UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

PRODUCTO DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS CON CELULARIDAD NUMERABLE: UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS A LA TOPOLOGÍA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. ENERO 2009

“El peor enemigo
que puede tener alguien
es su propia mente.”

no es una frase célebre... pero es algo que he pensado que es TAN cierto que merece tomarse en cuenta... o.o

Índice general

Introducción

Una rama de la Topología es la llamada "Topología de Conjuntos", la cual se dedica a estudiar las propiedades de los espacios topológicos con ayuda de herramientas de Teoría de Conjuntos. Como primer ejemplo, tenemos el famoso "Axioma de Elección" que al parecer es un principio muy simple e intuitivo y que, sin embargo, es motivo de controversia filosófica en las matemáticas. Existen incontables resultados que dependen de dicho axioma. Inclusive hay un texto ([8]) en el cual se analizan los "desastres" (en las palabras del autor) que ocurren con y sin el axioma de elección, en diversas ramas de las matemáticas, no sólo en topología.

Distintas realidades topológicas se presentan al suponer distintos axiomas de Teoría de Conjuntos. En este trabajo, abordamos una instancia de esta idea. Un espacio tiene celularidad numerable si cualquier conjunto de abiertos ajenos dos a dos es a lo más numerable. Una pregunta natural es si la propiedad de celularidad numerable es productiva. Es decir, nos preguntamos si cada vez que una familia de espacios tienen celularidad numerable, su producto también tiene celularidad numerable. Sucede que este resultado es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección.

Lo que se demuestra y presenta en este trabajo es que, en presencia del axioma de Martin, la propiedad de celularidad numerable es productiva. En cambio, si se supone la Hipótesis del Continuo, se construyen dos espacios con celularidad numerable cuyo producto no tiene celularidad numerable.

Al principio, puede ser que al lector le parezca un resultado impresionante. Sin embargo, existe un resultado topológico que también es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel y es aceptado por todos los topólogos como cierto. Este es el famoso teorema de Tihonov, que nos dice que la compacidad es una propiedad productiva. Sucede que el teorema de Tihonov es equivalente al axioma de elección [8, 4.68, p. 86].

La idea de este trabajo surgió durante uno de los cursos del Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM impartido por el Dr. Angel Tamariz Mascarúa, durante el ultimo semestre del año 2007. Este curso se basaba en el libro "Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces" de Jack R. Porter y R. Grant Woods (citado en este trabajo como [13]), el cual, en su sección 3.5, aborda el tema del axioma de Martin y la hipótesis del continuo y sus interpretaciones en la Topología. Le agradezco a Angel la disposición de ayudarme con este proyecto.

Los requisitos matemáticos para este trabajo consisten en los conceptos de Topología General que se abordan en dos cursos de nivel licenciatura. Con respecto a los requisitos de Teoría de Conjuntos, no se supondrá un conocimiento profundo sobre los axiomas de Zermelo-Fraenkel pero si se debe conocer el Axioma de Elección. De todas maneras, en el primer capítulo se recuerdan los conceptos y resultados que serán usados durante el cuerpo principal del trabajo.

Me gustaría agradecerle en especial al Dr. Alejandro Illanes Mejía ya que desde que me inicié en Matemáticas durante mis tiempos de olímpico me ha apoyado mucho. También agradezco al CONACyT por el apoyo económico de la beca de estudios de maestría y al Instituto de Matemáticas de la UNAM por el lugar que me ha otorgado en el cubículo de becarios, junto con los apoyos económicos para asistir a diversos congresos que han servido como parte de mi formación.

Rodrigo Hernández

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se dará un breve resumen, sin demostraciones, de los conceptos y resultados que considero básicos y que se usarán en el resto del trabajo. Si el lector ya tiene conocimiento de los conceptos básicos de teoría de Conjuntos, Topología, Cardinales y Ordinales, recomendamos saltarse este capítulo (o las secciones que el lector crea conveniente) y únicamente usarlo como referencia. También se aprovecha para introducir la notación que se usará en el resto del trabajo.

1.1. Conjuntos

Recordemos que nuestra Teoría de Conjuntos se basa en los axiomas de *Zermelo-Fraenkel*. Se remite al lector a [10, Capítulo 1], en donde se puede encontrar una excelente exposición de la construcción del concepto de conjunto. Otra referencia muy recomendable para Teoría de Conjuntos es [11].

Si X es un conjunto, denotaremos su conjunto potencia por $\mathscr{P}(X)$. Si $f : X \to Y$ es una función, $A \subset X$ y $B \subset Y$, denotemos la imagen de A bajo f por $f[A]$ y la imagen inversa de B bajo f como $f^{\leftarrow}[B]$.

Uno de los axiomas de la Teoría de Conjuntos más famoso y discutido entre los matemáticos es el *Axioma de Elección*. La razón de esto es que este axioma pide la existencia de un conjunto sin construirlo. Es seguro que el lector se ha encontrado directa o indirectamente con este axioma.

[AC] Para cualquier conjunto Λ y cualquier familia de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ existe una *función de elección*, es decir, una función $f : \Lambda \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(\lambda) \in A_\lambda$ para cualquier $\lambda \in \Lambda$.

Remitimos al lector al texto [8] en el que se exploran varios usos de AC en diversas ramas de las matemáticas, además de los "desastres" (en palabras del autor) que ocurren con o sin AC. Es posible que el lector inclusive no se dé cuenta cuando usa AC, ya que como se muestra en [8], su uso a veces está "escondido". Sin embargo, es muy probable que haya usado concientemente alguna de sus formulaciones equivalentes. Para poder enunciarlas, primero damos unas definiciones.

Para un conjunto A y una relación binaria $\leq \subset A \times A$, denotemos $(x, y) \in \leq$ como $x \leq y$ y $(x, y) \notin \leq$ como $x \nleq y$. Además, abreviaremos $x \leq y$ y $x \neq y$ como $x < y$. La relación $\leq$ se le llama *orden* (no estricto) si se cumplen las siguientes tres condiciones para cualesquiera $x, y, z \in A$.

- $x \leq x$,
- si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$,
- si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Consideremos $B \subset A$. Diremos que $x \in A$ es una cota superior (respectivamente, inferior) de B, con respecto al orden $\leq$, si para todo $y \in B$, se tiene que $y \leq x$ (respectivamente, $x \leq y$). Un elemento $x \in A$ es maximal (respectivamente, minimal) de B, con respecto al orden $\leq$, si $x \in B$ y si cada vez que $y \in B$ es tal que $x \leq y$ (respectivamente, $y \leq x$), entonces $x = y$. Diremos que $x \in A$ es el supremo (respectivamente, ínfimo) de B y escribiremos $x = \sup B$ (respectivamente, $x = \operatorname{ínf} B$), si x es minimal (respectivamente, maximal) en el conjunto de cotas superiores (respectivamente, inferiores) de A.

Diremos que $\leq$ es un *orden total* si además, para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$. Si tenemos que para cualquier $B \subset A$ con $B \neq \emptyset$, existe $x \in B$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in B$, entonces llamamos $\leq$ un *buen orden*. Es claro que todo buen orden es un orden total. En todos estos casos, cuando la relación de orden sea clara, no tendremos que repetir el nombre de la relación en cada uno de los términos.

Si P es un conjunto parcialmente ordenado, definimos los siguientes conjuntos, para $a, b \in P$, que son comúnmente llamados *intervalos*:

$$\begin{array}{rcl} (\leftarrow, a) & = & \{x \in P : x < a\} \\ (a, \rightarrow) & = & \{x \in P : a < x\} \\ (a, b) & = & (\leftarrow, b) \cap (a, \rightarrow) \end{array}$$

Un *isomorfismo de orden* entre dos conjuntos P y Q, parcialmente ordenados por las relaciones $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente, es una biyección $f : P \to Q$ tal que $x \leq_P y$ si y sólo si $f(x) \leq_Q f(y)$, para cualesquiera $x, y \in P$.

Consideremos los siguientes dos enunciados.

[ZORN] Si A es un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(A)$ es una familia no vacía de subconjuntos tal que cada subfamilia de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada por la contención de conjuntos tiene una cota superior, entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal con el orden dado por la contención de conjuntos.

[WO] En todo conjunto se puede definir un buen orden.

El enunciado ZORN es conocido como el “lema de Zorn” y WO como “principio del buen orden”. Ambos son equivalentes a AC por lo que se pueden tomar como axiomas. Existen varios versiones más de AC, pero éstas se salen del objetivo de este trabajo. Remitimos al lector a [8] para consultar tanto otras versiones de AC como la prueba de que éstas son equivalentes, incluidas las tres que nosotros manejaremos.

Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $A \subset P$ es *denso* si para todo $x \in P$ existe un $a \in A$ tal que $a \leq x$ y además $\inf P \notin A$, cuando este ínfimo existe. Un subconjunto $F \subset P$ es un P-filtro si se cumplen las siguientes condiciones:

- $F \neq \emptyset$,
- $\inf P \notin F$, cuando este ínfimo existe,
- si $x, y \in F$, entonces existe $r \in F$ tal que $r \leq x$ y $r \leq y$, y
- si $x \in F$ y $y \in P$ es tal que $x \leq y$, entonces $y \in F$.

1.2. Espacios Topológicos

Como referencias para los resultados básicos de topología se pueden consultar los libros de Dugundji [4], Engelking [5] o Willard [17]. Mencionaremos en esta sección los resultados que necesitaremos y no probaremos.

Un espacio topológico X es *Hausdorff* si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$ (también se dice que X es un espacio T_2). La mayoría de las aplicaciones de Topología suceden en espacios Hausdorff ya que varias propiedades topológicas se comportan muy bien con este axioma de separación. En este trabajo, los espacios que nos interesarán serán todos Hausdorff. Sin embargo, para no restar generalidad en lo que estamos haciendo, se dirá cuándo se está usando la hipótesis de espacio Hausdorff explícitamente.

Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Si la familia es tal que para cualesquiera $U, V \in \mathcal{B}$ y cualquier punto $p \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $p \in W \subset U \cap V$, entonces el conjunto de uniones de elementos de la familia $\mathcal{B}$ forma una topología de X. En este caso, se dice que $\mathcal{B}$ es *base* para alguna topología de X (la cual es justo la descrita). Si X ya tiene una topología τ, también se dice que una familia de abiertos $\mathcal{B}$ es base para τ si cualquier abierto es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Es fácil notar que estas dos nociones de base son compatibles.

Sea X un espacio topológico. Dado un subconjunto $A \subset X$, denotemos su cerradura en X por $\mathrm{cl}_X(A)$. Un subconjunto $D \subset X$ es *denso* si $\mathrm{cl}_X(D) = X$. Cabe señalar que este concepto de densidad es distinto que el que se definió en los órdenes parciales.

Sea $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de X. Si la familia $\mathcal{B}$ es tal que existe un punto $x \in X$ tal que todos los elementos de $\mathcal{B}$ contienen a x y para cada vecindad abierta U de x existe un elemento de $\mathcal{B}$ que está contenido en U, entonces $\mathcal{B}$ se denomina *base local en el punto* x. Si la familia $\mathcal{B}$ es tal que $\bigcup \mathcal{B} = X$, entonces $\mathcal{B}$ se denomina *cubierta abierta* de X.

Un espacio topológico se dice *compacto* si cada cubierta abierta contiene una subfamilia finita que también es cubierta (se dice que la subfamilia es una *subcubierta* de la original). Alertamos al lector que en ocasiones se denomina *casicompacto* a este tipo de espacios y se denomina compacto a los espacios casicompactos Hausdorff.

Un espacio topológico X es 0-dimensional si tiene una base de conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez. En este caso, denotaremos por $CO(X)$ a la colección de subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez. Claramente, $CO(X)$ resulta ser una base para X.

El conjunto de números reales será denotado por $\mathbb{R}$. La topología Euclidiana es la topología cuya base canónica es $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}$. El conjunto de los *racionales* en $\mathbb{R}$ se denotará por $\mathbb{Q}$, el intervalo $[0,1]$ de los reales por I y el conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{N}$. Un espacio X *discreto* o con la *topología discreta* es el conjunto X con la topología en el cual todos los subconjuntos de X son abiertos. En particular, el espacio discreto $\{0,1\}$ lo denotaremos por $\mathbf{2}$.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_i : i \in J\}$ para algún conjunto J, se puede definir en su producto una topología llamada *topología producto* que es la mínima que hace a las proyecciones $\pi_j : \prod_{i\in J} X_i \to X_j$ continuas (y por lo tanto abiertas) para todo $j \in J$. Una base para la topología producto consiste en los subconjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}[U_i]$ donde $n \in \mathbb{N}$, $\{j_1, \dots, j_n\} \subset J$ y U_i es abierto en X_{j_i} para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Recordemos que un producto de espacios es Hausdorff si y sólo si todos los factores son Hausdorff.

Sea X un espacio topológico, $\mathscr{F}$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathscr{F}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* si la intersección de cualquier cantidad finita de elementos de $\mathscr{F}$ es distinta del vacío. Supongamos que $\mathscr{F}$ es una colección de abiertos de X y consideremos las siguientes condiciones:

- $\mathscr{F} \neq \emptyset$
- $\emptyset \notin \mathscr{F}$
- si $U, V \in \mathscr{F}$, entonces existe $W \in \mathscr{F}$ tal que $W \subset U \cap V$,
- si $U \in \mathscr{F}$ y V es un abierto de X tal que $U \subset V$, entonces $V \in \mathscr{F}$.

Se dice que $\mathscr{F}$ es una *base de filtro abierto* si cumple las primeras tres condiciones y además se llamará *filtro abierto* si se cumple la última condición. Es fácil ver que si $\mathscr{F}$ es una base de filtro abierto, entonces

$$\{U \text{ abierto} : \text{ existe } V \in \mathscr{F} \text{ tal que } V \subset U\}$$

es el mínimo filtro abierto que contiene a $\mathscr{F}$ (con el orden dado por la contención). A este filtro se le llama *filtro abierto generado por* $\mathscr{F}$. También es obvio que un filtro de abiertos es una base de filtro de abiertos y éstas a su vez tienen la propiedad de la intersección finita. Los filtros son una idea muy importante en matemáticas y como ya habrá notado el lector, se pueden definir en muchos contextos, en particular nosotros usaremos los filtros de conjuntos parcialmente ordenados de la sección anterior y los filtros de abiertos de un espacio topológico.

1.3. Ordinales, Cardinales y el axioma CH.

Para la prueba de las afirmaciones presentadas en esta sección, se recomienda al lector consultar [10, Capitulos 2 y 3, pp. 17-35].

Un *ordinal* es un conjunto α tal que $\bigcup \alpha \subset \alpha$ y α está bien ordenado por la relación $\in$.

Los números ordinales no forman un conjunto, pero se puede demostrar que son una clase totalmente ordenada. Es decir, dados dos ordinales α, β, se tiene alguna de las tres condiciones: $\alpha \subset \beta$, $\alpha \supset \beta$ ó $\alpha = \beta$. Además, si $\beta \subset \alpha$, se tiene que $\beta \in \alpha$ por lo que entre ordinales las relaciones $\in$ y $\subset$ son equivalentes. Por lo tanto, podemos definir, dados dos ordinales α,β, $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subset \beta$.

Otra observación útil es que, a pesar de que no podemos referirnos al conjunto de ordinales, dado un ordinal α, la clase $\{\beta : \beta \leq \alpha\}$ sí es un conjunto. También se tiene que si $\mathcal{A}$ es un conjunto de ordinales, $\bigcup \mathcal{A}$ es un ordinal. Esto nos dice que todo conjunto de ordinales está bien ordenado. Podemos pensar informalmente que la clase de los ordinales está bien ordenada. Una aplicación de esto es cuando uno quiere encontrar un ordinal mínimo con una propiedad P. Si existe un ordinal β que cumpla la propiedad P, entonces el ordinal deseado es el mínimo del conjunto $\{\alpha \leq \beta : \alpha \text{ cumple } P\}$.

Además, cualquier conjunto bien ordenado A es orden-isomorfo a un ordinal. Esto, junto con el axioma WO, nos dice que a todo conjunto se le puede ver como un ordinal. Adoptemos la notación $\alpha \in \mathsf{ord}$ para decir que α es un ordinal, a pesar que ord no es un conjunto.

El conjunto de numeros naturales $\mathbb{N} \cup \{0\}$ se puede ver como un ordinal con su orden canónico y en este caso escribimos este conjunto como ω_0. Los elementos de ω_0 se denominan *ordinales finitos* (por ejemplo el conjunto vacío es uno de ellos) y al resto se les llama *ordinales infinitos*. En particular, el primer ordinal infinito es justo ω_0. También es común denotar a ω_0 simplemente por ω.

Si α es un ordinal, definimos $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ que también es un ordinal y se denomina *sucesor* de α. Un ordinal se llama *ordinal límite* si no es sucesor de ningun ordinal. El primer ordinal límite infinito es justo ω_0.

Considerando a los ordinales podemos hacer la siguiente versión más general de la inducción que es llamada *inducción transfinita*. Si λ es un ordinal y $A \subset \lambda$ es un subconjunto en el cual se cumplen las siguientes dos condiciones:

- $0 \in A$,
- si $\alpha \in \lambda$ es tal que $\beta < \alpha$ implica $\beta \in A$, entonces $\alpha \in A$,

entonces $A = \lambda$. Cuando suponemos WO, esta inducción es una herramienta muy poderosa ya que nos permite manipular un conjunto cualquiera como si se tratara de $\mathbb{N}$. De igual manera, existe el análogo transfinito de la recursión la cual es llamada *recursión transfinita* y se enuncia de la siguiente manera.

Sea A un conjunto, $\alpha \in \mathsf{ord}$, B el conjunto de funciones $h : \beta \to A$, donde $\beta < \alpha$ y $G : B \to A$ una función. Entonces existe una única función $f : \alpha \to A$ tal que $f(\beta) = G(f|_\beta)$, para todo $\beta < \alpha$.

Cabe aclarar que cuando usemos la recursión transfinita en este trabajo, no nos preocuparemos de escribir formalmente los detalles de cual es el conjunto A o la función G ya que sólo haría más confusa la escritura (en opinion del autor).

Recordemos que para dos conjuntos A, B, se define $|A| = |B|$ si existe una función biyectiva entre A y B, y en este caso se dice que A y B tienen la misma *cardinalidad*. Es fácil convencerse de que $|\omega_0| = |\omega_0+1|$, por lo que pueden haber dos ordinales con la misma cardinalidad y de hecho podemos también pensar que ambos ordinales son dos formas distintas de bien ordenar el conjunto de los naturales. Además, dado un conjunto S, podemos encontrar al mínimo ordinal que tenga la cardinalidad de S.

Esto se formaliza de la siguiente manera. Un ordinal κ se denomina *cardinal* si

$$\kappa = \text{mín}\{\alpha \in \mathsf{ord} : |\alpha| = |\kappa|\}$$

La relación de orden de los ordinales se hereda a los cardinales por lo que cualquier conjunto de cardinales está bien ordenado (de nuevo podemos pensar, informalmente, que la clase de cardinales está bien ordenada). Los ordinales finitos (infinitos) se les llama *cardinales finitos* (*infinitos*). Todos los ordinales finitos son distintos entre sí cuando se les piensa como cardinales.

El teorema de Cantor que dice que un conjunto no es biyectable con su conjunto potencia implica que, para cualquier cardinal, existe siempre uno mayor a él. Esto nos dice que existe un mínimo ordinal mayor que ω_0 que no es biyectable con ω_0, al cual le llamamos ω_1. Cuando pensemos a ω_0 y ω_1 como cardinales, se escriben $\aleph_0$ y $\aleph_1$, respectivamente, a pesar de que son el mismo objeto matemático. La razón de esto es, simplemente, que cuando escribimos un conjunto como un ordinal, estamos pensando en su estructura de buen orden y cuando lo escribimos como cardinal, lo estamos pensando como una "clase de equivalencia" de conjuntos con la misma cardinalidad (lo escribo entre comillas porque no se puede hablar de clases de equivalencia en clases que no son conjuntos). Sin embargo, cabe resaltar que en ocasiones se usarán indistintamente las notaciones de ordinales y cardinales para no dificultar la notación.

