UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

GAVILLA DE MÓDULOS DE FORMAS DIFERENCIALES SOBRE ESQUEMAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

CÉSAR ISRAEL HERNÁNDEZ VÉLEZ

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. JAWAD SNOUSSI

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE, 2008

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción

El propósito de este trabajo es dar una relación entre la gavilla de módulos de diferenciales sobre un esquema y el espacio cotangente asociado al esquema y de esta forma tener una expresión algebraica de la cual podemos obtener alguna información, principalmente sobre los puntos regulares, como veremos al final del segundo capítulo.

En el primer capítulo daremos las nociones básicas sobre la teoría de esquemas sin entrar en mucho detalle y algunos resultados importantes, ya que los esquemas vienen como una generalización del concepto de variedades algebraicas afines o proyectivas estudiadas en un curso básico de geometría algebraica, y de la necesidad de definir algún tipo de variedad abstracta que no tiene a priori un encaje de un espacio afín o proyectivo. Si comenzamos del hecho que a una variedad afín le corresponde un dominio entero finitamente generado sobre un campo, extendemos esto a cualquier anillo conmutativo A, sobre el cual definiremos un espacio topológico Spec A y una gavilla de anillos sobre Spec A, que generaliza al anillo de funciones regulares sobre una variedad afín, y que llamamos a esto un esquema afín. Un esquema entonces será definido pegando esquemas afines, y esto generalizará la noción de variedad algebraica.

En el segundo capítulo construiremos un objeto algebraico, el módulo de diferenciales de Kähler, que al generalizarse sobre un esquema jugará el papel del fibrado cotangente y aún más será una gavilla coherente si el esquema es noetheriano. Como una relación importante entre el módulo de diferenciales y los puntos regulares es que un punto es regular si y sólo si el módulo de diferenciales es libre de rango igual a la dimensión del esquema en el punto dado.

Capítulo 1

Generalidades de Esquemas

En este capítulo mostraremos la teoría básica de esquemas, sin ahondar mucho en el tema, así como un repaso rápido de la teoría de gavillas (necesarias para definir esquemas). Con esto tendremos el lenguaje elemental al que se hace referencia al estudiar la teoría de esquemas en álgebra conmutativa. Trataremos algunos temas que pueden ser hechos con el lenguaje de variedades, pero que son más convenientes usando esquemas.

1.1 Gavillas

El concepto de una gavilla provee una manera sistemática de mantener un seguimiento de la información algebraica local sobre un espacio topológico. Por ejemplo, las funciones regulares sobre un subconjunto abierto de una variedad forman una gavilla. Las gavillas son esenciales en el estudio de esquemas, de hecho, no podemos definir un esquema sin usar gavillas.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico. Una* ***pregavilla*** $\mathscr{F}$ *de grupos abelianos sobre X consiste de*

(a) para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$, un grupo abeliano $\mathscr{F}(U)$, y

(b) para cada inclusión $V \subseteq U$ de subconjuntos abiertos de X, un morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$,

sujeto a las condiciones

(0) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$

(1) ρ_{UU} es el mapeo identidad $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$, y

(2) si $W \subseteq V \subseteq U$ son tres subconjuntos abiertos, entonces $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Definimos una pregavilla de anillos, de conjuntos, o una pregavilla con valores en una categoía fija $\mathcal{C}$, reemplazando las palabra “grupos abelianos” en la definición por “anillos”, “conjuntos”, o “objetos de $\mathcal{C}$” respectivamente.

Para terminología, si $\mathscr{F}$ es una pregavilla sobre X, nos referimos a $\mathscr{F}(U)$ como una ***sección*** de la pregavilla $\mathscr{F}$ sobre el subconjunto abierto U, y algunas veces usamos la notación $\Gamma(U, \mathscr{F})$ para denotar al grupo $\mathscr{F}(U)$. Llamamos a los mapeos ρ_{UV} ***mapeos restricción***, y algunas veces escribimos $s|_V$ en lugar de $\rho_{UV}(s)$, si $s \in \mathscr{F}(U)$.

Una gavilla rigurosamente hablando es una pregavilla cuyas secciones son determinadas por la información local. Para ser precisos damos la siguiente información.

Definición 1.1.2. *Una pregavilla $\mathscr{F}$ sobre un espacio topológico X es una* ***gavilla*** *si satisface las siguientes condiciones suplementarias:*

(3) si U es un conjunto abierto, si $\{V_i\}$ es una cubierta abierta de U, y si $s \in \mathscr{F}(U)$ es un elemento tal que $s|_{V_i} = 0$ para cada i, entonces $s = 0$;

(4) si U es un conjunto abierto, si $\{V_i\}$ es una cubierta abierta de U y si tenemos elementos $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ para cada i, con la propiedad de que para cada i, j, $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, entonces existe un elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada i.

Ejemplo 1.1.3. *Sea X una variedad sobre el campo k. Para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$, sea $\mathcal{O}(U)$ el anillo de funciones regulares de U a k, y para cada $V \subseteq U$, sea $\rho_{UV} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ el mapeo restricción en el sentido usual. Entonces $\mathcal{O}$ es una gavilla de anillos sobre X. Es claro que es una pregavilla de anillos. Para verificar las condiciones (3) y (4), notamos que una función que es localmente 0 es 0, y una función que es localmente regular es regular, a partir de la definición de función regular. Llamamos a $\mathcal{O}$ la* ***gavilla de funciones regulares*** *sobre X.*

Definición 1.1.4. *Si $\mathscr{F}$ es una pregavilla sobre X, y si P es un punto de X, definimos el* ***germen*** *$\mathscr{F}_P$ de $\mathscr{F}$ en P como el límite directo de los grupos $\mathscr{F}(U)$ para todos los conjuntos abiertos U que contienen a P, vía los mapeos restricción ρ.*

Entonces un elemento de $\mathscr{F}_P$ es representado por un par $\langle U, s\rangle$, donde U es una vecindad abierta de P, y s es un elemento de $\mathscr{F}(U)$. Dos pares $\langle U, s\rangle$ y $\langle V, t\rangle$ definen el mismo elemento de $\mathscr{F}_P$ si y sólo si existe una vecindad abierta W de P con $W \subseteq U \cap V$, tal que $s|W = t|W$. Entonces hablamos de los elementos del germen $\mathscr{F}_P$ como ***gérmenes*** de secciones de $\mathscr{F}$ en el punto P. En el caso de una variedad X y su gavilla de funciones regulares $\mathcal{O}$, el germen $\mathcal{O}_P$ en un punto P es justo el anillo local de P sobre X.

Definición 1.1.5. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son pregavillas sobre X, un* ***morfismo de pregavillas*** *consiste de un morfismo de grupos abelianos $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ para cada subconjunto abierto U, tal que cuando $V \subseteq U$ es una inclusión, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ρ y ρ' son los mapeos restricción en $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, respectivamente. Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son gavillas, usamos la misma definición para un ***morfismo de gavillas****. Un* ***isomorfismo*** *es un morfismo el cual tiene un inverso.*

Definición 1.1.6. *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de pregavillas. Definimos la* ***pregavilla kernel*** *de φ,* ***pregavilla cokernel*** *de φ, y* ***pregavilla imagen*** *de φ como las pregavillas dadas por $U \mapsto ker(\varphi(U))$, $U \mapsto coker(\varphi(U))$, y $U \mapsto im(\varphi(U))$ respectivamente.*

Notemos que si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces la pregavilla kernel de φ es una gavilla, pero la pregavilla cokernel y pregavilla imagen de φ no son gavillas en general.

Proposición 1.1.7. *Dada una pregavilla $\mathscr{F}$, existe una gavilla $\mathscr{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, con la propiedad de que para cualquier gavilla $\mathscr{G}$, y cualquier morfismo $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, existe un único morfismo $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Más aún, el par $(\mathscr{F}^+, \theta)$ es único salvo isomorfismo. $\mathscr{F}^+$ es llamada la* ***gavilla asociada*** *a la pregavilla $\mathscr{F}$.*

Demostración. Ver ([7], Proposición 1.2, p.64]). □

Definición 1.1.8. *Una* ***subgavilla*** *de una gavilla* $\mathscr{F}$ *es una gavilla* $\mathscr{F}'$ *tal que para cada subconjunto abierto* $U \subseteq X$, $\mathscr{F}'(U)$ *es un subgrupo de* $\mathscr{F}(U)$, *y los mapeos restricción de la gavilla* $\mathscr{F}'$ *son inducidos por aquellos de* $\mathscr{F}$. *De esto sigue que para cada punto* P, *el germen* $\mathscr{F}'_P$ *es un subgrupo de* $\mathscr{F}_P$.

Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es un morfismo de gavillas, entonces ker* φ *es una subgavilla de* $\mathscr{F}$. *Decimos que un morfismo de gavillas* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es* ***inyectivo*** *si ker*$\varphi = 0$. *Entonces* φ *es inyectivo si y sólo si el mapeo inducido* $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ *es inyectivo para cada conjunto abierto de* X.

Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es un morfismo de gavillas, definimos la* ***imagen*** *de* φ, *denotada im*φ, *a la gavilla asociada a la pregavilla imagen de* φ. *Por la propiedad universal de la gavilla asociada a una pregavilla, existe un mapeo natural im*$\varphi \to \mathscr{G}$. *De hecho este mapeo es inyectivo, entonces im*φ *puede ser identificada con una subgavilla de* $\mathscr{G}$. *Decimos que un morfismo* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *de gavillas es* ***sobreyectivo*** *si im*$\varphi = \mathscr{G}$.

Sea $\mathscr{F}'$ *una subgavilla de una gavilla* $\mathscr{F}$. *Definimos la* ***gavilla cociente*** $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ *como la gavilla asociada a la pregavilla* $U \to \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U)$. *De esto sigue que para cada punto* P, *el germen* $(\mathscr{F}/\mathscr{F}')_P$ *es el cociente* $\mathscr{F}_P/\mathscr{F}'_P$.

Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es un morfismo de gavillas, definimos el* ***cokernel*** *de* φ, *denotado coker* φ, *como la gavilla asociada a la pregavilla cokernel de* φ.

Observación 1.1.9. *Vimos que un morfismo* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *de gavillas es inyectivo si y sólo si el mapeo sobre las secciones* $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ *es inyectivo para cada* U. *El correspondiente enunciado para morfismo sobreyectivos no es verdad: si* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es sobreyectivo, los mapeos* $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ *sobre las secciones no necesariamente son sobreyectivos. De cualquier forma, podemos decir que* φ *es sobreyectivo si y sólo si los mapeos* $\varphi_P : \mathscr{F}_P \to \mathscr{G}_P$ *sobre los gérmenes son sobreyectivos para cada* P.

Definición 1.1.10. *Sea* $f : X \to Y$ *un mapeo continuo de espacios topológicos. Para cualquier gavilla* $\mathscr{F}$ *sobre* X, *definimos la* ***gavilla imagen directa*** $f_*\mathscr{F}$ *sobre* Y *por* $(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ *para cada conjunto abierto* $V \subseteq Y$. *Para cada gavilla* $\mathscr{G}$ *sobre* Y, *definimos la* ***gavilla imagen inversa*** $f^{-1}\mathscr{G}$ *sobre* X *como la gavilla asociada a la pregavilla* $U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V)$, *donde* U *es cualquier conjunto abierto en* X, *y el límite directo es tomado sobre todos los conjuntos abiertos* V *de* Y *que contienen* $f(U)$.

Definición 1.1.11. *Si* Z *es un subconjunto de* X, *considerado como un subespacio topológico con la topología inducida, si* $\imath : Z \to X$ *es el mapeo inclusión, y si* $\mathscr{F}$ *es una gavilla sobre* X, *entonces llamamos* $\imath^{-1}\mathscr{F}$ *la* ***restricción*** *de* $\mathscr{F}$ *a* Z, *y denotada* $\mathscr{F}|_Z$. *Notamos que el germen de* $\mathscr{F}|_Z$ *en un punto* $P \in Z$ *es justo* $\mathscr{F}_P$.

Propiedad de Adjunción de f^{-1}. Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo de espacios topológicos. Para cada gavilla $\mathscr{F}$ sobre X existe un mapeo natural $f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$, y para cada gavilla $\mathscr{G}$ sobre Y existe un mapeo $\mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$. Usando estos dos mapeo existe una biyección natural de conjuntos para gavillas $\mathscr{F}$ sobre X y $\mathscr{G}$ sobre Y,

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Por lo tanto decimos que f^{-1} es un ***adjunto izquierdo*** de f_* y que f_* es un ***adjunto derecho*** de f^{-1}.

1.2 Esquemas

En esta sección definiremos la noción de esquema. Primero definimos un esquema afín: a cualquier anillo A le asociamos un espacio topológico junto con una gavilla de anillo sobre éste, llamado Spec A. Esta construcción es paralela a la construcción de variedades afines, excepto que los puntos de Spec A corresponden a todos los ideales primos de A, no sólo los ideales maximales. Después definiremos un esquema arbitrario como algo que localmente es como un esquema afín. Finalmente, después de cambiar el punto de vista, podemos considerar a las variedades como esquemas. Entonces la categoría de esquemas es una ampliación de la categoría de variedades.

Definimos el espacio ***Spec*** A asociado al anillo A como el conjunto de todos los ideales primos de

A. Si $\mathfrak{a}$ es cualquier ideal de A, definimos el subconjunto $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Spec}\, A$ como el conjunto de todos los ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$.

Lema 1.2.1.

1. *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales de A, entonces $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.*
2. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es un conjunto de ideales de A, entonces $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.*
3. *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ si y sólo si $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.*

Demostración. Ver ([[7], Lema 2.1, p.70]). □

Ahora definimos una topología sobre Spec A tomando a los subconjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$ como los subconjuntos cerrados. Notemos que $V(A) = \emptyset$; $V((0)) = \mathrm{Spec}\, A$; y el lema muestra que la unión finita e intersección arbitraria de conjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$ es otra vez de esta forma. Por lo tanto forman los conjuntos cerrados para una topología sobre Spec A.

