UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

FÓRMULAS DE TRAZA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

JULIO CESAR AVILA ROMERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS VILLEGAS BLAS

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE, 2008

Fórmulas de Traza

Julio César Ávila Romero

RESUMEN. En este escrito se discuten fórmulas de traza en general y se calculan algunos ejemplos clásicos de ellas. Con ayuda de Análisis Semi-Clásico se culmina con el estudio de la Fórmula de Traza Semi-Clásica (o de Gutzwiller), cuya prueba rigurosa no se da pero si los argumentos y resultados claves para ella, dando además las referencias necesarias para su estudio detallado.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El propósito de este escrito es estudiar la traza para operadores acotados y dar una forma de expandir dicha definición a operadores no acotados con ayuda de herramientas como el análisis de Fourier y el teorema espectral. Además se pretende introducir algunas ideas básicas de análisis semi-clásico y estudiar algunas de sus herramientas básicas como lo es el método de la fase estacionaria. A medida que se avanza en el escrito se van estudiando ejemplos clásicos de fórmulas de traza y sus generalizaciones, para finalmente estudiar la Fórmula de Traza Semi-Clásica, de la cual sólo se discuten las ideas claves y principales para su prueba rigurosa.

En la primera sección de este escrito se inicia estudiando la definición general de traza y se da un ejemplo clásico de ella, el cual es llamado la fórmula de la suma de Poisson. Después se generaliza y con ayuda del método de la fase estacionaria se llega a un caso particular de la fórmula de traza de Duistermaat-Guillemin para el toro n-dimensional. En la siguiente sección se estudia solamente la Fórmula de Traza Semi-Clásica, en la cual se da el enunciado preciso de dicha fórmula y se discuten las ideas claves para su demostración, haciendo referencia a los textos indicados en caso de ser necesario. Las herramientas básicas necesarias para el desarrollo de la teoría anterior se describen en el apéndice, en los cuales se estudia sobre análisis de Fourier y sobre el método de la fase estacionaria.

1. Algunas Fórmulas Clásicas de Traza

En esta sección iniciamos estudiando la definición general de fórmulas de traza de un operador acotado para después extenderla a funciones adecuadas de operadores no acotados con la ayuda del teorema espectral. Después estudiamos un ejemplo clásico donde se calcula explícitamente la fórmula de traza del operador momento en el espacio de Hilbert de funciones sobre $\mathbb{R}$ que son T-periódicas y de cuadrado integrable, dicha fórmula de traza es también llamada fórmula de la suma de Poisson. Dicha fórmula de traza se generaliza a n-variables, generalizando el operador momento al igual que el espacio de Hilbert. Por último se estudia el comportamiento asintótico de fórmulas de traza cuando los eigenvalores del operador son suficientemente grandes.

1.1. Generalidades sobre Fórmulas de Traza. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea Q un operador lineal y acotado sobre $\mathscr{H}$. Supongamos que existe una base ortonormal $\{e_j\}$ de $\mathscr{H}$ tal que

$$Q(e_j) = \nu_j e_j, \qquad \nu_j \in \mathbb{C}.$$

Definición 1.1. *Un operador Q que cumpla con las condiciones anteriores se dice ser tipo traza si la serie $\sum_j \nu_j$ es absolutamente convergente. En este caso se define*

$$\operatorname{Tr}(Q) := \sum_j \nu_j.$$

La definición anterior tiene sentido ya que toda serie absolutamente convergente es convergente. Es de nuestro interés considerar sólo casos donde el espacio de Hilbert es separable, de este modo todas las bases ortonormales son a lo mas numerables. Además notemos que estamos asumiendo una condición muy restrictiva sobre el operador Q, a saber el conocimiento de sus eigenvalores, lo cual para los operadores que nos incumben en este escrito siempre será fácil conocerlos. Cabe mencionar que la definición general de traza puede darse sin ningún problema sin pedir dicha condición, como se menciona enseguida.

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert separable, sea Q un operador lineal y acotado sobre $\mathscr{H}$ y sea $\{e_j\}$ una base ortonormal de $\mathscr{H}$ arbitraria. Nótese que no se pide conocer los eigenvalores. Se dice que Q es un operador tipo traza si $\operatorname{Tr}|Q| < \infty$, donde $|Q| = \sqrt{Q^*Q}$, es decir

$$\operatorname{Tr}(|Q|) := \sum_j < e_j, |Q|(e_j) > < \infty, \tag{1.1}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ denota el producto interior de $\mathscr{H}$. Por supuesto que quedan muchas propiedades por demostrar. Para empezar nótese que Q^*Q es un operador positivo entonces su raíz cuadrada $|Q|$ está bien definida y es positiva también, de este modo en la suma (1.1) todos los sumandos son positivos. Por otra parte se puede mostrar que dicha suma es independiente de la base ortonormal, es decir $\operatorname{Tr}(|Q|)$ está bien definida. Ahora si Q es un operador tipo traza entonces su traza se define como

$$\operatorname{Tr}(Q) := \sum_j < e_j, Q(e_j) >,$$

la cual está bien definida, ya que dicha suma es absolutamente convergente y por ende convergente, además es independiente de la base. Para mas detalles véase [22].

Sea $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$ el espacio de funciones de cuadrado integrable, donde (M,μ) es un espacio de medida, de tal manera que los elementos de la base e_j son funciones sobre M. Entonces se define el Kernel de Schwartz de Q sobre $M \times M$ como

$$K_Q(x,y) = \sum_j \nu_j e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{1.2}$$

Este kernel tiene la propiedad que si $f \in \mathscr{H}$, entonces por la continuidad del producto interior de $\mathscr{H}$ se tiene que

$$Q(f)(x) = \int_M K_Q(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y). \tag{1.3}$$

De igual forma se puede encontrar la fórmula de traza de Q a partir de su Kernel de Schwartz (1.2) como sigue,

$$\mathrm{Tr}(Q) = \sum_j \nu_j = \int_M K_Q(x,x)\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{1.4}$$

Desafortunadamente la mayoría de los operadores importantes con espectro discreto que provienen de física y de geometría no son operadores tipo traza, como por ejemplo los operadores de Laplace-Beltrami, de Schrödinger y de Dirac, de hecho algunos de ellos ni siquiera son acotados, pero funciones adecuadas de ellos si pueden ser tipo traza, como veremos enseguida.

Sea P un operador lineal y no acotado en $\mathscr{H}$ y supongamos que existe una base ortonormal de $\mathscr{H}$ tal que

$$P(e_j) = \lambda_j e_j$$

donde ahora suponemos que los eigenvalores $\{\lambda_j\}$ son reales y se acumulan sólo en $\pm\infty$. Sea φ una función sobre $\mathbb{R}$ (en general φ puede tomar valores en $\mathbb{C}$, pero está fuera de nuestros intereses) y definamos el operador

$$Q_\varphi := \varphi(P),$$

es decir, Q_φ se define por la propiedad

$$Q_\varphi(e_j) = \varphi(\lambda_j) e_j \qquad \forall j. \tag{1.5}$$

Notemos que para el operador P la familia $\{e_j\}$ es una base ortonormal de eigenfunciones con $\{\lambda_j\}$ la familia correspondiente de eigenvalores, mientras que para el caso de $Q_\varphi = \varphi(P)$ la base ortonormal de eigenfunciones es la misma pero con $\{\varphi(\lambda_j)\}$ la familia correspondiente de eigenvalores.

Para una definición precisa del operador Q_φ en (1.5) se necesita del teorema espectral, el cual puede verse en [17, 22], donde además se menciona acerca de las condiciones que debe cumplir dicha función φ, que para nosotros será suficiente pedir que sea continua, y si además φ es acotada entonces Q_φ también será acotado.

Notemos que si φ decae suficientemente rápido en $\pm\infty$ entonces Q_φ es un operador tipo traza y por lo tanto de (1.4) su traza es

$$\sum_j \varphi(\lambda_j) = \int_M K_\varphi(x,x)\, \mathrm{d}\mu(x), \tag{1.6}$$

donde K_φ es el Kernel de Schwartz de Q_φ.

