



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Medidas Discretas, la Función de Euler y la  
Hipótesis de Riemann

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
CARLA VICTORIA VALENCIA NEGRETE

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ



2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno  
Valencia  
Negrete  
Carla Victoria  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
097536866
2. Datos del tutor  
Dr  
Santiago Alberto  
Verjovsky  
Solá
3. Datos del Sinodal 1  
Dr  
Salvador  
Pérez  
Esteva
4. Datos del Sinodal 2  
Dr  
Pedro Eduardo  
Miramontes  
Vidal
5. Datos del Sinodal 3  
Dr  
Carlos  
Hernández  
Garcíadiego
6. Datos del Sinodal 4  
Dr  
Tim  
Gendron
7. Datos del trabajo escrito  
Medidas Discretas, la Función de Euler y la Hipótesis de Riemann  
95pp  
2008

A mi abuelito  
el Dr. León Rocha Moreno

## Agradecimientos

Primero me gustaría darle las gracias a Alberto Verjovsky por su confianza en que podía, las matemáticas con mímica, la búsqueda de la geometría, la libertad y el apoyo que tuve para hacer la tesis y por haberme explicado su trabajo sobre la Hipótesis de Riemann para darme un pie o dos para caminar yo sola en un tema interminable.

A Carlos Hernández Garciadiego por haberme formado para dedicarme a las Matemáticas, incluyendo haber escuchado, leído todos mis primeros breves trabajos y haberme dado seguridad para seguir haciéndolos.

A Salvador Pérez Esteva por todo su apoyo durante estos años. Ha sido siempre más de lo que podía esperar y la diferencia entre rendirme y seguir adelante.

A Ramona Compte por haberme querido y cuidado cuando más lo necesitaba y a Alicia Martínez por su cariño.

A Elma Gottdiener por haberme llenado una parte del corazón que desde entonces encuentra ahí su estructura.

Y a los Chapela: Emilio, Cristina, Pepe y Cristina mamá por haber estado dispuestos siempre a estar conmigo en las batallas más duras y en los momentos más alegres, por su amistad que es para mi también mi familia.

A mi papá, a mi hermana y a Eric por su amorcito. Disfrutarlos y pensar en ustedes me carga la pila y le da sentido a existir todos los días para seguir siendo yo y vivir contenta. Es un lujo, una fortuna y mi felicidad.

A mi hermano por haberme acompañado y el orgullo que me da que sea mi hermano.

A Alejandra de la Garza Canela por su amistad, su intensidad y su determinación que me jala hacia arriba sólo de acordarme de ella y de sentir el acuerdo no pactado pero vivido de no detenernos nunca.

A Daniela, a Enrique y a Adela, por ser mis hermanos siempre.

## Introducción

En un momento de la historia de las Matemáticas donde se encuentra recientemente resuelta la *Conjetura de Poincaré*<sup>1</sup> y parte del octavo problema de Hilbert<sup>2</sup>, la *Hipótesis de Riemann*<sup>3</sup>, todavía no hay una ruta para su solución completa. Si después del esfuerzo para lograrlo se obtuviera una forma de calcular todas las raíces con parte real positiva de la función Zeta de Riemann, se tendrían también el número de primos menores que un número dado y otros múltiples resultados que pueden deducirse de *Hipótesis de Riemann*, desde conocimientos importantes ya adquiridos hasta la confirmación de cada una de sus equivalencias.

Un acercamiento al problema es plantearlo en términos de otras teorías, traducir su significado para otros objetos, buscar la solución en preguntas equivalentes. En el artículo *Medidas Discretas y la Hipótesis de Riemann*<sup>4</sup>, Alberto Verjovsky construye una equivalencia entre la *Hipótesis de Riemann* y una velocidad de convergencia de una familia particular de medidas discretas a una medida suave. Esta tesis de licenciatura se escribió con el propósito de hacer una presentación del artículo *Medidas Discretas y la Hipótesis de Riemann* a otros estudiantes de licenciatura y de posgrado que se sientan atraídos por el tema y les sea útil una introducción a la extensión analítica de la función Zeta de Riemann, a la *Hipótesis de Riemann* y a la equivalencia realizada por Alberto Verjovsky.

A lo largo del estudio del trabajo de Alberto Verjovsky me dí cuenta de que la construcción de la equivalencia era un generador de muchas otras equivalencias para la *Hipótesis de Riemann*. Al final fueron agregadas, en forma de ejemplos de la utilización del proceso elaborado por Alberto Verjovsky, dos equivalencias más entre la *Hipótesis de Riemann* y la misma velocidad de convergencia de dos medidas discretas similares.

La finalidad última de este trabajo fue siempre que hubiera un texto a la mano de quien se interese tanto por la *Hipótesis de Riemann* como por la equivalencia de Alberto Verjovsky siendo que son una fuente vasta de ideas que un estudiante puede aprovechar para motivarse e involucrarse en uno de los problemas más difíciles y seductores de nuestra época y en un planteamiento que lo relaciona con el mundo de las funciones definidas en el conjunto de los números reales positivos.

---

<sup>1</sup>La prueba de la *Conjetura de Poincaré* fue terminada por Grigori Perelman en tres artículos publicados entre 2002 y 2003 en *arXiv.org*. Sylvia Nasar, David Gruber, *Manifold Destiny, A legendary problem and the battle over who solved it*, New Yorker, August 28, 2006.

<sup>2</sup>David Hilbert escribió una lista de 23 problemas y los planteó en el *Congreso Internacional de Matemáticos* del año 1900.

<sup>3</sup>La *Hipótesis de Riemann* dice que las raíces con parte real positiva de la función Zeta de Riemann (cuyo origen histórico, definición y extensión analítica ocupan el Capítulo 1) están en la recta vertical  $x = 1/2$ . Andrew Wiles demostró en 1994 la veracidad la *Conjetura de Taniyama-Shimura* que tiene consecuencias sobre la *Hipótesis de Riemann* y de donde se desprende la prueba del famoso *Último Teorema de Fermat*.

<sup>4</sup>A. Verjovsky, *Discrete Measures and the Riemann Hypothesis*, Kodai Math J. **17**, 1994.

En el artículo *Medidas discretas y la Hipótesis de Riemann*, Alberto Verjovsky descubre y muestra la equivalencia entre la *Hipótesis de Riemann* y el orden de convergencia  $\mathfrak{o}(\mathbf{y}^{3/4-\epsilon})$ , para toda  $\epsilon > 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ , de la familia de medidas discretas

$$\left\{ m_y(f) = \sum_{n=1}^{\infty} y \varphi(n) f\left(ny^{1/2}\right) \mid y \in R^\bullet \right\}$$

a

$$m_o(f) = \frac{1}{2\zeta(2)} \int_o^\infty f(u) u \, du;$$

que es una medida suave de la función continua con soporte compacto

$$f: R^\bullet \longrightarrow R,$$

donde  $R^\bullet$  es el grupo multiplicativo de números enteros positivos  $(0, \infty)$ ,  $\varphi$  es la función de Euler y cada valor  $f(u)$  se ve ponderado por una variación  $\frac{1}{2\zeta(2)} u$  de la medida de Lebesgue  $du$ .

El mismo orden de aproximación  $\mathfrak{o}(\mathbf{y}^{3/4-\epsilon})$ , para toda  $\epsilon > 0$  cuando  $y \rightarrow 0$  de medidas de funciones con soporte compacto en ciertos horociclos del espacio modular  $M = H/PSL_2(Z)$  aparece en la equivalencia presentada por el Don Zagier para la *Hipótesis de Riemann*<sup>5</sup>; cuya generalización para otros grupos aritméticos fue realizada por el Peter Sarnak<sup>6</sup>; y que es la inspiración del trabajo de Alberto Verjovsky<sup>7</sup> para las medidas discretas  $m_y(f)$ , donde las funciones con soporte compacto  $f$  no están definidas sobre horociclos del espacio modular  $M$  sino sobre  $R^\bullet$ . Esto permite, entre otras cosas, utilizar directamente métodos clásicos de la *Teoría de números analítica*, calcular su *transformada de Mellin*<sup>8</sup> y estudiar su *transformada de Mellin inversa*.

Me gustaría hacer notar en este punto que ambas familias de medidas no tendrían por qué converger; y aún menos con el mismo orden. En el caso de  $m_y(f)$ , las dos pistas sobre las que desarrollé el análisis de este resultado fueron la relación:

entre las medidas discretas  $m_y(f)$  y la función Zeta de Riemann  $\zeta$  a partir de la función de Euler  $\varphi$ ;

<sup>5</sup>A. Verjovsky, *Arithmetic, Geometry and Dynamics in the Unit Tangent Bundle of the Modular Orbifold*, Dynamical Systems. Proceedings of the 3rd International School of Dynamical Systems (1990), Santiago de Chile, (R. Bamon *et. al.* eds.) Longman Scientific and Technical Pitman Res. Notes Math. Ser 285 (1993), pág. 263, 295.

<sup>6</sup>A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov*, IMCA, 1999., pág. 17

<sup>7</sup>*idem*, pág. 16.

<sup>8</sup>Apéndice A.

entre los distintos órdenes de decaimiento de  $\zeta(\sigma + it)$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$  y la integrabilidad de la *transformada de Mellin* de las medidas  $m_y(f)$  para el mismo  $\sigma$  fijo.

Siendo cada medida  $m_y(f)$  una distribución de la función de Euler  $\varphi$ , el puente entre  $m_y(f)$  y la función Zeta de Riemann,  $\zeta$  se da a través de la relación entre una variación de  $\zeta$ ,

$$Z_f(s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)},$$

que aparece al factorizar las *transformadas de Mellin* de las medidas  $m_y(f)$ :

$$M_f(s) = M(m_y(f)y^{-1}; s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du.$$

Es decir, el primer paso para reescribir  $m_y(f)$ , plantear su transformada de Mellin, nos lleva a una expresión en términos de  $\zeta$ . El segundo paso, la recuperación de  $m_y(f)$  como integrales de contorno complejas, es la aplicación del *Teorema de la transformada inversa de Mellin* a  $M_f(\sigma + it)$  para  $\sigma$  fijo <sup>9</sup>; y depende tanto del comportamiento de  $\zeta(\sigma + it)$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$  como del de

$$\varphi_f(\sigma + it) = \int_0^\infty f(u) u^{2(\sigma+it)-1} du,$$

también restringida a rectas verticales (garantizado por el *Teorema de Paley-Wiener cuando  $f$  es además diferenciable*,  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^\bullet)$ ).

El orden de convergencia de la función  $\zeta(\sigma + it)$ , para  $\sigma$  fijo cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , tiene implicaciones sobre el orden de convergencia de  $Z_f(\sigma + it) = Z_f^\sigma(t)$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$ ; y así también, sobre el cálculo de la *transformada de Mellin inversa* de  $M_f(\sigma + it)$ , pues se vuelve la condición y posibilidad de usar el *Teorema de la Transformada Inversa de Mellin* para recuperar  $m_y(f)$  a partir de  $M_f(\sigma + it)$ . La *Hipótesis de Lindelöf* <sup>10</sup> es una conjetura no confirmada sobre el orden de convergencia de la función  $\zeta(\sigma + it)$ , para  $\sigma \geq 1/2$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , que sería consecuencia de la *Hipótesis de Riemann* de ser cierta, y de donde surge el orden  $\mathbf{o}(y^{3/4-\epsilon})$ , para toda  $\epsilon > 0$ , si  $y \rightarrow 0$ , cuando se considera verdadera al probar la equivalencia.

El Capítulo 1 está dedicado tanto a introducir la *Hipótesis de Riemann* como a proveer las bases necesarias sobre  $\zeta$  para trabajar con  $M_f$  e invertirla:

<sup>9</sup>Las *transformadas de Mellin* son *transformadas de Fourier* en rectas verticales y los teoremas sobre la correspondencia de la *transformada inversa de Fourier* y la función original se traducen en la inversión para Mellin. Apéndice A.

<sup>10</sup>La *Hipótesis de Lindelöf* dice que el ínfimo  $\mu(\sigma) = \inf \{ \epsilon > 0 \mid \zeta(\sigma + it) = O(t^\epsilon) \} = 0$  para todo  $\sigma \geq 1/2$ . E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 328.

La extensión analítica de  $\zeta$  al plano complejo menos el polo  $s = 1$  permite redefinir a  $M_f$  como una función meromorfa y estudiar sus polos.

Las implicaciones que tiene la *Ecuación Funcional* sobre la simetría de las raíces no triviales de  $\zeta$  respecto a  $s = 1/2$ , es parte fundamental de la prueba de la equivalencia entre las medidas discretas  $m_y(f)$  y la *Hipótesis de Riemann*.

El orden de  $\zeta(\sigma + it)$ , en rectas verticales del semiplano  $\sigma > 0$ , cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , determina primero cuando  $\sigma \geq 1/2$ ,  $\sigma \neq 1$ ; y después, para  $\sigma \in (1/4, 1/2)$  si y sólo si la (que es una conjetura no confirmada sobre el orden de  $\zeta(\sigma + it)$  en la banda crítica y puede inferirse de la *Hipótesis de Riemann*) se cumple.

# Índice

<b>1</b>	<b>La Hipótesis de Riemann</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción: La Hipótesis de Riemann y la Teoría de Números . . .	1
1.2	La función Zeta $\zeta$ . . . . .	4
1.2.1	La función Zeta $\zeta$ como serie de Dirichlet . . . . .	4
1.2.2	El producto de Euler . . . . .	6
1.2.3	Algunas consecuencias del producto de Euler . . . . .	8
1.2.4	Los ceros no triviales de $\zeta$ y los números primos . . . . .	10
1.2.5	Extensión analítica de la función Zeta $\zeta$ . . . . .	11
1.3	La Ecuación Funcional . . . . .	15
1.3.1	Primera expresión de la Ecuación Funcional . . . . .	15
1.3.2	El orden de $\zeta$ para algunos valores de $\sigma$ . . . . .	20
1.3.3	Segunda expresión de la Ecuación Funcional . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Relación entre la función Zeta <math>\zeta</math> y las medidas discretas <math>m_y(\mathbf{f})</math></b>	<b>27</b>
2.1	Las medidas discretas $m_y(\mathbf{f})$ . . . . .	27
2.2	Las medidas $m_y(\mathbf{f})$ y la función Zeta $\zeta(s)$ . . . . .	29
2.2.1	La función $\zeta(s)$ y la serie $\sum \varphi(\mathbf{n})/\mathbf{n}^s$ . . . . .	29
2.2.2	La transformada de Mellin $M_f(s)$ y la función Zeta $\zeta(s)$ . .	32
2.2.3	Transformada Inversa de $\Theta_f^{1/2}(t)$ y $\Theta_f^2(t)$ . . . . .	37
2.3	Teorema A. Convergencia de las medidas discretas $m_y(\mathbf{f})$ . . . . .	39
2.3.1	Convergencia de medidas $m_y(\mathbf{f})$ para funciones $\mathbf{f} \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$ con $r \geq 2$ . . . . .	40
2.3.2	Ejemplo. Convergencia de medidas discretas definidas a par- tir de $\lambda(\mathbf{n})$ y $\mu(\mathbf{n})$ para funciones $\mathbf{f} \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$ con $r \geq 2$ . .	41
2.3.3	Diferencia entre $m_y(\mathbf{f})$ y $m_o(\mathbf{f})$ para funciones $\mathbf{f} \in C_c^o(\mathbf{R}^\bullet)$	46
2.4	Teorema B. Las medidas discretas $m_y(\mathbf{f})$ y la Hipótesis de Riemann	47
2.4.1	Convergencia de las medidas discretas $m_y(\mathbf{f})$ de cumplirse la Hipótesis de Riemann . . . . .	48
2.4.2	Ejemplo. Convergencia de las medidas discretas para $\mu(\mathbf{n})$ y $\lambda(\mathbf{n})$ . . . . .	49
2.4.3	Raíces de $\zeta(2s)$ , medidas $m_y(\mathbf{f})$ y la Hipótesis de Riemann .	50
2.4.4	Ejemplo. Raíces de $\zeta(2s)$ , medidas para $\mu(\mathbf{n})$ , $\lambda(\mathbf{n})$ y la Hipótesis de Riemann . . . . .	51

<b>A Transformada de Mellin de una función con soporte compacto</b>	<b>53</b>
A.1 Transformada de Mellin . . . . .	53
A.2 Transformada Inversa de Mellin . . . . .	57
A.2.1 Transformada de Mellin en rectas verticales . . . . .	57
A.2.2 Transformada Inversa de Fourier . . . . .	58
A.3 El espacio de Paley-Wiener . . . . .	61
<b>B Conjuntos medibles y medidas</b>	<b>63</b>
B.1 Definiciones y ejemplos . . . . .	63
B.2 Medidas discretas . . . . .	66
B.3 Distribuciones de una medida . . . . .	68
<b>C El espacio dual <math>(C^0(\mathbf{X}))^*</math></b>	<b>69</b>
C.1 Espacios métricos compactos $\mathbf{X}$ . . . . .	69
C.2 El espacio de funciones continuas $C^0(\mathbf{X})$ . . . . .	71
C.3 El espacio dual $(C^0(\mathbf{X}))^*$ . . . . .	73
C.4 El espacio localmente convexo $(C^0(\mathbf{X}))^*$ . . . . .	75
C.4.1 Convexidad local . . . . .	76
C.4.2 La convergencia *-débil . . . . .	78
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Capítulo 1

## La Hipótesis de Riemann

### 1.1 Introducción: La Hipótesis de Riemann y la Teoría de Números

El número es una multitud  
compuesta de unidades.

---

*Los Elementos Libro VII*  
EUCLIDES

You've got to change your evil ways,  
Baby,  
Before I stop loving you.

---

*Evil Ways*  
CARLOS SANTANA

*Las propiedades de los números enteros son propiedades generales de sistemas dinámicos discretos*<sup>1</sup>. Es decir, son la interpretación de cualquier proceso que se genere uno a uno. Su construcción simple y su estructura aparecen con facilidad en contextos diversos y los avances históricos en su teoría se encuentran separados por lapsos de tiempo que recorren siglos enteros, por lo que su comprensión es un reto terriblemente atractivo.

El estudio de los números enteros fue sistematizado por Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) y presentado en el texto *Disquisitiones Arithmeticae*. Mucho tiempo antes, el problema de describirlos se remonta al interés de matemáticos notables como los pitagóricos (s. VI a.C.), quienes partían de que el estudio de los números era el estudio de *todo*<sup>2</sup>; Euclides (s. III a.C.), quien les da un trato de objetos de estudio en particular y les dedica los Libros VII, VIII, IX y X de *Los Elementos*, recopila los resultados hasta ese entonces conocidos y demuestra muchos otros, entre ellos que hay un número infinito de números

---

<sup>1</sup>Y. I. Manin, A. A. Panchishkin, *Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 2nd. ed., 2005, pág. 2.

<sup>2</sup>J. P. Collette, *Historia de las Matemáticas*, Siglo Veintiuno Editores, México, 1986.

primos (Libro *IX*, Proposición 20); y Diofanto (s. III d.C.), para quien una propiedad descriptiva de subconjuntos de números naturales era ser soluciones de alguna ecuación polinomial particular.

El teorema fundamental de la Aritmética, demostrado por Gauss en 1801, garantiza la existencia de una representación única para cada número natural como un producto de potencias de números primos <sup>3</sup>, salvo por permutaciones en los factores; pero éstos son difícilmente ascequibles porque no ser un múltiplo de sus antecesores los hace únicos.

A pesar de no haber obtenido una ecuación cuyas soluciones fueran los números primos, Gauss y Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) tenían una conjetura, surgida de sus observaciones, sobre la forma en la que aparecen:

Sea  $\pi(n)$  el número de primos menores o iguales a  $n$ . La comparación del número de primos  $\pi(n)$  que hayan aparecido hasta el punto  $n$ ,

$$\frac{\pi(n)}{n};$$

o bien, la probabilidad de que un número escogido al azar en el intervalo  $(0, n]$  sea primo, es cada vez más parecida al valor de la función  $1/\log(n)$  conforme  $n$  crece. En otras palabras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1.$$

Este resultado, ahora probado, es conocido como el *Teorema de los Números Primos*; y es algo que puede decirse sobre todos los números primos a pesar de no tener una fórmula para calcularlos uno por uno.

En aras de resolver este problema, Lejeune Dirichlet (1805 – 59) retomó un trabajo publicado en 1768, casi un siglo antes, por Leonhard Euler (1707 – 83), *Observaciones sobre una relación bella entre las series de potencias tanto directas como recíprocas* <sup>4</sup> <sup>5</sup>. En él aparece por primera vez la función zeta  $\zeta$ , que después retoma Bernhard Riemann (1826 – 66) con la misma intención de Dirichlet; y publica el artículo en el que plantea la famosa *Hipótesis de Riemann*.

Como consecuencia de la veracidad de la *Hipótesis de Riemann* en un caso en particular se obtiene la prueba del *Teorema de los Números Primos*, cuyo primer avance se debe a Pafnuty Chevyshev (1821 – 94), y cuya presentación completa fue encontrada y publicada simultánea e independientemente por Jacques Hadamard (1865 – 1963) y Charles De La Vallée Poussin (1866 – 1962) en 1896.

<sup>3</sup>T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.

<sup>4</sup>Euler, *Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques*, Memoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 1768, pág. 83 – 106; Opera Omnia: Series 1, Volume 15, pág. 70 – 90. F. Klein, *Development of Mathematics in the Nineteenth Century*, Math Sci Press, Massachusetts, 1979.

<sup>5</sup>El título en francés es: *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*.

