UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS HISTORICOS Y MATEMÁTICOS
DE LA GEOMETRÍA DE HILBERT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JUAN MANUEL MARTÍNEZ NUÑO

TUTOR
DR. CARLOS TORRES ALCARAZ

2008

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno:	Martínez
Apellido materno:	Nuño
Nombre(s):	Juan Manuel
Teléfono:	57857270
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemático
No. de cuenta:	092518924
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado:	Dr.
Nombre(s):	Carlos
Apellido paterno:	Torres
Apellido materno:	Alcaraz
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado:	Dr.
Nombre(s):	Favio Ezequiel
Apellido paterno:	Miranda
Apellido materno:	Perea
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado:	Mat.
Nombre(s):	Guillermo Eduardo
Apellido paterno:	Zambrana
Apellido materno:	Castañeda
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado:	M. en C.
Nombre(s):	Fernando René
Apellido paterno:	Martínez
Apellido materno:	Ortiz
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado:	Mat.
Nombre(s):	Juan
Apellido paterno:	Jiménez
Apellido materno:	Krassel
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Algunos aspectos históricos y matemáticos de la geometría de Hilbert
Subtitulo	
Número de páginas	54 p.
Año	2008

Axiomas

0.-

1.-Amor

2.-Respeto

3.-Comprensión

4.-Tolerancia

Agradecimientos

A mis padres

A mis hermanos

A mi pequeñita

A mis familiares

A mi asesor

A mis sinodales

A mis maestros

A mis amigos

Con cariño para:
Todos ellos.

ÍNDICE

Introducción

En 1899 David Hilbert presentó un libro en el que expone los fundamentos de la geometría desde un punto de vista moderno. Este trabajo sintetiza de alguna manera las ideas matemáticas que se habían planteando en el siglo XIX acerca de la naturaleza de la geometría. El punto de vista ofrecido difiere en algunos aspectos del que durante más de 2200 años había prevalecido con relación a esta disciplina. Un rasgo sorprendente de la geometría de Hilbert es que es dos cosas a la vez: una prolongación del trabajo axiomático de Euclides, y una presentación de los fundamentos de la geometría que rompe con la tradición.

La fundamentación de la geometría vivió un primer gran momento durante el helenismo, introduciendo un punto de vista plasmado en los *Elementos* que perduró, casi sin cambios hasta la época de Kant. El genio de Hilbert consistió en conservar lo más valioso de este punto de vista integrándolo a una nueva concepción de las ciencias matemáticas.

En este trabajo nos ocupamos de algunos momentos esenciales en la fundamentación de la geometría, de cómo Euclides la organiza y de cómo procede Hilbert frente a ella. Para ello, introducimos algunas ideas de Kant en la medida en que este filósofo del siglo XVIII construye un marco teórico explicativo de la naturaleza de la geometría euclidiana.

En un primer capítulo centramos nuestra atención en la siguiente cuestión: ¿cuál es el carácter de la demostración euclidiana? Responder a esta pregunta es relevante en la medida en que la respuesta revela el carácter de la geometría griega y la organización axiomática que ofrece Euclides en Los *Elementos.* Esto se volvió para Kant la explicación misma de la naturaleza de las matemáticas, y la prueba misma de su esencia constructiva.

En el capítulo dos abordamos la transformación de la geometría que resultó de la unión de ramas que a simple vista parecían disconexas: la geometría y el álgebra. Para ello, hacemos una breve referencia al principal exponente de este cambio Rene Descartes, y a lo que ahora conocemos como geometría analítica. El capítulo se divide en tres partes: el enfoque de Fermat y Descartes, el álgebra y la geometría y por último un análisis de lo que trajo consigo el método de las coordenadas.

En el capítulo tres abordamos algunos temas de la geometría y su importancia para el desarrollo de los fundamentos de esta disciplina. Para ello consideramos: el resurgimiento de la geometría proyectiva en el siglo XIX, la aparición de las geometrías no euclidianas, el debate en torno a la naturaleza de la geometría, el examen crítico de los fundamentos y la lectura que hace Hilbert del principio de dualidad de la geometría proyectiva como camino hacia una nueva concepción de esta ciencia.

En el capítulo cuatro abordamos el nuevo enfoque de Hilbert de la geometría y la manera en que la formaliza. Este nuevo punto de vista lo hacemos evidente al ver la manera en que trata la construcción de un cálculo de segmentos y la coordenatización del espacio geométrico. El capítulo inicia con un examen de la naturaleza de la geometría según Hilbert, lo cual permite entender una nueva manera de hacer matemáticas que nos lleva de la mano a la teoría axiomática como un objeto de estudio. Nuestro estudio termina con el análisis de un caso: el cálculo de segmentos y la coordenatización del espacio geométrico.

Capítulo 1

1. La fundamentación euclidiana de la geometría

1.1 El carácter de la geometría griega

La matemática griega ocupa un destacado lugar en la historia de las matemáticas. Y si bien muchos de sus elementos los tomaron de las civilizaciones vecinas, los griegos lograron edificar una disciplina que difería radicalmente de todo lo precedente, la cual influyó decididamente en el desarrollo de la cultura occidental moderna, y en la concepción actual de la matemática. Entre otras cosas, podemos señalar los siguientes aspectos de la matemática griega:

1. Fueron los primeros en reconocer explícitamente la necesidad de la demostración como vía para validar el conocimiento matemático.
2. Fueron los primeros, o se hallan entre los primeros, que se atrevieron a conjeturar que la naturaleza puede ser comprendida a través de la matemática, que ésta es el lenguaje adecuado para expresar la complejidad de la naturaleza y reducirla a una sencillez comprensible.

Todo parece indicar que Tales de Mileto (¿624-550a.C.?), y Pitágoras (¿569-500 a.C.?), ofrecieron cierta argumentación lógica como sustento de sus afirmaciones geométricas. Se les atribuye haber organizado, aunque de manera incipiente, la matemática como un sistema deductivo. Si bien en este periodo la demostración todavía no alcanza el rigor de Euclides, con éllos los cambios fueron significativos.

Pitágoras o, más bien, los pitagóricos fueron los primeros en introducir en el razonamiento matemático un método fundamental: la reducción al absurdo. Este método tiene como base la deducción de una contradicción a partir de una hipótesis que se quiere refutar. Su aplicación permaneció inalterada hasta el siglo XIX, donde Hilbert lo extendió para probar en forma indirecta la existencia de algunos objetos matemáticos, un uso polémico que muchos han relegado con relación a las clases infinitas.

Lo que si es un hecho, es que una de las primeras pruebas lógicamente correctas de la matemática griega es la que establece, por reducción al absurdo, la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado.

Por su parte, la demostración geométrica tuvo en sus inicios un carácter menos riguroso que en los *Elementos* de Euclides, con aspectos intuitivos y visuales relevantes.

1.2 La organización axiomática. Aristóteles y la posibilidad del conocimiento demostrativo

Al parecer, del pensamiento filosófico griego fue la teoría aristotélica del conocimiento demostrativo lo que más influyó en Euclides al momento de organizar los *Elementos*. Según Aristóteles, la demostración es una cadena de silogismos que permite deducir una conclusión a partir de principios primeros, verdaderos y evidentes.

Armado con la teoría de los silogismos, Aristóteles sintió que podría contestar a la pregunta acerca de cuándo algo ha sido demostrado, y así refutar la tesis de que el conocimiento basado en la demostración es imposible o circular. Aristóteles expone su doctrina en los *Segundos Analíticos*, donde fija las bases del conocimiento deductivo.

> "Nuestra propia doctrina sostiene que no todo conocimiento es demostrativo o demostrable; por el contrario, el conocimiento de las premisas inmediatas es independiente de la demostración. [...]. La necesidad de esto es evidente, porque puesto que hemos de conocer las premisas anteriores de las que deriva la demostración, y puesto que el retroceso debe acabar en las verdades inmediatas, estas verdades deben ser indemostrables."[1]

Esta postura parece ser el fundamento teórico de la manera en que Euclides organiza parte del conocimiento matemático de su tiempo.

1.3 La demostración en los Elementos de Euclides

Lo que conocemos como demostración en matemáticas se ha ido modificando a lo largo del tiempo, pudiéndose decir que sus modalidades se han subordinado al modo de concebir esta

[1] Aristóteles, Analíticos posteriores, Op cit., II, 3, 72a/72b.

disciplina. Dos estilos que se han convertido en modelos son los de Euclides y Hilbert, los cuales destacan por su firmeza y originalidad. Ocupémonos de Euclides en esta sección.

A lo largo del tiempo, los *Elementos* de Euclides han sido reconocidos como un modelo de perfección. En ellos, Euclides desarrolla en forma sistemática una parte de la geometría griega. El tratamiento que le da comienza con algunas proposiciones intuitivamente aceptadas, cuya validez no es materia de discusión adicional; a partir de ellas, se construye la teoría geométrica de manera que todos los teoremas se demuestran a partir de estas proposiciones básicas evitando, según esto, toda referencia a la intuición. Las proposiciones básicas, que se suponen evidentes, se dividen en nociones comunes y postulados[2]. Entre las nociones comunes podemos destacar proposiciones generales relativas a la magnitud como, por ejemplo, “dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí”, “si iguales se añaden a iguales, los resultados son iguales” o “el todo es mayor que la parte”. A diferencia de las nociones comunes, los postulados poseen un contenido geométrico, y hay en total cinco de ellos[3]:

1. Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada.
3. Para cada centro y radio describir su círculo.
4. Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.[4]

Sobre esta base, Euclides ordena gran parte del conocimiento geométrico de manera tal que las proposiciones se van siguiendo conforme a un orden demostrativo[5]. Cabe señalar que la demostración euclidiana tuvo el rango de ejemplo paradigmático hasta finales del siglo XVIII. Al respecto, el modo en que Euclides procede fue descrito en forma por demás acertada por Kant en la *Crítica de la razón pura*, y se vio desbordado en el siglo XIX con el surgimiento de una nueva manera de “hacer matemáticas”. Esto último es relevante para

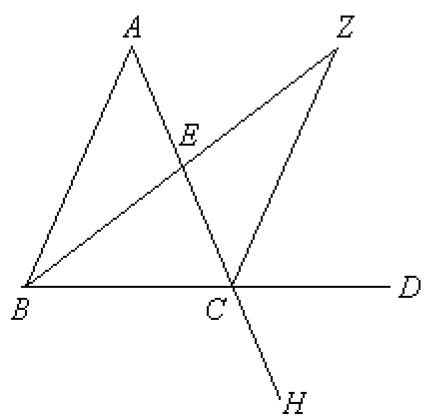
[2] En la actualidad ya no se establece ninguna diferencia entre estas nociones.
[3] Ver el apéndice A, donde se muestra el “portal axiomático” de los *Elementos* de Euclides.
[4] Su evidencia no tenía el mismo carácter de los cuatro primeros. Aquí, parece ser que Euclides se dio cuenta de su necesidad para levantar el edificio.
[5] Como ya lo hemos señalado, este modo de organización es enteramente análogo al establecido por Aristóteles.

nuestro trabajo en la medida en que Hilbert fue uno de los principales impulsores de esta nueva manera de entender las teorías matemáticas, la cual iba más allá del punto de vista de Kant y Euclides.

Quien examine las demostraciones que figuran en los *Elementos* de Euclides descubrirá un patrón que se repite en casi todas ellas. Para el caso veamos un ejemplo que utilizaremos en la discusión subsiguiente. Se trata de la proposición 16 del libro I de los *Elementos.*

Proposición I.16

① En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.



③

(Hipótesis)

Sea el triángulo *ABC* y prolónguese uno de sus lados, el *BC*, hasta *D*.

(Tesis)

Digo que el ángulo externo, el *ACD*, es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos, los *CBA* y *BAC*.

②[6], ④

Demostración

④ Córtese en dos partes iguales *AC* por el punto *E* (prop. I.10).[7]

Trácese la *BE* y prolónguese en línea recta hasta el *Z*, de modo que resulte la *EZ* igual a la *BE* (Postulados I y II) y trácese la *ZC* (post. I).[8]

Prolónguese la *AC* hasta el punto *H* (post. II).

⑤ Puesto que la *AE* es igual a *EC*, y la *BE* es igual a la *EZ*, los lados *AE* y *EB* son iguales, respectivamente, a los lados *CE* y *EZ*[9]

Y el ángulo *AEB* es igual al *ZEC* por opuestos por el vértice (prop. I.15); así que la base *AB* será igual a la base *ZC* y lo será el triángulo *ABE* con el triángulo *ZEC*, y los demás ángulos

[6] Al final de la demostración en el párrafo siguiente se explica la numeración encerrada en círculos.
[7] La proposición I.10 nos muestra cómo dividir en dos (bisecar) una recta determinada. Cabe señalar que en los *Elementos*, la palabra "recta" se refiere a lo que nosotros llamamos "segmento".
[8] Postulado I. *Trazar una línea desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera*; Postulado II. *Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada*.
[9] Aquí Euclides utiliza el principio "si p y también q, entonces p & q" (adición lógica).

de uno serán respectivamente iguales a los del otro: a aquellos que subtiendan lados iguales (proposición I.4).[10]

Por tanto el ángulo *BAE* es igual al *ECZ*.

