UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

Acerca de los números accesibles e inaccesibles

(Fundamentos en matemáticas)

Tesina que sustenta Hugo Alejandro Cervantes Bobadilla para obtener el titulo de licenciado en filosofía

Asesor: Carlos Oliva Mendoza

Ciudad universitaria, otoño de 2008

ÍNDICE

DEDICATORIA

> Vivo sin vivir en mí, y tan alta vida espero, que muero porque no muero.
> **Santa Teresa de Jesús**

Este trabajo esta dedicado como un tributo con todo mi cariño y todo mi amor a quien fue una simple devota esposa y madre, Señora ***María Eugenia Bobadilla Ortiz*** (1934-1997) mi Madre, a quien quise por sobre todas las cosas y que mientras viva nunca olvidaré, ¡¡por siempre te llevaré en el corazón!!.

A once años de tu partida madre querida solo quedan tus recuerdos en mi mente y corazón. A pesar de tener ya once años de que murió, todos los días y todos los años la he recordado y extrañado; de repente me llegan muchos recuerdos bonitos que ya para mí son muy tristes de recordar y me causan dolor, ¡¡que tiempos aquellos verdad de Dios!! Me causa una profunda tristeza el recordar el amor que se profesaba con mi Padre y que ahora ya no es posible ¡¡como lo lamento!!

Va esta dedicatoria también para mi Padre, Poeta y Campesino *Carmelo Cervantes Santillán*, que nunca perderá el gusto por los asuntos políticos.

Igualmente con dedicatoria a mis abuelos, ya difuntos: *José Guadalupe Bobadilla González (Tlachiquero y Yuntero)*, *Rosendo Cervantes Ruiz (Caporal, Macuarro y Músico)*, *Ofelia Santillán Ruiz*, y *Esperanza Ortiz*.

Finalmente y de manera especial mi más profundo agradecimiento para *Maria Luisa Gutiérrez Arzaluz* que a pesar de las muchas dificultades con las que nos hemos topado, ella me ha alentado a seguir adelante y que sin ella este trabajo hubiera sido imposible.

También quiero dedicar de manera muy especial, a mis dos sobrinos que los quiero mucho *César Cervantes Rubio* de 10 años que todavía le digo Césitar, un excelente estudiante y que le gusta el fútbol; a *Emiliano Cervantes Rubio* de 7 años, ambos con un excelente futuro por delante. Finalmente, ¡¡Va por toda la bonita familia que alguna vez tuve!!

Kjmu7y78787878787877

INTRODUCCIÓN

> *Intuicionista: Los niños en la escuela elemental entienden que los números naturales existen y ellos aceptan el hecho que la sucesión de números naturales puede continuarse indefinidamente.* ***La discusión, Arend Heyting****.*

Los individuos nacemos con algún grado (no medido, en el sentido de poder cuantificarlo) de conocimiento primitivo casi nulo de las cosas, primitivo en el sentido que no existe ninguna diferencia física ni mental entre un individuo de este siglo y uno de la época de Jesucristo. Los dos individuos nacen sabiendo lo mismo, sólo actúan los puros instintos (esto puede ser tal vez muy discutible en otro contexto), es decir, lo que podemos ver de manera natural; por ejemplo, las cosas que nos rodean, los árboles, el cielo, el día, la noche, el sol, las estrellas y el firmamento; todo lo que percibimos de manera inmediata. Esto es todo lo que sabemos en nuestros primeros años de vida, no más; lo primero que aprendemos a retener en nuestra mente o cerebro es un *conocimiento por medio de los sentidos* o *empírico* de los objetos.

Primero aprendemos durante un tiempo a satisfacer nuestras necesidades fisiológicas, como el dormir y el comer. Después aprendemos a hablar, escribir y leer. La historia se repite en cada nueva generación, y así, a pesar de los grandes avances científicos y tecnológicos que han suscitado el desarrollo de la humanidad, cada nuevo individuo empieza a conocer los fenómenos desde el principio; es decir, de manera empírica.

Respecto al conocimiento de los números, a nuestro modo de ver es empírico en una primera etapa; pero sólo los números naturales, porque los números enteros negativos, racionales, irracionales, imaginarios, ya son ellos mismos inmunes a la experiencia, no los aprendemos por la experiencia. La puerta de entrada al conocimiento de los números y por tanto al conocimiento matemático es; desde luego, el conjunto de los números naturales.

La importancia del número en la ciencia es innegable, la introducción del número en cualquier teoría señala el paso del conocimiento cualitativo al cuantitativo, que es el estado perfecto del conocimiento científico. Este conocimiento lo hemos dividido en cuatro etapas.

En una primera etapa *subjetivista* el concepto de número nos llega primero en diferenciar nociones tales como: *poco* y *pequeño*, *grande* y *mucho*; nociones que son sinónimos y nos parecen subjetivas, dicho de esta manera no se puede cuantificar cualquier colección de objetos. Estas nociones las aprendemos empíricamente, puede ocurrir que si tenemos veinte (aquí estamos suponiendo todavía que no conocemos el número veinte ni ningún otro número), naranjas se nos hagan pocas, pero si tenemos cien sean muchas (remitámonos a la actitud que toma un niño al respecto), o si tenemos una propiedad (un terreno) de cien metros cuadrados se nos haga pequeño, pero si tenemos una propiedad de una hectárea se nos haga grande (cuando somos kincapaces de medir con precisión un terreno de nuestra propiedad), este enfoque entonces es subjetivo.

En una segunda etapa *realista* (realismo empírico) empezamos a conocer los números solo en principio como intuiciones de signos o símbolos; en efecto, conocemos los números de la manera usual como: 0 (cero), 1 (uno), 2 (dos), 3 (tres), y así sucesivamente; les damos un nombre a cada uno de ellos, principiando así a distinguir propiamente las nociones intuitivas anteriores. Nos alejamos de lo subjetivo. Los números los relacionamos con las cosas, como un modelo real del mundo (hacemos una correspondencia uno a uno o un isomorfismo) y se hacen enunciados tales como "veinte sillas", "cinco lápices", que están bien impregnados de empirismo y que podemos finalmente cuantificar.

En una tercera etapa *objetivista* a estos números o signos los llamamos *números naturales* o enteros, números que nos sirven para contar. Los procedimientos cuantitativos básicos de la ciencia son entonces *contar* y *medir*, suponen asociaciones previas entre los números naturales y objetos a contar. Existe un análogo en hablar y leer. Contar significa caracterizar una colección de objetos mediante un número, en tanto que medir es asignar un número a alguna propiedad de un objeto. Es el momento de aprender a operar con ellos, es decir, a *sumarlos*, primera operación fundamental de la aritmética[1].

---

[1] La primera operación fundamental que aprendemos es la *suma* de dos números naturales $a, b \in \mathrm{N}$, Donde N es el conjunto de números naturales; y en un enfoque moderno se define así: $s : N \times N \to N$, donde $s(a,b) = a + b$.

En una cuarta etapa *convencionalista* (por convenio el número nueve 9 es el nueve y solamente él) tenemos propiamente los números naturales (representados también por convenio como $\mathbf{N}$, en el mundo entero ésta es la notación estándar), éste conjunto es discreto o discontinuo en el sentido que tiene huecos entre sus números; es decir, entre el número 1 y el número 2 no existe ningún número. Tal conjunto es ordenado como una sucesión numérica infinita $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \ldots$ donde los puntos suspensivos indican que hay más números entre ellos[2].

La etapa convencionalista es más rica en contenido, ya que aquí se encuentran los conjuntos de números enteros $\mathbf{Z}$, irracionales $\mathbf{I}$, racionales $\mathbf{Q}$, reales $\mathbf{R}$, y complejos $\mathbf{C}$; por supuesto que existen más conjuntos numéricos (por ejemplo los números cuaterniones), pero en esta exposición no los trataremos.

Estos conjuntos tienen una propiedad muy peculiar, son *infinitos*, como es dictaminado por la matemática clásica; es decir, que presumiblemente nos pasaríamos toda una eternidad en "contar" cada uno de ellos. El infinito es uno, no existen muchos infinitos.

---

[2] Una *sucesión natural* es una función $x_n : N \to \mathbf{R}$ que tiene por dominio el conjunto de los números naturales N, y por codominio el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$, más precisamente $N \ni n \mapsto x_n = n \in N$ que reproduce a los números naturales. Y un ejemplo de una *sucesión real* es $x_n = \frac{1}{n^2} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ son números que pertenecen al conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales.

