



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE EL ÍNDICE ACROMÁTICO Y
PSEUDOACROMÁTICO DE GRÁFICAS COMPLETAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CHRISTIAN RUBIO MONTIEL

DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

2008



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

garaujo@matem.unam.mx

(55) 56 22 47 61

Cubículo 305

christian@matem.unam.mx

(55) 56 22 45 33

Cubículo 3 Becarios

Instituto de Matemáticas

Ciudad Universitaria, 04510, México D.F.

Software empleado en la elaboración de esta Tesis:

★ Sistema Operativo GNU/Linux, Ubuntu 8.04 *Hardy Heron*

★ Editor de \LaTeX , Lyx 1.5.5

★ Editor de Gráficas, GraphThing 1.3.2

★ Editor Geométrico, Kseg v0.403

★ Editor de Imágenes, GIMP 2.4.5

Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Rubio
Montiel
Christian
55 13 95 57 14
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
40508362-4
2. Datos del tutor
Dra.
Martha Gabriela
Araujo
Pardo
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Juan José
Montellano
Ballesteros
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Ricardo
Strausz
Santiago
5. Datos del sinodal 3
Dr.
Luis
Montejano
Peimbert
6. Datos del sinodal 4
Dra.
Eugenia
O'Reilly
Regueiro
7. Datos del trabajo escrito
Sobre el Índice Acromático y Pseudoacromático de Gráficas Completas
82 págs.
2008

Agradecimientos

En primera instancia agradezco profundamente a mis padres, Ma. Luisa y Juan Israel, quienes me han otorgado de manera incondicional todo el afecto, la confianza y apoyo que ha logrado lo que soy. A mis hermanos, Valeria e Israel, por su comprensión, amistad y paciencia. Por supuesto a mi tío, Sergio, que me ayudó en un momento clave de mi carrera.

A la Dra. Gabriela Araujo, mi tutora, por su confianza y apoyo, además de haberme dado la oportunidad de conocer mi ramo de trabajo en matemáticas; así como también a mis sinodales: la Dra. Eugenia O'Reilly, al Dr. Juan José Montellano, al Dr. Luis Montejano y al Dr. Ricardo Strausz.

Quiero agradecer también al Dr. Karelín Alexander que aunque no lo sabe, impulsó mi gusto por las matemáticas, al Dr. Micho Durdevich por su apoyo y clases que aún recuerdo con anhelo y a la Mtra. Ana Irene Ramírez Galarza a quien le debo mucho por su apoyo y enseñanzas; a mi amada Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas que me ha otorgado un lugar para realizar esta tesis.

Dedicado

A quien con vehemencia amo

A mi síncopa de melodía

A la que salvó mi vida

A ella, mi todo, mi Tt

Índice general

Introducción	i
Resumen	v
1. Preliminares	1
2. Cotas Superiores	6
2.1. Resultados	16
2.2. Proposición I (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	19
2.3. Proposición II (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	20
2.4. Proposición III (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	21
2.5. Proposición IV (Araujo, Rubio; 2008)	22
2.6. Lema I a (Bouchet; 1978)	24
2.7. Lema II a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	25
2.8. Lema III a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	26
2.9. Lema IV a (Araujo, Rubio; 2008)	28
3. Planos Projectivos Finitos	31
3.1. Relación	36
4. Cotas Inferiores	42
4.1. Lema I b (Bouchet; 1978)	42
4.2. Lema II b (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	43
4.3. Lema III b (Araujo, Strausz; 2008)	45

4.4. Lema IV b (Araujo, Rubio; 2008)	47
5. Teoremas	51
5.1. Teorema I b (Bouchet; 1978)	52
5.2. Teorema I a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	53
5.3. Teorema II (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)	53
5.4. Teorema III (Araujo, Strausz; 2008)	53
5.5. Teorema IV a (Araujo, Rubio; 2008)	54
5.6. Teorema IV b (Araujo, Rubio; 2008)	55
6. Conclusiones	58
Apéndice	I
Glosario de Simbología	V
Bibliografía	VII

Introducción

En 1736, el matemático y físico suizo Leonhard Paul Euler publicó un trabajo sobre *El Problema de los Puentes de Königsberg* (ver [10]) el cual es considerado como uno de los resultados pioneros en Teoría de Gráficas. Dicho problema dice lo siguiente:

En Königsberg, Prusia (actualmente Kaliningrado, Rusia), en el río Pregel, dos islas y tierra firme se unen por medio de siete puentes como se muestra en la Figura 1.

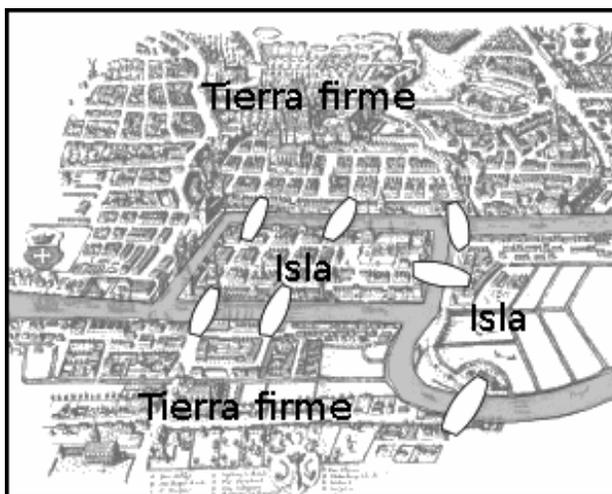


Figura 1

Königsberg

¿Es posible dar un paseo empezando por cualesquiera de las dos partes de tierra firme o de las dos islas, cruzando una sola vez por cada puente y regresando al punto de partida?

Así como el problema anterior existen otros problemas relacionados con la Teoría de Gráficas como *El Problema del Caballo* o *El Problema del Cartero*, sin embargo, me atrevo a decir que el problema más conocido en esta área es *El Problema de los Cuatro Colores* propuesto por el matemático y botánico inglés Francis Guthrie en 1852 (ver [10]) el cual plantea lo siguiente:

¿Es posible colorear cualquier mapa con solamente cuatro colores con la condición de que países vecinos nunca tengan el mismo color?

Claramente existen mapas que no pueden ser coloreados de esta manera (con tres o menos colores), sin embargo, saber si con cuatro colores es posible o no es lo que resulta ser un problema matemático muy importante que permaneció abierto por más de cien años. Muchos matemáticos intentaron resolverlo y esto dio fruto a importantes teoremas, definiciones y diversas ramas en la Teoría de Gráficas. Finalmente fue resuelto afirmativamente por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976 (ver [3]), aunque cabe decir que la demostración no está fundamentada en razonamientos matemáticos clásicos, de hecho es uno de los primeros problemas matemáticos resueltos con la ayuda de una computadora y esto hace que no satisfaga las condiciones de demostración requerida por algunos matemáticos.



Figura 2

Mapa de México 4-coloreado

En la Figura 2 se muestra una coloración del mapa de México que emplea cuatro colores, de tal forma que estados vecinos nunca tienen el mismo color y además utilizando el mínimo número de colores (se le llama coloración cromática). Cabe aclarar que dos países (o en este caso estados) son vecinos si la longitud de la frontera es positiva, es decir, dos países no son vecinos si sus fronteras se intersectan en un solo punto o simplemente no se intersectan.

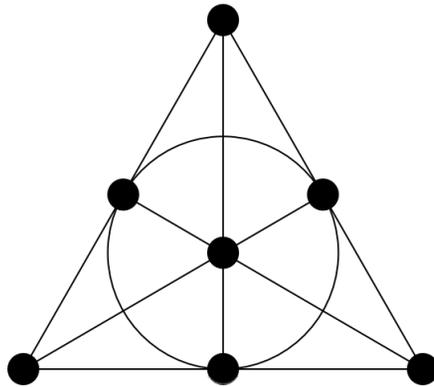


Figura 3

El Plano de Fano

A lo largo de esta tesis trabajaremos con otros dos tipos de coloraciones (coloración acromática y coloración pseudoacromática). Para colorear de estas dos maneras utilizaremos las propiedades combinatorias de los Planos Projectivos Finitos.

Se sabe que los Planos Projectivos Finitos fueron tratados por el matemático alemán Karl Georg Christian von Staudt y posteriormente formalizados por el matemático italiano Gino Fano (1871-1952). Con ello se demostró la existencia de una geometría carente de una infinidad de puntos al construir un ente geométrico formado por un conjunto de siete puntos y siete líneas conocido hoy como el Plano de Fano.

Los Planos Projectivos son estudiados por la Geometría Discreta que junto a la Teoría de Gráficas pertenecen a la disciplina matemática denominada Matemática

Discreta. Sabemos que existen una infinidad de Planos Proyectivos debido a que ciertos planos se pueden construir a partir de los Campos de Galois y existen si el orden del Plano Proyectivo, que definiremos más adelante, es una potencia de un número primo (ver [4]), sin embargo no se sabe si existen Planos Proyectivos Finitos de órdenes distintos a las potencias de primos¹.

En la última sección mencionaremos un importante Teorema que relaciona a los Planos Proyectivos Finitos con la coloración pseudoacromática de las aristas de un cierto tipo de gráfica denominadas gráficas completas. Esta relación entre dos ramas distintas de las matemáticas es en donde radica la importancia de esta tesis pues es la conexión que nos lleva a nuestros resultados.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. A continuación mostramos el Resumen donde se indica la aportación matemática que de este trabajo. En el Capítulo 1 damos una introducción a la Teoría de Gráficas que consta básicamente de definiciones. En el Capítulo 2 encontramos las cotas superiores de las coloraciones que manejaremos dando así los primeros resultados importantes de este trabajo. En el Capítulo 3 introducimos los conceptos de Planos Proyectivos y la relación que guardan con las gráficas completas y las coloraciones. En el Capítulo 4 mostramos las cotas inferiores. En el Capítulo 5 se demuestran seis teoremas de los cuales el cuarto y el sexto es lo mencionado en el Resumen y para finalizar hacemos un compendio de los resultados previos a esta tesis además de agrupar la información obtenida y por último hacemos incapié en ciertos problemas abiertos.

¹Para más información ver Projective Planes of Small Order <http://www.uwyo.edu/moorhause/pub/planes/>

Resumen

Sea q una potencia de dos y n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$.

El trabajo original de tesis consiste en encontrar el índice pseudoacromático ψ_1 y el índice acromático α_1 de la gráfica completa K_{n+q} .

Esto lo lograremos acotando superiormente al índice pseudoacromático para así concluir que

$$\psi_1(K_{n+q}) \leq q \cdot (n + q).$$

Para determinar que la cota superior es igual a $q \cdot (n + q)$ recurriremos al método analítico utilizado en [1].

La cota inferior la obtendremos exhibiendo una coloración propia y completa de aristas en la que utilizamos también $q \cdot (n + q)$ colores y así deducimos que

$$q \cdot (n + q) \leq \alpha_1(K_{n+q}).$$

Cabe mencionar que el método utilizado en esta coloración está basado en las propiedades combinatorias del plano proyectivo Π_q .

Y como $\alpha_1(K_{n+q}) \leq \psi_1(K_{n+q})$, tenemos como resultado que

$$\alpha_1(K_{n+q}) = \psi_1(K_{n+q}) = q \cdot (n + q).$$

Capítulo 1

Preliminares

Una *gráfica* G es una pareja (V, E) donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos se denominan *vértices* y E es un conjunto formado por parejas de vértices, es decir, $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}$ ¹. Los elementos de E son las llamadas *aristas*.

El *orden* de una gráfica es el cardinal de V y el *tamaño* de una gráfica es el cardinal de E . Dos vértices de una gráfica u, v son adyacentes si y sólo si la arista (u, v) es un elemento de E . En dado caso se dice que u es *adyacente* a v .

Cuando entre dos vértices hay más de una arista se les denomina a estas aristas múltiples, en otras palabras, una arista que no es arista múltiple cumple que si $e = (u, v)$ y $e' = (u', v')$ son aristas cualesquiera tales que $u = u'$ y $v = v'$ entonces $e = e'$. Un lazo es una arista que comienza y termina en un mismo vértice, es decir, una arista que no es lazo cumple que si (u, v) es una arista, entonces u y v son necesariamente distintos.

Durante toda la tesis trabajaremos con gráficas simples y finitas, es decir, gráficas de orden finito, sin aristas múltiples, sin lazos y además los elementos de E serán parejas no ordenadas así que las parejas (u, v) las denotaremos como el conjunto $\{u, v\}$.

Una *gráfica completa de orden n* es denotada por K_n y satisface que para cualquier par de vértices u, v la arista $\{u, v\}$ está en el conjunto E . Una *gráfica vacía* G es una

¹Cuando queramos hacer énfasis en que V son los vértices de G , lo escribiremos como $V(G)$, análogamente E será $E(G)$.

gráfica que carece de aristas.

Si el orden de una gráfica completa es n entonces el tamaño de esta es $\frac{n(n-1)}{2}$ (nótese que es la combinación de n elementos en dos).

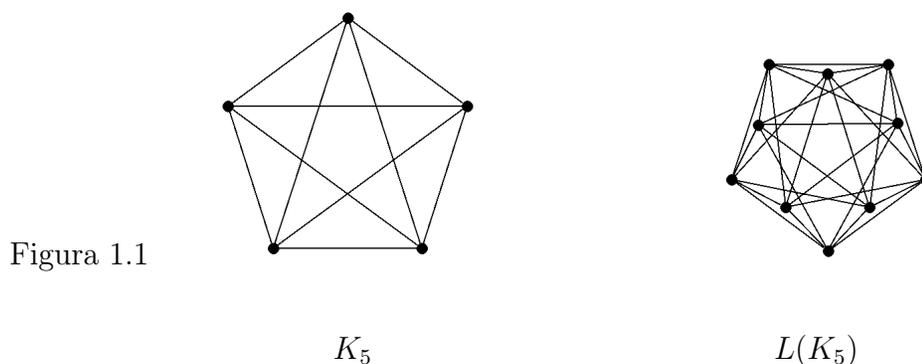
El *grado* de un vértice se define como el número de vértices incidentes a él.

La *gráfica de líneas* $L(G)$ de G es una gráfica que se construye a partir de otra gráfica donde los vértices de $L(G)$ son las aristas de G y dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si en G estas aristas tienen un vértice en común, es decir,

$$V(L(G)) = E(G) \text{ y } E(L(G)) = \{\{e, e'\} : e, e' \in E(G), e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

La gráfica de líneas de una gráfica completa de orden n es de tamaño $n \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ pues por cada vértice se forma una gráfica completa de orden $n - 1$.

La Figura 1.1 muestra a K_5 y a su gráfica de líneas $L(K_5)$.



Una *coloración de vértices* de una gráfica G o simplemente una *coloración* de G es una función suprayectiva $\varsigma : V \rightarrow [k]$ donde $[k]$ es un conjunto de k colores, es decir, $[k] = \{c_0, c_1, \dots, c_{k-1}\}$ y c_0, \dots, c_{k-1} son colores distintos.

Una *k-coloración de vértices* de una gráfica G o simplemente una *k-coloración* de una gráfica G es una coloración de G tal que vértices adyacentes tienen color distinto. A este tipo de coloración se le denomina *coloración propia*.

Una *clase cromática de vértices* o simplemente una *clase cromática* C_x es un conjunto de vértices con un mismo color asignado, es decir,

$$C_x = \{v \in V : \varsigma(v) = c_x \in [k]\}.$$

Decimos que una *clase cromática* es *independiente* si para cualquier par de vértices u, v que pertenecen a una misma clase cromática estos no son adyacentes.

Una *coloración* es *completa* si para cualquier par de colores existen dos vértices de esos colores que son adyacentes, es decir, si cada color es incidente a cada color del resto de colores.

Una gráfica G es k -coloreable si existe una m -coloración de G donde $m \leq k$. Si n es el orden de G entonces $k \leq n$ para cualquier k -coloración.

El *número cromático* $\chi(G)$ de una gráfica G es la mínima k tal que existe una k -coloración de G , es decir,

$$\chi(G) = \text{mín}\{k : \exists \text{ una } k\text{-coloración de } G\}.$$

El *número acromático* $\alpha(G)$ de una gráfica G es la máxima k tal que existe una k -coloración completa de G , es decir,

$$\alpha(G) = \text{máx}\{k : \exists \text{ una } k\text{-coloración completa de } G\}.$$

El *número pseudoacromático* $\psi(G)$ de una gráfica G es la máxima k tal que existe una coloración completa con k colores de G , es decir,

$$\psi(G) = \text{máx}\{k : \exists \text{ una coloración completa con } k \text{ colores de } G\}.$$

El mínimo k tal que existe una k -coloración completa de una gráfica G coincide con $\chi(G)^2$.