La *Hipótesis de Riemann* dice:

*Las raíces de la función zeta de Riemann  $\zeta$ , definida en el plano complejo menos el punto  $s = 1$ , pertenecen a la semirecta*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) = 1/2\}.$$

Esta conjetura tiene su origen cuando Euler planteó el estudio de sumas de recíprocos  $1/n^k$  de potencias de números naturales  $n^k$  como una manera de obtener el valor de series de potencias de números enteros, siendo que si bien las sumas de potencias de enteros  $n^k$  crecen muy rápido y no es claro hacia dónde, esto es distinto para las sumas de recíprocos que suman magnitudes cada vez más pequeñas:

$$\begin{aligned} \zeta: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ k &\longmapsto \zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}. \end{aligned}$$

Euler desarrolló formas para calcularlas, obteniendo valores exactos que de otro modo es demasiado difícil aproximar <sup>6</sup> y que nadie había logrado hasta ese momento. Por ejemplo:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6};$$

y una fórmula general <sup>7</sup> para el valor de  $\zeta$  en los números pares positivos  $2k$ :

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} b_{2k-1} (-1)^{k-1} \pi^{2k}}{(2k-1)!}$$

que subraya una relación entre  $\zeta$ , el factorial, el número  $\pi$  y los números de Bernoulli, ya que  $(b_n)$  es una sucesión de números racionales definidos como  $B_k = 2k(-1)^{k+1} b_{2k-1}$ . Por ejemplo, para  $k = 1$ ,  $B_1 = 1/6$  y  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Vale la pena mencionar que no se tiene una identidad de este tipo para calcular los valores de  $\zeta$  en números impares positivos  $2k + 1$ .

En 1859, Riemann publicó un artículo muy breve (tiene sólo ocho páginas) y lleno de ideas nuevas sobre la función  $\zeta$  llamado *Sobre el número de primos menores que una magnitud dada* <sup>8</sup>. En él, extiende la función  $\zeta$  al plano complejo menos el punto  $s = 1$ ; construye una ecuación, la *Ecuación Funcional* que involucra  $\zeta(s)$  y  $\zeta(1-s)$  a través de una función relacionada con el factorial; y plantea la *Hipótesis de Riemann*.

<sup>6</sup>E. V. Shchepin, *Uppsala Lectures on Calculus*, 2001.

<sup>7</sup>S. J. Patterson, *An Introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 14), Cambridge University Press, 1988.

<sup>8</sup>El título en alemán es *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*.

La enorme cantidad de consecuencias que la *Hipótesis de Riemann* tendría de ser cierta y las que tiene aún siéndolo sólo en ciertos casos han convertido el trabajo sobre la función  $\zeta$  en un campo por sí mismo, extendido desde la búsqueda de métodos más eficaces para calcular sus raíces hasta su reinterpretación en otros contextos, como la equivalencia mostrada por Alberto Verjovsky para una propiedad de convergencia de las medidas discretas  $m_y(f)$ .

## 1.2 La función Zeta $\zeta$

La primera definición de la función  $\zeta$  hecha por Leonhard Euler consideró sólo números reales  $\sigma$ . La misma expresión pero para números complejos  $s = \sigma + it$  es una *serie de Dirichlet*<sup>9</sup> que converge en el semiplano

$$\mathfrak{R}_1 = \{s \in C \mid \operatorname{Re}(s) = \sigma > 1\}.$$

La extensión de  $\zeta$  al plano complejo  $C - \{1\}$ , presentada por Riemann como primer resultado del artículo *Sobre el número de primos menores que una magnitud dada*, se hace a partir de una expresión de la función Zeta  $\zeta$  en términos de transformadas de Mellin,

$$\zeta(s) \Gamma(s) = M((e^x - 1)^{-1}; s),$$

que coincide con la serie en  $\mathfrak{R}_1$  pero que es válida para más valores de  $s$ ; y que subraya una relación entre la función  $\zeta(s)$  y la generalización  $\Gamma(s)$  del crecimiento factorial  $n!$ .

### 1.2.1 La función Zeta $\zeta$ como serie de Dirichlet

**Definición.** La función Zeta en la recta  $(1, \infty) \subset R$  es

$$\begin{aligned} \zeta: \{x \in R \mid x > 1\} &\longrightarrow R, \\ x &\longmapsto \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \end{aligned}$$

**Proposición.** La función Zeta puede extenderse a la región

$$\{s = \sigma + it \in C \mid \sigma > 1\}$$

como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

<sup>9</sup>Series de la forma  $\sum_n f(n)/n^s$  donde  $f: N \rightarrow R$ . T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976, pág. 224.

*Demostración.* La norma

$$\begin{aligned} |n^s| &= |n^{\sigma+it}| \\ &= e^{\log(n^{\sigma+it})} \\ &= e^{(\sigma+it)\log(n)} \\ &= n^\sigma. \end{aligned}$$

Utilizando la *prueba integral*<sup>10</sup> para convergencia de series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty$$

si y sólo si  $\sigma > 1$ . Por lo tanto,  $\zeta$  es una función analítica en el semiplano abierto  $\{s = \sigma + it \in C \mid \sigma > 1\}$ .  $\square$

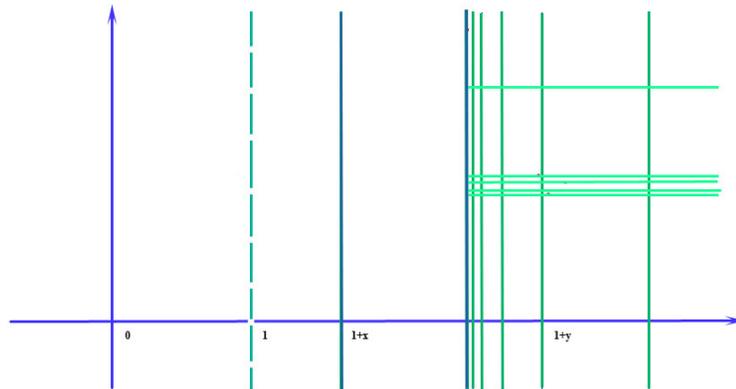
**Observación.** Si consideramos un semiplano cerrado

$$\mathfrak{R}_{1+\epsilon} = \{s \in C \mid \operatorname{Re}(s) \geq 1 + \epsilon\}$$

para algún  $\epsilon > 0$ , la serie  $\zeta(s)$  converge uniformemente porque la convergencia de toda serie  $\zeta(s)$  con  $s \in \mathfrak{R}_{1+\epsilon}$  no depende del parámetro  $s$  sino que todas ellas comparten la misma cota

$$|\zeta(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty;$$

y  $\zeta$  está acotada en los semiplanos  $\mathfrak{R}_{1+\epsilon}$  para todo  $\epsilon > 0$ .



<sup>10</sup>E. D. Rainville, *Infinite Series*, Ed. MacMillan, New York, 1967, pág. 32.

Si, en cambio, la parte real de  $Re(s) = \sigma$  es más próxima a 1,  $1 < \sigma < 1 + \epsilon_0$ , la convergencia depende de la ubicación de la semirecta vertical en la que se encuentre  $s = \sigma + it$ . Ésto es, la cota está determinada solamente por la parte real; sin embargo, no varía con el parámetro  $t$ : Si  $\sigma > 1$ ,

$$|\zeta(\sigma + it)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \infty;$$

y puede pensarse a  $\zeta(\sigma + it)$  como una función del parámetro  $t$  que converge uniformemente en  $R$ .

### 1.2.2 El producto de Euler

El producto de Euler  $\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}$  es una caracterización de la función Zeta  $\zeta$  que la relaciona directamente con los números primos; y que tiene consecuencias directas como que  $\zeta$  no tiene raíces en la región  $\Re_1$  y la expresión  $\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - 1/p^s)$ . Esta representación de  $\zeta$  no es sólo una casualidad sino una propiedad fundamental siendo que *se conocen funciones cuya serie de Dirichlet y ecuación funcional son extremadamente parecidas a la función Zeta; pero que no tienen un producto de Euler; y para las que el análogo de la Hipótesis de Riemann es falso*<sup>11</sup>.

La generalización de la función  $\zeta$  se da entonces a una familia de funciones cuya serie de Dirichlet puede factorizarse en un producto de la forma<sup>12</sup>

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^x}\right)^{-1}.$$

Más aún, si la expresión de  $\zeta$  como producto de Euler se extiende a través de  $\log \zeta(s)$  a la recta vertical  $Re(s) = 1$ , se tiene que  $\zeta$  tampoco tiene raíces en ella; de donde se infiere, nada trivialmente, el *Teorema de los Números Primos*<sup>13</sup>.

**Definición.** La notación de Iverson de una proposición  $P$  dentro de corchetes  $[P]$  es una función que asigna a  $[P]$  el valor 1 cuando  $P$  se cumple y 0 si no.

**Proposición.** Si  $s = x \in (1, \infty)$ , la función Zeta coincide con el producto de Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-[p \text{ es primo}]}$$

<sup>11</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 45.

<sup>12</sup>P. Sarnak, *Problems of the Millenium: The Riemann Hypothesis*, Princeton Institute and Courant Institute of Mathematical Sciences, 2004, pág. 1.

<sup>13</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 45, 65.

*Demostración.* Si  $p$  es un número primo y  $p > 0$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kx}}. \end{aligned}$$

Si  $p$  no es número primo, el factor

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-[p \text{ es primo}]} &= \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que, el producto de Euler

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-[p \text{ es primo}]} &= \prod_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kx}}\right)^{[p \text{ es primo}]} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kx}}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{kx}}\right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_m^{kx}}\right) \cdots, \end{aligned}$$

donde  $p_m$  es el  $m$ -ésimo número primo.

Sea  $L \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $N^L$  es la familia de subconjuntos  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_L\} \subset \mathbb{N}$  y

$$\prod_{p=1}^L \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kx}}\right)^{[p \text{ es primo}]} = \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_L\} \subset N^L} \left(\frac{1}{p_1^{k_1 x}} \cdot \frac{1}{p_2^{k_2 x}} \cdots \frac{1}{p_m^{k_m x}}\right),$$

donde  $p_m$  es el mayor número primo tal que  $p_m \leq L$ .

Si  $L \rightarrow \infty$ ,  $N^\infty$  es la familia de subconjuntos de números naturales

$$\{k_j\}_{j=1}^{\infty} = \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_j, \dots\}$$

tales que  $k_j = 0$  salvo para un número finito de índices  $j$ . De este modo,

$$\prod_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kx}}\right)^{[p \text{ es primo}]} = \sum_{\{k_j\} \subset N^\infty} \left(\prod_{j=1}^M \frac{1}{p_j^{k_j x}}\right).$$

donde  $M$  es el índice del mayor número primo  $p_M$  tal que  $p_M \leq \max\{k_j\}$ .

Por otra parte, el Teorema Fundamental de la Aritmética implica que cada producto  $\prod_{j=1}^M \left(1/p_j^{k_j x}\right)$  corresponde al recíproco

$$\frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_M^{k_M}\right)^x}$$

de la potencia  $n^x$  del único número natural  $n$  cuya factorización prima es

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_M^{k_M}.$$

Así, por cada subconjunto  $\{k_j\} \in N^\infty$  hay un único natural  $n \in N$  y

$$\prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-[p \text{ es primo}]} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kx}}\right)^{[p \text{ es primo}]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

□

**Proposición.** *La función Zeta extendida a la región  $\{s = \sigma + it \in C \mid \sigma > 1\}$  coincide con el producto de Euler*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-[p \text{ es primo}]}.$$

*Demostración.* Ésto sucede porque cada serie

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} < \infty$$

para  $s \in C$  cuya parte real es mayor a uno. □

### 1.2.3 Algunas consecuencias del producto de Euler

**Teorema.** *Hay un número infinito de números primos.*

*Demostración.* La serie

$$\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Esto quiere decir que el producto

$$\prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-[p \text{ es primo}]}$$

diverge también; pero ésto sólo sucede si hay un número infinito de factores distintos de 1. Por lo tanto, hay un número infinito de números primos. □

**Teorema.** *La función Zeta no tiene raíces en ningún punto del semiplano*

$$\{s \in C \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}.$$

*Demostración.* El producto infinito de números complejos distintos de cero es distinto de cero. Entonces, es suficiente mostrar que si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \neq 0.$$

□

**Definición.** El grupo multiplicativo de los números reales positivos será denotado por  $R^\bullet = (0, \infty)$ .

**Definición.** Para un número complejo  $s \in C$ , la *transformada de Mellin*<sup>14</sup> de la función  $\phi: R^\bullet \rightarrow R$ ,  $R^\bullet = (0, \infty)$ , es:

$$M(\phi; s) = \int_0^\infty \phi(y) y^s y^{-1} dy.$$

**Teorema.** Si  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ ,

$$\log \zeta(s) = - \sum_{p=1}^{\infty} \log(1 - p^{-s})^{[p \text{ es primo}]}$$

*Demostración.* Para un valor  $s \in C$  fijo, la función  $g: R^\bullet \rightarrow R^\bullet$ ,  $g(x) = x^{-s}$  tiene una derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} x^{-s} = -s x^{-s} \frac{1}{x}.$$

Entonces, por el *Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea*, si  $s \neq 0$  y  $\mathbf{1}: R^\bullet \rightarrow R^\bullet$ ,  $\mathbf{1}(x) = 1$ ,

$$\begin{aligned} s M(\mathbf{1}; -s) &= s \int_0^\infty x^{-s-1} dx \\ &= - \int_0^\infty -s x^{-s} \frac{1}{x} dx \\ &= -x^{-s} \Big|_0^\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^s} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^s}. \end{aligned}$$

<sup>14</sup>El Apéndice A está dedicado a la transformada de Mellin.

Si  $p > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow p} x^{-s} = p^{-s}, \quad \lim_{x \rightarrow p^2} x^{-s} = p^{-2s}$$

y

$$p^{-s} = s \int_p^{\infty} x^{-s-1} dx;$$

$$p^{-2s} = s \int_{p^2}^{\infty} x^{-s-1} dx.$$

En general, si  $k$  es un entero positivo:

$$p^{-ks} = s \int_{p^k}^{\infty} x^{-s-1} dx.$$

Al sustituir  $\zeta(s)$  por el producto de Euler:

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \left( \prod_{p=1}^{\infty} (1 - p^{-s})^{-[p \text{ es primo}]} \right) \\ &= - \sum_{p=1}^{\infty} \log (1 - p^{-s})^{[p \text{ es primo}]}. \end{aligned}$$

□

#### 1.2.4 Los ceros no triviales de $\zeta$ y los números primos

Me es imposible por falta de tiempo incluir las demostraciones que conforman el contenido de la relación entre las raíces de la función Zeta de Riemann y el cálculo del número de primos menores que una cantidad dada, pero prefiero presentar aquí un resumen del camino de uno a otro: El valor de la función

$$\pi(x) = |\{p \in (1, x] \mid p \text{ es primo}\}|$$

puede ser encontrado si se conocen las raíces complejas (no triviales) de  $\zeta$  porque:

Si  $Re(s) > 1$ <sup>15</sup>,

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_2^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1} dx$$

donde

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} \pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots;$$

<sup>15</sup>H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications Inc., New York, 1974, pág. 25.

y la Transformada Inversa de Fourier del cociente  $\log \zeta(s)/s$  es una expresión en forma de integral compleja para  $\Pi(x)$  de la que puede recuperarse el valor  $\pi(x)$  puesto que <sup>16</sup>

$$\pi(x) = \Pi(x) - \frac{1}{2} \Pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3} \Pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \dots$$

La Transformada Inversa de Fourier de  $\log \zeta(s)/s$  para un  $a \in (1, \infty)$ ,

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds,$$

se calcula a través de residuos en  $s = 1$  y en los ceros complejos (no triviales) de la función  $\zeta$ . Por lo tanto, las raíces complejas de  $\zeta$  son la base del cálculo exacto del valor  $\pi(x)$ ; y así también, de la distribución de los números primos en la recta real positiva.

### 1.2.5 Extensión analítica de la función Zeta $\zeta$

La extensión analítica de  $\zeta$  al plano complejo menos el punto  $s = 1$  se hace observando una relación entre la función  $\zeta$  y la función  $\Gamma$ , que permite escribir a  $\zeta$  como el producto de dos funciones: una función entera en todo el plano y una función *meromorfa* <sup>17</sup> con un polo simple en  $s = 1$ . Este es el primer resultado planteado por Riemann en el artículo clásico *Sobre el número de primos menores que una magnitud dada*; y es el primer lugar en el que aparece la función  $\zeta$  como una función compleja.

### La función Gamma $\Gamma$

La función Gamma  $\zeta$  fue descubierta por Euler <sup>18</sup> en la solución del problema de encontrar una fórmula general para la sucesión números factoriales  $1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots, n!, \dots$ , la cual plantea en una carta dirigida a Goldbach: *El término general de la serie  $n!$  está dado por:*

$$\frac{1 \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \dots$$

Si, como en el caso de las series y las integrales de Fourier, en lugar de tomar una variable discreta  $n$  consideramos una continua  $s$ ,  $\Gamma(s)$  es una función que coincide con el factorial  $n!$  para  $s$  en el conjunto de enteros positivos, pero es una función meromorfa que se extiende al plano complejo a partir de una primera definición como la transformada de Mellin de la función  $e^{-x}$ .

<sup>16</sup> *idem*, pág. 34.

<sup>17</sup> Analítica salvo en una sucesión de puntos en donde tiene polos.

<sup>18</sup> E. Sandifer, *Gamma the Function*, How Euler Did It, MAA Online, 2007.

**Proposición.** La transformada de Mellin de la función  $e^{-x}$ ,  $M(e^{-x}; s)$  es una función holomorfa <sup>19</sup> en la región  $\mathfrak{R}_o = \{s \in C \mid \text{Re}(s) = \sigma > 0\}$ .

*Demostración.* La función  $e^{-x}$  es decreciente en  $R^\bullet$  y  $e^0 = 1$ . Entonces,  $e^{-x} < x$  para  $x \in R^\bullet$  y hay una vecindad  $|x| < \delta_o$  tal que

$$\int_o^{\delta_o} e^{-x} x^{s-1} dx \leq \int_o^{\delta_o} x x^{\sigma-1} dx.$$

Así, si  $\sigma > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow o} x^\sigma = 0$  y

$$\int_o^{\delta_o} e^{-x} x^{s-1} dx \leq \frac{\delta_o^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Dado  $\sigma > 0$ , hay un número natural  $n$  tal que  $\sigma - 1 - n < 0$ ; y dado  $\epsilon > 0$  hay una vecindad  $|x| \geq \delta_n$  donde

$$\left| \frac{x^n}{e^x} \right| \leq \epsilon \quad \text{y} \quad e^{-x} \leq \epsilon x^{-n}$$

porque  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$  <sup>20</sup>. De modo que

$$\int_{\delta_n}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \leq \epsilon \int_{\delta_n}^{\infty} x^{-n} x^{\sigma-1} dx < \infty;$$

y  $M(e^{-x}; s) < \infty$  para todo  $s \in \mathfrak{R}_o$ . □

**Primera Definición** La función  $\Gamma$  en el semiplano complejo  $\mathfrak{R}_o$  es:

$$\begin{aligned} \Gamma: \mathfrak{R}_o &\longrightarrow C, \\ s &\longmapsto M(e^{-x}; s). \end{aligned}$$

**Proposición.** La función  $\Gamma$  es holomorfa en la región  $\mathfrak{R}_o$ .

*Demostración.* Si la transformada de Mellin  $M(e^{-x}; s)$  converge en  $\mathfrak{R}_o$ , es analítica en  $\mathfrak{R}_o$  <sup>21</sup>. □

**Proposición. Fórmula recursiva** Sea  $s \in \mathfrak{R}_o$ . Entonces,

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s).$$

<sup>19</sup>Analítica en una región del plano complejo.

<sup>20</sup>W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1976, pág. 180.

<sup>21</sup>Apéndice A.

*Demostración.* Integramos por partes  $\Gamma(s+1)$  aprovechando que si  $\sigma > 0$ ,  $x^\sigma \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ ; y que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\sigma/e^x = 0$ :

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^s dx \\ &= -e^{-x} x^s \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= s \Gamma(s).\end{aligned}$$

□

**Corolario.** Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n) = n!$ .

*Demostración.* Esto sucede porque

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

□

**Observación.** La fórmula recursiva de  $\Gamma$  permite hacer una generalización de la fórmula de combinaciones  $\binom{n}{k}$  para una variable continua y compleja  $s$ :

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1) \cdots (s+n-1)}.$$

**Proposición.** La función  $\Gamma$  es meromorfa.

*Demostración.* Sea  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\sigma < -1$ . Entonces, hay un número natural  $n$  tal que  $\operatorname{Re}(s+n) > 0$ . Usando repetidamente la fórmula recursiva de  $\Gamma$  tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(s+n) &= (s+n-1) \Gamma(s+n-1) \\ &= (s+n-1)(s+n-2) \Gamma(s+n-2) \\ &= s(s+1) \cdots (s+n-1) \Gamma(s).\end{aligned}$$

Si definimos  $\Gamma(s)$  para  $\sigma < 0$  como

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+|\sigma|+n)}{s(s+1) \cdots (s+n-1) \Gamma(s)},$$

$s+|\sigma|+n > 0$  y  $\Gamma$  es una función meromorfa con polos en los números enteros negativos y el cero. □

**Corolario.** *La función recíproca  $1/\Gamma$  es entera.*

*Demostración.* Si  $s \in C - \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $\Gamma(s)$  es un valor distinto de cero porque para todo  $x \in R^\bullet$  tanto  $e^{-x}$  como  $x^{\sigma-1}$  son estrictamente positivos. Si definimos  $1/\Gamma(s) = 0$  para  $s \in \{0, -1, -2, \dots\}$ , la serie de Laurent de  $1/\Gamma(s)$  es una serie de Taylor para todo  $s \in C$  y la función recíproca  $1/\Gamma$  es entera.  $\square$

### Extensión analítica de la función $\zeta$

**Teorema.** *La función Zeta de Riemann  $\zeta$  es meromorfa y tiene un solo polo simple en  $s = 1$ .*

*Demostración.* Sea

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy.$$

Si hacemos el cambio de variable  $y = nx$ ,  $dy = n dx$  y

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} (nx)^{s-1} n dx.$$

Al factorizar  $n^s$  de la integral, obtenemos la relación:

$$\frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

La última función es la transformada de Mellin  $M_n = M(e^{-nx}; s)$  y forma una sucesión de funciones con las mismas características que  $\Gamma$  para todo entero positivo  $n$ . Entonces <sup>22</sup>,

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx;$$

ya que  $|e^{-x}| < 1$  para todo  $x \in R^\bullet$  y  $\sum e^{-x}$  es una serie geométrica.