En seguida definimos una gavilla de anillos $\mathcal{O}$ sobre Spec A. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, sea $A_{\mathfrak{p}}$ la localización de A en $\mathfrak{p}$. Para cada conjunto abierto $U \subseteq \mathrm{Spec}\, A$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como el conjunto de funciones $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$, tal que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, para cada $\mathfrak{p}$, y tal que s es localmente un cociente de elementos de A: para ser precisos, requerimos que para cada $\mathfrak{p} \in U$, exista una vecindad V de $\mathfrak{p}$, contenida en U, y elementos $a, f \in A$, tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_{\mathfrak{q}}$. (Notamos la similitud con la definición de las funciones regulares sobre una variedad. La diferencia es que consideramos funciones hacia varios anillos locales, en lugar de hacia un campo.)

Es claro que la suma y producto de tales funciones es otra vez de esta forma y que el elemento 1 el cual da 1 en cada $A_{\mathfrak{p}}$ es una identidad. Entonces $\mathcal{O}(U)$ es un anillo conmutativo con identidad. Si $V \subseteq U$ son dos conjuntos abiertos, la restricción natural $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ es un homomorfismo de anillos. Entonces es claro que $\mathcal{O}$ es una pregavilla. Finalmente, es claro de la naturaleza local de la definición que $\mathcal{O}$ es una gavilla.

Definición 1.2.2. *Sea A un anillo. El **espectro** de A es la pareja (Spec $A, \mathcal{O}$) consistente del espacio topológico Spec A junto con la gavilla de anillos $\mathcal{O}$ definida arriba.*

Para cualquier elemento $f \in A$, denotamos por $D(f)$ el complemento de $V((f))$. Notemos que los conjuntos abiertos de la forma $D(f)$ forman una base para la topologí de Spec A. De hecho, si $V(\mathfrak{a})$ es un conjunto cerrado, y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$, entonces existe un $f \in \mathfrak{a}$, $f \notin \mathfrak{p}$. Entonces $\mathfrak{p} \in D(f)$ y $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

Proposición 1.2.3. *Sea A un anillo, y (Spec $A, \mathcal{O}$) su espectro. Para cada $\mathfrak{p} \in$ Spec A, el germen $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ de la gavilla $\mathcal{O}$ es isomorfo al anillo local $A_{\mathfrak{p}}$.*

Demostración. Definimos un homomorfismo de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ a $A_{\mathfrak{p}}$ mandando cualquier sección local s en una vecindad de $\mathfrak{p}$ a su valor $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. Esto da un homomorfismo bien definido φ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ a $A_{\mathfrak{p}}$. El mapeo φ es sobreyectivo, porque cualquier elemento de $A_{\mathfrak{p}}$ puede ser representado como un cociente a/f, con $a, f \in A, f \notin \mathfrak{p}$. Entonces $D(f)$ será una vecindad abierta de $\mathfrak{p}$, y a/f define una sección de $\mathcal{O}$ sobre $D(f)$ cuyo valor en $\mathfrak{p}$ es el elemento dado. Para mostrar que φ es inyectiva, sea U una vecindad de $\mathfrak{p}$, y sean $s, t \in \mathcal{O}(U)$ elementos que tienen el mismo valor $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ en $\mathfrak{p}$. Encogiendo U si es necesario, podemos asumir que $s = a/f$ y $t = b/g$ sobre U, donde $a, b, f, g \in A$ y $f, g \notin \mathfrak{p}$. Como a/f y b/g tienen la misma imagen en $A_{\mathfrak{p}}$, sigue de la definición de localización que existe un $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(ga - fb) = 0$ en A. Por lo tanto $a/f = b/g$ en cada anillo local $A_{\mathfrak{q}}$ tal que $f, g, h \notin \mathfrak{q}$. Pero el conjunto de tales $\mathfrak{q}$ es el conjunto abierto $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, el cual contiene a $\mathfrak{p}$. Por lo tanto $s = t$ en toda una vecindad de $\mathfrak{p}$, así que tienen el mismo germen en $\mathfrak{p}$. Por lo tanto φ es un isomorfismo. □

Definición 1.2.4. *Un* ***espacio anillado*** *es una pareja* $(X, \mathcal{O}_X)$ *consistente de un espacio topológico* X *y una gavilla de anillos* $\mathcal{O}_X$ *sobre* X*. Un* ***morfismo de espacios anillados*** *de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es una pareja* $(f, f^{\#})$ *de un mapeo continuo* $f : X \to Y$ *y un mapeo* $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ *de gavillas de anillos sobre* Y*. El espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un* ***espacio anillado local*** *si para cada punto* $P \in X$*, el germen* $\mathcal{O}_{X,P}$ *es un anillo local.*

Un morfismo $(f, f^{\#})$ *es un* ***isomorfismo*** *si y sólo si* f *es un homeomorfismo de los espacios topológicos subyacentes, y* $f^{\#}$ *es un isomorfismo de gavillas.*

Proposición 1.2.5.

1. *Si* A *es un anillo, entonces (Spec* A*,* $\mathcal{O}$*) es un espacio anillado local.*
2. *Si* $\varphi : A \to B$ *es un homomorfismo de anillos, entonces* φ *induce un morfismo natural de espacios anillados locales*
$$(f, f^{\#}) : (\textit{Spec } B, \mathcal{O}_{\textit{Spec } B}) \to (\textit{Spec } A, \mathcal{O}_{\textit{Spec } A}).$$

Demostración. (1) Sigue inmediatamente a partir de (1.2.3).

(2) Dado un homomorfismo $\varphi : A \to B$, definimos un mapeo $f : \text{Spec } B \to \text{Spec } A$ como $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, entonces es inmediato que $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$, así que f es continua. Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$, podemos localizar φ para obtener un homomorfismo local de anillos locales $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$. Ahora para cualquier conjunto abierto $V \subseteq \text{Spec } A$ obtenemos un homomorfismo de anillos $f^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V) \to \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(f^{-1}(V))$ por la definición de $\mathcal{O}$, componiendo con el mapeo f y $\varphi_{\mathfrak{p}}$. Esto da el morfismo de gavillas $f^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \to f_*(\mathcal{O}_{\text{Spec } B})$. Los mapeos inducidos $f^{\#}$ sobre los gérmenes son justo los homomorfismos locales $\varphi_{\mathfrak{p}}$, así que $(f, f^{\#})$ es un morfismo de espacios anillados locales. □

Definición 1.2.6. *Un* ***esquema afín*** *es un espacio anillado local* $(X, \mathcal{O})$ *el cual es isomorfo (como un espacio anillado local) al espectro de algún anillo. Un* ***esquema*** *es un espacio anillado local* $(X, \mathcal{O})$ *en el cual cada punto tiene una vecindad* U *tal que el espacio topológico* U*, junto con la gavilla restricción* $\mathcal{O}_X|U$ *es un esquema afín. Llamamos a* X *el* ***espacio topológico subyacente*** *del esquema* $(X, \mathcal{O}_X)$ *y* $\mathcal{O}_X$ *su* ***gavilla estructural*** *.*

Ejemplo 1.2.7. *Si* k *es un campo, Spec* k *es un esquema afín cuyo espacio topológico consiste de un solo punto, y cuya gavilla estructural consiste del campo* k*.*

Ejemplo 1.2.8. *Si* k *es un campo, definimos la* ***línea afín*** *sobre* k*,* $\mathbb{A}^1_k$*, como Spec* $k[x]$*. Este tiene un punto* ξ*, correspondiente al ideal cero, cuya cerradura en el espacio completo. Este es llamado un* ***punto genérico****. Los otros puntos, que corresponden a los ideales maximales en* $k[x]$*, son llamados* ***puntos cerrados****. Estos están en correspondencia uno a uno con los polinomios mónicos irreducibles no constantes en* x*. En particular, si* k *es algebraicamente cerrado, los puntos cerrados de* $\mathbb{A}^1_k$ *están en correspondencia uno a uno con elementos de* k*.*

Ejemplo 1.2.9. *Sea* k *un campo algebraicamente cerrado y consideramos el* ***plano afín*** *sobre* k*, definido como* $\mathbb{A}^2_k = \textit{Spec } k[x, y]$*. Los puntos cerrados de* $\mathbb{A}^2_k$ *están en correspondencia uno a uno con los pares de elementos de* k*. Más aún, el conjunto de todos los puntos cerrados de* $\mathbb{A}^2_k$*, con la topología inducida, es homeomorfo a la variedad* $\mathbb{A}^2$*. Además de los puntos cerrados, existe un punto genérico* ξ*, correspondiente el ideal cero de* $k[x, y]$*, cuya cerradura es todo el espacio. También, para cada polinomio irreducible* $f(x, y)$*, existe un punto* η *cuya cerradura consiste de* η *junto con todos los puntos cerrados* (a, b) *para los cuales* $f(a, b) = 0$*. Decimos que* η *es un punto genérico de la curva* $f(x, y) = 0$*.*

Definición 1.2.10. *Un* ***morfismo*** *entre esquemas* X *y* Y *es una pareja* $(\psi, \psi^{\#})$*, donde* $\psi : X \to Y$ *es un mapeo continuo sobre los espacios topológicos subyacentes y*

$$\psi^{\#} : \mathcal{O}_Y \to \psi_*\mathcal{O}_X$$

es un mapeo de gavillas sobre Y que satisfacen la condición de que para cada punto $p \in X$ y cualquier vecindad U de $q = \psi(p)$ en Y una sección $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ se anula en q si y sólo si la sección $\psi^{\#}f$ de $\psi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U)$ se anula en p.

Esta última condición tiene una reformulación en términos de los anillos locales $\mathcal{O}_{X,p}$ y $\mathcal{O}_{Y,q}$. Cualquier mapeo de gavillas $\psi^{\#} : \mathcal{O}_Y \to \psi_*\mathcal{O}_X$ induce un mapeo en los gérmenes

$$\mathcal{O}_{Y,q} = \varinjlim_{q \in U \subset Y} \mathcal{O}_Y(U) \to \varinjlim_{q \in U \subset Y} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U),$$

y este último anillo naturalmente se mapea al límite

$$\varinjlim_{p \in V \subset X} \mathcal{O}_X(V)$$

sobre todos los subconjuntos abiertos V que contienen a p, el cual es $\mathcal{O}_{X,p}$. Entonces $\psi^{\#}$ induce un mapeo de anillos locales $\mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$. Decir que una sección $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ se anula en q si y sólo si $\psi^{\#}f \in \psi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U)$ se anula en p es decir que el mapeo $\mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$ manda el ideal maximal $\mathfrak{m}_{Y,q}$ en $\mathfrak{m}_{X,p}$, en otras palabras, es un ***homomorfismo local*** de espacios locales.

Recordemos que $\psi^{\#}$ es inyectivo (respectivamente, sobreyectivo) si y sólo si el mapeo inducido sobre los gérmenes es inyectivo (respectivamente, sobreyectivo).

En seguida, definimos una clase importante de esquemas, construidos de anillos graduados, los cuales son análogos a las variedades proyectivas.

Sea S un anillo graduado. Denotamos S_+ al ideal $\bigoplus_{d>0} S_d$.

Definimos el conjunto ***Proj*** S como el conjunto de todos los ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}$, que no son todo S_+. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de S, definimos el subconjunto $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S | \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$.

Lema 1.2.11.

1. *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales homogéneos en S, entonces $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.*

2. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es una familia de ideales homogéneos de S, entonces $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.*

Demostración. Ver ([[7], Lema 2.4, p.76]). □

A partir del lema anterior podemos definir una topología sobre Proj S tomando como subconjuntos cerrados a los subconjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$.

Lo próximo es definir una gavilla de anillos $\mathcal{O}$ sobre Proj S. Para cada $\mathfrak{p} \in$ Proj S, consideramos el anillo $S_{(\mathfrak{p})}$ de elementos de grado cero en el anillo localizado $T^{-1}S$, donde T es el sistema multiplicativo de todos los elementos homogéneos de S que no están en $\mathfrak{p}$. Para cada subconjunto abierto $U \subseteq$ Proj S, definimos $\mathcal{O}(U)$ al conjunto de funciones $s : U \to \coprod S_{(\mathfrak{p})}$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$, y tal que s es localmente un cociente de elementos de S: para cada $\mathfrak{p} \in U$, existe una vecindad V de $\mathfrak{p}$ en U, y elementos homogéneos $s, f \in S$, del mismo grado, tal que para todo $\mathfrak{q} \in V, f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $S_{(\mathfrak{p})}$. Es claro que $\mathcal{O}$ es una pregavilla de anillos, con la resctricción natural, y es claro de la naturaleza local de la definición de $\mathcal{O}$ que es una gavilla.

Definición 1.2.12. *Si S es un anillo graduado, definimos (Proj $S, \mathcal{O}$) como el espacio topológico junto con la gavilla de anillos construida como arriba.*

Proposición 1.2.13. *Sea S un anillo graduado.*

1. *Para cualquier $\mathfrak{p} \in$ Proj S, el germen $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es isomorfo al anillo local $S_{(\mathfrak{p})}$.*

2. *Para cualquier elemento homogéneo $f \in S_+$, sea $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S | f \notin \mathfrak{p}\}$. Entonces $D_+(f)$ es abierto en Proj S. Más aún, estos conjuntos abiertos cubren Proj S, y para cada uno de tales conjuntos, tenemos un isomorfismo de espacios anillados locales*

$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec } S_{(f)},$$

donde $S_{(f)}$ es el subanillo de elementos de grado 0 en el anillo localizado S_f.

3. *Proj S es un esquema.*

Demostración. Notamos que (1) dice que Proj S es un espacio anillado local, y (2) nos dice que es cubierto por esquemas abiertos afines, así que (3) es consecuencia de (1) y (2).

La demostración de (1) es prácticamente la misma que la de (1.2.3).