Para aclarar bien las ideas, una sucesión es bien distinta de una serie[3]. Este arreglo de los números naturales es aceptado por los formalistas, en cambio los intuicionistas rechazan este arreglo por la noción de infinito. He aquí el punto de discordia entre formalistas e intuicionistas. El hecho de ordenar los números no quiere decir que se esté haciendo una construcción intuicionista.

Si bien es cierto que un repaso exhaustivo nos llevaría a un estudio extenso de las distintas escuelas, en su lugar es preferible delimitar nuestra investigación con las principales tesis de cada una de ellas. Tales escuelas tratadas aquí son: *logicismo*, *constructivismo*, *formalismo* e *intuicionismo* que pertenecen a los *fundamentos de matemáticas*. No podemos verlas como aisladas unas de otras, porque en el fondo tienen rasgos comunes entre ellas. Primero enunciaremos sus principales tesis y en seguida hacer las contrastaciones pertinentes. El orden de aparición es irrelevante, y así empezamos con los fundamentos de matemáticas, para posteriormente pasar a las escuelas filosóficas relacionadas con los fundamentos.

El plan de la exposición es el siguiente: en un primer capítulo un simple recordatorio de cómo los fundamentos operaron en las cuatro escuelas; los fundamentos es el punto común de ellas y con el paso del tiempo culminan aparentemente en diferentes corrientes. La segunda parte más breve se hace un bosquejo de las escuelas filosóficas: logicismo y constructivismo.

---

[3] Sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ de números naturales, y a partir de ésta formamos la nueva sucesión $\{s_n\}_{n\in N}$, donde $s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, \cdots s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. que es una *serie* de sumas parciales.

Queremos finalizar en el capítulo tres, más largo, con el debate entre intuicionismo-constructivismo representado por Brouwer *versus* formalismo representado por Hilbert, con respecto a los grandes números y las conjeturas suscitadas por estas corrientes filosóficas. De ahí el titulo de éste trabajo.

Nuestra área de trabajo son los *números accesibles e inaccesibles*. Y el tema elegido es la *imposibilidad de llegar por un proceso de conteo a los números inaccesibles*. Es en este capítulo donde pretendemos demostrar la pregunta fundamental que motiva esta investigación recurriendo al argot matemático moderno *¿Cuál es el fundamento de las construcciones matemáticas mentales?*

"No hay infinito actual; los cantorianos lo han olvidado y han caído en contradicción"

Poincaré Jules Henri *(1854-1912) matemático y filosofo francés*.

Capítulo 1

Las crisis en matemáticas

La matemática del s. XIX se puede resumir con la aparición de las geometrías no euclidianas, la sistematización de la geometría, el surgimiento de nuevas formas algebraicas (por ejemplo, la topología algebraica[4]) y la *aritmetización del análisis*, esta última pertenece a los fundamentos de las matemáticas.

La tarea de la aritmetización fue dar una base firme al cálculo, liberar el análisis de la intuición geométrica y reducir las nociones más elementales al número entero y al conjunto infinito de números racionales; es decir, la aritmética de los números naturales y lo que ella presupone son suficientes para la estructuración de las distintas teorías que conforman el análisis matemático. *Construir* el análisis de manera puramente aritmética, aritmetizarlo.

[4] La topología algebraica estudia ciertas propiedades que presentan agujeros relacionadas con la conexión de un espacio. Para ello se vale de instrumentos algebraicos, fundamentalmente la teoría de grupos y el algebra homológica, hasta tal punto que su desarrollo es totalmente algebraico. En topología algebraica se consideran una gran diversidad de problemas incluidos en la teoría de nudos, o en la teoría de homotopías y la teoría de homología.

Con los trabajos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), en la teoría de números, es donde se generaliza la geometría analítica moderna que culmina en las funciones de una sola variable compleja (hoy llamada variable compleja); la teoría de las funciones de Karl Weierstrass (1815-1897), que *enunció la existencia de una curva continua pero sin tangente en ninguno de sus puntos*[5]. Los trabajos de Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) y Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), entre otros. Estos son algunos de los desarrollos matemáticos que condujeron a la necesidad de establecer una clara fundamentación de las matemáticas.

En el mismo s. XIX se inició la exposición de la teoría de conjuntos que parece proporcionar el fundamento de la matemática, fue fundada por el matemático de San Petersburgo (hoy Leningrado) Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) y se interesó por el tema en 1872, a pesar de la oposición general que ésta generó en la época de Cantor; Karl Weierstrass y Richard Dedekind (1831-1916) siguieron con interés la labor de Cantor.

---

[5] En notación moderna tal enunciado afirma que la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n}}\left\{10^{n}x\right\}$$

Es continua en todas partes y derivable en ninguna. El término $\{x\}$ denota la distancia de x al entero más próximo. Un caso particular de ésta función es la función valor absoluto. La gráfica de ésta función más complicada tiene un parecido a los dientes de una sierra de cortar, el truco es reemplazar en la fórmula anterior 10^{n} por 2^{n}. En los años 20s del siglo pasado se comprobó que Bernard Bolzano (1781-1848), había sido el primero en dar un ejemplo de una función continua en todo un intervalo pero que no era diferenciable en ninguna parte del intervalo. Hasta entonces se había adjudicado a Weierstrass la prioridad de este resultado, que ahora se demostraba que había sido obtenido por Bolzano 45 años antes.

Sistemáticamente, Leopold Kronecker (1831-1891) rechazó la teoría de conjuntos. El objetivo de Dedekind era la aplicación de la noción de conjunto que él le llamó *sistema* –a la de número. A la aparición de los resultados, inmediatamente se aplican a las cuestiones clásicas del análisis.

Matemáticos como Dedekind se propusieron regresar al rigor de la modalidad euclidiana en una matemática más desarrollada y compleja. Propuso algunos criterios donde era posible tratar nociones tales como las de función, convergencia, continuidad y diferenciación, a fin de independizar el análisis de nociones geométricas, del concepto de movimiento, de los infinitesimales y de consideraciones intuitivas en las demostraciones. Siendo él mismo profesor de la Escuela Politécnica de Zurich, y teniendo que explicar unas lecciones de cálculo diferencial e integral, tomo conciencia del grado de carencia de fundamentos científicos de la Aritmética,

> *Sentí más que nunca la necesidad de un fundamento verdaderamente científico para la aritmética. Al discutir la noción de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo y al probar el teorema que establece que toda magnitud creciente, continua y acotada se aproxima a un límite, he tenido que apelar a la evidencia geométrica*[6]

A principios del siglo pasado (1905) el análisis infinitesimal no discutía sus sendos éxitos en las aplicaciones a la física, lo que se discutía era el libre uso

[6] Dedekind, R: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, *Continuidad y números irracionales,* 1963, p 12.

de las nociones de infinito y continuidad. Esta problemática se consideró resuelta con la aritmetización del análisis, y así la aritmética fue la base de toda la matemática clásica.

En primera instancia, la teoría de conjuntos iba a servir como mecanismo de los principales resultados matemáticos y lógicos de la época partiendo de las ideas básicas como la de existencia de diferentes clases de infinitos, las propiedades del buen orden, los ordinales y los cardinales, y las operaciones con números transfinitos. En segunda instancia para la reflexión sobre los fundamentos de la matemática. Los *fundamentos* son unas presuposiciones últimas –afirmaciones no demostradas y conceptos no definidos –sobre las que se construyen todas las demostraciones y conceptos matemáticos.

No tardaron en aparecer los primeros resultados paradójicos a partir de los principios de Cantor, ahora conocidos como las *paradojas* de *la ingenua teoría de conjuntos*. Vamos a numerar cuatro de ellas. La primera paradoja de naturaleza muy técnica fue planteada en 1887 (dando inicio a la nueva era de las paradojas) por Cesare Burali-Forti (1861-1931). Publicó esta paradoja en una memoria titulada "*Una questioni sui numeri transfiniti*", "*Una cuestión sobre los números transfinitos*", utilizando el formalismo introducido por Giuseppe Peano (1858-1932).

Su publicación provocó algunas discusiones entre los matemáticos, en particular Poincaré presentó en *Ciencia y método* una discusión de esta paradoja, cuya existencia parecía imputar a la lógica simbólica, además de formular algunas exigencias a los que quisieran utilizar correctamente el lenguaje de la lógica. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) también se ocupó de esta contradicción y llegó a la conclusión de que había que rechazar la existencia de una colección de todos los ordinales en un conjunto.

Así la primera paradoja nace en el seno de la teoría cantoriana de conjuntos; es la paradoja del mayor de los ordinales, en palabras dice:

Paradoja de Burali-Forti: *el conjunto de todos los ordinales es también un conjunto ordinal*

En el fondo afirma que el conjunto de todos los ordinales es bien ordenado, por ende el conjunto de todos los ordinales tiene un número ordinal omega Ω.