La función  $M((e^x - 1)^{-1}; s)$  es una función meromorfa con un único polo simple en  $s = 1$ . Por lo tanto,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx$$

es una redefinición de la función  $\zeta$  como una función meromorfa.  $\square$

<sup>22</sup>Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue: Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones integrables que convergen casi en todas partes a una función  $f$  y existe una función integrable  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , entonces  $\int f \partial\mu = \lim \int f_n \partial\mu$ , R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, New York, 1995, pág. 44.

### 1.3 La Ecuación Funcional

La *Ecuación Funcional* <sup>23</sup>,

$$\zeta(s) = \gamma(s) \zeta(1-s),$$

donde

$$\gamma(s) = \frac{s}{\pi} (2\pi)^s \int_0^\infty \frac{\text{sen}(y)}{y^{s+1}} dy,$$

es una propiedad general de  $\zeta$  de la cual se infieren otros resultados sobre  $\zeta$ ; y es una relación del comportamiento de  $\zeta$  con el factorial  $\Gamma$ . Hay varias fórmulas equivalentes de la correspondencia entre  $\zeta(s)$  y  $\zeta(1-s)$  y demostraciones para cada una. La primera en el libro de Titchmarsh <sup>24</sup> involucra una expresión de  $\zeta$  en donde es visible su orden de crecimiento al restringirla a ciertas rectas verticales. La segunda, también presentada por Daniel Bump en <sup>25</sup> y en el trabajo de Quitze Morales <sup>26</sup>, sigue los pasos de Riemann en *Sobre el número de primos menores que una magnitud dada* y tiene como consecuencia una expresión de  $\zeta$  como la transformada de Mellin de un automorfismo. Para esta misma fórmula, la demostración de Ahlfors concluye que si  $\sigma \leq 0$ , la función  $\zeta(s)$  vale cero sólo cuando  $s$  es un número par negativo.

#### 1.3.1 Primera expresión de la Ecuación Funcional

La primera expresión de la Ecuación Funcional en el libro Titchmarsh <sup>27</sup> es

$$\zeta(s) = \frac{s}{\pi} (2\pi)^s (-\Gamma(-s)) \text{sen}\left(\frac{1}{2}s\pi\right) \zeta(1-s).$$

Su prueba parte de otras formas de escribir la extensión analítica de la función  $\zeta$  y de la relación entre las transformadas de Mellin de funciones trigonométricas y la función  $\Gamma$ .

**Lema.** Sea  $\phi \in C^2([a, b])$  una función con derivada continua en un intervalo real  $[a, b]$ . Entonces,

$$\sum_{a < n \leq b} \phi(n) = \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx +$$

<sup>23</sup>S. J. Patterson, *An Introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 14), Cambridge University Press, 1988, pag. 4.

<sup>24</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 14.

<sup>25</sup>D. Bump, *The Zeta Function* (lecture notes).

<sup>26</sup>Q. Morales, *Segunda prueba de Riemann de la ecuación funcional de la función Zeta y su continuación analítica*, Cuernavaca, México, 2006.

<sup>27</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 14.

$$+ \left( a - [a] - \frac{1}{2} \right) \phi(a) - \left( b - [b] - \frac{1}{2} \right) \phi(b);$$

donde  $[x]$  es el mayor número entero menor que  $x$ .

*Demostración.* Gracias a la linealidad de las integrales, basta ver que la fórmula es cierta en cada pedazo  $(n, n + 1]$ :

Si  $n < a < b < n + 1$ , al integrar por partes  $\int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2}) \phi'(x) dx$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( x - n - \frac{1}{2} \right) \phi'(x) dx &= \left( b - n - \frac{1}{2} \right) \phi(b) - \left( a - n - \frac{1}{2} \right) \phi(a) - \\ &\quad - \int_a^b \phi(x) dx; \end{aligned}$$

y la fórmula se cumple puesto que  $\sum_{n < a < b < n+1} \phi(n) = 0$  y

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( x - n - \frac{1}{2} \right) \phi'(x) dx - \left( b - n - \frac{1}{2} \right) \phi(b) + \left( a - n - \frac{1}{2} \right) \phi(a) + \\ + \int_a^b \phi(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Si, en cambio,  $n < a < b$  y  $b = n + 1$ :

$$\begin{aligned} \left( b - n - \frac{1}{2} \right) \phi(b) &= \left( (n + 1) - n - \frac{1}{2} \right) \phi(n + 1) \\ &= \phi(n + 1) - \frac{1}{2} \phi(n + 1); \\ \left( b - [b] - \frac{1}{2} \right) &= -\frac{1}{2} \phi(n + 1); \end{aligned}$$

y la fórmula se cumple de nuevo siendo  $\sum_{n < a < b < n+1} \phi(n) = \phi(n + 1)$  y

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( x - n - \frac{1}{2} \right) \phi'(x) dx - \left( b - [b] - \frac{1}{2} \right) \phi(b) + \left( a - n - \frac{1}{2} \right) \phi(a) + \\ + \int_a^b \phi(x) dx = \phi(n + 1). \end{aligned}$$

□

**Observación.** Vale la pena notar que la relación anterior entre sumas e integrales de una función  $\phi$  es una ligera variación de la *Fórmula de Euler MacLaurin* cambiando el coeficiente de Bernoulli  $B_1 = x - 1/2$  por  $x - [x] - 1/2$ .

**Proposición.** Al aplicar el lema anterior a la función  $\phi(n) = 1/n^s$ , tenemos una nueva expresión para sumas parciales de potencias de recíprocos de números naturales: Si  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a < b$ :

$$\sum_{n=a+1}^b \frac{1}{n^s} = \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{1-s} - s \int_a^b \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2} (b^{-s} - a^{-s}).$$

*Demostración.* La suma parcial

$$\begin{aligned} \sum_{n=a+1}^b \frac{1}{n^s} &= \int_a^b \frac{1}{x^s} dx + \int_a^b \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (x^s) dx + \\ &+ \left( a - [a] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{a^s} - \left( b - [b] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{b^s}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $a = [a]$ ,  $b = [b]$  y que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{1-s} x^{1-s} \right) = \frac{1}{x^s},$$

las integrales se resuelven por el Teorema Fundamental del Cálculo para la variable  $x$ , que es la versión continua de la  $n$ ; y

$$\sum_{n=a+1}^b \frac{1}{n^s} = \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{1-s} - s \int_a^b \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2} (b^{-s} - a^{-s}).$$

□

**Proposición.** Si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx.$$

*Demostración.* Si  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ ,  $\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ ; y al aplicar la fórmula anterior para  $a = 1$  y  $b \rightarrow \infty$ , cada parte converge:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (b^{-s} - 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b^s} - 1 \right) = -\frac{1}{2};$$

$$\sigma - 1 > 0, \quad |b^{s-1}| = b^{\sigma-1} \rightarrow \infty \quad y$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-s} - 1}{1-s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{b^{s-1}} - 1}{1-s} = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1};$$

$|x - [x]| < 1$ ,  $|x - [x] - \frac{1}{2}|$  está acotada;

$\sigma + 1 > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{s+1}} = 0$  y la integral

$$-s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx < \infty.$$

Por lo tanto, tenemos una expresión integral para  $\zeta$  en el semiplano  $\Re_1$ :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{-s} - 1) + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-s} - 1}{1-s} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

□

**Proposición.** Si  $\sigma > -1$ , la integral

$$-s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx$$

define una función analítica de la variable  $s$ .

*Demostración.* Esto sucede porque si  $\sigma > -1$ ,  $\sigma + 1 > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{s+1}} = 0$$

y la integral converge uniformemente en todo semiplano  $\sigma + \epsilon > -1$ . □

**Corolario.** La expresión integral obtenida para  $\zeta$  es una continuación analítica al semiplano  $\sigma > -1$  salvo en el punto  $s = 1$ , donde tiene un polo simple.

**Teorema.** Si  $-1 < \sigma < 0$ ,

$$\zeta(s) = s \int_0^{\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx.$$

*Demostración.* La integral

$$s \int_0^1 \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1};$$

ya que:

$$\int_0^1 \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = 0;$$

$$\int_0^1 \frac{-x}{x^{s+1}} dx = \int_0^1 x^{-s} dx = \frac{1}{s-1};$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^{s+1}} = -\frac{1}{2s}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} s \int_0^1 \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{s+1}{2s-2} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

**Teorema.** La función  $\zeta$  es tal que:

$$\zeta(s) = \frac{s}{\pi} (2\pi)^s (-\Gamma(-s)) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} s \pi \right) \zeta(1-s).$$

*Demostración.* Siendo que la función  $[x] - x + 1/2$  es acotada, periódica e impar, coincide con su serie de Fourier:

$$[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n\pi}.$$

Si  $\sigma \in (-1, 0)$  y  $y = 2\pi n x$ ,  $dx = (1/2\pi n) dy$  y

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s \int_0^{\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \\ &= s \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n\pi} \right) \frac{1}{x^{s+1}} dx \\ &= \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi n)^s}{n} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y^{s+1}} dy \\ &= \frac{s}{\pi} (2\pi)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y^{s+1}} dy \\ &= \frac{s}{\pi} (2\pi)^s \zeta(1-s) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y^{s+1}} dy. \end{aligned}$$

De manera similar a cómo la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$  es cambiada por  $\zeta(1-s)$  que tiene un sentido más amplio en el plano, la última integral,  $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y^{s+1}} dy$ , se reescribe como <sup>28</sup>

$$-\Gamma(-s) \text{sen} \left( \frac{1}{2} s \pi \right);$$

obteniendo una *Ecuación Funcional* para la función  $\zeta$  que es válida para  $s \in \mathbb{C} - \{1\}$ .  $\square$

### 1.3.2 El orden de $\zeta$ para algunos valores de $\sigma$

**Teorema.** *El orden de  $\zeta$  sobre la recta vertical  $\sigma = 1$  es  $O(|t|)$  si  $|t| \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Si  $\sigma > -1$ ,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s \int_1^{\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx.$$

Sea  $s = 1 + it$ . Entonces:

Si  $|t| \rightarrow \infty$ ,  $|\frac{1}{2} + \frac{1}{it}| \rightarrow \frac{1}{2}$  y es de orden  $O(1)$ .

Por otro lado, la integral

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{2+it}} \right| dx \leq \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty.$$

De manera que,

$$|s| \int_1^{\infty} \left| \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} \right| dx \leq \left| \frac{1}{2} + it \right| \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq M|t|$$

para algún  $M > 0$ .

Por lo tanto, si  $|t| \rightarrow \infty$ ,

$$\zeta(1+it) = O(1) + O(|t|) = O(|t|).$$

$\square$

**Corolario.** *La función  $\zeta$  es de orden  $O(|t|)$  si  $|t| \rightarrow \infty$  en todas las rectas verticales con parte real  $\sigma \geq 1/2$ .*

<sup>28</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 15.

**Teorema.** Si  $\sigma = 1 + \delta > 1$ , para algún  $\delta > 0$ ,  $\zeta(\sigma + it) = O(\mathbf{1})$ .

*Demostración.* Para todo  $\sigma = 1 + \delta > 1$ , el valor de  $\zeta(\sigma + it)$  está acotado por

$$\sum \frac{1}{n^{1+\delta}} = M > 0;$$

ésto es:  $|\zeta(\sigma + it)| \leq M$  y  $\zeta(\sigma + it) = O(\mathbf{1})$ . □

**Corolario.** Sea

$$\mu(\sigma) = \inf \{ \epsilon > 0 \mid \zeta(\sigma + it) = O(t^\epsilon) \}.$$

Entonces,  $\mu(\sigma) = 0$  si  $\sigma > 1$ .

*Demostración.* La función  $\zeta$  restringida a la recta vertical  $\sigma = 1$  está acotada afuera de una vecindad de  $s = 1$ <sup>29</sup>. De modo que,  $\zeta(1 + it) = O(\mathbf{1})$  y  $\mu(\sigma) = 0$  para  $\sigma \geq 1$ . □

**Observación.** La *Hipótesis de Lindelöf* es una conjetura no confirmada sobre el orden de  $\zeta$  en  $\sigma \geq 1/2$  que sería cierta de serlo también la *Hipótesis de Riemann*<sup>30</sup>:

$$\zeta(\sigma + it) = O(t^\epsilon)$$

para todo  $\epsilon > 0$  y  $\sigma \geq 1/2$ . Es decir,  $\mu(\sigma) = 0$  para todo  $\sigma \geq 1/2$ .

Como consecuencia de la ecuación funcional, para valores negativos de  $\sigma$ , se conoce el siguiente resultado:

**Teorema.** Si  $\sigma < 0$ ,

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right).$$

*Demostración.* A partir de la ecuación funcional  $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ ; y de que, si  $\sigma < 0$ <sup>31</sup>,

$$|\chi(s)| \sim \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

<sup>29</sup>En 1967, Richert dió la cota  $|\zeta(\sigma + it)| \leq A|t|^{B(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3}|t|$ , para  $|t| \geq 2$  y  $1/2 \leq \sigma \leq 1$ , con  $B = 100$  y  $A$  constante., K. Ford, *Vinogradov integral and bounds for the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), pág. 565 – 633.

<sup>30</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951, pág. 328.

<sup>31</sup>*idem*, pág. 95.

cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , tenemos:

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) O(\zeta(1-s)).$$

Pero, si  $s$  tiene parte real  $\sigma < 0$ ,  $1 - \sigma > 1$  y

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) O(1).$$

□

**Corolario.** Si  $\sigma \leq 0$ ,

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma.$$

*Demostración.* Esto sucede porque la función  $\mu$  decrece conforme  $\sigma \rightarrow 0$ . □

### 1.3.3 Segunda expresión de la Ecuación Funcional

La segunda expresión de la Ecuación Funcional es

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$$

donde

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

y  $\Lambda$  es una función meromorfa con polos en  $s = 1$  y  $s = 0$  tal que

$$\Lambda(s) = 2 \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} \right) t^{s/2} dt$$

para  $Re(s) > 1$ .

La ecuación  $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$  proviene de propiedades de las funciones

$$f(t) = e^{-\pi x^2},$$

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t},$$

$$\theta(t) = 1 + 2\psi(t);$$

y en particular, de una ecuación funcional para ésta última:

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

**Demostración de Daniel Bump**

**Proposición.** Si  $Re(s) > 1$ ,

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \\ &= 2 \int_0^\infty \psi(t) t^{s/2} dt.\end{aligned}$$

*Demostración.* Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue <sup>32</sup>

$$\int_0^\infty \psi(t) t^{s/2} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt.$$

Ésto sucede porque  $e^{-\pi n^2 t} = o(t^{-m})$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $e^{-\pi n^2 t} \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ . Entonces:

$$\begin{aligned}\left| \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt \right| &\leq \int_0^\infty \left| e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \right| dt \\ &= \int_0^1 t^{\sigma/2} dt + \int_1^\infty t^{\sigma/2-m} dt.\end{aligned}$$

Dado  $\sigma > 0$ ,  $\sigma/2 > 0$  y hay un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma/2 - m < 0$ . Así, si  $Re(s) > 0$ , cada una de las integrales

$$\Lambda_n(s) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt$$

determina una función de  $s$ ; y tanto la sucesión  $\Lambda_n$  como sus sumas parciales se encuentran acotadas por una funciones integrables.

Mediante el cambio de variable  $t = u/\pi n^2$ ,  $du = \pi n^2 dt$ ,  $dt = du/\pi n^2$ :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt &= \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{s/2}}{\pi^{s/2} n^s} \frac{du}{u} \\ &= \pi^{-s/2} n^{-s} \int_0^\infty e^{-u} u^{s/2} \frac{du}{u} \\ &= \pi^{-s/2} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).\end{aligned}$$

Finalmente, si  $Re(s) > 1$ ,  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ ; y

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} dt = \pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

□

<sup>32</sup>Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue: Si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones integrables que convergen casi en todas partes a una función  $f$  y existe una función integrable  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , entonces  $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$ . R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, New York, 1995, pág. 44.

Para obtener la ecuación funcional de  $\theta$  y utilizarla en el desarrollo que nos lleva a la ecuación  $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$ , es necesario mencionar antes la *autoreprociad* de  $f(x) = e^{-\pi x}$ :

**Lema.** La función  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  coincide con su transformada de Fourier  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi ixy} dy$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Completando el cuadrado  $-\pi(y^2 + 2ixy - x^2) = -\pi(y + ix)^2$ :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi ixy} dy \\ &= e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix)^2} dy.\end{aligned}$$

Si  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix)^2} dy = 1$ ,  $\hat{f}(x) = f(x)$ . Dado que la función  $e^{-z^2}$  es acotada para todo  $z \in \mathbb{C}$ , no tiene polos. Aplicando el *Teorema de Cauchy* para la región comprendida entre las rectas  $y + ix$  y  $y$  para  $y \in \mathbb{R}$  y  $x$  fijo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy.$$

Calculamos el cuadrado de la última integral mediante un cambio a coordenadas polares permitido por *Teorema de Fubini*<sup>33</sup>:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\pi r^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\pi r^2} dr \\ &= 1.\end{aligned}$$

De modo que,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix)^2} dy = 1$  y  $\hat{f}(x) = f(x)$ . □

**Lema.** Sea  $f_y(t) = e^{-\pi ty^2}$  para todo  $t \in \mathbb{R}^{\bullet}$ . A partir de la sucesión de funciones  $f_n(t) = e^{-\pi tn^2}$ , definimos

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi tn^2}.$$

Entonces,

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

<sup>33</sup>J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, USA, 1974.

*Demostración.* Para un valor  $t \in \mathbb{R}^\bullet$  fijo, la transformada de Fourier

$$\hat{f}_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t y^2} e^{-2\pi i x y} dy.$$

Si  $u = y\sqrt{t}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i x y} dy &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} e^{-2\pi i (x/\sqrt{t}) u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi(x^2/t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} f_x \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Ésto sucede porque, si  $\tau = x/\sqrt{t}$ , podemos utilizar la autoreprociudad de  $e^{-\pi\tau^2}$ :

$$f(\tau) = e^{-\pi\tau^2} = \hat{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} e^{-2\pi i \tau u} du.$$

Siendo  $f_y(t)$  acotada para todo  $y \in \mathbb{R}$  y  $t \in \mathbb{R}^\bullet$ , la *Fórmula de la Suma de Poisson*<sup>34</sup> garantiza que

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

□

**Teorema.** Sea  $s \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Entonces,

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

---

<sup>34</sup>Apéndice A.

*Demostración.* Recordando que  $\theta(t) = 1 + 2\psi(t)$ ,  $\psi(t) = 1/2\theta(t) - 1/2$ , partimos de la primera expresión de  $\Lambda$  como transformada de Mellin. Si  $\text{Re}(s) > 1$ ,

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \int_0^\infty \psi(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \psi(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \psi(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\infty \psi(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_0^1 t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\infty \psi(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} - \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Si en lugar de  $t$ , consideramos  $1/t$ , la segunda integral

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \sqrt{t} \theta(t) t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \theta(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\infty \psi(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{1}{1-s}.\end{aligned}$$

Así,

$$\Lambda(s) = \int_1^\infty \psi(t) \left( t^{s/2} + t^{(1-s)/2} \right) \frac{dt}{t} - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}.$$

Como observamos en la demostración de la transformada de Mellin de  $\psi$ , ésta converge para todo  $s \in C$ . Por lo tanto, al redefinir  $\Lambda$  para  $s \in C - \{0, 1\}$  a partir de esta última expresión, obtenemos la continuación analítica de  $\Lambda$ , una expresión de  $\zeta$  como transformada de Mellin; y siendo simétrica respecto a  $s$  y  $1-s$ , también la ecuación funcional  $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$ .  $\square$

**Corolario.** Como consecuencia de la Ecuación Funcional para la función  $\zeta$ , siendo  $\zeta$  una función real para valores reales y  $1-s$  una rotación con centro en  $s = 1/2$ , las raíces de  $\zeta$  que pertenecen a la banda  $\sigma \in (0, 1)$ , llamada banda crítica, tienen parte imaginaria diferente de cero y aparecen en cuartetos  $\rho, \bar{\rho}, 1-\rho, 1-\bar{\rho}$ , simétricos respecto al centro  $s = 1/2$ , o son parte de la recta vertical  $\sigma = 1/2$  <sup>35</sup>.

<sup>35</sup>E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951.

## Capítulo 2

### Relación entre la función Zeta $\zeta$ y las medidas discretas $m_y$ (f)

Para cada  $y$  en el grupo multiplicativo de los números reales positivos  $R^\bullet$  y cada función  $f \in C_c^\circ(R^\bullet)$ ,  $f: R^\bullet \rightarrow R$  continua y con soporte compacto en  $R^\bullet$ , la medida discreta  $m_y(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} y \varphi(n) f(y^{1/2} n)$ , donde  $\varphi(n) = |\{k < n \mid (k, n) = 1\}|$ , se relaciona con la función Zeta  $\zeta$  primero, directamente, a través de la función de Euler  $\varphi$  con la que se construye; pero también porque, consecuencia de la primera relación, la transformada de Mellin

$$M_f(s) = M(m_y(f) y^{-1}; s) = \int_o^\infty m_y(f) y^{s-2} dy$$

se factoriza como

$$M_f(s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{2s} \cdot \int_o^\infty f(u) u^{2s-1} du.$$

Cuando  $f$  no es sólo continua sino analítica, utilizando el método de inversión de Fourier para la transformada de Mellin  $M_f(y)$ , se recupera la medida discreta  $m_y(f)$  en términos de una integral compleja cuyo cálculo depende de su residuo

$$m_o(y) = \frac{1}{\zeta(2)} \int_o^\infty u f(u) du;$$

y, en general, de las raíces de la función  $\zeta(2s)$  que resultan ser polos de las medidas discretas  $m_y(f)$ .

### 2.1 Las medidas discretas $m_y$ (f)

**Definición.** Sean  $f: R^\bullet \rightarrow R$  una función continua con soporte compacto en el grupo multiplicativo de números reales positivos  $R^\bullet = (0, \infty)$ ; y  $\sigma(R^\bullet)$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por los intervalos  $\{(0, y) \mid y \in R\}$ .