Salvo pocas excepciones, es difícil calcular exactamente $\mathrm{Tr}(Q_\varphi)$. Para las fórmulas de traza que estudiaremos aquí, su kernel K_φ se calcula al menos aproximadamente escribiendo

$$Q_\varphi = \varphi(P) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itP}\, \check{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{1.7}$$

donde

$$\check{\varphi}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\lambda}\, \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

es la transformada inversa de Fourier de φ. Para ser mas precisos, sea U el operador dependiente de t dado por

$$U(t) := \mathrm{e}^{-itP},$$

definido por la propiedad

$$U(t)(e_j) = \mathrm{e}^{-it\lambda_j}\, e_j \qquad \forall j.$$

Notemos que esto último es un caso particular de (1.5) con $\varphi_0(x) = \mathrm{e}^{-itx}$. Sustituyendo esto último en (1.7), tenemos que si $f \in \mathscr{H}$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi(P)(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} U(t)(f)(x)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{M} K_{\mathrm{U}}(t,x,y) f(y)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{1.8}$$

donde en la segunda igualdad se aplicó la propiedad (1.3) del kernel de Schwartz $K_{\mathrm{U}}(t,x,y)$ de $U(t)$, usando además el hecho de que $U(t)$ es un operador acotado ya que $\varphi_0(x) = \mathrm{e}^{-itx}$ es una función acotada y $U(t) = \varphi_0(P)$. El Kernel de Schwartz de $U(t)$, por (1.2), es

$$K_{\mathrm{U}}(t,x,y) = \sum_j \mathrm{e}^{-it\lambda_j} e_j(x)\overline{e_j(y)},$$

el cual estrictamente hablando sólo existe en el sentido de distribuciones. Mas específicamente nos referimos al Teorema del Kernel de Schwartz que se puede ver en detalle en [16]. Intercambiando los órdenes de integración en (1.8), por el Teorema de Fubini, tenemos que

$$\varphi(P)(f)(x) = \int_M \left(\int_{\mathbb{R}} K_{\mathrm{U}}(t,x,y)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \right) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

comparando esta última ecuación con (1.3) se llega finalmente a que el Kernel de Schwartz $K_\varphi(x,y)$ de $Q_\varphi = \varphi(P)$ es

$$K_\varphi(x,y) = \int_{\mathbb{R}} K_{\mathrm{U}}(t,x,y)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Con esto último y por (1.6), llegamos a que la ecuación para la traza del operador Q_φ es

$$\sum_j \varphi(\lambda_j) = \int_M \int_{\mathbb{R}} K_{\mathrm{U}}(t,x,x)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{1.9}$$

La ventaja de introducir el operador $U(t)$ es que resuelve la siguiente ecuación diferencial con su condición inicial

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t) = -P(U(t)) \qquad U(t)|_{t=0} = I.$$

La idea detrás de la fórmula de traza es resolver al menos aproximadamente el problema anterior, y así poder escribir una ecuación para la traza de $Q_\varphi = \varphi(P)$.

Ahora estudiaremos algunos casos clásicos donde lo anterior puede llevarse acabo exactamente. En cada caso especificaremos el operador P, el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y calcularemos el lado derecho de (1.9) para obtener una fórmula no trivial.

1.2. Fórmula de la Suma de Poisson. Aunque hay diferentes demostraciones de esta fórmula, aquí se dará una siguiendo la esencia de la sección anterior. Sea $T > 0$ y sea $\mathscr{H} = L^2(S^1_T)$, es decir

$$\mathscr{H} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ es } T\text{-periódica y} \int_0^T |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty\}$$

y consideremos también al operador lineal P densamente definido en $\mathscr{H}$ dado por

$$P := D_x := \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Si $w = 2\pi/T$ entonces las eigenfunciones ortonormales y los eigenvalores de P son,

$$e_j(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{ijwx} \qquad \lambda_j = jw \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

En este caso el operador $U(t) = \mathrm{e}^{-itP}$ es el operador traslación $U(t)(f)(x) = f(x-t)$. Para ver esto último, es suficiente probar que dichos operadores son iguales actuando en la base $\{e_j\}$, ya que $U(t)$ es un operador lineal y continuo. Entonces de (1.10) se tiene que

$$\begin{aligned}U(t)(e_j)(x) &= \mathrm{e}^{-it(jw)}\frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{ijwx} = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{ijw(x-t)} \\ &= e_j(x-t).\end{aligned}$$

Si φ decae suficientemente rápido tenemos de (1.8) que,

$$\varphi(P)(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Siguiendo la esencia de la sección anterior, encontraremos una expresión para el kernel de Schwartz de $\varphi(P)$, para esto partiremos de la última ecuación y se comparará con (1.3). Primero se divide la integral sobre $\mathbb{R}$ en intervalos de integración de longitud T,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(x-t)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$$

en el k-ésimo sumando hacemos el cambio de variable $s = t - kT$, usando que f es de periodo T y el teorema de convergencia dominada tenemos que la expresión anterior es igual a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{T} f(x-s)\check{\varphi}(s+kT)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{T} f(x-s)\widetilde{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s$$

donde

$$\widetilde{\varphi}(s) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\check{\varphi}(s+kT), \tag{1.11}$$

la cual claramente es T-periódica. Por último, tomando $t = x - s$ obtenemos que

$$\varphi(P)(f)(x) = \int_{0}^{T} f(t)\widetilde{\varphi}(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

y comparando con (1.3) sigue que el kernel de Schwartz de $\varphi(P)$ es

$$K_{\varphi}(x,y) = \widetilde{\varphi}(x-y).$$

Sustituyendo la expresión anterior y (1.10) en (1.6), y tomando en cuenta la expresión para $\widetilde{\varphi}$ en (1.11), se llega finalmente a la fórmula de la suma de Poisson

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi(jw) = \int_{0}^{T}\widetilde{\varphi}(0)\,\mathrm{d}x = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\check{\varphi}(kT).$$

Teorema 1.2. *Sea φ una función de Schwartz sobre $\mathbb{R}$, sea $T > 0$ y sea $w = 2\pi/T$, entonces*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi(jw) = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\check{\varphi}(kT),$$

donde $\check{\varphi}$ es la transformada inversa de Fourier.

Para nuestros propósitos la fórmula de la suma de Poisson se interpreta como sigue. El lado izquierdo es la traza de $\varphi(D_x)$ actuando en $L^2(S^1_T)$ donde w es la frecuencia fundamental del círculo y por lo tanto es una cantidad analítica. El lado derecho involucra la longitud del círculo T la cual es una cantidad geométrica. Esta es una característica típica de las fórmulas de traza, además de que la relación involucra una transformación integral (transformada inversa de Fourier) de la función de prueba. Para la fórmula de traza semi-clásica (o asintótica) esta transformación integral será la transformada de Fourier, como se verá después.

1.3. Fórmula de Traza en el n-Toro. En esta sección se generalizan las hipótesis y los resultados hechos anteriormente sobre el círculo al toro n-dimensional. Aunque hay una forma estándar de generalizar la fórmula de la suma de Poisson a n dimensiones la cual involucra funciones de Schwartz de n variables, como se puede ver en [9], aquí se verá una generalización para motivar la fórmula de traza semi-clásica que se introducirá en la siguiente sección.

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una retícula, sea F un dominio fundamental de Γ, sea $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$ el n-toro y sea $\mathscr{H} := L^2(M)$ el espacio de funciones Γ-periódicas en $\mathbb{R}^n$ de cuadrado integrable en F, con norma

$$\|f\|^2 = \int_F |f(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

donde $\mathrm{d}x$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Por Γ-periodicidad entendemos que si $x \in \mathbb{R}^n$ y $\gamma \in \Gamma$ entonces $f(x+\gamma) = f(x)$. Este espacio de funciones Γ-periódicas es preservado por el Laplaciano

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Las eigenfunciones de Δ en $\mathscr{H}$ son las exponenciales en dicho espacio, para esto primero introducimos la retícula dual de Γ la cual es

$$\Gamma^* := \{k \in \mathbb{R}^n | k\cdot\gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall\gamma \in \Gamma\}.$$

Las eigenfunciones ortonormales de Δ en $\mathscr{H}$ y los correspondientes eigenvalores son

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{ik\cdot x}, \quad \lambda_k = -\|k\|^2, \quad \forall k \in \Gamma^*.$$

El operador de nuestro interés es la raíz cuadrada positiva de $-\Delta$ actuando en $\mathscr{H}$, es decir

$$P := \sqrt{-\Delta}|_{\mathscr{H}},$$

por lo tanto las eigenfunciones ortonormales de P son otra vez e_k con eigenvalor $\|k\|$, la longitud de k donde $k \in \Gamma^*$. La razón de introducir la raíz cuadrada para definir P es que ahora la ecuación satisfecha por $U(t) = \mathrm{e}^{itP}$ es la ecuación de onda. Diferenciando dos veces $U(t)$ con respecto a t obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t) = \Delta(U(t)).$$

De acuerdo a (1.9), la fórmula de traza de P se obtiene calculando el lado derecho de

$$\sum_{k\in\Gamma^*}\varphi(\|k\|) = \int_F\int_{\mathbb{R}} K_{\mathrm{U}}(t,x,x)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x. \quad (1.12)$$

Sea $\widetilde{U}(t) = \mathrm{e}^{-itP}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y sea $\widetilde{K}_{\mathrm{U}}(t,x,y)$ su kernel de Schwartz. Por propiedades de la transformada de Fourier se tiene que

$$\widetilde{U}(t)(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i[x\cdot\xi - t\|\xi\|]}\,\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

sustituyendo $\widehat{f}(\xi)$, factorizando términos y cambiando el orden de integración, se llega formalmente por (1.3) que

$$\widetilde{K}_{\mathrm{U}}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i[(x-y)\cdot\xi - t\|\xi\|]}\,\mathrm{d}\xi. \quad (1.13)$$