Mas el ángulo *ECD* es mayor que el *ECZ* (N. C. VIII).[11]

Luego el *ACD* será también mayor que el *BAE*.[12]

Y si se divide en dos la recta *BC* se demostrará parecidamente que el ángulo *BCH*, o sea el *ACD*, es mayor que *ABC*.

⑥ *Luego en todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos*, lo cual había que demostrar. ■

Tal como lo expresa Thomas L. Heat en (Heat, 1963, p. 214), la demostración euclidiana consta en lo general de seis partes (mismas que hemos numerado en el ejemplo anterior):

1. el *enunciado*, donde la proposición por justificar o demostrar se declara en términos generales;
2. la *preparación*, donde mediante un diagrama se establecen ciertos datos (puntos, líneas, triángulos, círculos, etc.) a los que se referirá la demostración o la construcción;
3. la *especificación*, donde, a fin de fijar las ideas, se declara de nuevo lo que se quiere hacer o probar, esta vez en términos de los datos particulares que figuran en el diagrama;
4. la *construcción* u *organización*, donde se elaboran todas las adiciones al diagrama necesarias para facilitar la demostración;
5. la *demostración* propiamente dicha; y
6. la *conclusión* o *coda*, que vuelve sobre la proposición inicial enunciando en forma general lo que se acaba de hacer o probar.

De estas partes, es en la quinta donde se desarrolla propiamente el argumento lógico, el cual en este contexto es muy riguroso[13].

Como se puede ver, en la demostración de la Proposición I.16 Euclides utiliza un diagrama en torno al cual organiza el argumento. Esto no es algo circunstancial, sino un rasgo característico de los *Elementos* que queremos aclarar. En nuestro ejemplo la importancia

[10] La proposición I.4 corresponde al criterio lado-ángulo-lado para la igualdad de triángulos.
[11] Noción común (o *axioma*) VIII: *El todo es mayor que la parte*.
[12] Aquí Euclides se sirve de la siguiente regla, la cual se puede derivar de las nociones comunes: *si* a *es mayor que* b *y* b *es igual a* c, *entonces* a *es mayor que* c.
[13] Si bien algunas proposiciones no tienen algunas de estas partes, tres de ellas son indispensables: la 1, la 5 y la 6.

del diagrama se hace presente desde el enunciado de la proposición, donde los ángulos se clasifican en *internos* y *externos*. Al respecto, en los *Elementos* no hay ninguna definición formal de estos términos, pudiéndose entender su significado sólo por la figura. De esta manera, además de presentar ciertos objetos en consonancia con los conceptos aludidos en la proposición (v. gr., un triángulo *ABC* y una recta *BCD*), el diagrama nos muestra muchas otras cosas como, por ejemplo, la interioridad y la exterioridad de los ángulos. Todavía más: es con base en la información obtenida en el diagrama que se dan ciertos pasos en la demostración. Veamos.

Como parte del argumento, Euclides traza una recta por el vértice *B* y el punto medio *E* de *AC*, prolongándola hasta *Z*. Después, uniendo *Z* con *C* logra lo que pretende: dividir el ángulo *ACD* en dos partes, una de las cuales es igual al ángulo *BAE*. Este es un paso decisivo en la demostración. La conclusión la obtiene con base en la noción común VIII: *el todo es mayor que la parte*. Examinemos este fragmento de la prueba: ¿cómo se llega a la conclusión de que el ángulo *ECZ* es una parte del *ACD*? Respuesta: a través del diagrama, que nos deja ver quién es el todo (el ángulo *ACD*) y quién es la parte (el ángulo *ECZ*). Esto se debe a la ubicación del punto *Z*, que aparece fuera del triángulo *ABC* y dentro del ángulo *ACD*. No obstante, este hecho no se puede probar a partir de los axiomas y postulados en que Euclides basa la demostración. Por ejemplo, el punto *Z* podría hallarse al interior del triángulo *ABC* (como puede suceder cuando las líneas rectas son cerradas)[14], con lo cual el argumento se vendría abajo. Por tanto, es el diagrama, o la construcción realizada, lo que nos hace saber la ubicación de *Z*, no el texto. Estamos, pues, ante un caso en el que una propiedad se ha descubierto observando un diagrama, el cual participa vivamente en la demostración.

Podemos decir entonces que en los *Elementos*, los diagramas suelen hacer posibles ciertos pasos de la demostración al suministrar los datos necesarios para su realización[15].

El propósito de la *conclusión* (parte 6) es pasar del resultado particular alcanzado con base en la construcción, a un enunciado general. El esquema lo expresa Parsons con claridad:

[14] Por ejemplo en la geometría Riemaniana.

[15] Es por esto que a los razonamientos de este tipo se les llama *diagramáticos* Al respecto, véase (Shabel, 2003).

Habiendo asumido una a particular tal que $F(a)$, se deduce $G(a)$. Se tiene por tanto $F(a) \rightarrow G(a)$. No obstante, como a es arbitraria, se sigue que $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$[16].

1.4 La demostración euclidiana como paradigma: el punto de vista de Kant

Los diagramas que figuran en los *Elementos* corresponden a lo que Kant denomina "construcción de conceptos". Dice al respecto: "El conocimiento *filosófico* es un *conocimiento racional derivado de conceptos*; el conocimiento matemático es un *conocimiento obtenido por la construcción de los conceptos*"[17] y añade: "[...] el conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo universal; las matemáticas, lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, pero sólo *a priori* y por medio de la razón."[18]

El diagrama presente en la proposición I.16 es, en la jerga kantiana, "una construcción de conceptos". En él, Euclides exhibe ciertas figuras en consonancia con los conceptos de *triángulo*, *punto*, *línea recta* y *ángulo* que como tales reconocemos intuitivamente[19]. El ulterior razonamiento gira en torno a este diagrama, y por lo mismo ya no es general: nos habla del triángulo *ABC*, del ángulo *ACD*, etc. en vez de "cualquier triángulo" o de "cualquier ángulo externo a cualquier triángulo". Considera, como dice Kant, lo universal en lo particular. En ello, el uso del diagrama es fundamental.

Kant ve en este modo de proceder un rasgo esencial de la demostración geométrica, un recurso sin el cual no sería posible el conocimiento geométrico en general. Para destacar el papel e importancia de este tipo de razonamiento, Kant nos pide imaginar qué pasaría si preguntáramos a un filósofo la misma cuestión (¿Qué relación guardan los ángulos internos

---

[16] Al respecto, véase (Posy, 1992, pp. 43-79).

[17] Kant, CRP, B741. [Nota.- las referencias a la *Crítica de la razón pura* de Kant suelen hacerse señalando la edición (la primera con la letra "A", la segunda con la letra "B") y el número del pasaje. En nuestro caso: Segunda edición (letra "B"), pasaje # 741].

[18] *Ibíd.*, B742. Aquí "*a priori*" significa "con independencia de la experiencia".

[19] Para Kant, "construir un concepto" consiste en presentar en la intuición (v. gr., en el papel, en el pizarrón o incluso en la imaginación) ciertos objetos que le corresponden [al concepto]. En (CRP, A713 y B741), da claras indicaciones de cómo se debe entender esta caracterización. En este caso se trata de ciertos trazos y figuras que intuitivamente reconocemos como *puntos, líneas, ángulos*, etc. tanto visualmente como por la forma de producirlos. Al trazar, digamos, un triángulo con una regla o un círculo con un compás, Kant diría que los hemos *construido* en la intuición (en este caso, en el ámbito de la sensibilidad). Que tales objetos son nuestras construcciones no está a discusión: no son algo que hayamos tomado de la experiencia (i. e., no se trata de objetos empíricos).

de un triángulo con el ángulo externo y opuesto?). El punto es que nunca daría con algo parecido a la proposición I.16: Sólo contaría con los conceptos de triángulo, recta, ángulo, etc., y por mucho que reflexionara sobre éstos no alcanzaría ninguna conclusión nueva. No podría seguir el camino de Euclides, pues sólo conoce por conceptos, no por construcción de conceptos. Trazar un triángulo sería considerar lo universal en lo particular, pero él "sólo considera lo particular en lo universal". Él podría analizar y clarificar tales conceptos, pero nunca llegaría a propiedades no contenidas en ellos.

En el otro extremo tenemos al geómetra, quien lo primero que hace es representar los conceptos mediante una o más construcciones, para después razonar sobre los objetos así obtenidos; al hacerlo, descubre propiedades de los objetos obtenidos de los conceptos no contenidas en los conceptos mismos (es decir, considerados de manera aislada y al margen de la intuición)[20].

Kant, por tanto, no hace sino reiterar lo que hemos dicho con relación a la Proposición I.16: el diagrama no es sólo una ilustración, sino un elemento central de la prueba que orienta nuestros razonamientos. En palabras de Kant: "A través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición, el geómetra consigue así una solución evidente y, a la vez, universal del problema" (B745). En esto apoya Kant la idea de que las proposiciones de la matemática son sintéticas y *a priori*. La sinteticidad se debe a que los resultados no sólo se obtienen mediante el razonamiento lógico, sino también a través de observaciones hechas sobre diagramas, donde muchas propiedades de los objetos resultan de su construcción, sin que las mismas se sigan de las definiciones, axiomas y postulados. La construcción es, en este sentido, indispensable[21].

Estas son, en general, las bases de la noción constructiva de los objetos matemáticos de Kant. Se trata de entidades que siempre podemos representar en la intuición, ya sea en la imaginación, ya sea en el papel, pero no de manera empírica (es decir, sin tomar el modelo de la experiencia). Así son, en su opinión, los objetos de la geometría euclidiana (los cuales podemos construir con una regla y un compás)[22].

---

[20] Al respecto, cabe señalar que las observaciones de Kant corresponden a la actividad propia de un geómetra anterior al siglo XIX, y no son necesariamente válidas con relación a la geometría contemporánea.

[21] Justamente, el término "sintético" quiere decir en este caso "resultado de una construcción", la cual consiste en la combinación de distintos elementos en un sólo diagrama.

[22] El carácter constructivo de los objetos geométricos euclidianos está presente desde los postulados, donde tres de ellos plantean abiertamente la posibilidad de producir rectas y círculos.

Si bien estos postulados no mencionan ningún procedimiento específico para producir círculos y rectas, limitándose a conceder la posibilidad de hacerlo, el uso de la regla y el compás está claramente presupuesto en ellos. De hecho, estos instrumentos han sido parte de las herramientas de todo geómetra desde la antigüedad. Esto es particularmente cierto en el caso de los *Elementos*, donde con base en la regla y el compás[23] se construyen todos sus diagramas.

En resumen: para Kant, el geómetra cuenta con ciertos procedimientos que le permiten construir objetos en consonancia con los conceptos considerados; y es examinando los objetos construidos que descubre sus propiedades. Y como en la indagación el geómetra no se sirve de nada empírico, sino sólo de lo que es común a todas las figuras del género propuesto, la conclusión alcanzada la puede afirmar para todas ellas[24].

Es más, para Kant es imposible pensar los conceptos geométricos sin darles un objeto: "No podemos pensar en una línea sin *trazarla* en el pensamiento, ni un circulo sin *describirlo*, como tampoco representar tres dimensiones del espacio sin *construir* tres líneas perpendiculares a partir del mismo punto." (B154). Esta simple observación es un indicativo de la importancia que tiene para Kant la idea de que los objetos matemáticos son entidades construibles: sin intuiciones es imposible pensar los conceptos geométricos en absoluto, pues esta actividad precisa de una representación interna de ellos.

Lo anterior no implica mayores problemas para Kant, pues en su opinión los conceptos geométricos nacen ligados a una forma de representación. Pero desde la perspectiva de la matemática moderna, este maridaje entre conceptos y objetos se rompe. Por ejemplo, en la geometría proyectiva, el *principio de dualidad* nos permite jugar con las representaciones, pudiendo ser las "rectas" lo que siempre fueron o lo que originalmente eran los "puntos". Ergo los conceptos definidos por los axiomas son algo más que los objetos que los representan, poseen una mayor generalidad, con lo que la teoría geométrica se descubre como algo más abstracto de lo previsto, como algo que ya no está indisolublemente ligado a

[23] Aunque en el caso de Euclides la regla y el compás no son instrumentos reales (conceptos).

[24] Este modo de entender la demostración perdió fuerza en el siglo XIX, donde muchos matemáticos rechazaron la utilización de diagramas en las demostraciones. Por ejemplo, Dedekind y Pasch. Este último afirma: "Si la geometría ha de ser realmente deductiva, entonces la deducción ha de liberarse por completo de cualquier referencia al significado de los conceptos geométricos, al igual que de las figuras. Así, sólo reconocemos aquellas pruebas en las que cada paso se apoya en las proposiciones precedentes y las definiciones" (cita tomada de "Nineteenth Century Geometry", Stanford Ecyclopedia of Philosophy, en http://plato.stanford.edu.).

un sistema fijo de objetos. De hecho, como veremos, en la geometría de Hilbert los conceptos se piensan sin construcciones. Esta separación entre los conceptos y sus representaciones abrió una vía alterna: la de pensar la teoría por sí misma, es decir, convertirla en un objeto de estudio.