Los conjuntos con cardinalidades finitas o $\aleph_0$ se denominan *numerables* y el resto se denominan *no numerables*. Si κ, τ son cardinales de tal manera que al menos uno de los dos es infinito, denotaremos $\kappa + \tau = \text{máx}\,\{\kappa, \tau\}$, que por AC es la cardinalidad de la unión ajena de dos conjuntos con cardinalidades κ y τ.

Uno de los problemas que resultan naturales de plantear al definir a ω_1 es que relación guarda con el cardinal $2^{\aleph_0}$, la cardinalidad de $\mathscr{P}(\omega_0)$. Es claro que por definición $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Este problema se volvió bastante famoso después de la históricamente importante conferencia de Hilbert de 1900 en el cual se planteó la *hipótesis del continuo*.

$$[\mathsf{CH}]\ 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Sucede que esta igualdad resultó ser independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más AC. Por lo tanto, cuando uno trabaja en matemáticas, puede suponer tanto éste como su negación. En este trabajo en particular, probaremos dos realidades topológicas distintas suponiendo, por una parte al axioma CH y por otra, un enunciado que implica la negación de CH. Cuando se use el axioma CH en este trabajo, se escribirá $[\mathsf{CH}]$ adelante del enunciado para aclarar que se usa en la demostración.

Si κ es un cardinal, sea

$$\kappa^+ = \text{mín}\{\alpha \in \mathsf{ord} : |\alpha| > \kappa\},$$

el cual es un cardinal.

Dado un ordinal α, definimos su *cofinalidad* como el ordinal

$$\mathsf{cf}(\alpha) = \text{mín}\{\beta \in \mathsf{ord} : \text{ existe } A_\beta = \{\alpha_\gamma \in \alpha : \gamma < \beta\} \text{ con } \sup A_\beta = \alpha\}$$

Claramente, $\mathsf{cf}(\alpha) \leq \alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathsf{ord}$. Diremos que un cardinal κ es regular si $\mathsf{cf}(\kappa) = \kappa$ (viéndolo como ordinal). Es fácil probar que $\aleph_1$ es regular usando que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Se sabe también que si κ es un cardinal infinito, entonces κ^+ es un cardinal regular.

Un resultado importante que se usará en varias ocasiones es que si X es un conjunto infinito, entonces hay exactamente $|X|$ subconjuntos finitos de X.

Si κ es un cardinal y X un conjunto, denotaremos por X^κ al producto de κ copias de X. Además, si usamos a κ como un espacio topológico, estaremos suponiendo siempre que tiene la topología discreta.

Capítulo 2

Celularidad numerable

En este capítulo introduciremos algunas nociones sobre la cardinalidad de familias de subconjuntos de un espacio topológico. Estas se llaman en general *funciones cardinales topológicas* y algunas se estudiarán con más detalle en el capítulo 5. Sin embargo, para efectos de este capítulo, sólo nos importarán los casos numerables de dichas funciones. En este capítulo, hablaremos de las propiedades clásicas que se estudian en un curso de topología básica como ser *primero numerable*, *segundo numerable*, la *propiedad de Lindelöf* y la *separabilidad* y mencionaremos cómo se relacionan algunas de ellas. Además hablaremos de otra función cardinal topológica que se denomina celularidad. Un problema natural al enfrentarse a cada una de estas propiedades consiste en preguntarse si se conservan bajo productos topológicos. Resulta que este problema para la celularidad numerable no es nada trivial y requiere de axiomas adicionales en la Teoría de Conjuntos. Uno de estos axiomas es el *axioma de Martin* que introduciremos en la segunda sección. En la tercera sección reduciremos el problema de celularidad numerable en los productos al caso de productos finitos.

2.1. Propiedades Cardinales de Espacios Topológicos

Dado un espacio topológico X, nos podemos preguntar, dada una propiedad que hable de una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X, cual es la máxima o mínima cardinalidad de una familia $\mathscr{F}$ que sigue cumpliendo la propiedad.

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es

- *separable* si existe un subconjunto de X denso y numerable.
- *primero numerable* si para cada punto $p \in X$, existe una base local de abiertos en p con cardinalidad numerable.
- *segundo numerable* si existe una base de la topología de X que es numerable.

- *Lindelöf* si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

Un ejemplo clásico de un espacio que cumple todas las propiedades anteriores es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología Euclidiana. Sin embargo las propiedades enunciadas no son equivalentes. Mencionemos rápidamente algunos ejemplos de espacios Hausdorff que muestran esto.

Ser segundo numerable implica ser primero numerable para cualquier espacio, esto se sigue directo de las definiciones.

Un espacio discreto X y no numerable es primero numerable ya que para cada punto $p \in X$, $\{\{p\}\}$ es una base local en p, pero no es segundo numerable ya que una base para la topología tiene que contener a todos los singulares de X, una cantidad no numerable. De igual manera, X no es separable ya que el único conjunto denso es el total. Además X tampoco es Lindelöf ya que la cubierta abierta $\{\{x\} : x \in X\}$ no tiene ninguna subcubierta propia que cubra a X.

La *recta de Sorgenfrey* es el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología que tiene como base a la familia $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, denotemos este espacio por $\mathcal{S}$. Sucede que la recta de Sorgenfrey es separable ya que el subconjunto de los racionales es denso y también primero numerable ya que $\{[a,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en el punto $a \in \mathcal{S}$. Sin embargo, $\mathcal{S}$ no es segundo numerable. Para probar esto necesitamos un resultado previo.

Lema 2.1. *Sean X un espacio topológico, κ un cardinal infinito y $\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$ bases para la topología de X tales que $|\mathcal{B}^*| \leq \kappa$. Entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ que es base para la topología de X tal que $|\mathcal{B}_0| \leq \kappa$.*

Demostración. Para cualesquiera dos elementos U, V de $\mathcal{B}^*$, consideremos el conjunto $[U,V] = \{W \in \mathcal{B} : U \subset W \subset V\}$. Consideremos la familia:

$$\mathcal{R} = \{(U,V) \in \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* : [U,V] \neq \emptyset\}.$$

Esta familia cumple que $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*| = \kappa$. Por AC, existe una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{B}$ tal que $f((U,V)) \in [U,V]$. Sea $\mathcal{B}_0 = f[\mathcal{R}]$, afirmo que este conjunto es la base buscada. Claramente $|\mathcal{B}_0| \leq \kappa$. Sean $x \in X$ y U un abierto de X con $x \in U$. Tomemos $V_1 \in \mathcal{B}^*$, $W \in \mathcal{B}$ y $V_2 \in \mathcal{B}^*$ tales que que

$$x \in V_2 \subset W \subset V_1 \subset U.$$

Esto nos dice que $[V_1, V_2] \neq \emptyset$ y por lo tanto $(V_1, V_2) \in \mathcal{R}$. Entonces existe $f((V_1,V_2)) \in \mathcal{B}_0$ tal que $x \in f((V_1,V_2)) \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{B}_0$ es base, esto es lo que faltaba demostrar. $\square$

Supongamos ahora que $\mathcal{S}$ es segundo numerable. Por el lema 2.1, existe una base de la topología de $\mathcal{S}$ de la forma $\mathcal{B} = \{[a_n, b_n) \subset \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos $a \in \mathbb{R} - \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $b \in \mathbb{R}$ arbitrario. Entonces $[a,b)$ es un abierto en $\mathcal{S}$ pero no hay ningún elemento de $\mathcal{B}$ que contenga a a y sea subconjunto de $[a,b)$. Esto contradice que $\mathcal{B}$ es base para la topología. Por lo tanto $\mathcal{S}$ no es segundo numerable.

Un espacio segundo numerable siempre es separable, para ver esto, sólo hay que tomar una base numerable y usar AC para escoger un punto por cada elemento de la base. El conjunto que se forma al hacer esto es un denso numerable.

Cualquier espacio segundo numerable es hereditariamente Lindelöf. Es decir, si X es segundo numerable y $A \subset X$, entonces la topología de A como subespacio de X es Lindelöf. Para ver esto, consideremos una base numerable $\mathcal{B}$ de la topología de X y sea $\mathcal{B}' = \{A \cap U : U \in \mathcal{B}\}$. Claramente, la familia $\mathcal{B}'$ es una base numerable para la topología de A. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A. Para cada $x \in A$, por AC, escogemos $U_x \in \mathcal{U}$ vecindad de x y $B_x \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B_x \subset U_x$. El conjunto $\mathcal{B}'' = \{B_x : x \in X\} \subset \mathcal{B}'$ es una cubierta numerable de A. Entonces, por AC, para cada $B \in \mathcal{B}''$ escogemos $U(B) \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U(B)$. Entonces $\mathcal{U}' = \{U(B) : B \in \mathcal{B}''\}$ es una subcubierta numerable de U.

La recta de Sorgenfrey también es Lindelöf. Para ver esto, consideremos una cubierta $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$. Basta con considerar el caso en que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos de la base canónica. Entonces podemos suponer que $\mathcal{B} = \{[a_i, b_i) : i \in J\}$ para algún conjunto J. Sean $\mathcal{U} = \{(a_i, b_i) : i \in J\}$, $A = \mathcal{S} - \bigcup \mathcal{U}$. Notemos primero que $\mathcal{U}$ es una cubierta de un subespacio de $\mathcal{S}$ con abiertos de la topología Euclidiana. Como la topología Euclidiana es segundo numerable, es hereditariamente Lindelöf. Entonces existe un subconjunto numerable $N_1 \subset J$ tal que $\bigcup\{(a_i, b_i) : a_i, b_i \in N_1\} = \bigcup \mathcal{U}$. Notemos que $A = \{a_i : i \in N_2\}$ para algún $N_2 \subset J$. Nos gustaría probar que N_2 es un conjunto numerable. Si $i, j \in N_2$ con $i \neq j$, entonces $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ ya que de lo contrario $a_i \in (a_j, b_j) \subset X - A$ ó $a_j \in (a_i, b_i) \subset X - A$. Entonces la familia $\{(a_i, b_i) : i \in N_2\}$ son abiertos (tanto en $\mathcal{S}$ como Euclideanos) ajenos dos a dos. Como el conjunto de racionales en $\mathcal{S}$ es denso, esta familia es a lo más numerable. Es decir, N_2 es numerable. Ahora consideremos $N = N_1 \cup N_2$; tenemos que el conjunto $\{[a_i, b_i) : i \in N\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{S}$ es Lindelöf. En particular, esto muestra que la propiedad de Lindelöf no implica segunda numerabilidad.

Para un ejemplo de espacio separable que no sea Lindelöf, consideramos $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ con la topología producto. Una base para la topología de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ es $\{[a, b) \times [c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. De esto, es claro que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, lo cual nos da la separabilidad. Para ver que no es Lindelöf, habrá que dar una cubierta abierta de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ que no tenga subcubierta finita. Para este fin, nos fijamos en el subconjunto $D = \{(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} : x = -y\}$ que geométricamente es la diagonal a $-\frac{\pi}{4}$. Sea $\mathcal{U} = \{[x, x+1) \times [-x, 1-x) : x \in \mathcal{S}\}$, que es una familia de abiertos. Notemos que la intersección de la diagonal con cada elemento de $\mathcal{U}$ es un singular. Consideremos ahora la cubierta abierta de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dada por $\mathcal{U} \cup \{\mathcal{S} \times \mathcal{S} - D\}$. Por la observación anterior, esta cubierta no tiene subcubierta numerable.

Para un espacio Lindelöf que no sea separable, consideremos un conjunto no numerable X, un punto $p \notin X$ y sea $Y = X \cup \{p\}$. Démosle a Y la topología en la que X es un subconjunto abierto discreto y las vecindades del punto p son de la forma $\{p\} \cup N$ donde $N \subset X$ es tal que $|X - N| \leq \aleph_0$. Es fácil convencerse que ésta es una topología Hausdorff. Cualquier subconjunto numerable de Y es cerrado pero distinto del total por lo que Y no puede ser separable. Sin embargo, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y, existe un $N \in \mathcal{U}$ tal que $p \in N$. Esto nos dice que $Y - N$ es numerable y puede ser cubierto por una subfamilia numerable de $\mathcal{U}$. Por lo tanto Y es Lindelöf.

Faltaría decidir si un espacio separable o Lindelöf tiene que ser primero numerable. Ninguna de las dos implicaciones se da por lo que se necesitarían contrajemplos para justificarlo. Sin embargo, dar estos contraejemplos se sale del objetivo de este trabajo. Se remite al lector a consultar el libro [14] que tiene una gran cantidad de contraejemplos.

Las propiedades mencionadas anteriormente son bastante conocidas para todos los estudiantes de topología. Una propiedad que tal vez no es tan conocida en cursos básicos, pero que sin embargo es bastante usada en las pruebas de los resultados anteriores (como se verá más abajo), es la llamada celularidad.

Si X es un espacio topológico Hausdorff, definimos su *celularidad*, $c(X)$, como el cardinal

$$\sup\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \text{ es familia de abiertos no vacíos de } X \text{ ajenos dos a dos}\} + \aleph_0.$$

Claramente $c(X)$ está bien definida ya que la cardinalidad de un conjunto de abiertos no vacíos ajenos dos a dos está acotada por la cardinalidad de $\mathscr{P}(X)$. Además, este supremo se alcanza por propiedades de los cardinales. Se le agrega $\aleph_0$ a la definición de la celularidad para no tener que preocuparse de las sutilezas de los cardinales finitos.

El primer espacio al que se nos podría ocurrir calcular su celularidad es $\mathbb{R}$. Para lograr esto, lo que tenemos que usar es que $\mathbb{Q}$ es un denso en $\mathbb{R}$. El resultado en general se puede expresar como el siguiente enunciado.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio Hausdorff. Si X es separable, entonces $c(X) = \aleph_0$.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso numerable de X. Supongamos que existe una familia de abiertos no vacíos ajenos dos a dos $\mathcal{U}$. Notemos que como D es denso y $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos, $D \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Definamos la función $f : D \cap (\bigcup \mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ de tal manera que $f(x)$ es el único elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a x. Éste es único ya que los elementos de $\mathcal{U}$ son ajenos dos a dos. Además, f es suprayectiva ya que D es denso. Entonces $|\mathcal{U}| \leq |D \cap (\bigcup \mathcal{U})| \leq \aleph_0$. Esto nos da la desigualdad $c(X) \leq \aleph_0$, que implica $c(X) = \aleph_0$. □

Notemos que el argumento de 2.2 es usado en la discusión de las cuatro propiedades que se definieron al principio de la sección, al decir que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso. Claramente hay espacios que tienen celularidad κ para cualquier cardinal κ. Para esto basta considerar un espacio discreto de cardinalidad κ.

Diremos que un espacio X tiene celularidad numerable si $c(X) = \aleph_0$. Para finalizar esta sección, veamos algunas propiedades intrínsecas de los espacios con celularidad numerable y la relación de esta propiedad con las otras que definimos anteriormente.

Proposición 2.3. *Si un espacio tiene celularidad numerable, entonces cualquier subespacio abierto de él tiene celularidad numerable.*

Demostración. Sean X con celularidad numerable y U abierto en X. Si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos ajenos no vacíos en U, entonces también es una familia de abiertos ajenos no vacíos en X y por lo tanto $|\mathcal{U}| \leq \aleph_0$. Así, $c(U) \leq \aleph_0$ por lo que U tiene celularidad numerable. $\square$

Algo que hay que notar es que la propiedad de celularidad numerable no se hereda a subespacios arbitrarios, ni siquiera a subespacios cerrados. Para esto, consideramos el espacio $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ el cual es separable porque el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso. Entonces, por la proposición 2.2, $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ tiene celularidad numerable. Sin embargo, la diagonal $D = \{(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} : x = -y\}$ es un subespacio cerrado, discreto y no numerable de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ya que cada $p \in D$ se tiene que $\{p\} = D \cap ([x, x+1) \times [-x, 1-x))$, donde $p = (x, -x)$.

Proposición 2.4. *La imagen continua de un espacio con celularidad numerable es un espacio con celularidad numerable.*

Demostración. Sean X un espacio con celularidad numerable, Y un espacio y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Sean $\mathcal{U}$ una familia de abiertos en Y no vacíos ajenos dos a dos y $\mathcal{U}' = \{f^{\leftarrow}[U] : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces $\mathcal{U}'$ es una familia de abiertos en X ya que f es continua. Todos los elementos de $\mathcal{U}'$ son no vacíos ya que f es suprayectiva. Además, claramente los elementos de $\mathcal{U}'$ son ajenos dos a dos. Entonces $|\mathcal{U}| = |\mathcal{U}'| \leq \aleph_0$, por lo que Y tiene celularidad numerable. $\square$

Diremos que un espacio X es *débilmente Lindelöf* si cada cubierta abierta de X tiene una subfamilia numerable cuya unión es densa en X. En particular, este nuevo concepto se relaciona con la celularidad de la siguiente manera.

Proposición 2.5. *Un espacio tiene celularidad numerable si y sólo si todo subespacio abierto es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Supongamos primero que X es un espacio con celularidad numerable. Por la proposición 2.3, es suficiente probar que X es débilmente Lindelöf. Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{B}$ de X que además no contenga al vacío. Por WO, podemos numerar la cubierta y escribir $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ para algún ordinal κ. Vamos a contruir, por inducción transfinita, una familia de abiertos no vacíos ajenos dos a dos $\mathcal{U} = \{U_{\alpha_\beta} : \beta < \kappa'\}$ para algún $\kappa' < \kappa$, tales que $U_{\alpha_\beta} \subset B_{\alpha_\beta}$ para cada $\beta < \kappa'$.

Definimos $\alpha_0 = 0$ y $U_{\alpha_0} = B_0$. Supongamos que $\gamma \leq \kappa$ y que tenemos definida una colección de abiertos no vacíos ajenos dos a dos $\mathcal{U}_\gamma = \{U_{\alpha_\beta} : \beta < \gamma\}$ tal que $U_{\alpha_\beta} \subset B_{\alpha_\beta}$ para cada $\beta < \gamma$.

Si tuvieramos que $\gamma = \kappa$, entonces hacemos $\kappa' = \gamma$ y $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\gamma$. Si $\gamma < \kappa$, consideramos dos casos. Primero, si $\mathrm{cl}_X(\bigcup \mathcal{U}_\gamma) = X$, hacemos $\kappa' = \gamma$ y $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\gamma$. En el otro caso, definimos

$$\alpha_\gamma = \min\{\lambda \in \mathsf{ord} : B_\lambda \nsubseteq \mathrm{cl}_X\Big(\bigcup \mathcal{U}_\gamma\Big)\}.$$

Notemos que este ordinal existe por el caso en el que estamos y el hecho de que $\mathcal{B}$ es cubierta. Definimos además $U_{\alpha_\gamma} = B_{\alpha_\gamma} - \mathrm{cl}_X(\bigcup \mathcal{U}_\gamma)$. Esto completa el paso inductivo.

Con esto tenemos definida la familia $\mathcal{U}$. Como X tiene celularidad numerable, obtenemos que κ' es un ordinal numerable. Además, se tiene que

$$X = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{U}\right) \subset \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \{B_{\alpha_\gamma} : \gamma < \kappa'\}\right),$$

lo cual nos dice que $\{B_{\alpha_\gamma} : \gamma < \kappa'\}$ es la subcubierta numerable buscada.

Ahora supongamos que todo subespacio abierto de X es hereditariamente Lindelöf y sea $\mathcal{B}$ una familia de abiertos no vacíos ajenos dos a dos. Entonces $\mathcal{B}$ es una cubierta para el subespacio abierto $\bigcup \mathcal{B}$. Por lo tanto, existe una subfamilia numerable $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{B}'$ es denso en $\bigcup \mathcal{B}$. Pero como $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos ajenos dos a dos, ninguna subfamilia propia puede ser densa en $\bigcup \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es numerable, por lo que X tiene celularidad numerable. $\square$

El concepto de espacio con celularidad numerable no coincide con las otras clases estudiadas en esta sección. Esto se estudiará más adelante en este trabajo.