Para probar (2), primero notemos que $D_+(f) = \text{Proj } S \setminus V((f))$, así que es abierto. Como los elementos de Proj S son aquellos ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}$ de S los cuales no contienen todo S_+, entonces los conjuntos abiertos $D_+(f)$ para homogéneos $f \in S_+$ cubren Proj S. Ahora fijamos un elemento homogéneo $f \in S_+$. Definiremos un isomorfismo $(\varphi, \varphi^{\#})$ de espacios anillados locales de $D_+(f)$ a Spec $S_{(f)}$. Existe un homomorfismo natural de anillos $S \to S_f$, y $S_{(f)}$ es un subanillo de S_f. Para cualquier ideal homogéneo $\mathfrak{a} \subseteq S$, sea $\varphi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}S_f) \cap S_{(f)}$. En particular, si $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, entonces $\varphi(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } S_{(f)}$, así que tenemos un mapeo φ como conjuntos. Las propiedades de localización muestran que φ es una biyección como un mapeo de $D_+(f)$ a Spec $S_{(f)}$. Más aún, si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de S, entonces $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ si y sólo si $\varphi(\mathfrak{p}) \supseteq \varphi(\mathfrak{a})$. Por lo tanto φ es un homeomorfismo. Notamos también que si $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, entonces los anillos locales $S_{(\mathfrak{p})}$ y $(S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$ son naturalmente isomorfos. Estos isomorfismos y el homeomorfismo φ inducen un mapeo natural de gavillas $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S}|_{D_+(f)})$ el cual podemos reconocer como un isomorfismo. Por lo tanto $(\varphi, \varphi^{\#})$ es un isomorfismo de espacios anillados locales, como pedíamos. □

Ejemplo 1.2.14. *Se A es un anillo, definimos el **n-espacio proyectivo** sobre A como el esquema $\mathbb{P}^n_A = \text{Proj } A[x_0, \ldots, x_n]$. En particular, si A es un campo algebraicamente cerrado k, entonces $\mathbb{P}^n_k$ es un esquema cuyo subespacio de puntos cerrados es naturalmente homeomorfo a la variedad llamada n-espacio proyectivo.*

Definición 1.2.15. *Sea S un esquema fijo. Un **esquema sobre** S es un esquema X, junto con un morfismo $X \to S$. Si X y Y son esquemas sobre S, un morfismo de X a Y como esquemas sobre S, (también llamado un S-morfismo) es un morfismo $f : X \to Y$ el cual es compatible con el morfismo dado a S.*

Proposición 1.2.16.

1. *Sea $\varphi : S \to T$ un homomorfismo graduado de anillos graduados (preserva grados). Sea $U = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } T | \mathfrak{p} \not\supseteq \varphi(S_+)\}$. Entonces U es un subconjunto abierto de Proj T, y φ determina un morfismo natural $f : U \to \text{Proj } S$.*

2. *El morfismo f puede ser un isomorfismo aún cuando φ no lo sea. Por ejemplo, supongamos que $\varphi_d : S_d \to T_d$ es un isomorfismo para todo $d \geq d_0$, donde d_0 es un entero. Entonces $U = \text{Proj } T$ y el morfismo $f : \text{Proj } T \to \text{Proj } S$ es un isomorfismo*

Demostración.

(1) El conjunto Proj $T \backslash U = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } T | \mathfrak{p} \supseteq \varphi(S_+)\}$ es el mismo conjunto si reemplazamos $\varphi(S_+)$ por el ideal que éste genera. Cualquier elemento $f \in S$ puede ser expresado como una suma $f_1 + \cdots + f_n$ donde los f_i son homogéneos, así que $\varphi(f) = \varphi(f_1) + \cdots + \varphi(f_n)$ donde cada $\varphi(f_i)$ es homogéneo, así que el ideal generado por $\varphi(S_+)$ es generado por elementos homogéneos. Entonces Proj $T \backslash U$ es un conjunto cerrado y por lo tanto U es un conjunto abierto.

Como mapeo de espacios topológicos, definimos $f : U \to \text{Proj } S$ por $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Como $\mathfrak{p} \not\supseteq \varphi(S_+), \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \not\supseteq S_+$, así que está bien definido. Consideremos el mapeo localizado $\varphi_{(\mathfrak{p})} : S_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))} \to T_{(\mathfrak{p})}$ donde $T_{(\mathfrak{p})}$ es el anillo de elementos de grado cero en el anillo localizado $A^{-1}T$ donde A es el conjunto multiplicativo consistente de todos los elementos homogéneos de T que no están en $\mathfrak{p}$. Notemos que $S_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))}$ es un anillo local cuyo ideal maximal es la imagen de $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, y similarmente con $T_{(\mathfrak{p})}$. A partir de esto vemos que $\varphi_{(\mathfrak{p})}$ es un homomorfismo local. Ahora necesitamos definir un morfismo de gavillas $f^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Proj } S} \to f_*U$. Si $V \subseteq \text{Proj } S$ es un conjunto abierto, entonces $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(V)$ consiste de funciones $s : V \to \coprod_{\mathfrak{q} \in V} S_{(\mathfrak{q})}$ tal que $s(\mathfrak{q}) \in S_{(\mathfrak{q})}$ y s es localmente un cociente de elementos de S. Componiendo con el mapeo localizado, conseguimos cambiar cada una de estas funciones en otra función $t : f^{-1}(V) \to \coprod_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)} T_{(\mathfrak{q})}$ tal que $t(\mathfrak{q}) \in T_{(\mathfrak{q})}$ y t es localmente un cociente de elementos de T. Los mapeos restricción de $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ y $\mathcal{O}_U$ son restricciones de dominios, así que el mapeo acabado de definir da un morfismo de gavillas. El germen en un punto $\mathfrak{p} \in U$ es el mapeo $\varphi_{(\mathfrak{p})}$, el cual es local, así que f es un morfismo de esquemas.

(2) Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo homogéneo de T, y supongamos que $\mathfrak{p}$ contiene $\varphi(S_+)$. Sea $x \in T$ un elemento homogéneo de grado $\alpha > 0$. Para algún n, $n\alpha \geq d_0$, así que $x^n \in T_{n\alpha} = \varphi(S_{n\alpha}) \subseteq \mathfrak{p}$, y por tanto $x \in \mathfrak{p}$. Esto implica que $T_+ \subseteq \mathfrak{p}$, y por lo tanto $U = \text{Proj } T$. El mapeo inducido de espacios topológicos $f : \text{Proj } T \to \text{Proj } S$ está dado por $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Supongamos que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ para dos ideales $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Proj } T$. Entonces $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{q}_d$ para todo $d \geq d_0$. Para cualquier elemento homogéneo $x \in \mathfrak{q}$ de grado positivo, alguna potencia suficientemente grande x^n tiene grado mayor o igual que d_0, así que $x^n \in \mathfrak{p}$, lo cual implica que $x \in \mathfrak{p}$. Por simetría, $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{q}_d$ para todo $d > 0$. Si $x \in \mathfrak{p}_0$, entonces como $\mathfrak{p} \in \text{Proj } T$, existe un elemento homogéneo $y \notin \mathfrak{p}$ con $\deg y > 0$. Esto quiere decir que $\deg xy > 0$, así que $xy \in \mathfrak{q}$. Como $y \notin \mathfrak{q}$, tenemos que $x \in \mathfrak{q}$, así que por simetría, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0$, y f es inyectiva.

Ahora tenemos que probar que f es sobreyectiva. Sea $\{\alpha_i\}$ un conjunto de generadores homogéneos para T_+. Entonces $\{D_+(\alpha_i)\}$ es una cubierta de Proj T. Para cualquier ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Proj } T$, $\alpha_i^{d_0} \in \mathfrak{p}$ si y sólo si $\alpha_i \in \mathfrak{p}$, así que podemos asumir que $\deg \alpha_i \geq d_0$ para todo i. Afirmamos que $\{D_+(\varphi^{-1}(\alpha_i))\}$ forma una cubierta de Proj S. Si no, entonces existe $\mathfrak{p}$ tal que $\varphi^{-1}(\alpha_i) \in \mathfrak{p}$ para todo i. Sin embargo, los α_i generan $\bigoplus_{d \geq d_0} T_d$, y por lo tanto su preimagen está contenida en $\mathfrak{p}$. Además, esta preimagen al menos contiene S_+ porque φ_d es un isomorfismo para $d \geq d_0$, así que $S_+ \subseteq \mathfrak{p}$, lo cual contradice que $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$. Entonces tenemos mapeos $f_{\alpha_i} : D_+(\alpha_i) \to D_+(\varphi^{-1}(\alpha_i))$ para todo i. Este mapeo puede ser reescrito como $\text{Spec } T_{(\alpha_i)} \to \text{Spec } S_{(\varphi^{-1}(\alpha_i))}$, el cual es inducido por el mapeo localizado $\psi : S_{(\varphi^{-1}(\alpha_i))} \to T_{(\alpha_i)}$. Afirmamos que este mapeo localizado ψ es un isomorfismo. Si $\psi(a/u) = 0$, entonces

$$\psi(\varphi^{-1}(\alpha_i)a/\varphi^{-1}(\alpha_i)u) = 0$$

del cual obtenemos

$$\varphi(\varphi^{-1}(\alpha_i)a)/\varphi(\varphi^{-1}(\alpha_i)u) = 0$$

en $T_{(\alpha_i)}$. Esto significa que

$$\alpha_i^n \varphi(\varphi^{-1}(\alpha_i)a) = \varphi(\varphi^{-1}(\alpha_i)a\alpha_i^n) = 0$$

para algún n, y podemos tomar n suficientemente grande tal que el grado es más grande que d_0, así que $\varphi^{-1}(\alpha_i)a\alpha_i^n = 0$, lo cual significa que $a = 0$ en $S_{(\varphi^{-1}(\alpha_i))}$. Por sobreyectividad, escogemos $b/\alpha_i^n \in T_{(\alpha_i)}$. Entonces para algún m, $\deg b\alpha_i^m \geq d_0$, así que existe un elemento $\varphi^{-1}(b\alpha_i^m)/\varphi^{-1}(\alpha_i^{n+m})$ en $S_{(\varphi^{-1}(\alpha_i))}$, el cual se mapea a b/α_i^n por ψ. Entonces, ψ es un isomorfismo, así que $f^{\#}$ es un isomorfismo de gavillas porque los $D_+(\alpha_i)$ forman una cubierta. Entonces f es un homeomorfismo porque la imagen inversa preserva la inclusión de ideales y por lo tanto de conjuntos cerrados, así que $(f, f^{\#})$ es un isomorfismo de esquemas. $\square$

Proposición 1.2.17.

1. *Sea $\varphi : S \to T$ un homomorfismo sobreyectivo de anillos graduados, preservando grados. El conjunto U de (1.2.16) es igual a Proj T, y el morfismo $f : \text{Proj } T \to \text{Proj } S$ es una inmersión cerrada.*

2. *Si $I \subseteq S$ es un ideal homogéneo, tomamos $T = S/I$ y sea Y el subesquema cerrado de $X = \text{Proj } S$ definido como imagen de la inmersión cerrada Proj $S/I \to X$. Sea d_0 un entero, y sea $I' = \bigoplus_{d \geq d_0} I_d$. Entonces I e I' determinan el mismo subesquema cerrado.*

Demostración.

(1) Si $\varphi : S \to T$ es sobreyectivo y preserva grados, entonces $\varphi(S_+) = T_+$. Por definición, $U = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } T | \mathfrak{p} \not\supseteq \varphi(S_+)\}$, tenemos que $U = \text{Proj } T$. El mapeo $f : \text{Proj } T \to \text{Proj } S$ es definido por $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, el cual afirmamos que es inyectivo. Supongamos que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ para $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Proj } T$. Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, entonces escogemos $x \in \mathfrak{q} - \mathfrak{p}$. Como φ es sobreyectiva, $\varphi^{-1}(x)$ es no vacío. Si $\varphi^{-1}(x) \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$ es estrictamente más grande que $\mathfrak{p}$, lo cual es una contradicción, así que f es inyectiva. Afirmamos que $f(\text{Proj } T) = V(\mathfrak{a})$ donde $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Proj } T} \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Supongamos que $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}$, y sea $\mathfrak{q}'$ la imagen inversa de $\varphi(\mathfrak{q})$. Notamos que $\varphi(\mathfrak{q})$ es un ideal primo homogéneo de T porque φ es sobreyectiva. Esto es, si $ab \in \varphi(\mathfrak{p})$, donde ambos a y b son homogéneos, entonces a y b tienen preimágenes homogéneas cuyo producto está contenido en $\mathfrak{q}$, lo cual significa que al menos uno de a o b está contenido en $\varphi(\mathfrak{q})$. Por definición $\mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{q}$. Si la inclusión es propia, entonces escogemos $x \in \mathfrak{q}' - \mathfrak{q}$. Existe algún $y \in \mathfrak{q}$ tal que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Pero entonces $x - y \in \mathfrak{q}' - \mathfrak{q}$ y $\varphi(x - y) = 0$. De cualquier forma, 0 está contenido en cada ideal primo de T, y por lo tanto $x - y$ está contenido en $\mathfrak{a}$, lo cual es una contradicción, así que $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$, lo cual prueba la afirmación y muestra que $f(\text{Proj } T)$ es un conjunto cerrado. Así que f es una biyección y φ preserva la inclusión de ideales y por lo tanto f es un homeomorfismo. Finalmente, el mapeo sobre los gérmenes es el mismo que el mapeo localizado $\varphi_{(\mathfrak{p})} : S_{(\mathfrak{p})} \to T \otimes_S S_{(\mathfrak{p})}$, el cual es sobreyectivo porque φ lo es. Entonces f es una inmersión cerrada.