Por cada  $f$  y cada  $y \in R^\bullet$ , definimos la medida discreta positiva

$$m_y(f): \sigma(R^\bullet) \rightarrow R$$

a partir de los valores que toma  $f$  en el conjunto de números naturales multiplicados por  $y^{1/2}$ ,  $\{y^{1/2} n \mid n \in \mathbb{N}\}$ :

$$m_y(f) = m(f)(0, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} y \varphi(n) f(y^{1/2} n),$$

donde  $\varphi(n)$  es la función de Euler.

**Observación.** Los valores de la función  $f(y^{1/2}n) \neq 0$  sólo en el conjunto

$$\left\{ y \in R^\bullet \mid y^{1/2} n \in \text{spp}(f) \right\} \subset [a, b]$$

porque los conjuntos compactos en  $R^\bullet$  son acotados.

**Definición.** Dada una función continua  $f: R^\bullet \rightarrow R$  tal que  $\text{spp}(f) \subset [a, b]$ ,  $0 < a < b$ , definimos la magnitud

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(y)| \mid y \in R^\bullet \}.$$

**Observación.** Bajo estas condiciones  $\|f\|_\infty < \infty$ ; ya que para una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  hay un número  $y_o \in [a, b]$  cuyo valor es finito y máximo:  $|f(y_o)| < \infty$ ;  $|f(y_o)| \geq |f(y)|$  para todo  $y \in [a, b]$ ; y  $\|f\|_\infty = |f(y_o)|$ .

**Proposición.** *La medida discreta*

$$\begin{aligned} m_y(f) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} y \varphi(n) f(y^{1/2} n), \\ &= \sum_{n=1}^L y \varphi(n) f(y^{1/2} n), \end{aligned}$$

donde  $L = \max\{n \in \mathbb{N} \mid y^{1/2}n \in \text{spp}(f)\}$ .

**Corolario.** *La magnitud*

$$\begin{aligned} |m_y(f)| &= \left| \sum_{n=1}^L y \varphi(n) f(y^{1/2} n) \right|, \\ &\leq \|f\|_\infty A(f), \end{aligned}$$

para algún  $A(f) > 0$ ; es decir, una constante  $A$  que depende de  $f$ .

## 2.2 Las medidas $m_y(f)$ y la función Zeta $\zeta(s)$

Las *sumas armónicas* son series de la forma

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k g(\mu_k x)$$

donde  $(\lambda_k)$  es una sucesión de *amplitudes* que modifican el valor de las funciones  $g: \mathbb{R}^{\bullet} \rightarrow \mathbb{R}$  en los puntos  $\mu_k x$  con *frecuencias*  $(\mu_k)$ , en directa analogía con el caso en el que  $g$  es una función trigonométrica y la serie  $G$  es de Fourier. Las transformadas de Mellin de series armónicas se factorizan como el producto de la serie de Dirichlet <sup>1</sup>

$$\Lambda(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{k^s}$$

y la transformada de Mellin de una modificación de  $g$ . En nuestro caso, la serie de Dirichlet asociada a las medidas discretas  $m_y(f)$  es precisamente

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

### 2.2.1 La función $\zeta(s)$ y la serie $\sum \varphi(n)/n^s$

**Definición.** Una función se llama *aritmética* cuando es de la forma  $\phi: N \rightarrow K$ , donde  $K$  puede ser el espacio de números naturales, enteros, reales o complejos.

**Definición.** El valor  $\varphi(n)$  de la *función de Euler*  $\varphi: N \rightarrow N$  es el número de naturales  $0 < k < n$  que son primos relativos a  $n$ :

$$\varphi(n) = |\{k < n \mid (k, n) = 1\}|.$$

**Observación.** Para todo  $n$ ,  $\varphi(n)$  es el orden del grupo cociente  $Z/nZ$ ; es decir, la función de Euler de  $n$  es el número de clases de equivalencia en el grupo multiplicativo  $Z_n$ . Como consecuencia, tenemos el *Teorema de Euler*:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

**Proposición.** *La serie de Dirichlet*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

*converge absolutamente si  $\operatorname{Re}(s) > 2$  y uniformemente si  $\operatorname{Re}(s) > 2 + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ .*

<sup>1</sup>M. R. Riedel, *Applications of the Mellin-Perron Formula in Number Theory*, Thesis for the Degree of Master of Science at the University of Toronto, 1996, pág. 22.

*Demostración.* Para todo  $n$ ,  $\varphi(n) < n$ ; de modo que, dados  $\epsilon > 0$  y  $s = \sigma + it \in C$  tal que  $\sigma = 2 + \epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\varphi(n)}{n^s} \right| &= \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^\sigma} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^{2+\epsilon}} \\ &< \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^{2+\epsilon}} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}. \end{aligned}$$

La convergencia de la última serie,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ , es verificada mediante la *prueba integral*. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\varphi(n)}{n^s} \right| &= \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^\sigma} \\ &< \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \\ &\leq \int_0^\infty \frac{1}{x^{1+\epsilon}} dx = \frac{1}{(1+\epsilon) - 1} = \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

De esta manera, la convergencia de la serie para un valor determinado  $\sigma = 2 + \epsilon$  depende de  $\sigma$ , pero ésta provee una cota para cualquier otro valor  $s$  tal que  $\text{Re}(s) > \sigma$ ; y en este caso, la convergencia ya no depende de  $s$  y es uniforme.  $\square$

Por otra parte, la relación entre ésta serie de Dirichlet y la función Zeta  $\zeta$  es un resultado clásico de Teoría de Números que se demuestra utilizando una operación derivada del producto de series: la *convolución de Dirichlet*.

**Definición.** Dadas dos funciones aritméticas  $f$  y  $g$ , la *convolución de Dirichlet*  $F = f * g$  está definida en cada  $n$  como

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d) = \sum_{md=n} f(d) g(m).$$

**Teorema.** Dadas dos funciones aritméticas  $f$  y  $g$ . El producto de las series de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{y} \quad G(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{g(n)}{n^s}$$

es

$$F(s) G(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

*Demostración.* Al multiplicar las series,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{g(m)}{m^s} \right), \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{mn=k} f(n)g(m) \right) \frac{1}{k^s}, \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} f * g(n) \frac{1}{k^s}. \end{aligned}$$

□

**Lema.** <sup>2</sup> *La convolución de Dirichlet*

$$\mathbf{1} * \varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

**Teorema.** *Sea  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(s) > 2$ . Entonces,*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

*Demostración.* Sean

$$F(s) = \zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \quad \text{y} \quad G(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Entonces, la serie

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \zeta(s) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(n)}{n^s} \right), \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{1} * \varphi(n)}{n^s} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{n}{n^s} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s n^{-1}} \\ &= \zeta(s-1) \end{aligned}$$

converge en el semiplano  $\operatorname{Re}(s) > 2$  y

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

□

---

<sup>2</sup>T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976, pág. 26.

### 2.2.2 La transformada de Mellin $M_f(s)$ y la función Zeta $\zeta(s)$

La factorización de la transformada de Mellin  $M_f(s) = M(m_y(f)y^{-1}; s)$  en el producto de la serie de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

y la transformada de Mellin

$$\int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du$$

es una función compleja en la región de convergencia de de la serie  $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)/n^s$ : el semiplano  $Re(s) > 2$ . A partir de esta expresión,  $M_f$  se extiende analíticamente y se encuentra su relación fundamental con la función Zeta  $\zeta$  en el hecho de las raíces de  $\zeta(2s)$  son polos de  $M_f$ .

**Teorema.** *La transformada de Mellin  $M_f(s) = \int_0^\infty m_y(f) y^{s-2} dy$  del producto  $m_y(f)y^{-1}$ , para una función  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\bullet)$ , converge absolutamente en el semiplano  $Re(s) > 1$  y uniformemente si  $Re(s) > 1 + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ .*

*Demostración.* Sean  $Re(s) = \sigma$  y  $spp(f) \subset (0, b]$ . Dado que  $|m_y(f)| \leq A \|f\|_\infty$  para algún  $A > 0$ ,

$$\begin{aligned} |M_f(s)| &\leq \int_0^\infty |m_y(f)| y^{s-2} dy \\ &\leq A \|f\|_\infty \int_0^\infty y^{\sigma-2} dy. \end{aligned}$$

Si  $\sigma > 1$ ,  $\sigma - 1 > 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} y^{\sigma-1} = 0$  y

$$\frac{1}{\sigma-1} \int_0^b \frac{\partial}{\partial y} (y^{\sigma-1}) dy = \frac{b^{\sigma-1}}{\sigma-1}.$$

De esta manera,

$$|M_f(s)| \leq A \|f\|_\infty \frac{b^{\sigma-1}}{\sigma-1};$$

y  $M_f(s)$  converge absolutamente para  $\sigma > 1$ .

Cuando  $\sigma \geq 1 + \epsilon$  para algún  $\epsilon > 0$ ,

$$|M_f(s)| \leq A \|f\|_\infty \frac{b^\epsilon}{\epsilon},$$

por lo que la cota no depende de  $\sigma$  y la convergencia de  $M_f(s)$  es uniforme.  $\square$

**Corolario.** La transformada de Mellin  $M_f(s)$  es una función holomorfa <sup>3</sup> en el semiplano  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

*Demostración.* Esto sucede porque las transformadas de Mellin son diferenciables en regiones donde son convergentes <sup>4</sup>  $\square$

**Teorema.** Si  $s \in \mathfrak{R}_2 = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 2\}$ , la transformada de Mellin

$$M_f(s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du$$

y converge.

*Demostración.* Sea  $u = y^{1/2}n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} y &= \frac{u^2}{n^2}, \\ dy &= \frac{1}{n^2} (2u) du, \\ y^{s-1} &= \frac{u^{2s-2}}{n^{2s-2}}, \\ f(y^{1/2}n) y^{s-1} dy &= 2 f(u) \frac{u^{2s-1}}{n^{2s}} du, \quad y \\ \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty \varphi(n) f(y^{1/2}n) \right) y^{s-1} dy &= 2 \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi(n)}{n^{2s}} f(u) u^{2s-1} \right) du. \end{aligned}$$

Por otra parte, siendo que  $u$  es una variable continua nueva que determina el valor de la integral independientemente del valor de  $n$  <sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^k \frac{\varphi(n)}{n^{2s}} f(u) u^{2s-1} \right) du &= \sum_{n=1}^k \left( \frac{\varphi(n)}{n^{2s}} \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du \right) \\ &= \left( \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du \right) \sum_{n=1}^k \frac{\varphi(n)}{n^{2s}}. \end{aligned}$$

De esta manera, en la región  $\mathfrak{R}_2$  donde  $|\varphi(n)/n^{2s}|$  está acotada por  $1/n^3$ , cuya integral converge:

<sup>3</sup>Analítica o derivable en el sentido complejo en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{C}$ .

<sup>4</sup>Apéndice A.

<sup>5</sup>Aplicación del Teorema de Fubini: Para cada  $n$ ,  $u$  es una reparametrización que no altera el valor de la integral. J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, USA, 1974

$$\begin{aligned}
M_f(s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^k \frac{\varphi(n)}{n^{2s}} f(u) u^{2s-1} \right) du \\
&= 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{\varphi(n)}{n^{2s}} \cdot \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du \\
&= 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du.
\end{aligned}$$

□

**Corolario.** La transformada de Mellin es la función holomorfa

$$M_f(s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du.$$

en el semiplano  $\Re_2$ .

**Observación.** Si  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$  es una función continua con soporte compacto en  $R^\bullet$ , la función

$$\varphi_f(s) = \int_0^\infty f(u) u^{2s-1} du$$

es una función entera <sup>6</sup>. Si además  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$  es analítica <sup>7</sup>, integrando por partes para  $g'(u) = u^{2s-1}$ :  $\int_0^\infty f g' = \varphi_f(s)$  y

$$\varphi_f(s) = \frac{(-1)^n}{2s(2s+1) \cdots (2s+n-1)} \int_0^\infty f^{(n)}(u) u^{2s+n-1} du$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otro lado,

$$Z_f(s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}$$

es el producto de dos funciones

$$2 \zeta(2s-1) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta(2s)};$$

que convergen en forma de series para  $s \in \Re_2$ , pero que comparten la extensión analítica de la función Zeta  $\zeta$  a todo el plano menos un polo simple (En el caso de  $\frac{1}{\zeta(2s)}$  el polo simple es una raíz y los ceros de  $\zeta(2s)$  podrían ser polos de  $M_f$ ). Entonces, podemos aprovechar la extensión analítica de  $Z_f$  para reentender a  $M_f$  como una función meromorfa <sup>8</sup>.

<sup>6</sup>Apéndice A.

<sup>7</sup>Apéndice A. Transformadas de Mellin de funciones con soporte compacto.

<sup>8</sup>Analítica salvo en una sucesión de puntos en el plano  $C$ .

**Observación.** No hay polos de  $M_f$  en la región  $\Re_2$  porque en ese caso ambas funciones,  $\varphi_f$  y  $Z_f$ , convergen.

**Proposición.** Si  $\varphi_f(1) \neq 0$ , la función  $M_f$  tiene un polo simple en  $s = 1$  y un residuo

$$\text{Res}(M_f; s = 1) = \frac{1}{\zeta(2)} \varphi_f(1).$$

*Demostración.* La función  $2\zeta(2s - 1)$  tiene un polo simple en  $s = 1$ . Su serie de Laurent en una vecindad de radio menor que  $\frac{1}{2}$  con centro en 1 es <sup>9</sup>:

$$\frac{1}{s - 1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (2s - 2)^k,$$

donde la sucesión  $(\gamma_k)$  es tal que  $\gamma_0 = \gamma$  es la constante gamma de Euler y

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{n \leq N} \frac{1}{n} \log^k(n) - \frac{1}{k+1} \log^{k+1} N \right).$$

De esta manera, la función  $M_f$  tiene una expresión

$$M_f(s) = \varphi_f(s) \frac{1}{\zeta(2s)} \left( \frac{1}{s - 1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (2s - 2)^k \right)$$

en una vecindad de  $s = 1$ . Por lo tanto, si  $\varphi(1) \neq 0$ ,  $M_f$  tiene un polo simple en  $s = 1$  <sup>10</sup> y su residuo

$$\begin{aligned} \text{Res}(M_f; s = 1) &= \frac{1}{\zeta(2)} \varphi_f(1) \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} \int_0^{\infty} f(u) u \, du. \end{aligned}$$

□

**Corolario.** La función  $M_f$  es analítica en la región  $\Re_1 - \{1\}$  dado que tanto  $\varphi_f$  como  $Z_f$  lo son.

<sup>9</sup>La serie de Laurent de la función  $\zeta(s)$  en una vecindad de radio menor que 1 con centro en 1 es  $\frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (s-1)^k$ . C. Calderón, *La función Zeta de Riemann*, Rev. Real Academia de Ciencias, Zaragoza, **57**: pág. 67 – 87, 2002, pág. 71.

<sup>10</sup>En general, si una función compleja  $f$  tiene una expresión  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^N}$  en una vecindad de  $z_0$ ,  $\varphi$  es analítica en la misma vecindad y  $\varphi(z_0) \neq 0$ , el coeficiente  $C_{-N}$  de la serie de Laurent de  $f$  es  $\varphi(z_0)$ . M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, Cambridge University Press, 1997, pág. 209.

**Definición.** Sea

$$m_o(f) = \frac{1}{\zeta(2)} \int_o^\infty f(u) u \, du.$$

para una función  $f \in C_c^\circ(\mathbf{R}^\bullet)$ .

**Proposición.** Si  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\bullet)$ ,  $\int_o^\infty f^{(n)}(u) u^{2s+n-1} du \neq 0$  para todo  $n \in \mathbf{N}$  y  $Z^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , entonces  $M_f$  tiene polos en  $Z^-$ .

*Demostración.* Los ceros triviales de  $\zeta(2s)$  se convierten en polos de la función recíproca  $1/\zeta(2s)$  y forman el conjunto  $\{-1, -2, -3, \dots\}$ . En estos puntos y  $s = 0$  la expresión

$$\varphi_f(s) = \frac{(-1)^n}{2s(2s+1) \cdots (2s+n-1)} \int_o^\infty f^{(n)}(u) u^{2s+n-1} du.$$

tiene aproximadamente la mitad de sus polos.

Por otra parte, la función  $\zeta(2s-1) \neq 0$  en  $Z^-$ . Entonces, si para todo  $n \in \mathbf{N}$

$$\int_o^\infty f^{(n)}(u) u^{2s+n-1} du \neq 0$$

en  $Z^-$ ,  $M_f(s) = Z_f(s) \varphi_f(s)$  tiene polos en  $Z^-$ .

El resto de los polos de  $\varphi_f$  son la colección de números racionales negativos  $\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$ ; y coinciden con el conjunto de ceros triviales de la función  $\zeta(2s-1)$ ; pero <sup>11</sup>,

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{k}{2}} \frac{\zeta(2s-1)}{2s+k} = \lim_{s \rightarrow -\frac{k}{2}} 2\zeta'(2s-1) \neq 0$$

para todo  $k$  impar:

Si  $k$  es impar y  $s = -k/2$ ,  $2s-1 = -k-1$  es un número negativo par para el cual

$$\zeta'(-2n) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} \pi^{2n}} \zeta(2n+1) \neq 0.$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos  $\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$  no son ni polos ni ceros de la función  $M_f$ .  $\square$

**Corolario.** Si  $f \in C_c^\circ(\mathbf{R}^\bullet)$  es una función continua con soporte compacto en  $\mathbf{R}^\bullet$ , la transformada de Mellin  $M_f$  es analítica en todos los puntos del semiplano  $\text{Re}(s) < 0$  salvo en los números enteros negativos  $\{-1, -2, -3, \dots\}$

<sup>11</sup>Regla de L'Hôpital para las funciones Parte Real y Parte Imaginaria.

*Demostración.* Utilizando la extensión analítica de  $\zeta$ , redefinimos  $M_f(s)$  para  $Re(s) < 0$  como el producto  $Z_f(s)\varphi_f(s)$ , que es analítica en todos los puntos  $s \in C$  con parte real negativa salvo si  $s = -n$  para algún  $n \in N$ .  $\square$

**Corolario.** Si  $f \in C_c^\circ(R^\bullet)$ , la función  $M_f$  es analítica en la unión de  $\mathfrak{R}_1 - \{1\}$  y

$$\mathfrak{R}_0^- = \{s \in C \mid Re(s) \leq 0\} - \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

puesto que no hay más polos posibles de las funciones  $\varphi_f$  y  $Z_f$  en ambas regiones y  $M_f$  está definida como el producto de funciones analíticas para el resto de los valores  $s \in (\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_0^-) - \{1\}$ .

**Proposición.** Si  $f \in C_c^\circ(R^\bullet)$  y  $\varphi_f(s) \neq 0$  para todo  $s \in C$  tal que  $Re(s) \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $M_f$  tiene polos en los ceros no triviales de la función  $\zeta(2s)$ .

*Demostración.* Los ceros no triviales de  $\zeta(2s - 1)$  se encuentran en la banda vertical del plano donde  $Re(s) \in (\frac{1}{2}, 1)$ , por lo que no anulan los polos de  $M_f$  generados por los ceros no triviales de  $\zeta(2s)$  que pertenecen a la banda

$$B_{0, \frac{1}{2}} = \left\{ s \in C \mid 0 < Re(s) < \frac{1}{2} \right\}.$$

$\square$

En resumen, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema.** Si  $f \in C_c^\circ(R^\bullet)$  y  $\varphi_f \neq 0$ , la transformada de Mellin  $M_f$  del producto  $m_y(f)y^{-1}$  es una función meromorfa con polos en  $s = 1$ ,  $Z^-$  y el conjunto de ceros no triviales de  $\zeta(2s)$ . Es decir,  $M_f$  es una función analítica salvo en el conjunto de números enteros  $\{1, 0, -1, -2, -3, \dots\}$  y el conjunto de ceros no triviales de  $\zeta(2s)$ , que son sus polos.

### 2.2.3 Transformada Inversa de $\Theta_f^{1/2}(t)$ y $\Theta_f^2(t)$

La transformada de Mellin  $M_f(\sigma + it)$  restringida a rectas verticales del plano complejo es una transformada de Fourier <sup>12</sup>. Así, la recuperación de las medidas discretas  $m_y(f)$  en forma de integrales complejas depende del orden de decaimiento de  $M_f(\sigma + it)$  en la recta  $Re(s) = \sigma$ ; y, por lo tanto, del lugar respecto a  $\sigma$  que tienen sus polos.

Siendo la banda crítica de  $M_f(s)$  el conjunto de rectas verticales  $\sigma \in (1/4, 1/2)$ , la menor parte real positiva que podemos considerar sin problema es  $\sigma = 1/2$ . Mas hacia la derecha del polo  $s = 1$ , cada recta vertical provee una posibilidad de recuperar  $m_y(f)$ , como consecuencia del orden de  $\zeta$  en estas rectas y también de que  $\varphi_f(s)$  pertenece al espacio del Paley-Wiener <sup>13</sup>.

<sup>12</sup>Apéndice A

<sup>13</sup>idem

**Definición.** La restricción de  $M_f(s)$  a las rectas verticales  $Re(s) = \sigma$  es una función de la variable  $t \in R$ ,

$$\Theta_f^\sigma(t) = M_f(\sigma + it).$$

**Proposición.** Si  $|t| \rightarrow \infty$ ,

$$Z_f^{1/2}(t) = \frac{\zeta(2it)}{\zeta(1+2it)}$$

es de orden  $O(t^{1/2-\epsilon})$ , para todo  $\epsilon > 0$ .