Esto último es lo que hace Hilbert en los *Fundamentos de la geometría* (Hilbert, 1887). Lo que ahí investiga no son los objetos que dice Kant (ciertas entidades construibles en la intuición pura), sino la teoría misma. Digamos que su principal preocupación es explorarla a élla, no a sus interpretaciones.

De esto nos ocuparemos más adelante.

Capítulo 2

2. Descartes y el método de las coordenadas

2.1 El enfoque de Fermat y Descartes

La creación de la geometría de coordenadas, mejor conocida como geometría analítica, se debe en gran medida a Fermat y Descartes. En esta sección nos ocuparemos del libro la *Geometría* de este último.

En la *Geometría* Descartes presenta un nuevo método para resolver problemas geométricos. Esto lo logra construyendo un puente entre el álgebra y la geometría a través de una aritmética de segmentos. En su momento, este simple procedimiento significó no sólo un gran paso en la geometría, sino en la matemática entera, al establecer un vínculo entre dos campos que hasta entonces se consideraban distantes entre si. De hecho, la contribución de Descartes y Fermat fijó las bases para el ulterior desarrollo del cálculo diferencial e integral.[25]

En cuanto al método, la manera en que Descartes procede difiere considerablemente del enfoque adoptado por Euclides en los *Elementos*. Descartes recurre por lo general al método analítico. Al abordar un problema supone conocida la solución, la cual representa con literales, al igual que las líneas necesarias para la construcción buscada (conocidas o no); de esta manera, relaciona tales elementos en un sistema de ecuaciones, lo cual le permite resolver el problema con ayuda del álgebra. Esta es la manera en que se sirve del álgebra en la solución de problemas geométricos.

---

[25] Descartes ve en la matemática un método que ha de llevar a todas las demás disciplinas. Dice al respecto:

> "La matemática es un método de conocimiento más potente que ningún otro que nos haya sido otorgado por obra humana, y es la fuente de todos los demás. […]. Todas las ciencias que tienen como fin la investigación sobre el orden y la medida están relacionadas con las matemáticas, y poco importa si esa medida se busca en los números, formas, estrellas, sonidos o cualquier otro objeto; por todo ello, debe existir una ciencia general que explique todo lo que deba ser conocido sobre el orden y la medida, con independencia de su aplicación a alguna disciplina particular, y así que esta ciencia tiene su propio nombre consagrado por su prolongado uso, y es el de matemáticas. Y una prueba de que sobrepasa con mucho en facilidad e importancia a las ciencias que de ella dependen es que abarca a la vez todos los objetos a las que éstas se dedican, además de muchos otros."

y concluye: "Las largas cadenas de razonamientos simples y fáciles a que están acostumbrados los geómetras para alcanzar las conclusiones de sus más difíciles demostraciones, me han llevado a imaginar que todas las cosas cuyo conocimiento compete al hombre están mutuamente relacionadas de la misma forma." Este fragmento, aunque reducido, ofrece una clara idea del lugar que Descartes otorga a las matemáticas.

Con relación a Euclides y sus demostraciones, se trata de un procedimiento radicalmente distinto. No obstante, Descartes no abandona el marco de la geometría euclidiana, pues adopta sus axiomas como principios fundamentales. Más bien, lo que hace es introducir un método. En otras palabras, Descartes no inventa una nueva geometría, sino que enriquece la euclidiana con un original modo de proceder, lo cual, de paso, le permite introducir nuevos objetos geométricos: curvas que define con base en ciertas nociones algebraicas.

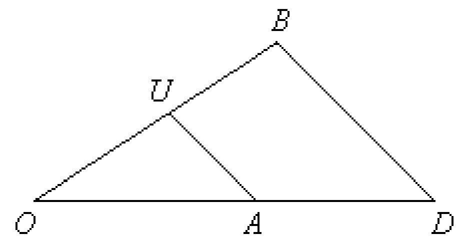
2.2 Un nuevo vínculo entre el álgebra y la geometría

El vínculo entre el álgebra y la geometría se da a través de un cálculo de segmentos que debemos explicar. Lo primero es realizar con segmentos las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) mediante una construcción geométrica. Al respecto, Descartes abandona el punto de vista adoptado por los griegos, según el cual el producto de segmentos representa el área de una figura o el volumen de un sólido (de manera que las operaciones entre más de tres segmentos no tenían sentido). Pasando por alto estas restricciones, para él una expresión como a^n representa, al igual que cualquier otra magnitud numérica, la longitud de un segmento. Esto le permite establecer un claro vinculo entre la aritmética y la geometría, pues los elementos geométricos manejados de está forma nos llevan de una manera natural al álgebra.

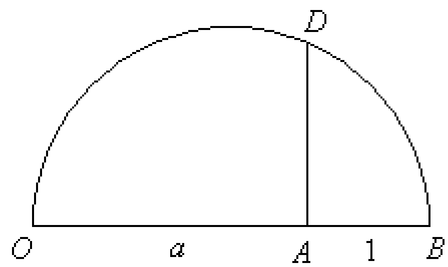
Descartes maneja los segmentos de recta como si éstos fueran simples números, y toma uno de ellos como segmento unidad. Esto le permite realizar operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, pudiéndose incluso extraer su raíz.

La manera en que multiplica es la siguiente:

Sean $a = OA$ y $b = OB$ dos segmentos dados con un origen común. Tomemos sobre la recta por O y B un segmento $u = OU$ como unidad, tal como se muestra en la figura. Tracemos el segmento UA y la paralela a UA por B. Sea D la intersección con OA. Por definición, $d = OD$ es el producto de los segmentos a y b. Escribimos, $d = a \cdot b$.



La justificación del procedimiento utilizado por Descartes se halla en la teoría de las proporciones: $\Delta OAU \cong \Delta ODB$, pues $UA \| BD$ y $\angle AOU = \angle DOB$, de modo que $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OB}{OU}$ y $OD = a \cdot b$. La división se define en forma análoga. Por su parte, la raíz $\sqrt{a}$ se obtiene como sigue. Fórmese el segmento $a+1$, donde 1 es un segmento unidad, y trácese la semicircunferencia de radio $\dfrac{a+1}{2}$. Sobre el punto *A*, trácese una perpendicular tal como se muestra en la figura. De nuevo, dada la semejanza de los triángulos *OAD* y *DAB*, el segmento AD es la raíz buscada.



Ahora veamos cómo resuelve Descartes un problema con base en el método de las coordenadas[26]. Se trata de hallar dos medias proporcionales entre dos líneas *a* y *q*. Como veremos, la cuestión se soluciona hallando la intersección de una circunferencia con una parábola. Representemos una de las medias proporcionales con la letra *z*. Tenemos:

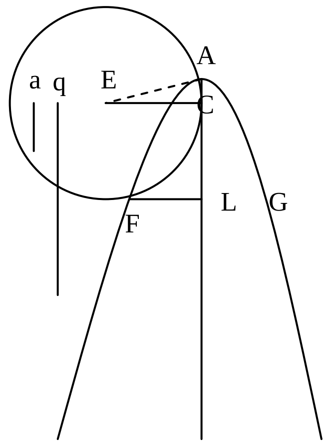
$$\frac{a}{z} = \frac{a}{z}\cdot\frac{z}{z} = \frac{z}{\frac{z^2}{a}} = \frac{a}{z}\cdot\frac{a}{a}\cdot\frac{z}{z}\cdot\frac{z}{z} = \frac{\frac{z^2}{a}}{\frac{z^3}{a^2}}$$

Así, tenemos una ecuación entre *q* y $\dfrac{z^3}{a^2}$, a saber, $z^3 = a^2 q$.

Descríbase la parábola *FAG* con su eje a lo largo de *AC*, y con *AC* igual a $\dfrac{1}{2}$, es decir, la mitad del lado recto. A continuación, levántese *CE* perpendicular a *AC* e igual a $\dfrac{1}{2}$ y con centro en *E* y descríbase la circunferencia *AF* tomando a *EC* como radio.

---

[26] la geometría de coordenadas no esta cómo tal en Descartes ni en Fermat, pero se dan todas las bases para su posterior desarrollo.



Conforme a la construcción anterior, *FL* y *LA* son las medias proporcionales buscadas. Obviamente, estos puntos se pueden hallar resolviendo un sistema de ecuaciones.

De esta forma Descartes se vale del álgebra para resolver problemas de la geometría.

En el álgebra de segmentos, el uso de la regla y el compás en la construcción de figuras geométricas queda representado mediante simples operaciones aritméticas. Por otra parte, Descartes introduce nuevas ideas sobre cómo construir instrumentos para la construcción de figuras a partir de ciertas ecuaciones. Estos instrumentos le permiten resolver problemas geométricos como, por ejemplo, la obtención de medias proporcionales o la trisección del ángulo, algo imposible en la matemática griega. La justificación de tales instrumentos está sustentada en el álgebra.

2.3 ¿Qué trajo consigo el método de las coordenadas?

El método de las coordenadas representa uno de los más grandes avances en la matemática de todos los tiempos, aunque Fermat y Descartes no tuvieran una clara conciencia de ello. Su propósito era más bien innovar la geometría de los griegos dejando atrás sus anticuados métodos. No obstante, al hacerlo sentaron las bases de nuevos y grandes desarrollos en la matemática. Su aportación permitió establecer un fuerte vínculo entre dos dominios aparentemente ajenos, el de los números y el de las formas y la extensión. Con base en este método, los matemáticos pudieron representar gráficamente las leyes que gobiernan los fenómenos, expresar geométricamente la correlación existente entre eventos interdependientes, y dar forma algebraica a las relaciones geométricas. Esto facilitó el desarrollo del cálculo diferencial e integral en el siglo XVIII, y la aparición de nuevas teorías como lo son las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, el álgebra lineal, y la generalización del concepto de espacio. Se trata de una idea que penetra en toda la matemática moderna y una de las ideas que más ha repercutido en el desarrollo de la ciencia moderna.

Hilbert no era ignorante de esta situación. Por ello (como veremos) al fundamentar la geometría sus preocupaciones se movieron también en torno al problema de dar cabida al método de las coordenadas, es decir, en torno a la cuestión de introducir los números y el álgebra en el tratamiento de la geometría.

Capítulo 3

3. La geometría proyectiva y el principio de dualidad

3.1 El resurgimiento de la geometría proyectiva en el siglo XIX.

El siglo XIX presencio la reaparición de la geometría proyectiva en el horizonte matemático. El iniciador de este nuevo movimiento fue Lazare N. M. Carnot, un alumno de Monge y padre de Sadi Carnot. Su principal obra fue la *Geometría de la posición*, un trabajo en el que recuperó la línea de trabajo iniciada por Desargues y Pascal en el siglo XVII y que se había perdido en el siglo XVIII. Como geómetra, Carnot se negó a utilizar métodos analíticos, retomando con ello el camino de la geometría pura. A sus trabajos siguieron los de Brianchón, Gergonne y Poncelet (sobre todo los de este último), en los que la geometría proyectiva se estableció como una nueva rama de las matemáticas, con métodos y objetivos propios.

A diferencia de los geómetras del siglo XVII, que por lo general se ocupaban de problemas específicos, Poncelet buscó determinar las propiedades de las figuras geométricas que son comunes a todas sus proyecciones. Esta fue la temática que él y sus sucesores estudiaron, desarrollando conceptos como los de transformación proyectiva, e involución, e introduciendo nuevas nociones como la de conjunto armónico de puntos. Una importante noción introducida en este periodo fue la de *elemento imaginario*, la cual aparece, por ejemplo, al hablar de las asíntotas de una elipse o una parábola, o de los puntos y la recta al infinito. Asimismo, en dicho periodo surgió el llamado *principio de dualidad*, el cual estaría llamado a ocupar, junto con las nociones ideales, un importante papel en las reflexiones y la filosofía de Hilbert.

Un hecho relevante para el tema que nos ocupa fue la liberación de la geometría proyectiva de su dependencia de la longitud y las congruencias. Esto inició en un libro escrito en 1847 por Karl von Staudt, denominado también *Geometría de la posición*. Entre los logros de von Staudt se encuentra el haber hallado la manera de introducir coordenadas sin recurrir a la noción de longitud, de modo que las coordenadas obedecían reglas de operación similares a las de los números. Para ello definió ciertas construcciones geométricas mediante las cuales indujo tales operaciones entre los símbolos utilizados como coordenadas. Con esto quedó establecido que la geometría proyectiva es mas fundamental que la euclidiana, pues sus nociones son más simples y anteriores a las de esta última. Como veremos, muchas de estas cuestiones ocuparon un importante lugar en la reflexiones de Hilbert[27].

Así, por ejemplo, en los *Fundamentos de la geometría* Hilbert ordena los axiomas conforme a las nociones implicadas (incidencia, paralelismo, etc.) tomando en cuenta la ideas recién expuestas, y elabora el cuadro de axiomas teniendo en mente la posibilidad de introducir coordenadas o edificar las distintas geometrías con sólo variar los axiomas. De esto nos ocuparemos en el capítulo 4.