Para facilitar la escritura denotaremos a $\chi(G)$ a $\alpha(G)$ y a $\psi(G)$ como χ , α , ψ respectivamente excepto cuando queramos hacer énfasis en que son el número cromático, acromático o pseudoacromático respectivos de la gráfica G .

Al presentar los tres tipos de coloraciones anteriores, se ve una relación muy cercana. La desigualdad que a continuación presentamos da esta relación.

²La demostración se encuentra en el Apéndice A.

Observación 1 Sea G una gráfica cualquiera, entonces el número cromático χ , el número acromático α y el número pseudoacromático ψ cumplen que:

$$\chi \leq \alpha \leq \psi$$

Demostración. Si consideramos a χ y a α , sabemos que ambas coloraciones son propias y como χ es mínimo entonces $\chi \leq \alpha$.

Si consideramos a α y a ψ , sabemos que ambas coloraciones son completas y como ψ es máximo entonces $\alpha \leq \psi$.

□

Posteriormente, lo más natural es preguntarse si estas desigualdades pueden ser estrictas, así que a manera de ejemplo consideramos a la gráfica bipartita completa³ de grado 6 menos una arista $K_{3,3} - e$ la cual cumple que $\chi = 2$, $\alpha = 3$ y que $\psi = 4$.⁴ Esto nos sugiere que dichas desigualdades pueden ser estrictas o no dependiendo de la gráfica considerada. Un resultado importante que aparece en [6] es que dados tres números naturales a , b , c mayores que uno tal que $a < b < c$ siempre podemos construir una gráfica G que cumple que $\chi(G) = a$, $\alpha(G) = b$ y $\psi(G) = c$.

Para la coloración de las aristas de una gráfica no vacía G se considera $L(G)$ la gráfica de líneas de G , de esta forma, una *coloración en las aristas de G* es una coloración de $L(G)$, una *k -coloración en las aristas de G* es una k -coloración de $L(G)$, si $L(G)$ es k -coloreable entonces G es k -arista coloreable, una coloración en las aristas de G es *completa* si la coloración correspondiente en $L(G)$ es completa.

³Una gráfica bipartita completa $K_{n,m}$ es una gráfica de orden $n + m$ tal que existe dos subconjuntos V_1, V_2 en V tal que $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces si $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ se tiene que $\{v_1, v_2\} \in E$ y si $u, v \in V_i$ se tiene que $\{u, v\} \notin E$.

⁴La demostración se encuentra en el Apéndice B.

El mínimo k para la cuál una gráfica G es k -arista coloreable se le llama el *número cromático de aristas* o *índice cromático* y es denotado por $\chi_1(G)$, es decir,

$$\chi_1(G) = \text{mín}\{k : \exists \text{ una } k\text{-arista coloración de } G\}.$$

El máximo k para la cuál una gráfica G es k -arista coloreable cuya coloración es completa es llamado el *número acromático de aristas* o *índice acromático* y es denotado por $\alpha_1(G)$, es decir,

$$\alpha_1(G) = \text{máx}\{k : \exists \text{ una } k\text{-arista coloración completa de } G\}.$$

El máximo k para la cuál una gráfica G es arista coloreable con k colores cuya coloración es completa se le llama el *número pseudoacromático de aristas* o *índice pseudoacromático* y es denotado por $\psi_1(G)$, es decir,

$$\psi_1(G) = \text{máx}\{k : \exists \text{ una coloración de aristas completa con } k \text{ colores de } G\}.$$

Para facilitar la escritura y para el caso particular de la gráfica completa K_n , el índice cromático $\chi_1(K_n)$, el índice acromático $\alpha_1(K_n)$ y el índice pseudoacromático $\psi_1(K_n)$ los denotaremos como $\chi(n)$, $\alpha(n)$ y $\psi(n)$ respectivamente.

Finalmente introduciremos una operación básica en gráficas aunque cabe destacar que en esta tesis sólo la aplicamos en el caso particular de gráficas completas.

Observación 2 *La operación denominada suma directa se expresa de la siguiente manera:*

$$K_a \oplus K_b = K_{a+b}$$

y consiste en hacer adyacente cada vértice de K_a con todos los vértices de K_b , es decir,

$$V(K_a \oplus K_b) = V(K_a) \cup V(K_b) \text{ y}$$

$$E(K_a \oplus K_b) = E(K_a) \cup E(K_b) \cup \{\{u, v\} : u \in V(K_a) \text{ y } v \in V(K_b)\}.$$

Capítulo 2

Cotas Superiores

Una cota inmediata para el índice pseudoacromático de cualquier gráfica es su tamaño, por ejemplo, para el caso de las gráficas completas de orden n utilizamos a lo más un color por arista, es decir, utilizamos a lo más $n(n-1)/2$ colores. Nótese que en general esta cota está muy por arriba del índice pseudoacromático ya que como la coloración es completa, las gráficas que alcanzan esta cota deben ser de tal manera que todas las aristas se encuentren, es decir, la única gráfica completa con estas características es el triángulo. Por otra parte, si la gráfica no es completa, las únicas gráficas en donde todas las aristas se encuentran son las estrellas, que se denotan por $K_{1,n}$ y constan de un vértice que es adyacente a n vértices (los cuales no son adyacentes entre ellos). Por lo tanto, las únicas gráficas para las cuales el índice pseudoacromático coincide con su tamaño son estas dos.

Una cota mejor para el índice pseudoacromático de una gráfica se obtiene a partir de una buena cota superior para el número pseudoacromático de G , la cuál aparece en [6]. Para obtener esta cota es necesario observar que en una coloración pseudoacromática en vértices que usa k colores debe haber una arista entre cada par de vértices de distinto color, entonces G debe tener al menos $|E(G)| \geq (k \cdot (k-1))/2$ aristas, entonces como $(k-1)^2 \leq k(k-1)$ tenemos que $k = \psi(G) \leq \left\lceil \sqrt{2E(G)} \right\rceil + 1$, entonces, como colorear vértices en la gráfica de líneas $L(G)$ es lo mismo que colorear aristas en G se deduce que $\psi_1(G) \leq \left\lceil \sqrt{2E(L(G))} \right\rceil + 1$. En particular cuando G es una gráfica completa de orden n tenemos que

$$\psi(n) = \psi_1(K_n) \leq \left\lfloor \sqrt{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} \right\rfloor + 1.$$

Nuestro objetivo es mejorar esta cota superior del índice pseudoacromático para las gráficas completas, para ello contemplamos dos cosas importantes: en la primera consideramos cuántas clases cromáticas puede haber a lo más en una coloración completa y en la segunda, analizaremos dada una clase de un color fijo a cuantas clases distintas a lo más puede ser adyacente en una coloración completa de una gráfica completa. Esta cota es tomada de [1] (ver [14] y [13] para una formulación distinta), posteriormente procederemos a demostrarla y analizar las consecuencias de ella.

Teorema 1 *Sea n un natural, $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de la gráfica completa K_n y $\varsigma : V(G) \rightarrow [\psi(n)]$ una coloración completa de G . Consideremos las funciones naturales $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas por $f(x) = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2x} \right\rfloor$ y $g(x) = 2x(n-x-1) + 1$, entonces:*

$$\psi(n) \leq \max \{ \min \{ f(x), g(x) : x \in \mathbb{N} \} \}.$$

Demostración. Sea x el tamaño de la clase cromática más pequeña C de la coloración pseudoacromática ς , es decir, $x = \min \{ |\varsigma^{-1}(i)| : i \in [\psi(n)] \}$, entonces $x \cdot \psi(n)$ es menor o igual que el total de aristas de K_n , lo que implica que $\psi(n) \leq \frac{n(n-1)}{2x}$. Más aún, como el número pseudoacromático es un número entero tenemos que $\psi(n) \leq f(x)$.

Ahora bien, podemos suponer que C tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices pues un apareamiento de aristas con este número de vértices puede tocar a todas las aristas de K_n ¹. Si C no es un apareamiento entonces existe un apareamiento C' con $2 \left\lceil \frac{|V(C)|}{2} \right\rceil$ vértices, tal que C' cubre² a C . De esta forma C' tendría igual o más vértices que C

¹Demostración en el Apéndice C.

²El término *cubrir* significa incidencia a todo elemento.

y por lo tanto cubriría a más aristas que C .³

Entonces bien podemos suponer que C es un apareamiento que tiene $2x$ vértices. Cada vértice de C tiene entonces $n - 2x$ vecinos fuera de C . La subgráfica inducida por C tiene $\frac{2x(2x-1)}{2}$ aristas, entonces C tiene $x(2x - 1) - x$ aristas vecinas dentro de ésta subgráfica (que no pertenecen a C) y tiene a lo más $2x(n - 2x)$ aristas vecinas fuera de C . Entonces tiene a lo más $x(2x - 1) - x + 2x(n - 2x)$ clases cromáticas vecinas distintas, o lo que es lo mismo C es vecina de a lo más $2x(n - x - 1)$ clases cromáticas distintas. En consecuencia K_n tiene a lo más $2x(n - x - 1) + 1$ clases cromáticas. Entonces tenemos que $\psi(n) \leq g(x)$.

Claramente tenemos que $\psi(n) \leq \min\{f(x), g(x)\}$ y como el $\min\{f(x), g(x)\} \leq \max\{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\}$ entonces $\psi(n) \leq \max\{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\}$. □

A primera vista, no se logra ver la eficacia de esta cota e inmediatamente nos preguntamos si es posible alcanzarla. Para $n = 5, 7$ obtenemos que los valores del $\max\{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\}$ son 7 y 11 respectivamente como se ve en la Tabla 1, y además en la Figura 2.1 mostramos las coloraciones para las cuales $\psi(n)$ coincide precisamente con estos valores.

Tabla 1

n	5		7	
$\frac{f, g \min}{x}$	$\lfloor \frac{10}{x} \rfloor, 2x(4 - x) + 1$	mín	$\lfloor \frac{21}{x} \rfloor, 2x(6 - x) + 1$	mín
1	10, 7	7	21, 11	11
2	5, 9	5	10, 17	10
3	3, 7	3	7, 19	7
4	2, 1	1	5, 17	5
5			4, 11	4
6			3, 1	1
máx		7		11

³Demostración en el Apéndice D.

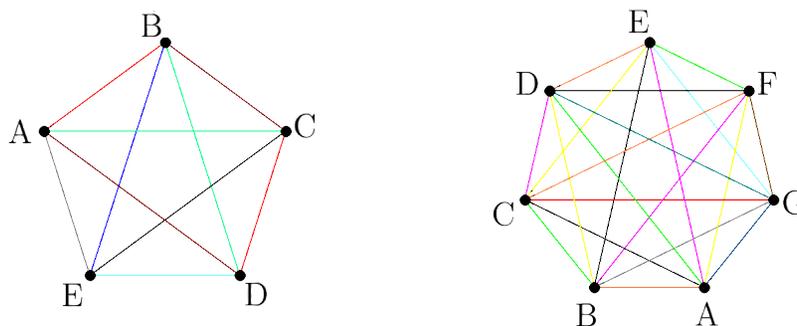


Figura 2.1

Coloraciones que alcanzan las cotas superiores
dadas en el Teorema 1 para $n = 5$ y $n = 7$.

Para lograr estas dos coloraciones, en ambos casos se colorean apareamientos completos con el mismo color en una subgráfica completa de orden menor en uno a la gráfica original, es decir, las clases cromáticas constan de estos apareamientos. En K_5 se hace entre los vértices A, B, C y D . En K_7 se hace entre los vértices A, B, C, D, E y F y finalmente se agregan colores distintos a las aristas que pasan por los vértices E y G respectivamente, logrando así que los colores se encuentren.

Para las gráficas completas K_1, K_2 y K_3 no es complicado realizar los cálculos y verificar que el $\max\{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\}$ es 0, 1 y 3 respectivamente y que dicha cota se alcanza. Sin embargo, no es así para el caso de K_4 y K_6 como veremos a continuación.

Tabla 2

n	4		6	
$\frac{f, g \text{mín}}{x}$	$\lfloor \frac{6}{x} \rfloor, 2x(3-x) + 1$	mín	$\lfloor \frac{15}{x} \rfloor, 2x(5-x) + 1$	mín
1	6, 5	5	15, 9	9
2	3, 5	3	7, 13	7
3	2, 1	1	5, 13	5
4			3, 9	3
5			3, 1	1
máx		5		9

En la Tabla 2 vemos que 5 es cota superior de $\psi(4)$ y que 9 es cota superior de $\psi(6)$, sin embargo las coloraciones por aristas de K_4 y de K_6 no alcanzan esta cota superior como se demostrará en las siguientes dos afirmaciones.

Afirmación 1 *El índice pseudoacromático de K_4 es 4.*

Demostración. Supongamos que $\psi(4)$ es 5, entonces como K_4 tiene seis aristas, hay cuatro clases cromáticas de un solo elemento (Principio de Dirichlet⁴). En la Figura 2.2 se ve claramente que si la arista $\{A, D\}$ es una clase cromática de un solo elemento tiene que ser adyacente a las otras cuatro clases cromáticas restantes, uno para cada arista de las aristas $\{A, B\}$, $\{C, D\}$, $\{A, C\}$ y $\{B, D\}$, además algún color de estas aristas es el asignado a la arista $\{B, C\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que es el de la arista $\{A, B\}$. Sin embargo, las aristas $\{A, C\}$ y $\{B, D\}$ no son incidentes y por lo tanto la coloración no es completa.

⁴El Principio de Dirichlet también se conoce como El Principio del Palomar, El Principio de los Cajones o El Principio de las Cajas.

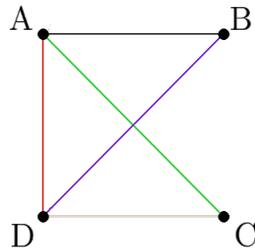


Figura 2.2

La clase unitaria de la arista $\{A, D\}$
adyacente a cuatro clases más.

Entonces tenemos que $\psi(4) < 5$ y con la siguiente coloración tenemos que $\psi(4) = 4$.

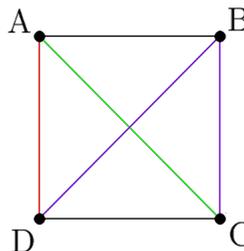


Figura 2.3

Coloración pseudoacromática de K_4
con cuatro colores.

□

La siguiente afirmación es un poco más complicada de demostrar, pero es interesante notar como va aumentando la dificultad de las demostraciones.

Afirmación 2 *El índice pseudoacromático de K_6 es 8.*

Demostración. Supongamos que $\psi(6)$ es 9, entonces como K_6 tiene quince aristas entonces hay al menos tres clases cromáticas de un solo elemento (Principio de Dirichlet) a las que llamaremos unitarias, para facilitar la demostración.

Notemos que cada clase unitaria es incidente a ocho aristas las cuales tienen que pertenecer a distintas clases debido a la hipótesis de que el índice pseudoacromático es nueve.

Supongamos que hay p clases unitarias.

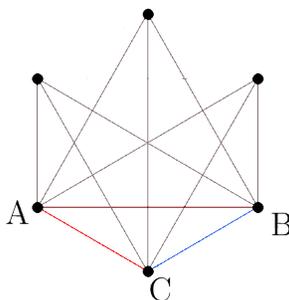


Figura 2.4

Como $p \geq 3$, al tomar tres clases unitarias, las aristas que las representan no pueden formar un triángulo ya que si dichas aristas forman el triángulo ABC , como cada vértice es de grado cinco entonces cada vértice del triángulo toca a tres aristas más y como las aristas del triángulo son unitarias, en el vértice A deben de incidir tres colores distintos a los empleados en el triángulo y de la misma manera deben incidir tres colores distintos también en el vértice B , sin embargo, el color de la arista $\{A, C\}$ es incidente a los tres colores que pasan por A pero no a los colores que pasan por B y de la misma manera la arista $\{B, C\}$ es incidente a los tres colores que pasan por B pero no por los que pasan por A por lo tanto en el vértice C tienen que incidir estos seis colores distintos pero esto no es posible.

