(aleat<=.0011){
                    if(aleat<=.0003)
                        V[i].vel=1;
                }
            }
        }
    }
}
```

```

        else
            V[i].vel=vpcamion-11*divca;
        }
    else if(aleat<=.003)
        V[i].vel=vpcamion-10*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion-9*divca;
    }
else if(aleat<=.0299){
    if(aleat<=.0148)
        V[i].vel=vpcamion-8*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion-7*divca;
    }
}
else if(aleat<=.319){
    if(aleat<=.1513){
        if(aleat<=.0932)
            V[i].vel=vpcamion-5*divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion-4*divca;
    }
    else if(aleat<=.2264)
        V[i].vel=vpcamion-3*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion-2*divca;
    }
else{
    if(aleat<=.4282)
        V[i].vel=vpcamion-divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion;
    }
}
else{
    if(aleat<=.9814){
        if(aleat<=.8909){
            if(aleat<=.7488){

```

```
        if(aleat<=.6482)
            V[i].vel=vpcamion+divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion+2*divca;
    }
    else if(aleat<=.8291)
        V[i].vel=vpcamion+3*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion+4*divca;
}
else if(aleat<=.9643){
    if(aleat<=.9359)
        V[i].vel=vpcamion+5*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion+6*divca;
}
else
    V[i].vel=vpcamion+7*divca;
}
else if(aleat<=.9985){
    if(aleat<=.9962){
        if(aleat<=.9913)
            V[i].vel=vpcamion+8*divca;
        else
            V[i].vel=vpcamion+9*divca;
    }
    else
        V[i].vel=vpcamion+10*divca;
}
else{
    if(aleat<=.9995)
        V[i].vel=vpcamion+11*divca;
    else
        V[i].vel=vpcamion+12*divca;
}
}
V[i].velopt=V[i].vel;
```

```

    }
}
void movimiento(vehiculo V[MAX],peaton P[MAX2],float *intervalo,float
*inter,float *inter2){
    int i,j,k;
    clock_t inicio,fin;
    for(j=0;j<MAX;j++){
        if(V[j].flag==0)
            break;
    }
    for(k=0;k<MAX2;k++){
        if(P[k].flag==0)
            break;
    }
    if(V[j].intentra<=(*inter)){
        V[j].sig=siguiente(V,j);
        if(V[j].sig==-1){
            V[j].flag=1;
            *inter=0;
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx>70){
                V[j].flag=1;
                *inter=0;
            }
            else
                cambiocarril(V,j);
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==1){
            if(V[V[j].sig].coordx>80){
                V[j].flag=1;
                *inter=0;
            }
            else
                cambiocarril(V,j);
        }
    }
    if(P[k].intentra<=(*inter2)){

```

```

    P[k].flag=1;
    *inter2=0;
}
setfillstyle(1, GREEN);
bar(paspeat, 0, paspeat+20, 200);
bar(paspeat, 300, paspeat+20, 500);
inicio=clock();
setfillstyle(4, YELLOW);
bar(paspeat, 200, paspeat+20, 300);
for(i=0; i<j+1; i++){
    if(V[i].flag==0){
        break;
    }
    if(V[i].tipo==0){
        setfillstyle(1, DARKGRAY);
        bar(V[i].coorcx, V[i].coorcy, V[i].coorcx-50, V[i].coorcy+30);
    }
    else{
        setfillstyle(1, DARKGRAY);
        bar(V[i].coorcx, V[i].coorcy, V[i].coorcx-60, V[i].coorcy+30);
    }
    V[i].sig=siguiente(V, i);
    if(V[i].sig!=-1){
        cambiocarril(V, i);
        if(V[i].sig!=-1)
            freno(V, i);
    }
    if(V[i].vel<V[i].velopt)
        acelera(V, i);
    if(V[i].coorcx>=paspeat-30)
        frenapeat(V, P, i);
}
for(i=0; i<MAX; i++){
    if(V[i].coorcx>paspeat&&V[i].coorcx<paspeat+80)
        break;
}
if(i>MAX-1){
    for(j=0; j<MAX2; j++){

```