3.2 Las geometrías no euclidianas y el debate en torno a la naturaleza de la geometría

Otro desarrollo en el siglo XIX que influyó decisivamente en el cambio del punto de vista en torno a la naturaleza de las matemáticas fue la aparición de las geometrías no euclidianas. Como sabemos, un problema que desde la época de los griegos se había discutido era el del estatus lógico del quinto postulado de Euclides. Este principio, no tan evidente como los demás, se creía innecesario; pues se pensaba que se le podía demostrar a partir de los demás. De hecho, a lo largo de la historia hubo muchos intentos por probarlo, e incluso se especula que Euclides fue el primero en intentarlo.

En el siglo XVIII un monje Italiano llamado Gerolamo Saccheri intento probar el quinto postulado indirectamente, es decir, probarlo por reducción al absurdo. Este intento se vería repetido posteriormente por parte de Lambert. Al respecto, hay dos formas de negar el quinto postulado; la primera es diciendo que existe más de una paralela (aquí, nos estamos refiriendo al axioma de Playfair, el cual es equivalente al quinto postulado); la segunda, es afirmando que no existe ninguna paralela. Tales intentos terminaron fracasando, por una razón que ahora conocemos: el quinto postulado es independiente de los otros cuatro.

[27] Estos desarrollos no dejaron de presentar algunas deficiencias desde el punto de vista de la lógica. Por ejemplo, Poncelet Gergonne y Chasles, no pudieron justificar lógicamente el principio de dualidad, y von Staudt utilizó el axioma de las paralelas en la geometría proyectiva, siendo que el paralelismo no es un invariante en esta geometría. Estas deficiencias fueron corregidas posteriormente por Félix Klein, Pasch y Hilbert, entre otros.

Los primeros en aceptar la posibilidad lógica de un nuevo sistema donde el quinto postulado se sustituye por su negación fueron C. Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolai I. Lobachevsky (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860).

Con la aparición de las geometrías no euclidianas surgieron muchas interrogantes en torno a la naturaleza de la geometría. Por ejemplo, la suposición hasta entonces no discutida de su singularidad se vino abajo, y se cuestionó su relación con el espacio físico: ¿Cuál es la geometría que corresponde a éste? Al mismo tiempo, sus axiomas se empezaron a ver como otra cosa que principios autoevidentes de aceptación general. Así, hacia 1882 Pasch vio en ellos meras hipótesis puestas ahí para deducir los teoremas sin más ayuda que la de la lógica. Frente a la tesis de Kant —la geometría (euclidiana) es la ciencia que "determina las propiedades del espacio de una manera sintética y, sin embargo, *a priori*." — Klein opuso la propia: Los axiomas no son verdades autoevidentes, sino el resultado de idealizar nuestras observaciones imperfectas: "Los resultados de cualesquiera observaciones son válidos únicamente dentro de ciertos limites de exactitud y bajo condiciones particulares; al establecer los axiomas, sustituimos esos resultados por aseveraciones de absoluta precisión y universalidad."[28] Ciertamente, no podemos atribuirle una validez absoluta al resultado de una idealización. Lo correcto es, por tanto, considerar a la teoría geométrica como una construcción teórica cuya concordancia con los hechos de la experiencia no podemos garantizar de manera absoluta, es decir, como una teoría a la que no le podemos atribuir una fuerte realidad matemática externa. Como veremos, todas estas discusiones condujeron a un nuevo punto de vista que Hilbert impulsó.

3.3 Examen crítico de los fundamentos: el caso de Moritz Pasch

Pasch fue uno de los matemáticos que con mayor ahínco trabajaron en los fundamentos de la geometría proyectiva en el siglo XIX, y uno de los primeros en ofrecer una presentación axiomática de esta teoría.

En su trabajo, y a diferencia de Euclides y Kant, Pasch se fijó como norma apoyar los argumentos matemáticos exclusivamente en los axiomas y en la lógica. Dice al respecto: "Si la geometría ha de ser realmente deductiva, entonces la deducción ha de liberarse por

[28] Cita tomada de (Körner, 1972, pp. 9-10).

completo de cualquier referencia al significado de los conceptos geométricos, al igual que de las figuras. Así, sólo reconocemos aquellas pruebas en las que cada paso se apoya en las proposiciones precedentes y las definiciones"[29]. Al examinar con espíritu rigorista los argumentos de Euclides, el mismo Pasch descubrió algunas suposiciones que nadie había notado con anterioridad. Por ejemplo, las relacionadas con el orden de los puntos en una línea. Todos pueden trazar un diagrama y notar que si en una línea recta un punto B está entre un punto A y un punto C, entonces ni C está entre A y B, ni A está entre B y C. No obstante, nadie antes que Pasch había anotado esta clase de observaciones entre los axiomas, quizá porque se les consideraba demasiado obvias. La consecuencia de tal desatención fue precisamente la necesidad de recurrir a la intuición, de manera que la forma lógica de lo que se hacía era poco clara. A diferencia de Kant, Pasch vio en el método deductivo el método de las matemáticas y no sólo una parte de él, lo cual exigió acentuar el rigor. No obstante, como pronto veremos, Pasch mantuvo una cierta fijación a la idea de que los términos geométricos básicos están ligados a una única interpretación. Esta circunstancia se hizo evidente al comentar Pasch el principio de dualidad de la geometría proyectiva, por lo que ahora habremos de referirnos a estas cuestiones.

Veamos una variante de los axiomas de Pasch para la geometría proyectiva plana en la que el principio de dualidad se hace presente. La presentación se debe a Annita Tuller (Tuller, 1967).

En el punto de partida tenemos como términos indefinidos los de *punto* (denotados con letras como A, B, C, …), *línea* (denotadas con letras como a, b, c, …) y una relación de *incidencia* entre puntos y líneas. Cuando un punto y una línea son *incidentes*, decimos que el punto *está en* la línea, que la línea *contiene* al punto o que *pasa por* él.

Los axiomas son los siguientes:

A_1) Dados dos puntos distintos entre sí, hay una y sólo una línea que pasa por los dos.

A_2) Dadas dos líneas distintas entre sí, hay uno y sólo un punto contenido en las dos.

A_3) Dado un punto, existen al menos tres líneas que pasan por él.

A_4) Dada una línea, existen al menos tres puntos contenidos en ella.

En esta presentación axiomática hay una curiosa relación entre los axiomas. Veamos: al intercambiar en el axioma A_1 las palabras "punto" y "línea" y las expresiones "está

[29] Pasch, 1882. Citado en "Nineteenth Century Geometry", Stanford Encyclopedia of Philosophy, en http://plato.stanford.edu.

contenido en" y "pasa por" (la cuales expresan una misma relación), lo que resulta es el axioma A_2, y lo mismo sucede con los axiomas A_3 y A_4. A este proceso le llamamos "dualización" y decimos que los enunciados resultantes son uno el *dual* del otro. Podemos decir entonces que al dualizar los axiomas de esta teoría, lo que resulta son los mismos axiomas. Por tanto, el siguiente principio es válido para esta teoría.

Principio de dualidad de la geometría proyectiva: *Dado cualquier teorema de la geometría proyectiva plana, al intercambiar en él los términos "punto" y "línea" (intercambiando, de ser necesario, las frases "estar en" y "pasar por"), lo que resulta es otro teorema igualmente válido.*

Nótese que al dualizar el dual de una proposición *P*, el resultado es la misma *P*.

Veamos un ejemplo de cómo trabaja la dualidad aplicándola al teorema del hexágono de Pappus.

Teorema de Pappus

Si los puntos A, B *y* C *están en una recta, y los puntos* A', B' y C' *están en otra recta, entonces los puntos de intersección* $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$ *y* $R = CA' \cap C'A$ *están alineados.* (En otras palabras: si los vértices de un hexágono se hallan alternados en dos rectas, entonces los puntos de intersección de los lados opuestos están alineados, figura 1)

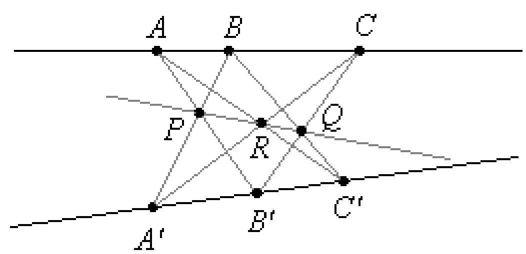


Figura 1

El dual del teorema de Pappus es el siguiente:

Si las rectas a, b *y* c *concurren en un punto, y las rectas* a', b' *y* c' *concurren en otro punto, entonces las líneas* p, q *y* r *definidas por las parejas de intersecciones* $(a \cap b', a' \cap b)$, $(b \cap c', b' \cap c)$ *y* $(c \cap a', c' \cap a)$ *son concurrentes*[30]. Figura 2.

---

[30] La noción dual de "puntos en una recta" es la noción de "líneas concurrentes". Nótese que todo enunciado comparte con su dual una misma estructura, es decir, tienen la misma forma lógica. Estos teoremas se

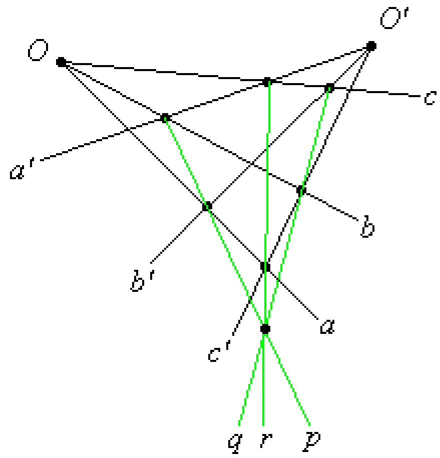


Figura 2

El valor de la dualidad es que con ella disponemos de un procedimiento que duplica nuestra capacidad para demostrar teoremas, pues nos ofrece dos resultados por el costo de uno, una ganancia del cien por ciento. Esta cuestión, sumamente valorada por Hilbert, sería motivo de un amplio comentario a no ser porque nuestro interés es otro por el momento: explicar la lectura que hicieran Pasch y Hilbert del principio de dualidad y contrastar sus puntos de vista.

3.4 Hilbert: una lectura del principio de dualidad de la geometría proyectiva

Al reflexionar en torno al principio de dualidad, Pasch no sólo vio en él una herramienta de gran utilidad, sino algo contrario a nuestra comprensión intuitiva de las nociones de punto y línea, pues no consideraba creíble que estos términos se pudieran intercambiar[31]. Esta simple observación muestra que para él, como para otros geómetras del siglo XIX, la geometría seguía siendo una ciencia con una clara semántica para sus términos.

Por contraste, la lectura que hiciera Hilbert del principio de dualidad toca la esencia de su primer formalismo: no sólo se trata de algo contrapuesto a nuestras ideas acerca de lo que son los puntos y las líneas, sino de una señal. En efecto, la posibilidad de intercambiar los

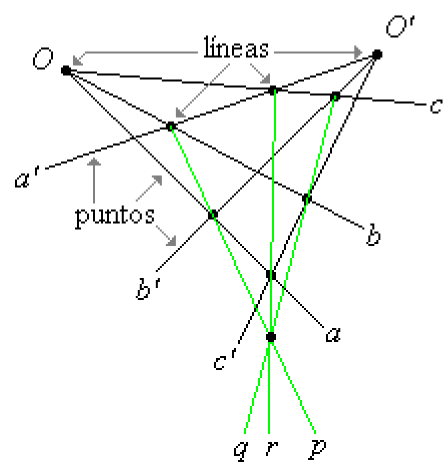
obtienen el uno del otro mediante el intercambio de términos *punto* ↔ *línea*, *puntos alineados* ↔ *líneas concurrentes*, *punto de intersección de líneas* ↔ *línea por los puntos*.

[31]Este comentario aparece en una nota biográfica sobre Moritz Pasch de J. J. O'Connor y E. F. Robertson en "The MacTutor History of Mathematics archive": http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pasch.html.

términos “punto” y “línea” se debe a que al interior de la teoría estas nociones son simétricas. Por tanto, podemos leer sus enunciados intercambiando la interpretación de estos términos sin incurrir en incorrecciones, es decir, sin que dejen de ser una descripción objetiva de ciertos hechos geométricos.

Aclaremos lo anterior. Si proporcionáramos los axiomas de la geometría proyectiva a dos individuos que ignoraran el significado intuitivo que les damos a las palabras “punto” y “línea”, y les pidiéramos que ilustraran el teorema de Pappus con un diagrama, bien podría suceder que el primero de ellos diera como respuesta la Figura 1 y el segundo la Figura 2 anteriores: uno llamaría punto a lo que el otro denomina recta, y viceversa. Simplemente, cada uno de ellos habría escogido una interpretación diferente para estos términos, ambas válidas.

A la derecha, representamos el teorema de Pappus con la figura 2 recién expuesta. Para ello, intercambiamos los significados habituales de las palabras “punto” y “línea” (i. e., pintamos *puntos* y *líneas* conforme a un nuevo criterio: dibujamos *rayas* en conexión con la palabra “punto” y *bolitas* en conexión con la palabra “línea”). Obviamente, el diagrama también es una representación del teorema dual de Pappus[32] si utilizamos las palabras “punto” y “línea” en su forma habitual.