De esto último, se puede obtener por consideraciones generales el kernel de Schwartz $K_{\mathrm{U}}(t,x,y)$ de $U(t) = \mathrm{e}^{-itP}$ en $\mathscr{H}$, es decir el espacio de funciones Γ-periódicas de cuadrado integrable, de la siguiente forma

$$K_{\mathrm{U}}(t,x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\widetilde{K}_{\mathrm{U}}(t,x+\gamma,y).$$

Sustituyendo todo lo anterior en (1.12) se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Gamma^*}\varphi(\|k\|) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\gamma\in\Gamma}\iiint \mathrm{e}^{i[(x+\gamma-x)\cdot\xi - t\|\xi\|]}\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{|F|}{(2\pi)^n}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int \mathrm{e}^{i\gamma\cdot\xi}\,\varphi(\|\xi\|)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

donde $|F|$ es el volumen de F, es decir el volumen del toro M. Es claro que la expresión

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{i\gamma\cdot\xi}\,\varphi(\|\xi\|)\,\mathrm{d}\xi,$$

es una función de γ, pero realmente es función solamente de $\|\gamma\|$. Se puede compensar una rotación de γ por un cambio de variable que también rote a ξ. Pasando a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, es decir haciendo el cambio de variable $\xi = r\eta$ con $\|\eta\| = 1$, podemos escribir la expresión anterior como

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{ir\gamma\cdot\eta}\,\varphi(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}_{S^{n-1}}(\eta)\,\mathrm{d}r,$$

donde $\mathrm{d}_{S^{n-1}}$ es la medida estándar en la esfera $(n-1)$-dimensional S^{n-1}. Se puede resumir este resultado como sigue.

Teorema 1.3. *Para cada función de Schwartz φ definida sobre $\mathbb{R}$, sea*

$$\widetilde{\varphi}(s) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{isr\eta_1}\,\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}_{S^{n-1}}(\eta)\,\mathrm{d}r,$$

entonces tenemos que

$$\sum_{k\in\Gamma^*}\varphi(\|k\|) = |F|\sum_{\gamma\in\Gamma}\widetilde{\varphi}(\|\gamma\|). \quad (1.14)$$

Esta es la fórmula de traza exacta para el operador $P = \sqrt{-\Delta}$ en el toro $\mathbb{R}^n/\Gamma$, la cual involucra la transformación integral $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$. Note que $\|\gamma\|$ es precisamente la longitud de las geodésicas en el toro en la clase de homología de γ, mientras que $\{\|k\| : k \in \Gamma^*\}$ es el espectro de P. Otra vez la interpretación de (1.14) es la siguiente, el lado izquierdo es espectral y el lado derecho es geométrico.

Para el caso particular cuando la función de prueba es la gaussiana $\varphi(w) = \mathrm{e}^{-w^2 t}$ donde t es visto como un parámetro, se puede calcular

$$\widetilde{\varphi}(u) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-u^2/4t},$$

y se obtiene la identidad de Jacobi para la serie de Dirichlet asociada a Γ,

$$\sum_{k\in\Gamma^*} \mathrm{e}^{-\|k\|^2 t} = \frac{|F|}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{e}^{-\|\gamma\|^2/4t}.$$

Se puede interpretar esta última ecuación como una fórmula para la traza de $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ en $\mathscr{H}$, la cual es solución fundamental de la ecuación del calor en el toro.

1.4. Fórmula de Traza Asintótica. Se ha mencionado que en la fórmula de traza asintótica que se verá enseguida, la transformación integral de la función de prueba es la transformada de Fourier. Para ver esto, primero notemos que en la fórmula de traza asintótica para la raíz cuadrada del Laplaciano solo importan los eigenvalores suficientemente grandes, debido a Duistermaat y Guillemin como se puede ver en [8]. Esto se consigue trasladando la función de prueba φ por una cantidad μ y hacer $\mu \to \infty$. En este caso se debe considerar el comportamiento asintótico de

$$\sum_{k\in\Gamma^*} \varphi(\|k\| - \mu) \quad \text{cuando} \quad \mu \to \infty.$$

Para lograr esto, sea

$$\varphi_\mu(\lambda) := \varphi(\lambda - \mu),$$

entonces podemos aplicar el Teorema 1.3 a φ_μ para obtener una fórmula exacta para $\widetilde{\varphi}_\mu$,

$$\widetilde{\varphi}_\mu(s) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{isr\eta_1} \varphi(r-\mu) r^{n-1} \mathrm{d}_{S^{n-1}}(\eta)\, \mathrm{d}r. \tag{1.15}$$

Ahora se estimará esta integral cuando $\mu \to \infty$ con s fijo, viendo a s como la longitud de las geodésicas cerradas. Esto se hace en dos casos:

► $s = 0$. Conocido como el término de Weyl. Se puede calcular directamente $\widetilde{\varphi}_\mu(0)$, y hacer el cambio de variable $u = r - \mu$ para obtener

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_\mu(0) &= \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \varphi(r-\mu) r^{n-1}\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}{(2\pi)^n} \int_{-\mu}^\infty \varphi(u)(u+\mu)^{n-1}\, \mathrm{d}u,\end{aligned}$$

desarrollando el binomio y observando que $\int \varphi(u) u^j\, \mathrm{d}u$ es igual a $\breve{\varphi}^{(j)}(0)$ salvo una constante multiplicativa, tenemos que

$$\widetilde{\varphi}_\mu(0) \sim \mu^{n-1} \mathrm{Vol}(S^{n-1}) \breve{\varphi}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(\breve{\varphi})(0) \mu^{n-1-j}$$

donde α_j es un operador diferencial de orden j. Por lo tanto este término es de orden $O(\mu^{n-1})$ y salvo constantes, el coeficiente guía es $\int \varphi(u)\, \mathrm{d}u$.

► $s > 0$. Hacemos otra vez $u = r - \mu$ en (1.15), y tenemos que el término guía en μ es, (notando que los términos de orden menor simplemente tienen un factor extra de u^j en el integrando y así pueden ser estimados similarmente como el término guía),

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_\mu(s) &\sim \frac{1}{(2\pi)^n} \mu^{n-1} \int_{-\mu}^\infty \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{is(u+\mu)\eta_1} \varphi(u) \mathrm{d}_{S^{n-1}}(\eta) \mathrm{d}u \\ &\sim \frac{1}{(2\pi)^n} \mu^{n-1} \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{is\mu\eta_1} \left(\int_{-\mu}^\infty \mathrm{e}^{isu\eta_1} \varphi(u) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}_{S^{n-1}}(\eta)\end{aligned}$$

donde se puede notar que el término entre paréntesis junto con el factor $1/(2\pi)^n$ converge a $\breve{\varphi}(s\eta_1)$ cuando $\mu \to \infty$. Ahora haremos uso del método de la fase estacionaria el cual puede verse en el Apéndice B. La función sobre la esfera $\eta \mapsto s\eta_1$ tiene dos puntos críticos, uno máximo en $\eta = (1, 0, \ldots, 0)$ y uno mínimo en $\eta = (-1, 0, \ldots, 0)$, por lo tanto por el método de la fase estacionaria obtenemos que

$$\widetilde{\varphi}_\mu(s) \sim (2\pi\mu)^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\mu s} \sum_{j=0}^\infty c_j^+(\breve{\varphi})(s) \mu^{-j} + \right. \\ \left. + \mathrm{e}^{-i\mu s} \sum_{j=0}^\infty c_j^-(\breve{\varphi})(-s) \mu^{-j} \right),$$

donde los coeficientes $c_j^{\pm}$ son operadores diferenciales, en particular

$$c_0^{\pm}(\breve{\varphi}) = \mathrm{e}^{\pm i(1-n)\pi/4}\,\breve{\varphi}. \qquad (1.16)$$

Todas las estimaciones anteriores se pueden plasmar en el siguiente resultado.

Teorema 1.4. *Sea φ una función de prueba tal que $\breve{\varphi} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, si $\mu \to \infty$ entonces se tiene el siguiente desarrollo asintótico*

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Gamma^*}\varphi(\|k\|-\mu) \sim\ & \mu^{n-1}\operatorname{Vol}(S^{n-1})|F|\breve{\varphi}(0)+\\ & +|F|\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j(\breve{\varphi})(0)\mu^{n-1-j}+\\ & +(2\pi\mu)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\Bigg(\mathrm{e}^{i\mu\|\gamma\|}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^{+}(\breve{\varphi})(\|\gamma\|)\mu^{-j}+\\ & +\mathrm{e}^{-i\mu\|\gamma\|}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^{-}(\breve{\varphi})(-\|\gamma\|)\mu^{-j}\Bigg)\cdot|F|,\end{aligned}$$

además se cumple (1.16).

Esto último es un caso particular de la fórmula de traza de Duistermaat-Guillemin para $\sqrt{-\Delta}$ en $\mathbb{R}^n/\Gamma$ probado en [8]. La fórmula de traza semi-clásica que se verá en la siguiente sección es una identidad del mismo tipo. Haremos unas observaciones que son típicas de las fórmulas de trazas.