```

        P[j].vel=velpeat;
    }
}
else{
    for(i=0;i<MAX2;i++){
        if(P[i].coordy>200&&P[i].coordy<300){
            break;
        }
    }
    if(i<MAX2){
        for(j=0;j<MAX2;j++){
            P[j].vel=velpeat;
        }
    }
    else{
        for(i=0;i<MAX;i++){
            if(V[i].vel<5){
                break;
            }
        }
        if(i<MAX){
            for(j=0;j<MAX2;j++){
                P[j].vel=velpeat;
            }
        }
    }
}
for(i=0;i<j+1;i++){
    if(V[i].flag==0){
        break;
    }
    if(V[i].tipo==0){
        V[i].coordx=V[i].coordx+V[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;
        setfillstyle(1,RED);
        bar(V[i].coordx,V[i].coordy,V[i].coordx-50,V[i].coordy+30);
    }
    else{
        V[i].coordx=V[i].coordx+V[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;

```

```

        setfillstyle(1,BLUE);
        bar(V[i].coorcx,V[i].coorcy,V[i].coorcx-60,V[i].coorcy+30);
    }
}
for(i=0;i<MAX2;i++){
    if(P[i].flag==1){
        P[i].coorcy=P[i].coorcy-P[i].vel*(*intervalo)*12/3.6;
        setfillstyle(1,BLACK);
        pieslice(P[i].coorcx,P[i].coorcy,0,360,2);
    }
}
}
fn=clock();
*intervalo=(fn-inicio)/CLK_TCK;
*inter=(*inter)+(*intervalo);
*inter2=(*inter2)+(*intervalo);
}
int siguiente(vehiculo V[MAX],int j){
    int i,sig=-1;
    for(i=0;i<MAX;i++){
        if(V[i].flag==0)
            break;
        if(V[i].coorcy==V[j].coorcy){
            if(sig==-1){
                if(V[i].coorcx>V[j].coorcx)
                    sig=i;
            }
            else
                if(V[i].coorcx>V[j].coorcx&&V[i].coorcx<V[sig].coorcx)
                    sig=i;
        }
    }
    return sig;
}
void cambiocarril(vehiculo V[MAX],int j){
    int i,ant=-1,soc=-1;
    if(V[V[j].sig].vel<V[j].velopt){
        if(V[j].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].tipo==0){

```

```

for(i=0;i<MAX;i++){
  if(V[i].flag==0){
    break;
  }
  if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
    if(soc==-1)
      soc=i;
    else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
      soc=i;
  }
}
}
else{
  for(i=0;i<MAX;i++){
    if(V[i].flag==0){
      break;
    }
    if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
      if(soc==-1)
        soc=i;
      else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
        soc=i;
    }
  }
}
}
else{
  if(V[V[j].sig].tipo==0){
    for(i=0;i<MAX;i++){
      if(V[i].flag==0){
        break;
      }
    }
    if(V[i].coor dx>V[j].coor dx&&V[i].coor dy!=V[j].coor dy){
      if(soc==-1)
        soc=i;
      else if(V[i].coor dx<V[soc].coor dx)
        soc=i;
    }
  }
}
}

```

```

    }
  }
  else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
      if(V[i].flag==0){
        break;
      }
      if(V[i].coorcx>V[j].coorcx&&V[i].coorcy!=V[j].coorcy){
        if(soc==-1)
          soc=i;
        else if(V[i].coorcx<V[soc].coorcx)
          soc=i;
      }
    }
  }
}
if(V[j].tipo==0){
  if(V[V[j].sig].tipo==0){
    for(i=0;i<MAX;i++){
      if(V[i].coorcx<V[j].coorcx&&V[i].coorcy!=V[j].coorcy){
        if(ant==-1)
          ant=i;
        else if(V[i].coorcx>V[ant].coorcx)
          ant=i;
      }
    }
  }
}
else{
  for(i=0;i<MAX;i++){
    if(V[i].coorcx<V[j].coorcx&&V[i].coorcy!=V[j].coorcy){
      if(ant==-1)
        ant=i;
      else if(V[i].coorcx>V[ant].coorcx)
        ant=i;
    }
  }
}
}
}

```