Esta manera de entender la dualidad amplió considerablemente el horizonte: *los teoremas geométricos se podían interpretar de manera distinta a como en un principio se tenía en mente*. Por tanto, no encajaba concebir la teoría como representación unívoca de un sistema de objetos, sino como un montaje de relaciones entre términos cuyo significado podía variar. En otras palabras (y dicho en tiempo presente): la teoría lo único que logra es delimitar a los objetos que le dan origen como parte de un sistema (o *estructura*), sin

[32] En otras palabras, al trazar las Figuras 1 y 2, en ambos casos utilizamos las palabras “punto” y “línea” de la misma manera. Lo diferente eran las proposiciones ilustradas (la primera era el teorema de Pappus, la segunda el teorema dual de Pappus). No obstante, la dualidad nos permite intercambiar directamente la interpretación de estos términos sin desvirtuar la validez de los teoremas. Por tanto, la Figura 2 es también, como lo acabamos de mostrar, una ilustración del teoremas de Pappus si aceptamos llamar “línea” a lo que antes llamábamos “punto”, y viceversa.

retener nada inherente a la esencia misma del objeto. Y sucede que ese mismo montaje de relaciones puede convenir a objetos de muy distinta índole[33]. Así, el principio de dualidad resulta extraño sólo a quienes, sin darse cuenta de lo anterior, se aferran al significado tradicional de los términos “punto” y “línea”.

Podemos decir entonces que el papel de la dualidad en la génesis del formalismo de Hilbert fue doble. Primero, le sugirió que en un sistema axiomático los términos matemáticos actúan como variables, es decir, como expresiones cuyo significado puede cambiar. Segundo, le sugirió que ninguna teoría matemática tiene una única lectura como referida a un dominio particular de objetos; más bien, las teorías son sólo *formas* o *moldes* diseñados para alojar una gran variedad de materias a tratar.

[33] Este viraje en la concepción de las teorías matemáticas condujo a Hilbert a la teoría de modelos. Al respecto, en los *Fundamentos de la geometría* Hilbert se sirvió de ella para demostrar la mutua independencia de los axiomas y para explorar las distintas geometrías que resultan al variar los axiomas (v. gr., substituyendo algunos de ellos por su negación).

Capítulo 4

4. Los fundamentos de la geometría

4.1 La naturaleza de la geometría según Hilbert

Retrocedamos en el tiempo hasta llegar al momento en que Hilbert iniciara sus investigaciones en torno a los fundamentos de la geometría. En las notas de un curso sobre geometría proyectiva que impartiera en 1891, Hilbert bosqueja su punto de vista de la siguiente manera. La geometría se divide en tres niveles: (1) *geometría de la intuición*, la cual se apoya en los hechos suministrados por nuestra comprensión intuitiva de las figuras; (2) *geometría axiomática*, la cual resulta al investigar los axiomas subyacentes a los hechos presentes en la geometría de la intuición; y (3) *geometría analítica*, donde la geometría se reduce al análisis matemático a través de la coordinación de los puntos de la recta con los números reales.

En el primer nivel, nos dice, la actividad geométrica se desarrolla en torno a "un cuerpo de hechos geométricos" provistos por la intuición. Se trata, por tanto, de algo no muy distinto a lo descrito por Kant. No obstante, es en el terreno de la axiomática donde Hilbert plantearía sus diferencias con este último. En su opinión, el método axiomático ofrece algo más que la mera organización de los hechos geométricos. Más bien, como ya lo hemos señalado, lo que ahí se ofrece es una *trama de conceptos*. Y si bien la teoría se obtiene a partir de los hechos de la geometría intuitiva, en su producto final ésta se presenta con un marcado carácter abstracto que la proyecta más allá de sus orígenes. (Al respecto, véase Hilbert, 1993, p. 23).[34]

Grosso modo, el esquema es el siguiente.

La geometría de la intuición se desarrolla sintéticamente. En ella, las proposiciones se sustentan sobre argumentos intuitivos y sin apelar a ninguna clase de principios axiomáticos. Al considerar en su conjunto tales hechos, el entendimiento busca ordenarlos en forma lógica y sistemática. Se pasa así a la geometría axiomática, donde el ordenamiento

[34] En los *Fundamentos de la geometría*, los conceptos básicos son los de *punto*, *línea* y *plano*, y los hechos relevantes los de *incidencia*, *orden* y *congruencia* entre puntos, líneas y otras figuras. Para referirse a tales hechos Hilbert utiliza expresiones como "*A* está en *a*", "*A* está entre *B* y *C*", "*a* y *b* son paralelas", "*AB* es congruente con *CD*", etc., las cuales corresponden en el orden lógico a relaciones entre los conceptos.

se lleva a cabo mediante la referida *trama de conceptos*. El procedimiento consiste en asociar, como ya lo hemos advertido, a cada objeto de la intuición un concepto de esa trama, y a cada hecho una relación lógica entre conceptos. En la base de tal ordenamiento se halla un reducido número de proposiciones distinguidas (los *axiomas*) que sirven como fundamento de la red de relaciones (del entramado de conceptos). A partir de ellas se obtiene, por deducción lógica, la totalidad del edificio conceptual.

¿De qué conceptos se trata? A diferencia de Euclides, Hilbert no trata de precisar todos los términos de la teoría (v. gr., mediante definiciones), ni todas las relaciones fundamentales. Más bien, éstas quedan definidas implícitamente por los axiomas. Veamos cómo se expresa en una carta dirigida a Frege en 1899:

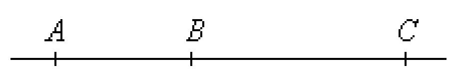
> "Yo no quiero asumir nada como conocido por anticipado; considero mi explicación de la sección 1 [de los *Fundamentos de la geometría*] como una definición de los conceptos de punto, línea, plano —si uno añade nuevamente todo los axiomas de los grupos I al V como marcas características. Si se buscan otras definiciones de 'punto', v. gr., mediante paráfrasis en términos de inextensión, etc., entonces me debo oponer a tales intentos en forma decisiva; uno busca algo que nunca encontrará porque no hay nada allí." (Tomado de Frege 1980, p. 39).

Frente a la teoría axiomática, Hilbert adopta dos puntos de vista complementarios. Por una parte, ve en ella una síntesis de los conocimientos adquiridos en la geometría de la intuición, el resultado de reducir cierta esfera del conocimiento a un sistema de axiomas; por la otra, ve un "esquema" de conceptos formales que sólo más tarde llenará el entendimiento humano con materiales. Esta última idea es lo que se halla en la base de la noción de *modelo*.

En el primero de estos sentidos, Hilbert se preocupa por elaborar una teoría conceptualmente cercana a la de Euclides. Su intención es explorar los vínculos entre las nociones básicas, sus variaciones (cambiando, por ejemplo, un axioma por su negación o un grupo de axiomas por otro) y cubrir los faltantes para ya no recurrir a la intuición en su desarrollo interno. Su afán clasificatorio lo lleva a dividir los axiomas en cinco grupos, según el tipo de nociones implicadas: (I) Axiomas de *incidencia*, (II) Axiomas de *orden*, (III) Axiomas de *congruencia*, (IV) Axioma de las *paralelas* y (V) Axiomas de *continuidad* (véase la lista de axiomas al final de este texto). Los axiomas I.4-I.8 son los únicos que contienen información relativa a los elementos del espacio, mientras que los demás sólo se refieren a los elementos de la recta o del plano (Hilbert adjetiva a dichos axiomas como *espaciales,* para así diferenciarlos del resto). No obstante, esta ordenación la lleva a cabo sin renunciar al segundo punto de vista. Por ello las palabras con que inicia su libro *Fundamentos de la geometría*: "Consideremos tres sistemas distintos de cosas. Llamamos *puntos* a las cosas que integran el primer sistema […] *líneas* a las que integran el segundo sistema […] y *planos* a las del tercer sistema". En el punto de partida, Hilbert simplemente considera ciertas "cosas" de las que nada se sabe de antemano. Esto abre las puertas al segundo punto de vista: ya no se trata de una teoría adosada a ciertos hechos preexistentes; más bien, se trata de una red de relaciones vacías que podemos llenar con distintos significados[35]. Claro está que Hilbert tiene en mente la reconstrucción formal de la geometría clásica; no obstante, su propósito es lograr esto de manera estrictamente deductiva, sin invocar el significado de los términos fundamentales y sin recurrir, como lo exigiera Pasch, a los diagramas.

Esta exclusión interna de la intuición espacial no se debe confundir con la ignorancia del origen intuitivo de la teoría. Por el contrario, a fin de hacer evidente el vínculo de la teoría con los hechos geométricos y tenerlos presentes en todo momento, Hilbert conserva los nombres de los objetos y las relaciones espaciales. De los axiomas, dice que éstos expresan "ciertos hechos conexos entre sí y fundamentales de nuestra intuición"[36]. Los axiomas no son entonces verdades autoevidentes, sino la expresión de lo que nuestra intuición geométrica supone. Veamos, por ejemplo, cómo expone Hilbert el axioma II.3:

> **II.3** Si *A*, *B* y *C* son tres puntos distintos en una misma línea, entonces uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.



Un hecho significativo es que Hilbert acompaña al axioma con una figura (la que se muestra) de la que no dice nada y de la que no hace ningún uso más adelante ¿A qué se debe su presencia? La respuesta está en las palabras iniciales de los *Grundlagen*:

[35] En la actualidad este punto de vista sigue vigente. En las teorías axiomáticas los objetos se presentan como entidades no especificadas de las que lo único que sabemos es que cumplen con los axiomas.

[36] Hilbert 1899, p. 1. Obviamente, Hilbert se refiere a nuestra intuición geométrica.

“Establecer axiomas para la geometría e investigar la forma en que se relacionan entre sí es un problema que se ha discutido desde la época de Euclides en diversas y admirables contribuciones a la literatura matemática. El problema en cuestión equivale al análisis lógico de nuestra intuición espacial.”[37] Podemos decir entonces que la figura muestra la manera en que los puntos y las líneas de nuestra intuición se relacionan entre sí. En este caso:

- La figura deja ver que si nos movemos de *A* a *C* sobre la línea, pasaremos por *B*.
- También hace evidente que si nos movemos de *B* a *C* no pasaremos por *A*, incluso si continuamos el movimiento indefinidamente en esa dirección, y que algo semejante sucede respecto a *C* si nos movemos de *B* a *A*. Esto es parte de la naturaleza de la línea recta según nuestra intuición.

Podemos entonces afirmar los hechos observados y escribir el axioma II.3, el cual expresa la *forma* de nuestra intuición espacial. La fuerza del axioma descansa así en la evidencia de los sentidos, la cual nos informa de la manera en que puntos y líneas se enlazan para dar lugar a una relación de orden entre los puntos.

La tarea del análisis lógico es precisamente esta, la de tender un puente entre la geometría intuitiva y la geometría axiomática, en *mapear* los objetos y los hechos en conceptos y relaciones lógicas entre conceptos. Podemos reiterar entonces lo dicho por Klein en el capítulo anterior: los axiomas son una idealización de lo que nos ofrece la intuición sensible. Por tanto, no son proposiciones sintéticas *a priori* como afirma Kant; más bien, su origen se ubica en la consideración de lo que la intuición sensible supone. En consecuencia, el espacio matemático es una libre construcción convencional que, aunque creada a partir de intuiciones, en su producto final ya no depende de ellas[38].

---

[37] Hilbert 1899, p. 1.

[38] En los *Fundamentos de la geometría* los axiomas funcionan como enunciados formales que pueden ser refutados por la experiencia, dependiendo de la interpretación que se dé a los términos 'punto', 'línea', etc. Por ejemplo, al interpretar 'línea' como 'rayo de luz' podríamos encontrar, con relación al axioma II.3, que al movernos de *B* hacia *C* y continuar el movimiento sobre la línea también pasaríamos por *A* (es decir, que los rayos de luz en el espacio físico siguen trayectorias cerradas). Pero entonces diríamos que el concepto de 'línea euclidiana' no es aplicable a los rayos de luz, o que éstos describen trayectorias rectilíneas, pero que el espacio no es el euclidiano y tiene otra forma. En el segundo caso tendríamos un cambio de marco conceptual, lo cual no era imaginable en el siglo dieciocho de Kant por la simple y sencilla razón de que no había otras geometrías a la mano. Véase al respecto Hilbert 1930, especialmente el apartado 21.

4.2 Una nueva manera de hacer matemáticas: la teoría axiomática como objeto de estudio

En los *Fundamentos de la geometría* nos hallamos frente una teoría en la que los términos utilizados se han disociado de sus representaciones. Esto lleva consigo un desplazamiento en el objeto de estudio: lo que se investiga no son los puntos y las líneas de un espacio geométrico, sino la teoría misma. Digamos que se le escudriña a ella, no a sus interpretaciones. Esta manera de abordar la teoría abre las puertas a la teoría de modelos, ya mencionada en la sección anterior, donde el juego consiste en interpretar los términos geométricos de distintas maneras.