1. El término guía del desarrollo asintótico es el término de Weyl, $\mu^{n-1}\operatorname{Vol}(S^{n-1})|F|\breve{\varphi}(0)$. En este caso el término de Weyl es

$$\mu^{n-1}\operatorname{Vol}(S^{n-1})|F|\breve{\varphi}(0)+|F|\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j(\breve{\varphi})(0)\mu^{n-1-j} \qquad (1.17)$$

el cual es un polinomio en μ. Para la fórmula semi-clásica general ésta es una serie asintótica decreciente en potencias de μ. Notemos que (1.17) se hace cero si el soporte de $\breve{\varphi}$ no tiene al cero. En el caso general esto sirve como una definición de término de Weyl.

2. Los operadores diferenciales $c_j^{\pm}$ están actuando en $\breve{\varphi}$, y bajo la suposición de que $\breve{\varphi} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, la suma sobre $\gamma \in \Gamma\setminus\{0\}$ es finita. Esta suma debe entenderse como la una suma sobre las geodésicas periódicas en el toro. Nótese que los factores exponenciales hacen la suma oscilatoria cuando $\mu \to \infty$.

3. Si escogemos a $\breve{\varphi}$ tal que su soporte no tiene al cero entonces como ya dijimos el término de Weyl es cero, y así el término guía en el desarrollo es

$$\begin{aligned}|F|(2\pi\mu)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\Big(&\mathrm{e}^{i(\mu\|\gamma\|+(1-n)\pi/4)}\,\breve{\varphi}(\|\gamma\|)+\\ &+\mathrm{e}^{-i(\mu\|\gamma\|+(1-n)\pi/4)}\,\breve{\varphi}(-\|\gamma\|)\Big)\end{aligned}$$

es decir, la suma sobre las geodésicas cerradas en el toro da el término guía, donde se usó (1.16).

4. Si φ toma valores reales entonces $\breve{\varphi}(-s) = \overline{\breve{\varphi}(s)}$, y así el término guía puede escribirse como

$$2|F|(2\pi\mu)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\Re\left(\mathrm{e}^{i(\mu\|\gamma\|+(1-n)\pi/4)}\,\breve{\varphi}(\|\gamma\|)\right).$$

Si además $\breve{\varphi}$ toma valores reales entonces la expresión anterior se escribe como

$$2|F|(2\pi\mu)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\cos\left(\mu\|\gamma\|+\frac{(1-n)\pi}{4}\right)\breve{\varphi}(\|\gamma\|).$$

2. Fórmula de Traza Semi-Clásica (FTS)

La fórmula de traza que se estudió en la sección anterior fue para $P = \sqrt{-\Delta}$ y la ecuación resuelta por e^{-itP} fue la ecuación de onda. El resultado visto en el Teorema 1.4 es un comportamiento asintótico donde se está interesado sólo en los eigenvalores grandes de P, y como se mencionó este tipo de resultados se cumple bajo condiciones muy generales, como por ejemplo para el Laplaciano sobre una variedad Rimanniana general (operador de Laplace-Beltrami) compacta, ésta es la fórmula de traza Duistermaat-Guillemin la cual se ve en [8].

2.1. Introducción a la FTS. Ahora estudiaremos otra fórmula de traza donde el operador relevante es el operador de Schrödinger,

$$P = P_\hbar = -\hbar^2\Delta + V \qquad (2.1)$$

y la ecuación asociada al operador $P_\hbar$ es la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = P(\psi). \tag{2.2}$$

El comportamiento asintótico en el que estamos interesados es cuando $\hbar \to 0$, esto nos lleva a la Fórmula de Traza Semi-Clásica (FTS). El primero en discutir que esta clase de resultados deberían ser ciertos fue Martin Gutzwiller en [12], también puede verse [13], por tal motivo dicha fórmula también es llamada Fórmula de Traza de Gutzwiller. La formulación de Gutzwiller tiene el mismo espíritu que la que se presenta aquí, aunque su enunciado es diferente, mas general y no se he probado aún que al parecer no siempre se cumple.

Los primeros resultados en el estudio riguroso de la FTS, la cual involucra raíces cuadradas de los eigenvalores, fueron obtenidos en [4, 11]. El enunciado presentado mas adelante fue primero anunciado por T. Paul y A. Uribe en [19], con los detalles de la prueba publicada en [20]. Independientemente E. Meinrenken anunció los mismos resultados en [18], vea también Dozias [6], para otros detalles también se puede ver [14] por Bernard Helffer.

Para simplificar el problema se trabajará en $\mathbb{R}^n$. Consideremos el operador (2.1) donde Δ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ y $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ llamada función potencial, además supongamos que V tiende a $+\infty$ en infinito. Se sabe que esto último implica que el espectro de $P_\hbar$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es discreto, lo cual se puede ver en [15]. Entonces existe una base ortonormal de eigenfunciones $\{\psi_{j,\hbar} | j \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$, con sus eigenvalores asociados $\{E_{j,\hbar} | j \in \mathbb{N}\}$,

$$P_\hbar(\psi_{j,\hbar}) = E_{j,\hbar}\psi_{j,\hbar}.$$

La FTS está asociada a la ecuación de Schrödinger en el sentido de que estima la traza de

$$Q_\varphi^\hbar = \int \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}P_\hbar}\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notemos que la exponencial que aparece en el integrando de la ecuación anterior es la solución fundamental de la ecuación de Schröndinger (2.2). Se puede ver que la traza de $Q_\varphi^\hbar$ es

$$\mathrm{Tr}(Q_\varphi^\hbar) = \sum_j \varphi\left(\frac{E_{j,\hbar}}{\hbar}\right).$$

Este es el tipo de cantidades que se estimarán. Si tenemos en mente que φ decrece suficientemente rápido, vemos que la ecuación anterior examina el espectro en una vecindad del cero. Si ahora queremos examinar el espectro en una vecindad de un valor $E \in \mathbb{R}$ dado, entonces podemos generalizarla como

$$\sum_j \varphi\left(\frac{E_{j,\hbar} - E}{\hbar}\right). \tag{2.3}$$

Esto es lo mismo que levantar $P_\hbar$ por el valor E. La FTS es un desarrollo asintótico de (2.3) cuando $\hbar \to 0$, válido para condiciones muy generales. Antes de explicar los términos que aparecen en dicho desarrollo, debemos explicar algunos conceptos de mecánica clásica.

2.2. Repaso de Mecánica Clásica. Para un repaso general de esta teoría se recomienda [1, 2]. La trayectoria $x(t)$ de una partícula clásica en $\mathbb{R}^n$ bajo la influencia de una fuerza $\vec{F} = -\nabla V$ satisface la segunda ley de Newton,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = -\nabla V(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(con $m = 1$) y como es usual, esta ecuación de segundo orden puede ser remplazada por un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= p(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) &= -\nabla V(x(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde la primera ecuación define $p(t)$, el momento de la trayectoria $x(t)$ al tiempo t. Mas específicamente se introduce el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de todas las posibles posiciones y momentos

(x,p), llamado espacio fase, y sobre éste se define el Hamiltoniano (o función de energía total)

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(x),$$

y el campo vectorial Hamiltoniano asociado

$$\begin{aligned}\Xi_{(x,p)} &:= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}.\end{aligned}$$

El flujo de Ξ es llamado el flujo Hamiltoniano. La propiedad fundamental de Ξ es que la ecuación satisfecha por sus curvas integrales es precisamente el sistema (2.4), por lo tanto las proyecciones sobre el espacio de posiciones, es decir sobre x, de las curvas integrales de Ξ son las soluciones a la ecuación de Newton y cada curva integral es determinada de forma única por una posición y un momento inicial.

Ahora repasaremos algunos conceptos y resultados que aparecen en la FTS.

1. Una propiedad básica del flujo Hamiltoniano es que la energía es conservativa, es decir si $(x(t), p(t))$ es una solución de (2.4) entonces $H(x(t), p(t))$ es independiente de t, en otras palabras el campo vectorial Ξ es tangente a la familia de hipersuperficies

$$\Sigma_{\mathrm{E}} := H^{-1}(E) \quad \text{con} \quad E \in \mathbb{R},$$

en $\mathbb{R}^{2n}$, las cuales son llamadas superficies de energía y en general podrían no ser suaves para algunos valores de E.

2. Suponga que E es tal que ∇H no es cero en Σ_{E}, en este caso E se llama valor regular de H, entonces Σ_{E} es suave y su dimensión es $2n-1$. Afirmamos que esto nos lleva a una medida natural llamada medida de Liouville, la cual es preservada por el flujo Hamiltoniano.

3. Sea $\gamma(t) = (x(t), p(t))$ una trayectoria de Ξ, decimos que γ es periódica de periodo $T \neq 0$ si $\gamma(t+T) = \gamma(t)$, lo cual si ocurre para alguna t entonces ocurre para toda t. Si γ es periódica entonces su periodo primitivo es el mas pequeño de los $T > 0$ tal que T es un periodo de γ.