2.2. El axioma MA.

El concepto de la celularidad numerable tiene su análogo en la teoría de conjuntos. Sea P un conjunto con un orden parcial $\leq$ y sea $A \subset P$. Dos elementos $x, y \in A$ distintos son *comparables* si existe un elemento $z \in A$ tal que $z \leq x$, $z \leq y$ y z no es el ínfimo de P. Un subconjunto $A \subset P$ es una *anticadena* si ningun par de sus elementos son comparables . Diremos que el conjunto P, parcialmente ordenado por $\leq$, cumple la *condición de anticadena numerable*, abreviada *cac* por sus siglas en inglés (countable antichain condition), si cualquier anticadena de elementos de P es numerable. Cabe aclarar que esta condición se conoce mejor como la *condición de cadena numerable, ccc*. Sin embargo, como esta condición habla de anticadenas, no de cadenas, usaremos el nombre cac que además ya ha sido usado antes, por ejemplo, en [12].

Diremos que un espacio topológico X cumple la cac si la topología de X como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, cumple la cac. Notemos que una anticadena en la topología de X es una colección de abiertos no vacíos ajenos dos a dos. De esta manera, la condición de que un espacio topológico tenga celularidad numerable es equivalente a decir que el espacio cumple la cac.

Desde que P.J. Cohen demostró en [1, 2] que CH era independiente de los axiomas de teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más AC, varias preguntas en matemáticas, en vez de plantearse como "¿es cierto que ...?" pasaron a ser una pregunta de tipo "¿es consistente que ...?". El *axioma de Martin* es un enunciado consistente con Zermelo-Fraenkel más AC que ha servido para contestar este tipo de preguntas. En realidad, para cada cardinal infinito κ, hay un enunciado que es llamado el κ-ésimo axioma de Martin y lo denotaremos por $\mathsf{MA}(\kappa)$. El axioma de Martin fue definido en la teoría de conjuntos pensando en conjuntos parcialmente ordenados de la manera siguiente.

[$\mathsf{MA}(\kappa)$] Sea P es un conjunto parcialmente ordenado que cumple la cac. Si $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de subconjuntos densos (en el sentido del orden) de P, entonces existe un P-filtro F tal que $F \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$.

Existe una equivalencia topológica del axioma de Martin descrito de la siguiente manera. Su demostración requiere de bastante herramienta que se sale del objetivo de este trabajo. Se remite al lector a [13, 3.5(i), p. 201].

Teorema 2.6. *Sea κ un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathsf{MA}(\kappa)$,

(b) Sea X es un espacio Hausdorff compacto que cumple la cac. Si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en X, entonces $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$.

La primera pregunta que uno se puede hacer es sobre la validez lógica de este enunciado. Sucede que la verdad de este enunciado para cardinales fuera del intervalo $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ está completamente determinada por los axiomas de Zermelo-Fraenkel más AC.

Proposición 2.7. *Sea κ un cardinal infinito, entonces*

(a) *si $\kappa = \aleph_0$, entonces $\mathsf{MA}(\kappa)$ es verdadero,*

(b) *si $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$, entonces $\mathsf{MA}(\kappa)$ es falso.*

Demostración. Para la parte (a), sólo hay que recordar el Teorema de Categoría de Baire que dice que si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces la intersección de cualquier familia numerable de abiertos densos de X es densa en X y por lo tanto, no vacía. La demostración de este resultado se puede encontrar en [17, 25.3, p. 186]. Observamos que en este caso, la condición de que X sea cac no es necesaria.

Para la parte (b), primero notemos que si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ son cardinales, entonces $\mathsf{MA}(\kappa_2)$ implica $\mathsf{MA}(\kappa_1)$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que $\mathsf{MA}(2^{\aleph_0})$ es falso. Para esto, consideramos el intervalo unitario I, que sabemos que es compacto y cac (ya que es separable). Tomemos la familia de abiertos densos $\{I - \{x\} : x \in [0,1]\}$ que claramente es de cardinalidad $|I| = 2^{\aleph_0}$. La intersección de esta familia es vacía por lo que $\mathsf{MA}(2^{\aleph_0})$ es falso. □

El resultado anterior nos dice que el estudio de la validez del axioma de Martin tiene sentido sólamente para cardinales κ tales que $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$. Sucede que se puede probar que $\mathsf{MA}(\aleph_1)$ es consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel [11, VIII, §6]. Por la poposición 2.7, $\mathsf{MA}(\aleph_1)$ implica la negación de CH. El problema principal de este trabajo tendrá una respuesta independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más AC, y en particular será decidible si suponemos $\mathsf{MA}(\aleph_1)$.

Se recomienda al lector consultar [6] si quiere conocer más acerca del Axioma de Martin.

2.3. Producto de Espacios cac.

A partir de ahora, a un espacio con celularidad numerable le llamemaremos *espacio cac*. Cuando uno tiene una propiedad topológica y desea estudiarla, una pregunta natural que se puede hacer es si se preserva bajo la formación de productos. Como primer ejemplo de esto, consideremos el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Sea $\{X_i : i \in J\}$ una familia de espacios Hausdorff y $X = \prod\{X_i : i \in J\}$.*

(1) X es segundo numerable si y sólo si cada X_i es segundo numerable y todos excepto a lo más $\aleph_0$ de los X_i son espacios de un solo punto.

(2) X es separable si y sólo si cada X_i es separable y todos excepto a lo más $2^{\aleph_0}$ de los X_i son espacios de un solo punto.

Demostración. Empecemos con la prueba de (1). Primero supongamos que X es segundo numerable. Sea $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$ una base numerable para la topología de X. Por el lema 2.1, podemos suponer que los elementos de $\mathcal{B}$ son básicos canónicos. Entonces para cada $n \in \omega$, existen $j_1^n, \ldots, j_{m(n)}^n \in J$ y abiertos $U_n(1), \ldots, U_n(m(n))$ de $X_{j_1^n}, \ldots, X_{j_{m(n)}^n}$ tales que

$$U_n = \pi_{j_1^n}^{-1}[U_n(1)] \cap \ldots \cap \pi_{j_{m(n)}^n}^{-1}[U_n(m(n))].$$

Primero veamos que todos excepto $\aleph_0$ de los espacios son de un solo punto. Sea $N = \{j_k^i : i \in \omega, k \in \{1, \ldots, m(n)\}\}$ el cual es un conjunto numerable. Afirmamos que si $j \in J - N$, entonces $|X_j| = 1$. Supongamos que esto no ocurre y tomemos dos puntos $x_j, y_j \in X_j$ con $x_j \neq y_j$. También, para cada $i \in J - \{j\}$, sea $x_i \in X_i$. Sea x el punto de X con su i-ésima coordenada igual a x_i para todo $i \in J$, y sea $y \in X$ que coincida en todas sus coordenadas con x excepto en la j-ésima en la cual la tomamos igual a y_j. Como X es Hausdorff, deberían existir dos elementos de $\mathcal{B}$ que separan a x y y, lo cual es falso. Por lo tanto, llegamos a una contradicción que prueba que efectivamente $|X_j| = 1$, si $j \in J - N$.

Ahora probemos que el resto de los espacios son segundo numerables. Consideremos, para cada $j \in N$, $\mathcal{B}_j = \{\pi_j[U_n] : n \in \omega\}$. Claramente $\mathcal{B}_j$ es una colección numerable de abiertos de X_j. Para probar que $\mathcal{B}_j$ es base de los abiertos de X_j, consideremos $x_j \in X_j$ y un abierto W de X_j tal que $x_j \in W$. Para cada $i \in J - \{j\}$, sea x_i un punto cualquiera y sea $x \in X$ el punto cuya i-ésima coordenada es x_i para todo $i \in J$. Como $x \in \pi_j^{-1}[W]$, existe $m \in \omega$ tal que $x \in U_m \subset \pi_j^{-1}[W]$. Entonces $x_j \in \pi_j[U_m] \subset W$ lo cual prueba que $\mathcal{B}_j$ es base para los abiertos de X_j.

Ahora supongamos que X_j es segundo numerable para todo $j \in J$ y que además J es numerable y $J = \omega$, para simplificar la prueba. Para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{B}_n$ una base numerable para la topología de X_n. Definimos

$$\mathcal{B} = \{\pi_0^{-1}[U_0] \cap \ldots \cap \pi_r^{-1}[U_r] : r \in \omega, \text{ y } U_i \in \mathcal{B}_i \text{ para cada } i \in \{0, \ldots, r\}\},$$

Claramente $\mathcal{B}$ es numerable, para ver que es base, tomamos $x \in X$ y un abierto W de X con $x \in W$. Podemos suponer que W es básico y además de la forma

$W = \pi_0^{-1}[W_0] \cap \ldots \cap \pi_t^{-1}[W_t]$ para $t \in \omega$ y W_r abierto en X_r para todo $r \in \{0, \ldots, t\}$. Para cada $r \in \{0, \ldots, t\}$, sea $V_r \in \mathcal{B}_r$ tal que $\pi_r(x) \in V_r \subset W_r$. Entonces, $V = \pi_0^{-1}[V_0] \cap \ldots \cap \pi_t^{-1}[V_t]$ es un elemento de $\mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset W$.

Esto completa la prueba de (1), ahora pasemos a la prueba de (2).

Supongamos que X es separable y sea D un conjunto denso y numerable en X. Para cada $j \in J$, sea $D_j = \pi_j[D]$, es decir, el conjunto de coordenadas j-ésimas de los puntos de D, el cual claramente es numerable. Además, D_j es denso en X_j ya que si U_j es un abierto no vacío en X_j, podemos tomar $x \in \pi_j^{-1}[U_j] \cap D$ de lo cual $\pi_j(x) \in D_j \cap U_j$.

Para lo que resta, sea $K = \{j \in J : |X_j| > 1\}$, nos gustaría probar que $|K| \leq 2^{\aleph_0}$. Para $j \in K$, como X_j es Hausdorff, existen dos abiertos de X_j no vacíos y ajenos U_j, V_j. Definamos la función $f : K \to \mathscr{P}(D)$ como $f(j) = D \cap \pi_j^{-1}[U_j]$. Notemos que f es inyectiva ya que si $i, j \in K$ con $i \neq j$, entonces el conjunto $W_i^j = D \cap \pi_j^{-1}[V_j] \cap \pi_i^{-1}[U_i]$ es no vacío y cumple que $W_i^j \subset f(i) - f(j)$. De la inyectividad de f se sigue que $|K| \leq |\mathscr{P}(D)| \leq 2^{\aleph_0}$, que era lo que nos faltaba.

Ahora supongamos que, para cada $j \in J$, X_j es separable. Notemos que podemos suponer que $|J| = 2^{\aleph_0}$ por el siguiente argumento. Si $|J| < 2^{\aleph_0}$, X es imagen continua de $Y = X \times \prod \{\mathbb{R}_k : k \in K\}$, en donde K es un conjunto ajeno a J, $|K \cup J| = 2^{\aleph_0}$ y $\mathbb{R}_k = \mathbb{R}$ para todo $k \in K$. De aquí es fácil ver que si Y es separable, también X lo es. También podemos suponer que J es igual al intervalo cerrado $I = [0, 1]$ y que $|X_i| > 1$ para todo $i \in I$. Para cada $i \in I$, sea $D_i = \{p(i, j) : j \in \omega\}$ un subconjunto denso numerable de X_i. Consideremos el conjunto Q de subintervalos cerrados de I que tienen extremos en $\mathbb{Q}$, el cual es claramente numerable. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$Q(k) = \{(I_1, \ldots, I_k) \in Q^k : I_i \cap I_j = \emptyset \text{ si } i, j \in \{1, \ldots, k\} \text{ y } i \neq j\},$$

el cual claramente también es numerable. Finalmente, consideremos

$$\mathscr{C} = \{(I_1, \ldots, I_k; n_1, \ldots, n_k) : k \in \mathbb{N}, (I_1, \ldots, I_k) \in Q(k), n_1, \ldots, n_k \in \omega_0\},$$

el cual también resulta ser un conjunto numerable. Para cada $P \in \mathscr{C}$, con $P = (I_1, \ldots, I_k; n_1, \ldots, n_k)$, escojamos un punto $x(P) \in X$ de la siguiente manera. Si $i \in I_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, k\}$, ponemos $\pi_i(x(P)) = p(i, n_i)$; si $i \notin I_1 \cup \ldots \cup I_k$, ponemos $\pi_i(x(P)) = p(i, 0)$. Sea $D = \{x(P) : P \in \mathscr{C}\}$, el cual es un conjunto numerable. Para ver que es denso, consideremos un abierto W en X. Podemos suponer que W es básico, así que escribamos $W = \pi_{i_1}^{-1}[W_1] \cap \ldots \cap \pi_{i_r}^{-1}[W_r]$, donde $r \in \mathbb{N}$ y W_j es abierto en X_{i_j} para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Sean $J_1, \ldots, J_r$ intervalos cerrados ajenos dos a dos tales que $i_j \in J_j$ para $j \in \{1, \ldots, r\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que $D_{i_j} \cap W_j \neq \emptyset$, por lo que existe $m_j \in \omega$ tal que $p(i_j, m_j) \in W_j$. Sea $R = (J_1, \ldots, J_r; m_1, \ldots, m_r) \in \mathscr{C}$. De aquí es claro que $x(R) \in W$, lo cual prueba que D es denso. Esto concluye la prueba de (2). $\square$

Una generalización de la parte (2) del teorema 2.8 se encuentra en el teorema 5.4.

Otra observación pertinente que ya argumentamos es que la línea de Sorgenfrey $\mathcal{S}$ es Lindelöf pero $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ no lo es, por lo que la propiedad de Lindelöf no se conserva bajo productos, en general.

Resulta natural preguntarnos en este punto si ser cac es una propiedad que se conserva bajo productos. Esta pregunta no es nada trivial, su respuesta es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, y es la que nos dedicaremos a estudiar en los capítulos siguientes. El primer paso es reducir el problema a uno menos general.

Para esto, necesitamos un resultado técnico de teoría de conjuntos. Dado un conjunto S, diremos que una subfamilia $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(S)$ es un Δ-*sistema* si existe un subconjunto $T \subset S$ tal que cada vez que $A, B \in \mathscr{F}$, con $A \neq B$, se tiene que $A \cap B = T$. En este caso, T se denomina la *raíz* del Δ-sistema. Un ejemplo trivial de esto es una familia de conjuntos ajenos dos a dos, en este caso la raíz es el conjunto vacío.

Lema 2.9. *Sean S un conjunto, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathscr{F}$ una cantidad no numerable de subconjuntos de S, todos con cardinalidad n. Entonces existe un Δ-sistema no numerable $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$, $\mathscr{F}$ es un Δ-sistema con raíz igual al conjunto vacío. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y supongamos que el resultado se cumple para todo $k < n$. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{Z} = \{\mathscr{F}' \subset \mathscr{F} : \text{ si } A, B \in \mathscr{F}' \text{ y } A \neq B, \text{ entonces } A \cap B = \emptyset\}.$$

El cual claramente es distinto del vacío (consideramos algún unitario de un elemento de $\mathscr{F}$). Si $\mathscr{C} \subset \mathcal{Z}$ es una cadena, claramente $\bigcup \mathscr{C} \in \mathcal{Z}$ por lo que podemos aplicar ZORN, el cual nos dice que existe un máximo en $\mathcal{Z}$. Sea $\mathscr{M} \in \mathcal{Z}$ un máximo. Si $\mathscr{M}$ es no numerable, éste es el Δ-sistema buscado.

Supongamos que esto no ocurre. Consideramos, para cada $A \in \mathscr{M}$, el conjunto $\mathscr{F}(A) = \{B \in \mathscr{F} : A \cap B \neq \emptyset\}$. Por la maximalidad de $\mathscr{M}$, para cada $B \in \mathscr{F} - \mathscr{M}$, existe $A \in \mathscr{M}$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Esto nos dice que $\mathscr{F} = \bigcup\{\mathscr{F}(A) : A \in \mathscr{M}\}$. Como $\mathscr{M}$ es numerable, existe $A_0 \in \mathscr{M}$ tal que $\mathscr{F}(A_0)$ es no numerable.

Para cada $x \in A_0$, sea $\mathscr{F}(A_0, x) = \{B \in \mathscr{F} : x \in B\}$. Notemos que si $B \in \mathscr{F}(A_0, x)$, entonces $B \in \mathscr{F}(A_0)$ y por lo tanto, $\mathscr{F}(A_0) = \bigcup\{\mathscr{F}(A_0, x) : x \in A_0\}$. Como A_0 es un conjunto finito, existe un $x_0 \in A_0$ tal que $\mathscr{F}(A_0, x_0)$ es no numerable.

Consideremos entonces la colección $\{A - \{x_0\} : A \in \mathscr{F}(A_0, x_0)\}$. Esta es una colección no numerable de subconjuntos de cardinalidad $n - 1$, por lo que contiene un Δ-sistema $\mathscr{D}'$ no numerable, por hipótesis de inducción. La colección $\mathscr{D} = \{A \cup \{x_0\} : A \in \mathscr{D}'\}$ es el Δ-sistema buscado contenido en $\mathscr{F}$. □

Lema 2.10. *Sea S un conjunto y $\mathscr{F}$ una cantidad no numerable de subconjuntos finitos de S. Entonces existe un Δ-sistema no numerable $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}_n = \{A \in \mathscr{F} : |A| = n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F}_n$ es no numerable. Por el lema 2.9, éste contiene un Δ-sistema $\mathscr{D}$ no numerable. □

La reducción del problema del producto de espacios cac se da a continuación.

Teorema 2.11. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios Hausdorff indicada por un conjunto S. Se tiene que $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in S\}$ es cac si y sólo si $X(F) = \prod \{X_\alpha : \alpha \in F\}$ es cac para todo subconjunto finito $F \subset S$.*

Demostración. Las proyecciones sobre subproductos finitos son funciones continuas, por lo que la proposición 2.4 implica que si X es cac, también lo es cada $X(F)$ con $F \subset S$ finito.

Para el regreso, supongamos que existe una colección no numerable $\mathscr{U}$ de abiertos no vacíos del producto X, ajenos dos a dos. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que todos ellos son abiertos básicos. Para cada $i \in S$, sea $\pi_i : X \to X_i$ la proyección. Escribamos

$$\mathscr{U} = \Big\{ \bigcap_{k \in F_i} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] : i \in J \Big\},$$

donde J es un conjunto no numerable, F_i es un subconjunto finito de S distinto del vacío para cada $i \in J$ y U_{k,F_i} es abierto en X_k para cada $k \in F_i$ e $i \in J$.

La colección $\{F_i : i \in J\}$ cumple las condiciones del lema 2.10, así que hay un conjunto no numerable $J' \subset J$ y un subconjunto finito $F^* \subset S$ tal que si $i, j \in J'$ e $i \neq j$, entonces $F_i \cap F_j = F^*$. Observemos que F^* es distinto del vacío ya que de lo contrario, cualesquiera dos abiertos de la colección $\{\bigcap_{k \in F_i} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] : i \in J'\}$ tendrían intersección no vacía, lo cual contradice la hipótesis. Sea $p_i : X(F^*) \to X_i$ la proyección para cada $i \in F^*$. Consideramos la siguiente colección no numerable de abiertos no vacíos de $X(F^*)$:

$$\mathscr{V} = \Big\{ \bigcap_{k \in F^*} p_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] : i \in J' \Big\}.$$

Ahora notemos que esta colección tiene sus elementos ajenos dos a dos. Para confirmar esta afirmación, tomemos

$$U = \bigcap_{k \in F^*} p_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}]$$

$$V = \bigcap_{k \in F^*} p_k^{\leftarrow}[U_{k,F_j}]$$

dos elementos distintos de este conjunto que se intersecten en un punto $y \in X(F^*)$.

Definimos $x \in X$ de la siguiente manera: Si $k \in F^*$, tomamos $\pi_k(x) = p_k(y)$; si $k \in F_i - F^*$, tomamos $\pi_k(x) \in U_{k,F_i}$ cualquier punto; si $k \in F_j - F^*$, tomamos $\pi_k(x) \in U_{k,F_j}$ cualquier punto; y si $k \notin F_i \cup F_j$, escogemos $\pi_k(x)$ arbitrariamente en X_k. Es claro de la definición de x que

$$x \in \Big[\bigcap_{k \in F_i} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] \Big] \cap \Big[\bigcap_{k \in F_j} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_j}] \Big],$$

lo cual contradice que la familia $\mathscr{U}$ tiene sus elementos ajenos dos a dos. Esto prueba la otra implicación ya que probamos que si X no es cac, existe un subconjunto finito $F^* \subset S$ tal que $X(F^*)$ no es cac. $\square$

Una consecuencia del teorema 2.11 es el siguiente corolario.