Por lo tanto, las aristas que representan a tres clases unitarias no pueden formar un triángulo. Entonces tenemos que:

- i) las aristas de clases unitarias deben de ser incidentes en un solo vértice,
- ii) a lo más hay cinco clases unitarias, pues cada vértice es de grado cinco.

Supongamos que tres de las clases unitarias son las aristas $\{A, D\}$, $\{B, D\}$ y $\{C, D\}$. Observemos que como las aristas incidentes pertenecen a clases unitarias, todas las aristas que pasan por los vértices A , B y C , además de las tres indicadas, tienen colores distintos. Nótese que las aristas del triángulo ABC son de color distinto.

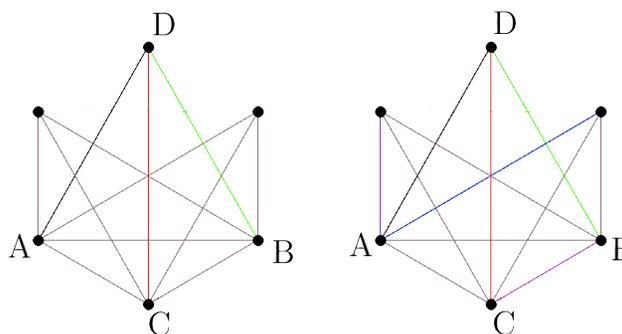


Figura 2.5

Por otro lado, el color de la arista $\{B, C\}$ debe de tocar también al vértice A , entonces en el vértice A solamente incide un color más (digamos azul) que no pertenece al triángulo ABC (ya que por A hay una arista del color de la arista $\{B, C\}$), el cuál debe de ser incidente también a los vértices B y C , es decir, hay al menos tres aristas en la clase del color azul. Esto mismo para el vértice B y el vértice C , es decir, hay tres clases cromáticas con al menos tres aristas. Dichas clases cubren al menos nueve aristas, como en total tenemos quince, nos restan seis aristas y además seis colores, entonces habrá al menos seis clases unitarias, lo cual no es posible por ii).

La siguiente coloración muestra que es posible colorear a K_6 con ocho colores y por lo tanto $\psi(6) = 8$.

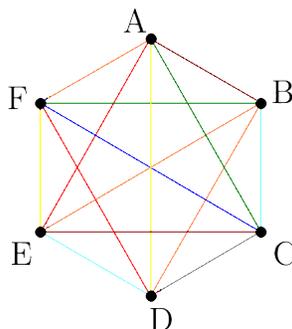


Figura 2.6

Coloración pseudoacromática de K_6
con ocho colores.

□

A priori, se puede llegar a pensar que como hay un número par de vértices en estas dos últimas coloraciones, esto tiene algo que ver con el hecho de que esta gráfica no alcanza la cota, sin embargo no es así, ya que $\psi(K_8)$ alcanza la cota, de la siguiente manera.

Tabla 3

n	8	
$\frac{f, g \text{mín}}{x}$	$\lfloor \frac{28}{x} \rfloor, 2x(7-x) + 1$	mín
1	28, 13	13
2	14, 21	14
3	9, 25	9
4	7, 25	7
5	5, 21	5
6	4, 13	4
7	4, 1	1
máx		14

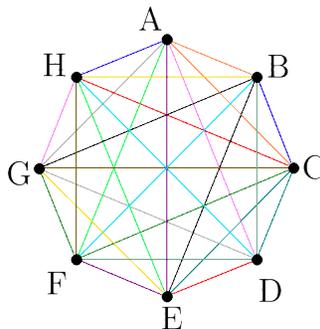


Figura 2.7

Coloración pseudoacromática de K_8
con catorce colores.

Para colorear a K_8 empleamos resultados relacionados con planos proyectivos, concretamente con el Plano de Fano más un vértice, pero lo comentaremos al final del capítulo siguiente.

Claramente conforme crece el orden de las gráficas completas, crece la dificultad de encontrar la cota superior. El método que a continuación mostraremos es tomado de [1], el cual, nos dice como encontrar la cota superior de una manera más eficiente.

En el Teorema 1 vimos que $\psi(n) \leq \max \{ \min \{ f(x), g(x) : x \in \mathbb{N} \} \}$ donde $f(x) = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2x} \right\rfloor$ y $g(x) = 2x(n-x-1) + 1$. Consideremos $h(x) = \frac{n(n-1)}{2x}$.

Notemos que la función $g(x)$ es una parábola y que la función $h(x)$ es una hipérbola cuyas gráficas son como se muestra en la Figura 2.8:

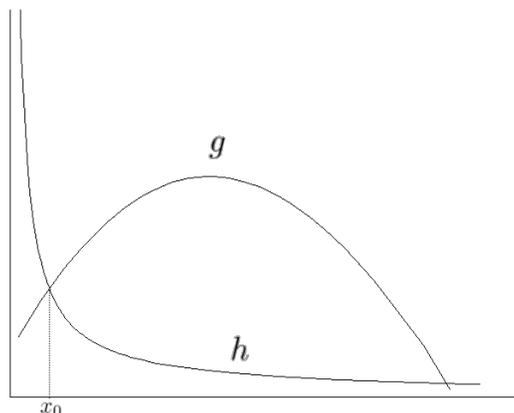


Figura 2.8

Por lo tanto no es extraño pensar en los puntos donde estas funciones coinciden y en consecuencia encontrar dichas soluciones, sin embargo, la Observación 3 nos da una forma más eficaz de hallar un intervalo que contiene a las raíces y la relación de estos con el $\max \{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\}$.

2.1. Resultados

Observación 3

i) Si consideramos la función $h(x) = \frac{n(n-1)}{2x}$ tenemos que existen $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+$ tales que $h(x_0) = g(x_0)$ y $h(x_1) = g(x_1)$ con $x_0 < x_1$; entonces

$$\max \{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\} = \max\{f(r+1), g(r)\}, \text{ donde } r = \lfloor x_0 \rfloor.$$

ii) Si $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ se tiene que $\frac{q}{2} \leq x_0 \leq \frac{q}{2} + 1$.

Demostración.

i) Notemos que h es una función continua la cual es una hipérbola con sus asíntotas sobre los ejes y que g es una parábola reflejada por el eje x y vértice en

el primer cuadrante, pues el máximo de g se obtiene cuando $x = \frac{n-1}{2}$ puesto que $g'(x) = 2n - 4x - 2$. De aquí que $g(x) < h(x)$ si $x \in (0, x_0) \cup (x_1, k)$ para todo $k > x_1$ y $h(x) < g(x)$ si $x \in (x_0, x_1)$. Entonces, como $h(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$, tenemos que:

$$g(x_0) = h(x_0) = \max \{ \min \{ h(x), g(x) : x \in \mathbb{R}^+ \} \}.$$

Ahora, sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r = \lfloor x_0 \rfloor$. Se sigue que $g(r) \leq f(r) \leq h(r)$ y que $f(r+1) \leq h(r+1) \leq g(r+1)$. Además, para cada natural $x \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq r$, $g(x) \leq g(r)$ y si $x \geq r+1$ entonces $f(x) \leq h(r+1)$ y por lo tanto

$$\psi(n) \leq \max \{ \min \{ f(x), g(x) : x \in \mathbb{N} \} \} = \max \{ g(r), f(r+1) \}.$$

ii) Para probar que $\frac{q}{2} \leq x_0 \leq \frac{q}{2} + 1$ cuando n es el orden de la gráfica completa y $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, mostraremos que $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$ y que $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$ además de verificar que $\frac{q}{2} + 1 \leq \frac{n-1}{2}$:

$$f(\frac{q}{2} + 1) = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2(\frac{q}{2} + 1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2} \right\rfloor \leq \frac{n(n-1)}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2}.$$

$$g(\frac{q}{2} + 1) = 2(\frac{q}{2} + 1)(n - (\frac{q}{2} + 1) - 1) + 1 = (\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2)(n - \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2} - 2) + 1.$$

Ahora, como $\sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$, tenemos que $f(\frac{q}{2} + 1) \leq \frac{n(n-1)}{\sqrt{n+1}} = n(\sqrt{n} - 1)$ y que $(\sqrt{n} + 1)(n - \frac{\sqrt{n}}{2} - 2) + 1 \leq g(\frac{q}{2} + 1)$.

Consideramos la desigualdad $5\sqrt{n} + 2 \leq 3n$ para $n \geq 4$, la cual es cierta para $n = 4$ y como el grado del polinomio del primer miembro es menor que el grado del polinomio del segundo miembro, se conserva la desigualdad para $n \geq 4$. Entonces a partir de la desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} 5\frac{\sqrt{n}}{2} + 1 &\leq 3\frac{n}{2}. \\ n\sqrt{n} - n &\leq n\sqrt{n} + \frac{n}{2} - 5\frac{\sqrt{n}}{2} - 1. \\ n(\sqrt{n} - 1) &\leq (\sqrt{n} + 1)(n - \frac{\sqrt{n}}{2} - 2) + 1. \end{aligned}$$

y por lo tanto $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$.

Ahora veamos que $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$.

$$f(\frac{q}{2}) = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor \geq \frac{n(n-1)}{\sqrt{n}} - 1 = \sqrt{n}(n-1) - 1.$$

$$g(\frac{q}{2}) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \left(n - \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2} - 1 \right) + 1 \leq \sqrt{n} \left(n - \frac{\sqrt{n}-1}{2} - 1 \right) + 1 = \sqrt{n} \left(n - \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \right) + 1.$$

Consideramos la desigualdad $4 \leq n - \sqrt{n}$ para $n \geq 7$, la cual es cierta para $n = 7$ y como el grado del polinomio del primer miembro es menor que el grado del polinomio del segundo miembro, se conserva la desigualdad para $n \geq 7$. Para los casos de $n = 4, 5, 6$ vemos que $f(\frac{q}{2})$ es 6, 10, 15 y $g(\frac{q}{2})$ es 5, 7, 9 respectivamente y entonces $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$ para estos valores. Para $n \geq 7$ vemos que se cumple. De la desigualdad $4 \leq n - \sqrt{n}$ tenemos que

$$\sqrt{n} + 4 \leq n.$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2} + 2 \leq \frac{n}{2}.$$

$$n\sqrt{n} - \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \leq n\sqrt{n} - \sqrt{n} - 1.$$

$$\sqrt{n} \left(n - \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \right) + 1 \leq \sqrt{n}(n-1) - 1.$$

y por lo tanto $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$.

Con esto tenemos que para $n \geq 4$, $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$ y que $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$, lo que implica que hay un número x en el intervalo $(\frac{q}{2}, \frac{q}{2} + 1)$ tal que $f(x) = g(x)$, para ver que efectivamente x se refiere a x_0 simplemente hay que ver que $x \leq \frac{n-1}{2}$, es decir, x está a la izquierda del máximo de g . Basta demostrar que $\frac{q}{2} + 1 \leq \frac{n-1}{2}$.

Es fácil ver que para $n \geq 5$ se cumple que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 3 \leq n$ pues $\lfloor \sqrt{5} \rfloor + 3 = 5 \leq 5$, con esto tenemos que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2 \leq n - 1$ y por lo tanto $\frac{q}{2} + 1 \leq \frac{n-1}{2}$.

Para el caso de $n = 4$ sólo notemos que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq n - 1$ y por lo tanto se cumple y para los casos de $n = 1, 2, 3$ vemos que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$ y que efectivamente $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$, pues x_0 es $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1$ respectivamente. □

A continuación demostraremos cuatro Lemas, para los cuales necesitamos siete desigualdades que vendrán en cuatro Proposiciones. Estos Lemas serán las cotas

superiores de la coloración pseudoacromática de cuatro familias de gráficas completas. La primera se obtiene en [11], la segunda y la tercera se obtienen en [1] y la cuarta es una de la aportaciones de este trabajo.

Para demostrar las desigualdades siguientes se siguen varios pasos y las diferencias entre cada una de ellas son sutiles.

2.2. Proposición I (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)⁵

Sea q impar y $q^2 + q + 1$ el orden de la gráfica completa, entonces

i) $f(\frac{q+1}{2}) \leq g(\frac{q+1}{2})$ y

ii) $f(\frac{q+1}{2}) \geq g(\frac{q-1}{2})$.

Demostración.

i) Evaluaremos y compararemos $f(\frac{q+1}{2})$ y $g(\frac{q+1}{2})$ como sigue:

$$f(\frac{q+1}{2}) = \left\lfloor \frac{(q^2+q+1)(q^2+q)}{2(\frac{q+1}{2})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(q^2+q+1)q(q+1)}{(q+1)} \right\rfloor = q(q^2 + q + 1).$$

$$\begin{aligned} g(\frac{q+1}{2}) &= 2(\frac{q+1}{2})((q^2 + q + 1) - (\frac{q+1}{2}) - 1) + 1 = (q+1)((q^2 + q + 1) - \frac{q}{2} - \frac{3}{2}) + 1 = \\ &= q(q^2 + q + 1) + (q^2 + q + 1) - \frac{q^2}{2} - 2q - \frac{1}{2} = \\ &= f(\frac{q+1}{2}) + \frac{q^2}{2} - q + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, como $1 \leq q$ entonces $0 \leq \frac{q^2}{2} - q + \frac{1}{2}$ y por lo tanto $f(\frac{q+1}{2}) \leq g(\frac{q+1}{2})$.

ii) Evaluaremos y compararemos $f(\frac{q+1}{2})$ y $g(\frac{q-1}{2})$ como sigue:

$$g(\frac{q-1}{2}) = 2(\frac{q-1}{2})((q^2 + q + 1) - \frac{q-1}{2} - 1) + 1 = (q-1)(q^2 + \frac{q}{2} + \frac{1}{2}) + 1 = q^3 - \frac{q^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} f(\frac{q+1}{2}) &= q(q^2 + q + 1) = q^3 + q^2 + q = \\ &= g(\frac{q-1}{2}) + 3\frac{q^2}{2} + q - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

⁵Ver [1].

y claramente $2 \leq 3\frac{q^2}{2} + q - \frac{1}{2}$, entonces $f(\frac{q+1}{2}) \geq g(\frac{q-1}{2})$.

□

2.3. Proposición II (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)⁶

Sea q par y $q^2 + 2q + 2$ el orden de la gráfica completa, entonces

i) $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$ y

ii) $f(\frac{q}{2} + 1) \geq g(\frac{q}{2})$.

Demostración.

i) Evaluaremos y compararemos $f(\frac{q}{2} + 1)$ y $g(\frac{q}{2} + 1)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(\frac{q}{2} + 1) &= \left\lfloor \frac{(q^2+2q+2)(q^2+2q+1)}{2(\frac{q}{2}+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(q^2+2q)^2+3(q^2+2q)+2}{q+2} \right\rfloor = q(q^2 + 2q) + 3q = \\ &= q^3 + 2q^2 + 3q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\frac{q}{2} + 1) &= 2(\frac{q}{2} + 1)((q^2 + 2q + 2) - (\frac{q}{2} + 1) - 1) + 1 = (q+2)(q^2 + 2q + 3 - (\frac{q}{2} + 3)) + 1 = \\ &= f(\frac{q}{2} + 1) + 2q^2 + 4q + 6 - \frac{q^2}{2} - 4q - 5 = f(\frac{q}{2} + 1) + 3\frac{q^2}{2} + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$.

ii) Evaluaremos y compararemos $g(\frac{q}{2})$ y $f(\frac{q}{2} + 1)$ como sigue:

$$g(\frac{q}{2}) = 2(\frac{q}{2})((q^2 + 2q + 2) - \frac{q}{2} - 1) + 1 = q(q^2 + 3\frac{q}{2} + 1) + 1 = q^3 + 3\frac{q^2}{2} + q + 1.$$

$$\begin{aligned} f(\frac{q}{2} + 1) &= q^3 + 2q^2 + 3q = \\ &= g(\frac{q}{2}) + \frac{q^2}{2} + 2q - 1. \end{aligned}$$

y claramente $5 \leq \frac{q^2}{2} + 2q - 1$, entonces $f(\frac{q}{2} + 1) \geq g(\frac{q}{2})$.

□

⁶Ver [1].