Este modo de tratar la teoría tuvo importantes consecuencias. Para empezar, permitió una enorme economía de pensamiento: cada proposición demostrada era válida en todos los modelos de la teoría, donde ya no se le tenía que investigar. Y las ganancias no se redujeron a eso. En un plano más general podemos señalar muchas ventajas que trajo consigo el enfoque propuesto por Hilbert. Permitió, por ejemplo:

1) separar los aspectos lógicos y metodológicos de la teoría de sus aspectos ontológicos y epistemológicos;

2) orientar las investigaciones hacia los aspectos lógicos y metodológicos, incorporando en su estudio estructuras (interpretaciones) que modelan a los axiomas o una parte de ellos[39];

3) examinar lo que se requiere axiomáticamente para lograr cierto de tipo de estructuras algebraicas; y

4) introducir una noción más amplia y abierta del concepto de “objeto matemático”.

Por ejemplo, jugando con los axiomas Hilbert logra construir distintas geometrías, pasando de la euclidiana a la de Bolyai y Lobachevsky, de una geometría desarguesiana a una no desarguesiana, de una geometría sin coordenadas a una geometría con coordenadas. En lo que sigue mostraremos un poco de esta actividad con el estudio de un caso relevante: la introducción de un álgebra de segmentos y la coordenatización del espacio geométrico. Como veremos, estas investigaciones llevaron a Hilbert a profundizar en la relación de los teoremas de Desargues y Pappus con los axiomas y a vincularlos con las propiedades de los anillos en el álgebra.

---

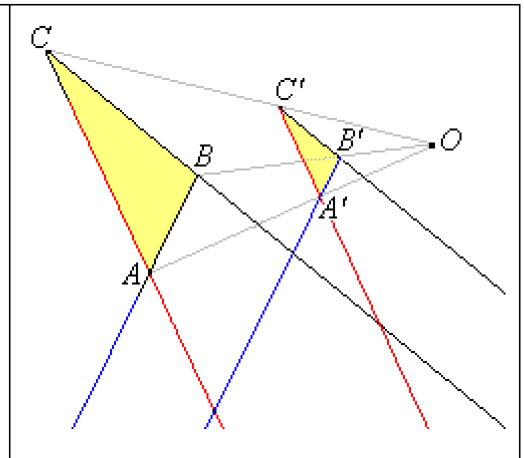
[39] V. gr., el modelo de Moulton que, como veremos, permite establecer la independencia del teorema de Desargues con relación a los axiomas de incidencia para el plano.

4.3 Estudio de un caso: el cálculo de segmentos y la coordenatización del espacio geométrico

En la geometría de Hilbert hay dos resultados que ocupan un lugar especial. Se trata de los teoremas de Desargues y de Pappus, los cuales destacan por dos razones: primero, por el lugar que ocupan en la construcción de un álgebra de segmentos en la geometría plana y la introducción de coordenadas; segundo, por su compleja relación con los axiomas. Consideremos el teorema de Desargues.

Teorema de Desargues[40]

Si en el espacio (en el plano) dos triángulos (*ABC*) y (*A'B'C'*)[41] están situados de modo que las líneas *AA'*, *BB'* y *CC'* que unen los vértices homólogos pasan por un mismo punto *O*, y si los lados homólogos *AB*-*A'B'* y *AC*-*A'C'* son paralelos entre sí, entonces los lados homólogos restantes *BC* y *B'C'* también son paralelos entre sí[42].



Veamos la demostración de este teorema en el caso tridimensional[43]. Por el teorema II (ver nota al pie), *ABC* || *A'B'C'*. De lo anterior se sigue que *BC* y *B'C'* no se intersecan, pues de lo contrario los planos *ABC* y *A'B'C'* no serían paralelos. Por otra parte, como *BB'* y *CC'* concurren en *O*, los puntos *B*, *B'*, *C* y *C'* son coplanares (teorema I). Por tanto, *BC* y *B'C'* pertenecen a un mismo plano y no se intersecan. De esto se sigue que *BC*|| *B'C'*. ■

Es de esperarse que en el plano el teorema de Desargues se pruebe a partir del axioma de las paralelas y los axiomas de incidencia para el plano (axiomas I.1-I.3). No obstante, las cosas no son así. Para evidenciar este hecho mostramos un plano afín en el que estos axiomas son válidos, pero no el teorema. Se trata del *plano de Moulton*, una estructura $\langle R^2$,

[40] Aquí en realidad se trata de dos teoremas que, por su similitud, se designan bajo un mismo nombre: una proposición acerca de configuraciones espaciales, y otra acerca de configuraciones en el plano.
[41] Notación: Con *AB* denotamos a la línea determinada por dos puntos *A* y *B*; con *ABC* al plano determinado por tres puntos no colineales *A*, *B* y *C*, y con (*ABC*) al triángulo con vértices *A*, *B*, *C*.
[42] En otras palabras, (versión tridimensional) si dos triángulos están en perspectiva, y dos pares de lados homólogos son paralelos entre sí, entonces los lados del par restante son paralelos entre sí. Esto corresponde al teorema 32 de Hilbert en los *Fundamentos de la geometría*.
[43] En la prueba nos servimos de los siguientes teoremas, los cuales se demuestran a partir de los axiomas del grupo I (axiomas de incidencia): **Teorema I.** Si dos líneas *l* y *m* concurren en un punto *P*, entonces hay un plano π que las contiene. **Teorema II**. Sean (*A*, *B*, *C*) y (*A'*, *B'*, y *C'*) dos ternas de puntos no colineales. Si *AB* || *A'B'* y *BC*||*B'C'*, entonces *C A*|| *C' A'*.

L, $I\rangle$ donde: R^2 es el plano real, L es un conjunto de *líneas* que a continuación expondremos, e I es la relación de incidencia entre puntos y líneas que se realiza cuando las coordenadas de un punto satisfacen la ecuación de una línea. En cuanto a L, sus elementos son los siguientes:

a) Todas las rectas verticales y horizontales del plano real; b) todas la rectas con pendiente positiva del plano real; y c) todas las líneas quebradas del plano real formadas por dos semirectas que se unen en el eje Y y cumplen lo siguiente: la semirrecta a la izquierda del eje Y tiene pendiente negativa m, en tanto que la semirrecta a la derecha del eje Y tiene pendiente (negativa) $2m$.

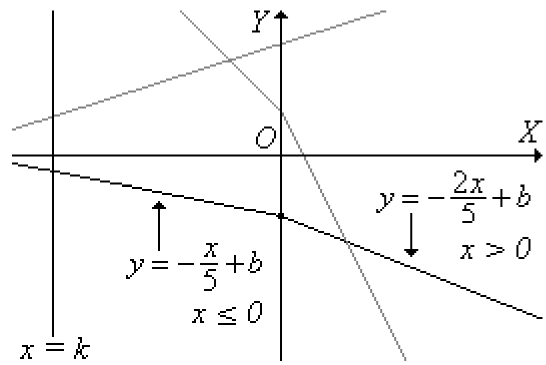
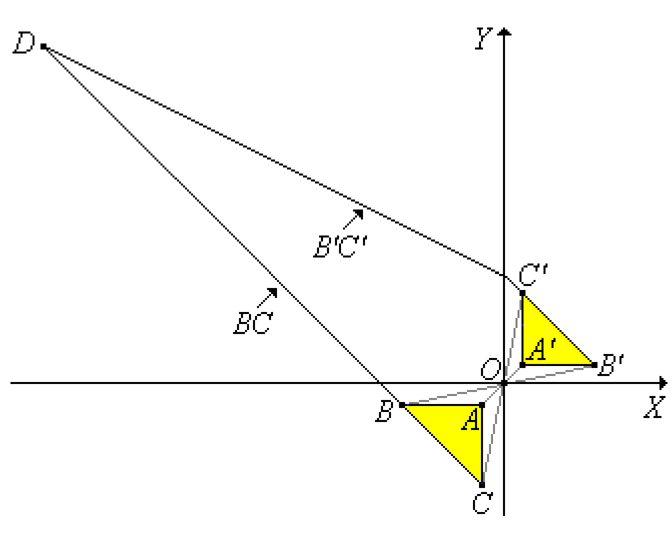


Ilustración del plano de Moulton con algunas de sus líneas.

El plano de Moulton satisface el axioma de las paralelas, los axiomas de orden (grupo II) y los axiomas I.1-I.3 de incidencia para el plano[44]. No obstante, como a continuación mostramos, en él no se cumple el teorema de Desargues.

A la derecha, dos triángulos de Moulton (ABC) y ($A'B'C'$) están en perspectiva desde el origen O, y los lados homólogos AB-$A'B'$ y AC-$A'C'$ son paralelos entre sí. No obstante, los lados BC-$B'C'$ no son paralelos entre sí, pues ambos inciden con D[45]. Tenemos, por tanto, un contraejemplo al teorema de Desargues.



De lo anterior se sigue que: (1) El teorema de Desargues es independiente del axioma de las paralelas y los axiomas de orden e incidencia para el plano, pues sabemos que éstos tienen

[44] Por ejemplo, dado un par de puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con $x_0 \leq 0 < x_1$ y $y_1 < y_0$, para hallar la línea de Moulton que incide con ellos, tal como lo afirma el axioma I.1, basta con resolver para m y b el sistema de ecuaciones $y_0 = mx_0 + b$; $y_1 = 2mx_1 + b$, el cual siempre tiene una única solución.

[45] Todo esto se puede desarrollar algebraicamente, como un ejercicio de geometría analítica.

un modelo donde no se cumple el teorema; (2) Al extender el plano de Moulton a un plano proyectivo mediante la adición de los puntos y la recta al infinito, lo que resulta es un espacio no desarguesiano que, por lo mismo, no es isomorfo al plano proyectivo RP^2.

Un descubrimiento similar al anterior llamó poderosamente la atención de Hilbert, quien dedicó un capítulo completo al teorema de Desargues. Entre los resultados alcanzados se encuentran los siguientes: (a) el teorema de Desargues se puede demostrar a partir del axioma de las paralelas, los axiomas de orden e incidencia para el plano (axiomas I.1-I.3) y los axiomas de congruencia (grupo III); (b) El teorema de Desargues para el plano se puede demostrar a partir del axioma de las paralelas y los axiomas de incidencia toda vez que se incluyan los axiomas espaciales I.4-I.8[46]. Conclusión: Si lo que se busca es evitar los axiomas de congruencia en la prueba del teorema de Desargues, no hay otro camino que admitir el elemento espacial[47]; (c) Supongamos una geometría plana que satisface el axioma de las paralelas, los axiomas de orden y los axiomas de incidencia para el plano (los axiomas I.1-I.3). Una condición necesaria y suficiente para que esta geometría sea parte de una geometría espacial que cumple con los axiomas de los grupos I, II y IV, es que satisfaga el teorema de Desargues.

Esto último permite, entre otras cosas, construir una geometría proyectiva plana postulando el teorema de Desargues, a sabiendas de que el plano resultante es extensible a un espacio con un mayor número de dimensiones que cumple con las propiedades establecidas en los grupos I, II y IV.

Hay en esto un peculiar modo de pensar el teorema de Desargues: lo relevante es su relación con los axiomas, no la cuestión de su *verdad*. Esta actitud contrasta con la de Saccheri cuando “determina” la validez del quinto postulado de Euclides aduciendo que su negación lleva a conclusiones “contrarias a la naturaleza de la línea recta”, o con la de Poncelet y Chasles, quienes buscarían validar la proposición remitiéndola a la intuición espacial. No obstante, el móvil de Hilbert no es determinar la verdad o falsedad del teorema

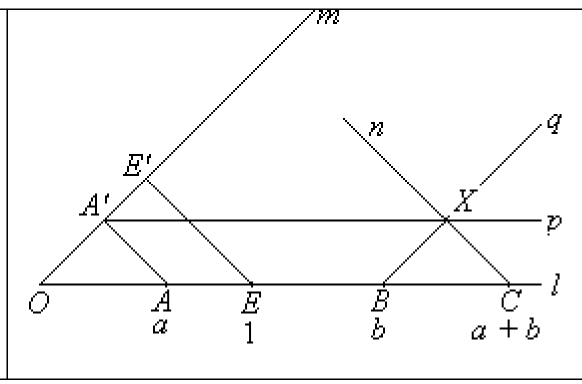
[46] En este caso, la configuración bidimensional (dos triángulos en perspectiva en un mismo plano, etc.) se puede considerar como la proyección de una configuración tridimensional, y utilizar este hecho para demostrar el teorema en el plano.

[47] Todo esto origina una serie de interrogantes: ¿Por qué la prueba de un teorema proyectivo en el plano requiere de una noción como la de congruencia, la cual es equivalente al concepto métrico de longitud?, ¿por qué la única manera de evitar los axiomas de congruencia es suponiendo que el plano está inmerso en un espacio con un mayor número de dimensiones? esto pone de manifiesto cierta insuficiencia de los axiomas de incidencia para el plano, una especie de laguna en ellos. De hecho, el plano es el único lugar donde el teorema de Desargues puede fallar, lo cual no deja de ser un descubrimiento singular.

de Desargues, sino precisar su lugar frente a los axiomas[48]. En otras palabras, lo que está en juego en los *Fundamentos de la geometría* no es la *geometría de la intuición*, sino la *geometría axiomática*, en la que los objetos se han ausentado. Lo único que queda en su lugar es un andamiaje de conceptos a los que sólo los axiomas les dan propiedades. Lejos del asunto de "la verdad", las preocupaciones de Hilbert se orientan hacia cuestiones como el alcance de los principios y la pureza del método. Esto último explica en gran medida su interés por el teorema de Desargues, cuya sola presencia revela cierta "imperfección" en el método y cierta insuficiencia en los principios adoptados.