(2) Existe un diagrama conmutativo de anillos graduados donde los mapeo son proyecciones

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & S/I' \arrow[dl] \\ S/I & \end{tikzcd}$$

Este induce un diagrama conmutativo de esquemas

$$\begin{tikzcd} \text{Proj } S & \text{Proj } S/I' \arrow[l] \\ \text{Proj } S/I \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

El mapeo $S/I' \to S/I$ es un isomorfismo sobre la parte de grado d para $d \geq d_0$, así que por la Proposición 1.2.16 (2), el mapeo $\text{Proj } S/I \to \text{Proj } S/I'$ es un isomorfismo. El diagrama conmutativo arriba muestra que I e I' determinan el mismo subesquema cerrado. $\square$

Proposición 1.2.18. *Sea X un esquema, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, y definimos X_f como el subconjunto de puntos $x \in X$ tal que el germen f_x de f en x no está contenido en el ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ del anillo local $\mathcal{O}_x$. Si $U = \text{Spec } B$ es un subesquema abierto afín, y si $\overline{f} \in B = \Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es la restricción de f, entonces $U \cap X_f = D(\overline{f})$, por lo que podemos concluir que X_f es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Escribimos $U \cap X_f$ como el conjunto de $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ para los cuales $f_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ en el anillo local $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. También $D(\overline{f})$ es el conjunto de ideales primos de B que no contienen a f, el cual es el conjunto de ideales primos $\mathfrak{p}$ de B para los cuales f es invertible en $B_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Notamos que $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ es el conjunto de unidades de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Es claro que cada unidad de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ no está en $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Para el inverso, un elemento $x \notin \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ genera un ideal no contenido en $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$, así que debe ser el ideal unidad porque $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ es local, así que es una unidad. Entonces $U \cap X_f$ es el conjunto de elementos $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ para los cuales $f_\mathfrak{p}$ es invertible en $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, así que $U \cap X_f = D(\overline{f})$. Ahora cubrimos X con subesquemas abiertos afines Spec A_i. Entonces $\text{Spec } A_i \cap X_f$ es un conjunto abierto porque es igual a $D(f_i)$ donde f_i es la restricción de f a $\Gamma(\text{Spec } A_i, \mathcal{O}_{\text{Spec } A_i})$, y $\bigcup(\text{Spec } A_i \cap X_f) = X_f$, así que X_f es un subconjunto abierto de X. $\square$

Proposición 1.2.19. *Sea A un anillo, $X = \text{Spec } A$ y $f \in A$. Entonces f es nilpotente si y sólo si $D(f)$ es vacío.*

Demostración. La intersección de todos los ideales primos de A es igual al nilradical de A. Entonces f es nilpotente si y sólo si f está contenido en cada ideal primo, lo cual es equivalente a decir que $D(f) = \emptyset$. $\square$

1.3 Propiedades de Esquemas

En esta sección daremos algunas de la primera propiedades de los esquemas.

Definición 1.3.1. *Un esquema es* ***conexo*** *si su espacio topológico es conexo. Un esquema es* ***irreducible*** *si su espacio topológico es irreducible.*

Definición 1.3.2. *Un esquema X es* ***reducido*** *si para cada conjunto abierto U, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes. Equivalentemente, X es reducido si y sólo si el anillo local $\mathcal{O}_P$, para todo $P \in X$, no tienen elementos nilpotentes.*

Definición 1.3.3. *Un esquema X es* ***entero*** *si para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio entero.*

Ejemplo 1.3.4. *Si $X = \text{Spec } A$ es un esquema afín, entonces X es irreducible si y sólo si el nilradical nil A de A es primo; X es reducido si y sólo si nil $A = 0$; y X es entero si y sólo si A es un dominio entero.*

Proposición 1.3.5. *Un esquema es entero si y sólo si es reducido e irreducible.*

Demostración. Claramente un esquema entero es reducido. Si X no es irreducible, entonces podemos encontrar dos subconjuntos abiertos no vacíos disjuntos U_1 y U_2. Entonces $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2)$, el cual no es un dominio entero. Entonces entero implica irreducible.

Inversamente, supongamos que X es reducido e irreducible. Sea $U \subseteq X$ un subconjunto abierto, y supongamos que existen elementos $f, g \in \mathcal{O}(U)$ con $fg = 0$. Sea $Y = \{x \in U | f_x \in \mathfrak{m}_x\}$, y sea $Z = \{x \in U | g_x \in \mathfrak{m}_x\}$. Entonces Y y Z son subconjuntos cerrados (1.2.18). Pero como X es irreducible, también lo es U, así que uno Y o Z es igual a U, digamos $Y = U$. Pero entonces la restricción de f a cualquier subconjunto abierto afín de U será nilpotente (1.2.19), por lo tanto cero, así que f es zero. Esto prueba que X es entero. $\square$

Definición 1.3.6. *Un esquema X es* ***localmente noetheriano*** *si puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines Spec A_i, donde cada A_i es un anillo noetheriano. X es* ***noetheriano*** *si es localmente noetheriano y cuasicompacto. Equivalentemente, X es noetheriano si puede ser cubierto por un número finito de subconjuntos abiertos afines Spec A_i, con cada A_i un anillo noetheriano.*

Observación 1.3.7. *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, entonces X es un espacio topológico noetheriano, pero no inversamente.*

Proposición 1.3.8. *Un esquema X es localmente noetheriano si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $U = \text{Spec } A$, A es un anillo noetheriano. En particular, un esquema afín $X = \text{Spec } A$ es un esquema noetheriano si y sólo si el anillo A es un anillo noetheriano.*

Demostración. La primer implicación sigue de la definición, así que tenemos que probar que si X es localmente noetheriano, y si $U = \text{Spec } A$ es un subconjunto abierto afín, entonces A es un anillo noetheriano. Primero notemos que si B es un anillo noetheriano, también lo es cualquier localización B_f. Los subconjuntos abiertos $D(f) \cong \text{Spec } B_f$ forman una base para la topología de Spec B. Por lo tanto sobre un esquema localmente noetheriano X existe una base para la topología consistente del espectro de anillos noetherianos. En particular, nuestros conjuntos abiertos U pueden ser cubiertos por espectros de anillos noetherianos.

Así que nosotros hemos reducido a probar el siguiente enunciado: sea $X = \text{Spec } A$ un esquema afín, el cual puede ser cubierto por subconjuntos abiertos que son espectro de anillos noetherianos. Entonces

A es noetheriano. Sea $U = \text{Spec } B$ un subconjunto abierto de X, con B noetheriano. Entonces para algún $f \in A, D(f) \subseteq U$. Sea $\bar{f}$ la imagen de f en B. Entonces $A_f \cong B_{\bar{f}}$, por lo tanto A_f es noetheriano. Entonces podemos cubrir X por subconjuntos abiertos $D(f) \cong \text{Spec } A_f$ con A_f noetheriano. Como X es cuasicompacto, un número finito son suficientes.

Por lo tanto hemos reducido a un problema puramente algebraico: A es un anillo, $f_1, \ldots, f_r$ son un número finito de elementos de A, los cuales generan el ideal unidad, y cada localización A_{f_i} es noetheriano. Tenemos que probar que A es noetheriano. Primero establecemos un lema. Sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal, y sea $\varphi_i : A \to A_{f_i}$ el mapeo localización, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\mathfrak{a} = \bigcap \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a}) \cdot A_{f_i}).$$

La inclusión $\subseteq$ es obvia. Inversamente, dado un elemento $b \in A$ contenido en la intersección, podemos escribir $\varphi_i(b) = a/f_i^{n_i}$ en A_{f_i} para cada i, donde $a_i \in \mathfrak{a}$, y $n_i > 0$. Incrementando n_i si es necesario, podemos hacerlos todos iguales a un n fijo. Esto significa que en A tenemos

$$f_i^{m_i}(f_i^n b - a_i) = 0$$

para algún m_i. Y como antes, podemos hacer todos los $m_i = m$. Entonces $f_i^{m+n} b \in \mathfrak{a}$ para cada i. Como $f_1, \ldots, f_r$ generan el ideal unidad, lo mismo es verdad para su N-ésima potencia para cualquier N. Tomamos $N = n + m$. Entonces tenemos $1 = \sum c_i f_i^N$ para $c_i \in A$ adecuados. Por lo tanto

$$b = \sum c_i f_i^N b \in \mathfrak{a}$$

como requeríamos.

Ahora podemos fácilmente probar que A es noetheriano. Sea $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$ una cadena ascendente de ideales en A. Entonces para cada i,

$$\varphi_i(\mathfrak{a}_1) \cdot A_{f_i} \subseteq \varphi_i(\mathfrak{a}_2) \cdot A_{f_i} \subseteq \ldots$$

es una cadena ascendente de ideales en A_{f_i}, la cual debe ser estacionaria porque A_{f_i} es noetheriano. Existe sólo un número finito de A_{f_i}, por el lema concluimos que la cadena original es eventualmente estacionaria, y por lo tanto A es noetheriano. $\square$

Definición 1.3.9. *Un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas es* ***localmente de tipo finito*** *si existe una cubierta de Y por subconjuntos afines abiertos $V_i = \text{Spec } B_i$, tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $U_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$, donde cada A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. El morfismo f es de* ***tipo finito*** *si además cada $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por un número finito de los U_{ij}.*

Definición 1.3.10. *Un morfismo $f : X \to Y$ es un* ***morfismo finito*** *si existe una cubierta de Y por subconjuntos abiertos afines $V_i = \text{Spec } B_i$, tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ es afín, igual a Spec A_i, donde A_i es una B_i-álgebra la cual es una B_i-módulo finitamente generado.*

Definición 1.3.11. *Un* ***subesquema abierto*** *de un esquema X es un esquema U, cuyo espacio topológico es un subconjunto abierto de X, y cuya gavilla estructural $\mathcal{O}_U$ es isomorfa a la restricción $\mathcal{O}_X|_U$ de la gavilla estructural de X. Una* ***inmersión abierta*** *es un morfismo $f : X \to Y$ el cual induce un isomorfismo de X con un subesquema abierto de Y.*

Cada subconjunto abierto de un esquema lleva consigo una estructura única de subesquema abierto.

Definición 1.3.12. *Una* ***inmersión cerrada*** *es un morfismo $f : Y \to X$ de esquemas tal que f induce un homeomorfismo del espacio subyacente de Y sobre un subconjunto cerrado del espacio subyacente de X, y más aún el mapeo inducido $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ de gavillas sobre X es sobreyectivo. Un* ***subesquema cerrado*** *de un esquema X es una clase de equivalencia de inmersiones cerradas, donde decimos que $f : Y \to X$ y $f' : Y' \to X$ son equivalentes si existe un isomorfismo $i : Y' \to Y$ tal que $f' = f \circ i$.*

Ejemplo 1.3.13. *Sea A un anillo, y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Sea $X = Spec\ A$ y sea $Y = Spec\ A/\mathfrak{a}$. Entonces el homomorfismo de anillos $A \to A/\mathfrak{a}$ induce un morfismo de esquemas $f : Y \to X$ el cual es una inmersión cerrada. El mapeo f es un homeomorfismo de Y sobre el subconjunto cerrado $V(\mathfrak{a})$ de X, y el mapeo de gavillas estructurales $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ es sobreyectiva porque es sobreyectiva sobre los gérmenes, los cuales son localizaciones de A y $A/\mathfrak{a}$ respectivamente.*

Entonces para cualquier ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ obtenemos una estructura de subesquemas cerrados sobre el conjunto cerrado $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$. En particular, cada subconjunto cerrado Y de X tiene muchas estructuras de subesquema cerrado, correspondiente a todos los ideales $\mathfrak{a}$ para los cuales $V(\mathfrak{a}) = Y$. De hecho, cada estructura de subesquema cerrado sobre un subconjunto cerrado Y de un esquema afín X viene de un ideal en esta manera.

Definición 1.3.14. *La **dimensión** de un esquema X, denotada dim X, es su dimensión como un espacio topológico. Si Z es un subconjunto cerrado irreducible de X, entonces la **codimensión** de Z en X, denotada codim(Z, X) es el supremo de los enteros n tal que existe una cadena*

$$Z = Z_0 < Z_1 < \ldots < \ldots < Z_n$$

de subconjuntos cerrados irreducibles distintos de X, comenzando con Z.

Existe una importante generalización de la idea de preimagen de un conjunto bajo una función en la noción de producto fibrado de esquemas. Para llegar a esta definición, primero recordamos esta definición en la categoría de conjuntos.

El producto fibrado de dos conjuntos X y Y sobre un tercer conjunto S, esto es, de un diagrama de mapeos de conjuntos

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & S \end{tikzcd}$$

es por definición el conjunto

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \psi(y)\}.$$

El producto fibrado es a veces llamado el ***pullback*** de X (o de $X \to S$) a Y. Además $X \times_S Y$ viene con proyecciones naturales a X y Y haciendo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & S \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. De hecho $X \times_S Y$ puede ser definido por una propiedad universal, la cual usamos en la categoría de esquemas para definir el producto fibrado de esquemas.

Definición 1.3.15. *Sea S un esquema, y X, Y esquemas sobre S, es decir, esquemas con morfismos hacia S. Definimos el **producto fibrado** de X y Y sobre S, denotado $X \times_S Y$, como un esquema, junto con morfismos $p_1 : X \times_S Y \to X$ y $p_2 : X \times_S Y \to Y$, que hacen un diagrama conmutativo con los morfismos dados $X \to S$ y $Y \to S$, tal que dado cualquier esquema Z sobre S y morfismos dados $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ que hacen un diagrama conmutativo con los morfismos dados $X \to S$ y $Y \to S$, entonces existe un único morfismo $\theta : Z \to X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ \theta$, y $g = p_2 \circ \theta$. Los morfismos p_1 y*

p_2 *son llamados los* ***morfismos proyecciones*** *del producto fibrado sobre sus factores.*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] \arrow[dr, dashed, "\theta"] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Si X y Y son esquemas dados sin referencia a ningún esquema base S, tomamos $S = Spec\ \mathbb{Z}$ y definimos el ***producto*** *de X y Y, denotado $X \times Y$ como $X \times_{Spec\ \mathbb{Z}} Y$.*

Teorema 1.3.16. *Para cualesquiera dos esquemas X y Y sobre un esquema S, el producto fibrado $X \times_S Y$ existe, y es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Ver [[7], Teorema 3.3, p. 87]. □

En la demostración podemos ver que si $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ y $S = \text{Spec } R$, entonces $X \times_S Y = \text{Spec } (A \otimes_R B)$ y para el caso general "pegamos" estos esquemas para conseguir $X \times_S Y$.

Una aplicación importante del producto fibrado es la noción de extensión de base. Sea S un esquema fijo el cual pensamos como un esquema base, es decir estamos interesados en la categoría de esquemas sobre S. Si S' es otro esquema base y si $S' \to S$ es un morfismo, entonces para cualquier esquema X sobre S, sea $X' = X \times_S S'$, el cual es un esquema sobre S'. Decimos que X' es obtenido de X por una ***extensión de base*** $S' \to S$. Notamos que la extensión de base es una operación transitiva: si $S'' \to S' \to S$ son dos morfismos, entonces $(X \times_S S') \times'_S S'' \cong X \times_S S''$.