Enunciada como pregunta, la segunda paradoja de la ingenua teoría de conjuntos que tiene lugar en la teoría de los números cardinales, el propio Cantor la descubrió en 1899.

Paradoja de Cantor: *¿Cuál es el cardinal del conjunto de todos los conjuntos?*

La tercer paradoja, más famosa y más devastadora de todas es la descubierta por Bertrand Russell (1872-1970), enunciada en 1902. Surge al plantearse la *existencia* del conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

Paradoja de Russell: *Si A es el conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos ¿ A pertenece o no pertenece a A ?*[7]

En efecto, Russell descubrió que la noción del *conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos* conducía a una paradoja, aceptada por la teoría de Cantor.

De manera simultanea, estas dos últimas paradojas apelan a diversas nociones de la teoría de los números transfinitos. Como un corolario de la tercera paradoja es la conocida como la *paradoja del mentiroso*, o *paradoja de Epiménides* es en cierto modo la resurrección de viejas paradojas conocidas de los griegos.

Paradoja del mentiroso: *Cuando digo que miento siempre digo la verdad*

Para los matemáticos de s. XIX las paradojas eran el fundamento mismo y la legitimidad del pensamiento matemático lo que se hallaba en el fondo del debate, era indispensable establecer una teoría libre de contradicciones. Ante el

---

[7] Técnicamente las paradojas brevemente se pueden enunciar de la siguiente manera (sin demostración):

Paradoja de Burali-Forti. *Hipótesis*: consideremos el conjunto Ω bien ordenado de todos los números ordinales; sea $\alpha = ord(\Omega)$ el número ordinal Ω (al conjunto Ω le corresponde un número ordinal α). *Conclusión*: $\alpha \in \Omega$ y $\alpha > \mu \in \Omega,$ de donde se concluye Contradicción con el hecho de que $\neg(\alpha < \alpha)$.

Paradoja de Cantor. *Hipótesis*: Sea Θ el conjunto de todos los conjuntos. Es 2^{Θ} un conjunto que en particular es un subconjunto de Θ. *Conclusión*: esto implica que $card 2^{\Theta} \leq card \Theta$ y por el teorema de cantor $card \Theta < card 2^{\Theta}$. Nos lleva a una contradicción.

Paradoja de Russell. Sea $\Psi = \{X | X \notin X\}$ el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de si mismos. Cualquier razonamiento nos lleva a una contradicción.

surgimiento de las paradojas se propusieron en la primera década del s. XX, tres vías de solución independientes: intuicionismo, logicismo y formalismo.

De esta forma, coinciden la teoría de conjuntos que establece los fundamentos y la lógica matemática que garantiza la validez del método deductivo. Las diferentes vías de investigación para ambas pueden agruparse en tres tendencias: intuicionismo, logicismo y formalismo.

Las controversias sobre la teoría de conjuntos y los métodos lógicos abrieron distintas vías de investigación para garantizar la consistencia de los fundamentos buscando la simplicidad, la claridad y la unidad de los mismos. La necesidad de la consistencia era evidente para todos: no se podía construir un sistema de conceptos fundamentales que condujese a contradicciones. La justificación debía ser por persuasión y no por demostración. De esta forma, coinciden la teoría de conjuntos que establece los fundamentos y la lógica matemática que garantiza la validez del método deductivo.

En sus inicios la matemática se ha enfrentado a *tres crisis en sus fundamentos* a lo largo de la historia. La primera está relacionada con el descubrimiento de los números irracionales por los griegos. Los pitagóricos consideran que toda línea estaba formada por un número finito, aunque muy grande, de puntos. Este supuesto implicaba que todas las líneas eran *conmensurables* entre sí, es decir, que tenían una medida en común o sea que se les podía medir mediante números racionales.

Al considerar un cuadrado llegaron a la conclusión de que el cuadrado y su diagonal son *inconmensurables*, en lenguaje moderno se expresa diciendo que

$\sqrt{2}$ es irracional[8]. Era preciso volver sobre los fundamentos matemáticos para establecer una teoría completa, tal como lo iba exigiendo el rigor matemático del s. XIX.

La segunda crisis en los fundamentos es la aparición del cálculo en el s. XVII, con la desconfianza de que fuera ilegítimo manejar infinitesimales, debido al hecho de usar cantidades de manufactura griega, *las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes* que sobrevivieron hasta este siglo. Estas cantidades dan lugar al infinito potencial y puede ilustrarse mediante un ejemplo muy sencillo, la expresión

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

---

[8] Demostraremos que el lado y la diagonal de un cuadrado son, inconmensurables. Si a es el lado y b la diagonal de un cuadrado (hipotenusa), entonces según el teorema de Pitágoras $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, y por tanto $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$ No existe ninguna fracción tal que su cuadrado sea igual a $2.$ Supongamos que si existe, y sean p y q números enteros sin factores comunes y $q \neq 0,$ para los cuales $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$ de aquí se sigue que $p^2 = 2q^2,$ dice que p^2 es divisible por $2.$ En este caso es divisible por $4,$ puesto que es el cuadrado de un número par. Así $p^2 = 4k,$ donde k es entero, $2q^2 = 4k \Rightarrow q^2 = 2k.$ De este modo se sigue que q debe también ser divisible por $2.$ Pero esto contradice la suposición de que p y q no tienen factores comunes. Esta contradicción demuestra que el cociente no puede ser expresado mediante un número racional. La diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. Es la primera demostración por reducción al absurdo de la que se tenga noticia, y de las cuales Brouwer no compartía tales métodos de demostración. Alguna vez leí que ésta demostración fue debida nada menos que a Aristóteles, pero ya no recuerdo ni creo recordar donde lo leí.

Dice que el límite de $\frac{1}{n}$ cuando n tiende al infinito es cero, o el cociente $\frac{1}{n}$ es infinitamente pequeño. O de otro modo, dice que el cociente $\frac{1}{n}$ se aproxima a 0 con cualquier precisión deseada si el entero positivo n se toma suficientemente grande. Este enunciado no plantea lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño, y el símbolo sirve tan sólo como una notación concisa. Esta línea de investigación fue impulsada por Gauss, en una carta a Heinrich Schumaher en 1831 dice:

> *En las matemáticas las magnitudes infinitas nunca pueden tomarse como algo final; el infinito es solamente una manera de hablar (facon de parler), que significa un límite al actual ciertas proporciones pueden aproximarse tan cercanamente como se desee cuando se permite que otras se incrementen indefinidamente*[9]

Frente a una autoridad como la de Gauss, los matemáticos se adhirieron a la tradición de las magnitudes infinitas, tradición que llevó a la eliminación por un periodo de veinte años a la teoría del infinito real.

Los conceptos básicos como los de función eran poco claros y ligados a representaciones geométricas o físicas; el estudio de las series conducía a resultados absurdos por el hecho de no contar con los criterios de convergencia. La tercera crisis fue el hallazgo de las antinomias, como la de Burali-Forti, Cantor y de Russell ya brevemente comentadas.

---

[9] Gauss, carta a Heinrich Schumaher, citado en Kline, 1944, p. 311.

Al mismo tiempo que se confiaba en la firmeza del pensamiento matemático, aparecen ciertas interpretaciones provenientes de la teoría de conjuntos y el tratamiento del infinito dado por Cantor. Esto se debía a la aceptación de ciertas evidencias relativas a la existencia de objetos matemáticos y a los procedimientos lógicos de demostración. Sin embargo, estas evidencias fueron puestas a discusión, pues se le otorgaba una excesiva confianza a la intuición, dando lugar a que la evidencia así tomada no debía ser considerada como criterio inobjetable de verdad; dando lugar a lo que se ha llamado la *crisis en los fundamentos de las matemáticas*.

El término crisis no hay que entenderlo, como si en verdad se tratara de un periodo en que el aparato matemático hubiera estado en una situación dramática o el quehacer matemático se hubiera paralizado en espera de una solución, y así dice Bernays:

> *La verdad es que las ciencias matemáticas están creciendo en completa seguridad y armonía. Las ideas de Dedekind, Poincaré, y Hilbert se han desarrollado sistemáticamente con gran éxito, sin ningún conflicto en los resultados*[10]

---

[10] Benacerraf, P y Putnam, H: *Philosophy of mathematics* en *On platonism in mathematics*, Bernays, P, Cambridge University Press, 1983, p 258. *"The truth is that the mathematical sciences are growing in complete security and harmony. The ideas of Dedekind, Poincaré, and Hilbert have been systematically developed with great success, without any conflict in the results".*

La fundamentación del número real fue llevada en dos direcciones, por Dedekind y Cantor; respectivamente como en seguida veremos con mayor detalle.