2.4. Proposición III (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)⁷

Sea q par y $q^2 + q + 1$ el orden de la gráfica completa, entonces

$$f\left(\frac{q}{2} + 1\right) \leq g\left(\frac{q}{2}\right).$$

Demostración. Evaluaremos y compararemos $f\left(\frac{q}{2} + 1\right)$ y $g\left(\frac{q}{2}\right)$ como sigue:

$$f\left(\frac{q}{2} + 1\right) = \left\lfloor \frac{(q^2+q+1)(q^2+q)}{2\left(\frac{q}{2}+1\right)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q^4+2q^3+2q^2+q}{q+2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(q+2)(q^3+2q-3)+6}{q+2} \right\rfloor.$$

Entonces $f\left(\frac{q}{2} + 1\right) = q^3 + 2q - 3$ si $q > 4$ y $f\left(\frac{q}{2} + 1\right) = q^3 + 2q - 2$ si $q = 2, 4$. De aquí concluimos que $f\left(\frac{q}{2} + 1\right) \leq q^3 + 2q - 2$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{q}{2}\right) &= 2\left(\frac{q}{2}\right)\left((q^2 + q + 1) - \frac{q}{2} - 1\right) + 1 = q\left(q^2 + \frac{q}{2}\right) + 1 = q^3 + \frac{q^2}{2} + 1 \\ &\geq f\left(\frac{q}{2} + 1\right) + \frac{q^2}{2} - 2q + 3. \end{aligned}$$

y claramente $1 \leq \frac{q^2}{2} - 2q + 3$, entonces $f\left(\frac{q}{2} + 1\right) \leq g\left(\frac{q}{2}\right)$.

□

La siguiente Proposición es original de esta tesis.

⁷Ver [1].

2.5. Proposición IV (Araujo, Rubio; 2008)⁸

Sea q par y $(q+1)^2$ el orden de la gráfica completa, entonces

i) $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$ y

ii) $f(\frac{q}{2} + 1) \geq g(\frac{q}{2})$.

Demostración.

i) Evaluaremos y compararemos $f(\frac{q}{2} + 1)$ y $g(\frac{q}{2} + 1)$ como sigue:

$$f(\frac{q}{2} + 1) = \left\lfloor \frac{(q+1)^2(q^2+2q)}{2(\frac{q}{2}+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(q+1)^2q(q+2)}{(q+2)} \right\rfloor = q(q+1)^2.$$

$$\begin{aligned} g(\frac{q}{2} + 1) &= 2(\frac{q}{2} + 1)((q+1)^2 - (\frac{q}{2} + 1) - 1) + 1 = (q+2)((q+1)^2 - (\frac{q}{2} + 2)) + 1 = \\ &= q(q+1)^2 + 2(q+1)^2 - (q+2)(\frac{q}{2} + 2) + 1 = \\ &= f(\frac{q}{2} + 1) + 2(q^2 + 2q + 1) - (q+2)(\frac{q}{2} + 2) + 1 = \\ &= f(\frac{q}{2} + 1) + 3\frac{q^2}{2} + q - 1. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $2 \leq q$ entonces $7 \leq 3\frac{q^2}{2} + q - 1$ y por lo tanto $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$.

ii) Evaluaremos y compararemos $f(\frac{q}{2} + 1)$ y $g(\frac{q}{2})$ como sigue:

$$g(\frac{q}{2}) = 2(\frac{q}{2})((q+1)^2 - \frac{q}{2} - 1) + 1 = q(q^2 + 3\frac{q}{2}) + 1 = q^3 + 3\frac{q^2}{2} + 1.$$

$$\begin{aligned} f(\frac{q}{2} + 1) &= q(q+1)^2 = q^3 + 2q^2 + q = \\ &= g(\frac{q}{2}) + \frac{q^2}{2} + q - 1. \end{aligned}$$

y claramente $3 \leq \frac{q^2}{2} + q - 1$, entonces $f(\frac{q}{2} + 1) \geq g(\frac{q}{2})$.

□

A manera de resumen, tenemos lo siguiente

⁸Ver [2].

Proposición I (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Sea q impar y $q^2 + q + 1$ el orden de la gráfica completa, entonces

$$g\left(\frac{q-1}{2}\right) \stackrel{ii)}{\leq} f\left(\frac{q+1}{2}\right) \stackrel{i)}{\leq} g\left(\frac{q+1}{2}\right).$$

Proposición II (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Sea q par y $q^2 + 2q + 2$ el orden de la gráfica completa, entonces

$$g\left(\frac{q}{2}\right) \stackrel{ii)}{\leq} f\left(\frac{q}{2} + 1\right) \stackrel{i)}{\leq} g\left(\frac{q}{2} + 1\right).$$

Proposición III (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Sea q par y $q^2 + q + 1$ el orden de la gráfica completa, entonces

$$f\left(\frac{q}{2} + 1\right) \leq g\left(\frac{q}{2}\right).$$

Proposición IV (Araujo, Rubio; 2008)

Sea q par y $(q + 1)^2$ el orden de la gráfica completa, entonces

$$g\left(\frac{q}{2}\right) \stackrel{ii)}{\leq} f\left(\frac{q}{2} + 1\right) \stackrel{i)}{\leq} g\left(\frac{q}{2} + 1\right).$$

2.6. Lema I a (Bouchet; 1978)⁹

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es impar, entonces

$$\psi(n) \leq q \cdot n.$$

Demostración. Por el punto ii) de la Observación 3, consideramos

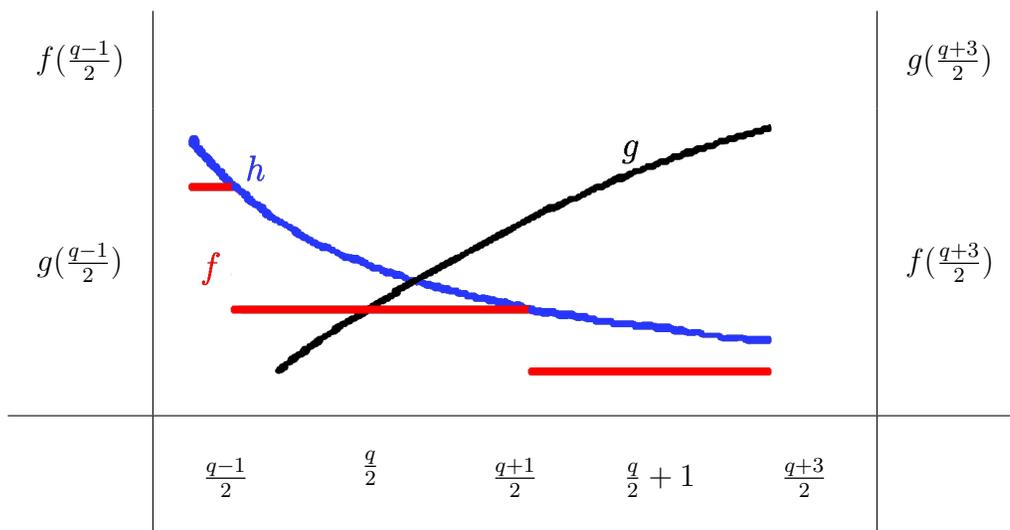
$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{q^2 + q + 1} \rfloor = q$$

entonces

$$\frac{q}{2} \leq x_0 \leq \frac{q}{2} + 1.$$

Ahora, por el punto i) de la Observación 3, tenemos que $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q-1}{2}$ ó bien $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q+1}{2}$, pues q es impar. Esto quiere decir que $f(\frac{q-1}{2}) \geq g(\frac{q-1}{2})$ y que $f(\frac{q+3}{2}) \leq g(\frac{q+3}{2})$ (Recuerde que $h(x) = \frac{n(n-1)}{2x}$).

Gráficamente se ve como sigue:



La Proposición I i) nos dice que $f(\frac{q+1}{2}) \leq g(\frac{q+1}{2})$, es decir $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q-1}{2}$ de lo que concluimos que

⁹Ver [11].

$$\psi(n) \leq \max\left\{g\left(\frac{q-1}{2}\right), f\left(\frac{q+1}{2}\right)\right\}.$$

De la Proposición I ii), resulta que $g\left(\frac{q-1}{2}\right) \leq f\left(\frac{q+1}{2}\right)$ y por lo tanto

$$\max\left\{g\left(\frac{q-1}{2}\right), f\left(\frac{q+1}{2}\right)\right\} = f\left(\frac{q+1}{2}\right).$$

Con esto, el Teorema 1 implica

$$\psi(n) \leq f\left(\frac{q+1}{2}\right) = q \cdot n.$$

□

2.7. Lema II a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)¹⁰

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es par, entonces

$$\psi(n + q + 1) \leq q \cdot (n + q + 2).$$

Demostración. Por el punto ii) de la Observación 3, consideramos

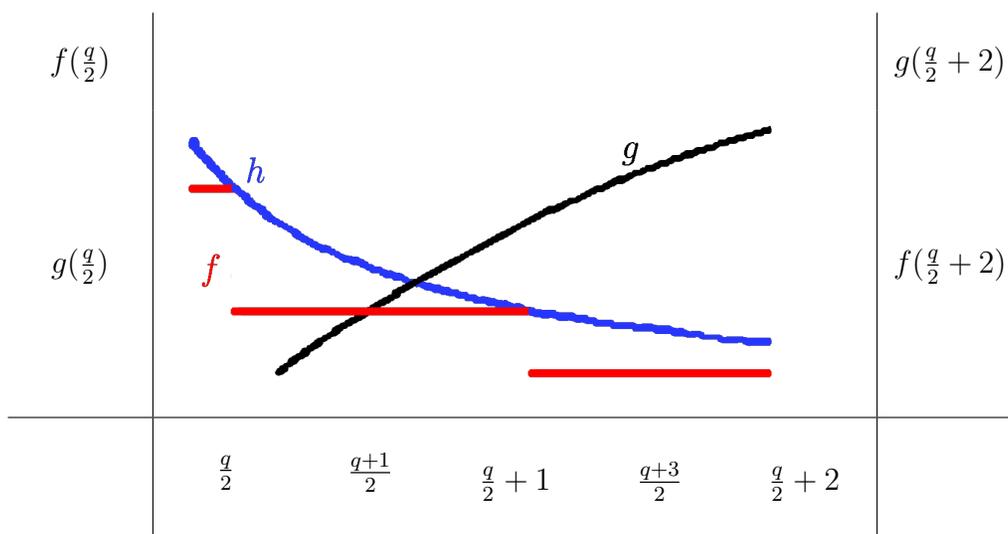
$$\left\lfloor \sqrt{n + q + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{q^2 + 2q + 2} \right\rfloor = q + 1$$

entonces

$$\frac{q+1}{2} \leq x_0 \leq \frac{q+1}{2} + 1.$$

Ahora, por el punto i) de la Observación 3, tenemos que $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2}$ ó bien $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2} + 1$, pues q es par. Esto quiere decir que $f\left(\frac{q}{2}\right) \geq g\left(\frac{q}{2}\right)$ y que $f\left(\frac{q}{2} + 2\right) \leq g\left(\frac{q}{2} + 2\right)$ (Recuerde que $h(x) = \frac{n(n-1)}{2x}$).

¹⁰Ver [1].



La Proposición I i) nos dice que $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$, es decir $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2}$ de lo que concluimos que

$$\psi(n + q + 1) \leq \max\{g(\frac{q}{2}), f(\frac{q}{2} + 1)\}.$$

De la Proposición II ii), resulta que $f(\frac{q}{2} + 1) \geq g(\frac{q}{2})$ y por lo tanto

$$\max\{g(\frac{q}{2}), f(\frac{q}{2} + 1)\} = f(\frac{q}{2} + 1).$$

Con esto, El Teorema 1 implica

$$\psi(n + q + 1) \leq f(\frac{q}{2} + 1) = q \cdot (n + q + 2).$$

□

2.8. Lema III a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)¹¹

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es par, entonces

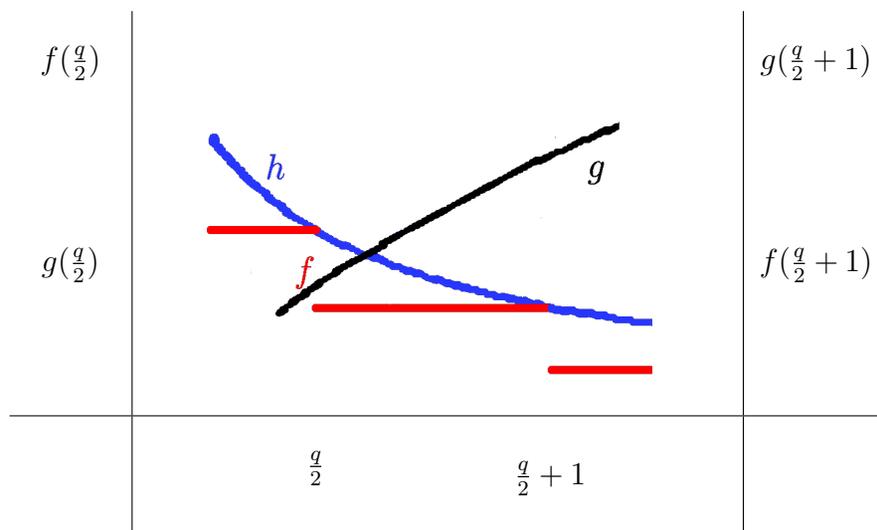
$$\psi(n) \leq q^3 + \frac{q^2}{2} + 1.$$

¹¹Ver [1].

Demostración. Por el punto ii) de la Observación 3, consideramos

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{q^2 + q + 1} \rfloor = q, \text{ entonces, } \frac{q}{2} \leq x_0 \leq \frac{q}{2} + 1.$$

Ahora, por el punto i) de la Observación 3, tenemos que $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2}$, pues q es par (Recuerde que $h(x) = \frac{n(n-1)}{2x}$).



Esto quiere decir que $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$ y que $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$. Entonces

$$\psi(n) \leq \max\{g(\frac{q}{2}), f(\frac{q}{2} + 1)\}.$$

De la Proposición III, resulta que $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2})$ y por lo tanto

$$\max\{g(\frac{q}{2}), f(\frac{q}{2} + 1)\} = g(\frac{q}{2}).$$

Con esto, el Teorema 1 implica

$$\psi(n) \leq g(\frac{q}{2}) = q^3 + \frac{q^2}{2} + 1.$$

□

El siguiente Lema es original de esta tesis.

2.9. Lema IV a (Araujo, Rubio; 2008)¹²

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es par, entonces

$$\psi(n + q) \leq q \cdot (n + q).$$

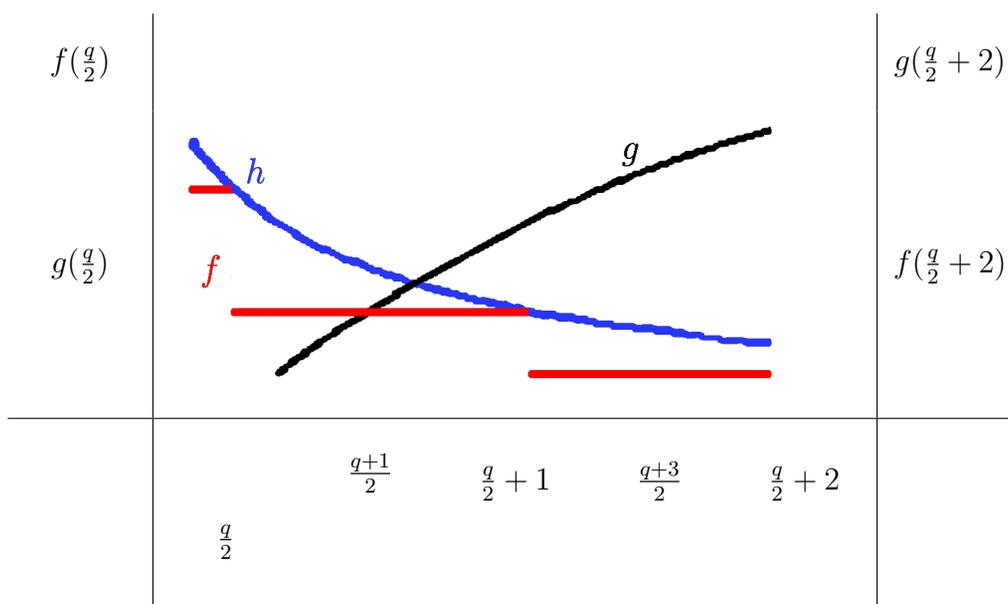
Demostración. Por el punto ii) de la Observación 3, consideramos

$$\lfloor \sqrt{n + q} \rfloor = \lfloor \sqrt{q^2 + 2q + 1} \rfloor = q + 1$$

entonces

$$\frac{q + 1}{2} \leq x_0 \leq \frac{q + 1}{2} + 1.$$

Ahora, por el punto i) de la Observación 3, tenemos que $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2}$ ó bien $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2} + 1 = \frac{q+3}{2}$, pues q es par (Recuerde que $h(x) = \frac{n(n-1)}{2x}$).