1.4 Morfismos Separados y Propios

A continuación describiremos dos propiedades de los morfismos entre esquemas, los cuales corresponden a las propiedades ya conocidas de espacios topológicos. Separabilidad corresponde a los axiomas de Hausdorff para espacios topológicos. Morfismos propios corresponde a la noción usual de propio, es decir la imagen inversa de un compacto es compacto. Sin embargo, las definiciones usuales no son adecuadas en geometría algebraica, ya que la topología de Zariski no es Hausdorff y el espacio topológico subyacente de un esquema no refleja con exactitud estas propiedades.

Definición 1.4.1. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. El* ***morfismo diagonal*** *es el único morfismo $\Delta : X \to X \times_Y X$ cuya composición con ambos mapeos proyección $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ es el mapeo identidad de $X \to X$. Decimos que un morfismo f es* ***separado*** *si el morfismo diagonal Δ es una inmersión cerrada. En este caso decimos también que X es* ***separado*** *sobre Y. Un esquema X es* ***separado*** *si es separado sobre Spec $\mathbb{Z}$.*

Proposición 1.4.2. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo de esquemas afines, entonces f es separado.*

Demostración. Sea $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$. Entonces A es un B-álgebra, y $X \times_Y X$ es también afín, dado por $\text{Spec } (A \otimes_B A)$. El morfismo diagonal Δ viene del homomorfismo diagonal $A \otimes_B A \to A$ definido por $a \otimes a' \to aa'$. Este es un homomorfismo sobreyectivo de anillos, por lo tanto Δ es una inmersión cerrada. □

Corolario 1.4.3. *Un morfismo arbitrario $f \to Y$ es separado si y sólo si la imagen del morfismo diagonal es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$.*

Demostración. Si f es un morfismo separado entonces el morfismo diagonal Δ es una inmersión cerrada, en particular $\Delta(X)$ es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$.

Por otra parte queremos probar que si $\Delta(X)$ es un subconjunto cerrado, entonces $\Delta : X \to X \times_Y X$ es una inmersión cerrada. En otras palabras, tenemos que revisar que $\Delta : X \to \Delta(X)$ es un homeomorfismo, y que el morfismo de gavillas $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \to \Delta_* \mathcal{O}_X$ es sobreyectivo. Sea $p_1 : X \times_Y X \to X$ la primera proyección. Como $p_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, se sigue que Δ da un homeomorfismo sobre $\Delta(X)$. Para cualquier punto $P \in X$, sea U una vecindad abierta afín de P la cual es suficientemente pequeña para que $f(U)$ esté contenida en un subconjunto abierto afín V de Y. Entonces $U \times_V U$ es una vecindad afín abierta de $\Delta(P)$, y por la proposición anterior, $\Delta : U \to U \times_V U$ es una inmersión cerrada. Por lo tanto el mapeo de gavillas es sobreyectivo en una vecindad de P, lo cual completa la prueba. $\square$

Si asumimos que todos los esquemas son noetherianos, entonces tenemos las siguientes propiedades:

1. Las inmersiones abiertas y cerradas son separadas.

2. La composición de dos morfismos separados es separado.

3. Los morfismos separados son estables bajo extensiones de base.

4. Si $f : X \to Y$ y $f' : X' \to Y'$ son morfismos separados de esquemas sobre un esquema base S, entonces el morfismo producto $f \times f' : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ es también separado.

5. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos morfismos y si $g \circ f$ es separado, entonces f es separado.

6. Un morfismo $f : X \to Y$ es separado si y sólo si Y puede ser cubierto por subconjuntos abiertos V_i tal que $f^{-1}(V_i) \to V_i$ es separado para cada i.

(ver [[7], Corolario 4.6, p. 99])

Definición 1.4.4. *Un morfismo $f : X \to Y$ es **propio** si es separado, de tipo finito y universalmente cerrado. Decimos que un morfismo en **cerrado** si la imagen de un subconjunto cerrado es cerrado. Un morfismo $f : X \to Y$ es **universalmente cerrado** si es cerrado, y para cada morfismo $Y' \to Y$, el morfismo correspondiente $f' : X' \to Y'$ obtenido por una extensión de base es también cerrado.*

De igual manera si asumimos que todos los esquemas son noetheriano tenemos que:

1. Una inmersión cerrada es propia.

2. La composición de morfismos propios es propio.

3. Los morfismos propios son estables bajo extensiones de base.

4. Si $f : X \to Y$ y $f' : X' \to Y'$ son morfismos propios de esquemas sobre un esquema base S, entonces el morfismo producto $f \times f' : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ es también propio.

5. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos morfismos, si $g \circ f$ es propio, y si g es separado, entonces f es propio.

6. Un morfismo $f : X \to Y$ es propio si y sólo si Y puede ser cubierto por subconjuntos abiertos V_i tal que $f^{-1}(V_i) \to V_i$ es propio para cada i.

(ver [[7], Corolario 4.8, p. 102]).

1.5 Espacio Tangente de Zariski

Existe una buena noción del germen de un esquema X en un punto $x \in X$ el cual es la intersección, en un sentido natural, de todos los subesquemas abiertos que contienen al punto. Esto está contenido en el anillo local de X en x, definido fácilmente como

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}_X(U).$$

El ideal maximal $\mathfrak{m}_{X,x}$ de este anillo local es el conjunto de todas las secciones que se anulan en x. El anillo local es un objeto simple: para calcularlo (y para mostrar en particular que es un anillo local, con el ideal maximal dado), podemos comenzar reemplazando X por una vecindad abierta afín de x, entonces asumimos que $X = \text{Spec } R$ y $x = [\mathfrak{p}]$. Podemos restringirnos a subconjuntos abiertos U en el límite directo a los conjuntos abiertos distinguidos Spec R_f tal que $f(x) \neq 0$, esto es $f \notin \mathfrak{p}$. Entonces

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} R_f = R_{\mathfrak{p}}$$

y

$$\mathfrak{m}_{X,x} := \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \mathfrak{p} R_f = \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$$

la localización de R en $\mathfrak{p}$.

Además tenemos que la ***dimensión*** de X en un punto $x \in X$, escrita $\dim(X, x)$ es la dimensión del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ (ver [[7], Teorema 3.2, p.17]).

La noción del anillo local de un esquema en un punto es crucial en toda la teoría de esquemas. Damos algunas ilustraciones de esto, mostrando como definir varias nociones geométricas en términos del anillo local.

Definición 1.5.1. *Sea X un esquema. El **espacio cotangente de Zariski** a X en x es $\mathfrak{m}_{x,X}/\mathfrak{m}_{x,X}^2$, considerado como un espacio vectorial sobre su **campo de residuos** $k(x) = \mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}_{x,X}$, donde $\mathfrak{m}_{x,X}$ es el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{x,X}$. El dual de este espacio vectorial es llamado el **espacio tangente de Zariski** en x.*

Para entender esta definición, consideremos primero una variedad algebraica compleja X que es no singular. En este contexto la noción del espacio tangente a X en un punto p no tiene ambigüedad: puede ser tomado como el espacio vectorial de derivaciones del anillo de gérmenes de funciones analíticas en el punto a $\mathbb{C}$. Si $\mathfrak{m}_{p,X}$ es el ideal de funciones regulares que se anulan en p, entonces tal derivación induce un mapeo $\mathbb{C}$-lineal $\mathfrak{m}_{p,X}/\mathfrak{m}_{p,X}^2 \to \mathbb{C}$, y el espacio tangente puede ser identificado en esta forma con $Hom_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{p,X}/\mathfrak{m}_{p,X}^2, \mathbb{C}) = (\mathfrak{m}_{p,X}/\mathfrak{m}_{p,X}^2)^*$, como veremos en el Capítulo 2. Fue la idea de Zariski que este último espacio vectorial es el análogo correcto del espacio tangente para un punto, suave o singular, sobre una variedad; Grothendieck subsecuentemente llevó esta idea sobre el contexto de esquemas, como la definición dada arriba.

Definición 1.5.2. *Un esquema X es **no singular** (o **regular**) en $x \in X$ si el espacio tangente de Zariski a X en x tiene dimensión igual a dim (X, x); además la dimensión del espacio tangente de Zariski es mayor o igual a dim (X, x) (ver [[7], Proposición 5.2A, p. 33]), cuando es mayor, decimos que X es **singular** en x.*

Y tenemos que X es no singular en x si y sólo si el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local regular (ver [[7], Teorema 5.2, p. 32]).

1.6 Gavillas de Módulos

Hasta ahora hemos discutido sobre esquemas y morfismos entre ellos sin mencionar otra gavilla que la gavilla estructural. Podemos incrementar la flexibilidad de nuestras técnicas considerando gavillas de módulos sobre un esquema dado. Especialmente importantes son las gavillas cuasicoherentes y coherentes, las cuales juegan el papel de módulos (respectivamente, módulos finitamente generados) sobre un anillo.

Definición 1.6.1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una* ***gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos*** *(o simplemente $\mathcal{O}_X$-módulo) es una gavilla $\mathscr{F}$ sobre X, tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el grupo $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, y para cada inclusión de conjuntos abiertos $V \subseteq U$, el homomorfismo restricción $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulo vía el homomorfismo de anillos $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$. Un morfismo $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos es un morfismo de gavillas, tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el mapeo $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos.*

Notemos que el kernel, cokernel, e imagen de un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos es otra vez un $\mathcal{O}_X$-módulo. Si $\mathscr{F}'$ es una subgavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos de una gavilla $\mathscr{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces la gavilla cociente $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo. Una suma directa, producto directo, límite directo o límite inverso de $\mathcal{O}_X$-módulos es un $\mathcal{O}_X$-módulo.

Definición 1.6.2. *Definimos la* ***gavilla producto tensorial*** *$\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G}$ de dos $\mathcal{O}_X$-módulos como la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathscr{G}(U)$. Frecuentemente escribimos simplemente $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, con $\mathcal{O}_X$ sobreentendido.*

Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es ***libre*** *si es isomorfo a la suma directa de copias de $\mathcal{O}_X$. Es* ***localmente libre*** *si X puede ser cubierto por subconjuntos abiertos U para los cuales $\mathscr{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X|_U$-módulo libre. En este caso, el* ***rango*** *de $\mathscr{F}$ sobre tal conjunto abierto es el número de copias de la gavilla estructural que necesitamos (finito o infinito). Una gavilla localmente libre de rango 1 es también llamada una* ***gavilla invertible*** *.*

Si X es conexo, el rango de una gavilla localmente libre es el mismo en todos lados.

Definición 1.6.3. *Una* ***gavilla de ideales*** *sobre X es una gavilla de módulos $\mathscr{J}$ la cual es una subgavilla de $\mathcal{O}_X$. En otras palabras, para cada conjunto abierto U, $\mathscr{J}(U)$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(U)$.*

Sea $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Sea $\mathscr{G}$ una gavilla de $\mathcal{O}_Y$-módulos. Entonces $f^{-1}\mathscr{G}$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo. Por las propiedades de adjunción de f^{-1} tenemos un morfismo $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ de gavillas de anillos sobre X. Definimos $f^*\mathscr{G}$ como el producto tensorial

$$f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Entonces $f^*\mathscr{G}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, llamado la ***imagen inversa*** de $\mathscr{G}$ por el morfismo f.

Como en la página 7 podemos ver que f_* y f^* son funtores adjuntos entre la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos y la categoría de $\mathcal{O}_Y$-módulos. Para ser precisos, para cualquier $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ y cualquier $\mathcal{O}_Y$-módulo $\mathscr{G}$, existe un isomorfismo natural de grupos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Definición 1.6.4. *Sea A un anillo y M una A-módulo. Definimos la* ***gavilla asociada*** *a M sobre Spec A, denotada $\widetilde{M}$, como sigue. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, sea $M_\mathfrak{p}$ la localización de M en $\mathfrak{p}$. Para cada conjunto abierto $U \subseteq$ Spec A definimos el grupo $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de funciones $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p}$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$, y tal que s es localmente una fracción m/f con $m \in M$ y $f \in A$. Para ser precisos, requerimos que para cada $\mathfrak{p} \in U$, exista una vecindad V de $\mathfrak{p}$ en U, y existan elementos $m \in M$ y $f \in A$, tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = m/f$ en $M_\mathfrak{q}$. Hacemos de $\widetilde{M}$ una gavilla usando los mapeos restricción obvios.*

Proposición 1.6.5. *Sea A un anillo, sea M un A-módulo, y $\widetilde{M}$ la gavilla sobre $X =$ Spec A asociada a M. Entonces:*

1. *$\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo;*
2. *para cada $\mathfrak{p} \in X$, el germen $(\widetilde{M})_\mathfrak{p}$ de la gavilla $\widetilde{M}$ en $\mathfrak{p}$ es isomorfo al módulo localizado $M_\mathfrak{p}$.*

Demostración. Recordando la construcción de la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$, es claro que $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo. La prueba de (1) es idéntica a la prueba de (1.2.3) reemplazando A por M es el lugar adecuado. □

Definición 1.6.6. *Una **gavilla coherente** sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es una gavilla $\mathscr{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos con las siguientes propiedades:*

1. *$\mathscr{F}$ es de **tipo finito** sobre $\mathcal{O}_X$, i. e., si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta $U \subset X$ tal que la restricción $\mathscr{F}|_U$ de $\mathscr{F}$ a U es generada por un número finito de secciones, en otras palabras, existe un mapeo sobreyectivo $\mathcal{O}_X^n|_U \to \mathscr{F}|_U$; y*

2. *para cualquier conjunto abierto $U \subset X$, y cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier morfismo $\varphi : \mathcal{O}_X^n|_U \to \mathscr{F}|_U$ de $\mathcal{O}_X$-módulos, el kernel de φ es de tipo finito.*

La gavilla de anillos $\mathcal{O}_X$ es coherente si es coherente considerada como una gavilla de módulos sobre si misma.

Una gavilla coherente es siempre una gavilla de ***presentación finita***, o en otras palabras cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que la restricción $\mathscr{F}|_U$ de $\mathscr{F}$ a U es isomorfo al cokernel de un morfismo $\mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{O}_X^m|_U$ para algunos números enteros n y m.