Corolario 2.12. *Un producto de espacios Hausdorff separables tiene celularidad numerable.*

Demostración. Por el teorema 2.11, es suficiente demostrar que el producto de cualesquiera dos espacios separables es separable, lo cual se sigue de la proposición 2.8. □

Para un cardinal infinito κ consideremos el espacio $\mathbf{2}^\kappa$, llamado el κ-*espacio de Cantor*. En particular, cuando $\kappa = \aleph_0$, este es el famoso Conjunto de Cantor, que es homeomorfo a los números reales entre 0 y 1 que en su expansión ternaria sólo usan los dígitos 0 y 2. Se recomienda al lector consultar la sección 30 de [17] donde se dan varias propiedades del Conjunto de Cantor. El κ-espacio de Cantor es un ejemplo perfecto de un espacio de celularidad numerable, por el lema 2.12, y que sin embargo no es separable si $\kappa > 2^{\aleph_0}$ y no es segundo numerable si $\kappa > \aleph_0$, por el lema 2.8.

El siguiente paso es resolver el problema de la celularidad del producto de espacios cac que, como mencionamos antes, será independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más AC. Si suponemos MA, obtendremos que el producto de espacios cac es siempre cac, esto se desarrollará en el capítulo 3. Si suponemos CH, podremos construir dos espacios cac cuyo producto no sea cac, esto se desarrollará en el capítulo 4.

Capítulo 3

[$\mathsf{MA}(\aleph_1)$] El producto de espacios cac es un espacio cac.

En este capítulo probaremos que si suponemos MA, podemos demostrar que el producto de dos espacios Hausdorff cac es cac. Por el teorema 2.11, tendremos que el producto arbitrario de espacios Hausdorff cac es cac. Como aplicación de esto, daremos una respuesta parcial (que usa MA) a un problema conocido como el *problema de Souslin*. Este problema consiste en caracterizar a los reales dentro de los espacios ordenados, usando la cac.

3.1. Resultado principal

Empezamos con un resultado preliminar.

Lema 3.1 ($\mathsf{MA}(\kappa)$)**.** *Sean κ un cardinal regular no numerable, X un espacio Hausdorff cac y $\mathscr{U}$ una colección de exactamente κ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Entonces existe $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ con la propiedad de la intersección finita tal que $|\mathscr{W}| = \kappa$.*

Demostración. Por WO, podemos escribir $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, definimos $V_\alpha = \bigcup\{U_\beta : \alpha < \beta < \kappa\}$. Notemos que si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces $V_\beta \subset V_\alpha$. El primer paso de nuestra argumentación es demostrar que existe un $\alpha_0 < \kappa$ tal que se cumple:

($*$) $\mathrm{cl}_X(V_{\alpha_0}) = \mathrm{cl}_X(V_\beta)$ para todo $\beta > \alpha_0$.

Para demostrar ($*$), supongamos que es falso. Entonces, para cada $\alpha < \kappa$, se tiene que $\mathrm{cl}_X(V_{\beta_\alpha}) \subsetneqq \mathrm{cl}_X(V_\alpha)$ para algún $\alpha < \beta_\alpha < \kappa$. Podemos suponer que además β_α es el mínimo ordinal que cumple esta condición. Como V_α es denso en su cerradura, tenemos que también se da $\mathrm{cl}_X(V_{\beta_\alpha}) \subsetneqq V_\alpha$.

Definamos un conjunto $\{\mu(\alpha) : \alpha < \kappa\}$ por recursión transfinita, de manera que $\mu(0) = 0$ y $\mu(\alpha) = \sup\{\beta_{\mu(\gamma)} : \gamma < \alpha\} + 1$. Como κ es regular, en cada paso α de la recursión, obtiene que $\mu(\alpha) < \kappa$, ya que $\{\beta_{\mu(\gamma)} : \gamma < \alpha\}$ está contenido en κ y tiene cardinalidad estrictamente menor que κ.

Con esto, definamos $W_\alpha = V_{\mu(\alpha)} - \mathrm{cl}_X\big(V_{\beta_{\mu(\alpha)}}\big)$, que resulta ser un abierto distinto del vacío para cada $\alpha < \kappa$. Por la elección del conjunto $\{\mu(\alpha) : \alpha < \kappa\}$, obtenemos que $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ resulta ser una anticadena de abiertos de X, lo cual contradice la cac.

Por lo tanto se cumple $(*)$ y podemos pensar que α_0 es el mínimo ordinal con esta propiedad. Sea P el conjunto de abiertos no vacíos de V_{α_0}, parcialmente ordenado por la inclusión. Para cualquier ordinal β con $\alpha_0 < \beta < \kappa$, definimos

$$D_\beta = \{U \in P : U \subset U_\gamma \text{ para algún } \gamma > \beta\}.$$

Veamos que D_β es denso en el conjunto parcialmente ordenado P. Para esto, tomamos un abierto no vacío $U \subset V_{\alpha_0}$ y $\alpha_0 < \beta < \kappa$. Si tuvieramos que $U \cap V_\beta = \emptyset$, entonces $U \subset \mathrm{cl}_X(V_{\alpha_0}) - V_\beta$ lo cual contradice $(*)$. Por lo tanto, podemos tomar un punto $x \in U \cap V_\beta$. Entonces existe $\gamma > \beta$ con $x \in U_\gamma$. Así, $U \cap U_\gamma \in D_\beta$ es tal que $U \cap U_\gamma \subset U$.

Como X es cac y V_{α_0} es abierto, la proposición 2.3 nos dice que V_{α_0} también es cac. Entonces P, como conjunto parcialmente ordenado, es cac. Notemos también que $\{D_\beta : \alpha_0 < \beta < \kappa\}$ es un conjunto de a lo más κ subconjuntos densos de P. Por MA, obtenemos que existe un P-filtro $F \subset P$ con $F \cap D_\beta \neq \emptyset$ para todo $\alpha_0 < \beta < \kappa$.

Como P es una colección de abiertos no vacíos en X, obtenemos que F es una base de filtro abierto en X. Sea $\mathscr{F}$ el filtro abierto de X generado por F. Afirmamos que $\mathscr{W} = \mathscr{F} \cap \mathscr{U}$ es la colección buscada. Claramente $\mathscr{W}$ tiene la propiedad de la intersección finita porque $\mathscr{F}$ es un filtro de abiertos. Para ver que $|\mathscr{W}| = \kappa$, nos fijamos en el conjunto $W = \{\gamma < \kappa : U_\gamma \in \mathscr{W}\}$. Para cada $\alpha_0 < \beta < \kappa$, tomemos $U \in D_\beta \cap F$. Por definición, existe $\gamma > \beta$ tal que $U \subset U_\gamma$. Como $\mathscr{F}$ es el filtro generado por F, obtenemos que $U_\gamma \in \mathscr{F}$. Esto demuestra que $\gamma \in W$, lo cual implica que $\sup W = \kappa$. Como κ es regular, tiene que darse que $|W| = \kappa$ y por lo tanto, $|\mathscr{W}| \geq \kappa$. Como además $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$, obtenemos la igualdad deseada.

□

Una vez que ya tenemos el resultado del lema 3.1, podemos demostrar el teorema principal de este capítulo:

Teorema 3.2 ([$\mathsf{MA}(\aleph_1)$]). *Si X y Y son dos espacios Hausdorff cac, entonces $X \times Y$ es cac.*

Demostración. Supongamos que X y Y son cac pero $X \times Y$ no es cac. Entonces podemos encontrar una familia no numerable de abiertos de $X \times Y$, distintos del vacío, ajenos dos a dos. Además esta familia la podemos tomar de exactamente $\aleph_1$ abiertos básicos, de la forma $\mathcal{B} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ con $U_\alpha \times V_\alpha \neq U_\beta \times V_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $\alpha \neq \beta$.

Notemos que el espacio X y la colección $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ cumple las condiciones del lema 3.1, por lo que existe $A \subset \omega_1$ no numerable tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora, fijemonos que el espacio Y y la colección $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ satisface las condiciones del lema 3.1, por lo que existe $B \subset A$ no numerable tal que $\{V_\alpha : \alpha \in B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Tomemos $i, j \in B$ distintos. Entonces $(U_i \times V_i) \cap (U_j \times V_j) \neq \emptyset$, lo cual contradice la elección de la familia $\mathcal{B}$. Por lo tanto, $X \times Y$ es cac. $\square$

Como corolario, podemos decir lo siguiente, en presencia de $\mathsf{MA}(\aleph_1)$.

Corolario 3.3 ($\mathsf{MA}(\aleph_1)$)**.** *El producto arbitrario de espacios Hausdorff cac es cac.*

Demostración. Por el teorema 2.11, sabemos que es suficiente demostrar este colorario para productos finitos. Por inducción es suficiente demostrarlo para el producto de dos espacios, lo cual es el teorema 3.2. $\square$

3.2. El problema de Souslin

Un problema bastante natural es caracterizar al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ por sus propiedades topológicas. Empecemos definiendo, en un conjunto totalmente ordenado X, la topología llamada *topología del orden*. Ésta está definida como la mínima topología que contiene al conjunto $\{(\leftarrow, x) : x \in X\} \cup \{(x, \rightarrow) : x \in X\}$. Si X es totalmente ordenado y tiene la topología del orden, llamémoslo simplemente *espacio ordenado*. De aquí, es claro que la topología Euclidiana de $\mathbb{R}$ coincide con su topología del orden.

Consideremos el problema de darle suficientes condiciones a un espacio ordenado R de tal manera que R sea homeomorfo a $\mathbb{R}$. Consideremos las siguientes propiedades que puede tener un espacio ordenado R:

(1) R no tiene ni primer ni último elemento,

(2) el orden de R es denso; es decir, si $a, b \in R$ y $a < b$, entonces $(a, b) \neq \emptyset$,

(3) el orden de R es completo condicionalmente; es decir, si $S \subset R$ y existen $a, b \in R$ tales que $S \subset (a, b)$, entonces S tiene supremo e infimo,

(4) R es un espacio topológico separable,

(5) R es un espacio topológico cac.

Cabe aclarar que la condición (2) habla de la densidad del orden, no del espacio topológico. Notemos que otra forma de escribir (1) es diciendo que si $a \in R$, entonces $(\leftarrow, a) \neq \emptyset \neq (a, \rightarrow)$, por lo que en cierto sentido es una condición similar a la (2). Notemos que $\mathbb{R}$ posee todas las propiedades anteriores. De hecho, se tiene lo siguiente.

Teorema 3.4. *Sea R un espacio ordenado que cumple las propiedades del* (1) *a* (4) *anteriores. Entonces R es homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demostración. En [13, 2.5(f), p. 112] se prueba que un isomorfismo de orden entre espacios ordenados es un homeomorfismo. Por esto y el hecho de que $(0,1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, es suficiente dar un isomorfismo de orden $F : R \to (0,1)$. Sea $Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ el subconjunto denso numerable de R dado por la condición (4). Primero daremos un isomorfismo de orden entre Q y el conjunto de los racionales diádicos $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ y después extenderemos éste a uno de R sobre $(0,1)$ usando que D es denso en $(0,1)$.

Definamos el isomorfismo de orden $f : Q \to D$ en q_n por inducción en $n \in \mathbb{N}$. Empezamos definiendo en el primer paso $f(q_1) = 1/2$. Por (1), existen $c_1^1, c_2^1 \in \omega$ que cumplen $q_{c_1^1} < q_1 < q_{c_2^1}$ que además son los primeros en cumplir esta condición. Entonces, en este segundo paso hagamos $f(q_{c_1^1}) = 1/4$ y $f(q_{c_2^1}) = 3/4$. Notemos que en este paso al menos se ha definido la función f en $\{q_1, q_2\}$ ya que $2 \in \{c_1^1, c_2^1\}$. Supongamos entonces que en el paso n ya tenemos definido f para $2^n - 1$ elementos de Q, al menos en $\{q_1, \ldots, q_n\}$ y tal que f es una biyección sobre los racionales diádicos que en su forma reducida tengan denominador 2^k con $k \in 1, \ldots, n$. En el paso $n+1$, encontramos los primeros 2^n números naturales $\{c_k^n : k \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ tales que $q_{c_k^n}$ esté en el interior del k-ésimo intervalo en el que se divide R por los elementos en los que ya está definida la función en el paso anterior, cada cual es distinto del vacío por las condiciones (1) y (2). Claramente podemos definir f en $\{q_{c_k^n} : k \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ tomando como valores a los racionales diádicos en $(0,1)$ que en su expresión reducida tienen denominador 2^{n+1} de tal forma que se preserve el orden. Como además elegimos los subíndices mínimos, sabemos que en este paso hemos definido a f en al menos $\{q_1, \ldots, q_{n+1}\}$ de tal forma que es una biyección sobre todos los racionales diádicos con denominador 2^k, con $k \in 1, \ldots, n+1$. Esto completa la inducción. La función está claramente definida en todo Q y su imagen es D, además su inyectividad se puede comprobar en los pasos de la inducción.

Ahora extendamos a f. Para cada $a \in R$, definamos $F(a) = \sup f[(\leftarrow, a) \cap Q]$. Por las condicíones (1), (3) y el hecho de que f es biyectiva, F está bien definida. Como f es isomorfismo de orden, $F(a) = f(a)$ cuando $a \in Q$. Para ver que F conserva el orden, sean $a, b \in R$ con $a < b$. Por la condición (2) y (4), existe $c \in Q \cap (a,b)$. Tenemos que c es un elemento de $(\leftarrow, b) \cap Q$ que además es cota superior de $(\leftarrow, a) \cap Q$. Como además f es isomorfismo de orden, tenemos que $F(a) < F(b)$. De esto, también obtenemos que F es inyectiva. Por último, para ver que F es sobre, tomemos $x \in (0,1)$ y definamos $a = \sup f^{-1}[(0,x)]$, el cual está bien definido porque f es isomorfismo de orden. Afirmamos $F(a) = x$. Sea $b \in (\leftarrow, a) \cap Q$. Por la definición de a, existe $y \in (0,1) \cap D$ tal que $f^{-1}(y) \in (b,a)$. Como f preserva el orden, $f(b) < y < x$, lo cual demuestra que x es cota superior del conjunto $f[(\leftarrow, a) \cap Q]$. Ahora hay que demostrar que x es la cota mínima. Supongamos que no es así, y que $y = F(a) < x$. Tomemos $z \in D \cap (y,x)$, veamos que $f^{-1}(z) < a$. Si no es así, es una cota superior de $f^{-1}[(0,x)]$ y como f preserva el orden, $z \geq x$. Esta contradicción nos dice que efectivamente $f^{-1}(z) < a$. Pero esto contradice la definición de y, por lo cual efectivamente $x = F(a)$. Esto completa la suprayectividad y así, F es el isomorfismo de orden buscado. $\square$

Esto nos da una buena caracterización de $\mathbb{R}$ como espacio ordenado. En 1920, M.M. Souslin hizo la pregunta siguiente:

Problema de Souslin ([15]): En un espacio ordenado R, ¿son suficientes las condiciones (1) a (3) más la condición (5) para que R sea homeomorfo a $\mathbb{R}$?

La respuesta es bastante más complicada de lo que uno esperaría, ya que es indecidible usando unicamente los axiomas de Zermelo-Fraenkel más AC. La respuesta es, inclusive, independiente de CH. Para una discusión más extensa de este problema se recomienda al lector consultar [3]. Como una aplicación del teorema 3.2 veremos que $\mathsf{MA}(\aleph_1)$ implica una respuesta en afirmativo.

Teorema 3.5 ([$\mathsf{MA}(\aleph_1)$])**.** *Sea X un espacio ordenado con su topología del orden que es cac. Entonces X es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{I} = \{(a,b) : a,b \in X, a < b\}$. Consideramos el conjunto $\mathcal{Z}$ de todos las familias $\mathscr{F}$ de conjuntos no vacíos de la forma $A \times B$, con $A, B \in \mathcal{I}$ y $A \cap B = \emptyset$ tales que los elementos de $\mathscr{F}$ son ajenos dos a dos. Aplicando ZORN a $\mathcal{Z}$, encontramos $\mathscr{M} \in \mathcal{Z}$ un elemento maximal. Por el teorema 3.2, tenemos que $X \times X$ es cac, así que $\mathscr{M}$ es numerable y escibiremos $\mathscr{M} = \{(x_i, y_i) \times (z_i, w_i) : i \in \omega\}$. Definimos

$$Y = \{x_i : i \in \omega\} \cup \{y_i : i \in \omega\} \cup \{z_i : i \in \omega\} \cup \{w_i : i \in \omega\}.$$

Por ser X cac, el conjunto de puntos aislados $Z = \{x \in X : \{x\} \text{ es abierto}\}$ es numerable. Afirmamos que $Y \cup Z$ es denso en X.

Supongamos que no es así, sea $G = X - \mathrm{cl}_X(Y \cup Z)$. Así, G es un abierto sin puntos aislados, por lo que podemos escoger $a, b, c \in X$ tales que $(a,b) \neq \emptyset \neq (b,c)$ y $(a,c) \subset G$. Por la maximalidad de $\mathscr{M}$, $(a,b) \times (b,c)$ interesecta a algún elemento de $\mathscr{M}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$[(a,b) \times (b,c)] \cap [(x_0, y_0) \times (z_0, w_0)] \neq \emptyset.$$

Como los puntos x_0, y_0, z_0, w_0 no están en G, se tiene que dar que $x_0 < a$, $b < y_0$, $z_0 < b$, $c < w_0$. Pero esto implica que $b \in (x_0, y_0) \cap (z_0, w_0)$, lo cual contradice que $\mathscr{M} \in \mathcal{Z}$.

Por lo tanto, efectivamente $Y \cup Z$ es un subconjunto denso numerable de X, por lo que X es separable. $\square$

Como corolario del teorema 3.5, tenemos la respuesta al problema de Souslin.

Corolario 3.6 ([$\mathsf{MA}(\aleph_1)$])**.** *Sea R un espacio ordenado. Si R cumple las condiciones* (1) *a* (3) *y* (5) *de arriba, entonces R es homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demostración. Por el teorema 3.5, tenemos que R cumple la condición (4). Por el teorema 3.4, R es homeomorfo a $\mathbb{R}$. $\square$

Un espacio ordenado S que cumple las condiciones (1) a (3) más (5) y no es separable es llamada *línea de Souslin*. El corolario 3.6 afirma que si suponemos $\mathsf{MA}(\aleph_1)$, entonces no existe una linea de Souslin. La existencia de una línea de Souslin es consecuencia de otro axioma de la teoría de conjuntos denominado $\diamondsuit$ que es más fuerte que CH (véase [11, II, §7, p. 80]). Con respecto a esto, se sabe lo siguiente.

Proposición 3.7. *Si X es una línea de Souslin, entonces X es cac pero X^2 no es cac.*

Demostración. El primer paso para nuestra demostración es encontrar, por inducción transfinita en $\alpha < \omega_1$, puntos $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in X$ tales que

(*a*) $x_\alpha < y_\alpha < z_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$,

(*b*) $(x_\alpha, y_\alpha) \neq \emptyset$, $(y_\alpha, z_\alpha) \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$,

(*c*) $(x_\alpha, z_\alpha) \cap \{y_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Primero notemos que la condición (2) de la definición de línea de Souslin implica que una línea de Souslin no tiene puntos aislados. Por inducción, para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ (igual al vacío cuando $\alpha = 0$) es numerable y por lo tanto, podemos escoger $x_\alpha, z_\alpha \in X$ tales que (x_α, z_α) es un subconjunto no vacío del abierto no vacío $X - \mathrm{cl}_X(\{y_\beta : \beta < \alpha\})$. Como X no tiene puntos aislados, hay una infinidad de puntos en (x_α, z_α), escojamos uno de ellos y_α de tal forma que $(x_\alpha, y_\alpha) \neq \emptyset$ y $(y_\alpha, z_\alpha) \neq \emptyset$. De esta forma se cumplen las condiciones (*a*), (*b*) y (*c*).