4. Sea γ una trayectoria periódica con periodo T y energía E de tal manera que $\gamma \subset \Sigma_{\mathrm{E}}$, sea $(x_0, p_0) \in \gamma$. Una sección de Poincaré de γ es una superficie S de dimensión $(2n-2)$ tal que

$$(x_0, p_0) \in S \subset \Sigma_{\mathrm{E}} \text{ y } \Xi_{(x_0,p_0)} \text{ no es tangente a } S.$$

5. Dada una sección de Poincaré se puede definir el mapeo retorno $R : S \to S'$ siguiendo las trayectorias de Ξ que salen desde los puntos de S, donde S' es posiblemente una sección de Poincaré mas pequeña. Claramente $R(x_0, p_0) = (x_0, p_0)$ por la periodicidad de γ. El mapeo de Poincaré de γ asociado al periodo T se define como la diferencial de R en (x_0, p_0).

Definición 2.1. *Una trayectoria periódica γ se dice ser no-degenerada si el número* 1 *no es un eigenvalor de su mapeo de Poincaré.*

Informalmente se puede decir que una trayectoria periódica es no-degenerada si infinitesimalmente cerca de ella no hay otra trayectoria periódica con la misma energía. Se puede mostrar que las trayectorias periódicas no-degeneradas son aisladas en la superficie de energía. Por otra parte, si se permite variar a la energía entonces una trayectoria periódica γ pertenece a una familia suave de trayectorias periódicas, que dependen de la energía en algún intervalo abierto.

2.3. Enunciado de la FTS. Las hipótesis en la FTS son sobre el flujo Hamiltoniano de H en la superficie de energía Σ_{E} donde E es el mismo valor de la energía dada en la ecuación (2.3), la cual se aproximará asintóticamente cuando $\hbar \to 0$. Las dos hipótesis importantes son:

a) E es un valor regular de H,

b) todas las trayectorias periódicas del flujo Hamiltoniano de H en Σ_{E} son no-degeneradas.

La primer hipótesis implica que Σ_{E} es una variedad $(2n-1)$-dimensional, además es compacta por el hecho de que V tiende a infinito en infinito. Físicamente la primer hipótesis implica que no hay puntos de equilibrio con energía E, sin ésta hipótesis el desarrollo asintótico de (2.3) pudiera tener términos logarítmicos de $\hbar$ y potencias semi-enteras de $1/\hbar$, para ver un primer caso de esta situación véase [3]. Para mas detalles del formalismo del enunciado que se presenta enseguida véase [20].

Teorema 2.2. *Bajo las hipótesis* a) *y* b) *anteriores, para cada función de prueba φ tal que $\check{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se tiene el siguiente desarrollo asintótico de* (2.3) *cuando $\hbar \to 0$,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{E_{j,\hbar}-E}{\hbar}\right) \sim \hbar^{1-n}\,\mathrm{LVol}(\Sigma_{\mathrm{E}})\check{\varphi}(0) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\check{\varphi})(0)\hbar^{1-n+j} + \\ + \sum_{\gamma} \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\oint_\gamma p\,\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^{i\pi\mu_\gamma/4} \sum_{j=1}^{\infty} c_{\gamma,j}(\check{\varphi})(T_\gamma)\hbar^j$$

donde

1. $\mathrm{LVol}(\Sigma_{\mathrm{E}})$ *es la medida de Liouville de* Σ_{E}.
2. *La suma $\sum_\gamma$ es finita y es sobre las trayectorias periódicas del flujo Hamiltoniano de H, y T_γ es el periodo de γ.*
3. *Para cada j y para cada γ, c_j y $c_{\gamma,j}$ son operadores diferenciales.*
4. *μ_γ es el índice de Maslov de la trayectoria γ, el cual es un entero.*
5. *El coeficiente guía del término γ es*

$$c_{\gamma,0}(\check{\varphi})(T_\gamma) = \frac{T_\gamma^\#}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{|\det(I-P_\gamma)|}} \check{\varphi}(T_\gamma),$$

donde $T_\gamma^\#$ es el periodo primitivo de γ y P_γ es el mapeo de Poincaré de γ.

Nótese que la hipótesis de que γ es no-degenerando implica que $\det(I-P_\gamma) \neq 0$, además la contribución de las trayectorias periódicas es de orden $O(1)$ en $\hbar$, mientras que en el Teorema 1.4 fue de orden $O(\hbar^{(1-n)/2})$. Esto sucede por la hipótesis b), la cual implica que las trayectorias γ son aisladas, mientras que las geodésicas en el toro vienen en familias n-dimensionales.

2.4. Bosquejo de la prueba de la FTS. Aunque la prueba rigurosa de la FTS involucra muchos detalles técnicos, es posible dar los argumentos claves usando sólo el método de la fase estacionaria y la ecuación de Hamilton-Jacobi, lo cual se intentará hacer enseguida.

La idea de la prueba de FTS, la cual tiene otras aplicaciones diferentes a la fórmula de traza, es construir una aproximación al kernel de Schwartz del propagador

$$U(t,x,y) = \sum_j \mathrm{e}^{\frac{-it}{\hbar}E_{j,\hbar}}\, \psi_{j,\hbar}(x)\overline{\psi_{j,\hbar}(y)},$$

la cual es solución fundamental de la ecuación de Schrödinger. Con esto tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{E_{j,\hbar}-E}{\hbar}\right) = \iint \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}E}\, U(t,x,x)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x, \quad (2.5)$$

y por lo tanto para tener una buena estimación del lado izquierdo será suficiente tener una buena estimación de U, válido para $\hbar$ pequeño.

La idea clave para tener una buena aproximación de U, es proponer que tiene la forma

$$U(t,x,y) = \int \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}[S(t,x,p)-y\cdot p]}\, a(t,x,y,p,\hbar)\,\mathrm{d}p, \quad (2.6)$$

donde S y a son por determinar. Se pide además que a tenga un desarrollo asintótico de la forma

$$a(t,x,y,p,\hbar) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t,x,y,p)\hbar^j. \quad (2.7)$$

Si nos preguntamos de donde viene esta idea sobre como estimar U a través de (2.6), una respuesta razonable es verla como una generalización de (1.13) que es la solución fundamental de la ecuación de onda en $\mathbb{R}^n$. De hecho hay un método para encontrar soluciones aproximadas a la ecuación de Schrödinger de la forma

$$\psi(t,x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S(t,x)}$$

llamado método WKB. Se puede ver a (2.6) como una superposición de soluciones WKB, con un peso dado por la amplitud a.

Si calculamos formalmente con (2.6), tenemos que la ecuación que U debe satisfacer es

$$(-\hbar^2\Delta_x + V(x))U(t,x,y) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,x,y), \quad (2.8)$$

donde el subíndice en Δ_x indica que el Laplaciano actúa en las variables x. Si permitimos formalmente intercambiar el signo de diferencial con el signo de integral, sustituimos (2.7) y juntamos las potencias de $\hbar$, se puede mostrar que la ecuación de orden principal no involucra a a, dicha ecuación es la de Hamilton-Jacobi para S,

$$\begin{aligned} H(x,\nabla_x S(t,x,p)) &= \frac{1}{2}\|\nabla_x S(t,x,p)\|^2 + V(x) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}S(t,x,p). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Todavía se tiene que imponer la condición inicial $K_{\mathrm{U}}(0,x,y) = \delta(x-y)$, el cual es el kernel de Schwartz del operador identidad. Según la forma dada de la fase en (2.6), por la transformada inversa de Fourier esto último se tiene si se toma

$$S(0,x,p) = x\cdot p \quad (2.10)$$

$$a(0,x,y,p,\hbar) = \frac{1}{(2\pi)^n}. \quad (2.11)$$

El problema (2.9) con la condición inicial (2.10) de hecho tiene una solución para S, para $|t|$ pequeño. Una de las dificultades técnicas en la prueba rigurosa del Teorema 2.2 es obtener un propuesta razonable sobre la forma que debe tener U para $|t|$ grande, pero esto se encuentra fuera de los propósitos de este escrito.

El término principal $a_0(t,x,y,p)$ de la amplitud satisface la ecuación de transporte junto con la condición inicial (2.11), es decir la ecuación sub-principal respecto a $\hbar$ obtenida por escribir (2.8) bajo la integral. De hecho se puede mostrar que toda ecuación de transporte se puede resolver para $|t|$ pequeño.

Teniendo en cuenta la expresión (2.6) propuesta para U, se aplica el método de la fase estacionaria a (2.5), es decir a la integral

$$\iiint \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}[S(t,x,p)-x\cdot p+tE]}a(t,x,p,\hbar)\check{\varphi}(t)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x, \quad (2.12)$$

para esto calcularemos los puntos críticos de la fase ϕ respecto a las variables de integración.

► $\partial_t\phi = 0$. Esto equivale a $-\frac{\partial}{\partial t}S(t,x,p) = E$, y por la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.9) esto es

$$H(x,\nabla_x S(t,x,p)) = E.$$

► $\nabla_p\phi = 0$.

$$\nabla_p S(t,x,p) = x.$$

► $\nabla_x\phi = 0$.

$$\nabla_x S(t,x,p) = p.$$

Ahora es necesario el siguiente resultado de mecánica, el cual involucra términos no definidos en este escrito pero que pueden estudiarse con detenimiento en [1, 2], al igual que prueba de dicho resultado.