Esto quiere decir que $f(\frac{q}{2}) \geq g(\frac{q}{2})$ y que $f(\frac{q}{2} + 2) \leq g(\frac{q}{2} + 2)$. La Proposición IV i) nos dice que $f(\frac{q}{2} + 1) \leq g(\frac{q}{2} + 1)$, es decir $\lfloor x_0 \rfloor = \frac{q}{2}$ de lo que concluimos que

¹²Ver [2].

$$\psi(n + q) \leq \max\{g(\frac{q}{2}), f(\frac{q}{2} + 1)\}.$$

De la Proposición IV ii), resulta que $f(\frac{q}{2} + 1) \geq g(\frac{q}{2})$ y por lo tanto

$$\max\{g(\frac{q}{2}), f(\frac{q}{2} + 1)\} = f(\frac{q}{2} + 1).$$

Con esto, el Teorema 1 implica

$$\psi(n + q) \leq f(\frac{q}{2} + 1) = q \cdot (n + q).$$

□

En resumen tenemos que

Lema I a (Bouchet; 1978)

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es impar, entonces

$$\psi(n) \leq q \cdot n.$$

Lema II a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es par, entonces

$$\psi(n + q + 1) \leq q \cdot (n + q + 2).$$

Lema III a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es par, entonces

$$\psi(n) \leq q^3 + \frac{q^2}{2} + 1.$$

Lema IV a (Araujo, Rubio; 2008)

Si $n = q^2 + q + 1$ y q es par, entonces

$$\psi(n + q) \leq q \cdot (n + q).$$

Teniendo esto, en el capítulo siguiente trabajaremos en las cotas inferiores. Haremos un análisis de los planos proyectivos, los cuales, están relacionados de manera sorprendente con las gráficas completas, lo que nos proporciona métodos de coloración muy eficientes.

Capítulo 3

Planos Projectivos Finitos

Un Plano Projectivo Finito es una terna (P, L, I) donde P es un conjunto no vacío finito de elementos que llamaremos puntos y L es un conjunto de elementos denominados líneas, las cuales se forman por subconjuntos de puntos. I es una relación de incidencia tal que $I \subseteq P \times L$. Diremos que dos líneas son incidentes si su intersección es no vacía. Además cumple con los siguientes axiomas:

- i) Por cualesquiera dos puntos distintos pasa una y sólo una línea.
- ii) Cualesquiera dos líneas distintas se intersectan en exactamente un punto.
- iii) Existe un conjunto de cuatro puntos F tal que cada línea interseca a lo más a dos puntos de F .

Llamaremos simplemente Plano Projectivo a un Plano Projectivo Finito¹. La Figura 2 que aparece en el Prefacio es el Plano de Fano, que es el Plano Projectivo más pequeño posible, es decir, con el menor número de puntos².

¹Un Plano Projectivo cumple con los axiomas de un Espacio Parcialmente Lineal y los de un Espacio Lineal.

²La demostración se encuentra en el Apéndice E.

Afirmación 3 Sea (P, L, I) un Plano Proyectivo, entonces cada par de líneas l, l' en L tienen el mismo número de puntos, esto es, $|l| = |l'|$.

Demostración. Primero probaremos que dadas dos líneas l y l' siempre existe un punto del plano proyectivo que no pertenece a $l \cup l'$.

Sea F el conjunto definido en el axioma iii).

Caso 1). Si algún punto de F no pertenece a $l \cup l'$, terminamos.

Caso 2). Supongamos que todo punto de F pertenece a $l \cup l'$. Sea $F = \{a, b, c, d\}$. Sin pérdida de generalidad, sea $l = \overline{ab}$ y $l' = \overline{cd}$. Consideremos m y m' tal que $m = \overline{ac}$ y $m' = \overline{bd}$. Sea $z = m \cap m'$. Si $z \in l \cup l'$ entonces $z \in l$ o $z \in l'$. Si $z \in l$ entonces $\{a, b, c, z\}$ serían colineales contradiciendo la estructura de F , y un razonamiento análogo muestra que $z \notin l'$, entonces $z \notin l \cup l'$ y hemos encontrado un punto z fuera de $l \cup l'$. Entonces siempre existe un punto que no pertenece ni a l ni a l' . Sea z este punto y sea $\varphi_z : l \rightarrow l'$ el mapeo tal que si $x \in l$, $\varphi_z(x) = l' \cap \overline{zx}$.

La función φ_z está bien definida debido al axioma i). La función φ_z es inyectiva pues si tenemos dos puntos distintos x y y , entonces la línea \overline{zx} es distinta a \overline{zy} (axioma i)) entonces $l' \cap \overline{zx}$ es distinta a $l' \cap \overline{zy}$, es decir $\varphi_z(x)$ es diferente a $\varphi_z(y)$. La función es suprayectiva pues por cada punto w en l' , el punto $l \cap \overline{zw}$ tiene como imagen a w . Entonces l y l' son equipotentes (tienen el mismo número de elementos), es decir $|l| = |l'|$.

□

Con esta Afirmación podemos definir el orden q de un Plano Proyectivo como el número de puntos de una línea menos uno, es decir, $q = |l| - 1$ donde claramente l es una línea cualquiera del Plano Proyectivo³.

³Usualmente el orden de un Plano Proyectivo se denota con la letra n , pero en este caso es más práctico utilizar la letra q .

Afirmación 4 Sea (P, L, I) un Plano Projectivo de orden q , entonces

- i) Por cada punto pasan $q + 1$ líneas,
- ii) Hay $q^2 + q + 1$ puntos en total y
- iii) El número de puntos y de líneas coincide.

Demostración.

i) Primero probaremos que dado cualquier punto x existe al menos una línea que no pasa por x .

Si $x \in F$ y a, b, c son los otros puntos de F , entonces claramente cualquier línea que pasa por cualesquiera dos puntos de $\{a, b, c\}$ no pasa por x .

Ahora si $x \notin F$ y $F = \{a, b, c, d\}$ entonces alguna de las dos líneas \overline{ab} o \overline{ac} no pasa por x . Entonces podemos suponer que existe l tal que no pasa por x .

Como l contiene $q + 1$ puntos entonces pasan al menos $q + 1$ líneas por x y por el axioma ii) (cualquiera dos líneas se intersectan), no puede pasar ninguna otra línea por x porque no intersectaría a l .

ii) Sea l una línea cualquiera y sea x un punto que no pertenece a l (lo cual es posible por la Afirmación anterior). Como cada línea tiene $q + 1$ puntos y hay $q + 1$ líneas que pasan por x entonces hay $q \cdot (q + 1) + 1$ puntos distintos, es decir, $q^2 + q + 1$ puntos distintos.

iii) Sea l una línea cualquiera. Por el axioma ii) cada línea del plano proyectivo intersecta a l en algún punto de l . Como l tiene $q + 1$ puntos y por cada punto pasan q líneas distintas, entonces, a l la intersectan $q \cdot (q + 1)$ líneas. Por lo tanto en total hay $q \cdot (q + 1) + 1$ líneas distintas, es decir, $q^2 + q + 1$ es el total de líneas.

□

Un Plano Proyectivo de orden q es usualmente denotado como Π_q . Hemos visto que existe al menos un plano proyectivo (el Plano de Fano) pero es bien sabido que si q es potencia de un primo siempre existe un plano proyectivo el cual se construye a partir del campo de Galois de orden q (ver [4]). A dicho plano se le llama plano proyectivo algebraico y usualmente es denotado $PG(2, q)$ (ver [4]). Sabemos que para $q = 6, 10$ el plano proyectivo no existe (ver [15]) y que para $q = 9$ hay tres planos no isomorfos entre sí, uno de ellos el algebraico y dos combinatorios⁴. Existen algunos criterios para determinar si un plano proyectivo existe o no (para mayor detalle ver [4]), sin embargo, existen valores no muy grandes como por ejemplo $q = 12$ para el cual, la existencia de un plano proyectivo de ese orden es todavía una pregunta abierta⁵.

Un Teorema de no existencia de planos proyectivos es en siguiente:

*Un plano proyectivo de orden q no existe si $q \equiv 1$ o $q \equiv 2 \pmod{4}$ y q no se puede expresar como la suma de dos números elevados al cuadrado.*⁶

La construcción algebraica de los planos $PG(2, q)$ no la utilizaremos en general, así que la omitiremos, sin embargo nos parece interesante mostrar un ejemplo. A continuación construiremos Π_4 , en la Figura 3.1 se de manera informal un dibujo del Plano Proyectivo de orden 4, donde las curvas corresponden a líneas del plano proyectivo.

⁴ver Projective Planes of Small Order <http://www.uwyo.edu/moorhouse/pub/planes/>

⁵ver Projective Plane <http://mathworld.wolfram.com/ProjectivePlane.html>

⁶ver [4].

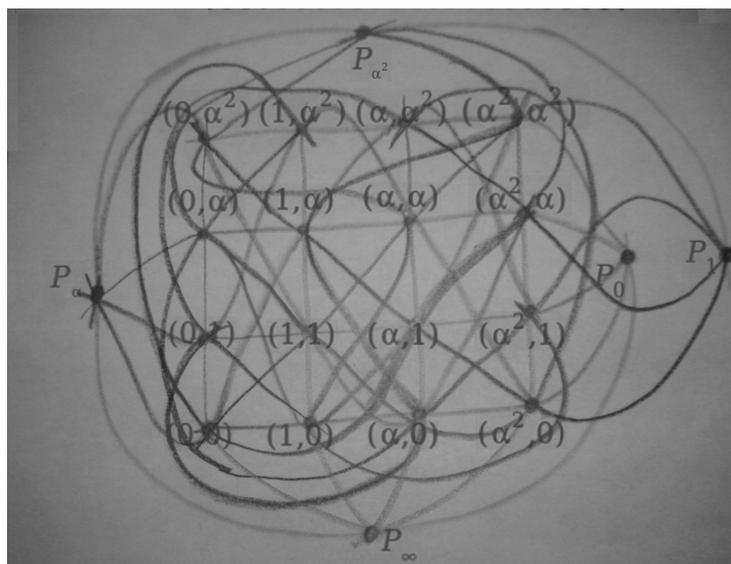


Figura 3.1

Sea K el campo de Galois de orden 4, el cual se construye como un campo de extensión de \mathbb{Z}_2 . Sea α una raíz del polinomio irreducible $x^2 + x + 1$. Entonces se sabe que (ver [4]) los elementos de K son $\{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$ donde $\alpha^2 = 1 + \alpha$. A continuación exhibiremos las tablas las operaciones de suma $+$ y producto \cdot en K .

$+$	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2
1	1	0	α^2	α
α	α	α^2	0	1
α^2	α^2	α	1	0

\cdot	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α

Para graficar el plano, consideramos las líneas $mx+b$ donde m, x y b son elementos de K . Cada conjunto de líneas “paralelas” (todas aquella de pendiente m) inciden en un mismo punto al infinito, al que se le denomina P_m . El punto de incidencia de las líneas de pendiente infinita es P_∞ .

En el siguiente apartado exhibiremos la relación que existe entre las gráficas completas y los planos proyectivos. Esta relación la usaremos todo el tiempo a lo largo de esta tesis.

3.1. Relación

Observación 4 Al identificar los vértices de la gráfica completa K_{q^2+q+1} con los puntos del plano proyectivo Π_q , se puede establecer una relación de equivalencia⁷ entre las aristas de dicha gráfica y las líneas de dicho plano proyectivo con la siguiente relación (ver [1]):

$$\{u, v\} \sim \{x, y\} \iff \overline{uv} = \overline{xy}$$

donde \overline{uv} denota a la única línea que contiene a los vértices u y v .

Así, las aristas de la gráfica completa K_{q^2+q+1} quedan particionadas por las líneas del plano proyectivo, es decir, cada elemento de la partición corresponde a las aristas de la subgráfica completa K_{q+1} inducida por los puntos de dicha línea.

La Figura 3.2 muestra de forma gráfica la relación, para el caso de Π_2 .

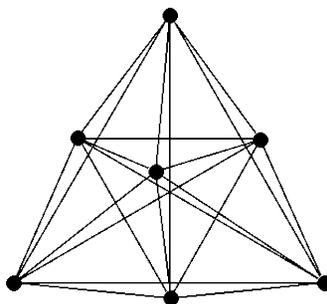


Figura 3.2

La consecuencia de esta relación en las coloraciones es intuitiva, como se verá en la Observación siguiente.

Observación 5 Teniendo en cuenta la Observación anterior y el axioma ii) de los Planos Proyectivos, si a cada línea la coloreamos de un color distinto, entonces cada dos colores son incidentes justo donde las líneas son incidentes, de esta manera a

⁷La demostración se encuentra en el Apéndice F.

cada K_{q+1} que corresponde a una línea, la coloreamos con un cierto número de colores logrando que cada color sea incidente a todo vértice de K_{q+1} entonces cualesquiera dos colores que pertenecen a dos líneas distintas serán incidentes justo donde las dos líneas se intersectan.

Para facilitar la lectura de este trabajo diremos que una línea es “dueña” de un color si este color toca a cada vértice de la gráfica completa que está relacionada con la línea⁸.

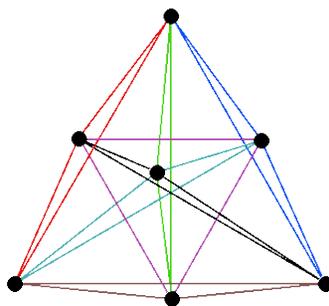


Figura 3.3

En la Figura 3.3 se muestra una coloración de K_7 de tal forma que las líneas relacionadas con Π_2 se colorearon con un solo color y se muestra gráficamente como es que cada dos colores son incidentes justo donde las líneas se intersectan. Inmediatamente tenemos que $\psi(7) \geq 7$. Nótese que en esta coloración cada línea es dueña de un color.

Como el índice pseudoacromático busca maximizar el número de colores que se va a utilizar en las aristas de la gráfica completa, si acomodamos el máximo número de colores en las aristas de la subgráfica completa que corresponden a las líneas del plano proyectivo logrando que cada línea se adueñe de todos los colores que usa, obtenemos una buena cota inferior para el índice pseudoacromático.

⁸Esta manera de denotar que un color toca a cada vértice de una línea no es estándar.

Observación 6 Esta Observación expresa la condición de maximizar el número de colores por utilizar en una gráfica completa relacionada con una línea, de tal forma que la línea sea dueña de todos sus colores, es decir, que cada color toque a cada vértice.

i) Si la gráfica completa relacionada con una línea del proyectivo tiene un número par de vértices $2a$, es decir es K_{2a} ; dicha coloración se consigue coloreando de un solo color a las aristas por apareamientos completos (para mayor detalle véase [12]). Coloreando de esta manera se logra que la línea sea dueña de todos sus colores, además se usan $2a - 1$ colores y se utilizan a aristas por clase cromática, es decir, hay a aristas de cada color.

La Figura 3.4 muestra una coloración completa de K_6 , en la que se uso este método de coloración.

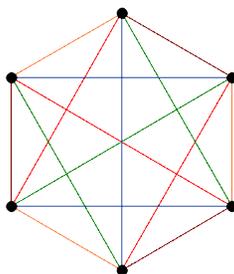


Figura 3.4

Coloración propia por apareamiento de K_6 con cinco colores.

ii) Si la gráfica completa relacionada con la línea tiene orden impar $2a+1$, es decir, es K_{2a+1} , lograremos maximizar el número de colores extendiendo una coloración de K_{2a} con $2a - 1$ colores (como en i)) a K_{2a+1} de la siguiente manera:

Claramente K_{2a+1} es isomorfa a $K_{2a} \oplus K_1$ (ver Observación 2). Sea $K_1 = u$ un vértice cualquiera de K_{2a+1} , llamemos K_{2a} a $K_{2a+1} - \{u\}$ y coloreamos a K_{2a} como en el inciso i). Ahora, sea x un vértice fijo de K_{2a} , para todo $y \in \{V(K_{2a}) - \{x\}\}$ coloreamos la arista $\{u, y\}$ del mismo color que la arista $\{x, y\}$ en la coloración de

K_{2a} y finalmente a la arista $\{u, x\}$ a la que llamamos “arista especial” (como en [1]) le asignamos cualquier color de los que ya tenemos. Notemos que la línea es dueña de todos los colores salvo del color asignado a la arista especial asociada a la gráfica K_{2a+1} .