Ahora, definamos $U_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \times (y_\alpha, z_\alpha)$ para $\alpha < \omega_1$ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Por la condición (*b*), cada U_α es un abierto no vacío de X^2. Por la condición (*c*), $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ cuando $\alpha, \beta < \omega_1$ y $\alpha \neq \beta$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una colección no numerable de abiertos no vacíos ajenos dos a dos de X^2. Esto prueba que X^2 no es cac. □

En el siguiente capítulo construiremos, usando únicamente CH, dos espacios X y Y que son cac tales que $X \times Y$ no es cac.

Capítulo 4

[CH] Dos espacios cac cuyo producto no es un espacio cac.

En este capítulo nos ocuparemos de demostrar la negación del teorema principal del capítulo 3, usando CH. En resumen, construiremos una familia de espacios Hausdorff tal que el producto de cualesquiera dos de sus elementos no cumple la cac. Después de esto, usaremos CH para encontrar dos de estos espacios los cuales cumplen cac.

Este resultado es de R. Laver, aunque no fue publicado hasta que hubo una prueba simplificada por F. Galvin en [7]. La construcción de [7] es conjuntista por lo que nosotros la presentamos modificada para espacios topológicos como está sugerido en [13, 3T, pp. 230-234].

Si S es un conjunto, denotamos por $[S]^2$ al conjunto $\{A \in \mathscr{P}(S) : |A| = 2\}$. Para cada $K \subset [\omega_1]^2$, consideremos el conjunto

$$X_K = \{A \subset \omega_1 : A \text{ es maximal con la propiedad } [A]^2 \subset K\}.$$

Como ejemplos de estos conjuntos tenemos que si $K = [\omega_1]^2$, entonces $X_K = \{\omega_1\}$ y si $K = \emptyset$, obtenemos que $X_K = \{\{\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$.

Definamos una topología en estos conjuntos. Para esto, definimos, para cada $K \subset [\omega_1]^2$ y cada subconjunto finito $F \subset \omega_1$,

$$\langle F \rangle_K = \{A \in X_K : F \subset A\}.$$

Lo primero que nos gustaría ver es que la familia de conjuntos

$$\mathcal{B}_K = \{\langle F \rangle_K : 0 \leq |F| < \aleph_0\}$$

forma una base para alguna topología de X_K. Empecemos con los siguientes resultados técnicos.

Lema 4.1. *Sea $K \subset [\omega_1]^2$ y $A \subset \omega_1$ tal que $[A]^2 \subset K$. Entonces existe $B \in X_K$ tal que $A \subset B$.*

Demostración. Consideramos

$$\mathcal{Z} = \{C \subset \omega_1 : A \subset C, [C]^2 \subset K\},$$

que es no vacío ya que $A \in \mathcal{Z}$. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $\mathcal{Z}$ totalmente ordenado por la inclusión, entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, podemos aplicar ZORN. Un elemento maximal de $\mathcal{Z}$ con la contención será claramente el elemento buscado. □

La prueba del siguiente resultado es directa.

Lema 4.2. *Sean $K \subset [\omega_1]^2$ y subconjuntos finitos $F_1, F_2 \subset \omega_1$. Entonces $\langle F_1 \rangle_K \cap \langle F_2 \rangle_K = \langle F_1 \cup F_2 \rangle_K$.*

Nos gustaría saber cuándo los elementos de $\mathcal{B}_F$ son iguales al vacío. Del lema 4.1 se puede deducir lo siguiente.

Lema 4.3. *Sean $K \subset [\omega_1]^2$ y $F \subset \omega_1$ finito. Tenemos que $\langle F \rangle_K \neq \emptyset$ si y sólo si $[F]^2 \subset K$.*

Ya con estos resultados, podemos deducir que:

Proposición 4.4. *Sea $K \subset [\omega_1]^2$. Entonces $\mathcal{B}_K$ es base para una topología Hausdorff en X_K.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{B}_K$ es base para alguna topología de X_K por el lema 4.2. Para ver que esta topología es Hausdorff, consideremos $A, B \in X_K$ con $A \neq B$. Por la definición de X_K, tenemos que $[A \cup B]^2 \nsubseteq K$, que nos dice que existe $\{x, y\} \in [A \cup B]^2 - K$. Como $[A]^2 \cup [B]^2 \subset K$, entonces $\{x, y\} \nsubseteq A$ y $\{x, y\} \nsubseteq B$. Entonces podemos pensar, sin pérdida de generalidad, que $x \in A$ y $y \in B$. Entonces $A \in \langle \{x\} \rangle_K$, $B \in \langle \{y\} \rangle_K$ y por el lema 4.2, $\langle \{x\} \rangle_K \cap \langle \{y\} \rangle_K = \langle \{x, y\} \rangle_K$ el cual es vacío por el lema 4.3 y el hecho que $\{x, y\} \notin K$. Esto prueba que X_K es un espacio Hausdorff. □

Como ejemplo, consideremos el caso en el que $K = \emptyset$, podemos notar de la definición de la base $\mathcal{B}_K$ que X_K resulta ser un espacio discreto con cardinalidad $\aleph_1$.

Podemos decir un poco más de la topología de X_K generada por $\mathcal{B}_K$.

Proposición 4.5. *Sea $K \subset [\omega_1]^2$. El espacio X_K es 0-dimensional y existe una base de abiertos de X_K con cardinalidad a lo más $\aleph_1$.*

Demostración. Para ver que X_K es 0-dimensional es suficiente ver que los abiertos que pertenecen a $\mathcal{B}_K$ son cerrados. Sea $F \subset \omega_1$ finito y supongamos que $\langle F \rangle_K \neq \emptyset$. Por el lema 4.3, $[F]^2 \subset K$. Tomemos $A \notin \langle F \rangle_K$, lo cual significa que $F \nsubseteq A$ y por la maximalidad de A, $[F \cup A]^2 \nsubseteq K$. Por lo tanto, existe $\{x, y\} \in [F \cup A]^2 - K$ y como $[F]^2 \cup [A]^2 \subset K$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in F$ y $y \in A$. Entonces tenemos $A \in \langle\{y\}\rangle_K$ y por el lema 4.2, $\langle\{y\}\rangle_K \cap \langle F\rangle_K = \langle F \cup \{y\}\rangle_K$. Pero $\{x, y\} \in [F \cup \{y\}]^2$ por lo que $[F \cup \{y\}]^2 \not\subseteq K$ y por el lema 4.3, obtenemos $\langle F \cup \{y\}\rangle_K = \emptyset$. Es decir, $\langle\{y\}\rangle_K$ es un abierto que contiene a A y no toca a $\langle F\rangle_K$. Esto demuestra que $\langle F\rangle_K$ es cerrado. Para demostrar la segunda afirmación sólo hay que notar que la cardinalidad de $\mathcal{B}_K$ es menor o igual que $\aleph_1$ ya que ésta tiene a lo más tantos elementos como subconjuntos finitos de ω_1. □

Sin ninguna hipótesis adicional podemos inferir el siguiente resultado sobre estos espacios X_K, que será de nuestro interés.

Proposición 4.6. *Sean $K, M \subset [\omega_1]^2$ tales que $M \cap K = \emptyset$. Entonces $X_K \times X_M$ es un espacio que no satisface la cac.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \omega_1$, tenemos que $[\{\alpha\}]^2 = \emptyset \subset K \cap M$, así que por la proposición 4.3, obtenemos que $\langle\{\alpha\}\rangle_K$ y $\langle\{\alpha\}\rangle_M$ son abiertos no vacíos de X_K y X_M, respectivamente. Por lo tanto, el conjunto

$$\mathcal{C} = \{\langle\{\alpha\}\rangle_K \times \langle\{\alpha\}\rangle_M : \alpha < \omega_1\}$$

es una colección no numerable de abiertos no vacíos de $X_K \times X_M$. Sean $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $\alpha \neq \beta$. Como K y M son ajenos, a lo más se puede dar una de las siguientes dos relaciones: $\{\alpha, \beta\} \in K$ ó $\{\alpha, \beta\} \in M$. Por lo tanto, por el lema 4.3, se tiene que $\langle\{\alpha, \beta\}\rangle_K = \emptyset$ ó $\langle\{\alpha, \beta\}\rangle_M = \emptyset$. Por el lema 4.2, se tiene que

$$(\langle\{\alpha\}\rangle_K \times \langle\{\alpha\}\rangle_M) \cap (\langle\{\beta\}\rangle_K \times \langle\{\beta\}\rangle_M) = \emptyset.$$

Lo cual nos dice que los elementos de la familia $\mathcal{C}$ son ajenos dos a dos. Entonces $X_K \times X_M$ no es cac. □

Por lo tanto, ahora nos gustaría encontrar K, M como en la proposición 4.6 que además cumplan que X_K, X_M son espacios cac. Ésta será la parte más elaborada del trabajo. Cabe aclarar que la proposición no impone la condición de que alguno de K ó M sea vacío. Por ejemplo, si $K = \emptyset$, X_K es el espacio discreto de cardinalidad $\aleph_1$ por lo que cualquier producto con X_K como factor no cumple la cac, trivialmente, inclusive si tomamos $M = [\omega_1]^2$, caso en el que X_M es un espacio de un solo punto.

Empecemos con escribir de una forma alternativa la condición cac para estos espacios.

Lema 4.7. *Sea $K \subset [\omega_1]^2$. Se tiene que X_K es cac si y sólo si cada vez que $\mathscr{C}$ es una colección de subconjuntos finitos de ω_1, ajenos dos a dos tales que*

(a) $[F]^2 \subset K$ *para cada* $F \in \mathscr{C}$,

(b) $[F_1 \cup F_2]^2 - K \neq \emptyset$ *cuando* $F_1, F_2 \in \mathscr{C}$ *y* $F_1 \neq F_2$,

se tiene que $|\mathscr{C}| \leq \aleph_0$.

Demostración. Primero supongamos que X_K es cac y sea $\mathscr{C}$ una familia de subconjuntos finitos de ω_1 que cumplen (a) y (b). Consideremos $\mathfrak{D} = \{\langle F\rangle_K : F \in \mathscr{C}\}$, la cual es una colección de abiertos de X_F. Por los lemas 4.2, 4.3 y las condiciones (a) y (b), se tiene que cada abierto de esta colección es no vacío y cualesquiera dos tienen intersección vacía. Como X_F es cac, obtenemos que $\mathfrak{D}$ es numerable. Como además tenemos que se cumplen las condiciones (a) y (b), tenemos que $\mathscr{C}$ también es numerable.

Ahora, supongamos que se cumple la otra condición y demostremos que X_K es cac. Para esto, sea $\mathscr{U}$ una colección de abiertos ajenos dos a dos de X_K. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que éstos son abiertos básicos. Si $\mathscr{U}$ es no numerable, podemos indicar esta colección con un ordinal λ de cardinalidad no numerable de la siguiente manera:

$$\mathscr{U} = \{\langle G_\alpha\rangle_K : \alpha < \lambda\},$$

de tal forma que $\langle G_\alpha\rangle_K \neq \langle G_\beta\rangle_K$ si $\alpha, \beta < \lambda$ y $\alpha \neq \beta$. Por el lema 2.9, existe un subconjunto no numerable $\mathscr{M} \subset \lambda$ y un subconjunto finito $G \subset \omega_1$ tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathscr{M}$ con $\alpha \neq \beta$, $G_\alpha \cap G_\beta = G$. Para cada $\alpha \in \mathscr{M}$, sea $F_\alpha = G_\alpha - G$. Definamos $\mathscr{C} = \{F_\alpha : \alpha \in \mathscr{M}\}$ el cual claramente es una colección no numerable de conjuntos ajenos dos a dos.

Notemos que para cada $\alpha \in \mathscr{M}$ se tiene que $[F_\alpha]^2 \subset [G_\alpha]^2 \subset K$ porque tenemos $\langle G_\alpha\rangle_K \neq \emptyset$ y el lema 4.3, por lo que $\mathscr{C}$ cumple la condición (a). Para ver que $\mathscr{C}$ cumple la condición (b), consideramos $\alpha, \beta \in \mathscr{M}$. Por los lemas 4.2 y 4.3, se tiene que existen $x, y \in G_\alpha \cup G_\beta$ distintos tales que $\{x, y\} \nsubseteq K$. Como $[G]^2 \subset [G_\alpha]^2 \cup [G_\beta]^2 \subset K$ (por el lema 4.3), podemos suponer que $x \in F_\alpha$ y $y \in F_\beta$. Entonces $\{x, y\} \in [F_\alpha \cup F_\beta]^2 - K$ por lo que se cumple (b).

Entonces, por hipótesis, $\mathscr{C}$ es numerable lo cual es una contradicción. Esto implica que $\mathscr{U}$ es numerable.

□

Ahora, el siguiente paso es buscar condiciones en K que hagan a X_K cac. Para esto, primero consideremos la siguiente colección de conjuntos:

$$\mathcal{Q} = \{\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\omega_1) : \mathscr{F} \text{ es una anticadena, } |\mathscr{F}| = \aleph_0 \text{ y } F \in \mathscr{F} \text{ implica } |F| < \aleph_0\}$$

Al usar CH, nos convendrá poder indicar este conjunto con ω_1 así que lo primero que haremos será averiguar su cardinalidad.

Lema 4.8. $|\mathcal{Q}| = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Notemos que

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$$

por lo que es suficiente probar que $2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{Q}| \leq \aleph_1^{\aleph_0}$.

Para la primera desigualdad, consideremos el conjunto $\mathbf{2}^{\omega_0}$ de funciones de ω_0 al espacio discreto $\mathbf{2}$. Así, para cada $f \in \mathbf{2}^{\omega_0}$, podemos considerar el conjunto:

$$\mathscr{F}(f) = \{\{n\} : n \in \omega_0, f(n) = 1\} \cup \{\{\omega_0 + n\} : n \in \omega_0\}.$$

Gracias al segundo uniendo, sabemos que $|\mathscr{F}(f)| = \aleph_0$ y además cada elemento de $\mathscr{F}(f)$ es un singulete, por lo que $\mathscr{F}(f) \in \mathcal{Q}$ para cada $f \in \mathbf{2}^{\omega_0}$. Además, si $f, g \in \mathbf{2}^{\omega_0}$ son distintas funciones, $\mathscr{F}(f) \neq \mathscr{F}(g)$. Como además $|\mathbf{2}^{\omega_0}| = 2^{\aleph_0}$, $\{\mathscr{F}(f) : f \in \mathbf{2}^{\omega_0}\}$ es un subconjunto de $\mathcal{Q}$ de cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Esto prueba la primera desigualdad.

Ahora prosigamos a probar la segunda desigualdad. Si $\mathscr{F} \in \mathcal{Q}$, notemos que podemos ordenar sus elementos $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_n : n \in \omega_0\}$. Para cada $\mathscr{F} \in \mathcal{Q}$ y $n \in \omega_0$, sea $g(\mathscr{F})(n) : \omega_0 \to \omega_1$ una función arbitraria cuya imagen sea $\mathscr{F}_n$, lo cual es posible ya que $\mathscr{F}_n$ es un conjunto finito. Esta asignación define una función $g : \mathcal{Q} \to (\omega_1^{\omega_0})^{\omega_0}$. Supongamos que existen $\mathscr{F}^1, \mathscr{F}^2 \in \mathcal{Q}$ tales que $g(\mathscr{F}^1) = g(\mathscr{F}^2)$. Esto significaría que para cada $n \in \omega_0$, se tiene que $\mathscr{F}^1_n = \mathscr{F}^2_n$ lo cual significa que $\mathscr{F}^1 = \mathscr{F}^2$. Por lo tanto g es una función inyectiva y así, $|\mathcal{Q}| \leq |(\omega_1^{\omega_0})^{\omega_0}| = (\aleph_1^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$. Esto prueba la otra desigualdad. $\square$

Ahora que ya conocemos la cardinalidad de $\mathcal{Q}$, enumeremos $\mathcal{Q} = \{F_\mu : \mu \in 2^{\aleph_0}\}$ y $F_\mu = \{F^n_\mu : n \in \omega_0\}$ para cualquier $\mu < 2^{\aleph_0}$. De aquí, cuando usemos CH, los índices correrán en $\mu < \omega_1$.

El próximo resultado nos dará una familia de espacios X_K los cuales no cumplirán la cac. Para esto, introduzcamos un poco de notación. Para $\alpha < \omega_1$ y $K \subset [\omega_1]^2$, sean

$$K_\alpha = K \cap [\alpha]^2,$$
$$K(\alpha) = \{\beta < \alpha : \{\alpha, \beta\} \in K\}.$$

Observemos que, intuitivamente hablando, $K(\alpha)$ son los ordinales menores que α que se aparean con él en K. Hay que notar que el siguiente resultado es nuestro primer resultado que depende de CH.

Teorema 4.9 ([CH]). *Sea $K \subset [\omega_1]^2$. Sea $\alpha < \omega_1$ y consideremos la siguiente condición:*

$(*)$ *si $\beta < \alpha$, $\bigcup F_\beta \subset \alpha$, $F \subset \alpha - \bigcup F_\beta$ es finito y $W^\alpha_{\beta,F} = \{n \in \omega_0 : [F^n_\beta \cup F]^2 \subset K_\alpha\}$ es infinito, entonces $\{n \in W^\alpha_{\beta,F} : F^n_\beta \subset K(\alpha)\}$ es infinito.*

Si se cumple $(*)$ para todo $\alpha < \omega_1$, entonces X_K es cac.

Demostración. Usemos la equivalencia de cac dada en el lema 4.7. Recordemos que como estamos usando CH, $\mathcal{Q}$ queda numerado con ordinales numerables. Supongamos que existe una colección no numerable $\mathscr{C}$ de subconjuntos finitos de ω_1 ajenos dos a dos que cumple la condición (a) del lema 4.7. Vamos a contradecir la condición (b) de ese mismo lema 4.7, con lo cual tendremos probado que una colección que cumpla ambas condiciones es numerable y por lo tanto, el espacio X_K es cac.

Es claro que cualquier subcolección numerable de $\mathscr{C}$ es un elemento de $\mathcal{Q}$, por lo que podemos fijar una de éstas, $F_\beta \subset \mathscr{C}$, donde $\beta < \omega_1$. Como $\bigcup F_\beta$ es una unión numerable de conjuntos finitos, es numerable. Así, podemos encontrar $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $\bigcup F_\beta \subset \alpha_0$. Consideremos

$$\mathscr{C}_{\alpha_0} = \{C \in \mathscr{C} : C \cap \alpha_0 \neq \emptyset\}.$$

Sea, por AC, $f : \mathscr{C}_{\alpha_0} \to \alpha_0$ una función tal que $f(C) \in C \cap \alpha_0$ para cada $C \in \mathscr{C}_{\alpha_0}$. Como los elementos de $\mathscr{C}$ son ajenos dos a dos, f es inyectiva y por lo tanto, $|\mathscr{C}_{\alpha_0}| \leq |\alpha_0| \leq \aleph_0$.

Como $\mathscr{C}$ es no numerable, podemos encontrar $G \in \mathscr{C}$ tal que $G \cap \alpha_0 = \emptyset$. Como G es un conjunto finito, podemos escribir $G = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ para algún $k \in \omega - \{0\}$ y suponer que $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k$.

Notemos que en este punto es donde estamos aplicando CH. Toda la construcción anterior se puede copiar usando sólo Zermelo-Fraenkel más AC, justo antes de usar que α_0 es numerable. En ese punto, usamos que la subfamilia $\mathscr{C}_{\alpha_0}$, al ser numerable, no es igual a $\mathscr{C}$ y podemos tomar G. Así, la hipótesis de que α_0 es numerable es escencial en este punto, y esto fue gracias a que la numeración de $\mathcal{Q}$ era con ordinales numerables, es decir, usamos CH.

Procederemos por inducción k veces hasta llegar a una contradicción.

Como $F_\beta^n \subset \bigcup F_\beta \subset \alpha_0 \subset \alpha_1$ y como estamos suponiendo que se cumple (a) del lema 4.7, tenemos que $[F_\beta^n]^2 \subset K \cap [\alpha_1]^2$ para todo $n \in \omega$, por lo que $W_{\beta,\emptyset}^{\alpha_1} = \omega_0$. Por lo tanto, aplicando $(*)$ con $\alpha = \alpha_1$ y $F = \emptyset$, obtenemos que $Z_1 = \{n \in \omega_0 : F_\beta^n \subset K(\alpha_1)\}$ es infinito.