*Demostración.* Ésto sucede porque si  $|t| \rightarrow \infty$ ,  $\zeta(2it) = O(t^{1/2-\epsilon})$  para todo  $\epsilon > 0$ <sup>14</sup> y  $\zeta(1+2it) = O(1)$ <sup>15</sup>. Es necesario notar que  $\zeta(1+2it)$  no tiende a cero para ningún  $t \in R$ . De hecho,  $s = 1$  es el único polo de  $\zeta$  en el plano; y si  $|t| \geq 3$ , hay una vecindad de  $1+2it$  donde no puede haber raíces de  $\zeta$ <sup>16</sup>. Por lo que, si hubiese una sucesión de valores  $t_n \in R$  tales que  $\zeta(1+2it_n) \rightarrow 0$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , aun si el punto límite no se encontrase en la recta vertical  $\{1+2it\}_{t \in R}$ , se encontraría arbitrariamente cerca, lo que no es posible.  $\square$

**Teorema.** Si  $f \in C_c^r(R^\bullet)$  para  $r \geq 2$ , la función  $\Theta_f^{1/2}$  decae cuando  $|t| \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Si  $f$  es analítica, la transformada de Mellin  $\varphi_f(s) = M(f; 2s)$  es un elemento del espacio de Paley-Wiener<sup>17</sup> y es de orden  $O(|t|^{-N})$ , para algún número natural  $N > 0$ . Entonces,  $O(\Theta_f^{1/2})$  es por lo menos  $O(|t|^{-1/2})$ ; y los valores  $\Theta_f^{1/2}(t) \rightarrow 0$  si  $|t| \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Proposición.** Si  $|t| \rightarrow \infty$ , la función

$$Z_f^2(t) = \frac{\zeta(3+2it)}{\zeta(4+2it)}$$

es de orden  $O(1)$ .

---

<sup>14</sup>Sección 1.4

<sup>15</sup>idem

<sup>16</sup>Hay un  $c > 0$ , tal que  $\zeta(s) \neq 0$  si  $|t| \geq 3$  y  $\sigma = 1 - c(\log |t|)^{-2/3}(\log \log |t|)^{-1/3}$ . K. Ford, Vinogradov integral and bounds for the Riemann zeta function, *Proc. London Math. Soc.* (3) 85 (2002), pág. 565 – 633.

<sup>17</sup>Apéndice A

*Demostración.* El valor absoluto de la función

$$|Z_f^2(t)| \leq \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}.$$

□

**Teorema.** Si  $f \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$  para  $r \geq 2$ , la transformada inversa de Fourier de la función  $\Theta_f^2$  es una reescritura de  $m_y(f)$  como una integral de línea compleja.

*Demostración.* Si  $f$  es analítica,  $\varphi_f(s) = O(|t|^{-N})$ , para algún número natural  $N > 0$ ; asimismo,  $\Theta_f^2 = O(|t|^{-N})$ , para algún número natural  $N > 0$ ; la función es de decaimiento rápido<sup>18</sup>; y la transformada inversa de Fourier de la función coincide con la original  $m_y(f)$ . □

**Corolario.** Si  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\bullet)$  para  $\sigma = 1 + \delta$  para algún  $\delta > 0$ , la restricción de la transformada de Mellin  $M_f$  a la recta vertical  $\sigma$ ,  $\Theta_f^\sigma$ , es de decaimiento rápido<sup>19</sup>; y la transformada inversa de Fourier de la función  $\Theta_f^\sigma$  coincide con el valor de la medida discreta  $m_y(f)$ .

## 2.3 Teorema A. Convergencia de las medidas discretas $m_y(\mathbf{f})$

Las medidas discretas  $m_y(f)$  convergen a  $m_o(f)$  cuando  $y \rightarrow 0$  para toda función  $f$  con soporte compacto. Esto no tendría por qué suceder en general, y corresponde directamente al comportamiento de  $\zeta(2s-1)$  y  $\zeta(2s)$  en el semiplano  $\sigma \in [1/2, \infty)$ .

El primer teorema en el artículo *Medidas Discretas y la Hipótesis de Riemann* escrito por Alberto Verjovsky provee dos órdenes de aproximación de  $m_y(f)$  a  $m_o(y)$  cuando  $y \rightarrow 0$ : El primero, para funciones  $f$  con soporte compacto pero solamente continuas; y el segundo, para funciones  $f$  diferenciables.

Para ésto, utiliza el *Teorema del Residuo* y el *Teorema de Cauchy* aplicados a calcular la integral de la transformada de Mellin  $M_f$  en un contorno alrededor del polo simple  $s = 1$  contenido en el semiplano  $\sigma \in [1/2, \infty)$ , que se traduce en el valor de la diferencia entre  $m_y(f)$  y  $m_o(y)$ .

<sup>18</sup>Apéndice A

<sup>19</sup>Apéndice A: Una función analítica  $f: R \rightarrow R$ ,  $f \in C^\infty(R)$ , se llama *de decaimiento rápido* si hay un  $m \in N$  tal que  $\sup_{x \in R} \{|x^m f^{(n)}(x)|\} < \infty$  para todo  $n \in N$ .

### 2.3.1 Convergencia de medidas $\mathbf{m}_y(\mathbf{f})$ para funciones $f \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$ con $r \geq 2$

En este caso,  $m_y(f) \rightarrow m_o(f)$  si  $y \rightarrow 0$  de la misma manera que  $y^{1/2} \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ .

**Lema.** Si  $f \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$  para  $r \geq 2$ , las medidas discretas

$$m_y(f) = m_o(f) + \frac{1}{2\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_f \left( \frac{1}{2} + it \right) y^{1/2} y^{-it} dt.$$

*Demostración.* Dado un  $T > 0$ , el contorno  $\gamma$  formado por los segmentos  $[2 - iT, 2 + iT]$ ,  $[2 + iT, 1/2 + iT]$ ,  $[1/2 + iT, 1/2 - iT]$ ,  $[1/2 - iT, 2 - iT]$  está contenido en la región  $\sigma \in (0, \infty)$  donde  $M_f$  es analítica salvo en el polo  $s = 1$ , al que  $\gamma$  rodea. Entonces, por el Teorema del Residuo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} M_f(s) y^{1-s} ds = \text{Res}(M_f; s = 1).$$

Para extender el contorno hacia arriba y abajo de la banda, consideramos un  $M > 0$  y el que, por el *Teorema de Cauchy*, las integrales de línea sobre los contornos

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [2 + iT, 2 + i(T + M)] \cup [2 + i(T + M), 1/2 + i(T + M)] \cup \\ &\cup [1/2 + i(T + M), 1/2 + iT] \cup [1/2 + iT, 2 + iT] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= [2 - i(T + M), 2 - iT] \cup [2 - iT, 1/2 - iT] \cup \\ &\cup [1/2 - iT, 1/2 - i(T + M)] \cup [1/2 - i(T + M), 2 - i(T + M)], \end{aligned}$$

son cero:

$$\int_{\gamma_1} M_f(s) y^{1-s} ds = \int_{\gamma_2} M_f(s) y^{1-s} ds = 0.$$

Entonces, para todo  $M > 0$ :

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2} M_f(s) y^{1-s} ds = \int_{\gamma} M_f(s) y^{1-s} ds;$$

y

$$m_y(f) - \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_f \left( \frac{1}{2} + it \right) y^{1/2} y^{-it} dt = m_o(f).$$

□

**Teorema.** Si  $y \rightarrow 0$ ,

$$m_y(f) \rightarrow m_o(f)$$

para todo  $f \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$  con  $r \geq 2$  tal como  $y^{1/2} \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ . Ésto es:

$$m_y(f) = m_o(f) + o\left(y^{1/2}\right)$$

cuando  $y \rightarrow 0$ .

*Demostración.* El orden de convergencia está dado por la integral

$$\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_f\left(\frac{1}{2}+it\right) y^{1/2} y^{-it} dt = y^{1/2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_f\left(\frac{1}{2}+it\right) y^{-it} dt;$$

que es, precisamente, la diferencia entre  $m_y(f)$  y  $m_o(f)$ . El *Lema de Riemann-Lebesgue*<sup>20</sup> tiene como consecuencia que:

$$\lim_{y \rightarrow o} \left| \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_f\left(\frac{1}{2}+it\right) y^{-it} i dt \right| = 0.$$

Así, la diferencia

$$y^{1/2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_f\left(\frac{1}{2}+it\right) y^{-it} dt = o\left(y^{1/2}\right);$$

y

$$m_y(f) = m_o(f) + o\left(y^{1/2}\right).$$

□

### 2.3.2 Ejemplo. Convergencia de medidas discretas definidas a partir de $\lambda(\mathbf{n})$ y $\mu(\mathbf{n})$ para funciones $\mathbf{f} \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$ con $r \geq 2$

El método desarrollado por Alberto Verjovsky para definir y trabajar con las medidas discretas  $m_y(f)$  puede ser utilizado para construir medidas discretas similares a partir de otras *funciones aritméticas completamente multiplicativas*  $g: N \rightarrow \mathbf{R}^\bullet$  cuyas series de Dirichlet  $\sum g(n)/n^s$  son variaciones de la función  $\zeta$  como es el caso de<sup>21</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad \sigma > 1$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \quad \sigma > 1;$$

<sup>20</sup>G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1962, pág. 70.

<sup>21</sup>T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976, pág. 231.

para la función  $\mu$  de Möbius y  $\lambda$  de Liouville.

Si  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$  es la factorización de  $n \in N$  como producto de potencias de números primos:

**Definición.** La función de Möbius es:

$$\begin{aligned} \mu: N &\longrightarrow Z \\ n &\longmapsto \mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ (-1)^k, & a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1; \\ 0, & a_j \neq 1 \text{ para algún índice } j. \end{cases} \end{aligned}$$

**Definición.** La función de Liouville es:

$$\begin{aligned} \lambda: N &\longrightarrow Z \\ n &\longmapsto \lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ (-1)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}, & n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}. \end{cases} \end{aligned}$$

En ambos casos, para toda función diferenciable con soporte compacto  $f$  en  $C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$ , con  $r \geq 2$ , las medidas discretas

$$m_{y,\mu}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} y \mu(n) f(y^{1/2} n) \longrightarrow 0$$

y

$$m_{y,\lambda}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} y \lambda(n) f(y^{1/2} n) \longrightarrow 0$$

de la misma manera que  $y^{1/2} \rightarrow 0$ , cuando  $y \rightarrow 0$ .

**Proposición.** Si  $\sigma > 1$ , las transformadas de Mellin

$$\begin{aligned} M_{f,\mu}(s) &= M(m_{y,\mu}(f) y^{-1}; s) \\ &= \frac{2}{\zeta(2s)} \int_0^{\infty} f(u) u^{2s-1} du \\ &= \frac{2}{\zeta(2s)} \varphi_f(s) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_{f,\lambda}(s) &= M(m_{y,\lambda}(f) y^{-1}; s) \\ &= 2 \frac{\zeta(4s)}{\zeta(2s)} \int_0^{\infty} f(u) u^{2s-1} du \\ &= 2 \frac{\zeta(4s)}{\zeta(2s)} \varphi_f(s). \end{aligned}$$

**Observación.** Vale la pena observar que el factor  $\varphi_f$  es independiente de la función aritmética con la que se definió la medida discreta. Entonces, al pertenecer  $\varphi_f$  al espacio de *Paley-Wiener*<sup>22</sup>, la integrabilidad de cada trans-

<sup>22</sup>Apéndice A

formada de Mellin  $M_{f,\mu}$  y  $M_{f,\lambda}$  sobre rectas verticales depende otra vez directamente del orden de  $\zeta$ .

*Demostración.* Sea  $u = y^{1/2}n$ . Entonces,

$$M_{f,\mu}(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} \cdot \varphi_f(s)$$

$$M_{f,\lambda}(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{2s}} \cdot \varphi_f(s)$$

en el semiplano  $\sigma > 1$  donde las series convergen absolutamente.  $\square$

**Observación.** Aprovechando la extensión analítica de la función  $\zeta$  al plano complejo, podemos ampliar esta factorización a los puntos de  $C$  donde  $\zeta(2s)$  sea distinto de cero. De manera que, ambas transformadas de Mellin son de nuevo funciones meromorfas.

**Proposición.** Las transformadas de Mellin  $M_{f,\mu}$  y  $M_{f,\lambda}$  convergen absolutamente en el semiplano  $\sigma > 1$  y uniformemente en los semiplanos  $\sigma + \epsilon > 1$  para todo  $\epsilon > 0$ .

*Demostración.* Análogamente a las medidas discretas  $m_y(f)$ , tanto las medidas  $m_{y,\mu}(f)$  como  $m_{y,\lambda}(f)$  están acotadas por la norma de  $f$ : Hay constantes  $A_1, A_2$  tales que

$$|m_{y,\mu}(f)| \leq A_1 \|f\|_{\infty}$$

y

$$|m_{y,\lambda}(f)| \leq A_2 \|f\|_{\infty}.$$

Entonces,

$$|M_{f,\mu}(s)| \leq A_1 \|f\|_{\infty} \int_0^{\infty} y^{\sigma-2} dy,$$

y

$$|M_{f,\lambda}(s)| \leq A_2 \|f\|_{\infty} \int_0^{\infty} y^{\sigma-2} dy.$$

Si  $f$  es una función con soporte compacto  $\text{spp}(f) \subset (0, b]$ :

$$|M_{f,\mu}(s)| \leq A_1 \|f\|_{\infty} \frac{b^{\sigma-1}}{\sigma-1};$$

$$|M_{f,\lambda}(s)| \leq A_2 \|f\|_{\infty} \frac{b^{\sigma-1}}{\sigma-1};$$

$M_{f,\mu}$  y  $M_{f,\lambda}$  convergen absolutamente para  $\sigma > 1$  y uniformemente para  $\sigma + \epsilon > 1$  con  $\epsilon > 0$ .  $\square$

**Corolario.** *Las transformadas de Mellin  $M_{f,\mu}$  y  $M_{f,\lambda}$  son funciones holomorfas en el semiplano  $\sigma > 1$ .*

En resumen, tenemos que las transformadas de Mellin de las medidas discretas definidas a partir de  $\mu$  y  $\lambda$  son analíticas en  $\sigma > 1$  y se factorizan como el producto de  $\varphi_f$  y las series de Dirichlet generadas por cada una de ellas.

Ambas series de Dirichlet comparten el denominador  $\zeta(2s)$  cuyo polo simple se encuentra en  $\sigma = 1/2$  y se convierte en un cero de las series porque los numeradores  $2\zeta(4 \cdot \frac{1}{2}) = 2\zeta(2) \neq 0$  y 2 no anulan la raíz. Los ceros triviales de  $\zeta(2s)$  son el conjunto  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  (pues los ceros triviales de  $\zeta(s)$  son el conjunto  $\{-2, -4, -6, \dots\}$ ) y son polos posibles de  $M_{f,\mu}$  y  $M_{f,\lambda}$ .

**Proposición.** *La transformada de Mellin  $M_{f,\lambda}$  es analítica en todos los puntos del semiplano  $\sigma < 0$  salvo en los números enteros negativos  $\{-1, -2, -3, \dots\}$ .*

*Demostración.* Los ceros posibles de la función  $\varphi_f$  se encuentran en los conjuntos  $\{0, -1, -2, \dots\}$  y  $\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$ ; pero,

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{k}{2}} \frac{\zeta(4s)}{2s+k} = \lim_{s \rightarrow -\frac{k}{2}} 4\zeta'(4s) \neq 0$$

para todo  $k$  impar; ya que si  $k$  es impar y  $s = -\frac{k}{2}$ ,  $4s = -2k$  es un número impar negativo para el que la derivada  $\zeta'$  tiene un valor distinto de cero.  $\square$

**Proposición.** *La transformada de Mellin  $M_{f,\mu}$  es analítica en todos los puntos  $s \in C$  tales que  $\sigma < 0$  salvo en el conjunto  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  y posiblemente en el conjunto  $\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$ .*

*Demostración.* En este caso, los posibles polos de  $\varphi_f$  no se anulan con el comportamiento del numerador y permanecen.  $\square$

**Teorema.** *La transformada de Mellin  $M_{f,\mu}$  es una función meromorfa.*

*Demostración.* La banda crítica de la función  $\zeta(2s)$  es  $\sigma \in (0, 1/2)$ . Dado que  $\varphi_f$  es entera y el numerador es la función constante 2,  $M_{f,\mu}$  puede ser redefinida como el producto  $2/\zeta(2s) \cdot \varphi_f(s)$  a partir de la extensión analítica de  $\zeta(2s)$  al plano complejo. De esta manera,  $M_{f,\mu}$  es una función analítica en todos los puntos del plano complejo salvo polos en los ceros no triviales de  $\zeta(2s)$  que se encuentran en la banda crítica, los números enteros negativos y posiblemente  $\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$ .  $\square$

**Teorema.** *La transformada de Mellin  $M_{f,\lambda}$  es una función meromorfa.*

*Demostración.* Además de los polos generados por los ceros triviales y no triviales de  $\zeta(2s)$ , el único otro polo de  $M_{f,\lambda}$  es el polo de  $\zeta(4s)$  que se encuentra en el punto  $s = 1/4$ .  $\square$

**Teorema.** *Si  $y \rightarrow 0$ ,*

$$m_{f,\mu}(f) \rightarrow 0$$

*para todo  $f \in C_c^r(\mathbb{R}^\bullet)$  con  $r \geq 2$  tal como  $y^{1/2} \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ . Es decir,*

$$m_{f,\mu}(f) = o\left(y^{1/2}\right)$$

*cuando  $y \rightarrow 0$ .*

*Demostración.* Las restricciones de

$$Z_{f,\mu}(s) = \frac{2}{\zeta(2s)}$$

a las rectas verticales  $Re(s) = \sigma$ ,

$$Z_{f,\mu}^\sigma(t) = \frac{2}{\zeta(2(\sigma + it))}$$

son integrables en  $\mathbb{R}$  para  $\sigma \geq 1/2$ :

$$\begin{aligned} Z_{f,\mu}^{1/2}(t) &= \frac{2}{\zeta(1 + 2it)} \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Como  $M_{f,\mu}$  no tiene ningún polo en el semiplano  $\sigma \geq 1/2$ , el *Teorema de Cauchy* garantiza que las integrales de  $M_{f,\mu}$  sobre los contornos  $\gamma$  considerados para  $M_f$  son cero; y la diferencia (al aplicar el *Teorema de Inversión de Mellin* para recuperar el valor de las medidas discretas en términos de integrales)

$$m_{y,\mu}(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_{f,\mu}\left(\frac{1}{2} + it\right) y^{1/2} y^{-it} dt = 0.$$

Por lo tanto, si  $y \rightarrow 0$ ,

$$m_{y,\mu}(f) = o\left(y^{1/2}\right).$$

$\square$

**Teorema.** Si  $y \rightarrow 0$ ,

$$m_{f,\lambda}(f) \rightarrow 0$$

para todo  $f \in C_c^r(\mathbf{R}^\bullet)$  con  $r \geq 2$  tal como  $y^{1/2} \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ . Es decir,

$$m_{f,\lambda}(f) = o\left(y^{1/2}\right)$$

cuando  $y \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Las restricciones de

$$Z_{f,\lambda}(s) = \frac{\zeta(4s)}{\zeta(2s)}$$

a las rectas verticales  $Re(s) = \sigma$ ,

$$Z_{f,\lambda}^\sigma(t) = \frac{\zeta(4(\sigma + it))}{\zeta(2(\sigma + it))}$$

son integrables en  $R$  para  $\sigma \geq 1/2$ :

$$\begin{aligned} Z_{f,\lambda}^{1/2}(t) &= \frac{\zeta(2 + it)}{\zeta(1 + 2it)} \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Entonces, se pueden recuperar también las medidas discretas  $m_{f,\lambda}(f)$  y obtenemos otra vez que

$$m_{y,\lambda}(f) = o\left(y^{1/2}\right)$$

cuando  $y \rightarrow 0$ . □

### 2.3.3 Diferencia entre $m_y(\mathbf{f})$ y $m_o(\mathbf{f})$ para funciones $\mathbf{f} \in C_c^o(\mathbf{R}^\bullet)$

Cuando las funciones  $f$  sobre las que se definen las medidas no son diferenciables sino solamente continuas, no puede garantizarse que  $\varphi_f$  pertenezca al espacio de Paley-Wiener y tampoco hay una equivalencia entre la convergencia de las medidas discretas  $m_y(f)$  y la *Hipótesis de Riemann*. Sin embargo, el orden de la diferencia  $m_y(f) - m_o(f)$  puede ser calculado utilizando el *Teorema de Mertens* a partir de las medidas discretas  $m_y(f)$  de funciones características  $\chi_{[a,b]}$ ; ya que toda función  $f \in C_c^o(\mathbf{R}^\bullet)$  es límite uniforme de funciones escalón, que son combinaciones de funciones características.

**Lema. Mertens** <sup>23</sup> Si  $x > 1$  y  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \log(x)).$$

<sup>23</sup>T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976, pág. 70.

**Teorema.** Si  $y \rightarrow 0$ ,

$$m_y(f) = m_o(f) + O\left(y^{1/2} \log(y)\right)$$

para toda  $f \in C_c^\circ(\mathbb{R}^\bullet)$ .

*Demostración.* Sea

$$f(u) = \chi_{[a,b]}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [a, b], \\ 0, & u \notin [a, b]. \end{cases}$$

Para cada  $y$  fija:  $a \leq ny^{1/2}$  y  $n \leq by^{1/2}$  cuando  $ay^{-1/2} \leq n$  y  $n \leq by^{-1/2}$ . Entonces, si  $y \rightarrow 0$ ,  $y^{-1/2} \rightarrow \infty$  y

$$\begin{aligned} m_y(\chi_{[a,b]}) &= \sum_{ay^{-1/2} \leq n \leq by^{-1/2}} y \varphi(n) \\ &= \frac{(b^2 - a^2)}{2\zeta(2)} + O\left(y^{1/2} \log(y)\right). \end{aligned}$$

Si reescribimos

$$\int_a^b u \chi_{[a,b]}(u) du = \int_o^\infty u f(u) du = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

tenemos que, cuando  $y \rightarrow 0$ :

$$m_y(\chi_{[a,b]}) = \frac{1}{\zeta(2)} \int_o^\infty u (\chi_{[a,b]})(u) du + O\left(y^{1/2} \log(y)\right).$$

Siendo que toda función  $f \in C_c^\circ(\mathbb{R}^\bullet)$  es el punto de convergencia en el espacio dual  $(C_c^\circ(\mathbb{R}^\bullet))^*$  de una sucesión de funciones escalón<sup>24</sup>, si  $y \rightarrow 0$ :

$$m_y(f) = \frac{1}{\zeta(2)} \int_o^\infty u f(u) du + O\left(y^{1/2} \log(y)\right).$$

□

## 2.4 Teorema B. Las medidas discretas $m_y(f)$ y la Hipótesis de Riemann

El *Teorema B* en el artículo *Medidas Discretas y la Hipótesis de Riemann* escrito por Alberto Verjovsky dice que la *Hipótesis de Riemann* es cierta si y sólo si el orden de convergencia de  $m_y(f)$  a  $m_o(y)$  es  $o(y^{3/4-\epsilon})$  para todo  $\epsilon > 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ . Esta equivalencia está inspirada en que para medidas<sup>25</sup>

$$m_y(f) = e^{-t} \int_o^\infty f(h_s^+(x)) ds$$

<sup>24</sup>Apéndice C.