Por ejemplo, en los capítulos V y VI Hilbert se ocupa de cuestiones como la siguiente: ¿qué se requiere geométricamente para tener la estructura de un campo ordenado completo en la recta? Esto se relaciona con la introducción de coordenadas y la construcción de un álgebra de segmentos. En ello, los teoremas de Pappus y Desargues son piezas fundamentales, lo cual reforzó el interés por aclarar sus vínculos con los axiomas. Veamos.

Sea *l* una línea recta. Con base en una segunda línea *m* que se interseca con ella en un punto *O* podemos definir un cálculo de segmentos sobre *l* como sigue. Sean *OE* y *OE'* dos segmentos sobre *l* y *m* respectivamente[49]; estos segmentos actuarán como unidades en el álgebra. Se escribe *OE* = *OE'* = 1. Sean *A* y *B* dos puntos sobre *l*. La *suma* de los segmentos *a* = *OA* y *b* = *OB* se define como sigue (donde las letras con comilla indican puntos pertenecientes a *m*):

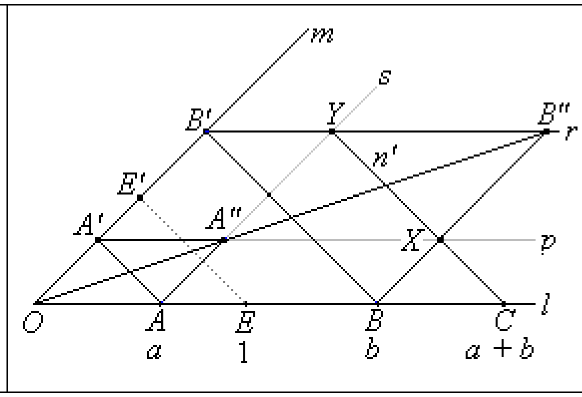
1) Sea *AA'* la paralela a *EE'* por *A*; 2) Sea *p* la paralela a *l* por *A'* y *q* la paralela a *m* por *B*. *p* y *q* no son paralelas y se intersecan en un punto *X*; 3) Sea *n* la paralela a *EE'* por *X*. *n* no es paralela a *l* y la interseca en un punto *C*.		

[48] Si su interés hubiera sido lo otro, Hilbert tenía a la mano muchos argumentos en favor de la verdad del teorema. Podía, por ejemplo, haber recurrido a lo que llamamos la *teoría de la verdad anidada*: "Si la proposición resulta verdadera al encuadrar la geometría plana en la geometría espacial, entonces se le debe admitir como verdadera en la primera, aunque los axiomas de ésta no logren demostrarla (i. e., sin importar que ninguna inconsistencia resulte al negarla)".

[49] Aquí la escritura se vuelve ambigua: la notación *AB* se utiliza tanto para designar al segmento con extremos *A* y *B* como a la recta por *A* y *B*, reconociéndose el sentido que se le da por el contexto.

Por definición, el segmento $c = OC$ es la *suma* de OA y OB: Escribimos $OC = OA + OB$ (o bien, $a + b = c$)[50].

Las propiedades algebraicas de esta operación dependen de los axiomas aceptados. En particular, la conmutatividad precisa del teorema de Desargues (y su recíproco)[51]. En efecto, hagamos la suma $OB + OA$ siguiendo el procedimiento anterior.

1) Sea BB' la paralela a EE' por B; 2) Sea r la paralela a l por B' y s la paralela a m por A. r y s no son paralelas y se intersecan en un punto Y; 3) Sea n' la paralela a EE' por Y. n' no es paralela a l y la interseca en un punto que, como probaremos, es C.		

Conforme a lo anterior tenemos: $AA' \| EE' \| BB'$, $A'X \| B'Y \| OA$ y $AY \| BX \| OA'$.

Sean $A'' = AY \cap A'X$ y $B'' = BX \cap B'Y$.

Los triángulos $AA'A''$ y $BB'B''$ tienen lados AA'-BB', AA''-BB'' y $A'A''$-$B'B''$ paralelos entre sí. Por el recíproco del teorema de Desargues, los puntos O, A'' y B'' son colineales (pues los triángulos están en perspectiva desde O). Por tanto, los triángulos OAA' y XYB'' están en perspectiva desde A'', y como los lados homólogos OA'-XB'' y OA-YB'' son paralelos entre sí, conforme al teorema de Desargues los lados homólogos AA' y XY son paralelos entre sí. Por tanto, la línea n' es la paralela a EE' por X, es decir, es la línea n que interseca a l en C. Pero este último punto es el que determina la suma de OB con OA. Por tanto, $OB + OA = OC$, lcqd. ■

Como se ve, la propiedad conmutativa de la suma se juega en el teorema de Desargues. De hecho, se tiene el siguiente resultado: *En todo plano afín desarguesiano, el álgebra de*

[50] Euclidianamente, lo que hemos hecho ha sido construir un triángulo *BCX* congruente con *OAA'*, de modo que *AC* = *OB*. Esta idea —que encierra la noción métrica de congruencia, la cual no tiene sentido en las geometrías afin y proyectiva— constituye el fundamento heurístico de la definición anterior.

[51] El recíproco del teorema de Desargues dice lo siguiente: *Si en el plano dos triángulos* (ABC) *y* A'B'C') *están situados de modo que sus lados homólogos* AB-A'B', AC-A'C' *y* BC-B'C' *son paralelos entre sí, entonces las líneas* AA', BB' *y* CC' *que unen los vértices homólogos son paralelas entre sí o concurren en un punto.* Este teorema y el de Desargues son equivalentes entre sí, por lo que se les designa con el mismo nombre.

segmentos sobre cualquier línea recta es un anillo con división[52]. Por tanto, para dar al álgebra de segmentos en el plano una estructura de anillo con división, es necesario postular la propiedad desarguesiana, añadir los axiomas de congruencia, o admitir los axiomas espaciales de incidencia. Obviamente, desde la perspectiva de la geometría proyectiva, la primera opción es preferible.

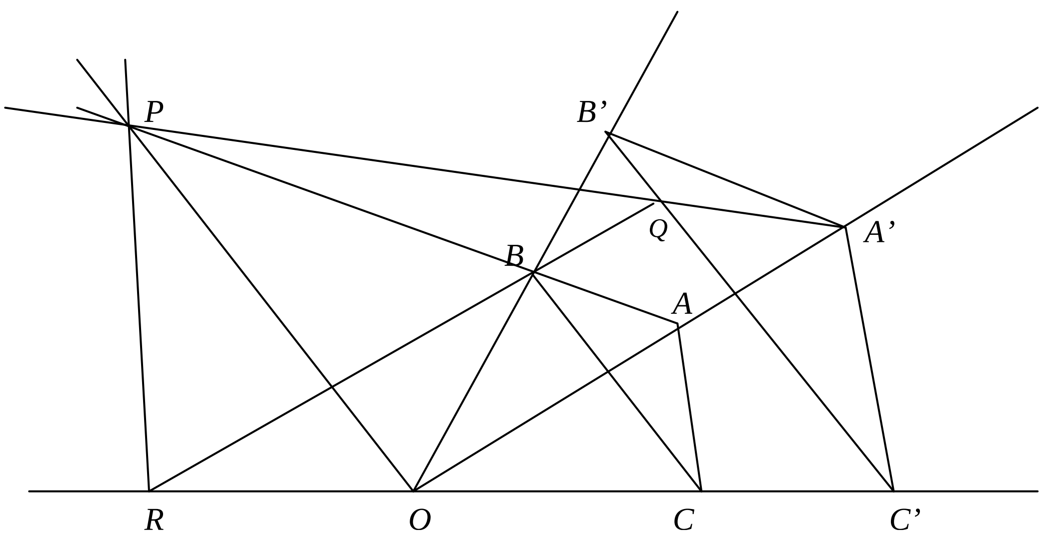
En cuanto a un álgebra con estructura de campo, es indispensable la validez del teorema de Pappus. Esto lo resumimos en la siguiente meta-proposición:

> **Meta-proposición.** El teorema de Pappus se cumple en un plano afín desarguesiano si y sólo si la multiplicación de segmentos es conmutativa[53].

Al respecto, sabemos que el teorema de Pappus implica al teorema de Desargues, pero no a la inversa (para el caso hay contraejemplos). Veamos.

Sean *A*, *B*, *C* y *A'*, *B'* y *C'* dos ternas de puntos no colineales tal que las líneas *AA'*, *BB'* y *CC'* concurren en un punto *O*.

Supongamos que los lados homólogos *AB*-*A'B'* y *BC*-*B'C'* son paralelos entre sí y que $AC \neq A'C'$. Demostraremos que $AC \parallel A'C'$.



Sea *P* el punto de intersección de la línea *AB* con la línea por *O* paralela a *BC*. Sea *Q* el punto de intersección de las líneas *A'P* y *B'C'* (no nos detendremos a probar que tales

[52] El concepto de *multiplicación de segmentos* se puede introducir en forma análoga a la suma, cosa que aquí no haremos. Es con base en esta segunda operación que nos referimos al álgebra de segmentos como un *anillo*.

[53] Recordemos que un anillo con división es un campo cuando la multiplicación es conmutativa. Por tanto, el álgebra de segmentos en un plano afín desarguesiano será un campo si y sólo si se satisface el teorema de Pappus.

líneas realmente se intersecan). Probemos que las líneas *BQ* y *OC* se intersecan. Para ello, consideremos las ternas de puntos colineales *A'*, *P*, *Q* y *B*, *B'*, *O*. Por hipótesis *A'B'* || *BP* y *OP* || *B'Q*. Por el teorema de Pappus *OA'* || *BQ*, de modo que *BQ* y *OC* se intersecan (pues de lo contrario habría dos paralelas distintas a *BQ* por *O*: las líneas *OA'* y *OC*). Sea *R* la intersección de *BQ* y *OC*.

Al examinar las ternas de puntos colineales *R*, *O*, *C* y *A*, *B*, *P* encontraremos que *AO* || *BR* y *BC* || *OP*. Aplicando una vez más el teorema de Pappus concluimos que *AC* || *PR*.

Finalmente, al considerar las ternas de puntos colineales *P*, *Q*, *A'* y *C'*, *O*, *R* encontraremos que *OP* || *C'Q* y *QR* || *OA'*. Aplicando por tercera ocasión el teorema de Pappus concluimos que *A'C'* || *PR*. Por tanto, *AC* || *PR* y *A'C'* || *PR*, de modo que *AC* || *A'C'*, lcqd. ■

Al igual que con el de Desargues, el teorema de Pappus se demuestra a partir de los axiomas espaciales de incidencia, o de los axiomas de incidencia para el plano junto con los axiomas de congruencia. Por tanto, aquí también hay tres maneras de inducir una suma y multiplicación de puntos en la recta con la estructura de un campo: (a) Postular el axioma de las paralelas junto con los axiomas de incidencia para el plano y los axiomas de congruencia; (b) Postular el axioma de las paralelas junto con los axiomas de incidencia para el plano y el espacio; o (c) Postular el teorema de Pappus junto con el axioma de las paralelas y los axiomas de incidencia para el plano. ¿Cuál es la mejor opción? Esto lo decidirá el investigador, cuya respuesta depende del propósito que tenga en mente al edificar la teoría.

Como consecuencia de los resultados anteriores, resulta que según la elección que hagamos de los axiomas tendremos que la estructura del álgebra de segmentos oscilará entre un anillo sin división y un campo, hecho que no deja de ser sorprendente, pues tiende un puente entre dos dominios aparentemente distantes: la geometría y el álgebra. Con ello, Hilbert estructura una teoría que reúne las ideas de Descartes y Euclides desde una perspectiva mucho más general, pues abre las puertas a las geometrías no euclidianas, a la geometría proyectiva, al álgebra moderna y al análisis vectorial. Prueba de ello es que el proceso que acabamos de mostrar se puede invertir. Por ejemplo, podemos construir modelos algebraicos para los axiomas a partir de ciertas estructuras algebraicas. Un resultado clásico es el siguiente:

Si D *es un anillo con división, entonces el plano afín sobre* D *es desarguesiano*

Dicho plano se define como sigue: a) los *puntos* son todas las parejas (x, y) pertenecientes a D^2; b) para cada terna $a, b, c \in D$, con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, el conjunto $\{(x, y) \mid ax + by = c\}$ es una *línea recta*. En cuanto a la relación de *incidencia*, ésta es la usual.

Estos métodos se hallan al centro de las geometrías afín y proyectiva modernas y en la base de la geometría algebraica.

4.4 Conclusiones

El enfoque propuesto por Hilbert trajo consigo una ganancia adicional: permitió considerar objetos ideales para los que no se cuenta con ninguna forma de representación. Esto fue posible gracias a la introducción de una novedosa noción de existencia matemática, según la cual *existir* (en un sentido matemático) es lo mismo que ser no contradictorio.