Notemos que $\{\alpha_1\} \subset \alpha_2 - \bigcup F_\beta$. Si $n \in Z_1$, tenemos que $F_\beta^n \subset K(\alpha_1)$ por lo que, si $x \in F_\beta^n$, $\{x, \alpha_1\} \in K$. Además, como $F_\beta^n \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ cumple el inciso (a) del lema 4.7, tenemos que $[F_\beta^n \cup \{\alpha_1\}]^2 \subset K$. También, claramente, $[F_\beta^n \cup \{\alpha_1\}]^2 \subset \alpha_2$. Este argumento implica que $Z_1 \subset W_{\beta,\{\alpha_1\}}^{\alpha_2}$. Por lo tanto, aplicando $(*)$ con $\alpha = \alpha_2$ y $F = \{\alpha_1\}$, obtenemos que $Z_2 = \{n \in W_{\beta,\{\alpha_1\}}^{\alpha_2} : F_\beta^n \subset K(\alpha_2)\}$ es infinito.

Ahora hagamos el paso general. Sea $m \in \{3, \ldots, k\}$ y supongamos que

$$Z_{m-1} = \{n \in W_{\beta,\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-2}\}}^{\alpha_{m-1}} : F_\beta^n \subset K(\alpha_{m-1})\}$$

es infinito. Notemos primero que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\} \subset \alpha_m - \bigcup K_\beta$. Queremos probar que

$$Z_{m-1} \subset W_{\beta,\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}\}}^{\alpha_m}.$$

Para esto, tomamos $n \in Z_{m-1}$, $x, y \in F_\beta^n \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$ con $x \neq y$ y tenemos que probar que $\{x, y\} \in K \cap [\alpha_m]^2$. Claramente, $\{x, y\} \in [\alpha_m]^2$, por lo que sólo hay que probar que $\{x, y\} \in K$. Hay tres posibles casos:

- Si $x \neq \alpha_{m-1} \neq y$, tenemos que $\{x, y\} \subset F_\beta^n \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-2}\}$ y como $n \in W_{\beta,\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-2}\}}^{\alpha_{m-1}}$, tenemos que $\{x, y\} \in K$.

- Si $x \in F_\beta^n$ y $y = \alpha_{m-1}$, como $n \in Z_{m-1}$, obtenemos que $\{x, y\} \in K$, por definición de Z_{m-1}.

- Si $x = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-2}\}$ y $y = \alpha_{m-1}$, como $G \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ cumple la condición (a) del lema 4.7, $\{x, y\} \in K$.

Por lo tanto, aplicando $(*)$ con $\alpha = \alpha_m$ y $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$, obtenemos que

$$Z_m = \{n \in W_{\beta,\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}\}}^{\alpha_m} : F_\beta^n \subset K(\alpha_m)\}$$

es infinito.

Notemos que análogamente como se hizo en el paso inductivo, se tiene que:

$$Z_k \subset W_{\beta,G}^{\alpha_k+1} = \{n \in \omega_0 : [F_\beta^n \cup G]^2 \subset K\}$$

y por lo que acabamos de probar, el conjunto de la derecha resulta ser no vacío. Esto es una negación del inciso (b) del lema 4.7, que es a lo que queríamos llegar. Por lo tanto, tenemos probado el teorema. □

Con esto, ya tenemos una forma de detectar a algunos espacios de la forma X_K que cumplen cac, suponiendo CH. Ahora nos gustaría construir un par de conjuntos K, M que efectivamente cumplan la condición del teorema 4.9 para que así X_K y X_M sean cac y además que $M \cap K = \emptyset$ para así asegurar que su producto $X_K \times X_M$ no lo es. Para esto, necesitaremos construir a los conjuntos K y M inductivamente al mismo tiempo y para ello necesitaremos del siguiente resultado.

Lema 4.10. *Sea $\{S_n : n < \omega_0\} \subset \mathcal{Q}$ tal que $\bigcup\{\bigcup S_n : n < \omega_0\} \subset \alpha < \omega_1$ y escribamos $S_n = \{S_n^m : m < \omega_0\}$. Entonces existen subconjuntos ajenos A y B de α tales que, para cada $n \in \omega_0$, los conjuntos $\{m \in \omega_0 : S_n^m \subset A\}$ y $\{m \in \omega_0 : S_n^m \subset B\}$ son infinitos.*

Demostración. Empezamos con la siguiente afirmación:

($\bullet$) Si $C \subset \bigcup\{S_n : n < \omega_0\}$ es una anticadena finita y $n \in \omega_0$, entonces existe $m \in \omega_0$ tal que S_n^m es ajeno a cualquier elemento de C.

Para probar ($\bullet$), supongamos lo contrario. Es decir, existe $n \in \omega_0$ tal que para toda $m \in \omega_0$, existe $C_m \in C$ tal que $S_n^m \cap C_m \neq \emptyset$. Por AC, existe una función $f : \omega_0 \to \bigcup C$ tal que $f(m) \in C_m \cap S_n^m$. Como S_n es una anticadena, f es inyectiva. Sin embargo, $\bigcup C$ es una unión finita de subconjuntos finitos por lo que es finito. Esto es una contradicción por lo cual efectivamente se cumple ($\bullet$).

Definamos, para cada $n \in \omega_0$, A_n y B_n subcolecciones finitas de $\bigcup\{S_m : m \in \omega_0\}$, tales que $A_n \cup B_n$ es una anticadena con $|A_n \cap S_m| \geq n$ y $|B_n \cap S_m| \geq n$ para todo $m \leq n$.

Para $n = 0$, escogemos $A_0 = \{S_0^0\}$, $B_0 = \{S_0^1\}$. Supongamos ahora que tenemos definidos los conjuntos A_k y B_k para $k < n$. Como $A_{n-1} \cup B_{n-1}$ es finito, podemos aplicar ($\bullet$) con $C = A_{n-1} \cup B_{n-1}$ para encontrar $m_0 \in \omega_0$ tal que $S_0^{m_0}$ es ajeno con cualquier elemento de $A_{n-1} \cup B_{n-1}$. Aplicando ($\bullet$) con $C = A_{n-1} \cup B_{n-1} \cup \{S_0^{m_0}\}$, existe $m_1 \in \omega_0$ tal que $S_1^{m_1}$ es ajeno a cualquier elemento de $A_{n-1} \cup B_{n-1} \cup \{S_0^{m_0}\}$. Iterando este proceso, existen $m_0, \ldots, m_{n-1}, r_0, \ldots, r_{n-1} \in \omega_0$ tales que

$$A_{n-1} \cup B_{n-1} \cup \{S_0^{m_0}, \ldots, S_{n-1}^{m_{n-1}}\} \cup \{S_n^{r_0}, \ldots, S_n^{r_{n-1}}\}$$

es una anticadena finita. Definimos

$$A_n = A_{n-1} \cup \{S_0^{m_0}, \ldots, S_{n-1}^{m_{n-1}}\} \cup \{S_n^{r_0}, \ldots, S_n^{r_{n-1}}\},$$

con lo que tendremos que $|A_n \cap S_m| \geq n$ para cada $m \leq n$. De manera análoga, podemos encontrar $p_0, \ldots, p_{n-1}, q_0, \ldots, q_{n-1} \in \omega_0$ tales que

$$A_n \cup B_{n-1} \cup \{S_0^{p_0}, \ldots, S_{n-1}^{p_{n-1}}\} \cup \{S_n^{q_0}, \ldots, S_n^{q_{n-1}}\}$$

es una anticadena finita. Definimos

$$B_n = B_{n-1} \cup \{S_0^{p_0}, \ldots, S_{n-1}^{p_{n-1}}\} \cup \{S_n^{q_0}, \ldots, S_n^{q_{n-1}}\},$$

con lo que tendremos que $|B_n \cap S_m| \geq n$ para cada $m \leq n$.

Esto completa la inducción. Definamos $A_{\omega_0} = \bigcup\{A_n : n \in \omega_0\}$ y $B_{\omega_0} = \bigcup\{B_n : n \in \omega_0\}$. Por construcción, $A_{\omega_0} \cup B_{\omega_0}$ es una anticadena. Como, para todo $k \geq n$ se tiene que $|A_{\omega_0} \cap S_n| \geq |A_k \cap S_n| \geq n$, obtenemos que $|A_{\omega_0} \cap S_n| = \aleph_0$ para todo $n \in \omega_0$. Análogamente, $|B_{\omega_0} \cap S_n| = \aleph_0$ para todo $n \in \omega_0$.

Definimos $A = \bigcup A_{\omega_0}$ y $B = \bigcup B_{\omega_0}$, claramente estos son subconjuntos ajenos de α y $\{m \in \omega_0 : S_n^m \subset A\}$ y $\{m \in \omega_0 : S_n^m \subset B\}$ son infinitos para cada $n \in \omega_0$. $\square$

Ahora, finalmente, construyamos los conjuntos que nos servirán.

Proposición 4.11 ([CH])**.** *Existen $M^0, M^1 \subset [\omega_1]^2$, ajenos, tales que ambos satisfacen la condición $(*)$ del teorema 4.9.*

Demostración. Para definir un conjunto $K \subset [\omega_1]^2$ lo podemos hacer por inducción transfinita, definiendo en el paso $\alpha < \omega_1$ a $K(\alpha)$ y después tomando $K = \{\{\beta, \alpha\} : \alpha < \omega_1, \beta \in K(\alpha)\}$. También hay que tomar en cuenta que si $\alpha < \omega_1$ y ya tenemos definido $K(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$, entonces ya está definido por completo K_α. De esta manera, para poder verificar la condición $(*)$ para K, es suficiente hacerlo en cada paso de la construcción por inducción.

Vamos a construir los dos conjuntos M^0, M^1 de esta manera. Para ver que estos conjuntos son ajenos, será suficiente ver que $M^0(\alpha) \cap M^1(\alpha) = \emptyset$ para cada $\alpha < \omega_1$. De esta manera, tanto la condición $(*)$ como el hecho de que $M^0 \cap M^1 = \emptyset$ se verificarán en cada paso de la construcción por inducción.

Empecemos definiendo $M^0(0) = M^1(0) = \emptyset$. Sea $\alpha_0 < \omega_1$, con $\alpha_0 \neq 0$ y supongamos que para todo $\gamma < \alpha_0$, ya tenemos definidos $M^0(\gamma)$ y $M^1(\gamma)$ de tal manera que se cumple la condición $(*)$ con $\alpha = \gamma$ para ambos $K = M^0$, $K = M^1$ y además $M^0(\gamma) \neq M^1(\gamma)$. Consideremos el conjunto:

$$\mathscr{C}_{\alpha_0} = \Big\{(\gamma, F, i) : i \in \{0,1\}, \gamma < \alpha_0, \bigcup F_\gamma \subset \alpha_0, F \subset \alpha_0 - \bigcup F_\gamma \\ \text{es finito y } \{n \in \omega_0 : [F_\gamma^n \cup F]^2 \subset M_{\alpha_0}^i\} \text{ es infinito}\Big\}.$$

Como α_0 es numerable y F es un subconjunto finito de α_0, claramente $\mathscr{C}_{\alpha_0}$ es un conjunto numerable. Para cada tripleta $(\gamma, F, i) \in \mathscr{C}_{\alpha_0}$, definimos el conjunto

$$S_{\gamma,F}^i = \{F_\gamma^n : [F_\gamma^n \cup F]^2 \subset M_{\alpha_0}^i\},$$

y consideremos el conjunto numerable $S = \{S^i_{\gamma,F} : (\gamma, F, i) \in \mathscr{C}_{\alpha_0}\}$. Hay dos casos, si $S = \emptyset$, entonces no importa como definamos $M^0(\alpha_0)$ y $M^1(\alpha_0)$, por vacuidad se cumplirá la condición $(*)$, por los que simplemente los elegimos arbitrariamente de entre los subconjuntos de α_0 de tal forma que sean ajenos.

Si no es así, podemos numerar $S = \{S_n : n \in \omega_0\}$, aunque S sea finito, repitiendo uno de sus elementos una cantidad numerable de veces. Notemos que $S \subset \mathcal{Q}$, ya que para cada $(\gamma, F, i) \in \mathscr{C}_{\alpha_0}$, $S^i_{\gamma,F}$ es un subconjunto infinito de $F_\gamma \in \mathcal{Q}$. Además, todos los conjuntos de la forma S_i, con $i \in \omega_0$, son subconjuntos de α_0. Notemos que para cada $n \in \omega_0$, S_n es un subconjunto infinito de F_γ para alguna $\gamma < \alpha_0$. Numeremos cada $S_n = \{S^m_n : m \in \omega_0\}$, y de hecho esta es una numeración de alguna subcolección infinita de F_γ.

Por lo tanto, podemos aplicar el lema 4.10 que nos dice que existen $A, B \subset \alpha_0$ ajenos tales que $\{m \in \omega_0 : S^m_n \subset A\}$ y $\{m \in \omega_0 : S^m_n \subset B\}$ son ambos conjuntos infinitos para cada $n \in \omega_0$. Definiendo $M^0(\alpha_0) = A$ y $M^1(\alpha_0) = B$, solo falta demostrar que se cumple la condición $(*)$ para $K(\alpha)$ igual a ambos conjuntos.

Pensemos únicamente en A, para B el argumento será completamente análogo. Sea $n \in \omega_0$ y recordemos que $S_n \subset F_\gamma$ para alguna $(\gamma, F, 0) \in \mathscr{C}_{\alpha_0}$. El hecho de que el conjunto $\{m \in \omega_0 : S^m_n \subset A\}$ sea infinito implica que existe una subcolección infinita T_γ de $S^0_{\gamma,F}$ tal que si $F^m_\gamma \in T_\gamma$, entonces $F^m_\gamma \subset A$. Retomemos parcialmente la notación del teorema 4.9 y sea $W_{\gamma,F} = \{n \in \omega_0 : [F^n_\gamma \cup F]^2 \subset M^i_{\alpha_0}\}$. Notemos que si $F^m_\gamma \in S^0_{\gamma,F}$, entonces $m \in W_{\gamma,F}$. Todas estas observaciones nos dan como resultado que el conjunto $\{m \in W_{\gamma,F} : F^m_\gamma \subset A\}$ es infinito. Esto demuestra $(*)$ para el caso de $M^0(\alpha_0) = A$.

Esto completa la construcción. Por la discusión al principio, esto concluye la demostración.

□

Nuestro resultado final es sólo juntar las partes que ya conocemos.

Teorema 4.12 ([CH])**.** *Existen $M^0, M^1 \subset [\omega_1]^2$ tales que X_{M^0} y X_{M^1} son cac pero $X_{M^0} \times X_{M^1}$ no es cac.*

Demostración. Consideramos M^0, M^1 como en la proposición 4.11. Como ambos M^0 y M^1 satisfacen la condición $(*)$ del teorema 4.9, este mismo teorema nos dice que X_{M^0} y X_{M^1} son cac. Además, como son ajenos, por la proposición 4.6, tenemos que $X_{M^0} \times X_{M^1}$ no es cac. □

Recordemos que en la proposición 3.7 se demostró que si X es una línea de Souslin, X^2 no es cac. Una pregunta natural en este punto es si podemos deducir de CH que existe un espacio cac cuyo cuadrado no es cac. Esto se resuelve de la siguiente manera.

Corolario 4.13 ([CH])**.** *Existe un espacio cac X tal que X^2 no es cac.*

Demostración. Sea X la unión topológica de los espacios X_{M^0} y X_{M^1} del teorema 4.12. Es decir, X es la unión ajena de X_{M^0} y X_{M^1} con la topología mínima que hace a las dos inclusiones continuas. De aquí, es claro que X es cac pero X^2, al contener una copia topológica abierta del espacio $X_{M^0} \times X_{M^1}$, no es cac. □

Capítulo 5

Densidad y celularidad en espacios producto

El objetivo de este capítulo es el de dar una discusión más elaborada de la celularidad y su comportamiento con relación a otra función cardinal topológica denominada la *densidad*, que generaliza al concepto de separabilidad del que hablamos en el capítulo 2. El teorema 5.4, que nos dice cómo se comporta la densidad en productos, es una generalización de la parte (2) de la proposición 2.8. Veremos algunas aplicaciones de este teorema para la compactación de Stone-Čech. Tambien se generaliza el teorema 2.11 en el teorema 5.8. Varios de los resultados de este capítulo, para estudiarse con calma, requerirían más espacio del disponible en este trabajo. En ocasiones no se dará prueba de algunos resultados auxiliares pero se darán suficientes referencias al lector para que pueda consultar todos los detalles.

5.1. Resultados principales

Empecemos con un espacio topológico X. Definimos la *densidad* de X, $d(X)$ y el *peso* de X, $w(X)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d(X) &= \text{mín}\{|D| : D \subset X, \text{cl}_X(D) = X\} + \aleph_0 \\ w(X) &= \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base para la topología de } X\} + \aleph_0 \end{aligned}$$

Al ser $\text{cl}_X(X) = X$, la densidad de un espacio existe, por las propiedades de los números cardinales. En el caso del peso, éste existe ya que la topología de X puede ser tomada como base para ella misma. Notemos que en el capítulo 2, hablamos de los casos $d(X) = \aleph_0$ y $w(X) = \aleph_0$, en estos casos a X se le llama separable y segundo numerable, respectivamente. Cabe señalar que la propiedad de Lindelöf también tiene una generalización pero ésta se sale del objetivo del trabajo.

Algo que podemos observar directamente de la definición es que por definirse con mínimos, la densidad y el peso se alcanzan cuando el espacio es infinito y

Hausdorff. Es decir, si X es un espacio infinito y Hausdorff, existe un subconjunto denso de él con cardinalidad $d(X)$ y una base con cardinalidad $w(X)$. Con respecto a esto, la celularidad no se comporta igual. Para una discusión sobre esto, se recomienda al lector consultar [9, 12].

La primera observación que podemos hacer es la siguiente:

Lema 5.1. *Sea X un espacio. Entonces $d(X) \leq w(X)$ y $c(X) \leq d(X)$.*

Demostración. Ambas desigualdades se prueban igual que en el caso numerable. Para la primera es suficiente tomar una base $\mathcal{B}$ de cardinalidad menor o igual a $w(X)$ y usar AC para encontrar un subconjunto $D \subset X$ que tenga un punto en cada elemento de la base. Con esto, D es un denso de cardinalidad menor o igual que $w(X)$. La segunda desigualdad se demuestra de una forma análoga a la proposición 2.2. $\square$

El teorema principal de esta sección habla de la densidad de productos. La prueba es análoga a la de la parte (2) de la proposición 2.8. Sin embargo, hay que hacer cambios ya que en esta prueba usamos que el intervalo $I = [0, 1]$ es segundo numerable, por lo que hay que considerar un espacio análogo para el caso general. Éste será el κ-espacio de Cantor, $\mathbf{2}^\kappa$, donde κ es un cardinal infinito.

Algo que hay que notar es que $\mathbf{2}^\kappa$ es 0-dimensional. Resulta que en el caso de espacios compactos 0-dimensionales, el peso es fácil de calcular.