```

else{
  if(V[V[j].sig].tipo==0){
    for(i=0;i<MAX;i++){
      if(V[i].coordx<V[j].coordx&&V[i].cooridy!=V[j].cooridy){
        if(ant==-1)
          ant=i;
        else if(V[i].coordx>V[ant].coordx)
          ant=i;
      }
    }
  }
  else{
    for(i=0;i<MAX;i++){
      if(V[i].coordx<V[j].coordx&&V[i].cooridy!=V[j].cooridy){
        if(ant==-1)
          ant=i;
        else if(V[i].coordx>V[ant].coordx)
          ant=i;
      }
    }
  }
}
if(ant!=-1&&V[ant].sig!=-1){
  if(V[soc].coordx>V[V[j].sig].coordx){
    if(V[j].tipo==0){
      if(V[j].coordx-V[ant].coordx>60){
        if(V[V[ant].sig].tipo==0){
          if(V[V[ant].sig].coordx-V[j].coordx>60){
            V[j].cooridy=V[ant].cooridy;
            V[j].sig=siguiente(V,j);
          }
        }
      }
      else if(V[j].tipo==0&&V[V[ant].sig].tipo==1){
        if(V[V[ant].sig].coordx-V[j].coordx>70){
          V[j].cooridy=V[ant].cooridy;
          V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
      }
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  else{
    if(V[j].coordx-V[ant].coordx>70){
      if(V[V[ant].sig].tipo==0){
        if(V[V[ant].sig].coordx-V[j].coordx>60){
          V[j].cooridy=V[ant].cooridy;
          V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
      }
      else if(V[V[ant].sig].tipo==1){
        if(V[V[ant].sig].coordx-V[j].coordx>70){
          V[j].cooridy=V[ant].cooridy;
          V[j].sig=siguiente(V,j);
        }
      }
    }
  }
}
else if(ant!=-1&&soc==-1){
  if(V[j].tipo==0){
    if(V[j].coordx-V[ant].coordx>60){
      V[j].cooridy=V[ant].cooridy;
      V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
  }
  else{
    if(V[j].coordx-V[ant].coordx>70){
      V[j].cooridy=V[ant].cooridy;
      V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
  }
}
else if(ant==-1&&soc!=-1){
  if(V[soc].tipo==0){
    if(V[soc].coordx-V[j].coordx>70){
      V[j].cooridy=V[soc].cooridy;

```

```

        V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
}
else{
    if(V[soc].coorcx-V[j].coorcx>70){
        V[j].coorcy=V[soc].coorcy;
        V[j].sig=siguiente(V,j);
    }
}
}
else if(ant==-1&&soc==-1){
    if(V[j].coorcy==210)
        V[j].coorcy=260;
    else
        V[j].coorcy=210;
    V[j].sig=siguiente(V,j);
}
}
}
void freno(vehiculo V[MAX],int j){
    int i;
    if(V[j].vel>V[V[j].sig].vel){
        if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coorcx-V[j].coorcx<70){
                if(V[V[j].sig].coorcx-V[j].coorcx<60)
                    V[j].vel=0;
                else
                    V[j].vel=V[V[j].sig].vel;
            }
        }
        else if(V[V[j].sig].tipo==1){
            if(V[V[j].sig].coorcx-V[j].coorcx<80){
                if(V[V[j].sig].coorcx-V[j].coorcx<70)
                    V[j].vel=0;
                else
                    V[j].vel=V[V[j].sig].vel;
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}
void acelera(vehiculo V[MAX],int j){
    int i;
    if(V[j].sig!=-1){
        if(V[V[j].sig].tipo==0){
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx>80){
                V[j].vel=V[j].velopt;
            }
        }
        else{
            if(V[V[j].sig].coordx-V[j].coordx>90){
                V[j].vel=V[j].velopt;
            }
        }
    }
    else
        V[j].vel=V[j].velopt;
}
void frenapeat(vehiculo V[MAX],peaton P[MAX2],int j){
    int i,k;
    if(V[j].tipo==0){
        if(V[j].coordx<paspeat+80){
            for(i=0;i<MAX2;i++){
                if(P[i].flag==0)
                    break;
                else if(P[i].coordy>200&&P[i].coordy<300){
                    if(V[j].coordx<paspeat+50){
                        V[j].vel=0;
                        for(k=0;k<i+1;k++)
                            P[k].vel=velpeat;
                    }
                }
                else if(P[i].coordy>300&&P[i].coordy<310)
                    P[i].vel=0;
            }
        }
    }
}

```