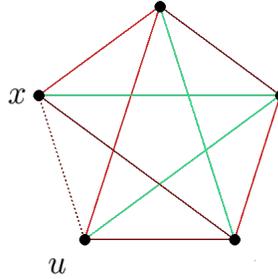


Figura 3.5

La Figura 3.5 muestra una coloración completa en las aristas de K_5 , la arista punteada es la arista especial.

iii) Finalmente, usando el método anterior, consideremos otro tipo de coloración cuando la gráfica completa relacionada con la línea tiene también orden impar $2a + 1$, es decir, sea K_{2a+1} .

Consideremos la gráfica completa de orden par K_{2a+2} . Si la coloreamos como en i), lo haremos con $2a + 1$ colores, es decir, K_{2a+2} será dueña de $2a + 1$ colores.

Como $K_{2a+2} = K_{2a+1} \oplus K_1$, si a K_{2a+2} le borramos un vértice cualquiera (que puede verse como el correspondiente a K_1), entonces K_{2a+1} será coloreada con $2a + 1$ colores pero no será dueña de sus colores pues a cada vértice le hará falta exactamente un color. En este caso, cuando por cada vértice pasen todos los colores excepto uno, diremos que K_{2a+1} será “casi dueña” de $2a + 1$ colores. Notemos que en esta coloración el color que falte en cada vértice es distinto al que le falta a los demás vértices.

En la Figura 3.6, se muestra una coloración en las aristas de K_5 donde K_5 es casi dueña de cinco colores.

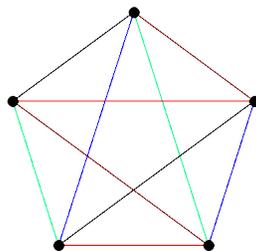


Figura 3.6

En el capítulo anterior vimos que la coloración pseudoacromática de K_8 está acotada superiormente por 14. Veamos, por ejemplo, como colorear a K_8 con 14 colores.

Consideremos a K_8 como $K_7 \oplus H$ donde H es K_1 e identifiquemos a K_7 con Π_2 . Observemos que hay siete aristas entre H y K_7 .

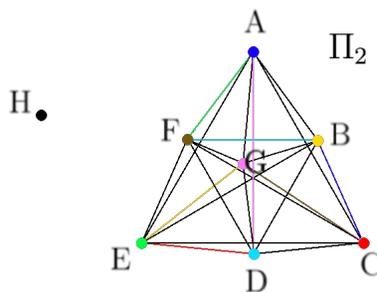


Figura 3.7

Como cada línea de Π_2 está relacionada con una gráfica completa de orden tres, la colorearemos como en la Observación 6 ii), esto es, con un color. Recordemos que en esta forma de colorear obtenemos la llamada arista especial. Observemos que la arista especial toca a dos vértices de la línea, entonces, si coloreamos a la arista especial con cierto color, para que la línea sea dueña de ese color, tendría que tocar un solo vértice, es decir, colorearemos la arista que va de H al vértice que no toca la arista especial con el color asignado a la arista especial y entonces la línea será dueña de los dos colores que usa.

Para garantizar que es posible colorear a cada línea de esta forma, en la Figura 3.7, mostramos tal coloración en las aristas especiales, indicando en el color del vértice la coloración de la arista que va de ese vértice a H .

Por lo tanto cada línea es dueña de dos colores distintos, lo que nos da que $\psi(8) \geq 14$ y concluimos que $\psi(8) = 14$. En la Figura 3.8 mostramos una coloración completa de K_8 con 14 colores.

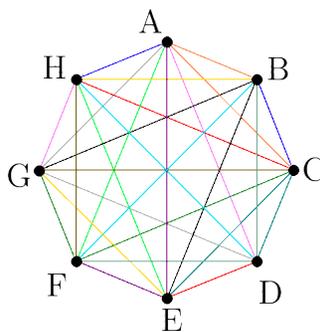


Figura 3.8

Coloración pseudoacromática de K_8
con catorce colores.

Con esta idea, en el Capítulo siguiente se exhibirán coloraciones en las aristas de ciertas gráficas completas, las cuales inducen automáticamente una cota inferior para el índice pseudoacromático.

Capítulo 4

Cotas Inferiores

Al dar una coloración completa en las aristas de una gráfica, automáticamente se induce una cota inferior para el índice pseudoacromático (como ya hemos visto), de igual forma al dar una coloración completa y propia en las aristas de la gráfica se induce inmediatamente una cota inferior para el índice acromático. Es por ello que este Capítulo trata de coloraciones; sin embargo la herramienta utilizada está contenida en el Capítulo anterior. Procederemos entonces a colorear ciertas gráficas escogidas de manera adecuada.

Consideremos el número $n = q^2 + q + 1$. La primer familia de gráficas completas serán aquellas que tienen orden n con la condición de que q es potencia de un número primo impar. Luego el caso cuando q es potencia de dos. De este último obtenemos tres variantes, una cuando el orden de la gráfica es $n + q + 1$, luego cuando el orden de la gráfica es n y por último cuando el orden de la gráfica es $n + q$.

4.1. Lema I b (Bouchet; 1978)¹

Sea q una potencia de un primo impar, $n = q^2 + q + 1$, y $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n entonces existe una coloración completa en las aristas de K_n que utiliza $q \cdot n$ colores y por lo tanto:

¹Ver [11].

$$q \cdot n \leq \psi(n).$$

Demostración. Sean $[q]_i = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ un conjunto i de q colores distintos y C una colección de n conjuntos de q colores, es decir

$$C = \bigsqcup_{i=1}^n [q]_i.$$

Entonces C contiene $q \cdot n$ colores distintos.

Si identificamos a K_n con el plano proyectivo de orden q , Π_q , como en la Observación 4 podemos colorear a K_n de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta la Observación 5, si coloreamos a cada línea con q colores de tal forma que esta sea dueña, terminamos la coloración.

Como cada línea tiene $q+1$ puntos y q es impar, por la Observación 6 i) es posible colorearla con q colores logrando que sea dueña de estos q colores distintos y como esto pasa para cada línea entonces todos los colores de la colección C , que son $q \cdot n$, se encuentran y el teorema está demostrado.

□

4.2. Lema II b (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)²

Sea q una potencia de dos, $n = q^2 + q + 1$ y $G = L(K_{n+q+1})$ la gráfica de líneas de K_{n+q+1} . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_{n+q+1} que utiliza $q \cdot (n + q + 2)$ colores y por lo tanto:

$$q \cdot (n + q + 2) \leq \psi(n + q + 1).$$

Demostración. Sea $[t]_i = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ un conjunto i de t colores distintos y sea C una colección de conjuntos de distintos colores y distintos tamaños tomados de

²Ver [1].

la siguiente manera: n conjuntos de colores de $q + 1$ colores distintos cada uno y un conjunto de colores con $q - 1$ colores distintos cada uno, es decir

$$C = \bigsqcup_{i=1}^n [q + 1]_i \sqcup [q - 1].$$

Entonces C contiene $n \cdot (q + 1) + (q - 1)$ colores distintos o lo que es lo mismo $q \cdot (n + q + 2)$ colores.

Consideramos a K_{n+q+1} como la suma directa de K_n y K_{q+1} (a K_{q+1} la denotaremos como H) como en la Observación 2, es decir $K_{n+q+1} = K_n \oplus H$ e identificamos a K_n con el plano proyectivo de orden q , Π_q , como en la Observación 4.

Entonces podemos colorear a K_n de la siguiente manera:

Cada línea de K_n será coloreada con una caja $[q + 1]_i$ como en la Observación 6 iii) y así, estas líneas serán casi dueñas de estos $q + 1$ colores. A H la coloreamos con la caja $[q - 1]$ como lo indica la Observación 6 ii) y la arista especial con cualquier color de los $q \cdot (n + q + 2)$ que ya tenemos.

Notemos que hay $q + 1$ aristas por cada vértice de K_n que van a H y a cada punto del plano proyectivo le falta un color por cada una de las $q + 1$ líneas incidentes a este punto, entonces cada una de las aristas se coloreará con el color que le faltaba a cada punto por cada línea que pasa por él, o sea, lograremos que cada línea del plano sea dueña de sus $q + 1$ colores. Por lo tanto, en esta parte hemos utilizamos $\bigsqcup_{i=1}^n [q + 1]_i$ colores. Ahora veamos que la coloración es completa.

Como cada línea del plano es dueña de $[q + 1]$ colores, estos son incidentes en la intersección de las líneas a las que pertenezcan los colores. Los $[q - 1]$ colores de H son incidentes en cada vértice de H . Cada color empleado en las aristas del plano, colorea a una arista que va de K_n a H , entonces toca a cada color empleado en H .

De esta manera la coloración es completa y por lo tanto

$$q \cdot (n + q + 2) \leq \psi(n + q + 1)$$

□

El siguiente Lema aparece en [1] aunque la prueba que se muestra aquí es distinta.

4.3. Lema III b (Araujo, Strausz; 2008)³

Sea q una potencia de dos, $n = q^2 + q + 1$, y $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_n que utiliza $q^3 + q$ colores, por lo que se tiene que

$$q^3 + q \leq \psi(n).$$

Demostración. Sea $[t]_i = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ un conjunto i de t colores distintos y sea C una colección de conjuntos de distintos colores y distintos tamaños tomados de la siguiente manera: n conjuntos de colores de $q - 1$ colores distintos cada uno y un conjunto con $q + 1$ colores distintos, es decir

$$C = \bigsqcup_{i=1}^n [q - 1]_i \sqcup [q + 1].$$

Entonces C contiene $n \cdot (q - 1) + (q + 1)$ colores distintos o lo que es lo mismo $q^3 + q$ colores.

Si identificamos a K_n con el plano proyectivo de orden q , Π_q , como en la Observación 4 podemos colorear a K_n de la siguiente manera:

Cada línea del Plano Proyectivo será coloreada con una caja $[q - 1]_i$ como en la Observación 6 ii), sin poner ningún color en las aristas especiales, y así, estas líneas serán dueñas de estos $q - 1$ colores.

Observemos que ya tenemos coloreadas las aristas de K_n que pertenecen a las líneas del proyectivo a excepción de las aristas especiales las cuales son n (una por cada línea). Para colorearlas procederemos como sigue:

Tomamos cualesquier par de líneas del plano proyectivo y las llamaremos l y l' . Sea p un punto fijo de l pero que no sea el punto de intersección entre l y l' . Las

³Ver [16].

líneas l_{i_p} serán aquellas que pasan por p que no son l , es decir, $i \in \{0, \dots, q-1\}$. La arista especial de la subgráfica inducida por cada línea l_{i_p} será la arista que va de p a l' , es decir será la arista $\{p, l' \cap l_{i_p}\}$. Cada una de estas aristas las coloreamos con un color distinto de la caja $[q+1]$.

Lo siguiente es hacer que cada línea que pase por p sea dueña del color que se le dio a su arista especial, para ello, haremos lo siguiente:

En cada línea l_{i_p} consideramos los puntos P_j (a excepción de p y $l' \cap l_{i_p}$) $j \in \{1, \dots, q-1\}$ y tomamos un punto en l (excepto a p) y lo fijamos. A este punto llamémoslo p_i . La arista especial de la línea que contiene a p_i y a un punto de P_j será precisamente la arista $\{p_i, P_j\}$. Como hay $q-1$ puntos en l distintos a p y a $l' \cap l_{i_p}$, cada línea que pasa por p es dueña del color asignado a su arista especial si asignamos el mismo color a las aristas $\{p_i, P_j\}$. Sólo falta que la línea l sea dueña del color asignado a su arista especial. Simplemente consideramos las aristas especiales que van de la línea que contiene a $l' \cap l_{i_p}$ y a p_i , y a estas les asignamos el color de la arista especial de l (la que va de p a $l \cap l'$). De esta forma cada línea que pasa por p es dueña de q colores y además hemos coloreado $q \cdot (q+1)$ aristas especiales, la arista faltante es la arista especial de l' , a la cual se le asigna cualquier color de los $q^3 + q$ colores.

Veamos que la coloración es completa. Las líneas que pasan por p son $q+1$ y estas son dueñas de q colores. Las líneas que no pasan por p son $n - (q+1)$ y estas son dueñas de $q-1$ colores. Como cada línea es dueña de sus colores, entonces los colores se intersectan justo donde las líneas se intersectan, así, la coloración es completa utilizando $(n - q - 1) \cdot (q - 1) + q \cdot (q + 1)$ colores y por lo tanto

$$q^3 + q \leq \psi(n + q)$$

□

El siguiente Lema es original de esta tesis.

4.4. Lema IV b (Araujo, Rubio; 2008)⁴

Sea q una potencia de dos, $n = q^2 + q + 1$, y $G = L(K_{n+q})$ la gráfica de líneas de K_{n+q} . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_{n+q} que utiliza $q \cdot (n + q)$ colores, por lo que se tiene que

$$q \cdot (n + q) \leq \psi(n + q).$$

Demostración. Sea $[t]_i = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ un conjunto i de t colores distintos y sea C una colección de conjuntos de distintos colores y distintos tamaños tomados de la siguiente manera: q^2 conjuntos de colores de $q + 1$ colores distintos cada uno, $q + 1$ conjuntos de colores con $q - 1$ colores distintos cada uno y por último un conjunto con $q + 1$ colores distintos, es decir

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{q^2} [q + 1]_i \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{q+1} [q - 1]_i \sqcup [q + 1].$$

Entonces C contiene $q^2 \cdot (q + 1) + (q + 1) \cdot (q - 1) + (q + 1)$ colores distintos o lo que es lo mismo $q \cdot (n + q)$ colores.

Si consideramos a K_{n+q} la suma directa de K_n y K_q (a K_q la denotaremos como H) como en la Observación 2, es decir $K_{n+q} = K_n \oplus H$ e identificamos a K_n con el plano proyectivo de orden q , Π_q , como en la Observación 4 podemos colorear a K_n de la siguiente manera:

Sea v un vértice cualquiera de K_n y sea L_v el haz de líneas de Π_q que pasa por v , además escojamos una línea cualquiera l del plano proyectivo distinta a las líneas del haz L_v (recordemos que cada línea del plano proyectivo corresponde a una subgráfica completa de orden $q + 1$ de K_n), por propiedades del plano proyectivo toda línea de L_v interseca a l en algún único punto, entonces coloreamos cada línea l_{v_i} del haz L_v ($i \in \{1, \dots, q + 1\}$) con $q - 1$ colores como en la Observación 6 ii) de tal forma que la arista especial de l_{v_i} sea la que une a v con $p_i = l \cap l_{v_i}$, es decir, la línea l_{v_i} se

⁴Ver [2].

colorea con una caja $[q - 1]_i$ y será dueña de esos $q - 1$ colores, y como hay $q + 1$ líneas en el haz de L_v utilizamos $\bigsqcup_{i=1}^{q+1} [q - 1]_i$ colores. Además, como cada línea l_{v_i} se puede ver como $K_{q_i} \oplus v$ de tal forma que la coloración de K_{q_i} con $q - 1$ colores se extendió a $K_{q_i} \oplus v$ copiando los colores de las aristas incidentes en $p_i \in K_{q_i}$ a las aristas incidentes en v (sin considerar las aristas especiales $\{v, p_i\}$), para hacer propia esta parte de la coloración, intercambiaremos el haz de colores que va de v a todo vértice de l_{v_i} al haz de colores que va de v todos los vértices de $l_{v_{i+1}}$ y el haz de colores que va de v a todo vértice de $l_{v_{q+1}}$ al haz de colores que va de v a todo vértice de l_{v_1} . Notemos que por el momento las aristas especiales no tienen color asignado.