Para una gavilla de anillos $\mathcal{O}$, una gavilla $\mathscr{F}$ de $\mathcal{O}$-módulos es ***cuasicoherente*** si tiene una presentación local, i. e., si existe una cubierta abierta por U_i del espacio topológico y una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_{U_i}^{I_i} \to \mathcal{O}_{U_i}^{J_i} \to \mathscr{F}|_{U_i} \to 0.$$

Aunque hemos definido la noción de gavilla cuasicoherente y coherente sobre un esquema arbitrario, normalmente no mencionaremos gavilla coherente a menos que el esquema sea noetheriano. Esto es porque la noción de coherencia no es bien portada sobre un esquema no noetheriano.

Ejemplo 1.6.7. *Sobre cualquier esquema X, la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ es cuasicoherente, de hecho es coherente, aunque como acabamos de mencionar, no diremos que es coherente a menos que el esquema sea noetheriano.*

Ejemplo 1.6.8. *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, entonces cualquier gavilla de ideales $\mathscr{I}$ es coherente (ver [[7], Proposición 5.9, p. 116]).*

Existe una definición equivalente para las gavillas coherentes, que viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 1.6.9. *Sea A un anillo noetheriano, $X = \mathrm{Spec}\ A$ su espectro, V un conjunto abierto de X, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X|_V$-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathscr{F}$ es coherente*

2. *$\mathscr{F}$ es de tipo finito y cuasicoherente*

3. *Existe un A-módulo M de tipo finito tal que $\mathscr{F}$ es isomorfo a $\widetilde{M}|_V$*

Demostración. Ver [[5], Teorema 1.5.1, p. 92]. □

Proposición 1.6.10. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de espacios anillados. Si $\mathscr{G}$ es un $\mathcal{O}_Y$-módulo cuasicoherente, entonces $f^*\mathscr{G}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo cuasicoherente.*

Demostración. Para todo $x \in X$, existe V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y tal que $\mathscr{G}|_V$ es el cokernel de un homomorfismo $\mathcal{O}_Y^I|_V \to \mathcal{O}_Y^J|_V$. Si $U = f^{-1}(V)$, y si $f|_U$ es la restricción de f a U, tenemos $f^*(\mathscr{G})|_U = f^*|_U(\mathscr{G}|_V)$; como $f^*|_U$ es exacto a la derecha y conmuta con las sumas directas, $f^*(\mathscr{G}|_U)$ es el cokernel de un homomorfismo $\mathcal{O}_X^I|_U \to \mathcal{O}_X^J|_U$. □

Proposición 1.6.11. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de espacios anillados, y supongamos $\mathcal{O}_X$ coherente; entonces para todo $\mathcal{O}_Y$-módulo coherente $\mathscr{G}$, $f^*(\mathscr{G})$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente.*

Demostración. En efecto, con las notaciones de (1.6.11), podemos suponer que $\mathscr{G}|_V$ es el cokernel de un homomorfismo $v : \mathcal{O}_Y^q|_V \to \mathcal{O}_Y^p|_V$, como $f^*|_U$ es exacto derecho, $f^*|_U(v) : \mathcal{O}_Y^q|_U \to \mathcal{O}_Y^p|_U$ da nuestra afirmación. □

Si X y Y son noetherianos, no es verdad en general que f_* de una gavilla coherente es coherente. Por ejemplo sea k un campo, $X = \operatorname{Spec} k[x]$ y $Y = \operatorname{Spec} k$, la inclusión $k \hookrightarrow k[x]$ induce un morfismo $f : X \to Y$ de variedades sobre k. Sea $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$, la cual es una gavilla coherente sobre X. De cualquier forma $f_*(\mathscr{F})$ no es coherente sobre Y porque $f_*\mathscr{F}(Y) = \mathscr{F}(Y) = \widetilde{k[x]}$, y $k[x]$ no es finitamente generado como k-módulo.

Proposición 1.6.12. *Sea X una esquema noetheriano, y sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente.*

1. *Si el germen $\mathscr{F}_x$ es un $\mathcal{O}_x$-módulo libre para algún punto $x \in X$, entonces existe una vecindad U de x tal que $\mathscr{F}|U$ es libre.*
2. *$\mathscr{F}$ es localmente libre si y sólo si sus gérmenes $\mathscr{F}_x$ son $\mathcal{O}_x$-módulos libres para todo $x \in X$.*

Demostración. (1) Sea $V \ni x$ un abierto afín $\operatorname{Spec} A$ tal que $\mathscr{F}|_V \cong \widetilde{M}$ donde M es un A-módulo finitamente generado. Como $(\mathscr{F}|_V)_x = \mathscr{F}_x$ y $(\mathcal{O}|_V)_x = \mathcal{O}_x$, x corresponde a algún ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, y sabemos que $M_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo.

Sea $a_1, \ldots, a_n$ una base para $M_\mathfrak{p}$ como un $A_\mathfrak{p}$-módulo. Eliminando los denominadores, podemos asumir que $a_i \in M$. Sean $b_1, \ldots, b_m$ un conjunto de generadores de M como A-módulo. Entonces podemos escribir $b_i = \sum c_{i,j} a_j$ para todo i, y después de eliminar los denominadores obtenemos que algún múltiplo de b_i es generado por los a_j con coeficientes en A. Denotemos este múltiplo $d_i b_i$, entonces $d_i \notin \mathfrak{p}$ porque ninguno de los denominadores de los $c_{i,j}$ están en $\mathfrak{p}$. Ahora sea $e = d_1 \cdots d_m$ su producto. Entonces M está contenido en el A_e-módulo generado por $a_1, \ldots, a_n$, lo cual implica que M_e es generado por $a_1, \ldots, a_n$ como un A_e-módulo. Como los a_i no tienen relaciones como un $A_\mathfrak{p}$-módulo, ellos no tienen relación como un A_e-módulo porque $e \notin \mathfrak{p}$. Entonces M_e es una A_e-módulo libre. Por la Proposición 1.6.5, $\mathscr{F}|_{D(e)} \cong (M_e)$, lo cual da el resultado deseado porque $D(e)$ es un abierto en X que contiene a x.

(2) Si $\mathscr{F}$ es localmente libre, entonces cubre a X con abiertos afines U tal que $\mathscr{F}|_U$ es un $\mathcal{O}|_U$-módulo. Entonces para cualquier $x \in U$, $(\mathscr{F}|_U)_x$ es un $(\mathcal{O}|_U)_x$-módulo libre porque la localización conmuta con sumas directas (porque el producto tensorial lo hace). Usando el hecho de que $(\mathscr{F}|_U)_x = \mathscr{F}_x$ y $(\mathcal{O}|_U)_x = \mathcal{O}_x$, obtenemos que $\mathscr{F}_x$ es un $\mathcal{O}_x$-módulo libre para todo $x \in X$.

Inversamente, supongamos que $\mathscr{F}_x$ es un $\mathcal{O}_x$-módulo libre para todo $x \in X$. Por (1), para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta $U_x \ni x$ tal que $\mathscr{F}|_{U_x}$ es libre. Entonces por definición, $\mathscr{F}$ es localmente libre. □

Definición 1.6.13. *Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X, y sea $i : Y \to X$ el morfismo inclusión. Definimos la* **gavilla de ideales** *de Y, denotada $\mathscr{I}_Y$ como el kernel del morfismo $i^\# : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$.*

Proposición 1.6.14. *Sea X un esquema. Para cualquier subesquema cerrado Y de X, la correspondiente gavilla de ideales $\mathscr{I}_Y$ es una gavilla cuasicoherente de ideales sobre X. Si X es noetheriano, es coherente. Recíprocamente, cualquier gavilla cuasicoherente de ideales de X es la gavilla de ideales de un único subesquema cerrado determinado de X.*

Demostración. Si Y es un subesquema cerrado de X, entonces el morfismo inclusión $i : Y \to X$ es cuasicompacto y separado (1.4) y por lo tanto $i_*\mathcal{O}_Y$ es cuasicoherente sobre X. Por lo tanto $\mathscr{I}_Y$ siendo el núcleo de un morfismo de gavillas cuasicoherentes, es también cuasicoherente. Si X es noetheriano, entonces para cada subconjunto afín abierto $U = \operatorname{Spec} A$ de X, el anillo A es noetheriano, así que el ideal $I = \Gamma(U, \mathscr{I}_Y|_U)$, es finitamente generado, y por lo tanto $\mathscr{I}_Y$ es coherente.

Recíprocamente, dado un esquema X y una gavilla cuasicoherente de ideales $\mathscr{I}$, sea Y el soporte de la gavilla cociente $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}$. Entonces Y es un subespacio de X, y $(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{I})$ es el único subesquema cerrado de X con gavilla de ideales $\mathscr{I}$. La unicidad es clara, sólo falta revisar que $(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{I})$ es un subesquema cerrado. Esto es una cuestión local, así que asumimos que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. Como $\mathscr{I}$ es cuasicoherente, $\mathscr{I} = \widetilde{\mathfrak{a}}$ para algún ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Entonces $(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{I})$ es justo el subesquema cerrado de X determinado por el ideal $\mathfrak{a}$ (ver [[7], 3.2.3, p. 85]). □

1.7 Operaciones Tensoriales Sobre Gavillas

Primero recordamos las definiciones de varias operaciones tensoriales sobre un módulo. Sea A un anillo, y M un A-módulo. Sea $T^n(M)$ el producto tensorial $M \otimes \ldots \otimes M$ de M consigo mismo n veces, $n \geq 1$. Para $n = 0$, definimos $T^0 = A$. Entonces $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$ es una A-álgebra (no conmutativa), la cual llamamos el ***álgebra tensorial*** de M. Definimos el ***álgebra simétrica*** $S(M) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(M)$ de M como el cociente de $T(M)$ por el ideal generado por todas las expresiones $x \otimes y - y \otimes x$, para $x, y \in M$. Entonces $S(M)$ es una A-álgebra conmutativa. Su componente $S^n(M)$ en grado n es llamado el n-ésimo ***producto simétrico*** de M. Denotamos la imagen de $x \otimes y$ en $S(M)$ por $x \cdot y$, para cualesquiera $x, y \in M$. Como un ejemplo, notemos que si M es un A-módulo libre de rango r, entonces $S(M) \cong A[x_1, \ldots, x_r]$.

Definimos el ***álgebra exterior*** $\bigwedge(M) = \oplus_{n \geq 0} \bigwedge^n(M)$ de M como el cociente de $T(M)$ por el ideal generado por todas las expresiones $x \otimes x$ para $x \in M$. Notemos que este ideal contiene todas las expresiones de la forma $x \otimes y + y \otimes x$, así que $\bigwedge(M)$ es una A-álgebra graduada anti conmutativa. Esto significa que si $u \in \bigwedge^r(M)$ y $v \in \bigwedge^s(M)$, entonces $u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$ (donde denotamos por $\wedge$ a la multiplicación en esta álgebra; así que la imagen de $x \otimes y$ en $\bigwedge^2(M)$ es denotada por $x \wedge y$). La n-ésima componente $\bigwedge^n(M)$ es llamada la n-ésima ***potencia exterior*** de M.

Ahora sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, y sea $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos el ***álgebra tensorial, álgebra simétrica*** y ***álgebra exterior*** de $\mathscr{F}$ tomando la gavilla asociada a la pregavilla, la cual a cada conjunto abierto U le asigna la correspondiente operación tensorial aplicada a $\mathscr{F}(U)$ como un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo.

Proposición 1.7.1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Supongamos que $\mathscr{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libre de rango n. Entonces $T^r(\mathscr{F})$, $S^r(\mathscr{F})$ y $\bigwedge^r(\mathscr{F})$ son también localmente libres, de rangos n^r, $\binom{n+r-1}{n-1}$ y $\binom{n}{r}$, respectivamente.*

Demostración. Para cualquier $x \in X$, tenemos $T^r(\mathscr{F})_x = (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})_x = \mathscr{F}_x^{\otimes^r_{\mathcal{O}_x}}$, y similarmente para $S^r(\mathscr{F})$ y $\bigwedge^r(\mathscr{F})$ porque los gérmenes conmutan con los cocientes (y el germen de una pregavilla y de su gavilla asociada son los mismos). Así que nos reducimos a probar que para un R-módulo libre M de rango n, $T^r(M)$, $S^r(M)$ y $\bigwedge^r(M)$ son libres de rango n^r, $\binom{n+r-1}{n-1}$, y $\binom{n}{r}$ respectivamente.

Escribimos $M = R^n$. Entonces $T^r(M) = R^n \otimes \cdots \otimes R^n$. Como el producto tensorial conmuta con la suma directa, podemos expandirlo para obtener $T^r(M) = R^{n^r}$. Como M es un R-módulo libre, $S(M)$ es isomorfo al anillo de polinomios sobre R en n variables, y la parte de grado r es libremente generada por los monomios de grado r. El número de tales polinomios es el número de maneras de escoger r cosas de una colección, sin orden, de n elementos permitiendo repetición, y este número es dado por $\binom{n+r-1}{n-1}$. Ahora escogemos una base $e_1, \ldots, e_n$ de M. Entonces $\bigwedge^r(M)$ es libremente generado por las formas alternantes de longitud r de la forma $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ donde $i_1 < \cdots, i_r$. Así que el número de elementos básicos es $\binom{n}{r}$. □

Capítulo 2

Módulo de Diferenciales

En este capítulo estudiaremos objetos que juegan papeles en álgebra conmutativa y geometría algebraica análogos a los de fibrado tangente y cotangentes en geometría de variedades diferenciales.

Definición 2.0.2. *Sea R un anillo, S una R-álgebra con homomorfismo estructural ρ, M un S-módulo. Una derivación de S a M es una aplicación $d : S \to M$ que satisface las siguientes condiciones*

1. $\forall x, y \in S, d(x+y) = d(x) + d(y)$
2. $\forall x, y \in S, d(xy) = xd(y) + yd(x)$
3. $d(\rho(R)) = 0$

La condición 1. nos dice que d es un mapeo de grupos abelianos, la condición 2. que satisface la ***regla de Leibniz*** y la condición 3. que es un mapeo R-lineal. Designamos por $\mathrm{Der}_R(S, M)$ al conjunto de todas las R-derivaciones

Denotamos por $\rho_*(M)$ el R-módulo obtenido por la restricción de escalares a partir de un S-módulo M.