```
else{
  if(V[j].coorcx<paspeat+90){
    for(i=0;i<MAX2;i++){
      if(P[i].flag==0)
        break;
      else if(P[i].coorcy>200&&P[i].coorcy<300){
        if(V[j].coorcx<paspeat){
          V[j].vel=0;
          for(k=0;k<i+1;k++)
            P[k].vel=velpeat;
        }
      }
      else if(P[i].coorcy>300&&P[i].coorcy<310)
        P[i].vel=0;
    }
  }
}
```

Conclusiones

Existen diferentes formas de modelar el tráfico vehicular. En esta tesis utilizamos principalmente resultados probabilísticos, de la teoría de colas y procesos estocásticos.

Modelamos gran parte de los eventos que se dan en la teoría de tráfico vehicular, como eventos aleatorios. Para determinar por completo la distribución que siguen dichos eventos, obtuvimos la función generadora de probabilidades o la transformada de Laplace asociada a dicha distribución. En la mayoría de los casos la obtención de dichas funciones no fue sencilla.

El problema fundamental de cualquier modelo es encontrar un equilibrio entre los supuestos utilizados y la complejidad del modelo. En general, mientras menos supuestos hagamos en el desarrollo de un modelo, éste será más complejo. Y mientras más supuestos hagamos será más sencillo, pero en general el ajuste a la realidad no será tan bueno.

En nuestro caso, el problema que encontramos es que no consideramos un factor fundamental en el comportamiento del tráfico. Este es el factor humano, es decir, en un sistema real de vialidades, los vehículos no se comportan de acuerdo a una ley. En general, su movimiento ni siquiera podrá ser modelado con una distribución de probabilidades. Las decisiones humanas en general serán impredecibles, lo que hace que cualquier modelo pueda tener variaciones importantes con el comportamiento real.

No es descabellado pensar que el mismo individuo tomaría diferentes decisiones en las mismas circunstancias sobre la vía, dependiendo, por ejemplo, de su estado de ánimo. Incluso podremos encontrar individuos que cambian su forma de manejar, dependiendo de si se encuentran solos o acompañados en el vehículo.

Así, uno de los principales problemas es que no podemos predecir el comportamiento del mismo vehículo, en la misma situación sobre una vialidad, ya que no conocemos los factores que lo hacen tomar decisiones más arriesgadas

o más conservadoras.

Al no poder modelar el comportamiento humano, cualquier modelo que consigamos correrá el riesgo de ser poco fiel a la realidad.

Sin embargo, podemos tomar otro camino y analizar cualitativamente el tráfico vehicular. Precisamente es esto lo que se pretende con los simuladores. Y es de éstos que se obtiene una de las conclusiones, que aunque es intuitiva, es importante y da pie a posibles soluciones dentro del problema del flujo vehicular.

Esta conclusión es que el tráfico vehicular se ve obstruido cuando se aumenta el volumen de vehículos en la vía. Pensemos en la misma vialidad en diferentes horarios. Aunque el espacio físico es el mismo, el comportamiento cualitativo del tráfico vehicular es completamente opuesto.

De ahí que nos gustaría disminuir el volumen de vehículos en la vía. La pregunta que a continuación se nos presenta es: ¿cómo lograr disminuir el volumen de vehículos en la vía?; existen distintas posibles respuestas a esta pregunta. Una de las respuestas que encontramos más viables y lógicas es: proporcionar un transporte público de calidad y fomentar una cultura en la que el vehículo particular no sea condición de status social.

Otro punto importante que se muestra en los simuladores, es la importancia de permitir un flujo libre de vehículos cuando sea posible. Podemos ver que si mantenemos la misma tasa de llegadas λ , la presencia de un tope, cruce peatonal o un cuello de botella, generan una congestión en la vialidad. Mientras que si permitimos un flujo libre, logramos una circulación fluida.

Con eso podemos argumentar que un buen mantenimiento de las vialidades, así como evitar obstáculos innecesarios, mejora la circulación dentro de una vialidad.

Un ejemplo claro de obstáculos innecesarios es un tope en el punto de frenado total de un semáforo. En este caso, el tope es un obstáculo para la vía y no es necesario para la protección civil, ya que existe un semáforo para detener el flujo vehicular.

Este es un ejemplo claro de factores que influyen de manera considerable en el movimiento en una vía, ya que al momento en que el semáforo se encuentra en verde, el número de vehículos que pueden pasar se verá disminuido debido a que existe un tope.

Como el ejemplo anterior, existe una gran cantidad de situaciones que entorpecen el movimiento de los vehículos; otro ejemplo puede ser la existencia de topes antes y después del cruce de dos calles que son transitadas en un sentido únicamente.

La medida lógica para mejorar el flujo en esta situación es remover el tope que se encuentra después del cruce, ya que esto mermará la movilidad en ambas calles.

Bibliografía

- HAIGHT, Frank A., *Mathematical theories of traffic flow*, Ed. Academic Press, 1963.
- RUDIN, Walter, *Principles of mathematical analysis*, 3a ed., Ed. McGraw-Hill, 1976.
- APOSTOL, Tom M., *Calculus*, 2a ed., Ed. Reverté S.A., 1985, vol. 2.
- ROSS, Sheldon, *A first course in probability*, 5a ed., Ed. Perentice-Hall, 1997.
- ZILL, Dennis, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, 2a ed., Ed. Grupo editorial Iberoamérica, 1988.