Ahora bien, las líneas que no pasan por v serán coloreadas con una caja $[q + 1]_i$ como en la Observación 6 iii) y así, estas líneas serán casi dueñas de estos $q + 1$ colores. Por cada punto p de Π_q pasan $q + 1$ líneas y si $p \neq v$, q líneas están coloreadas con $q + 1$ colores. Notemos que hay q aristas por cada punto de Π_q que van a H , entonces sin considerar aquellas que van de v a H , cada una de ellas se coloreará con el color que le faltaba en $p \neq v$ en cada línea que pasa por él, o sea, lograremos que cada línea del plano sea dueña de sus colores (aquellos que hasta el momento han sido asignados). Por lo tanto, como hay exactamente q^2 líneas del proyectivo que no pasan por v y por lo anterior, las hemos coloreado con $q + 1$ colores, entonces utilizamos en total $\bigsqcup_{i=1}^{q^2} [q + 1]_i$ colores.

Observemos que ya tenemos coloreadas las aristas de K_n que pertenecen a las líneas del proyectivo a excepción de las aristas especiales, falta colorear también las aristas de H y las aristas que van de H a v . Para asignar colores a dichas aristas, nos fijamos en un conjunto de aristas independientes de cardinalidad q (ya coloreadas), este conjunto A será formado por cualquiera q aristas que vayan a algún punto p_i con $i \in \{1, \dots, q\}$ a un vértice cualquiera de h_i en H .

Recordemos que cada línea l_{v_i} que pasa por v tiene asignada una arista especial que va de v a p_i y dichas aristas no tienen color asignado. Coloreamos la arista especial $\{v, p_i\}$ con el color de la arista de A que intersecta a p_i y le borramos el color a las aristas de A .

Como A contiene q aristas y tomamos únicamente q aristas especiales de las $q + 1$,

queda una arista especial a la cual asignarle color. Es importante notar que tenemos un apareamiento de $q + 1$ aristas desde l a $H \oplus v$, las del conjunto A y la arista especial restante (aquella que falta asignarle color) y además notemos que no se ha alterado la propiedad de que una línea del proyectivo sea dueña de sus colores.

A continuación coloreamos a $H \oplus v$ con $q + 1$ colores como en la Observación 6 iii), además como es casi dueña de estos $q + 1$ colores, el color que le falta a cada vértice será el asignado a las $q + 1$ aristas independientes que van de $H \oplus v$ a l .

Notemos que al hacer esta última asignación de colores, todas las aristas quedan coloreadas. Ahora veamos que la coloración es completa.

Los $\bigsqcup_{i=1}^{q^2} [q+1]_i$ y los $\bigsqcup_{i=1}^{q+1} [q-1]_i$ usados para colorear a las líneas de Π_q , se intersectan justamente en Π_q , en la intersección de las líneas, pues cada línea es dueña de sus colores. Los $q + 1$ colores asignados a $H \oplus v$ intersectan a todos los $\bigsqcup_{i=1}^{q^2} [q+1]_i$ colores asignados a las líneas de Π_q que no pasan por v en H , a excepción de q colores que van a v , los cuales son incidentes en v . Los $\bigsqcup_{i=1}^{q+1} [q-1]_i$ colores asignados a las líneas de Π_q que pasan por v , también son incidentes a estos $q + 1$ colores en v . Por último, los colores utilizados en $H \oplus v$ se tocan en cada vértice de $H \oplus v$ pues $H \oplus v$ es dueño de $q + 1$ colores.

De esta manera la coloración es completa y por lo tanto

$$q \cdot (n + q) \leq \psi(n + q)$$

Notemos que la coloración además es propia, pues cada subcoloración es propia, además como vimos en la observación 5 la subcoloración del plano proyectivo es propia y cada color que va de $H \oplus v$ a $\Pi_q - v$ está sólo una vez.

□

A manera de resumen tenemos:

Lema I b (Bouchet; 1978)

Sea q una potencia de un primo impar, $n = q^2 + q + 1$, y $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_n que utiliza $q \cdot n$ colores, por lo que se tiene que

$$q \cdot n \leq \psi(n).$$

Lema II b (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Sea q una potencia de dos, $n = q^2 + q + 1$ y $G = L(K_{n+q+1})$ la gráfica de líneas de K_{n+q+1} . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_{n+q+1} que utiliza $q \cdot (n + q + 2)$ colores, por lo que se tiene que

$$q \cdot (n + q + 2) \leq \psi(n + q + 1).$$

Lema III b (Araujo, Strausz; 2008)

Sea q una potencia de dos, $n = q^2 + q + 1$, y $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_n que utiliza $q^3 + q$ colores, por lo que se tiene que

$$q^3 + q \leq \psi(n).$$

Lema IV b (Araujo, Rubio; 2008)

Sea q una potencia de dos, $n = q^2 + q + 1$, y $G = L(K_{n+q})$ la gráfica de líneas de K_{n+q} . Entonces existe una coloración completa en las aristas de K_{n+q} que utiliza $q \cdot (n + q)$ colores, por lo que se tiene que

$$q \cdot (n + q) \leq \psi(n + q).$$

Capítulo 5

Teoremas

Los resultados que demostraremos y que se encuentran en [1] y en [2] están inspirados en un elegante y profundo resultado de Bouchet del año 1978 que aparece en [11], el cuál dice lo siguiente

Teorema (Bouchet; 1978)¹

Sea q un número natural impar y $n = q^2 + q + 1$.

Un Plano Proyectivo de orden q existe si y sólo si $\alpha(n) = q \cdot n$.

En el siguiente Teorema (el Teorema I b) demostraremos una implicación del Teorema de Bouchet: si el plano proyectivo de orden q existe, entonces $\alpha(n) = q \cdot n$. La otra implicación: si $\alpha(n) = q \cdot n$, entonces el plano proyectivo de orden q existe, no está demostrada en este trabajo, sin embargo es de suma importancia ya que, por ejemplo, si es posible colorear acromáticamente K_{15} con 3641 colores, estaríamos demostrando la existencia del plano proyectivo de orden 15, hecho que hasta el momento no se sabe o en el otro caso, si demostramos que no es posible colorearla con ese número de colores demostramos que no existe dicho plano proyectivo.

A continuación demostraremos seis Teoremas casi de forma inmediata con los Lemas que ya hemos demostrado. Los Teoremas I a y I b hacen referencia al Teorema

¹Ver [11].

de Bouchet, los Teoremas II, III y I a están demostrados en [1] y los Teoremas IV a y IV b son resultados originales de esta tesis, los cuales además aparecen en [2].

Para finalizar, en el siguiente y último Capítulo mostraremos el compendio de resultados conocidos acerca del índice acromático y del índice pseudoacromático de una gráfica completa que hasta ahora se tienen.

5.1. Teorema I b (Bouchet; 1978)²

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, q un número primo impar, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n y ς una coloración completa y propia $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot n]$, entonces

$$\alpha(n) = q \cdot n.$$

Demostración. Por el Lema I a y por el caso particular de que q es un primo impar, tenemos que $\psi(n) \leq q \cdot n$ y como $\alpha(n) \leq \psi(n)$ entonces

$$\alpha(n) \leq q \cdot n.$$

Además, dada una coloración pseudoacromático como en el Lema I b, procedemos a observar que dicha coloración es propia, puesto que cada línea asociada a K_n es coloreada por apareamientos. Por lo tanto

$$q \cdot n \leq \alpha(n).$$

Y por la primer desigualdad entonces $\alpha(n) = q \cdot n$.

□

²Ver [11].

5.2. Teorema I a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)³

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot n]$, entonces

$$\psi(n) = q \cdot n.$$

Demostración. Por el Lema I a y para el caso particular de que $q = 2^\gamma$, $\psi(n) \leq q \cdot n$ y por el Lema I b $q \cdot n \leq \psi(n)$, es inmediato entonces que $\psi(n) = q \cdot n$. □

5.3. Teorema II (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)⁴

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_{n+q+1})$ la gráfica de líneas de K_{n+q+1} y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot (n + q + 2)]$, entonces

$$\psi(n + q + 1) = q \cdot (n + q + 2).$$

Demostración. Por el Lema II a y para el caso de que $q = 2^\gamma$, $\psi(n) \leq q \cdot (n + q + 2)$ y por el Lema II b $q \cdot (n + q + 2) \leq \psi(n + q + 1)$, entonces $\psi(n + q + 1) = q \cdot (n + q + 2)$. □

5.4. Teorema III (Araujo, Strausz; 2008)⁵

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$ y n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q^3 + q]$, entonces

³Ver [1].

⁴Ver [1].

⁵Ver [16].

$$q^3 + q \leq \psi(n) \leq q^3 + \frac{q^2}{2} + 1.$$

Demostración. Por el Lema III a y para el caso particular de que $q = 2^\gamma$, $\psi(n) \leq q^3 + \frac{q^2}{2} + 1$ y por el Lema III b $q^3 + q \leq \psi(n)$, entonces

$$q^3 + q \leq \psi(n) \leq q^3 + \frac{q^2}{2} + 1.$$

□

El siguiente teorema es un resultado original de esta tesis

5.5. Teorema IV a (Araujo, Rubio; 2008)⁶

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_{n+q})$ la gráfica de líneas de K_{n+q} y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot (n + q)]$, entonces

$$\psi(n + q) = q \cdot (n + q).$$

Demostración. Por el Lema IV a y para el caso particular de que $q = 2^\gamma$, $\psi(n + q) \leq q \cdot (n + q)$ y por el Lema IV b $q \cdot (n + q) \leq \psi(n + q)$, es inmediato entonces que $\psi(n + q) = q \cdot (n + q)$.

□

El siguiente teorema es un resultado original de esta tesis

⁶Ver [2].

5.6. Teorema IV b (Araujo, Rubio; 2008)⁷

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_{n+q})$ la gráfica de líneas de K_{n+q} y ς una coloración completa y propia tal que $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot (n + q)]$, entonces

$$\alpha(n + q) = q \cdot (n + q).$$

Demostración. Por el Lema IV b $\psi(n+q) \leq q \cdot (n+q)$ y como $\alpha(n+q) \leq \psi(n+q)$:

$$\alpha(n + q) \leq q \cdot (n + q).$$

Y entonces, dada una coloración pseudoacromática como en el Lema II b, procedemos a notar que dicha coloración es propia como se menciona en la demostración del Lema II b, por lo tanto

$$\alpha(n + q) \leq q \cdot (n + q).$$

Y por la primer desigualdad entonces $\alpha(n + q) = q \cdot (n + q)$.

□

⁷Ver [2].

Los resultados que exhibimos en esta tesis son los siguientes

Teorema I b (Bouchet; 1978)

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, q un número primo impar, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$.
Sea $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n y ς una coloración completa y propia
 $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot n]$, entonces

$$\alpha(n) = q \cdot n.$$

Teorema I a (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, q una potencia de un primo impar, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$,
 $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow$
 $[q \cdot n]$, entonces

$$\psi(n) = q \cdot n.$$

Teorema II (Araujo, Montellano, Strausz; 2008)

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_{n+q+1})$ la gráfica de líneas de K_{n+q+1}
y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot (n + q + 2)]$, entonces

$$\psi(n + q + 1) = q \cdot (n + q + 2).$$

Teorema III (Araujo, Strausz; 2008)

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_n)$ la gráfica de líneas de K_n y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q^3 + q]$, entonces

$$q^3 + q \leq \psi(n) \leq q^3 + \frac{q^2}{2} + 1.$$

Teorema IV a (Araujo, Rubio; 2008)

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, n un entero tal que $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_{n+q})$ la gráfica de líneas de K_{n+q} y ς una coloración completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot (n + q)]$, entonces

$$\psi(n + q) = q \cdot (n + q).$$

Teorema IV b (Araujo, Rubio; 2008)

Sea $\gamma \in \mathbb{N}$, $q = 2^\gamma$, $n = q^2 + q + 1$, $G = L(K_{n+q})$ la gráfica de líneas de K_{n+q} y ς una coloración completa y propia tal que $\varsigma : V(G) \rightarrow [q \cdot (n + q)]$, entonces

$$\alpha(n + q) = q \cdot (n + q).$$

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos acotado el índice acromático y pseudoacromático de gráficas completas de los ordenes $(2^\gamma + 1)^2$, $(2^\gamma + 1)^2 + 1$ y $q^{2\gamma} + q^\gamma + 1$ con γ un natural y q una potencia de un número primo, sin embargo, nos preguntamos acerca de los valores de $\alpha(m)$ y de $\psi(m)$ cuando m no toma los valores que ya hemos tratado.

Resulta que buscar el índice acromático y el índice pseudoacromático de cualquier gráfica es una tarea difícil. En particular, en Teoría de la Complejidad Computacional, este problema es considerado como NP-Completo (ver [7]).

A continuación, recabamos los valores conocidos hasta ahora de $\alpha(m)$ y de $\psi(m)$ es la tabla 5, y damos una breve descripción de ello.

En [13] comentan que solamente se conocían los valores del índice acromático $\alpha(m)$ para $m \leq 14$ y para $m = 25$ como se ve en la siguiente tabla.

Tabla 4

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	25
$\alpha(m)$	1	3	3	7	8	11	14	18	22	27	32	39	39	100

Los valores de $\alpha(m)$ para $m \leq 7$ son exhibidos por Bosák y Ninčák e independientemente por Bories y Jolivet (ver [13]), en [11] los valores de $\alpha(8)$ y $\alpha(9)$ son

determinados y en [13] también se menciona que $\alpha(10)$ y $\alpha(11)$ son determinados por Turner y que $\alpha(11)$ es determinado también por Kunderíková, además de que para $\alpha(12)$ Jamison determina la cota inferior y Horňák la cota superior y que Pčola probó sorprendentemente que $\alpha(13) = \alpha(14)$. Finalmente en [14] Jamison demuestra que $\alpha(25) = 100$.

Notemos que $\alpha(13)$ se puede determinar por el Teorema I b y además $\alpha(9)$ y $\alpha(25)$ se pueden determinar por el Teorema IV b que proponemos en esta tesis.

En cuanto a $\psi(m)$, en esta tesis obtuvimos los valores para $m \leq 8$ pero para comentar de una manera más sistemática los valores que se conocen hasta ahora para $\psi(m)$, escribimos la Tabla 5. En la Tabla 5 incluimos los valores de $\alpha(m)$ y se consideran valores para m menores o iguales a 133. Además incluimos, en los casos de ciertos ordenes de gráficas completas, cómo consideramos a la gráfica para colorearla, es decir, como vemos a K_m considerando a la subgráfica K_n , por ejemplo, en el Teorema II se consideran los ordenes $m = q^2 + 2q + 2$ con q una potencia de dos, y se considera a las gráficas completas K_n y K_{q+1} para realizar la coloración. Recuerden que siempre consideramos a n como $q^2 + q + 1$.

Tabla 5

m	q	K_m	$\alpha(m)$	$\psi(m)$
1			0	0
2			1	1
3			3	3
4			3	4
5			7	7
6			8	8
7			11	11
8	2	K_{n+1}	14	14
9	2	K_{n+q}	18	18
10	2	K_{n+q+1}	22	22
11			27	27

m	q	K_m	$\alpha(m)$	$\psi(m)$
12			32	$32 \leq \psi(12) \leq 33$
13	3	K_n	39	39
14			39	$40 \leq \psi(14) \leq 45$
21	4	K_n		$68 \leq \psi(21) \leq 73$
25	4	K_{n+q}	100	100
26	4	K_{n+q+1}		108
30	5	K_{n-1}	$136 \leq \alpha(30) \leq 145$	$136 \leq \psi(30) \leq 145$
31	5	K_n	155	155
56	7	K_{n-1}	$365 \leq \alpha(56) \leq 385$	$365 \leq \psi(56) \leq 385$
57	7	K_n	399	399
73	8	K_n		$541 \leq \psi(73) \leq 545$
81	8	K_{n+q}	648	648
82	8	K_{n+q+1}		664
91	9	K_n	819	819
132	11	K_{n-1}	$1388 \leq \alpha(132) \leq 1441$	$1388 \leq \psi(132) \leq 1441$
133	11	K_n	1463	1463

Notemos que los únicos valores donde se sabe que el índice acromático y pseudoacromático difieren es cuando n es 4 ó 14. La cota inferior de $\psi(14)$ se obtiene de saber que $\psi(m+1) \geq \psi(m) + 1$. La cota inferior para $m = 30$ se toma de [14]. Todas las cotas superiores se obtienen por el método que consideramos en esta tesis (ver Capítulo 2). Cuando $m = 56$ y $m = 132$, el valor se deduce de la cota marcada en [13], lo cual se engloba en el siguiente teorema:

Teorema (Horňák, Pčola, Woźniak; 2004) *Sea $q \geq 7$ un primo, $G = L(K_{q^2+q})$ la gráfica de líneas de K_{q^2+q} y ς una coloración propia y completa $\varsigma : V(G) \rightarrow [q^3 + \binom{q}{2} + \lfloor q^{-4}/3 \rfloor]$, entonces*

$$q^3 + \binom{q}{2} + \lfloor q^{-4}/3 \rfloor \leq \alpha(q^2 + q) \leq \psi(q^2 + q) \leq q^3 + q^2 - q.$$

Cabe destacar que todos los valores vacíos de la Tabla 5 hasta ahora son desconocidos y por lo tanto, encontrarlos son problemas abiertos en la rama de las coloraciones en Teoría de Gráficas.