Capítulo 2

Teoría de conjuntos

El acta de nacimiento de la teoría de conjuntos data de 1873 cuando Cantor probó la no contabilidad de la línea real; es decir, de un análisis de sub-colecciones (subconjuntos) de la línea real usando el aparato matemático conocido como *topología*, y de ciertas conclusiones hechas por él mismo al reflexionar en unos detalles de las series trigonométricas de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)[11].

Heinrich Eduard Heine (1821-1881) trabajaba en la teoría de series trigonométricas cuando animó a Cantor a atacar el difícil problema de la

[11] Brevemente se puede decir que la *topología* es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas.

unicidad de las series[12]. Un testimonio de esto son los escritos de Cantor donde le informa a Dedekind de sus descubrimientos. Cantor estuvo principalmente interesado en la teoría de funciones de una sola variable real, en ésta teoría el problema era distinguir un número finito o infinito pero continuo de los puntos *excepcionales* o puntos de discontinuidad (no continuos) (el punto $\frac{1}{2}$ en rojo es un punto excepcional), tal como las series de Fourier.

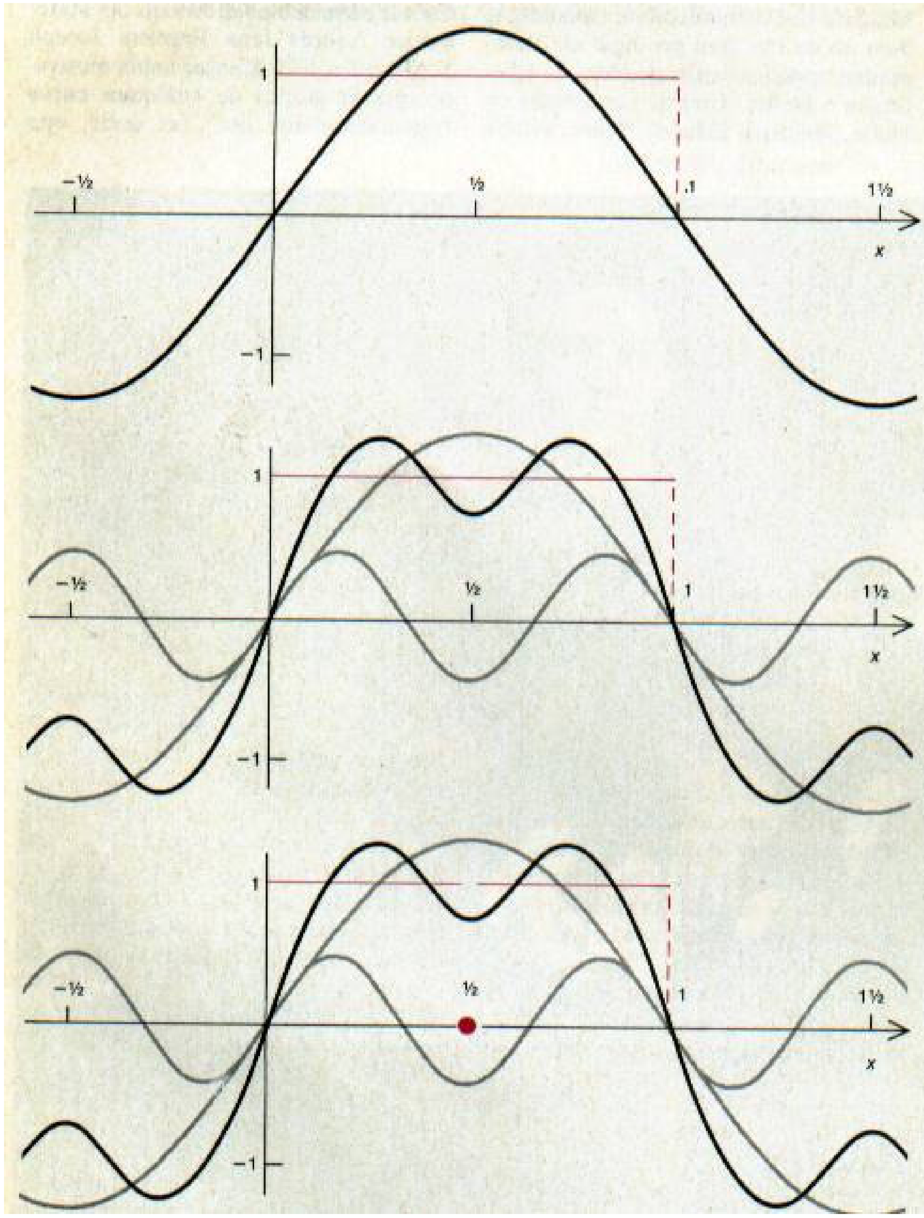
[12] En notación moderna las series trigonométricas de Fourier dicen que cualquier función $f(x)$, que es continua a trozos y con derivadas de primero y segundo orden continuas a trozos, puede representarse mediante una serie infinita,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sennx),$$

Con coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sennxdx.$$

En palabras dice que cualquier curva en forma de onda (después de realizada la aproximación que es a donde converge la función) puede representarse en todo un intervalo como suma de una serie trigonométrica infinita.



En diferentes áreas de la ciencia (física, matemáticas, astronomía) y filosofía (aristotélica y cartesiana) se ha utilizado y se sigue utilizando el concepto de infinito; sin embargo, el infinito en filosofía y el infinito en ciencia *son diferentes*. Por ejemplo, la teoría de conjuntos es la ciencia matemática del infinito inmune al espacio y tiempo. En tanto que en física la noción de infinito no se le puede asignar ningún significado, más que en la mente; es decir, el infinito no se encuentra en la naturaleza, y así Hilbert concluye en *Sobre el infinito*:

> *Nuestro resultado principal es que el infinito no será encontrado en ninguna parte de la realidad. Ni existe en la naturaleza ni mantiene una base legítima el pensamiento racional –una armonía notable entre existir y pensar*[13]

Así pues, el infinito no corresponde a nada en la naturaleza según el mismo Hilbert; sin embargo, hace un intento por esclarecer la noción de infinito. Él no ve una razón para eliminar el infinito, pues éste desempeña un papel fundamental. No obstante, ve al infinito como un instrumento esencial de la razón:

> *El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de razón que supera toda experiencia y por medio de la cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad*[14]

---

[13] Op cit, en *On the infinite*, Hilbert D, p. 201.*"Our principal result is that the infinite is nowhere to be found in reality. It neither exists in nature nor provides a legitimate basis for rational thought –a remarkable harmony between being and thought"*.

[14] Op, cit, p. 201.*"The role that remains for the infinite to play is solely that of an idea, if one means by an idea, in Kant's terminology, a concept of reason which transcends all experience and which completes the concrete as a totality"*.

Hilbert, en este sentido, no pretende probar la existencia del infinito real, sino solamente de restringirlo a un objeto del pensamiento mediante una prueba de consistencia. El único medio para completar el infinito es por medio de la matemática.

Por otra parte en física se habla de potencial infinito como en la teoría electromagnética, verbigracia, cuando una carga de prueba q_0 se mueve, *sin aceleración*, desde un punto de referencia A hasta un punto B; el punto A viene desde el "infinito", donde se considera que el potencial ahí toma el valor cero, sin estar la carga de prueba "realmente" en el infinito; una vez conseguido esto se llega a la diferencia de potencial verdadero[15], y de aquí se deduce que la electricidad posee cierta estructura discreta.

La noción de que la materia puede dividirse indefinidamente, a fines de s. XIX y principios del XX la física perfeccionó sus métodos de investigación y se encontraron los límites a la divisibilidad de la materia, y súbitamente desaparece la noción de lo infinitamente pequeño, se descubren los átomos, electrones, protones y neutrones; hasta llegar a los últimos constituyentes de la materia: los Quarks.

Finalmente, el concepto de lejanía física que se relaciona inmediatamente con el infinito físico, se representa en la mente que el universo es infinitamente grande. Aún existen gentes que tienen la creencia de que las estrellas fijas están en el infinito; o más aún, que el universo es infinito. Sólo a la aparición de

---

[15] La deducción es un poco larga y solo ponemos el resultado $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathbf{r}}$.

nuevas geometrías y el surgimiento de la teoría de la relatividad han demostrado que el mundo físico es finito en masa y volumen[16].