<sup>25</sup>A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov*, IMCA, 1999, pág. 16.

definidas sobre funciones  $f$  con soporte compacto en el espacio modular  $M = H/PSL_2(Z)$ ,  $f \in C_c^\infty(M)$ , Don Zagier demostró que la que la *Hipótesis de Riemann* es cierta si y sólo si para todo  $f \in C_c^\infty(M)$ ,  $\epsilon > 0$  y medidas así definidas, si  $y \rightarrow 0$ , <sup>26</sup>:

$$m_y(f) = \bar{m}(f) + o\left(y^{3/4-\epsilon}\right);$$

donde  $\bar{m}$  es el residuo de la transformada de Mellin

$$G_f(s) = \int_0^\infty m_y(f) y^{s-2} dy$$

de estas medidas en  $s = 1$ ,  $x \in \gamma(t)$ ,  $\gamma(t)$  es una órbita periódica del flujo horocíclico positivo en  $M$  y  $t \in R$  <sup>27</sup>.

Es así que en ambas equivalencias encontramos un puente entre el tipo de crecimiento de los números primos en  $R$ , el de las medidas discretas de funciones con soporte compacto  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$  con pesos asignados tanto por la métrica hiperbólica  $1/y^2$  como por la función de Euler  $\varphi$ ; y de medidas de funciones  $f \in C_c^\infty(M)$  con soporte compacto en el espacio modular  $M$  que representa tanto a la Geometría Hiperbólica plana como a los flujos de Anosov <sup>28</sup>.

#### 2.4.1 Convergencia de las medidas discretas $m_y(\mathbf{f})$ de cumplirse la Hipótesis de Riemann

**Teorema.** *Si la Hipótesis de Riemann es cierta,*

$$m_y(f) \rightarrow m_o(f)$$

*cuando  $y \rightarrow 0$  del mismo modo que  $y^{3/4-\epsilon}$ , para todo  $\epsilon > 0$  y toda  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$ .*

*Demostración.* Si la *Hipótesis de Riemann* se verificara, para todo  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$ :

La transformada de Mellin  $M_f$  no tiene más que el polo simple  $s = 1$  en el semiplano abierto  $\sigma > 1/4$  porque los ceros de la función  $\zeta(2s)$  cuya parte real es positiva se encuentran todos en la recta  $\sigma = 1/4$ .

<sup>26</sup>A. Verjovsky, *Arithmetic, Geometry and Dynamics in the Unit Tangent Bundle of the Modular Orbifold*, Dynamical Systems. Proceedings of the 3rd International School of Dynamical Systems (1990), Santiago de Chile, (R. Bamon *et. al.* eds.) Longman Scientific and Tehcnical Pitman Res. Notes Math. Ser 285 (1993) 253 – 298, pág. 263, 295.

<sup>27</sup>Este resultado fue generalizado para otros grupos aritméticos  $\Gamma$  y espacios  $H^2/\Gamma$  por Peter Sarnak. A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov*, IMCA, 1999, pág. 17.

<sup>28</sup>*Un flujo geodésico en una variedad Riemanniana con curvatura seccional estrictamente negativa es un flujo de Anosov*, A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov*, IMCA, 1999, pág. 12.

La *Hipótesis de Lindelöf*<sup>29</sup> se cumple y  $M_f$  es integrable en cualquier recta vertical  $\sigma = 1/4 + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  distinto de  $3/4$ :

$$Z_f^{1/4+\epsilon}(t) = \frac{\zeta\left(-\frac{1}{2} + 2\epsilon + 2it\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + 2\epsilon + 2it\right)} = \frac{O(|t|^{1-2\epsilon})}{O(\mathbf{1})};$$

y dado que  $f$  es diferenciable,  $M_f$  pertenece al espacio de Paley-Wiener y hay un número natural  $N \geq 1$  tal que:

$$\Theta_f^{1/4+\epsilon}(t) = \frac{O(|t|^{1-2\epsilon}) O(|t|^{-N})}{O(\mathbf{1})} = O(|t|^{-2\epsilon})$$

para todo  $\epsilon > 0$ .

Al repetir la integración de  $M_f$  pero sobre el contorno con extremo en  $\sigma = 1/4 + \epsilon$ , en lugar del valor  $\sigma = 1/2$  considerado en el Teorema A para funciones  $f \in C_c^\infty$ , la diferencia

$$m_y(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{1/4+\epsilon-i\infty}^{1/4+\epsilon+i\infty} M_f\left(\frac{1}{4} + \epsilon + it\right) y^{3/4-\epsilon} y^{-it} dt = m_o(f).$$

Por lo tanto, si  $y \rightarrow 0$ :

$$m_y(f) = m_o(f) + o\left(y^{3/4-\epsilon}\right)$$

para todo  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\bullet)$  y  $\epsilon > 0$ . □

### 2.4.2 Ejemplo. Convergencia de las medidas discretas para $\mu(\mathbf{n})$ y $\lambda(\mathbf{n})$

**Teorema.** Si la Hipótesis de Riemann se cumple y  $y \rightarrow 0$ ,

$$m_{y,\mu}(f) = o\left(y^{3/4-\epsilon}\right)$$

y

$$m_{y,\lambda}(f) = o\left(y^{3/4-\epsilon}\right)$$

para todo  $\epsilon > 0$  y  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\bullet)$ .

*Demostración.* Si la Hipótesis de Riemann se cumple, los ceros de la función  $\zeta(2s)$  del semiplano  $\sigma > 0$  se encuentran todos en la recta  $\sigma = 1/4$ ; las transformadas de Mellin  $M_{f,\mu}$  y  $M_{f,\lambda}$  no tienen polos en el semiplano  $\sigma > 1/4$ ; y ambas son integrables en las rectas verticales  $\sigma = 1/4 + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ :

---

<sup>29</sup>Sección 1.4.

$$\zeta\left(4\left(\frac{1}{4} + \epsilon + it\right)\right) = \zeta(1 + 4\epsilon + 4it) = O(1).$$

Al integrar sobre el nuevo contorno con extremo en  $\sigma = 1/4 + \epsilon$  y aplicar el *Teorema de la Transformada Inversa de Mellin*:

$$m_{y,\mu}(f) = o\left(y^{3/4-\epsilon}\right)$$

y

$$m_{y,\lambda}(f) = o\left(y^{3/4-\epsilon}\right)$$

para todo  $\epsilon > 0$  y  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$ .  $\square$

### 2.4.3 Raíces de $\zeta(2s)$ , medidas $m_y(\mathbf{f})$ y la Hipótesis de Riemann

**Teorema.** Si para toda  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$  y  $\epsilon > 0$  cuando  $y \rightarrow 0$

$$m_y(f) = m_o(f) + o\left(y^{3/4-\epsilon}\right),$$

la Hipótesis de Riemann se cumple.

*Demostración.* Si  $m_y(f) = m_o(f) + o(y^{3/4-\epsilon})$  para todo  $\epsilon > 0$  y  $f \in C_c^\infty(R^\bullet)$ , la transformada de Mellin

$$M_f(s) = 2 \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \varphi_f(s)$$

es holomorfa en el plano  $\sigma > 1/4$  salvo en  $s = 1$ . Si escogemos  $f$  tal que  $\varphi_f(s) \neq 0$  cada vez que  $\zeta(2s) = 0$ , los polos de  $M_f$  en el semiplano  $\sigma > 0$  son exactamente los de la función  $1/\zeta(2s)$  y  $s = 1$ .

Siendo que no los hay en el semiplano  $\sigma > 1/4$ , los polos de  $1/\zeta(2s)$  con parte real positiva se restringen entonces a la banda  $\sigma \in (0, 1/4)$ ; pero como consecuencia de la *Ecuación Funcional* de la función  $\zeta$ , si la función es distinta de cero de un lado de la recta vertical  $\sigma = 1/4$ , también lo es del otro lado. Por lo tanto, si  $1/\zeta(2s)$  no tiene polos en  $\sigma \in (1/4, 1/2)$  tampoco los tiene en  $\sigma \in (0, 1/4)$ , los ceros de  $\zeta(2s)$  pertenecen a  $\sigma = 1/4$  y la *Hipótesis de Riemann* se cumple.  $\square$

**2.4.4 Ejemplo. Raíces de  $\zeta(2s)$ , medidas para  $\mu(\mathbf{n})$ ,  $\lambda(\mathbf{n})$  y la Hipótesis de Riemann**

Como corolario del teorema anterior tenemos que:

**Teorema.** Si para toda  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\bullet)$  y  $\epsilon > 0$  cuando  $y \rightarrow 0$ :

$$m_{y,\mu}(f) = o\left(y^{3/4-\epsilon}\right)$$

y

$$m_{y,\lambda}(f) = o\left(y^{3/4-\epsilon}\right),$$

la Hipótesis de Riemann se cumple.



## Apéndice A

### Transformada de Mellin de una función con soporte compacto

Knowing the Fourier transform we can recover  
the function using the inversion formula.

---

*Elementary Classical Analysis*

J. E. MARSDEN

Una manera de obtener expresiones para valores de una función en términos de integrales complejas es hacer sus *transformadas de Fourier* y luego invertirlas, cuando se puede. Este método surgió de describir el movimiento ondulatorio de una cuerda en términos de series de senos y cosenos; y fue aplicado por Riemann a lo largo del artículo *Sobre el número de primos menores que una magnitud dada* para redefinir la función Zeta como una función compleja y trabajar en el cálculo de una aproximación  $Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log(t)}$  al número de primos menores o iguales que  $x$ ,  $\pi(x)$ .

La *transformada de Mellin* es una variación de la de *Fourier* para funciones definidas en el grupo multiplicativo de los números reales positivos  $R^\bullet = (0, \infty)$ . La recuperación del valor de la función en términos de integrales complejas permite aplicar resultados como el *Teorema de Cauchy* y *Teorema del Residuo* para calcularlas. Esto da pie a un método que se usa de manera regular: Obtener la transformada de Mellin, invertirla y calcular el valor de la función original.

Las condiciones para recuperar la función original son diversas. Varias son utilizadas a lo largo del texto y me ha sido necesario presentarlas aquí juntas, siendo que son parte de un tema independiente que pertenece al *Análisis de Fourier* pero que es también el método clásico, el riel sobre el que se desliza de forma heurística la *Teoría de Números Analítica*.

#### A.1 Transformada de Mellin

El valor de las transformadas de Mellin convergentes son cantidades que dependen de una variable compleja  $s$  en lugar de la variable real original  $y \in R^\bullet$ . Si la función original  $\phi$  es continua y diferente de cero sólo en una unión finita de

intervalos cerrados en  $R^\bullet$ , la transformada de Mellin es *entera*<sup>1</sup>, como función de la variable compleja  $s$ .

**Definición.** Para un número complejo  $s \in C$ , la *transformada de Mellin* de la función  $\phi: R^\bullet \rightarrow R$ ,  $R^\bullet = (0, \infty)$ , es:

$$M(\phi; s) = \int_0^\infty \phi(y) y^s y^{-1} dy.$$

**Proposición.** La transformada de Mellin de una función continua  $\phi: R^\bullet \rightarrow R$  es una función compleja bien definida en una banda vertical abierta

$$B_{r,R} = \{s = \sigma + it \in C \mid -r < \sigma < -R\},$$

$$\begin{aligned} M_\phi: B_{r,R} &\longrightarrow C, \\ s &\longmapsto M(\phi; s), \end{aligned}$$

cuando hay valores  $r, R, M_r, M_R, \delta_r$  y  $\delta_R$  tales que:

$$-r < \sigma < -R;$$

$$\phi(y) \leq M_r y^r, \quad \text{si } |y| < \delta_r; \quad y$$

$$\phi(y) \leq M_R y^R, \quad \text{si } |y| > \delta_R.$$

Es decir,  $M(\phi; s) < \infty$  si:

$\phi$  es continua en  $R^\bullet$ ;

$$\phi(y) = O(y^r) \quad \text{cuando } y \rightarrow 0;$$

$$\phi(y) = O(y^R) \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty; \quad y$$

la relación entre los exponentes  $r, R$  y  $s$  es que  $-r < \sigma < -R$ .

*Demostración.* Podemos separar la integral en tres partes:

$$\begin{aligned} M(\phi; s) &= \left| \int_0^\infty \phi(y) y^{s-1} dy \right| \leq \left| \int_0^{\delta_r} \phi(y) y^{s-1} dy \right| + \left| \int_{\delta_r}^{\delta_R} \phi(y) y^{s-1} dy \right| + \\ &\left| \int_{\delta_R}^\infty \phi(y) y^{s-1} dy \right|. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Analítica en todo el plano complejo  $C$ .

Si  $\sigma > r$ ,  $\sigma + r > 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} y^{r+\sigma} = 0$  y la primera integral

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\delta_r} \phi(y) y^{s-1} dy \right| &\leq \int_0^{\delta_r} |\phi(y)| y^{\sigma-1} dy \\ &\leq M_r \int_0^{\delta_r} y^{r+\sigma-1} dy \\ &= \frac{M_r}{r+\sigma} \delta_r^{r+\sigma}. \end{aligned}$$

De la misma manera, si  $\sigma < -R$ ,  $\sigma + R < 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} y^{R+\sigma} = 0$  y la tercera integral

$$\left| \int_{\delta_R}^{\infty} \phi(y) y^{s-1} dy \right| \leq -\frac{M_R}{R+\sigma} \delta_R^{R+\sigma}.$$

Por último, si  $\phi$  es continua en  $R^\bullet$ , hay un valor  $M = \max\{|\phi(y)| \mid y \in [\delta_r, \delta_R]\}$  y

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_r}^{\delta_R} \phi(y) y^{s-1} dy \right| &\leq M \int_{\delta_r}^{\delta_R} y^{\sigma-1} dy \\ &= \frac{M}{\sigma} (\delta_R^\sigma - \delta_r^\sigma). \end{aligned}$$

□

**Corolario.** *El mismo resultado es cierto para funciones  $\phi$  que estén acotadas en el intervalo intermedio  $[\delta_r, \delta_R]$  aunque no sean continuas.*

**Corolario.** *Si  $\phi \in C_c^0(R^\bullet)$  es una función continua con soporte compacto,  $M_\phi$  está bien definida en todo el plano complejo,*

$$\begin{aligned} M_\phi: C &\longrightarrow C, \\ s &\longmapsto M(\phi; s). \end{aligned}$$

*Demostración.* El soporte de una función continua  $\phi: R^\bullet \rightarrow R$  es el menor de todos los conjuntos cerrados en  $R^\bullet$  que contienen al conjunto

$$\{y \in R^\bullet \mid \phi(y) \neq 0\}.$$

Los conjuntos compactos en  $R^\bullet$  son cerrados y acotados; uniones finitas de intervalos cerrados contenidos en  $R^\bullet$ . Ésto es,

$$spp(\phi) = \sqcup_{j=1}^k [a_j, b_j]$$

con  $0 < a_j \leq b_j < \infty$ .

Entonces,  $\phi$  está acotada en cada intervalo  $[a_j, b_j]$  y

$$M_\phi(s) = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \phi(y) y^{s-1} dy < \infty.$$

□

**Teorema.** Si  $\phi \in C_c^\circ(\mathbb{R}^\bullet)$  es una función continua con soporte compacto,  $M_\phi$  es entera.

*Demostración.* Sean  $s \in C$  y  $\text{spp}(\phi) = \sqcup_{j=1}^k [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^\bullet$ . Entonces,

$$M_\phi(s) = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \phi(y) y^{s-1} dy.$$

Si  $h \in C$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M_\phi(s+h) - M_\phi(s)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \phi(y) \left( \frac{y^{s+h} - y^s}{h} \right) y^{-1} dy \\ &= \int_0^\infty \phi(y) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^{s+h} - y^s}{h} \right) y^{-1} dy \\ &= \int_0^\infty \phi(y) \left( \frac{\partial y^s}{\partial s} \right) y^{-1} dy. \\ &= \int_0^\infty \phi(y) (\log(y) y^s) y^{-1} dy. \end{aligned}$$

Integrando por partes para  $u(y) = \log(y)$ ,  $v(y) = M_\phi(s)\mathbf{1}(y)$ ,  $u'(y) = 1/y$ ,  $v'(y) = \phi(y)y^{s-1}$ :

$$\begin{aligned} \int_{a_j}^{b_j} (uv)' dy &= M_\phi(s) (\log(b_j) - \log(a_j)) \\ &= \int_{a_j}^{b_j} uv' dy - \int_{a_j}^{b_j} vu' dy \\ &= \int_{a_j}^{b_j} \phi(y) \log(y) y^{s-1} dy - M_\phi(s) \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{y} dy. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\int_{a_j}^{b_j} \phi(y) \log(y) y^{s-1} dy < \infty$$

y

$$\frac{\partial M_\phi(s)}{\partial s} = 2 \left( \sum_{j=1}^k \log(b_j) - \log(a_j) \right) M_\phi(s).$$

□

## A.2 Transformada Inversa de Mellin

Dada una función, decir cuándo puede recuperarse a través de la *Transformada Inversa de Fourier* es un objeto de estudio por sí mismo. Muchas de las funciones que aparecen en este marco surgen de problemas aplicados y no siempre se sabe de antemano si va a ser posible trabajar con ellas de esta manera. Como el punto de partida varía, hay resultados muy diversos sobre las condiciones en las que la *Transformada Inversa de Fourier* reestablece la función original. Dos de ellas son: Ser funciones de *decaimiento rápido* y *pertenecer al espacio de Paley-Wiener*. Las transformadas de Mellin restringidas a una recta vertical son transformadas de Fourier; y su *Transformada Inversa de Fourier* es la *Transformada Inversa de Mellin* de la función original. .

### A.2.1 Transformada de Mellin en rectas verticales

**Definición.** Sean  $f: [a, b] \rightarrow R$  con  $R = (R, +)$  el grupo aditivo de números reales. Entonces, el *coeficiente de la serie de Fourier* de  $f$  para el índice  $k \in Z$  es:

$$c(k) = \int_a^b f(x) e^{-2\pi i k x} dx;$$

y la *serie de Fourier* de  $f$  en el punto  $x_0$  es:

$$\sum_{k \in Z} c(k) e^{2\pi i k x_0}.$$

**Observación.** Si cada integral  $c(k)$  converge, *los coeficientes de Fourier* son las imágenes de una función discreta  $c: Z \rightarrow R$ . Si en cambio, la función  $c$  no depende de  $k$  sino de una variable continua  $t \in R$ , el coeficiente se convierte en la *Transformada de Fourier* y la serie en una integral, que bajo ciertas condiciones puede coincidir con la función original.

**Definición.** La *Transformada de Fourier* de una función  $f: R \rightarrow R$  en el punto  $t$  es la integral

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2itx} dx.$$

**Proposición.** La transformada de Mellin  $M(\phi; s)$  restringida a una recta horizontal  $Re(s) = \sigma$  es una transformada de Fourier.

*Demostración.* Sea  $x = \log(y)$ . Entonces,  $x'(y) = y^{-1}$  y

$$\begin{aligned} M(\phi; \sigma + it) &= M(\phi; t) \\ &= \int_0^\infty \phi(y) y^{\sigma+it} y^{-1} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \phi(e^x) e^{(\sigma+it)x} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty (\phi(e^x) e^{\sigma x}) e^{itx} dx \\ &= \hat{f}_\sigma(-t). \end{aligned}$$

Es decir, para un  $\sigma$  fijo y  $x = \log(y)$ ,  $M(\phi; \sigma + it)$  es la transformada de Fourier del producto

$$\begin{aligned} f_\sigma: R &\longrightarrow R, \\ x &\longmapsto f_\sigma(x) = \phi(e^x) e^{\sigma x}, \end{aligned}$$

en  $-t$ :  $\hat{f}_\sigma(-t)$ . □

**Observación.** El cambio de variable  $x = \log(y)$  es un isomorfismo entre el grupo aditivo  $(R, +)$  y el grupo multiplicativo  $R^\bullet$  porque tanto las operaciones como los neutros son correspondientes:

$$x + \tilde{x} = \log(y) + \log(\tilde{y}) = \log(y\tilde{y}); \text{ y } 0 = \log(1).$$

### A.2.2 Transformada Inversa de Fourier

**Definición.** Una función analítica  $f: R \rightarrow R$ ,  $f \in C^\infty(R)$ , se llama *decaimiento rápido* si hay un  $m \in N$  tal que

$$\sup_{x \in R} \left\{ |x^m f^{(n)}(x)| \right\} < \infty$$

para todo  $n \in N$ .

**Observación.** En otras palabras,  $f$  es de decaimiento rápido si tanto  $f$  como todas sus derivadas decaen por lo menos como  $1/x^m$  conforme  $x \rightarrow \infty$ :

$$f(x) = O(x^{-m}).$$

**Definición.** La *Transformada Inversa de Fourier* de una función  $\hat{f}$  es la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

**Teorema.** (*Teorema Integral de Fourier para funciones de decaimiento rápido*)<sup>2</sup> Si  $f$  es de decaimiento rápido,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

En general, las diferentes versiones de este teorema parten de la integrabilidad de la *Transformada de Fourier* en  $\mathbb{R}$ :

**Teorema.** (*Teorema Integral de Fourier para funciones integrables*)

<sup>3</sup> Si  $f \in L_1(\mathbb{R})$ ; es decir, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

entonces,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Varias demostraciones del *Teorema de la Transformada Inversa de Fourier para funciones integrables* son consecuencias del siguiente resultado<sup>4</sup>:

**Teorema.** (*Fórmula de la Suma de Poisson*) Sea  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $f(x) = O((1+x^2)^{-N})$  para todo entero positivo  $N$ ; ésto es,

$$|f(x)(1+x^2)^N| \leq K$$

para algún número constante  $K$  y para todo  $N$ . Entonces,<sup>5</sup>

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}$ . La suma

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

<sup>2</sup>K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980, pág. 146.