2.1 El funtor $\mathbf{Der}_R(S, -)$

Proposición 2.1.1. *Sea R un anillo, S una R-álgebra, M y M' dos S-módulos, f una aplicación S-lineal de M a M'. Si $d \in Der_R(S, M)$, entonces $f \circ d$ pertenece a $Der_R(S, M')$.*

Demostración. Es suficiente verificar que $f \circ d$ satisface la condición (2). Entonces tenemos que $f \circ d(xy) = f(xd(y) + yd(x)) = xf(d(y)) + yf(d(x)) = x(f \circ d)(y) + y(f \circ d)(x)$. □

Denotamos $\mathrm{Der}_R(S, f)$ a la aplicación : $D \to f \circ d$ de $\mathrm{Der}_R(S, M)$ en $\mathrm{Der}_R(S, M')$.

Es claro que las aplicaciones $M \mapsto \mathrm{Der}_R(S, M)$; $f \mapsto \mathrm{Der}_R(S, f)$ definen un funtor covariante, denotado $\mathrm{Der}_R(S, -)$, de la categoría $\mathrm{Mod}(S)$ de S-módulos en sí misma (si olvidamos la estructura, en la categoría Set de conjuntos).

Proposición 2.1.2. *Sea R un anillo, S una R-álgebra, σ un homomorfismo de anillos de S a T, M un T-módulo.*

1. *Si $d \in Der_R(T, M)$, entonces $d \circ \sigma$ pertenece a $Der_R(S, \sigma_*(M))$.*

2. *Si σ es sobreyectiva, la aplicación $d \mapsto d \circ \sigma$ es una biyección de $Der_R(T, M)$ sobre el submódulo de $Der_R(S, \sigma_*(M))$ de derivaciones que se anulan sobre $ker(\sigma)$.*

Demostración. 1. $(d \circ \sigma)(xy) = d(\sigma(x)\sigma(y)) = \sigma(x)(d \circ \sigma)(y) + \sigma(y)(d \circ \sigma)(x) = x(d \circ \sigma)(y) + y(d \circ \sigma)(x)$.

2. Es claro que $d \circ \sigma$ se anula sobre $\ker(\sigma)$, porque d es un homomorfismo de grupos aditivos. Recíprocamente, sea $d' \in \mathrm{Der}_R(S, \sigma_*(M))$ tal que se anula sobre $\ker(\sigma)$. Entonces define, pasando al cociente, una aplicación R-lineal de $S/\ker(\sigma) = T$ en M. Esta aplicación es una R-derivación de T en M. □

2.2 Construcción del Módulo de Diferenciales

Sea R un anillo, S una R-álgebra. Vamos a demostrar que el funtor $\mathrm{Der}_R(S, -)$ de $\mathrm{Mod}(S)$ en Set es representable y especificar un representante, i. e. un S-módulo $\Omega_{S/R}$ y una R-derivación $d_{S/R}$ de S a $\Omega_{S/R}$ tal que, para todo S-módulo M y toda R-derivación d de S en M, existe una única aplicación S-lineal e de $\Omega_{S/R}$ en M tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d_{S/R}"] \arrow[dr, "d"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "e"] \\ & M \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Definición 2.2.1. *Si S es una R-álgebra, entonces el* ***módulo de diferenciales de Kähler*** *de S sobre R, denotado $\Omega_{S/R}$, es el S-módulo generado por el conjunto $\{d(f) | f \in S\}$ con las relaciones*

$$\begin{aligned} d(bb') &= bd(b') + b'd(b) \ \textit{(Leibniz)} \\ d(ab + a'b') &= ad(b) + a'd(b') \ \textit{(R-lineal)} \end{aligned}$$

para toda $a, a' \in R$, y $b, b' \in S$. Escribimos df en lugar de $d(f)$. El mapeo $d : S \to \Omega_{S/R}$ definido por $d : f \mapsto df$ es una derivación R-lineal, llamada la ***derivación universal R-lineal***

Teorema 2.2.2. *La pareja $(\Omega_{S/R}, d)$ representa al funtor $Der_R(S, -)$. Es decir, sea e una R-derivación de S en un S-módulo M. Entonces existe una única aplicación S-lineal $e' : \Omega_{S/R} \to M$ tal que $e = e' \circ d$.*

Demostración.

Existencia Basta definir e' sobre los elementos básicos df de $\Omega_{S/R}$ y extender por linealidad. Definimos $e'(df) = ef$. Tenemos que revisar que e' es una aplicación S lineal, pero $e'(sdf) = e'(d(sf)) = e(sf) = se(f)$, por lo que sí es S-lineal.

Unicidad Una aplicación S-lineal e' de $\Omega_{S/R}$ a M tal que $e = e' \circ d$ está únicamente determinada por los elementos $e(x) = e'(d(x))$. □

Con el teorema anterior tenemos que

$$Der_R(S, M) \cong Hom_S(\Omega_{S/R}, M)$$

naturalmente, como un funtor de M. En este sentido la construcción de $\Omega_{S/R}$ "linealiza" la construción de derivación.

Si S es generado como una R-álgebra por elementos f_i, entonces $\Omega_{S/R}$ es generado como un S-módulo por los elementos df_i: Si $g = p(f_1, \ldots, f_r)$ es un polinomio en los f_i con coeficientes en R, entonces aplicando la regla de Leibniz repetidamente nos permite expresar dg como una combinación S-lineal de los df_i. En particular, $\Omega_{S/R}$ es finitamente generado como un S-módulo si S es finitamente generado como una R-álgebra.

Proposición 2.2.3. *Si $S = R[x_1, \ldots, x_r]$, el anillo de polinomios en r variables, entonces $\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^{r} S dx_i$, el módulo libre en los dx_i.*

Demostración. Como S es generado como una R-álgebra por los x_i, $\Omega_{S/R}$ es generado como un S-módulo por los dx_i y existe un epimorfismo $S^r \to \Omega_{S/R}$ llevando en i-ésimo vector básico a dx_i. Por otro lado, la derivación parcial $\partial/\partial x_i$ es una derivación R-lineal de S a S, y por lo tanto induce un mapeo de S-módulos $\partial_i : \Omega_{S/R} \to S$ que manda dx_i a 1 y todos los otros dx_j van a 0. Poniendo estos mapeos juntos obtenemos un mapeo inverso

$$\Omega_{S/R} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_r \end{pmatrix}} S^r$$

□

La asociación de una R-álgebra S (o equivalentemente un mapeo $R \to S$ de anillos) al S-módulo $\Omega_{S/R}$ y la derivación $d : S \to \Omega_{S/R}$

$$\begin{tikzcd} S & \Omega_{S/R} \\ R \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow"] & S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

es un funtor en el siguiente sentido: Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] & S' \\ R \arrow[u] \arrow[r] & R' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

de anillos, el cual podemos ver como un homomorfismo de parejas $\varphi : (R, S) \to (R', S')$ conseguimos un morfismo inducido

$$\begin{tikzcd} \Omega_{S/R} \arrow[r] & \Omega_{S'/R'} \\ S \arrow[u, "d"] \arrow[r] & S' \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

donde el mapeo horizontal inferior es el morfismo dado de R-álgebras y el mapeo horizontal superior es un morfismo de S-módulos (el módulo $\Omega_{S'/R'}$ siendo considerado como un S-módulo). El mapeo necesario S-lineal $\Omega_{S/R} \to \Omega_{S'/R'}$ es obtenido de la propiedad universal de $\Omega_{S/R}$, aplicado a la derivación R-lineal $S \to \Omega_{S'/R'}$ que es la composición del mapeo dado $S \to S'$ con la derivación universal R'-lineal $S' \to \Omega_{S'/R'}$.

Proposición 2.2.4 (Sucesión Cotangente Relativa)**.** *Si $R \to S \to T$ son mapeos de anillos, entonces existe una sucesión exacta derecha de T-módulos*

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S} \to 0$$

donde el mapeo del lado derecho lleva dc en dc y el mapeo del lado izquierdo lleva $c \otimes db$ en cdb.

Demostración. Los generadores de $\Omega_{T/S}$ (como un T-módulo) son los mismos que los generadores de $\Omega_{T/R}$, pero hay relaciones extras, de la forma $db = 0$ para $b \in S$. Esas relaciones son precisamente la imagen de los generadores $1 \otimes db$ del módulo de la izquierda. □

Proposición 2.2.5 (Sucesión Conormal)**.** *Si $\pi : S \to T$ es un epimorfismo de R-álgebras, con núcleo I, entonces existe una sucesión exacta de T-módulos*

$$I/I^2 \xrightarrow{d} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

donde el mapeo del lado derecho está dado por $D\pi : c \otimes db \mapsto cdb$ y el mapeo del lado izquierdo lleva la clase de f a $1 \otimes df$.

Demostración. Consideremos el mapeo $d : I \to \Omega_{S/R}$ que es la restricción de la derivación universal $S \to \Omega_{S/R}$. Si $b \in S$ y $c \in I$, entonces la fórmula de Leibniz $d(bc) = bd(c) + cd(b)$ muestra que d induce un mapeo S-lineal $I \to (\Omega_{S/R})/(I\Omega_{S/R}) = T \otimes_S \Omega_{S/R}$ (A.1.2). Tomando $b \in I$, la misma fórmula muestra que I^2 va a 0 en $T \otimes_S \Omega_{S/R}$, así que tenemos un mapeo de T-módulos

$$d : I/I^2 \to T \otimes_S \Omega_{S/R}$$

como está descrito en la proposición.

Para mostrar que el cokernel de este mapeo está dado por $D\pi$, consideramos como describir $T \otimes_S \Omega_{S/R}$ por generadores y relaciones: De la definición de $\Omega_{S/R}$, y la exactitud derecha del producto tensorial, vemos que $T \otimes_S \Omega_{S/R}$ es generado como T-módulo por los elementos db con $b \in S$, sujeto a las relaciones de R-linealidad y la regla de Leibniz. Está es la misma como la descripción por generadores y relaciones de $\Omega_{T/R}$, excepto que en $\Omega_{T/R}$ los elementos df para $f \in I$ son reemplazados por $d0$, el cual es por supuesto 0 como $0 \in R$. Entonces $\Omega_{T/R}$ es el cokernel de $d : I/I^2 \to T \otimes_S \Omega_{S/R}$ como afirmamos. □

2.3 Cálculo de Diferenciales

Si S es una R-álgebra finitamente generada, es decir $S = R[x_1, \ldots, x_r]/I$, y si $I = (f_1, \ldots, f_s)$, entonces de la Proposición 2.2.3 tenemos que $S \otimes_{R[x_1,\ldots,x_n]} \Omega_{R[x_1,\ldots,x_r]/R} = \oplus_i S dx_i$ es un S-módulo libre con generadores dx_i, y por la suceción conormal

$$\Omega_{S/R} = coker(d : I/I^2 \to \oplus_i S dx_i).$$

Escribiendo I/I^2 como la imagen homomorfa de un S-módulo libre con generadores e_i a las clases de los f_i, la composición

$$\mathcal{J} : \oplus S e_i \twoheadrightarrow I/I^2 \to \oplus_i S dx_i$$

es un mapeo de S-módulos libres que es representado por la matriz jacobiana de las f_j con respecto a las x_i: Esto es, la entrada (i, j) de $\mathcal{J}$ es $\partial f_j/\partial x_i$. Es decir, $\Omega_{S/R}$ es el cokernel de la matriz jacobiana $\mathcal{J} = (\partial f_j/\partial x_i)$, vista como un mapeo de S-módulos libres. Por ejemplo, si $S = R[x]/f(x)$, entonces

$$\Omega_{S/R} = Sdx/df = Sdx/(S \cdot f'(x)dx) \cong S/(f'(x)).$$

Para un ejemplo explícito, consideremos el anillo $S = R[x, y, t]/(y^2 - x^2(t^2 - x))$. En este caso $\mathcal{J}$ es la matrix 3×1

$$J = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xt^2 \\ 2y \\ -2x^2 t \end{pmatrix},$$

y el cálculo arriba muestra de $\Omega_{S/R}$ es el S-módulo libre con generadores dx, dy y dt módulo la relación

$$(3x^2 - 2xt^2)dx + (2y)dy - (2x^2 t)dt = 0.$$

2.4 Propiedades del Módulo de Diferenciales

Ahora listaremos algunas herramientas que ayudan al trabajar con el módulo de diferenciales.

Proposición 2.4.1 (Cambio de Base)**.** *La formación de los diferenciales conmuta con un "cambio de base arbitrario de R"; esto es, para cualesquiera R-álgebras R' y S existe un diagrama conmutativo como sigue*

$$\begin{tikzcd} & R' \otimes_R \Omega_{S/R} \arrow[dd, leftrightarrow, "\cong"] \\ R' \otimes_R S \arrow[ur, "1\otimes d"] \arrow[dr, "d"'] & \\ & \Omega_{(R'\otimes_R S)/R'} \end{tikzcd}$$

Demostración. Usamos la propiedad universal para conseguir el mapeo vertical como en el diagrama: Primero, $1 \otimes_R d : R' \otimes S \to R' \otimes \Omega_{S/R}$ es una derivación R'-lineal, así que existe un mapeo $\Omega_{(R'\otimes_R S)/R'} \to R' \otimes_R \Omega_{S/R}$ que manda $d(a' \otimes b)$ a $a' \otimes d(b)$. Para ir en la otra dirección, notemos que la composición de mapeos

$$S = R \otimes_R S \to R' \otimes_R S \xrightarrow{d} \Omega_{(R'\otimes_R S)/R'}$$

es una derivación R-lineal, así que existe un mapeo de S-módulos $\Omega_{S/R} \to \Omega_{(R'\otimes_R S)/R'}$ que manda db a $d(1 \otimes b)$. Como la llegada es un $(R' \otimes_R S)$-módulo, este induce una mapeo $(R' \otimes_R S)$-lineal

$$R' \otimes_R \Omega_{S/R} \to \Omega_{(R'\otimes_R S)/R'}$$

enviando $a' \otimes db$ a $a'db = d(a' \otimes b)$, y este es el inverso del mapeo previo. $\square$

En la categoría de R-álgebras el coproducto de un conjunto (posiblemente infinito) de álgebras $\{S_i\}$ es el ***producto tensorial restringido*** de las S_i, el cual escribimos como $\bigotimes\limits_i {}_R S_i$ o $\otimes_R S_i$. Recordemos que esta es el álgebra generado por los símbolos

$$b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \text{ con } b_i \in S_i, b_i = 1 \text{ excepto para un número finito de } i$$

módulo las relaciones de R-multilinealidad

$$b_1 \otimes \cdots \otimes (ab_i + a'b_i') \otimes \cdots = a(b_1 \otimes \cdots \otimes b_i \otimes \cdots) + a'(b_1 \otimes \cdots \otimes b_i' \otimes \cdots)$$

para $a, a' \in R$ y $b_i, b_i' \in S_i$ con la multiplicación definida por componentes.