El infinito al que se refiere la teoría de conjuntos es expresado a través de las nociones referentes al número natural, *número cardinal* y *número ordinal*, el paso de lo finito a lo infinito. El número cardinal es la noción más fundamental en la teoría de conjuntos. La primera noción es la que sirve para contar, para dar respuesta a la pregunta ¿cuántos? La segunda responde a la necesidad de ordenar una serie de entes, sirve para dar respuesta a la pregunta ¿quién está antes?; estas dos nociones para los números finitos vienen expresados por el mismo número, al pasar al infinito se produce una divergencia conceptual.

La cardinalidad de un conjunto se define en terminología moderna de la siguiente manera:

1. Sean $\phi \neq A \,\&\, B$ conjuntos no vacíos. Si estos conjuntos son vacíos se cae en una trivialidad
2. Decimos que dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad si existe alguna función biyectiva (es decir, función inyectiva y sobreyectiva) $f : A \to B$.Notación introducida por Dedekind

---

[16] El radio del universo es $R = c\left(\frac{3}{8\pi G\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, donde G es la constante gravitacional y ρ la densidad media del universo, este valor nos dice que el radio del universo tiene un rango que va de los 10^9 a los 10^{11} años luz. La masa del universo es $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

En tanto que los números ordinales quedan definidos por el orden o posición que ocupan en una lista. Por ejemplo, cualquier conjunto formado por diez elementos puede en cierto sentido considerarse como sucesor inmediato de cualquier conjunto formado por nueve elementos. Es decir, el ordinal del conjunto es también diez. *Para conjuntos infinitos es necesario distinguir su número cardinal de su número ordinal*. Y así, Cantor descubrió que es posible dar un criterio para distinguir los conjuntos finitos de los infinitos[17]. Es de interés histórico que los primeros números transfinitos que Cantor introdujo no fueron los cardinales sino los ordinales.

Dedekind fundamenta el número real en las llamadas *cortaduras de Dedekind* son unos conjuntos de números racionales que representan la primera construcción "formal" del conjunto de los números reales. Para construirlas se identifica a los números reales con los puntos de la recta y un principio de continuidad. Con su aparición se cierra el problema histórico de la fundamentación del análisis matemático.

> *Si los puntos de la línea recta se dividen en dos clases de modo que todo punto de la primera clase se halle a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta división de los dos puntos en dos clases, esta separación da la línea recta en dos porciones*[18]

---

[17] En notación moderna podemos decir que un conjunto A es *infinito* si es equivalente a uno de sus subconjuntos propios. En caso contrario el conjunto es *finito*. O también, un conjunto es finito solamente si su número cardinal y su número ordinal son iguales.

[18] Dedekind, 1963, p. 11.

En términos modernos las cortaduras son como sigue:

1. Un par de conjuntos distinto del vacío $(L, \mathbf{R}) \neq \phi$
2. $\phi \neq L \& \mathbf{R}$, conjuntos de números racionales diferentes del vacío
3. Si $a \in L$ es menor que cualquier elemento $b \in \mathbf{R}$ entonces $L \cap \mathbf{R} \neq \phi$
4. L no tiene elemento mayor
5. $L \cup \mathbf{R} = \mathbf{Q}$, conjunto de los números racionales[19]

En Dedekind, el infinito actual tiene su senda aparición en los números irracionales, él parte de la base de identificar los números racionales con los puntos de la recta y el principio de continuidad anterior.

Un *número real* no es otra cosa que una cortadura, de este modo se logra la identificación de los puntos de la recta con los números reales; es decir, el conjunto de todas las cortaduras es el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales. A partir de aquí se puede construir toda un álgebra de números racionales recurriendo a clases infinitas de ellos, y se manipulan como si fueran clases finitas, con las cortaduras se pueden realizar operaciones como la suma y el producto.

Cantor consideraba axiomático que cada punto de una recta continua le correspondía un número, llamado *real* para distinguirlo de los números imaginarios. Recíprocamente, a cada número real le correspondía un punto y exactamente un punto de una recta continua. Entonces, el problema de describir el continuo de puntos de una recta era equivalente al problema de definir las propiedades del sistema de los números reales.

[19] Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Cortaduras de Dedekind".

Capítulo 3

La hipótesis del continuo

Con Cantor da principio el desarrollo de la "aritmetización de los números transfinitos" asignándole él mismo un contenido matemático al concepto de infinito actual. No obstante, se negaba a aceptar la existencia de números transfinitos, convencido como estaba que era imposible formular racionalmente la noción de infinito actual, no teniendo lugar en la matemática pura.

En 1874 Cantor le propuso a Dedekind el siguiente problema:

> *¿Será posible poner en correspondencia una superficie (quizás un cuadrado, incluso un contorno) con una línea recta (tal vez un intervalo abierto) de manera que cada punto de la superficie le correspondiera un único punto de la recta, y recíprocamente?*[20]

Aunque Cantor opinaba que la respuesta debiera ser negativa, no conseguía, ni tampoco Dedekind, dar razón para tal creencia.

No obstante, hacia 1877 Cantor pudo enviar a Dedekind la estupenda noticia de que, contrario a la opinión matemática prevaleciente, *sí era posible establecer una correspondencia biunívoca entre recta y plano*. Es decir, toda superficie continua tiene la misma cardinalidad que el intervalo $(0,1)$ y por tanto que el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$. Tal resultado tomó desprevenido al propio Cantor, tanto que le hizo exclamar "¡Lo veo, pero no lo creo!"[21]. La

[20] Citado en Dauben, 1979, p. 54.

[21] Citado en Douben, 1979, p. 55.

demostración consiste en representar cada punto de un cuadrado por un par ordenado de coordenadas en notación decimal. Las representaciones decimales de las coordenadas se entremezclan conforme a un procedimiento estrictamente especificado, a fin de generar un único desarrollo decimal; este decimal es asociado con un punto del segmento rectilíneo.

En notación moderna la demostración es como sigue:

1. Se define el *producto cartesiano* unitario $\mathbf{1} = (0,1) \times (0,1) \neq \phi$ distinto del vació –está noción no es considerada por Dedekind, fue Cantor quien la introdujo –de dos conjuntos, en particular iguales
2. Sea $P(x, \mathrm{y}) \in \mathbf{1}$; es decir, un punto que pertenece al producto cartesiano unitario, y el par tiene coordenadas
3. $x = 0.c_1c_2c_3 \ldots c_k \ldots$ $y = 0.d_1d_2d_3 \ldots d_k \ldots$ cada c_i y d_j es alguno de los dígitos $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ y se descartan las terminaciones infinitas de nueves
4. Intercalando los dígitos anteriores se tiene $z = 0.c_1d_1c_2d_2c_3d_3 \ldots c_kd_k \ldots$ Cada pareja en el cuadrado unitario le corresponde de manera unívoca un número z perteneciente al intervalo unitario abierto. Esta demostración prueba que el producto cartesiano unitario es equivalente a un subconjunto propio del intervalo abierto unitario

Tanto el cuadrado unitario como el intervalo cerrado ¡son conjuntos infinitos! Como una generalización al hecho de que la recta real es tan grande como un intervalo unidad; derrumbándose la máxima "*el todo es mayor que la parte*". Cantor no encontró una demostración que pudiera probar que existen conjuntos infinitos de otros tamaños, sólo sabía que el conjunto más grande es el conjunto de los números reales.

Nos gustaría exhibir en qué consiste realmente la hipótesis del continuo y después enunciar las preguntas clásicas referentes a esta conjetura.

1. Se escriben primero los números ordinales finitos de tamaños crecientes $0, 1, 2, 3, \ldots$
2. El primer ordinal transfinito ω y por adición repetida de unidades, se generan nuevos ordinales transfinitos $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$
3. $ord(\{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\}) = \omega 2.$
4. A continuación $\omega 2+1, \omega 2+2, \omega 2+3, \ldots$
5. El número transfinito que sigue es $\omega 3.$
6. En seguida $\omega 3+1, \omega 3+2, \ldots, \omega 4, \ldots, \omega 5, \ldots, \ldots, \omega\omega = \omega^2$
7. $\omega^2+1, \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \ldots, \omega^2+\omega 2, \ldots, \ldots, \omega^2+\omega^2 = \omega^2 2$
8. $\omega^2 3, \omega^2 4, \ldots, \omega^2\omega = \omega^3$
9. $\omega^3+1, \ldots, \omega^4, \ldots, \omega^5, \ldots, \ldots, \omega^\omega$
10. Finalmente $(\omega^\omega)^\omega, \left((\omega^\omega)^\omega\right)^\omega, \ldots, \ldots$

Estos son los primeros números transfinitos, que Cantor los llamó *números de la segunda clase*. Esta segunda clase es estrictamente mayor que la potencia asociada con cualquiera de los conjuntos ordinales transfinitos que la componen. La segunda clase no es un conjunto numerable. No obstante, aunque jamás logró demostrarlo, él estaba convencido que el número cardinal de esta segunda clase numérica era equivalente a la cardinalidad del continuo de los números reales.