<sup>3</sup>M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, Cambridge University Press, 1997, pág. 268.

<sup>4</sup>S. J. Patterson, *An Introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 14), Cambridge University Press, 1988, Apéndice; J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, USA, 1974.

<sup>5</sup>Esta prueba se encuentra, como parte de la demostración de la Ecuación Funcional, en el artículo: D. Bump, *The Zeta Function* (lecture notes).

converge uniforme y absolutamente en regiones  $1 > |x| > \delta$  ó  $\delta < |x| < 1$  para todo  $\delta > 0$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{(1+\delta^2)^{-N}} \right|;$$

y es una función periódica en  $R$  de período 1:

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n+1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x).$$

La *serie de Fourier* de una función periódica y convergente es una expresión de la función misma <sup>6</sup>. De manera que, *serie de Fourier* de  $F$ :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi imx} = F(x),$$

con coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 F(x) e^{-2\pi imx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi imx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi im(x+n)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi imx} dx \\ &= \hat{f}(m). \end{aligned}$$

Entonces, para todo  $x$ :

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{2\pi imx}.$$

En particular, si  $x = 0$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

□

<sup>6</sup>J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, USA, 1974.

### A.3 El espacio de Paley-Wiener

I had been convinced of the importance  
Of the Fourier-Mellin transform as a tool in Analysis.

---

*Fourier Transforms in the Complex Domain*  
NORBERT WIENER

Norbert Wiener (1894–1964) y su amigo y colaborador Raymond Paley (1907–1933) hicieron, entre otras cosas, clasificaciones de las transformadas de Fourier y de Mellin que podían invertirse con indicadores como cotas o formas específicas. Si la función original  $\phi$  es, no sólo continua sino analítica, con soporte compacto,  $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\bullet)$ , en  $\mathbf{R}^\bullet$ ,  $M_\phi(\sigma + it)$  es un elemento del espacio de *Paley-Wiener*; esto significa que es invertible y también que está acotada de manera especial. Este resultado es utilizado en el artículo *Medidas Discretas y la Hipótesis de Riemann* escrito por Alberto Verjovsky para trabajar con las transformadas de Mellin de las medidas discretas  $m_y(f)$ .

**Definición.** El espacio de *Paley-Wiener* consiste de funciones enteras  $f(\sigma + it)$  para las cuales dado un número entero positivo  $N > 0$ , hay un  $C_N > 0$  tal que

$$f(\sigma + it) = \frac{C_N^{|\sigma|}}{(1 + |t|)^N}$$

Pertenecer al espacio de *Paley-Wiener* significa cumplir una condición particular de integrabilidad sobre rectas verticales  $Re(s) = \sigma$  que automáticamente garantiza la recuperación de la función original a través de la *Transformada Inversa* de su *Transformada de Fourier*. Como consecuencia de un teorema anterior sobre convergencia de transformadas de Mellin tenemos el siguiente resultado:

**Corolario.** *La transformada de Mellin de una función continua con soporte compacto es una función entera.*

**Proposición.** *Si  $\phi \in C_c^\circ(\mathbf{R}^\bullet)$  es una función continua con soporte compacto en  $\mathbf{R}^\bullet$  y  $s = \sigma + it$ , dado un número entero positivo  $N > 0$ , hay dos números  $K > 0$  y  $b > 0$  tales que*

$$|M_\phi(s)| \leq \frac{K b^{\sigma+N}}{|s(s+1) \cdots (s+(N-1))|}$$

*Demostración.* Integrando por partes para  $g'(y) = y^{s-1}$ ,  $\int_o^\infty \phi g' = M_\phi(s)$ ,

$$\int_o^\infty \phi(y) y^{s-1} dy = -\frac{1}{s} \int_o^\infty \phi'(y) y^s dy$$

y

$$\int_o^\infty \phi'(y) y^s dy = -\frac{1}{s+1} \int_o^\infty \phi''(y) y^s dy.$$

Al repetir el proceso  $N$  veces, obtenemos una expresión de  $M_\phi(s)$  en términos de la derivada  $\phi^{(N)}$ . Siendo también  $\phi^{(N)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\bullet)$  una función continua, derivable y con un soporte compacto  $spp(\phi^N) \subset spp(\phi)$ :

$$M_\phi(s) = \frac{(-1)^N}{s(s+1) \cdots (s+N-1)} \int_o^\infty \phi^{(N)}(y) y^{s+N-1} dy;$$

y hay un número  $K > 0$ ,

$$K = \max \left\{ |\phi^{(N)}(y)| \mid y \in spp(\phi) \right\},$$

tal que

$$|M_\phi(s)| \leq \frac{K}{|s(s+1) \cdots (s+N-1)|} \int_{spp(\phi)} y^{\sigma+N-1} dy.$$

Sea  $b = \max \{ y^{\sigma+N-1} \mid y \in spp(\phi) \}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |M_\phi(s)| &\leq \frac{K b^{\sigma+N-1}}{|s(s+1) \cdots (s+N-1)|} \int_o^b dy \\ &= \frac{K b^{\sigma+N}}{|s(s+1) \cdots (s+N-1)|}. \end{aligned}$$

□

**Teorema.** (*Teorema de Paley-Wiener*)<sup>7</sup> El conjunto de transformadas de Mellin de funciones analíticas con soporte compacto es el espacio de Paley-Wiener.

<sup>7</sup>S. Lang, *SL<sub>2</sub>(R)*, Springer-Verlag, New York, 1985, pág. 75; K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980, pág. 161; W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973, pág. 181.

## Apéndice B

### Conjuntos medibles y medidas

The weight of the world  
Is love.

---

*Song*  
ALLEN GINSBERG

Las funciones de probabilidad, las distribuciones, sus generalizaciones y sus dominios son los objetos representados en los espacios duales a los que pertenecen las medidas discretas  $m_y(f)$ ; y están caracterizadas por propiedades similares a las encontradas al medir áreas, volúmenes, longitudes de arco y contar puntos. Es por eso que incluyo aquí las definiciones mínimas suficientes para enfocar a las medidas discretas  $m_y(f)$  a partir de las propiedades que cumplen como medidas en general.

Dados un espacio muestra  $S$  y una variable aleatoria  $\chi: S \rightarrow R^n$ , la función de probabilidad dependerá de las magnitudes asociadas a los eventos  $E \subset S$ , que pueden ser desde la cardinalidad  $|\chi(E)|$ , si  $S$  es discreto y finito; hasta la longitud de un arco, el área o el volúmen de  $\chi(E)$ , si  $\chi(S)$  es cerrado y acotado en  $R^n$ . La familia de subconjuntos  $E$  de un universo total donde  $E$  representa un evento se formaliza a través del concepto de  $\sigma$ -álgebra. Una función con dominio en la  $\sigma$ -álgebra y contradominio en los números reales positivos; es decir, una función que a cada evento le asocia un *peso* determinado, es llamada *medida*.

### B.1 Definiciones y ejemplos

**Definición.** Una  $\sigma$ -álgebra es una familia  $\sigma$  de subconjuntos de  $S$  tal que:

i)  $\emptyset, S \in \sigma$ ;

ii)  $E \in \sigma$  implica que  $S - E \in \sigma$ ; y

iii) las uniones numerables de subconjuntos  $A_j \in \sigma$ ,  $\cup_{j=0}^{\infty} A_j \in \sigma$ .

**Definición.** Un elemento  $E$  de una  $\sigma$ -álgebra es un *conjunto medible*.

### Ejemplos

1. Dado cualquier espacio  $S$ , el conjunto potencia  $2^S$ , formado por todos los subconjuntos  $E \subset S$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $S$ . Vale la pena notar que si  $S$  es infinito, no basta considerar los subconjuntos finitos de  $S$  puesto que sus complementos no estarían en  $\sigma$ .

Si  $S = Z^2 = \{(m, n) \in R^2 \mid m, n \in Z\}$  y  $2^S$  es la  $\sigma$ -álgebra considerada, la familia de conjuntos

$$D_r = \{(x, y) \in R^2 \mid \|(x, y)\| \leq r\} \cap Z^2$$

son una cadena creciente respecto al parámetro  $r$  formada por elementos de  $\sigma$  tales que  $S = \lim_{r \rightarrow \infty} D_r$ .

2. Sean  $S = R$ ,  $a, b \in R$  y  $\sigma$  la familia de conjuntos generados por los intervalos  $(a, b) \subset R$  a través de la función complemento

$$\begin{aligned} C: 2^S &\longrightarrow 2^S, \\ E &\longmapsto C(E) = S - E; \end{aligned}$$

y la operación unión

$$\begin{aligned} \cup: 2^S \times 2^S &\longrightarrow 2^S, \\ (E, F) &\longmapsto E \cup F; \end{aligned}$$

Ésta  $\sigma$ -álgebra es llamada *álgebra de Borel*. Aquí, la familia formada por los intervalos  $(-\infty, t)$  es una cadena creciente respecto al parámetro  $t$  de elementos de  $\sigma$  tales que  $S = \lim_{t \rightarrow \infty} (-\infty, t)$ .

3. Si  $S$  es un espacio con una distancia

$$\begin{aligned} d: S \times S &\longrightarrow R^+, \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y); \end{aligned}$$

y  $\sigma$  es la familia generada por las vecindades

$$B_\epsilon(x) = \{y \in S \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

con la función complemento y la operación unión,  $\sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $S$ .

4. En general, si  $\tau$  es una topología del espacio  $S$ ,

$$v = \{S - U : U \in \tau\}$$

la familia de conjuntos cerrados en  $S$ ;

$$\nu = \{\cup_\alpha C_\alpha : C_\alpha \in v\}$$

las uniones numerables de conjuntos cerrados; y

$$\eta = \{ \cap_{\alpha} U_{\alpha} : U_{\alpha} \in \tau \}$$

las intersecciones numerables de abiertos  $U_{\alpha} \in \tau$ . Entonces,

$$\sigma = (\tau \cup \nu \cup \nu \cup \eta)$$

es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\tau$ .

*Demostración.* La familia  $\sigma \supset \tau$  es una  $\sigma$ -álgebra si: todos los complementos de conjuntos abiertos  $C = S - U \in \nu$  pertenecen a la  $\sigma$ -álgebra, esto es, si  $\nu \subset \sigma$ ; las uniones numerables de conjuntos cerrados  $\cup_{\alpha} C_{\alpha} \in \sigma$ ,  $\nu \subset \sigma$ ; y por último, si sus complementos  $(S - \cup_{\alpha} C_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (S - C_{\alpha}) \in \sigma$ ,  $\eta \subset \sigma$ . Entonces,  $\sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a la topología  $\tau$  si y sólo si  $\sigma \supset (\tau \cup \nu \cup \nu \cup \eta)$ ; y por lo tanto  $\sigma = (\tau \cup \nu \cup \nu \cup \eta)$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\tau$ .  $\square$

**Definición.** Un espacio  $S$  con una  $\sigma$ -álgebra en él es un *espacio de medida*. Una *medida*  $\mu$  es una función  $\mu: \sigma \rightarrow R^* = R \cup \{\pm\infty\}$  tal que:

i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .

ii)  $\mu(E) \geq 0$  para todo  $E \in \sigma$ .

iii) Si  $(A_j) \subset \sigma$  es una colección numerable de subconjuntos disjuntos,  $\mu$  es *aditiva*:

$$\mu \left( \cup_{j=0}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j).$$

**Ejemplo. Los Números Racionales**

**Proposición.** Sea  $R$  el conjunto de números reales;  $\sigma$  el álgebra de Borel, que coincide con la topología usual en  $R$ ; y  $\mu: \sigma \rightarrow R^*$  tal que la medida de un intervalo  $I \subset R$  es su longitud. Entonces,  $\mu(Q) = 0$ .

**Observación.** A esta medida en  $R$  se le llama *medida de Lebesgue*.

*Demostración.* El conjunto  $Q$  es numerable. Entonces, hay una sucesión  $(p_n)$  tal que  $(p_n) = Q$ . Para cada número racional  $p_n$  hay una colección estrictamente decreciente de intervalos

$$I_{jn} = \left( p_n - \frac{1}{2j^2}, p_n + \frac{1}{2j^2} \right).$$

cuya longitud  $\mu(I_{jn}) = 1/j^2$ .

Sea  $I_j = \cup_{n=1}^{\infty} I_{jn}$ . Entonces, para cada  $j \in N$ ,  $Q \subset I_j$  y la medida total  $\mu(I_j)$  es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Si  $m, n \in N$ ,  $m > n > 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\ &< \frac{m-n}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

La propiedad arquimediana de los números reales garantiza que dada  $\epsilon > 0$ , hay un  $n_o \in N$  tal que  $1/n_o < \epsilon$ . Si  $m - n = k$ ,  $N = kn_o$ , y  $n > N$ :

$$\begin{aligned} n+1 > N, \quad (n+1)^2 > kn_o, \\ \frac{(n+1)^2}{k} > n_o, \quad \frac{(n+1)^2}{m-n} > n_o \quad \text{y} \\ \frac{m-n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n_o} < \epsilon. \end{aligned}$$

Es verificable mediante inducción que la sucesión  $(I_j)$  también es estrictamente decreciente. Entonces,  $\mu(I_{j+1}) < \mu(I_j)$  y

$$\mu(Q) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(I_j) = 0.$$

□

**Definición.** Si los elementos de un conjunto  $S$  cumplen una propiedad  $P$  salvo en un subconjunto  $E \subset S$  tal que  $\mu(E) = 0$  para una medida  $\mu$  en  $S$ , se dice que la propiedad  $P$  sucede  *$\mu$ -casi en todas partes*.

## B.2 Medidas discretas

**Definición.** Sea  $\sigma(R)$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $R$ . Una medida  $\mu: \sigma(R) \rightarrow R$  tal que  $\mu \neq 0$  sólo subconjuntos numerables  $(a_n) \subset E$ ,  $E \in \sigma$ . Es decir,  $\mu$  es una medida discreta si y sólo si

$$\begin{aligned} \mu: \sigma(R) &\longrightarrow R, \\ E &\longmapsto \sum_n \mu(a_n), \end{aligned}$$

para un conjunto numerable  $(a_n) \subset E$ ; o bien, si dado un intervalo generador de  $\sigma(R)$ ,  $[a, b) \subset R$ ,

$$\mu[a, b) = \sum_n \mu(a_n)$$

para un conjunto numerable  $(a_n) \subset [a, b]$ .

**Observación.** Las distribuciones de medidas discretas permanecen constantes en los intervalos  $[a_j, a_{j+1})$ .

### Ejemplo. Medidas de Dirac

Sea  $(a_n) \subset R$  un conjunto numerable; y  $(\delta_n)$  la familia de medidas

$$\begin{aligned} \delta_n: \sigma(R) &\longrightarrow R, \\ E &\longmapsto \begin{cases} \mu(E) = 0, & a_n \notin E, \\ \mu(E) = 1, & a_n \in E. \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposición.** Toda medida discreta  $\mu: \sigma(R) \rightarrow R$  es una combinación lineal de medidas de Dirac:

$$\mu(E) = \sum_n a_n \delta_n.$$

*Demostración.* Sea  $A = \max\{E \in \sigma(R) \mid \mu(E) \neq 0\}$ . Entonces,  $\mu(A) = \sum_n a_n$  para algún conjunto numerable  $(a_n) \subset R$  que corresponde a una familia de deltas de Dirac  $(\delta_n)$  tales que:

$$\mu(A) = \sum_n a_n \delta_n.$$

Si  $E \in \sigma(R)$  y  $\mu(E) \neq 0$ ,  $\mu(E) = \mu(A) - \mu(A - E)$  y

$$\mu(E) = \sum_j a_j \delta_j$$

para el subconjunto  $(a_j) \subset (a_n)$  tal que  $(a_j) = E \cap (a_n)$ . □

**Corolario.** Es suficiente definir una medida discreta en los intervalos de la forma  $[a, b)$  para conocer el valor que tiene en otros elementos de  $\sigma(R)$ .

### B.3 Distribuciones de una medida

**Definición.** Sea  $S$  un espacio de medida tal que dada una variable aleatoria  $\chi: S \rightarrow R$ , la familia creciente de subconjuntos

$$E_t = \{s \in S \mid \chi(s) \leq t\}$$

pertenecen a la  $\sigma$ -álgebra definida en  $S$ . Si  $\mu: \sigma \rightarrow R^+$  es una medida en  $S$ , una distribución de  $\mu$  es una función

$$\begin{aligned} F_\mu: R &\longrightarrow R^+, \\ t &\longmapsto \mu(E_t); \end{aligned}$$

donde pueden verse acumular los valores de  $\mu$  respecto al parámetro  $t \in R$ .

**Observación.** Si  $F_\mu$  es una distribución de probabilidad,  $F_\mu$  es creciente.

#### Ejemplo. Distribución de los Números Primos en $N$

Sea  $\pi$  la función

$$\begin{aligned} \pi: N &\longrightarrow N, \\ n &\longmapsto \pi(n) = |\{p \leq n \mid p \text{ es primo}\}|; \end{aligned}$$

$S = N$  es espacio muestra donde el *estado* que va a observarse en sus elementos es *ser o no un número primo* y  $\sigma = 2^N$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mu: \sigma &\longrightarrow R^+ \\ E &\longmapsto \begin{cases} \mu(E) = \infty, & |E| = \infty, \\ \mu(E) = \frac{\pi(\max\{n \in E\})}{|E|}, & |E| < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

es una *medida de los números primos* en  $N$ , si  $E$  es finito.

**Observación.** Si  $E = \{p\}$  y  $p$  es un número primo  $\mu(\{p\}) = 1$ . En general, siendo  $E \in \sigma$  finito, podemos pensar en un dado con  $|E|$  número de caras, cada una con un elemento  $a_j \in E$  distinto de los demás. La magnitud  $\mu(E)$  es la probabilidad de que al hacer un tiro con ese dado, la cara superior sea un número primo.

La familia  $(E_n)$  está formada por los conjuntos

$$E_n = [0, n] \cap N;$$

y la distribución de los números primos  $F_\mu$  en  $N$  es

$$\begin{aligned} F: N &\longrightarrow R^+, \\ n &\longmapsto P(E_n) = \frac{\pi(n)}{n}. \end{aligned}$$

## Apéndice C

### El espacio dual $(C^0(\mathbf{X}))^*$

Todo concepto tiene  
un elemento de fantasía.

---

*Dialéctica de lo Concreto*  
KAREL KOSÍK

El *espacio dual*  $(C^0(\mathbf{X}))^*$  es un conjunto de funciones a las que pertenecen las medidas discretas  $m_y(f)$  cuando  $X = R^\bullet$ ; y donde la convergencia determinada en los teoremas *A* y *B* corresponden a un tipo particular de aproximación: la *convergencia \*-débil*.

### C.1 Espacios métricos compactos $\mathbf{X}$

**Definición.** Un espacio topológico  $\mathbf{X}$  es *compacto* si toda cubierta abierta  $(U_j)$  de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X} = \cup U_j$ , contiene una cubierta finita  $(U_j)_{j=1}^k$ .

**Definición.** Una *métrica* o una *distancia*  $d$  en un espacio  $\mathbf{X}$  es una función

$$\begin{aligned} d_X: X \times X &\longrightarrow R^+ \\ (x, y) &\longmapsto d_X(x, y) \end{aligned}$$

tal que:

$$d_X(x, y) = 0 \text{ si y sólo si } x = y;$$

$$d_X(x, y) = d_X(y, x); \text{ y}$$

$$d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z).$$

**Proposición.** Un espacio métrico  $\mathbf{X}$  es compacto si y sólo si toda sucesión  $(a_n) \subset \mathbf{X}$  contiene una subsucesión convergente.

**Definición.** Un espacio métrico  $\mathbf{X}$  es *completo* si toda sucesión de Cauchy  $(a_n) \subset \mathbf{X}$  converge en  $\mathbf{X}$ .

**Teorema.** *Todo espacio métrico compacto es completo.*

*Demostración.* En un espacio métrico compacto, toda sucesión contiene una subsucesión convergente. Esto implica que todo subconjunto numerable de  $\mathbf{X}$  se acumula, contiene sus puntos de acumulación; y en particular, toda sucesión de Cauchy, que tiene un solo punto de acumulación, converge en  $\mathbf{X}$ .  $\square$

### Ejemplos

1. Los intervalos cerrados reales  $I = [a, b]$ ,  $a, b \in R$ , con la métrica euclidiana de  $R$  restringida a  $I$ :  $d_I(x, y) = |y - x|$  para todo  $x, y \in I$ . Son un ejemplo del mismo tipo las imágenes  $\alpha(I)$  de curvas continuas  $\alpha: I \rightarrow M$  sobre una variedad Riemanniana  $M$ , donde la distancia está dada por la longitud de arco  $\ell(\alpha)$  calculada respecto a la métrica  $\rho$  de  $M$ .
2. Se puede pensar también en un espacio muestra  $S$  y una variable aleatoria unidimensional  $\chi: S \rightarrow I$  que asocia una variación continua de estados  $t \in I$  a las situaciones en  $s \in S$ .
3. Los rectángulos  $\mathfrak{R} = \prod_{j=1}^n I_j \subset R^n$  con la métrica euclidiana:

$$\begin{aligned} d: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} &\longrightarrow R^+, \\ (v, w) &\longmapsto \|w - v\|; \end{aligned}$$

que pueden verse como imágenes de variables aleatorias  $n$ -dimensionales

$$\chi: S \rightarrow \mathfrak{R}$$

y representan cada aspecto de una circunstancia  $s \in S$  con un estado  $x_i \in R$  que varía continuamente en un rango  $I_j$ .

4. Las superficies hiperbólicas compactas de género 2.
5. Las imágenes de curvas continuas  $\bar{\alpha}: I \rightarrow D^2/\Gamma$ ,  $\bar{\alpha}(I) \subset M$ , con la distancia  $d_{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}(s), \bar{\alpha}(t))$  dada por la longitud del arco  $\bar{\alpha}$  recorrido entre los puntos  $\bar{\alpha}(s)$  y  $\bar{\alpha}(t)$ , calculada de acuerdo a la métrica hiperbólica en  $M$ .
6. Las imágenes de funciones continuas  $f: \mathfrak{R} \rightarrow D^2/\Gamma$ ,  $f(\mathfrak{R}) \subset M$ , de un rectángulo plano  $\mathfrak{R} \subset R^2$ , con la distancia  $d_{f(\mathfrak{R})}(p, q)$  dada por la longitud de arco de la geodésica que pasa por  $p$  y  $q$ , calculada respecto a la métrica hiperbólica en  $M$ .