Proposición 5.2. *Si X es un espacio infinito, Hausdorff, 0-dimensional y compacto, entonces $w(X) = |CO(X)|$.*

Demostración. Por ser X un espacio 0-dimensional, $CO(X)$ es una base de X. Como X es Hausdorff e infinito, existe una base de X con cardinalidad $w(X)$. Por el lema 2.1, podemos suponer que existe una base $\mathcal{B} \subset CO(X)$ con $|\mathcal{B}| = w(X)$. Como cada elemento $B \in CO(X)$ es cerrado en un compacto, B es compacto, así que por AC podemos definir una función $f : CO(X) \to \mathscr{P}(\mathcal{B})$ tal que $f(B)$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup f(B) = B$. Esta función es claramente inyectiva, lo cual demuestra que $|CO(X)|$ es a lo más la cantidad de subconjuntos finitos de $\mathcal{B}$, que es igual a $|\mathcal{B}| = w(X)$. Esto demuestra que $|CO(X)| \leq w(X)$ y como además $\mathcal{B} \subset CO(X)$, se tiene que $w(X) = |CO(X)|$. $\square$

Corolario 5.3. *Si κ es un cardinal infinito, $w(\mathbf{2}^\kappa) = \kappa$.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $\pi_\alpha : \mathbf{2}^\kappa \to \mathbf{2}$ la proyección a la coordenada α. La topología producto de $\mathbf{2}^\kappa$ es la mínima que contiene a todos los subconjuntos de la familia

$$S = \{\pi_\alpha^{\leftarrow}[\{0\}] : \alpha < \kappa\} \cup \{\pi_\alpha^{\leftarrow}[\{1\}] : \alpha < \kappa\}.$$

Entonces, una base $\mathcal{B}$ para la topología de $\mathbf{2}^\kappa$ está dada por intersecciones finitas de elementos de S. Claramente, $\mathcal{B} \subset CO(\mathbf{2}^\kappa)$. Como $\mathbf{2}^\kappa$ es compacto, cada elemento de $CO(\mathbf{2}^\kappa)$ se puede escribir como unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, así que $\mathcal{B} = CO(\mathbf{2}^\kappa)$ ya que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas. Por lo tanto,

$$w(\mathbf{2}^\kappa) = |CO(\mathbf{2}^\kappa)| = |\mathcal{B}| = |S| = \kappa.$$

Lo cual completa la demostración. $\square$

El corolario 5.3 nos da un espacio de peso κ, para cualquier cardinal infinito κ y además nos ayudará en la demostración del teorema principal de esta sección. Este teorema es conocido como el *teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery.*

Teorema 5.4. *Sea κ un cardinal infinito y $\lambda \leq 2^\kappa$. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios con $d(X_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha < \lambda$, y $X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$, entonces $d(X) \leq \kappa$.*

Demostración. Supongamos que, para cada $\alpha < \lambda$, $d(X_\alpha) \leq \kappa$. Notemos que podemos suponer que $\lambda = 2^\kappa$ por el siguiente argumento. Si $\lambda < 2^\kappa$, X es imagen continua de $Y = X \times \prod\{\mathbb{R}_k : k \in K\}$, en donde K es un conjunto ajeno a λ, $|\lambda \cup K| = 2^\kappa$ y $\mathbb{R}_k = \mathbb{R}$ para todo $k \in K$. De aquí es fácil ver que $d(Y) \leq d(X)$. Nos convendrá suponer que los espacios estan indicados por el κ-espacio de Cantor $\mathbf{2}^\kappa$ que tiene cardinalidad exactamente 2^κ. Para cada $\alpha \in \mathbf{2}^\kappa$, sea $D_\alpha = \{p(\alpha, \beta) : \beta < \kappa\}$ un subconjunto denso de X_α. Sea $\mathcal{B} = CO(\mathbf{2}^\kappa)$, el cual es una base de abiertos y cerrados para la topología de $\mathbf{2}^\kappa$ de cardinalidad κ, por la proposición 5.2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{B}(k) = \{(B_1, \dots, B_k) \in \mathcal{B}^k : B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ y } i \neq j\},$$

el cual claramente tiene cardinalidad κ. Finalmente, consideremos

$$\mathscr{C} = \{(B_1, \dots, B_k; \gamma_1, \dots, \gamma_k) : k \in \mathbb{N}, (B_1, \dots, B_k) \in Q(k), \gamma_1, \dots, \gamma_k < \kappa\},$$

el cual también resulta ser un conjunto de cardinalidad κ. Para cada $P \in \mathscr{C}$, con $P = (B_1, \dots, B_k; \gamma_1, \dots, \gamma_k)$, escojamos un punto $x(P) \in X$ de la siguiente manera. Si $\alpha \in B_j$ para algún $j \in \{1, \dots, k\}$, ponemos $\pi_\alpha(x(P)) = p(\alpha, \gamma_j)$; si $\alpha \notin B_1 \cup \dots \cup B_k$, ponemos $\pi_\alpha(x(P)) = p(\alpha, 0)$. Sea $D = \{x(P) : P \in \mathscr{C}\}$, el cual es un conjunto de cardinalidad κ. Para ver que es denso, consideremos un abierto W en X. Podemos suponer que W es básico, así que escribamos $W = \pi_{\alpha_1}^{-1}[W_1] \cap \dots \cap \pi_{\alpha_r}^{-1}[W_r]$, donde $r \in \mathbb{N}$ y W_j es abierto en X_{α_j} para cada $j \in \{1, \dots, r\}$. Sean $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{B}$ ajenos dos a dos tales que $\alpha_j \in B_j$ para $j \in \{1, \dots, r\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, se tiene que $D_{\alpha_j} \cap W_j \neq \emptyset$, por lo que existe $\gamma_j \in \kappa$ tal que $p(\alpha_j, \gamma_j) \in W_j$. Sea $R = (B_1, \dots, B_r; \gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \mathscr{C}$. De aquí es claro que $x(R) \in W$, lo cual prueba que D es denso. $\square$

Un detalle interesante en el teorema 5.4 es que no se pide la hipótesis de que los espacios sean Hausdorff, a diferencia de la proposición 2.8. La razón de esto es que en la prueba de la parte (2) de la proposición 2.8 la hipótesis de ser Hausdorff sólo se usó para probar el converso del enunciado del teorema 5.4 en el caso $\kappa = \aleph_0$.

Como primera aplicación al teorema 5.4, podemos calcular la densidad de cualquier κ-espacio de Cantor. Necesitamos antes un resultado más. Vamos a probar una version especial de [9, 3.3, p. 11].

Lema 5.5. *Sea X un espacio infinito, Hausdorff, 0-dimensional y compacto. Entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

Demostración. Sea D un denso en X. Por el lema 5.2, es suficiente definir una función inyectiva $f : CO(X) \to \mathscr{P}(D)$. Definimos, para cada $B \in CO(X)$, $f(B) = B \cap D$. Si $B, C \in CO(X)$ y $f(B) = f(C)$, entonces $B \cap D = C \cap D$, lo cual implica que

$$B = \mathrm{cl}_X(B) = \mathrm{cl}_X(B \cap D) = \mathrm{cl}_X(C \cap D) = \mathrm{cl}_X(C) = C,$$

por lo que f es inyectiva. $\square$

Y de aquí podemos calcular la densidad del κ-espacio de Cantor.

Corolario 5.6. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces $d(\mathbf{2}^\kappa) = \text{mín}\{\beta : 2^\beta \geq \kappa\}$.*

Demostración. Sea $\tau = d(\mathbf{2}^\kappa)$. Para probar que $\tau \leq \text{mín}\{\beta : 2^\beta \geq \kappa\}$ es suficiente ver que si β es un cardinal tal que $\kappa \leq 2^\beta$, entonces $\tau \leq \beta$. Esto es directo del teorema 5.4. Para la otra desigualdad, por el lema 5.3 y el lema 5.5, se tiene que $\tau \in \{\beta : 2^\beta \geq \kappa\}$, lo que implica que $\tau \geq \text{mín}\{\beta : 2^\beta \geq \kappa\}$. $\square$

La siguiente pregunta que nos podemos hacer es si podemos generalizar el teorema 2.11 para celularidades mayores. La prueba de este teorema se basa en el lema de Δ-sistemas (2.10), por lo que el camino natural es preguntarnos si éste se puede generalizar. El siguiente resultado es de Šanin.

Lema 5.7. *Sea κ un cardinal regular infinito y no numerable, $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos finitos de κ con $|\mathscr{F}| = \kappa$. Entonces existe un Δ-sistema $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$ con $|\mathscr{D}| = \kappa$.*

Demostración. Procedamos de forma análoga a los lemas 2.9 y 2.10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathscr{F}_n = \{A \in \mathscr{F} : |A| = n\}$, claramente $\mathscr{F} = \bigcup\{\mathscr{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ser $\mathscr{F}$ de cardinalidad κ, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathscr{F}_n| = \kappa$. Para simplificar la demostración, pensemos que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_n$ y demostremos el resultado por inducción sobre n. Si $n = 1$, $\mathscr{F}$ es un Δ-sistema de cardinalidad κ con raiz igual al conjunto vacío. Ahora supongamos que sabemos el resultado para familias con todos sus elementos de cardinalidad $n-1$ y demostremos el resultado para n. Sea $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$ una subfamilia maximal con la propiedad de que sus elementos son ajenos dos a dos, la cual se obtiene aplicando ZORN a la colección de subfamilias con sus elementos ajenos dos a dos. Si $|\mathscr{M}| = \kappa$, obtenemos que $\mathscr{M}$ es un Δ-sistema de cardinalidad κ con raiz igual al conjunto vacío y habremos terminado. Si $|\mathscr{M}| < \kappa$, procedemos de la siguiente manera. Por la maximalidad de $\mathscr{M}$, cada elemento de $\mathscr{F}$ intersecta a alguno de los elementos de $\mathscr{M}$. Por lo tanto, $\mathscr{M} = \bigcup\{\mathscr{F}(A) : A \in \mathscr{M}\}$, donde $\mathscr{F}(A) = \{B \in \mathscr{F} : B \cap A \neq \emptyset\}$. Por ser κ regular, existe $A_0 \in \mathscr{M}$ tal que $|\mathscr{F}(A_0)| = \kappa$. Cada elemento de $\mathscr{F}(A_0)$ intersecta a A_0 en alguno de sus puntos, así que podemos escribir $\mathscr{F}(A_0) = \bigcup\{\mathscr{F}(A_0, x) : x \in A_0\}$, donde $\mathscr{F}(A_0, x) = \{B \in \mathscr{F}(A_0) : x \in B \cap A_0\}$. Como A_0 es finito, existe un $x_0 \in A_0$ tal que $|\mathscr{F}(A_0, x_0)| = \kappa$. La familia $\{B - \{x_0\} : B \in \mathscr{F}(A_0, x_0)\}$ cumple las hipótesis del lema y sus elementos tienen todos cardinalidad $n-1$, así que por hipótesis de inducción, existe un Δ-sistema no numerable $\Delta_0 \subset \{B - \{x_0\} : B \in \mathscr{F}(A_0, x_0)\}$. El conjunto $\{B \cup \{x_0\} : B \in \Delta_0\}$ es el Δ-sistema buscado. $\square$

Gracias a esta generalización del lema de los Δ-sistemas, tenemos la generalización del teorema 2.11 de la siguiente manera.

Teorema 5.8. *Sea J un conjunto, κ un cardinal infinito y $\{X_i : i \in J\}$ una familia de espacios no vacíos. Se tiene que $c(\prod\{X_i : i \in J\}) \leq \kappa$ si y sólo si para cada $F \subset J$ finito, $c(\prod\{X_i : i \in F\}) \leq \kappa$.*

Demostración. Si el producto total tiene celularidad menor o igual a κ, cualquier subproducto también tendra celularidad menor o igual a κ ya que es imagen continua del producto total. Supongamos que existe una colección $\mathscr{U}$ de abiertos no vacíos del producto X, ajenos dos a dos y que además $|\mathscr{U}| = \kappa^+$. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que todos ellos son abiertos básicos. Para cada $i \in S$, sea $\pi_i : X \to X_i$ la proyección. Escribamos

$$\mathscr{U} = \Big\{ \bigcap_{k \in F_i} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] : i \in J \Big\},$$

donde $|J| = \kappa^+$,, F_i es un subconjunto finito de S distinto del vacío para cada $i \in J$ y U_{k,F_i} es abierto en X_k para cada $k \in F_i$ e $i \in J$.

Como κ^+ es un cardinal regular, la colección $\{F_i : i \in J\}$ cumple las condiciones del lema 5.7, así que hay un conjunto $J' \subset J$ con $|J'| = \kappa^+$ y un subconjunto finito $F^* \subset S$ tal que si $i, j \in J'$ e $i \neq j$, entonces $F_i \cap F_j = F^*$. Observemos que F^* es distinto del vacío ya que de lo contrario, cualesquiera dos abiertos de la colección $\{\bigcap_{k \in F_i} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] : i \in J'\}$ tendrían intersección no vacía, lo cual contradice la hipótesis. Sea $p_i : X(F^*) \to X_i$ la proyección para cada $i \in F^*$. Consideramos la siguiente colección de abiertos no vacíos de $X(F^*)$:

$$\mathscr{V} = \Big\{ \bigcap_{k \in F^*} p_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] : i \in J' \Big\}.$$

Ahora notemos que esta colección tiene sus elementos ajenos dos a dos. Para confirmar esta afirmación, tomemos

$$U = \bigcap_{k \in F^*} p_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}]$$

$$V = \bigcap_{k \in F^*} p_k^{\leftarrow}[U_{k,F_j}]$$

dos elementos distintos de este conjunto que se intersecten en un punto $y \in X(F^*)$. Además claramente $|\mathscr{V}| = |J'| = \kappa^+$.

Definimos $x \in X$ de la siguiente manera: Si $k \in F^*$, tomamos $\pi_k(x) = p_k(y)$; si $k \in F_i - F^*$, tomamos $\pi_k(x) \in U_{k,F_i}$ cualquier punto; si $k \in F_j - F^*$, tomamos $\pi_k(x) \in U_{k,F_j}$ cualquier punto; y si $k \notin F_i \cup F_j$, escogemos $\pi_k(x)$ arbitrariamente en X_k. Es claro de la definición de x que

$$x \in \Big[\bigcap_{k \in F_i} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_i}] \Big] \cap \Big[\bigcap_{k \in F_j} \pi_k^{\leftarrow}[U_{k,F_j}] \Big],$$

lo cual contradice que la familia $\mathscr{U}$ tiene sus elementos ajenos dos a dos. Esto prueba que no hay anticadenas de abiertos de cardinalidad mayor estricta que κ, lo cual termina la prueba de nuestro resultado. $\square$

Un corolario inmediato del teorema 5.8 es el siguiente.

Corolario 5.9. *Sea J un conjunto y $\{X_i : i \in J\}$ una familia de espacios no vacíos. Se tiene que*

$$c\Big(\prod\{X_i : i \in I\}\Big) = \sup\Big\{c\Big(\prod\{X_i : i \in F\}\Big) : F \subset I, |F| < \aleph_0\Big\}$$

Demostración. Sea κ el valor del lado izquierdo de la igualdad y τ el del lado derecho. Claramente, cada producto finito tiene celularidad menor o igual que τ, por lo que el teorema 5.8 nos dice que $\kappa \leq \tau$. Además, usando la otra implicación del teorema 5.8, $c(X_i) \leq \kappa$ para cada $i \in J$, por lo que $\tau \leq \kappa$, lo cual completa la prueba. $\square$

Considerando los teoremas 5.4 y 5.8, podemos combinarlos para obtener el siguiente resultado.

Corolario 5.10. *Sean J un conjunto, κ un cardinal infinito y $\{X_i : i \in J\}$ una familia de espacios no vacíos. Si para cada $i \in J$, $d(X_i) \leq \kappa$, entonces*

$$c\Big(\prod\{X_i : i \in J\}\Big) \leq \kappa.$$

Demostración. Por el teorema 5.8, es suficiente probar que la celularidad de los subproductos finitos es menor o igual que κ. Por el teorema 5.4, cada subproducto finito tiene densidad menor o igual que κ. Por el lema 5.1, cada subproducto finito tiene celularidad menor o igual a κ. $\square$

El corolario 5.10 nos dice como encontrar espacios producto con celularidad pequeña y densidad grande. Esto se puede ver en el hecho de que el espacio $\mathbf{2}^\kappa$ es cac pero, dependiendo de como escojamos κ, tiene densidad grande. Por ejemplo, si suponemos CH y tomamos $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} < \kappa \leq 2^{\aleph_1}$, entonces $\mathbf{2}^\kappa$ es un espacio con densidad exactamente $\aleph_1$ que es cac.

Una pregunta que se puede hacer uno es si se puede llegar a un resultado similar al del capitulo 3 ó 4 en el caso general. Es decir, si es posible que el producto de dos espacios con celularidad κ tenga celularidad mayor estricta que κ. Fred Galvin demuestra en [7] lo siguiente.

Proposición 5.11. *Sea κ un cardinal tal que $2^\kappa = \kappa^+$. Entonces existen dos espacios Hausdorff X, Y tales que $c(X) \leq \kappa$, $c(Y) \leq \kappa$ y $c(X \times Y) > \kappa$.*

Demostración. Para desarrollar esta demostración, se tiene que hacer un trabajo que generaliza al del capítulo 4. Los detalles se encuentran en las primeras tres secciones de [7]. $\square$

El autor de este trabajo no sabe si para algún cardinal infinito $\kappa > \aleph_0$, es consistente el hecho de que tener celularidad menor o igual que κ se conserva bajo productos. Lo que sí sabemos es que el teorema 5.13, demostrado por Kurepa en 1962, nos da una cota superior para la celularidad de un producto. Para ver esto, primero necesitamos de un lema de combinatoria, conocido como el *lema de Erdös-Rado*. Recordemos que si S es un conjunto, $[S]^2 = \{A \in \mathscr{P}(X) : |A| = 2\}$.

Lema 5.12. *Sean κ un cardinal infinito y E un conjunto con $|E| > 2^\kappa$. Supongamos que además $[E]^2 = \bigcup\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Entonces existe $\alpha_0 < \kappa$ y $A \subset E$ tal que $|A| > \kappa$ y $[A]^2 \subset C_{\alpha_0}$*

Demostración. En este lema, consideramos a los conjuntos τ^α de funciones de un ordinal α a un ordinal τ y hacemos énfasis en que las funciones en τ^α son subconjuntos del producto cartesiano $\alpha \times \tau$. Fijemos un punto $p \in E$. Para cada $\alpha < \kappa^+$, vamos a construir colecciones $R(\alpha) = \{R_f : f \in \kappa^\alpha\} \subset \mathscr{P}(E)$ y $E(\alpha) = \{e_f : f \in \kappa^\alpha\} \subset E$ por inducción transfinita.

Para $\alpha = 0$, sólo necesitamos definir $R_\emptyset = E$ y $e_\emptyset = p$, donde estamos considerando $\emptyset$ como la función vacía, es decir, la única función de $0 = \emptyset$ a κ.

Sea $\alpha < \kappa^+$. Supongamos que tenemos definidas las colecciones $R(\beta)$ y $E(\beta)$ para toda $\beta < \alpha$. Hay dos casos para definir $\{R_f : f \in \kappa^\alpha\}$, dependiendo si α es sucesor o no.

Si $\alpha = \gamma + 1$ para algún $\gamma \in \mathsf{ord}$, definimos, para cada $f \in \kappa^\alpha$,

$$R_f = \{x \in R_{f|_\gamma} : x \neq e_{f|_\gamma}, \{x, e_{f|_\gamma}\} \in C_{f(\gamma)}\}.$$

Si α no es sucesor, definimos, para cada $f \in \kappa^\alpha$

$$R_f = \bigcap \Big\{R_{f|_\beta} : \beta < \alpha\Big\}.$$

Para definir la colección $E(\alpha)$, lo hacemos en dos casos. Dada $f \in \kappa^\alpha$, si $R_f \neq \emptyset$, elegimos un elemento cualquiera $e_f \in R_f$ arbitrariamente. En el caso $R_f = \emptyset$, tomamos $e_f = p$. Esto completa la construcción.

Notemos que, de la construcción, se deducen las siguientes dos propiedades.

(a) para cualesquiera $\alpha < \kappa^+$ y $f \in \kappa^\alpha$, se tiene que $e_{f|_\beta} \notin R_f$, si $\beta < \alpha$.

(b) para cualesquiera $\alpha < \kappa^+$, $f \in \kappa^\alpha$ y $x \in R_f$, se tiene que $\{x, e_{f|_\beta}\} \in C_{f(\beta)}$ si $\beta < \alpha$.

Sea $F = \bigcup\{E(\alpha) : \alpha < \kappa^+\}$, notemos que $|F| \leq 2^\kappa$ por lo que podemos tomar $y \in E - F$. Con ayuda de y, vamos a construir una sucesión transfinita de funciones $\{f_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ con $f_\alpha \in \kappa^\alpha$. De nuevo, haremos la construcción usando inducción transfinita. Construiremos las funciones de tal manera que se cumplan las siguientes dos condiciones.

(c) $f_\alpha|_\beta = f_\beta$, si $\beta < \alpha < \kappa^+$,

(d) $y \in R_{f_\alpha}$, si $\alpha < \kappa^+$ y $\alpha \neq 0$.