Esto lo afirma en su correspondencia con Frege, quien en 1899 le escribe:

> "Llamo axiomas [de la geometría] a las proposiciones que son verdaderas pero no demostradas porque el conocimiento de ellas proviene de una fuente muy distinta de la lógica, una fuente que podemos llamar intuición espacial. De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí."[54]

Días más tarde Hilbert le responde:

> "Encuentro muy interesante leer esta frase en su carta ['De la verdad de los axiomas ...'], pues en la medida en que he pensado, escrito y enseñado tales cuestiones, he dicho exactamente lo contrario: si los axiomas, puestos arbitrariamente, no se contradicen en sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por ellos existen. Este es para mi el criterio de verdad y existencia."[55]

[54] Frege, carta a Hilbert fechada el 27 de diciembre de 1899. Cita tomada de Frege 1980, p. 37.
[55] Hilbert, carta a Frege fechada el 29 de diciembre de 1899. Cita tomada de Frege 1980, p. 39.

Con ello, Hilbert busca asegurar un lugar en la matemática a nociones como los puntos y la recta al infinito en geometría[56]. Hilbert se refiere a su uso como *método de los elementos ideales*:

> "Los elementos ideales 'al infinito' poseen la ventaja de simplificar considerablemente el sistema de leyes de conexión, permitiendo al mismo tiempo una visión global del mismo. Por otra parte, es bien sabido que la simetría entre punto y recta hace posible obtener en la geometría un principio tan útil y fructífero como el de dualidad."[57]

Los puntos y la recta al infinito no corresponden a nada en la intuición espacial. No obstante, su inclusión da unidad y flexibilidad a la teoría: por una parte, evitan la existencia de casos especiales en los que ciertas propiedades no se cumplen[58]; por la otra, dan lugar al principio de dualidad, es decir, a la posibilidad de intercambiar las nociones de *línea* y *punto* y las relaciones *pasa por* y *está en* sin alterar la clase de los teoremas.

Al igual que el principio de dualidad, el método de los elementos ideales permitió a Hilbert mirar la geometría de otra manera. Le reafirmó la idea de que la geometría no posee un contenido específico, ni es una ciencia de objetos particulares. Muchos indicios permiten afirmar que el libro de los *Fundamentos de la geometría* lo escribió bajo este espíritu, mismo que desarrolló hasta alcanzar el punto de vista expresado en su conferencia *Acerca del infinito* de 1925. Al respecto, Hilbert ve en el método axiomático la expresión más acabada del método de los elementos ideales.

Que Hilbert ya concebía la geometría en estos términos al escribir los *Fundamentos de la geometría* lo confirma el hecho de que al principio del libro coloca, a manera de epígrafe, las siguientes palabras, tomadas de la *Crítica de la razón pura* de Kant: "Así, todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas."[59] Esta frase abrevia lo que hemos venido bosquejando a lo largo de este escrito.

---

[56] La diferencia entre un elemento "real" y uno "ideal" radica en que al primero le podemos asignar un significado intuitivo o empírico, mientras que al segundo no, aunque sea lógicamente posible. La idea de Hilbert es que esto último no es un impedimento para considerar su existencia al interior de las teorías matemáticas. Estas ideas las habría de extender más tarde a la teoría cantoriana, en la que el infinito real (actual) ocupa un lugar preponderante.

[57] Hilbert 1925, p. 89 de la traducción al español.

[58] Por ejemplo, su introducción permite demostrar que, sin excepción, dos rectas cualesquiera se intersecan en un punto.

[59] Kant, CRP A702, B 730.

No sólo indica la progresión que va de la matemática intuitiva a la matemática ideal, sino la manera en que Hilbert instaura un sistema para la geometría en el libro mismo. Ahí están las figuras euclidianas como telón de fondo en los *Fundamentos*, de las que surgen los axiomas. Así, la figura que acompaña al axioma II.3 es la *intuición* que lo explica, y el axioma expresa tal hecho de la intuición en términos de una relación entre los *conceptos* de *línea*, *punto* y *estar entre*. Esto en cuanto al primer paso de la progresión señalada. A su vez, la teoría en su conjunto tiene el mismo rango que las *ideas* en el sentido de Kant, es decir, constituye un objeto de la razón que carece de realidad y que en su perfección sobrepasa la posibilidad de la experiencia: los axiomas de los *Fundamentos* expresan colectivamente la idea de *espacio euclidiano*.

Es evidente que esto no habría sido posible si Hilbert hubiera mantenido la geometría dentro de los estrechos límites impuestos por el concepto de *objeto matemático* ofrecido por Kant. Esto lo sabía Hilbert, para quien la investigación axiomática representó un factor de expansión y emancipación en esta disciplina.

Apéndice A (axiomas de Hilbert para la geometría)

Axiomas de Hilbert para la geometría

(Tomados de la 10ª edición de los *Fundamentos de la geometría* , revisada por Paul Bernays)

Términos indefinidos

Punto, línea, plano, incide con (x incide con y), estar entre (x está entre y y *z), congruente (x es congruente con y) (* $x \approx y$ *).*

Axiomas

Grupo I (Axiomas de incidencia)

I.1 Para cualesquiera dos puntos *A*, *B* hay una línea *a* que incide con ellos.

I.2 Para cualesquiera dos puntos *A*, *B* no hay más de una línea que incide con ellos.

I.3 En cada línea hay al menos dos puntos. Hay al menos tres puntos que no están alineados.

I.4 Para cualesquiera tres puntos *A*, *B*, *C* no alineados hay un plano α que incide con ellos. Para cada plano, hay un punto que no incide con él.

I.5 Para cualesquiera tres puntos *A*, *B*, *C* no alineados no hay más de un plano que incide con ellos.

I.6 Si dos puntos *A*, *B* de una línea *a* están en un planoα, entonces todos los puntos de *a* están en el plano α.

I.7 Si dos planos α, β tienen un punto común *A*, entonces tienen otro punto común *B*.

I.8 Hay al menos cuatro puntos que no están en un mismo plano.

Grupo II (Axiomas de orden)

II.1 Si un punto *B* está entre un punto *A* y un punto *C*, entonces los puntos *A*, *B*, *C* son tres puntos distintos de una línea, y *B* también está entre *C* y *A*.

II.2 Dados dos puntos *A* y *C*, existe al menos un punto *B* sobre la línea *AC* tal que *C* está entre *A* y *B*.

II.3 Dados tres puntos sobre una línea, no más de uno de ellos está entre los otros dos.

II.4 Si *A*, *B*, *C* son tres puntos no alineados y *a* es una línea en el plano *ABC* que no incide con ninguno de los tres, y la línea *a* pasa por un punto del segmento *AB*, entonces *a* también pasa por un punto del segmento *AC*, o por un punto del segmento *BC*.

Grupo III (Axiomas de congruencia)

III.1 Si A, B son dos puntos sobre una línea a, y A' es un punto sobre la misma u otra línea a', entonces existe un punto B' sobre a' tal que los segmentos AB y $A'B'$ son congruentes.

III.2 Si dos segmentos $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes con un segmento AB, entonces son congruentes entre sí.

III.3 Sean AB y BC dos segmentos sobre una línea a los cuales, salvo por B, no tienen puntos en común. Sean $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos sobre la misma u otra línea a' tales que, salvo por B', no tienen puntos en común. En tal caso, si $AB \approx A'B'$ y $BC \approx B'C'$, entonces $AC \approx A'C'$.

III.4 Si $\angle ABC$ es un ángulo y $B'C'$ es un rayo, entonces existe exactamente un rayo $B'A'$ a cada lado de la línea $B'C'$ tal que $\angle A'B'C' \approx \angle ABC$. Además, cada ángulo es congruente consigo mismo.

III.5 Si las congruencias $AB \approx A'B'$, $AC \approx A'C'$ y $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$ son válidas para los triángulos ABC y $A'B'C'$, entonces la congruencia $\angle ABC \approx \angle A'B'C'$ también se satisface.

Grupo IV (Axioma de las paralelas)

Sea a una línea y A un punto que no incide con ella. Existe a lo más una línea en el plano que contiene a a y a A la cual incide con A y no interseca a a.

Grupo V (Axiomas de continuidad)

V.1 (Axioma de Arquímedes) Si AB y CD son dos segmentos cualesquiera, entonces hay un número n tal que n copias de CD construidas contiguamente a partir de A y a lo largo del rayo AB pasarán más allá del punto B.

V.2 (Axioma de completud) Es imposible extender el conjunto de puntos de una línea preservando todas las relaciones existentes entre los elementos originales así como las propiedades fundamentales del orden y la congruencia en la línea (axiomas I-II, III y V.1).

Apéndice B (axiomas de Euclides)

Inicio del libro I de Euclides

Todos los libros empiezan con definiciones, pero el primero además después de las definiciones le siguen los postulados y luego las nociones comunes. Llanamente empieza con:

Definiciones

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto
13. Un límite es aquello que es extremo de algo.
14. Una figura es lo contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
16. Y el punto se llama centro del círculo.

17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.
18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.
20. De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.
21. Además, de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.
22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras.
23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Postulados

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Nociones comunes

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. Y el todo es mayor que la parte.

A partir de aquí siguen las proposiciones.

Bibliografía

Bennett, M. K., (1995), *Affine and Projective Geometry*, John Willey & Sons Inc., Nueva York.

Bochner, Salomon, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza Editorial.

Campos, Alberto, *Axiomática y Geometría*, de Euclides a Hilbert y Bourbaki.

Chica Blas, Ángel, *Descartes (Geometría y método)*, Nivola

Collette, Jean-Paul, *Historia de las matemáticas*, Siglo veintiuno.

Euclides (1992), *Elementos de Geometría*, traducción de Juan David García Bacca, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Euclides, *Elementos de Geometría*, Introducción de Luis Vega, Editorial Gredos.

Eves, Howard (1976), *An introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rienhart and Winston, New York.

— *Estudio de las geometrías,* UTHEHA.

— *Foundations and fundamental concepts of mathematics*, PWS-KENT p.c.b.

Frege, Gottlob, (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, (tr. de Hans Kaal, en una edición al cuidado de Gottfried Gabriel *et al*.), University of Chicago Press, Chicago.

Friedman, Michael (1985), "Kant's Theory of Geometry", en Posy, Carl, J., 1992, pp. 177-220.

Hallett, Michael; Majer, Ulrich (editors) (2004), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*, Springer, Berlin & Heidelberg.

Hartshorne, Robin (2000), Geometry: Euclid and Beyond, Springer, New York, Berlin & Heidelberg.

Heat, Sir Thomas L. *The thirteen Book of Euclid's Elements,* Second Edition, Volume I, Dover Publications, Inc. N.Y.

Hilbert, David (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig y Berlín. [tr. al inglés de E. J. Townsend con algunas adiciones hechas por Hilbert a la edición francesa de 1899: *Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Co., La Salle, Illinois, 1962.]

— (1917), "Axiomatisches Denken", en Hilbert 1935, vol. 3, pp. 146-156. [tr. al español de Luis Felipe Segura, "El pensamiento axiomático", en Hilbert 1993, pp. 23-35.]

— (1930), "Naturerkennen und Logik", *Die Naturwissenschaften 18*, pp. 953-963. [tr. al inglés de William B. Ewald, "Logic and the Knowledge of Nature", en Ewald 1996, pp. 1157-1165.]

— (1993), *Fundamentos de las matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias, UNAM.

Hilbert, David y Cohn-Vossen, S. (1952), *Geometry and the Imagination*, (tr. de P. Nemenyi), Chelsea Publishing Company, New York.

Jørgensen, Klaus Frovin (2005), *Kant's Schematism and the Foundations of Mathematics*, tesis doctoral, disponible en http://akira.ruc.dk/~frovin/construction.pdf

Kant, Immanuel (1997) *Crítica de la razón pura*, (tr. de Pedro Rivas), Alfaguara, Madrid.

Kline, Morris (1994), *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,* Alianza Editorial AU 715 (Vol. I), AU 724 (Vol. II) y AU 729 (Vol. III), Madrid.

Poncelet, Jean-Victor (1995), *Traité des propriétés projectives de figures*, Editions Jacques Gabay, París.

Posy, Carl (editor), (1992), *Kant's Philosophy of Mathematics, Modern Essays*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Reid, Constance (1970), *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg.

Rene, Descartes, *La geometría*, Edit. Limusa.

Shabel, Lisa (2003), *Mathematics in Kant's Critical Philosophy*, Routledge, London.

Sarnark, Peter, *Hilbert's Eleventh Problem*

Torres, Carlos, (1999), "Hilbert, Kant y el fundamento de las matemáticas", *Theoria, Revista del Colegio de Filosofía*, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, Nº 8-9, diciembre 1999, pp. 111-129.

— (2005), "Kant visto desde las matemáticas", *Revista Digital Universitaria*, Volumen 6, número 1, 2005, dirección electrónica: http://www.revista.unam.mx/

Tuller, Annita (1967), *A Modern Introduction to Geometries*, Van Nostrand Company, New York.

Vega Reñon, Luis, *La trama de la demostración*, Alianza Editorial

Willian R. Shea, *La magia de los números y el movimiento "la carrera cientifica de Descartes"*, Alianza Universidad.