## C.2 El espacio de funciones continuas $C^0(\mathbf{X})$

**Definición.** El conjunto  $C^0(\mathbf{X})$  es el espacio de funciones continuas

$$f: \mathbf{X} \longrightarrow R.$$

**Proposición.**  $C^0(\mathbf{X})$  es un espacio vectorial.

*Demostración.* Definimos la operación

$$\begin{aligned} +: C^0(\mathbf{X}) \times C^0(\mathbf{X}) &\longrightarrow C^0(\mathbf{X}); \\ (f, g) &\longmapsto \begin{array}{l} h: \mathbf{X} \rightarrow R, \\ x \mapsto f(x) + g(x); \end{array} \end{aligned}$$

y el producto por escalares  $\alpha \in R$ ,

$$\begin{aligned} \alpha: C^0(\mathbf{X}) &\longrightarrow C^0(\mathbf{X}); \\ f &\longmapsto \begin{array}{l} \alpha f: \mathbf{X} \rightarrow R, \\ f \mapsto \alpha f(x). \end{array} \end{aligned}$$

De esta manera,  $C^0(\mathbf{X})$  hereda la estructura de espacio vectorial de  $R$ .  $\square$

**Proposición.** La función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{C^0(\mathbf{X})}: C^0(\mathbf{X}) &\rightarrow R^+, \\ f &\mapsto \|f\|_{C^0(\mathbf{X})} = \sup \{|f(x)| \mid x \in \mathbf{X}\}. \end{aligned}$$

es una norma.

*Demostración.* El conjunto  $f(\mathbf{X})$  es cerrado y acotado en  $R$ . De modo que  $\{|f(x)| \mid x \in \mathbf{X}\}$  es cerrado y acotado en  $R^+$ . Entonces,

$$\sup \{|f(x)| \mid x \in \mathbf{X}\} = \max \{|f(x)| \mid x \in \mathbf{X}\}$$

es un número real positivo y la función está bien definida.  $\square$

**Corolario.** La función

$$\begin{aligned} d_{C^0(\mathbf{X})}: C^0(\mathbf{X}) \times C^0(\mathbf{X}) &\rightarrow R^+, \\ (f, g) &\mapsto d_{C^0(\mathbf{X})}(f, g) = \|f - g\|_{C^0(\mathbf{X})}. \end{aligned}$$

es una distancia en  $C^0(\mathbf{X})$ .

**Observación.** La distancia es entonces el radio de la vecindad mínima en  $R$  que contiene tanto a la imagen  $f(\mathbf{X})$  como a  $g(\mathbf{X})$ .

**Observación.** La norma en  $C^o(\mathbf{X})$  no solamente define automáticamente una distancia sino también una topología. Ésta, a su vez, determina una  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos abiertos y cerrados en  $C^o(\mathbf{X})$ .

**Definición.** Decimos que una sucesión de funciones  $(f_n) = (f_n: \mathbf{X} \rightarrow R)$  converge uniformemente a una función  $f: \mathbf{X} \rightarrow R$  en  $\mathbf{X}$  cuando dada  $\epsilon > 0$ , hay un  $n_o \in N$  tal que si  $n > n_o$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

para todo  $x \in \mathbf{X}$ .

**Proposición.** Una sucesión de funciones  $(f_n)$  converge a  $f$  en  $C^o(\mathbf{X})$  si y sólo si  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f$  en  $\mathbf{X}$ .

*Demostración.* Sean  $(f_n)$  y  $f$  en  $C^o(\mathbf{X})$ . Si  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f$  en  $\mathbf{X}$  y  $\epsilon_n = 1/2^n$ , hay un índice  $n_o \in N$  tal que si  $n > n_o$ ,

$$\begin{aligned} d_{C^o(\mathbf{X})}(f_n, f) &= \max \{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in \mathbf{X}\} \\ &\leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Así,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{C^o(\mathbf{X})}(f_n, f) = 0$  para todo  $x \in \mathbf{X}$  y la sucesión  $(f_n)$  converge a  $f$  en  $C^o(\mathbf{X})$ .

Si, en cambio,  $(f_n)$  converge a  $f$  en  $C^o(\mathbf{X})$ , el  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{C^o(\mathbf{X})}(f_n, f) = 0$  y la distancia

$$\begin{aligned} d_{C^o(\mathbf{X})}(f_n, f) &= \max \{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in \mathbf{X}\} \\ &\geq |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbf{X}$ . Por lo tanto,  $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  para todo  $x \in \mathbf{X}$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f$  en  $\mathbf{X}$ .  $\square$

**Teorema.**  $C^o(\mathbf{X})$  es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones que convergen uniformemente a  $f$  en  $\mathbf{X}$ . Entonces,  $f$  es continua en  $X$  y  $f \in C^o(\mathbf{X})$ .  $\square$

**Ejemplos**

1. El espacio vectorial de funciones continuas en un intervalo real

$$C^o(I) = \{\alpha: I \rightarrow \alpha(I) \subset R \mid \alpha \text{ es continua}\}.$$

2. El conjunto de variables aleatorias unidimensionales con dominio en un espacio muestra  $S$  métrico y compacto

$$C^o(S) = \{\chi: S \rightarrow \chi(S) \subset R \mid \chi \text{ es continua}\}.$$

En particular, la familia de variables aleatorias unidimensionales definidas en un rectángulo  $\mathfrak{R} = \prod_{j=1}^n I_j \subset R^n$ ,

$$C^o(\mathfrak{R}) = \{\chi: \mathfrak{R} \rightarrow \chi(\mathfrak{R}) \subset R \mid \chi \text{ es continua}\}.$$

**C.3 El espacio dual  $(C^o(\mathbf{X}))^*$** 

**Definición.** Un *funcional* es una función lineal con dominio en un espacio vectorial y contradominio en un campo.

**Definición.**  $(C^o(\mathbf{X}))^*$  es el espacio de funcionales continuos

$$\varphi: C^o(\mathbf{X}) \longrightarrow R,$$

el *espacio dual* de  $C^o(\mathbf{X})$ .

**Ejemplos**

1. Si  $\mu$  una medida definida en la  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbf{X}$  generada por su topología ( $\sigma$ -álgebra de Borel),  $(E_j)_{j=1}^k$  una cubierta cerrada de  $\mathbf{X}$  y

$$\varphi_{jk}(f) = \max \{f(x) \mid x \in E_j\}.$$

La función

$$\begin{aligned} \varphi_k: C^o(\mathbf{X}) &\rightarrow R, \\ f &\mapsto \varphi_k(f) = \sum_{j=1}^k \varphi_{jk}(f) \mu(E_j), \end{aligned}$$

es un elemento del espacio dual  $(C^o(\mathbf{X}))^*$  ya que:

$$\varphi_k(\alpha f + g) = \sum_{j=1}^k \varphi_{jk}(\alpha f + g) \mu(E_j) = \alpha \varphi_k(f) + \varphi_k(g);$$

y  $\mu$  es acotada.

2. Sea  $(E_{j=1}^k)$  una cubierta cerrada de  $\mathbf{X}$  tal que

$$(E_{j=1}^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \{\{x\} | x \in \mathbf{X}\};$$

y

$$\varphi(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(f).$$

Entonces,  $\varphi(f) \in (C^0(\mathbf{X}))^*$ .

**Proposición.** *Un funcional  $\varphi \in (C^0(\mathbf{X}))^*$  tal que*

*$\varphi(f) \geq 0$  cuando  $f \geq 0$ ; y*

*$\varphi(\mathbf{1}) = 1$ , donde  $\mathbf{1}(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbf{X}$ ,*

*es una medida en  $R$ .*

### Ejemplos

1. Sea  $x_o \in \mathbf{X}$ ; y

$$\begin{aligned} \varphi_{x_o}: C^0(\mathbf{X}) &\rightarrow R, \\ f &\mapsto \varphi_{x_o}(f) = f(x_o). \end{aligned}$$

Entonces, para todo escalar  $\alpha \in R$  y funciones  $f, g \in C^0(\mathbf{X})$ , se cumple que

$$\varphi_{x_o}(\alpha f + g) = \alpha f(x_o) + g(x_o) = \alpha \varphi_{x_o}(f) + \varphi_{x_o}(g).$$

Es decir,  $\varphi_{x_o}$  hereda linealidad de la estructura de espacio vectorial de  $R$ . A esta medida se le llama *delta de Dirac* y se denota como  $\delta_{x_o}$ .

2. Si  $f$  una función *simple* y positiva; es decir, una función real valuada con sólo un número finito de valores  $\{f(x)\} = \{a_1, \dots, a_k\} \subset R^+$ ,

$$\varphi(f) = \sum_{j=1}^k a_j \delta_{x_j}.$$

A partir del último ejemplo, planteamos el siguiente resultado:

**Teorema de Representación de Riesz** <sup>1</sup> *Dado un funcional  $\varphi \in (C^0(\mathbf{X}))^*$ , hay una medida  $\mu$  definida en la  $\sigma$ -álgebra generada por la topología de  $\mathbf{X}$  tal que*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbf{X}} f \, d\mu.$$

<sup>1</sup>W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

## C.4 El espacio localmente convexo $(C^o(\mathbf{X}))^*$

Si  $\mathbf{X}$  no es un espacio compacto sino *localmente compacto*,  $C^o(\mathbf{X})$  es el espacio de funciones continuas en  $\mathbf{X}$  con *soporte compacto* y  $(C^o(\mathbf{X}))^*$ , su espacio dual, es un espacio vectorial *localmente convexo*, donde la convergencia está dada por la convergencia *\*-débil*.

**Definición.** Un espacio topológico  $\mathbf{X}$  es *localmente compacto* si y sólo si todo elemento  $p \in \mathbf{X}$  tiene una vecindad compacta  $K_p \subset \mathbf{X}$ .

**Observación.** Es decir, es un espacio donde cada punto tiene una vecindad  $K_p$  que es un subespacio topológico compacto de  $\mathbf{X}$ , que puede ser desde un intervalo cerrado  $I = [a, b]$ , un disco cerrado  $\bar{B}^n(p)$ , hasta una superficie hiperbólica compacta  $D^2/\Gamma$ .

**Observación.** Todo espacio topológico localmente compacto  $\mathbf{X}$  puede ser encajado en un espacio compacto  $\mathbf{Y}$  donde cada intersección  $U \cap \mathbf{X}$  de un abierto  $U$  de  $\mathbf{Y}$  es abierta en  $\mathbf{X}$ ; y tal que  $\mathbf{Y}$  es sólo la unión de  $\mathbf{X}$  con un punto,  $\mathbf{X} \cup \{y\}$ .

### Ejemplos

1. Los números reales  $R$ : Para cada  $x \in R$  y  $\epsilon > 0$  tenemos un intervalo cerrado  $[x + \epsilon, x - \epsilon]$ .
2. Los números complejos  $C$ : Para cada  $z \in C$  y  $\epsilon > 0$ , los discos cerrados  $D_\epsilon(z) = \{w \in C \mid |z - w| \leq \epsilon\}$  son vecindades compactas de  $z$ .

**Definición.** El conjunto  $C^o(\mathbf{X})$  está formado por  $f \equiv 0$  y todas las funciones continuas  $f: X \rightarrow R$  cuyo soporte es compacto en  $\mathbf{X}$ .

**Observación.** Las imágenes  $f(spp(f))$  son compactas en  $R$  y

$$\int_{\mathbf{X}} f \partial\mu = \int_{spp(f)} f \partial\mu < \infty$$

para una medida acotada  $\mu$  definida en el álgebra de Borel de  $\mathbf{X}$ .

**Proposición.** *El conjunto  $C^o(\mathbf{X})$  es un espacio vectorial.*

*Demostración.* La función  $f + g: \mathbf{X} \rightarrow R$ ,  $f + g(x) = f(x) + g(x)$ , es continua y el soporte  $spp(f + g) \subset spp(f) \cup spp(g)$  es compacto porque existe una cubierta abierta finita para cada uno de ellos. Además,  $spp(\alpha f) = spp(f)$  para todo  $\alpha \neq 0$ .  $\square$

### C.4.1 Convexidad local

Los conjuntos *convexos* que rodeen un punto de un espacio vectorial  $V$  tienen una relación estrecha con ciertas funciones  $p: V \rightarrow R$  llamadas *seminormas* y que son menos estrictas que una norma. A partir de una seminorma  $p$  se construye una vecindad particular  $M_p$  del origen  $0 \in V$ , cuyas traslaciones  $x + M_p$  determinan vecindades convexas del punto  $x$ . Así, aún sin una norma en el espacio vectorial  $V$ , tenemos *convexidad local* vista a partir de las vecindades  $M_{p_\gamma}$  de una familia de seminormas  $\{p_\gamma: V \rightarrow R\}$ .

**Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\Omega \subset V$ . Entonces:

$\Omega$  es *convexo* cuando el segmento  $\{tv + (1-t)w \mid t \in [0, 1]\}$  para toda pareja de elementos  $v, w \in \Omega$ .

$\Omega$  es *equilibrado* si para todo  $x \in \Omega$ , el cono  $\{\alpha x \mid |\alpha| \leq 1\} \subset \Omega$ .

$\Omega$  es *absorbente* si para todo  $x \in \Omega$ , existe un escalar  $\alpha > 0$  tal que la inversión  $\alpha^{-1}x \in \Omega$ .

**Definición.** Un espacio vectorial  $V$  es llamado *localmente convexo* cuando cada punto  $p \in V$  tiene una vecindad convexa, equilibrada y absorbente.

**Definición.** Una función  $p: V \rightarrow R$  con dominio en un espacio vectorial  $V$  es una *seminorma* de  $V$  si:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad y$$

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$$

para cualquier vector  $x, y \in V$  y escalar  $\alpha$ .

**Proposición.** Si  $p$  es una seminorma en un espacio vectorial  $V$ :

$$i) p(0) = 0,$$

$$ii) p(x - y) \geq |p(x) - p(y)|, \quad y$$

$$iii) p(x) \geq 0.$$

*Demostración.* El inciso i) es consecuencia de que  $p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0$ ; el ii), de que  $p(x-y) + p(y) \geq p(x+y-y) = p(x)$ , de donde  $p(x-y) \geq p(x) - p(y)$ , e igualmente  $p(x-y) = |-1|p(y-x) \geq p(y) - p(x)$ . El último inciso se infiere del segundo.  $\square$

**Teorema.** Si  $V$  es un espacio vectorial,  $p$  una seminorma en  $V$  y  $\epsilon > 0$ , el subconjunto  $M_p = \{v \in V \mid p(v) \leq \epsilon\}$  es una vecindad convexa, equilibrada y absorbente del origen  $0 \in V$ .

*Demostración.* El origen  $0 \in M_p$  ya que  $0 = p(0) < \epsilon$  para cualquier  $\epsilon > 0$ .  $M_p$  es convexo y equilibrado porque: Dados dos vectores  $x, y \in M$  y un escalar  $t \in [0, 1]$ ,  $p(x) \leq \epsilon$ ,  $p(y) \leq \epsilon$ ,

$$\begin{aligned} p(tx + (1-t)y) &\leq tp(x) + (1-t)p(y) \\ &\leq t\epsilon + (1-t)\epsilon \\ &\leq (1-t+t)\epsilon = \epsilon; \end{aligned}$$

y

$$p(tx) = tp(x) \leq p(x) \leq \epsilon.$$

Para terminar, si  $z \in V$  y  $z \notin M_p$ ,  $p(z) > \epsilon$  y hay un número natural  $n > 0$  tal que  $p(z) > \epsilon$  (por la propiedad arquimediana de los números reales). Así,  $n^{-1}p(z) < \epsilon$  y  $M_p$  es absorbente.  $\square$

**Corolario.** Un espacio vectorial  $V$  donde está definida una seminorma  $p$  es localmente convexo.

## Ejemplos

1. Todo espacio vectorial normado es localmente convexo. En particular,  $C^o(\mathbf{X})$  con la norma  $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \text{spp}(f)\}$ .

2. Dada una medida acotada y positiva  $\mu$  definida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbf{X}$  y  $f \in C^o(\mathbf{X})$ ,

$$p_\mu(f) = \int_{\mathbf{X}} |f| \partial\mu = \int_{\text{spp}(f)} |f(x)| \partial\mu(x)$$

es una seminorma en  $C^o(\mathbf{X})$ . De esta manera, el espacio  $C^o(\mathbf{X})$  acompañado de la familia de seminormas  $\{p_\mu\}_\mu$  es localmente convexo.

3. El espacio dual  $(C^o(\mathbf{X}))^*$  con la familia de seminormas

$$\{\mu_y(f) \mid y \in R^\bullet\} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} y \delta_{nf(y)} \mid y \in R^\bullet \right\}$$

donde  $f \in C^o(\mathbf{X})$ , es localmente convexo.

**Observación.** Este espacio es considerado la representación analítica del espacio de distribuciones definidas en general.

### C.4.2 La convergencia \*-débil

La topología \*-débil es la topología en el espacio dual  $(C^o(X))^*$  donde cada vecindad abierta de un punto contiene una vecindad convexa. De esta manera, puede relacionarse la convexidad de la imagen de un funcional  $\varphi(U) \subset R$  con las funciones que componen su preimagen  $f \in \varphi^{-1}(U)$ ; y también, los puntos extremos de las imágenes convexas  $\varphi(U) \subset R$  con los puntos extremos de las preimágenes  $\varphi^{-1}(U)$ . Ésto sucede porque si una sucesión de funcionales converge \*-débilmente en el espacio, el punto de convergencia se considera un punto de acumulación, se definen así las cerraduras y los conjuntos cerrados en el espacio y la topología \*-débil está determinada por ellos.

**Definición.** Dada una familia de seminormas  $\{p_\gamma\}_{\gamma \in J}$  en un espacio vectorial  $V$ , la topología débil en  $V$  es la menor de las topologías que hace continuas en  $V$  a todas las seminormas  $p_\gamma$ . Ésto es:  $U$  es abierto en  $V$  si y sólo si  $p_\gamma(U)$  es abierto en  $R$  para todo índice  $\gamma \in J$ .

**Definición.** La topología \*-débil es la topología débil en el espacio dual  $C^*(\mathbf{X})$ .

**Proposición.** <sup>2</sup> Sean  $V$  un espacio vectorial,  $\{p_\gamma\}_{\gamma \in J}$  una familia de seminormas en  $V$  y  $\tau$  la topología débil en  $V$ . Entonces, si  $U \in \tau$ , cada punto  $x \in U$  tiene una vecindad  $M_{p_\gamma}$  contenida en  $U$ , para todo  $\gamma \in J$ .

**Definición.** Una sucesión  $\varphi_n$  en un espacio vectorial  $V$  localmente convexo converge \*-débilmente a un elemento  $\varphi$  del espacio si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(v) = \varphi(v)$$

para cada  $v \in V$ .

---

<sup>2</sup>K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980.

## Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [3] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [4] R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, New York, 1995.
- [5] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*.
- [6] D. Bump, *The Zeta Function* (lecture notes).
- [7] C. Calderón, *La función Zeta de Riemann*, Rev. Real Academia de Ciencias, Zaragoza, **57**: pág. 67-87, 2002.
- [8] H. S. Carslaw, *Introduction to the Theory of Fourier's series and Integrals*, Dover Publications Inc., 1930.
- [9] J. P. Collette, *Historia de las Matemáticas*, Siglo Veintiuno Editores, México, 1986.
- [10] Euler, *Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques*, Memoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 1768, pág. 83-106; Opera Omnia: Series 1, Volume 15, pág. 70 - 90.
- [11] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications Inc., New York, 1974.

- 
- [12] K. Ford, *Vinogradov integral and bounds for the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), pág. 565 - 633.
- [13] F. Klein, *Development of Mathematics in the Nineteenth Century*, Math Sci Press, Massachusetts, 1979.
- [14] S. Lang,  *$SL_2(R)$* , Springer-Verlag, New York, 1985.
- [15] Y. I. Manin, A. A. Panchishkin, *Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 2nd. ed., 2005.
- [16] J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, USA, 1974.
- [17] R. C. Paley, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, AMS, Colloquium Publications, Vól. 19, New York, 1934.
- [18] S. J. Patterson, *An Introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 14), Cambridge University Press, 1988.
- [19] Q. Morales, *Segunda prueba de Riemann de la ecuación funcional de la función Zeta y su continuación analítica*, Cuernavaca, México, 2006.
- [20] M. R. Riedel, *Applications of the Mellin-Perron Formula in Number Theory*, Thesis for the Degree of Master of Science at the University of Toronto, 1996.
- [21] E. D. Rainville, *Infinite Series*, Ed. MacMillan, New York, 1967.
- [22] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [23] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1976.
- [24] E. Sandifer, *Gamma the Function*, How Euler Did It, MAA Online, 2007.

- 
- [25] P. Sarnak, *Problems of the Millenium: The Riemann Hypothesis*, Princeton Institute and Courant Institute of Mathematical Sciences, 2004.
- [26] E. V. Shchepin, *Uppsala Lectures on Calculus*, 2001.
- [27] P. D. Schumer, *Introduction to Number Theory*, PWS Publishing Company, 1995.
- [28] A. N. Shiryaev, *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [29] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Clarendon Press Oxford, Great Britain, 1951.
- [30] G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1962.
- [31] A. Verjovsky, *Discrete Measures and the Riemann Hypothesis*, Kodai Math J. **17**, 1994.
- [32] A. Verjovsky, *Arithmetic, Geometry and Dynamics in the Unit Tangent Bundle of the Modular Orbifold*, Dynamical Systems. Proceedings of the 3rd International School of Dyanamical Systems (1990), Santiago de Chile, (R. Bamon *et. al.* eds.) Longman Scientific and Tehcnical Pitman Res. Notes Math. Ser 285 (1993) 253-298.
- [33] A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov*, IMCA, 1999.
- [34] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980.