Antes de finalizar mostraremos una conjetura que aparece en [1] hecha a partir del teorema que en esta tesis lleva el número I a y del Teorema de Bouchet que aparece en el capítulo anterior:

Conjetura

Sea q un natural impar y $n = q^2 + q + 1$, entonces existe el plano proyectivo Π_q es de orden q si y sólo si $\alpha(n) = \psi(n)$.

El Teorema I b que mostramos en esta tesis da una implicación a esta conjetura: si el plano proyectivo de orden q es de orden impar, entonces $\alpha(q^2 + q + 1) = \psi(q^2 + q + 1) = q \cdot (q^2 + q + 1)$ (ver [1]). Sin embargo, la otra implicación es lo que resulta ser un problema abierto. Por ejemplo, sabemos que dentro de los primeros números impares, se sabe que existen los planos proyectivos excepto para $q = 15$ y $q = 21$, y de estos dos valores no se sabe si Π_{15} existe o no como ya vimos, y que Π_{21} no existe pues $21 \equiv 1 \pmod{4}$ y 21 no se puede expresar como la suma de cuadrados (ver Capítulo 3), entonces, considerando a Π_{21} , si demostramos que $\alpha(463) = \psi(463)$ demostraríamos que la conjetura es falsa, sin embargo, si la conjetura es cierta, forzosamente $\alpha(463) \neq \psi(463)$.

Para finalizar, en la Figura 6.1 mostramos a K_9 coloreada acromáticamente con dieciocho colores, utilizando el método de coloración del Lema IV b, esto es, alcanzando la cota superior dada en el Lema IV a. Así, $\alpha(9) = \psi(9) = 18$.

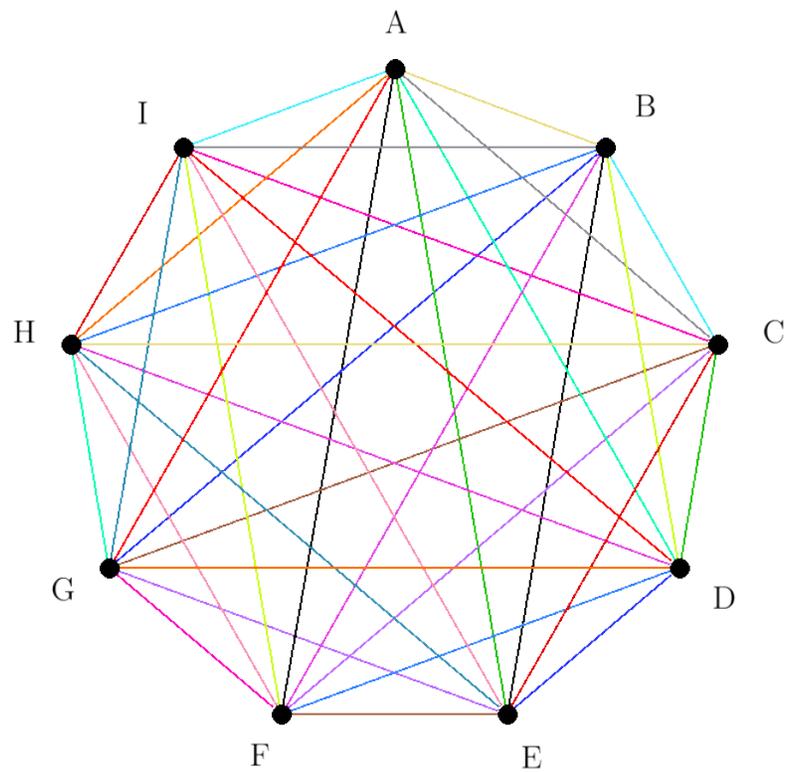


Figura 6.1

Coloración acromática de K_9
con dieciocho colores.

Apéndice

A. Afirmación

El número de colores empleados en una coloración propia, completa y mínima de la gráfica G coincide con $\chi(G)$.

Demostración. Sea G una gráfica y sea $\varsigma : V(G) \rightarrow [\chi(G)]$ una coloración propia. Supongamos que dicha coloración no es completa, entonces al menos existe un par de clases cromáticas A, B distintas que no tienen vértices adyacentes entre sí.

Si recoloreamos la gráfica de tal forma que a excepción de la clase cromática B , todos mantienen su color y los vértices de la clase B los coloreamos con el color asignado a los vértices de A , entonces la coloración sigue siendo propia utilizando $\chi(G) - 1$ colores, lo que no es posible, pues $\chi(G)$ es el mínimo número de colores que se pueden utilizar en cualquier coloración propia de G , entonces toda coloración propia mínima es completa. □

B. Afirmación

Sea $K_{3,3} - e$ la gráfica bipartita completa de grado 6 menos una arista, entonces $\chi(K_{3,3} - e) = 2$, $\alpha(K_{3,3} - e) = 3$ y $\psi(K_{3,3} - e) = 4$.

Demostración. La gráfica $K_{3,3} - e$ es bipartita, de ahí el hecho de que $\chi(K_{3,3} - e)$ sea dos (como se muestra en la Figura 6.1), pues tiene a K_2 como subgráfica inducida.

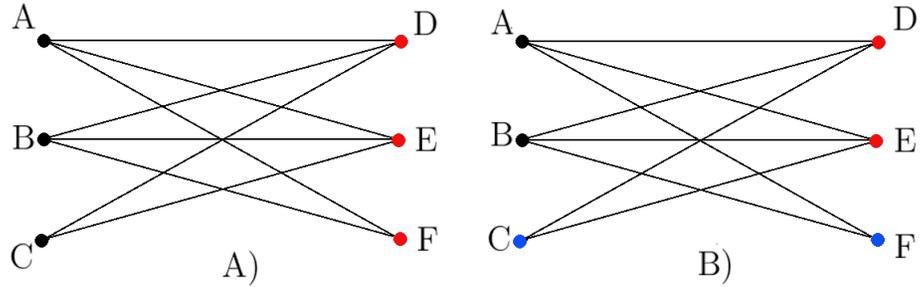


Figura 6.2

En la Figura 6.1 B), los vértices A y B forman una clase cromática, los vértices C y F forman otra clase cromática y los vértices D y E forman otra clase cromática, con esto vemos que $3 \leq \alpha(K_{3,3} - e)$.

Supongamos ahora que $\alpha(K_{3,3} - e) = 4$, entonces como $K_{3,3} - e$ tiene seis vértices, por el Principio de Dirichlet, al menos dos clases cromáticas tienen un solo vértice, los cuales, tienen que ser de grado tres (digamos el vértice A y el vértice D), además los dos vértices vecinos a estos son vértices que pertenecen a clases distintas. Es decir, por un lado el vértice B y el vértice C tienen que pertenecer a dos clases cada uno y de igual forma, los vértices E y F tienen que ser cada uno de dos clases distintas (las mismas que B y C), pero el vértice B es adyacente a E y F (de igual forma, el vértice E es adyacente a B y a C) lo que nos lleva a una contradicción pues la coloración tiene que ser propia. Por lo tanto $\alpha(K_{3,3} - e) = 3$.

Para concluir que $\psi(K_{3,3} - e) = 4$, en la Figura 6.2 coloreamos a $K_{3,3} - e$ de manera completa con cuatro colores, sólo falta ver que $\psi(K_{3,3} - e) \leq 4$.

No es posible que $\psi(K_{3,3} - e) = 5$ pues al menos habrá cuatro clases cromáticas de un solo vértice (Principio de Dirichlet) y como el grado máximo es tres, la coloración no sería completa.

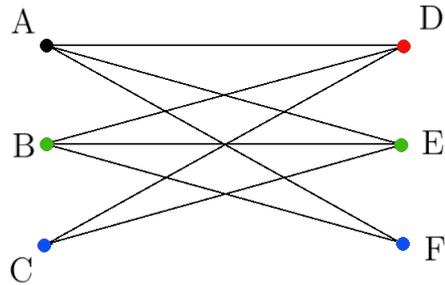


Figura 6.3

□

C. Afirmación

Sea C un apareamiento de K_n con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ aristas, entonces toda arista de K_n toca a alguna arista de C .

Demostración. Si n es par, el orden de C es n ; es claro que cada arista toca a alguno de los n vértices de K_n y entonces a alguna arista de C . Si n es impar, el orden de C es de $n - 1$; entonces hay un solo vértice de K_n que no pertenece a C , digamos el vértice v . Como cada arista de K_n está formada por dos vértices, entonces si alguna tiene como elemento a v , el otro vértice que pertenece a dicha arista es un vértice de C . Y entonces como cada vértice de C toca a alguna arista del apareamiento, queda demostrado.

□

D. Afirmación

Sea C un apareamiento de K_n con x aristas tal que $x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ con n el orden de la gráfica completa y sea C' un conjunto de x aristas tal que no es un apareamiento, entonces C cubre¹ más aristas que C' .

¹Recuerde que el término *cubrir* significa incidencia a todo elemento.

Demostración. El apareamiento C tiene $2x$ vértices. Cada vértice tiene $n - 2x$ vecinos que no están en C , es decir, $2x(n - 2x)$ incidentes a C , fuera de C . La subgráfica inducida por los vértices de C tiene $\frac{2x(2x-1)}{2}$ aristas, entonces C tiene $x(2x - 1) - x$ aristas incidentes a él dentro de ésta subgráfica. Entonces tiene $x(2x - 1) - x + 2x(n - 2x)$ aristas vecinas, o lo que es lo mismo C es incidente a $2x(n - x - 1)$ aristas.

Supongamos que C' tiene orden y . Notemos que y es menor que $2x$. Tomemos un apareamiento D de $2x$ vértices que cubra a C' . El apareamiento D es adyacente a $2x(n - x - 1)$ aristas. El número de vértices en $D - C'$ es $2x - y$. El total de aristas de la subgráfica inducida por los vértices de $D - C'$ es $\frac{(2x-y)(2x-y-1)}{2}$. Entonces C' es vecino de $2x(n - x - 1) - (2x - y)(n - 2x) - \frac{(2x-y)(2x-y-1)}{2}$ aristas y como al menos la diferencia de $2x$ y de y es uno, entonces C cubre más aristas que C' .

□

E. Afirmación

El Plano Projectivo Π_2 es el Plano Projectivo de orden menor.

Demostración. Sea F el conjunto del axioma iii), entonces al menos hay seis líneas, las cuales se intersectan en tres puntos distintos a los de F . Por lo tanto al menos cada plano contiene siete puntos y siete líneas. Como Π_2 tiene $2^2 + 2 + 1$ puntos y la misma cantidad de líneas.

□

F. Afirmación

Al identificar los vértices de la gráfica completa K_{q^2+q+1} con los puntos del plano proyectivo Π_q , la relación entre los aristas de dicha gráfica y las líneas de dicho plano proyectivo,

$$\{u, v\} \sim \{x, y\} \iff \overline{uv} = \overline{xy}$$

donde \overline{uv} denota a la única línea que contiene a los vértices u y v , es de equivalencia.

Demostración.

i. Reflexividad

Como $\overline{uv} = \overline{uv}$ entonces $\{u, v\} \sim \{u, v\}$.

ii. Simetría

Si $\{u, v\} \sim \{x, y\} \Rightarrow \overline{uv} = \overline{xy}$ entonces $\overline{xy} = \overline{uv}$, por lo tanto $\{x, y\} \sim \{u, v\}$.

iii. Transitividad

Si $\{u, v\} \sim \{x, y\}$ y $\{x, y\} \sim \{a, b\}$ entonces $\overline{uv} = \overline{xy}$ y $\overline{xy} = \overline{ab}$, por lo tanto $\overline{uv} = \overline{ab}$, es decir, $\{u, v\} \sim \{a, b\}$.

□

Glosario de Simbología

\sim	indica relación.
\in, \notin	pertenece, no pertenece.
\oplus	operación entre gráficas llamada suma directa.
\iff	doble implicación (Bicondicional).
$\lfloor \rfloor$	función piso.
$ A $	cardinal del conjunto A .
\overline{uv}	línea del proyectivo generada por los puntos u y v .
$[k]$	conjunto con k colores (distintos).
$\{u, v\}$	arista formada por los vértices u y v .
$(, , \dots,)$	indica una n -tupla.
\sqcup, \cup, \cap	unión disjunta, unión, intersección.
$E(G), V(G)$	las aristas de la gráfica G , los vértices de la gráfica G .
$g'(x)$	derivada de la función g evaluada en x .
K_n	gráfica completa de orden n .
$K_{n,m}$	gráfica bipartita completa de orden $n + m$.
$L(G)$	gráfica de líneas de la gráfica G .
mín, máx	función mínimo, función máximo.
\mathbb{N}, \mathbb{R}^+	los números naturales, los números reales positivos.
$PG(m, n)$	es un m -espacio proyectivo algebraico de orden n .
\times	producto cartesiano, símbolo denominado aspa.
Π_n	plano proyectivo de orden n .
$\alpha(G)$	número acromático de la gráfica G .
$\alpha_1(G), \alpha(n)$	índice acromático de la gráfica G , índice acromático de K_n .
$\chi(G)$	número cromático de la gráfica G .
$\chi_1(G), \chi(n)$	índice cromático de la gráfica G , índice cromático de K_n .
$\psi(G)$	número pseudoacromático de la gráfica G .
$\psi_1(G), \psi(n)$	índice pseudoacromático de la gráfica G y de K_n .
$\varsigma^{-1}(i)$	imagen inversa de la función ς en i .

Bibliografía

- [1] G. Araujo-Pardo, J. J. Montellano, R. Strausz; *On the pseudoachromatic index of the complete graph*, (2008) (enviado)
- [2] G. Araujo-Pardo, J. J. Montellano, C. Rubio, R. Strausz; *New results about the achromatic and pseudoachromatic index of the complete graph*, (2008) (en preparación)
- [3] Wilson; *Introducción a la Teoría de Gráficas*, 1992
- [4] J. Matoušek, J. Nešetřil; *Invitation to Discrete Mathematics*, 1998
- [5] G. Chartrand, L. Lesniak; *Graphs & Digraphs*, 2004
- [6] V. Yegnanarayanan; *The Pseudoachromatic Number of a Graph*; Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **24** (2000) (129-136)
- [7] V. Yegnanarayanan; *Graph Colourings and Partitions*, Theoretical Computer Science, **263** (2000) (59-74)
- [8] V. Yegnanarayanan, R. Balakrishnan, R. Sampathkumar; *On the existence of graphs with prescribed coloring parameters*, Discrete Mathematics **216** (2000) (263-297)
- [9] G. López; *Gráficas de Moore y Jaulas: Construcción y Coloraciones*, 2007
- [10] Biggs, Lloyd, Wilson; *Graph Theory*, 1976

- [11] A. Bouchet; *Indice Acromatique des graphes multiparti complets et réguliers*, Cahiers Centre Etudes Rech. Oper. **20** 3-4 (1978) (331–340)
- [12] Z. Füredi; *Covering the complete graph by partitions*, Discrete Mathematics **75** (1989) (217-226)
- [13] M. Hornák, Š. Pčola, M. Woźniak; *On the Achromatic Index of K_{q^2+q} for a Prime q* , Graphs and Combinatorics, **20** (2004) (191-203)
- [14] E. Jamison; *On the Edge Achromatic Number of Complete Graphs*, Discrete Mathematics **74** (1989) (99-115)
- [15] C. W. H. Lam; *The Search for a Finite Projective Plane of Order 10*, The American Mathematical Monthly Vol.**98** No. 4 (1991) (305-318)
- [16] G. Araujo-Pardo, R. Strausz; *Bounding the pseudoachromatic index of the complete graph via projective planes*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **30** (2008) (105-110)