El término transfinito se entiende como trascender el infinito o más precisamente "más allá del infinito". Cada conjunto infinito representado por los ordinales transfinitos de la lista anterior tienen el mismo cardinal $\aleph_0$, "Álef cero" (un número inaccesible), número cardinal de los números naturales de la primera clase numérica infinita; el número cardinal de la segunda clase se designó $\aleph_1$.[22]

Es decir, *cualquiera de estos conjuntos está formado por igual número de elementos*. Tal conjetura es llamada hipótesis del continuo; y jamás ha sido demostrada ni refutada. Se trata de averiguar en esta conjetura si *existe* o no un cardinal que sea estrictamente mayor que el de los conjuntos numerables y

[22] **Álef** $\aleph$: Es una función ordinal, que a cada ordinal asigna otro ordinal, que es un cardinal infinito. La serie de los álefs abarca todos los cardinales infinitos. La cardinalidad de un conjunto infinito siempre es un álef, $\aleph_\alpha$, para algún ordinal α. La función $\aleph(\alpha) = \aleph_\alpha$ puede definirse por recursión transfinita sobre los ordinales. 1. $\aleph_0 = \omega$ 2. $\aleph_{\alpha+1} =$ el mínimo γ tal que $\aleph_\alpha < \gamma$ 3. $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$ Torretti R: Diccionario *de lógica y filosofía de la ciencia*, Alianza diccionarios, Alianza editores, 2002.

estrictamente menor que el de los números reales[23]. Finalmente, en 1891 Cantor demostró el siguiente enunciado y un corolario:

> ***Teorema 1.*** (De Cantor): *el número cardinal de cualquier conjunto es siempre menor que el número cardinal del conjunto formado por todos sus subconjuntos.* $card(A) < card(P(A))$. Abre la posibilidad a que existan cardinales transfinitos mayores que $\aleph_1$. *Y se puede reformular diciendo que:*
>
> ***Teorema 1'.*** $\forall n \geq 0 : card(A) = \aleph_n \rightarrow card(P(A)) = \aleph_{n+1}$.
>
> **Corolario**: *el número cardinal del continuo* c *es igual al número cardinal* $2^{\aleph_0}$.
>
> ***Teorema 2.*** *La hipótesis del continuo viene a decir que no existe ningún conjunto* A *tal que* $\aleph_0 < card(A) < c$.[24]

En 1963, Paul J. Cohen, demostró la indecidibilidad de dicha cuestión o, lo que es lo mismo, a la aceptación de la no existencia de dicho cardinal o de su existencia no conduce a ninguna contradicción dentro del marco de la teoría de conjuntos. Es decir, la hipótesis del continuo es coherente con los axiomas de la teoría de conjuntos y también independiente de ellos.

Así, la hipótesis del continuo desempeña en teoría de conjuntos un papel análogo al que en geometría tiene el postulado euclidiano de las paralelas. Es posible construir diferentes versiones de la teoría de conjuntos según que la hipótesis del continuo se suponga verdadera o falsa, lo mismo que pueden construirse geometrías euclidianas o no euclidianas, como las geometrías hiperbólica de Nikolai Ivanovich Lobachevskiy (1792-1856) y la elíptica de

---

[23] Los conjuntos que tienen el mismo cardinal que el de los números naturales se llaman *numerables*.

[24] Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Hipóteis del continuo"

Bernard Riemann (1826-1866), según se admita que se cumple el postulado de las paralelas.

Finalmente, si se nos permite, sea el siguiente ejemplo utópico: supongamos que existe una persona con una educación media que conoce los números, puede hacer las operaciones elementales de ellos, distingue cuándo un número es mayor que otro, sabe contarlos de la manera usual $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ La sucesión de números le parecen como indefinidamente prolongables, y con ello le llega a la mente la noción intuitiva de infinito.

Naturalmente en su experiencia cotidianidad donde sólo puede percibir conceptos básicos como los enteros positivos, se da cuenta de la imposibilidad de llegar por el proceso de añadir una unidad tras otra, tan lejos como él quiera en la sucesión de números, al infinito: ¿Quién podría alcanzar el googol? (Un número natural, 1 (uno) seguido de cien ceros 10^{100}.) ¿Este número es accesible o inaccesible? ¿Cuál es el último número accesible? ¿Dónde empieza el primer número inaccesible? Y ¿Cuándo se llega al último número inaccesible? Si es posible llegar al último número inaccesible ¿Cómo se llega al infinito? Y después de esto dar el salto a los números transfinitos –más allá del infinito. De manera la teoría Cantoriana le parece completamente alejada de la intuición. Estas preguntas trataremos de visualizarlas hasta un capitulo posterior, según el enfoque intuicionista.

Si se le pregunta por su edad a esta persona, y contesta 150 años, desde el punto de vista numérico ¿porqué nos causa sorpresa su edad?, si 150 es un número finito y pequeño; análogamente si súbitamente llegara a tener en sus bolsillos la cantidad en dinero de, por ejemplo, $\$100,000,000\,000$ de pesos en moneda nacional, se le considera multimillonario; sin embargo, apenas es un número pequeño y finito en comparación con la mitad de un googol. En un evento de football ¿porqué se dice que el equipo A goleo al equipo B cuando sólo el equipo A anoto 5 goles al equipo B, y B no anoto ningún gol? Nuevamente 5 es un número finito y pequeño. Así, estas nociones nos llevan a un tipo de intuicionismo. Este ejemplo es estrictamente aritmético.

Capítulo 4

Axioma de elección

En los años de 1874-1897 el propósito de Cantor fue proporcionar un método para discutir asuntos relacionados con el infinito actual, un concepto que fue eludido y rechazado por algunos matemáticos, principalmente por Kronecker, por considerarlo sin significado. Ciertamente Cantor tuvo éxito, si bien su teoría debía ser precisada y sometida a un sistema axiomático.

Poco después alrededor del año 1990 existían preguntas sin respuesta y eran en lo referente a la hipótesis del continuo y el teorema del buen orden en teoría de conjuntos. Fue el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953), quien demostró dos teoremas para salir del embrollo que ocasionaban estas preguntas. Dichos teoremas son: el *teorema de la tricotomía*, $\forall x \in \mathbf{R}\,(n < 0, \mathrm{n} = 0, \mathrm{n} > 0)$ que establece que todos los números cardinales son comparables entre sí, y el *teorema del buen orden*, que establece que todo conjunto puede ser bien ordenado. Ambos teoremas fueron probados en 1904.

El teorema del buen orden Zermelo lo presentó con el nombre de *axioma de elección* y una vez aceptado fue de inmediato motivo de apasionadas polémicas que, de algún modo, perfilaron el discurso referente al fundamento de la matemática. El axioma dice lo siguiente:

> *Para cualquier colección de conjuntos no vacíos siempre existe un mapeo que a cada uno de dichos conjuntos le asocia uno de sus elementos*[25]

El punto polémico consiste en que el axioma de elección tiene un carácter puramente existencial, es un axioma no constructivo, en el sentido que no determina un conjunto único a partir de su formación; no hay ninguna indicación sobre cómo construir o formar el nuevo conjunto, lo que para los intuicionistas no es admitido en el dominio de los conjuntos infinitos. Cualquier prueba que requiere el axioma de elección es considerada como no constructiva, como el afirmar la existencia de una función elegida o conjunto sin describir que es él.

---

[25] Cf. Zermelo, 1904, en Heijenoort, p. 141. En notación moderna es: Sea $\phi \neq \{A_i\}_{i\in I}$ una familia (colección) no vacía de conjuntos no vacíos, con $i \in I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ conjunto de índices. Y sea $\phi \neq \prod_{i\in I} A_i$ el producto cartesiano no vació de la colección; entonces existe un mapeo $f : \{A_i\}_{i\in I} \to \prod_{i\in I} A_i$ definido como $f(A_i) = a_i \in A_i$.

Este axioma no es evidente en relación a los conjuntos infinitos, pero sí respecto a los conjuntos finitos de tal manera que a principios del siglo diecinueve se reconoce la validez del axioma en los conjuntos finitos; pero en el dominio de los conjuntos infinitos produjo interminables polémicas.