En el caso $\alpha = 0$, hay que tomar $f_0 = \emptyset$, la función vacía. Supongamos que $\alpha < \kappa^+$ y que tenemos definidas las funciones f_β para $\beta < \alpha$. De nuevo, hay dos casos dependiendo de si α es sucesor o no.

Si $\alpha = \gamma + 1$ para algún $\gamma \in \mathsf{ord}$, como $y \neq e_{f_\gamma}$, existe $\delta < \kappa$ de tal manera que $\{y, e_{f_\gamma}\} \in C_\delta$. Definimos entonces $f_\alpha = f_\gamma \cup \{(\alpha, \delta)\}$.

Si α no es sucesor, definimos $f_\alpha = \bigcup\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ la cual es una función por la propiedad (c) aplicada a los ordinales menores que α.

Claramente en los dos casos se siguen cumpliendo (c) y (d) para α, por lo que esto completa la inducción.

Gracias a la propiedad (c), el conjunto $f = \bigcup\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una función $f : \kappa^+ \to \kappa$. De aquí, existe un subconjunto $T \subset \kappa^+$ con $|T| = \kappa^+$ y un $\alpha_0 < \kappa$ tal que si $\alpha \in T$, entonces $f(\alpha) = \alpha_0$. Sea $A = \{e_{f_\alpha} : \alpha \in T\}$, afirmo que A y α_0 son el conjunto y ordinal que cumplen lo que queremos.

Por (a), tenemos que si $\alpha, \beta \in T$ y $\alpha \neq \beta$, $e_{f_\alpha} \neq e_{f_\beta}$. Por lo tanto $|A| = \kappa^+$. Por (b), se tiene que si $\alpha, \beta \in T$ y $\alpha \neq \beta$, $\{e_{f_\alpha}, e_{f_\beta}\} \in C_{\alpha_0}$. Por lo tanto $[A]^2 \subset C_{\alpha_0}$, que es lo que faltaba probar. □

El lema de Erdös-Rado tiene la siguiente interpretación en teoría de gráficas: Si consideramos una gráfica completa con conjunto de vértices E de cardinalidad estrictamente mayor que 2^κ y pintamos sus aristas con κ colores, existe una subgráfica completa con conjunto de vértices A de cardinalidad mayor que κ que está pintada de un solo color.

Teorema 5.13. *Sean κ un cardinal infinito, J un conjunto y $\{X_i : i \in J\}$ una familia de espacios no vacíos tales que $c(X_i) \leq \kappa$ para todo $i \in J$. Entonces $c(X) \leq 2^\kappa$, donde $X = \prod\{X_i : i \in J\}$.*

Demostración. Por el teorema 5.8, es suficiente suponer que J es un conjunto finito y que además $J = \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que existe una familia $\mathcal{U}$ de más de 2^κ abiertos de X ajenos dos a dos. Podemos suponer además que estos abiertos son básicos canónicos del producto, es decir, para cada $U \in \mathcal{U}$, $U = U(1) \times \ldots \times U(n)$ donde $U(i)$ es un abierto en X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definimos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i = \{\{U, V\} \in [\mathcal{U}]^2 : U(i) \neq V(i)\}$. Como cada dos elementos de $\mathcal{U}$ son ajenos entre sí, tenemos que $[\mathcal{U}]^2 = C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Por el lema 5.12, existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y un $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|\mathcal{V}| > \kappa$ y $[\mathcal{V}]^2 \subset C_j$. Entonces $\{U(j) : U \in \mathcal{V}\}$ es una familia de abiertos en X_j ajenos dos a dos, de cardinalidad mayor que κ. Esto es una contradicción al hecho de que $c(X_j) \leq \kappa$, lo cual prueba que nuestra suposición inicial es erronea y por lo tanto es cierto el enunciado del teorema. □

5.2. Aplicaciones a la compactación de Stone-Čech

Un espacio topológico X es *Tychonoff* si es Hausdorff y para cada punto $p \in X$ y cada abierto U con $p \in U$, existe una función continua $f : X \to I$ tal que $p \in f^{\leftarrow}[(0, 1]] \subset U$. Los espacios Tychonoff tienen, debido a su definición, varias propiedades interesantes relacionadas con el intervalo I, entre las cuales destaca el siguiente resultado cuya demostración puede verse en [17, Corolario 17.11, p. 122].

Proposición 5.14. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio Hausdorff X.*

(a) X es Tychonoff,

(b) existe un cardinal κ y un encaje $e : X \to I^\kappa$,

(c) existe un compacto Hausdorff K y un encaje $e : X \to K$.

Si X es un espacio Hausdorff, una *compactación* de X es un espacio compacto Hausdorff αX y un encaje $i : X \to \alpha X$ tal que $\mathrm{cl}_{\alpha X}(i[X]) = \alpha X$. Por la proposición 5.14, los únicos espacios Hausdorff a los cuales podemos tener esperanza de encontrarles una compactación son precisamente a los Tychonoff. Además, podemos construir una compactación de cualquier espacio Tychonoff X tomando la cerradura de su imagen bajo la función e de la parte (b) de la proposición 5.14. Sin embargo, esto se puede hacer con más cuidado de la siguiente manera.

Debido a que la definición de ser espacio Tychonoff depende de sus funciones continuas, resulta natural considerar el conjunto $C^*(X)$ de funciones continuas acotadas con dominio X y contradominio $\mathbb{R}$. Este conjunto (que además es un anillo en el sentido algebraico) juega un papel escencial en la estructura de estos espacios. En particular tenemos el siguiente resultado, que es un corolario de [17, 8.16, p. 57].

Proposición 5.15. *Sea X un espacio Tychonoff. Para cada $f \in C^*(X)$, consideremos un intervalo cerrado $I_f \subset \mathbb{R}$ tal que $f[X] \subset I_f$. Sea $I_X = \prod\{I_f : f \in C(X)\}$. Entonces, la función $e : X \to I_X$ dada por $e(x) = (f(x))_{f \in C(X)}$ es un encaje.*

Considerando la función e de la proposición 5.15, $\mathrm{cl}_{I_X}(e[X])$ junto con el encaje restringido en su contradominio $e : X \to \mathrm{cl}_{I_X}(e[X])$ es una compactación de X. Llamaremos a esta compactación, *la compactación de Stone-Čech* de X y denotaremos a $\mathrm{cl}_{I_X}(e[X])$ por βX. También pensaremos, para simplificar notación, que $X \subset \beta X$. Una observación pertinente es que la existencia de βX depende de AC, para una exposición más detallada de esto, se remite al lector a [8, 4.8, p. 85].

Nos gustaría conocer la cardinalidad de diversas familias de subconjuntos de βX. La descripción de βX en general requiere de herramientas que tomaría bastante desarrollar, así que aquí consideraremos únicamente espacios discretos. Si tomamos un cardinal infinito κ, como espacio topológico le estamos asignando la topología discreta por lo que es Tychonoff. Por lo tanto, podemos considerar su compactación de Stone-Čech $\beta\kappa$. Esto no es nada restrictivo ya que aún ahora se siguen estudiando espacios como $\beta\omega_0$ que no son nada triviales. En particular nos gustaría calcular $|\beta\kappa|$ y $c(\beta\kappa - \kappa)$. Empecemos mencionando algunos resultados básicos acerca de la compactación de Stone-Čech.

El primer resultado se encuentra demostrado en [17, 19.5, p. 137].

Proposición 5.16. *Sea X Tychonoff y K un compacto Hausdorff. Para toda función $f : X \to K$, existe una única función $F : \beta X \to K$ tal que $F|X = f$.*

El siguiente resultado es un corolario de [16, 1.14, p. 10].

Proposición 5.17. *Sea κ un cardinal infinito. Si $A, B \subset \kappa$, entonces $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(B) = \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A \cap B)$.*

Los siguientes dos resultados encierran el hecho de que $\beta\kappa$ es un espacio 0-dimensional.

Proposición 5.18. *Sea κ un cardinal infinito. Si $A \subset \kappa$, entonces $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A)$ es abierto y cerrado en $\beta\kappa$ y su complemento es $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(\kappa - A)$.*

Demostración. Por el lema 5.17, se tiene que $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(\kappa - A) = \emptyset$ y además se cumple trivialmente que $\beta\kappa = \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) \cup \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(\kappa - A)$ por lo que $\beta\kappa - \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) = \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(\kappa - A)$. □

Proposición 5.19. *Sea κ un cardinal infinito. La familia de conjuntos $\{\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) : A \subset \kappa\}$ forma una base para la topología de $\beta\kappa$.*

Demostración. Por [13, 4.6(b)(3), p. 278], cualquier cerrado de $\beta\kappa$ es intersección de elementos de $\{\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) : A \subset \kappa\}$. Además, por la proposición 5.18, $\beta\kappa - \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) = \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(\kappa - A)$, de lo cual se sigue el resultado. □

Empecemos calculando $|\beta\kappa|$. Observemos que, en general, tenemos lo siguiente.

Lema 5.20. *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.*

Demostración. Sea D un denso en X tal que $d(X) = |D|$, es suficiente definir una función inyectiva $f : X \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(D))$. Definimos para cada $x \in X$:

$$f(x) = \{U \cap D : U \text{ es abierto y } x \in U\}.$$

Si $x, y \in X$ y $x \neq y$, existen abiertos ajenos U, V de X tales que $x \in U$, $y \in V$. Si $U \cap D \in f(y)$, entonces existe un abierto W en X tal que $y \in W$ y $W \cap D = U \cap D$. Tomando cerradura, tenemos que $\mathrm{cl}_X(U) = \mathrm{cl}_X(U \cap D) = \mathrm{cl}_X(W \cap D) = \mathrm{cl}_X(W)$, lo cual implica que $y \in \mathrm{cl}_X(U)$. Esto contradice la elección de U y V, lo que demuestra que f es inyectiva. □

Como consecuencia de esto, tenemos el siguiente resultado sobre la cardinalidad de βX en general.

Lema 5.21. *Sea X un espacio Tychonoff. Entonces $|\beta X| \leq 2^{2^{|X|}}$.*

Demostración. Es directo del lema 5.20 ya que X es denso en βX. □

Una pregunta natural al enfrentarse a este resultado es si existirá un espacio en el que se cumpla la igualdad en el enunciado del lema 5.21. Sucede que los espacios discretos la cumplen.

Teorema 5.22. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces $|\beta\kappa| = 2^{2^\kappa}$.*

Demostración. Por el teorema 5.4, existe una función $f : \kappa \to \mathbf{2}^{2^\kappa}$ tal que $f[\kappa]$ es denso en $\mathbf{2}^{2^\kappa}$. Además, κ tiene la topología discreta así que f es una función continua. Por el lema 5.16, existe una función continua $F : \beta\kappa \to \mathbf{2}^{2^\kappa}$ tal que $F|_\kappa = f$. Como $F[\beta\kappa]$ es un cerrado que contiene a $f[\kappa]$, el cual es denso, entonces $F[\beta\kappa] = \mathbf{2}^{2^\kappa}$. Esto implica que $|\beta\kappa| \geq |\mathbf{2}^{2^\kappa}| = 2^{2^\kappa}$. La otra desigualdad se da por el lema 5.21, lo cual completa la prueba. $\square$

Para conocer la celularidad de $\beta\kappa - \kappa$, necesitamos un resultado conjuntista más, debido a Tarski. Dado un conjunto S, una *familia casi ajena* de subconjuntos de S es una colección $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(S)$ tal que $|A| \geq \aleph_0$ para todo $A \in \mathscr{F}$ y $|A \cap B| < \aleph_0$ para cualesquiera $A, B \in \mathscr{F}$ con $A \neq B$.

Lema 5.23. *Sean κ, τ cardinales con κ infinito. Se tiene que $\tau \leq \kappa^{\aleph_0}$ si y sólo si cada conjunto S con $|S| = \kappa$ admite una familia casi ajena $\mathscr{F}$ de conjuntos infinitos numerables con $|\mathscr{F}| = \tau$.*

Demostración. Primero empecemos con un conjunto S con $|S| = \kappa$, es suficiente construir una familia casi ajena $\mathscr{F}$ de cardinalidad $\kappa^{\aleph_0}$. Además, es suficiente tomar los elementos de $\mathscr{F}$ de la colección de subconjuntos finitos de $\omega_0 \times S$, ya que hay exactamente $|S|$ de ellos. Para cada $f : \omega_0 \to S$, sea $A(f) = \{f|_n : n < \omega_0\}$ (es decir, estamos viendo a las funciones como subconjuntos del producto cartesinano). Claramente $A(f)$ es un conjunto numerable de subconjuntos finitos de $\omega_0 \times S$. Si $f, g : \omega_0 \to S$ son dos funciones con $f \neq g$, existe $n < \omega_0$ tal que $f(n) \neq g(n)$, así que $f|_m \neq g|_m$ para $m \geq n$. Por lo tanto, $|A(f) \cap A(g)| < \aleph_0$, lo cual nos dice que la familia $\mathscr{F} = \{A(f) : (f : \omega_0 \to S)\}$ es una familia casi ajena y además es de cardinalidad $|S|^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$. Todo esto nos dice que $\mathscr{F}$ es la familia requerida.

Para la otra implicación, supongamos que tenemos una familia $\mathscr{F}$ casi ajena de subconjuntos numerables de S, $|S| = \kappa$. Notemos que $\mathscr{F} \subset \{A \subset S : |A| = \aleph_0\}$, por lo que $|\mathscr{F}| \leq \kappa^{\aleph_0}$. $\square$

El lema 5.23 habla de familias casi ajenas de conjuntos de cardinalidades arbitrariamente grandes. Es interesante ver la demostración de un caso específico del lema de Tarski, el caso numerable, en cuya demostración podemos usar la topología de la recta de la siguiente manera.

Lema 5.24. *Sea D un conjunto numerable. Existe una familia casi ajena $\mathscr{F}$ de subconjuntos de D con $|\mathscr{F}| = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos pensar que $D = \mathbb{Q}$. Usando AC, podemos escoger $\mathbb{Q}_x$ una sucesión de racionales que convergen a x con la topología Euclidiana para cada $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces $\{\mathbb{Q}_x : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ es la colección buscada. $\square$

Con ayuda del lema 5.23, estamos listos para encontrar la celularidad de los espacios de la forma $\beta\kappa - \kappa$, donde κ es un cardinal infinito.

Teorema 5.25. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces $c(\beta\kappa - \kappa) = \kappa^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una familia casi ajena de subconjuntos numerables de κ con $|\mathscr{F}| = \kappa^{\aleph_0}$. Consideremos la familia $\mathcal{U} = \{\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) : A \in \mathscr{F}\}$ que esta formada de conjuntos abiertos, por la proposición 5.18. Por el lema 5.17, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(B) = \mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A \cap B) = A \cap B \subset \kappa$, ya que $A \cap B$ es finito. Por lo tanto, la familia $\mathcal{V} = \{U - \kappa : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia de abiertos ajenos dos a dos de $\beta\kappa - \kappa$. Notemos que si $A \in \mathscr{F}$ entonces $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) - A$ es no vacío ya que A es un conjunto infinito y discreto contenido en el compacto $\beta\kappa$. Esto nos dice que la colección $\mathcal{V}$ tiene la misma cardinalidad de $\mathscr{F}$ y así, $|\mathcal{V}| = \kappa^{\aleph_0}$. Por lo tanto, $c(\beta\kappa - \kappa) \geq \kappa^{\aleph_0}$.

Ahora consideremos una familia $\mathcal{U}$ de abiertos ajenos no vacíos de $\beta\kappa$. Por la proposición 5.19, podemos suponer que todo elemento de $\mathcal{U}$ es de la forma $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A) - \kappa$, para algún $A \subset \kappa$. Por AC, podemos escoger un A_U tal que $\mathrm{cl}_{\beta\kappa}(A_U) - \kappa = U$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Sea $\mathscr{F} = \{A_U \subset \kappa : U \in \mathcal{U}\}$. Por la proposición 5.17, tenemos que $\mathscr{F}$ es una familia casi ajena de subconjuntos infinitos de κ y además $|\mathscr{F}| = |\mathcal{U}|$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, sea $B_U \subset A_U$ infinito numerable. Entonces la colección $\mathscr{F}' = \{B_U : U \in U\}$ sigue siendo una familia casi ajena de subconjuntos de κ, ahora numerables, y $|\mathscr{F}'| = |\mathscr{F}| = |\mathcal{U}|$. Por el lema 5.23, obtenemos que $\kappa^{\aleph_0} \geq |\mathscr{F}'| = |\mathcal{U}|$. Por lo tanto se da que $c(\beta\kappa - \kappa) \leq \kappa^{\aleph_0}$, que era lo que faltaba. □

Como corolario tenemos lo siguiente.

Corolario 5.26. $c(\beta\omega_0 - \omega_0) = 2^{\aleph_0}$

La importancia del corolario 5.26 radica en que existe un espacio X tal que βX tiene exactamente $|\mathscr{P}(X)|$ abiertos ajenos dos a dos.

Algo que el lector se puede estar preguntando en estos momentos es porqué no se calculó la celularidad de $\beta\kappa$, en vez de la de $\beta\kappa - \kappa$. La respuesta a esto se encuentra en el siguiente lema.

Lema 5.27. *Sean X un espacio y $D \subset X$ denso. Entonces $c(X) = c(D)$.*

Demostración. Para probar $c(X) \leq c(D)$, notemos que si $\mathcal{U}$ es una colección de abiertos ajenos dos a dos de X, entonces $\{U \cap D : U \in \mathcal{U}\}$ es una colección de $|\mathcal{U}|$ abiertos ajenos dos a dos de D. Para la otra desigualdad, sea $\mathcal{V}$ una colección de abiertos ajenos dos a dos de D. Por AC, para cada $V \in \mathcal{V}$, podemos escoger un abierto $U(V)$ un abierto en X tal que $U(V) \cap D = V$. Si $V, W \in \mathcal{V}$ son tales que $U(V) \cap U(W) \neq \emptyset$, entonces $D \cap (U(V) \cap U(W))$ es un subconjunto no vacío de $V \cap W$, ya que D es denso y $U(V) \cap U(W)$ es abierto. Esto implica que $V = W$. Por lo tanto, el conjunto $\{U_V : V \in \mathcal{V}\}$ es una colección de $|\mathcal{V}|$ abiertos ajenos dos a dos de X. Es decir, $c(X) \geq c(D)$, que es lo que faltaba. □

Por lo tanto, ahora el cálculo de la celularidad de $\beta\kappa$ resulta ser muy sencillo.

Corolario 5.28. *Si κ es un cardinal infinito, $c(\beta\kappa) = \kappa$.*

Demostración. Por el lema 5.27, se tiene que $c(\beta\kappa) = c(\kappa) = \kappa$. □

Si el lector desea conocer más a fondo la compactación de Stone-Čech, se le recomienda consultar el texto [16].

Índice alfabético

Bibliografía

[1] P.J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), pp. 1143–1148.

[2] P.J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), pp. 105–110.

[3] K.J. Devlin y H. Johnsbråten, *The Souslin Problem*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 405, Springer, 1974,

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[5] R. Engelking, *General Topology, revised and completed edition*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[6] D.H. Fremlin, *Consequences of Martin's axiom*, Cambridge University Press, 1984.

[7] F. Galvin, *Chain conditions and products*, Fund. Math. **108** (1980), pp. 33–48.

[8] H. Herrlich, *Axiom of Choice*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1876, Springer, 2006.

[9] R. Hodel, *Cardinal Functions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier, 1984.

[10] T. Jech, *Set Theory, The Third Millenium Edition, Revised and Expanded*, Springer, 2002.

[11] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, Volume 102, North-Holland, 1980.

[12] P.A. Martin y R.M. Solovay, *Internal Cohen Extensions*, Ann. Math. Logic **2** (1970), pp. 143–178.

[13] J.R. Porter y R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, 1980.

[14] L.A. Steen y J.A. Seebach, Jr., *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

[15] M.M. Souslin, *Problème 3*, Fund. Math. **1** (1920), p. 223.

[16] R.C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 83, Springer-Verlag, 1974.

[17] S. Willard, *General Topology*, Dover, 2004.