Proposición 2.3. *Sea S una solución del problema* (2.9-2.10). *Si $\{\Phi_t\}$ denota el flujo Hamiltoniano de H entonces se tiene que*

$$\Phi_t(x,\nabla_x S(t,x,p)) = (\nabla_p S(t,x,p),p).$$

De este análisis se puede concluir que los puntos críticos de la fase en la integral (2.12) corresponden a los puntos $(x,p)\in\mathbb{R}^{2n}$ del espacio fase tales que

$$H(x,p) = E \quad \text{y} \quad \Phi(x,p) = (x,p).$$

Esto último muestra que el desarrollo asintótico de (2.3), dado en el teorema 2.2, se origina precisamente de las trayectorias periódicas del flujo Hamiltoniano de H sobre la superficie de energía Σ_{E}. Enseguida haremos unas observaciones generales sobre de donde provienen algunos de los términos que aparecen en el desarrollo asintótico de (2.3) en el teorema 2.2.

1. La medida de Liouville de Σ_{E} proviene de la contribución de los puntos críticos $t = 0$, $(x, p) \in \Sigma_{\mathrm{E}}$. Estos puntos críticos no son aislados y por lo tanto son degenerados, de esta forma el teorema B.6 no se aplica inmediatamente. Sin embargo podemos considerar la variedad

$$\mathscr{C} = \{(0,x,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (x,p) \in \Sigma_{\mathrm{E}}\},$$

la cual es una variedad no-degenerada de puntos críticos para la fase, lo que significa que el hessiano normal de la fase en cada punto de $\mathscr{C}$ es no-degenerado. Entonces se puede aplicar el método de la fase estacionaria en la dirección normal y terminar con una integral sobre $\mathscr{C}$, la cual da $\mathrm{LVol}(\Sigma_{\mathrm{E}})$.
2. El factor $\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\oint_\gamma p\,\mathrm{d}x}$ es el valor de la fase de la integral (2.12) en el punto crítico dado por γ.
3. El factor $\mathrm{e}^{i\pi\mu_\gamma/4}$ corresponde al factor $\mathrm{e}^{i\pi\sigma/4}$ en el método de la fase estacionaria, teorema B.6, es decir μ_γ es el signo del Hessiano de la fase en el punto crítico dado por γ.

Apéndice A. Transformada de Fourier (TF)

En este apéndice se estudiará la TF, su definición, algunas de sus propiedades básicas y una de sus aplicaciones la cual es resolver un caso particular de la ecuación de onda. Una referencia para esta teoría es [21].

A.1. Definición y propiedades básicas de la TF. Primero definiremos la TF en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones suaves con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, para después extenderla a un espacio aún mas grande, el espacio de Schwartz.

Definición A.1. *Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces su transformada de Fourier es*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esta definición también tiene sentido en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y además cumple lo siguiente.

Lema A.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f}$ es una función continua y además,*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{A.1}$$

Demostración. La cota anterior es clara y la continuidad es justificada por la continuidad de la exponencial compleja. ■

Usaremos la notación estándar de multi-índices: sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una n-ada de enteros no-negativos, llamado multi-índice, consideremos la siguiente notación:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n},$$
$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Ahora probaremos algunas propiedades básicas de la TF en relación con diferenciación.

Lema A.3. *Sean $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y sean α, β multi-índices, entonces*

a) $\widehat{D^\alpha((-x)^\beta f)}(\xi) = \xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)$,

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x.$

Demostración. Para (a) se integra por partes sucesivamente y se usa el teorema de convergencia dominada (TCD), mientras que en (b) se usa el Teorema de Fubini. ■

Corolario A.4. *Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\sup |\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)| < \infty \qquad \forall \alpha, \beta.$$

Demostración. La prueba es directa de (a) del Lema A.3 y de (A.1). ■

Este resultado nos motiva a introducir el espacio de Schwartz.

Definición A.5. *El espacio de Schwartz en $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, consiste de todas las funciones suaves en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \qquad \forall \alpha, \beta.$$

Notemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, pero la contención recíproca no se cumple ya que

$$f(x) = p(x)\,\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$$

donde p es un polinomio, es una función que está en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pero no en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Con esta terminología, el Corolario A.4 establece que la TF mapea $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}(R^n)$. Con los mismos argumentos anteriores se puede ver que la TF mapea $\mathscr{S}(R^n)$ en sí mismo, de hecho probaremos que es una biyección de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo y daremos explícitamente su inversa. Aunque hay varias pruebas de este hecho, aquí se explotará (b) del Lema A.3 donde g es una gaussiana, pero primero se calculará la TF de una gaussiana, lo cual haremos de una forma generalizada no necesaria aquí, pero si para futuras referencias.

Proposición A.6. *Sea A una matriz simétrica positiva-definida de $n \times n$, y sea*

$$g_{\mathrm{A}}(x) = \mathrm{e}^{-x\cdot Ax/2},$$

entonces su transformada de Fourier es

$$\widehat{g_{\mathrm{A}}}(\xi) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\, g_{\mathrm{A}^{-1}}(\xi).$$

Demostración. Como A es simétrica entonces es diagonalizable y la matriz de similaridad es ortogonal, es decir $A = C^{-1}DC$ donde D es una matriz diagonal con elementos en la diagonal positivos y C es una matriz ortogonal. Entonces, sin perdida de generalidad, probaremos el resultado para $n = 1$, es decir

$$g_a(x) = \mathrm{e}^{-ax^2/2}, \quad \text{con } a > 0.$$

Notemos que g_a cumple con la ecuación diferencial $g_a' = -axg_a$, aplicando la TF en ambos lados obtenemos por (a) del Lema A.3,

$$\xi\,\widehat{g_a}(\xi) = -a(\widehat{g_a})'(\xi).$$

La solución es $\widehat{g_a}(\xi) = c\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2a} = cg_{a^{-1}}(\xi)$ donde $c = \widehat{g_a}(0) = \int_{\mathbb{R}} g_a(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi/a}$, y se llega así al resultado. ∎

Teorema A.7. *La transformada de Fourier es una biyección de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, y su inversa es*

$$\breve{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\, g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Demostración. Usando (b) de Lema A.3, con $g(x) = g_{a\mathrm{I}}(x) = \mathrm{e}^{-a\|x\|^2/2}$ tenemos

$$\frac{(2\pi)^{n/2}}{a^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2a}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{-a\|y\|^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Hacemos $a \to 0$, y por el TCD la integral de la derecha tiende a $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)\,\mathrm{d}y$. Para la integral de la izquierda, hacemos el cambio de variable $u = x/\sqrt{a}$, y se tiene que es igual a

$$(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(\sqrt{a}u)\,\mathrm{e}^{-\|u\|^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Hacemos $a \to 0$, y por el TCD la integral previa tiende a $(2\pi)^n f(0)$, con esto se ha mostrado que

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Esta es la fórmula de inversión en $x = 0$, para obtenerla en general, sea $w \in \mathbb{R}^n$ y sea $f_w(x) = f(x+w)$, es claro que $f_w \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos aplicar la ecuación anterior en $x = 0$. Calculando la TF de f_w tenemos que $\widehat{f_w}(\xi) = \mathrm{e}^{iw\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi)$, y se llega así al resultado. ∎

Corolario A.8. *Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$< f,g >= \frac{1}{(2\pi)^n} < \widehat{f},\widehat{g} >, \quad \textit{(Parseval)},$$

donde $< f,g >$ es el producto interior en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En particular

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|\widehat{f}\|_{L^2}, \quad \textit{(Plancherel)}.$$

Demostración. La identidad de Parseval sigue de (b) del Lema A.3 aplicado a f y a h, con

$$h := \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\widehat{g}} = \overline{\breve{g}},$$

donde en la última igualdad se usó la fórmula de inversión de Fourier. ∎

A.2. Aplicación de la TF. Como una aplicación podemos resolver la ecuación de onda en $\mathbb{R}^n$, es decir encontrar una función $u(x,t)$ en el espacio de Schwartz en la variable x tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \Delta u \quad \text{con} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j}, \tag{A.2}$$

donde Δ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ y $u(0,x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$ son las condiciones iniciales dadas.

Resolveremos un caso particular de este problema, que de hecho resulta ser suficiente para resolver el caso general, pero que no se resolverá aquí. Sea

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{-\Delta}(u), \tag{A.3}$$

con condición inicial dada. El operador $\sqrt{-\Delta}$ está definido por

$$\sqrt{-\Delta}(f) = \widehat{\|\xi\|\widehat{f}(\xi)}.$$

Se puede probar que $\sqrt{-\Delta}$ mapea $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo y que su cuadrado es $-\Delta$. Note que (A.3) implica (A.2). Para resolver (A.3) tomemos para cada t una TF en x, sea

$$f(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\, u(t,x)\,\mathrm{d}x,$$

entonces la ecuación (A.3) se reduce a,

$$i\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi) = \|\xi\|\widehat{f}(t,\xi)$$

la cual es resuelta por $f(t,\xi) = \mathrm{e}^{-it\|\xi\|} f(0,\xi)$. Aplicando la TF inversa obtenemos que la solución para (A.3) es

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(x\cdot\xi - t\|\xi\|)} f(0,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

donde $f(0,\xi)$ es la TF de la condición inicial $u(0,x)$, entonces la solución es

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i[(x-y)\cdot\xi - t\|\xi\|]}\, u(0,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

Apéndice B. El Método de la Fase Estacionaria

El método de la fase estacionaria se refiere a la colección de resultados sobre el comportamiento asintótico de integrales de la forma

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\tau\phi(x)}\, a(x)\,\mathrm{d}x, \tag{B.1}$$

donde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es independiente de τ. A la función ϕ se le llama fase y se le pide que tome valores reales, y a la función a se le llama amplitud. El problema aquí es estimar la integral $I(\tau)$ cuando $\tau \to \infty$.