Aquí damos por finalizado lo relativo a los fundamentos en matemáticas, brevemente se puede decir que la razón de contener este capítulo es el hecho de que Brouwer arremetió contra los infinitos en particular contra la hipótesis del continuo y toda la tradición de la matemática clásica.

Conclusión

En primera instancia el intuicionismo matemático es una rama de los fundamentos de matemáticas y estas a su vez son ramas de la filosofía matemática. El intuicionismo matemático tiene su cuna en una intuición básica mental o basal relativa a los números naturales, intuición que todos los humanos la podemos adquirir puesto que estos números son intuitivamente evidentes.

Por ejemplo, cualquier niño de escuela elemental le es evidente la existencia de los números naturales, quizás al hecho de que ellos son los primeros números que se le enseñan, ¿qué pasaría si se le enseñaran primero los números complejos? ¿Le serían evidentes? Si este fuera el caso entonces los números naturales ya no le serían intuitivamente evidentes. Sería magnifico saber que opina un matemático puro acerca de estas preguntas. ¿Son triviales de contestar?

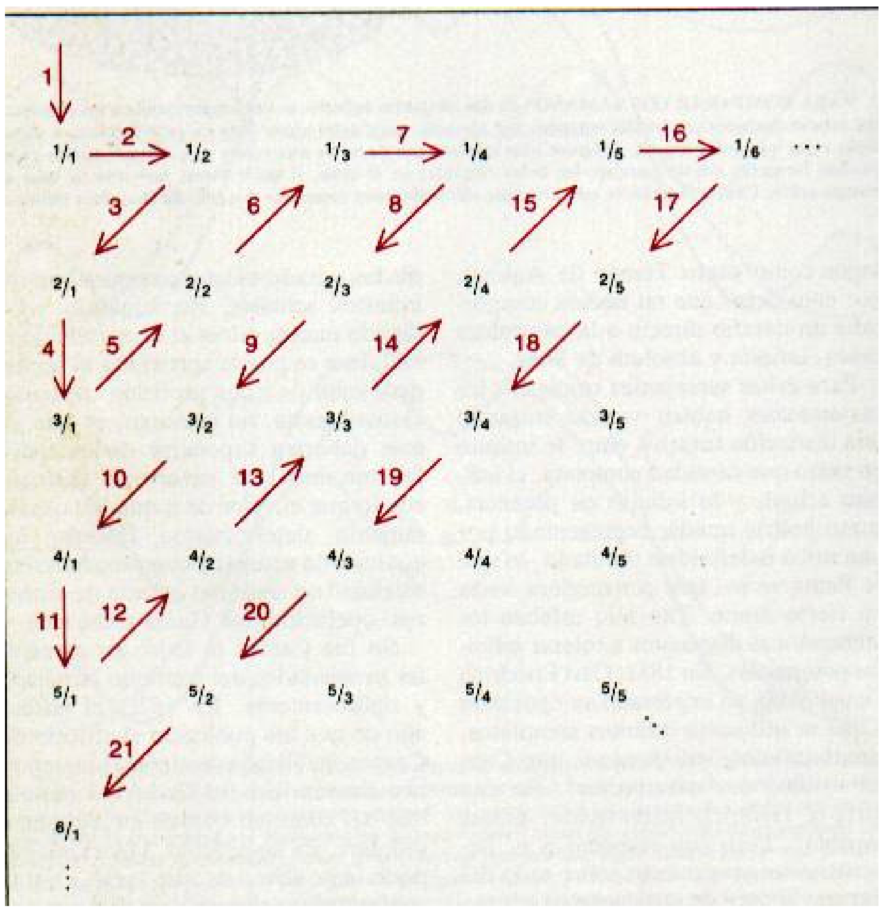
Si a este mismo niño se le pide que haga una construcción matemática mental de los números naturales; en efecto, la puede realizar, acepta el hecho que puede prolongarla indefinidamente, pero intuye que él mismo es un ser finito y que nunca podrá completar una construcción infinita, asimismo intuye que tampoco podrá llegar al primer número transfinito; solamente puede completar grandes partes iniciales arbitrarias finitas de ella; es decir, llegar a un número suficientemente grande como posiblemente a una dieciseisava parte de un googol, no obstante el niño no es matemático. Esta intuición no es exclusiva de los matemáticos.

Podríamos afirmar sin temor a equivocación que el niño es intuicionista, porque sin darse cuenta rechaza grandes extensiones numéricas como la existencia del infinito actual, él acepta solamente colecciones potencialmente infinitas, como llegar a los números accesibles.

Cuando él empieza a contar desde el principio número por número invierte un tiempo finito, sin embargo, si le decimos represéntate en la mente el número 10000 lo hace instantáneamente, entonces ¿qué paso con el tiempo? Antes de la representación de éste número ya esta implícitamente en su mente la suma término por término de la serie de los números naturales y por tanto el tiempo (postura kantiana) que adquiere para llegar al número anterior.

Tiempo después el niño se ha convertido en un adulto que ha adquirido un conocimiento matemático estándar de mayor nivel, pero sigue siendo intuicionista, y le proponemos que considere el conjunto de los números racionales; él y nosotros sabemos que entre los números 0 y 1 existe una cantidad infinita de números racionales de la forma $\frac{p}{q}, q \neq 0, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z},$ como el cociente de dos números enteros.

Podemos preguntarle ¿Cómo es posible que lleguemos por un proceso de conteo de 0 hasta 1? Y más aún ¿Cómo se llega a 2? Y así sucesivamente. Él responde que en la matemática clásica *existe* un algoritmo en el que los números racionales se ponen en correspondencia biyectiva con los números naturales. Sin embargo, esta correspondencia dice él, no aclara que el conjunto de los números racionales sea infinito; porque no esta completada la construcción; es decir, no se enlistan todos sus elementos (remitámonos a la grafica que muestra los puntos suspensivos). Ambos concluimos que no es una demostración constructiva y efectiva; es decir, esta demostración cantoriana no satisface el enfoque intuicionista, *evidencia intuitiva*. Las construcciones de los reales (en particular los naturales son reales) desde los racionales, el método de las sucesiones de Cauchy y las cortaduras de Dedekind apelan a conceptos que son intuicionisticamente indefinibles.



Esta ilustración es una "construcción" cantoriana que prueba que los números racionales son *numerables*, a cualquier número racional se le asigna un número entero conforme se va recorriendo la trayectoria señalada con flechas rojas. Entonces nuestro intuicionista concluye que esta demostración ni a los propios matemáticos clásicos les satisface; aunque digan todo lo contrario, siguen teniendo dudas acerca de la manera de realizar esta demostración. En intuicionismo un objeto es un objeto matemático sólo si puede construirse a partir de los enteros usando exclusivamente métodos finitistas. No existe ninguna explicación intuicionisticamente satisfactoria de los números reales.

Finalmente joven intuicionista qué piensas acerca de los números trascendentales: tengo por respuesta que no existe ningún método finitista que pueda construir un número trascendental. No podemos adquirir un conocimiento empírico del número trascendental π. La observación empírica no puede darnos el conocimiento empírico del valor exacto de π. No podemos evaluar π empíricamente. ¿Existe π como un objeto matemático (no esta terminado)?

En segunda instancia en fundamentos existen el logicismo y el formalismo ambas en franca oposición al intuicionismo. Tres escuelas ontológico-filosóficas que intentaron dar una firme fundamentación a la matemática. La esencia del intuicionismo se basa en que *las matemáticas son una actividad constructiva mental humana*; esta es la parte filosófica fundamental del intuicionismo. Así, por ejemplo, el intuicionismo matemático fue la respuesta de Brouwer en particular al logicismo y a las paradojas, y en general al formalismo.

Las primeras tesis fundamentales del intuicionismo son: 1) los objetos matemáticos tales como los números naturales se construyen directamente en la intuición pura, son anteriores al lenguaje y a la lógica; 2) las leyes de los objetos matemáticos se derivan de su construcción, no de la lógica y 3) en matemáticas no se deben admitir teorías más allá de la intuición.

El punto tres es crucial, pues confirma que no podemos ir más allá de los números naturales donde la intuición tampoco puede ir; digan lo que digan logicistas y formalistas no podemos intuir el primer número transfinito $\aleph_0$. Este número ni se deduce lógicamente ni se postula como sostienen logicismo y formalismo respectivamente; más bien dice el intuicionismo se construye de inmediato en la mente del matemático y la verdad de sus enunciados se basa en la *evidencia intuitiva*. De aquí que el intuicionismo considera la matemática como una libre creación humana y la única limitación es la posibilidad de su construcción.

El intuicionismo dictamina que toda definición, teorema y demostración son completamente constructivas, deben indicar la manera en que los objetos definidos se pueden obtener de manera efectiva (o constructiva). En el fondo el intuicionismo pide una *construcción mental*, que no puede explicarse a través de conceptos que le sean más simples, pues no es parte de la matemática, sino que se desarrolla en la esfera filosófica. La matemática intuicionista es la ciencia de construcciones mentales intuitivamente convincentes.

El debate o controversia con Hilbert da inicio con el *principio del tercero excluido* en relación a totalidades infinitas. Brouwer no acepta que la lógica clásica sea suficiente para formalizar el razonamiento matemático, ni siquiera acepta que sea necesaria, y desde su punto de vista algunos principios lógicos al dominio de los conjuntos infinitos es ilegitima citando para ello la aparición de las antinomias. Si las antinomias han surgido es porque se siguen aplicando las reglas de la lógica clásica a los conjuntos infinitos, siendo que éstas nacieron de la matemática de conjuntos finitos.

El rechazo del principio del tercero excluido implica a su vez el rechazo de la ley de doble negación y ninguno de estos principios es deducible en el sistema intuicionista. En efecto, la lógica proposicional intuicionista se describe como lógica proposicional clásica sin el principio aristotélico del tercero excluido.

Brouwer también relaciona el origen de las antinomias con los principios de la teoría cantoriana de conjuntos, por lo que la rechaza por completo. En esta teoría según él se alude a nociones que no se pueden construir en la intuición, como es el caso del infinito actual.

Brouwer considera que una de las causas de la aparición de antinomias en la teoría de conjuntos es el mal uso de algunos principios lógicos. La matemática clásica le concede validez a los principios de la lógica y en algunos casos se apoya en ellos, como resultado a esta postura se encuentra el intuicionismo de Brouwer.

Brouwer afirma que los principios lógicos no son confiables, la matemática no debe confiar en ellos, no existen principios lógicos a priori; es la intuición no la experiencia la que determina la validez de las ideas. Brouwer rechaza el principio del tercero excluido porque supone una lectura distinta de la negación. Absurdidad de absurdidad no es necesariamente equivalente a no absurdidad, $\neg(\neg S)\neg \equiv S$. En la primera parte de esta fórmula se tiene que es absurdo que sea absurdo que S, lo cual no significa que S, pues esta última afirmación debería estar respaldada por una contradicción.

También es rechazado este principio por Brouwer porque suponerlo equivale a sostener que todo problema matemático es soluble, lo cual le parece inadmisible. En cambio en Hilbert todo problema matemático es resoluble, reorganizando con ello un anhelo epistemológico: el de la inexistencia de límites para la razón humana.

Brouwer también rechaza la demostración por *reducción al absurdo*, que es un caso particular del principio del tercero excluido; cuando se trata de probar la existencia de un objeto matemático en relación a una totalidad infinita. El intuicionismo no permite usar pruebas indirectas para conjuntos infinitos.

El método de reducción al absurdo consiste en suponer como hipótesis la negación de lo que se quiere demostrar y deducir de ella una contradicción, es decir, una proposición de la forma $S \wedge \neg S$. Como las infinidades y conjuntos no contables no son objetos matemáticos, nos sentimos en la necesidad de rechazar el principio del medio excluido.

Brouwer sostiene que la demostración por reducción al absurdo es solamente un ejemplo de razonamiento lógico más no matemático, esta prueba es un modo falaz de razonar. Así, si por ejemplo para demostrar S y suponiendo $\neg S$ y se llega a una contradicción no quiere decir que se ha demostrado S. Entonces según lo que se ha encontrado es una refutación de $\neg S$, ha sido posible demostrar $\neg(\neg S)$, pero de ahí no se infiere S. La reducción al absurdo lo que produce es una contradicción, no un nuevo objeto matemático, y esto en nada se parece a una construcción. No obstante Brouwer si acepta la reducción al absurdo sólo y solamente para demostrar la no existencia de un objeto matemático.

Brouwer se interesó en los fundamentos de las matemáticas; pero a diferencia de los estudios sobre fundamentos en matemáticas de Frege, que pretende suministrar una definición de los conceptos matemáticos en términos de conceptos lógicos, su tesis es que las matemáticas no tienen ningún fundamento fuera de la matemática misma.

Por otra parte para Hilbert el método de demostración por reducción al absurdo es de vital importancia, no es posible excomulgarlo del reino de la matemática, quitar este principio según él sería como prohibir al astrónomo usar su telescopio o al boxeador usar sus puños.

Esta es una tesina sobre los problemas en fundamentos de matemáticas y sus implicaciones filosóficas. Es un intento por esclarecer que la matemática no se fundamenta principalmente en ningún tipo de lógica, la matemática no contiene lógica; más bien su fundamento es la evidencia intuitiva. Quizás la lógica que la matemática utilice sea una lógica propia de ella, pero distinta a la lógica clásica; y posiblemente tampoco sea la lógica intuicionista. Que sea posible probar teoremas matemáticos con herramienta lógica no implica que la matemática tenga contenido lógico. Mostrar esto rigurosamente requiere de un estudio mucho más profundo, de expertos en el tema. Nosotros ya no tenemos tiempo para esto, se puede decir que es un trabajo para una tesis doctoral.

Bibliografía:

FUENTE PRIMARIA

Alexander, G y Velleman, J, D: *Philosophy of mathematics*, Blackwell publishers, 2002.

Benacerraf, P y Putnam, H: *Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, 1983.

Beeson, M: *Foundations of constructive mathematics*, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

Bishop, E: *Foundations of constructive analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967.

-----------: *Schizophrenia in contemporary mathematics, Amer. Math. Soc. Colloquium lectures*, Missoula: University of Montana, reprinted in Bishop, E: *Reflections on him and his research*, Amer. Math. Soc. Memoirs 39, 1973.

Bridges, D: *Constructive truth in practice*, in *truth in mathematics*, Dales H, y Oliveri G (editores), Oxford: Clarendon Press, 1998.

-------------, Reeves, S: *Constructive mathematics, in theory and programming practice*, Philosophia Mathematica, 7/1, 1999.

-------------, Richman, F: *Varieties of constructive mathematics*, London Math, Soc, Lecture Notes 97. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

Brouwer, L. E. J: *Collected Works 1. Philosophy and foundations of mathematics*, editado por Heyting, Amsterdam, North-Holland, 1975.

----------------------: *Collected Works 2. Geometry, analysis, topology and mechanics*, editado por Fraundental H, Amsterdam, North-Holland, 1976.

----------------------: *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*, editado por van Dalen D, Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Dummett, M: *Elements of intuitionism*, Clarendon Press-Oxford, 1977.

Heyting, A: *Intuitionism, an introduction*, North-Holland, 1971.

Kushner, B: *Lectures on constructive mathematical analysis*, Providence RI: Amer, Math Soc, 1985.

Martin-Löf P: *Notes on constructive analysis*, Almquist & Wixsell, Stockholm, 1968.

----------------: *An intuitionistic theory of types: predicative part*, en *Logic colloquium 1973*, editores Rose H, E, y Shepherdson, North-Holland, 1975.

Troelstra, A, S: *Aspects of constructive mathematics*, en *Handbook of mathematical logic*, Barwise, J, editor, Amsterdam, North-Holland, 1978.

------------------,van Dalen D: *Constructivity in mathematics: An introduction*, 2 volumenes, Amsterdam, North-Holland, 1988.

Walter P. van Stigt: *Brouwer's intuitionism, studies in history and philosophy of mathematics*, North-Holland 1990, Volume 2.

FUENTE SECUNDARIA

Cohen, P: *Comments on the foundations of set theory*, en *Axiomatic set theory*, editor Scott D, Volumen XIII, parte 1, American mathematical society, 1971.

Colyvan, M: *The indispensability of mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2001.

Curry, H: *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, Amsterdam, North-Holland, 1958.

Dragalin, A. G: *Mathematical intuitionism, introduction to proof theory*, American mathematical society, translated from the Russian by E. Mendelson, 1988, Volume 67.

Markov, A, A: *Theory of algorithms*, traducción de Steklova V, A, URSS, 1954.

Torretti, R: *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*, Alianza diccionarios, Alianza editorial, 2002.

Weyl, H: *The continuum: A critical examination of the foundation of analysis*, 1918, traducción de Pollard S y Bole T, Mineola: Dover, 1994.

Woodin, H: *The continuum hypothesis part I*, noticias de la sociedad matemática americana, 48, 2001a.

-------------: *The continuum hypothesis part II*, noticias de la sociedad matemática americana, 48, 2001b.