Cabe mencionar que estamos simplificando el problema, ya que este método se aplica a integrales con mayor complejidad, como por ejemplo, se le permite a la amplitud depender de τ, y además se le permite a ambas funciones, amplitud y fase, depender de otro parámetro $y \in \mathbb{R}^m$.

Una cota clara es $|I(\tau)| \leq \|a\|_{L^1}$, en los siguientes dos casos se verá que dicha cota puede ser alcanzada y también puede ser mas pequeña.

a) Sea $\phi(x) = c$ con c una constante, entonces $I(\tau) = \mathrm{e}^{itc}A$, donde A no depende de τ. Entonces $I(\tau)$ oscila pero $|I(\tau)|$ es constante.

b) Sea ϕ la función coordenada, $\phi(x) = x_1$, entonces $I(\tau) = \widehat{a}(-\tau,0,\ldots,0)$. Como $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{a} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto $I(\tau) = O(\tau^{-n})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente en (b) tenemos un rápido decrecimiento de $I(\tau)$ cuando $\tau \to \infty$ porque para τ grande la exponencial $\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)}$ oscila muchas veces en $[x, x+\mathrm{d}x]$, mientras que la amplitud $a(x)$ permanece relativamente constante, ya que a es suave, por lo tanto en la integral se llevan a cabo muchas cancelaciones. Esto es totalmente opuesto a lo que pasa en (a).

Si ϕ tiene un punto crítico x_0, es decir $\nabla\phi(x_0) = 0$, entonces la face ϕ no cambia mucho en $[x_0 - \mathrm{d}x, x_0 + \mathrm{d}x]$, y así infinitesimalmente estamos en (a). Por lo tanto podemos esperar en general que las principales contribuciones provienen de los puntos críticos de ϕ, es decir donde la fase ϕ es estacionaria, lo cual probaremos adelante.

Una referencia para el método de la fase estacionaria es [7, 16]. Para la introducción de la relación de orden O y desarrollos asintóticos puede checarse [10].

B.1. Fases no-estacionarias. Primero se probará que la principal contribución a la integral proviene de los puntos críticos de la fase en el soporte de la amplitud.

Proposición B.1. *Sea $I(\tau)$ como en* (B.1)*, suponga que ϕ no tiene punto críticos en alguna vecindad del soporte de a, entonces*

$$I(\tau) = O(\tau^{-N}) \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Usaremos la identidad,

$$\nabla\phi(\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)}) = i\tau\|\nabla\phi\|^2\,\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)},$$

la cual no es difícil verificar, donde $\nabla\phi$ es el operador diferencial

$$\nabla\phi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Sea χ una función suave idénticamente 1 en el soporte de a tal que $\nabla\phi$ no tiene ceros en su soporte. Por lo tanto $a\chi = a$ y $\chi/\|\nabla\phi\|^2$ es una función suave. Sea

$$L := \frac{\chi}{\|\nabla\phi\|^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

un campo vectorial suave, el cual satisface que

$$L\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)} = i\tau\chi\,\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)},$$

y por lo tanto, tenemos que

$$a\,\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)} = a\chi\,\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)} = \frac{a}{i\tau}L\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)}.$$

Sustituyendo en $I(\tau)$, tenemos

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{a}{i\tau}L\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{i\tau}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{i\tau\phi(x)}\,L^t a\,\mathrm{d}x,$$

donde L^t es la traspuesta de L. De aquí tenemos que $|I(\tau)| \leq \frac{1}{|\tau|}\|L^t a\|_{L^1}$. Notemos que esta última ecuación tiene la misma forma de $I(\tau)$, excepto por el factor $1/i\tau$, por lo tanto podemos repetir cualquier número de veces el procedimiento anterior y se llega así al resultado. ■

En aplicaciones, es importante permitir que la fase y la amplitud dependan de otro parámetro $y \in \mathbb{R}^m$, al igual que la amplitud dependa de τ, así la integral $I(\tau)$ se generaliza como

$$I(y,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{i\tau\phi(x,y)}\,a(x,y,\tau)\,\mathrm{d}x,$$

junto con otras condiciones adicionales. La fase ϕ toma valores reales y $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$, y para la amplitud suponemos que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^+)$ y que para algunos $K\subset\mathbb{R}^n, A\subset\mathbb{R}^m$ compactos fijos tenemos que $a(x,y,\tau) = 0$ para toda $x\notin K, y\in A$, además

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} a = O(\tau^{p+\delta|\alpha|}) \qquad \text{si } \tau\to\infty, \quad \text{(B.2)}$$

uniformemente en $(x,y)\in K\times A$, con $p\in\mathbb{N}$ y α un multi-índice. De esta forma la proposición B.1 se puede generalizar como sigue, y su prueba se puede ver en [7] la cual tiene el mismo espíritu que la proposición B.1.

Proposición B.2. *Suponga que $\delta < 1$ en* (B.2)*, sea $\Sigma_\phi = \{(x,y)\in K\times A | \nabla_x\phi(x,y) = 0\}$ el conjunto de puntos estacionarios de ϕ respecto a la variable de integración. Si para cada $N\in\mathbb{N}$ existe una vecindad Ω de Σ_ϕ en $K\times A$ tal que*

$$a(x,y,\tau) = O(\tau^{-N}) \quad \textit{cuando } \tau\to\infty,$$

uniformemente en $(x,y)\in\Omega$, entonces tenemos que para cada $N\in\mathbb{N}$

$$I(y,\tau) = O(\tau^{-N}) \quad \textit{cuando } \tau\to\infty,$$

uniformemente en $y\in A$.

B.2. Fases cuadráticas. Los ejemplos mas sencillos de fases con puntos críticos no-degenerados son las fases cuadráticas, $\phi(x) = x \cdot Ax/2$ donde A es una matriz simétrica real no-degenerada. Para tales fases tenemos el siguiente resultado, el cual es muy útil para fases mas complicadas que tienen más de un punto crítico, como veremos mas adelante.

Teorema B.3. *Si A es una matriz simétrica real no-degenerada y $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene el siguiente desarrollo asintótico completo*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\tau x\cdot Ax/2} a(x)\,\mathrm{d}x \sim \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathrm{e}^{i\pi\sigma/4}}{\sqrt{|\det A|}} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(a)(0)\tau^{-j}$$

cuando $\tau \to \infty$, donde

1. *σ es el signo de A, el número de eigenvalores positivos menos los negativos.*
2. *$\alpha_0(a)(0) = a(0)$, y en general $\alpha_j(a)(0)$ es un operador diferencial de orden $2j$ aplicado a a valuado en 0.*

Demostración. Como A es simétrica entonces podemos suponer que es diagonal, por el mismo argumento dado en la prueba de la proposición A.6. Como $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos aproximarla por funciones producto de dicho espacio pero con variables separadas, ya que dichas funciones son densas en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto es suficiente probar el resultado para $n = 1$. Sea $A = \lambda \in \mathbb{R}$, primero supongamos que $\lambda < 0$. Por la identidad de Parseval del corolario A.8 y por la proposición A.6 tenemos que para toda $\mu > 0$,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\mu x^2\lambda/2} a(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int \widehat{(\mathrm{e}^{\mu x^2\lambda/2})}(y)\widehat{a(x)}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\sqrt{\mu|\lambda|}}\int \mathrm{e}^{y^2/2\mu\lambda}\,\widehat{a}(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Notemos que μ aparece en el denominador. Ahora, viendo a la integral anterior como una función de μ, la cual es analítica, podemos extenderla analíticamente del semi-eje real positivo al semi-eje imaginario positivo, es decir tomamos $\mu = i\tau$ con $\tau > 0$. Con esto llegamos a la siguiente identidad

$$\int \mathrm{e}^{i\tau x^2\lambda/2} a(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau|\lambda|}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}} \int \mathrm{e}^{-iy^2/2\tau\lambda}\,\widehat{a}(y)\,\mathrm{d}y$$

esto es exactamente lo que se quería mostrar. Ahora si $A = \lambda > 0$, repetimos los mismos argumentos para $\int \mathrm{e}^{-\mu x^2\lambda/2} a(x)\,\mathrm{d}x$, con $\mu > 0$. Extendemos analíticamente del semi-eje real positivo al semi-eje imaginario negativo, es decir tomamos $\mu = -i\tau$ con $\tau > 0$. Con esto tenemos una expresión parecida a la anterior como sigue

$$\int \mathrm{e}^{i\tau x^2\lambda/2} a(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\lambda}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}} \int \mathrm{e}^{-iy^2/2\tau\lambda}\,\widehat{a}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Juntando las expresiones anteriores y tomando a σ como el signo de λ, tenemos que si $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$ y $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ entonces

$$\int \mathrm{e}^{i\tau x^2\lambda/2} a(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{i\pi\sigma/4}}{\sqrt{2\pi\tau|\lambda|}} \int \mathrm{e}^{-iy^2/2\tau\lambda}\,\widehat{a}(y)\mathrm{d}y.$$

Haciendo a un lado la constante, consideremos la integral del lado derecho. Usando el desarrollo de Taylor-McLaurin de la exponencial y el TCD tenemos que

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-iy^2/2\tau\lambda}\,\widehat{a}(y)\mathrm{d}y &= \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}\frac{1}{j!}\left(\frac{-i}{2\lambda}\right)^j \int y^{2j}\widehat{a}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}\frac{1}{j!}\left(\frac{-i}{2\lambda}\right)^j \int \widehat{D^{2j}a}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= 2\pi\sum_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}\frac{1}{j!}\left(\frac{-i}{2\lambda}\right)^j D^{2j}a(0)\end{aligned}$$

donde en las dos últimas igualdades se usó la propiedad de Fourier a) del Lema A.3 y la definición de la TF inversa. De esto último tomamos

$$\alpha_j(a)(0) = \frac{1}{j!}\left(\frac{-i}{2\lambda}\right)^j D^{2j}a(0),$$

donde $D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, y así llegamos a la identidad requerida. Para $n = 1$ se da la igualdad y es fácil obtener el operador diferenciable α_j, pero para $n > 1$ sólo se puede asegurar que se cumple el desarrollo asintótico. ■

B.3. Fases con puntos críticos no-degenerados. Ahora consideraremos $I(\tau)$ donde la función fase ϕ sólo tiene puntos críticos no-degenerados en una vecindad del soporte de la amplitud a. El caso mas simple de esto, es precisamente las fases cuadráticas vistas anteriormente, pero como veremos este caso es suficiente para generalizar cuando se tienen mas de un punto crítico. Aunque es posible analizar $I(\tau)$ en casos mas generales, el caso de fases con sólo puntos críticos no-degenerados es con mucho el mas sencillo y el único que se considerará aquí.

Iniciamos recordando la definición de un punto crítico no-degenerado.

Definición B.4. *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico no-degenerado de ϕ si $\nabla\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y el Hessiano de ϕ en p,*

$$\mathrm{Hess}_p(\phi) := \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$$

es no-degenerado, es decir $\det(\mathrm{Hess}_p(\phi)) \neq 0$.

También necesitamos recordar que los puntos críticos no-degenerados son aislados entre ellos, es decir para cada punto crítico no-degenerado de una función dada existe una vecindad tal que no hay más puntos críticos no-degenerados en ella. Este último hecho se debe al Lema de Morse, el cual dice que cerca de un punto crítico no-degenerado la función es equivalente a una función cuadrática. El Lema de Morse tiene algunas variantes en la forma de enunciarse, aquí se escribirá de forma que se mencione el Hessiano de dicha función. En [5] se puede ver una variante de dicho lema al igual que su prueba detallada.

Lema B.5 (Lema de Morse)**.** *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función suave y sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico no-degenerado de ϕ, entonces existe vecindades $W, X \subset \mathbb{R}^n$ de $p, 0 \in \mathbb{R}^n$ respectivamente y un difeomorfismo $\chi : X \to W$ tal que $\chi(0) = p$, y*

$$\phi(\chi(y_1, \ldots, y_n)) = \phi(p) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$$

donde los λ_j son los eigenvalores de $\mathrm{Hess}_p(\phi)$. *Además el Jacobiano de χ en el origen es uno.*

Combinando el Lema de Morse con Proposición B.1 y Teorema B.3 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema B.6. *Sea $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a valores reales y sea $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si todos los puntos críticos de ϕ en una vecindad del soporte de a son no-degenerados, denotados por $p_1, \ldots, p_k$, entonces se tiene el siguiente desarrollo asintótico*

$$\int e^{i\tau\phi(x)} a(x) \mathrm{d}x \sim \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{l=1}^{k} \frac{e^{i(\pi\sigma_l/4 + \tau\phi(p_l))}}{\sqrt{|\det(\mathrm{Hess}_{p_l}(\phi))|}} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^l(a)(p_l) \tau^{-j}$$

cuando $\tau \to \infty$, donde los α_j^l son operadores diferenciales y σ_l es el signo de $\mathrm{Hess}_{p_l}(\phi)$.

Notemos que el Lema de Morse implica que la cantidad de puntos críticos no-degenerados de ϕ en el soporte de a es finita ya que dicho soporte es compacto.

La restricción de que todos los puntos críticos de la fase en una vecindad del soporte de a deban ser no-degenerados puede parecer muy limitativo, sin embargo lo siguiente puede ocurrir. Suponga que la variable x se separa como $x = (x', x'')$ y suponga que cada punto en el plano $x' = 0$ es un punto crítico no-degenerado de la fase ϕ, es decir $\nabla_x \phi(0, x'') = 0$, y

$$\det \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'_i \partial x'_j}(0, x'') \right) \neq 0.$$

Entonces podemos escribir a $I(\tau)$ como,

$$I(\tau) = \int e^{i\tau\phi(x)} a(x)\, \mathrm{d}x = \int \left(\int e^{i\tau\phi(x', x'')} a(x', x'')\, \mathrm{d}x' \right) \mathrm{d}x''$$

y aplicar el método de la fase estacionaria en la integral con $\mathrm{d}x'$ para cada x'', y al menos formalmente integrar el desarrollo asintótico resultante con respecto a $\mathrm{d}x''$ para estimar $I(\tau)$. Esto es un hecho que se puede hacer riguroso pero está fuera de los propósitos de este escrito.

Referencias

[1] R. Abraham y J. E. Marsden. “Foundations of mechanics”. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass. (1978).

[2] V. I. Arnold. “Mathematical methods of classical mechanics”. Springer-Verlag, New York (1978).

[3] R. Brummelhuis, T. Paul y A. Uribe. Spectral estimates around a critical level. *Duke Math. J.* **78**(3), 477–530 (1995).

[4] R. Brummelhuis y A. Uribe. A semiclassical trace formula for Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.* **136**(3), 567–584 (1991).

[5] K. Burns y M. Gidea. “Differential geometry and topology”. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2005).

[6] S. Dozias. Clustering for the spectrum of *h*-pseudodifferential operators with periodic flow on an energy surface. *J. Funct. Anal.* **145**(2), 296–311 (1997).

[7] J. J. Duistermaat. “Fourier integral operators”, vol. 130 de “Progress in Mathematics”. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1996).

[8] J. J. Duistermaat y V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.* **29**(1), 39–79 (1975).

[9] H. Dym y H. P. McKean. “Fourier series and integrals”. Academic Press, New York (1972). Probability and Mathematical Statistics, No. 14.

[10] A. Erdélyi. “Asymptotic expansions”. Dover Publications Inc, New York (1956).

[11] V. Guillemin y A. Uribe. Circular symmetry and the trace formula. *Invent. Math.* **96**(2), 385–423 (1989).

[12] M. C. Gutzwiller. Periodic orbits and classical quantization conditions. *Journal of Mathematical Physics* **12**(3), 343–358 (1971).

[13] M. C. Gutzwiller. “Chaos in classical and quantum mechanics”, vol. 1 de “Interdisciplinary Applied Mathematics”. Springer-Verlag, New York (1990).

[14] B. Helffer. *h*-pseudodifferential operators and applications: an introduction. En “Quasiclassical methods (Minneapolis, MN, 1995)”, vol. 95 de “IMA Vol. Math. Appl.”, págs. 1–49. Springer, New York (1997).

[15] P. D. Hislop y I. M. Sigal. “Introduction to spectral theory”, vol. 113 de “Applied Mathematical Sciences”. Springer-Verlag, New York (1996).

[16] L. Hörmander. “The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier analysis”. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (2003).

[17] T. Kato. “Perturbation theory for linear operators”. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (1995).

[18] E. Meinrenken. Semiclassical principal symbols and Gutzwiller’s trace formula. *Rep. Math. Phys.* **31**(3), 279–295 (1992).

[19] T. Paul y A. Uribe. Sur la formule semi-classique des traces. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **313**(5), 217–222 (1991).

[20] T. Paul y A. Uribe. The semi-classical trace formula and propagation of wave packets. *J. Funct. Anal.* **132**(1), 192–249 (1995).

[21] M. REED Y B. SIMON. “Methods of modern mathematical physics II. Fourier analysis, self-adjointness”. Academic Press Inc., New York (1975).

[22] M. REED Y B. SIMON. “Methods of modern mathematical physics I. Functional analysis”. Academic Press Inc., New York, segunda ed. (1980).