Para simplificar la notación, vamos a aprovechar la conmutatividad del producto tensorial y permitirnos escribir los tensores en cualquier orden.

Proposición 2.4.2 (Producto Tensorial)**.** *Si $T = \otimes_R S_i$ es el coproducto de algunas R-álgebras S_i, entonces*

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\cong \oplus_i (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \\ &= \oplus_i ((\bigotimes_{j\neq i} {}_R S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R}) \end{aligned}$$

por el isomorfismo α que satisface

$$\alpha : d(\cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots) \mapsto (\ldots, 0, 0, 1 \otimes db_i, 0, 0, \ldots),$$

donde $b_i \in S_i$ ocurre en el i-ésimo lugar en cada expresión.

Demostración. Para justificar el signo de igualdad, notemos que

$$\begin{aligned} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} &= (\bigotimes_{j\neq i} {}_R S_j) \otimes S_i \otimes_{S_i} \otimes \Omega_{S_i/R} \\ &= (\bigotimes_{j\neq i} {}_R S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R}. \end{aligned}$$

Para probar el isomorfismo, sea

$$\Omega := \oplus_i((\otimes_{j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R})$$

la suma directa, donde hemos escrito $\otimes$ por $\otimes_R$. Escribimos $d_i : S_i \to \Omega_{S_i/R}$ para la derivación universal sobre S_i. Cualquier elemento $c \in T$ puede ser escrito como una suma finita de términos $\otimes b_i$ con $b_i \in S_i$ y sólo un número finito de b_i diferentes de 1. Entonces sólo un número finito de mapeos

$$1 \otimes d_i : T = (\otimes_{j\neq i} S_j) \otimes S_i \to (\otimes_{j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R}$$

son no cero en c, así que podemos definir un mapeo $e : T \to \Omega$ como la suma $\sum_i 1 \otimes d_i$. Como cada mapeo $1 \otimes d_i$ es una derivación, e también lo es. Entonces existe un homomorfismo de T-módulos inducido $\alpha : \Omega_{T/R} \to \Omega$ que lleva $d(\otimes_i b_i)$ a $e(\otimes_i b_i)$.

Para producir el inverso de α, notemos que para cada S_i la composición del mapeo natural $S_i \to T$ con la derivación universal de T es una derivación R-lineal $S_i \to \Omega_{T/R}$ y entonces induce un mapeo S_i-lineal $\Omega_{S_i/R} \to \Omega_{T/R}$ mandando $d_i b_i$ a $d(1 \otimes b_i)$, donde 1 es la identidad de $(\otimes_{j\neq i} S_j)$. Como la llegada es un T-módulo, este se extiende a una mapeo T-lineal

$$\beta_i : T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \to \Omega_{T/R}$$

con

$$\beta_i : 1 \otimes d_i b_i \mapsto d(1 \otimes b_i).$$

Los β_i juntos dan un mapeo $\Omega = \oplus_i T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \to \Omega_{T/R}$ que es el inverso de α. □

La Proposición 2.4.2 es la expresión geométrica de un hecho fundamental, el cual por simplicidad enunciamos para el producto tensorial de dos factores. Si X_1 y X_2 son variedades diferenciables, entonces la fibra en un punto $(p_1, p_2) \in X_1 \times X_2$ del fibrado tangente de $X_1 \times X_2$ es canónicamente isomorfo a la suma directa $T_{p_1}X_1 \oplus T_{p_2}X_2$. Para expresarlo formalmente, escribimos π_1 y π_2 las proyecciones de $X_1 \times X_2$ a X_1 y X_2 respectivamente. Denotamos por $\pi_1^* TX_1$ el pullback de $X_1 \times X_2$ al fibrado tangente a X_1, y similarmente para la otra proyección. En estos términos tenemos:

$$T(X_1 \times X_2) \cong \pi_2^* TX_2 \oplus \pi_1^* TX_1$$

En la Proposición 2.4.2, los papeles de X_1 y X_2 son jugados por dos R-álgebras S_1 y S_2, el producto directo de espacios corresponde al producto tensorial $T = S_1 \otimes_R S_2$, y el pullback es también dado por un producto tensorial: Si M es un S_1-módulo, correspondiente a un fibrado sobre X_1, entonces el pullback a $X_1 \times X_2$ corresponde al $(S_1 \otimes_R S_2)$-módulo $M \otimes_{S_1} (S_1 \otimes_R S_2)$. En particular si tomamos el S_1-módulo $\Omega_{S_1/R}$ correspondiente a un fibrado sobre X_1, y el S_2-módulo $\Omega_{S_2/R}$ correspondiente a un fibrado sobre X_2, tenemos que el fibrado correspondiente al producto tensorial $S_1 \otimes S_2$ es isomorfo a la suma directa de los $S_1 \otimes_R S_2$-módulos correspondientes, es decir, $(\Omega_{S_1/R} \otimes_{S_1} S_1 \otimes_R S_2) \oplus (\Omega_{S_2/R} \otimes_{S_2} S_1 \otimes_R S_2) = \Omega_{S_1 \otimes S_2/R}$.

Corolario 2.4.3. *Si $T := S[x_1, \ldots, x_r]$ es un anillo de polinomios sobre una R-álgebra S, entonces*

$$\Omega_{T/R} \cong (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (\oplus_i T dx_i).$$

Demostración. Sea $T' = R[x_1, \ldots, x_r]$. Escribiendo T como $S \otimes_R T'$, podemos aplicar la proposición para conseguir $\Omega_{T/R} \cong (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{T'} \Omega_{T'/R})$. Por la Proposición 2.2.3, $T \otimes_{T'} \Omega_{T'/R} = T \otimes_{T'} (\oplus T' dx_i) = \oplus_i T dx_i$. □

Proposición 2.4.4 (Localización). *Sea U un conjunto multiplicativo de S, M un $U^{-1}S$-módulo.*

1. *La aplicación $d \mapsto d \circ i_U$ de $Der_R(U^{-1}S, M)$ en $Der_R(S, (i_U)_*(M))$ es un isomorfismo (de B-módulos), funtorial en M. Donde $i_U : S \to S[U^{-1}]$ es el mapeo canónico e $(i_U)_*(M)$ es el S-módulo obtenido de la restricción de escalares a partir del $U^{-1}S$-módulo M.*

2. *Existe un isomorfismo ϕ de $U^{-1}S$-módulos de $\Omega_{U^{-1}S/R}$ sobre $U^{-1}(\Omega_{S/R}) = \Omega_{S/R} \otimes_S U^{-1}S$ haciendo conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U^{-1}S \arrow[r, "d_{U^{-1}S/R}"] \arrow[dr, "U^{-1}d_{S/R}"'] & \Omega_{U^{-1}S/R} \arrow[d, "\phi"] \\ & U^{-1}\Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Demostración.

1. Por la Proposición 2.1.2, si d pertenece a $\mathrm{Der}_R(U^{-1}S, M)$, $d \circ i_U$ pertenece a $\mathrm{Der}_R(S, (i_U)_*(M))$.

Sea $e \in \mathrm{Der}(S, (i_U)_*(M))$. La aplicación d de $U^{-1}S$ en M tal que $d(x/s) = \dfrac{se(x) - xe(s)}{s^2}$ está bien definida y pertenece a $\mathrm{Der}_R(U^{-1}S, M)$. La aplicación así definida : $e \mapsto d$ de $\mathrm{Der}_R(S, (I_U)_*(M))$ en $\mathrm{Der}_R(U^{-1}S, M)$ es el inverso de la aplicación : $d \mapsto d \circ i_U$.

2. Usamos la sucesión de isomorfismos funtoriales en M:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/R}, (i_U)_*(M)) \arrow[r] & \mathrm{Der}_R(S, (i_U)_*(M)) \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(U^{-1}S, M) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{U^{-1}S}(\Omega_{S/R} \otimes_S U^{-1}S, M) \arrow[u] & & \mathrm{Hom}_{U^{-1}S}(\Omega_{U^{-1}S/R}, M) \end{tikzcd}$$

que dan un isomorfismo funtorial en M de $\mathrm{Hom}_{U^{-1}S}(\Omega_{S/R} \otimes_S U^{-1}S, M) = \mathrm{Hom}_{U^{-1}S}(U^{-1}\Omega_{S/R}, M)$ sobre $\mathrm{Hom}_{U^{-1}S}(\Omega_{U^{-1}S/R}, M)$.

Este isomorfismo funtorial está dado por $\mathrm{Hom}(\phi, M)$ donde ϕ es el isomorfismo de $\Omega_{U^{-1}S/R}$ sobre $U^{-1}\Omega_{S/R}$ que proviene del elemento $1_{U^{-1}\Omega_{S/R}}$ tomando $M = U^{-1}\Omega_{S/R}$. □

Proposición 2.4.5 (Producto Directo). *Si $S_1, \ldots, S_n$ son R-álgebras y $S = \prod_i S_i$, entonces*

$$\Omega_{S/R} = \prod_i \Omega_{S_i/R}.$$

Demostración. Si e_i es el idempotente de S que es la unidad de S_i, y D es una derivación de S a un S-módulo M, entonces $De_i = De_i^2 = 2e_i De_i$, así que $(2e_i - 1)De_i = 0$; de cualquier forma, $(2e_i - 1)(2e_i - 1) = 1$, así que $2e_i - 1$ es una unidad, lo que implica que $De_i = 0$ y por lo tanto

$$D(e_i f) = e_i Df$$

.

Entonces D mapea $S_i = e_i S$ a $M_i := e_i M$ y corresponde a un único mapeo $\Omega_{S_i/R} \to M_i$. De esto sigue que $\prod_i \Omega_{S_i/R}$ tiene la propiedad universal que caracteriza $\Omega_{S/R}$. □

Proposición 2.4.6. *Sea $\varphi : S \to S'$ un mapeo de R-álgebras, y sea $\delta : S \to S'$ un mapeo de grupos abelianos. Si $\delta(S)^2 = 0$ entonces $\varphi + \delta$ es un homomorfismo de R-álgebras si y sólo si δ es una derivación R-lineal en el sentido de que $\delta(b_1 b_2) = \varphi(b_1)\delta(b_2) + \varphi(b_2)\delta(b_1)$.*

Demostración. Tenemos que

$$(\varphi+\delta)(b_1b_2)=\varphi(b_1b_2)+\delta(b_1b_2),$$

mientras que

$$(\varphi+\delta)(b_1)\cdot(\varphi+\delta)(b_2)=\varphi(b_1b_2)+\varphi(b_1)\delta(b_2)+\varphi(b_2)\delta(b_1)+\delta(b_1)\delta(b_2)$$

El úlitmo término es 0, así que las dos expresiones son iguales si y sólo si $\delta(b_1b_2)=\varphi(b_1)\delta(b_2)+\varphi(b_2)\delta(b_1)$, probando que $\varphi+\delta$ es un homomorfismo de anillos si y sólo si δ es un derivación. Como φ preserva R, tenemos que $\varphi+\delta$ preserva R si y sólo si $\delta(R)=0$. Entonces $\varphi+\delta$ es un homomorfismo de R-álgebras si y sólo si δ es una derivación R-lineal. □

Si $S\subset T$ son campos, entonces $\Omega_{T/S}$ es un espacio vectorial sobre T. Como $\Omega_{T/S}$ es generado por los elementos $\{dx|x\in T\}$, este debe tener una base consistente de subconjuntos de estos elementos. Decimos que una colección $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de T es una ***base diferencial*** para T/S si el conjunto $\{dx_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una base para $\Omega_{T/S}$ como un espacio vectorial sobre T. Por ejemplo, si $T=S(\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ es el campo de funciones racionales en algún conjunto de variables $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces sigue de las Proposiciones 2.2.3, **??**, y (para el caso donde Λ es infinito) Proposición 2.4.2, que $\Omega_{T/S}$ es libre sobre los elementos dx_λ.

Para el siguiente resultado usamos la siguiente definición:

Definición 2.4.7. *Una extensión separablemente generada de un campo k es una extensión algebraica separable de una extensión puramente trascendente de k.*

En otras palabras, $k(x)$ es separablemente generada sobre k si existe en $k(x)$ un conjunto (u) de variables independientes xobre k, tal que $k(x)$ es separable sobre $k(u)$; el número de variables u_i debe obviamente ser igual a la dimensión de $k(x)$ sobre k. Si la característica del campo k es cero, cada extensión es separablemente generada.

Teorema 2.4.8. *Si T una extensión de campo finitamente generada de un campo S, entonces $dim_T\Omega_{T/S}\geq tr.d.T/S$, y la igualdad se cumple si y sólo si T es separablemente generada S.*

Demostración. Ver ([[9]], Teorema 59, p. 191]). Para la igualdad ver ([[13], Proposición 16, p. 14). □

Proposición 2.4.9. *Sea B un anillo local el cual contiene a un campo k isomorfo a su campo de residuos $B/\mathfrak{m}$. Entonces el mapeo $\delta:\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\Omega_{B/k}\otimes_B k$ de la sucesión conormal es un isomorfismo.*

Demostración. De acuerdo a la sucesión conormal, el cokernel de δ es $\Omega_{k/k}=0$, así que δ es sobreyectiva. Para probar que δ es inyectiva, es suficiente probar que el mapeo

$$\delta':\mathrm{Hom}_k(\Omega_{B/k}\otimes k,k)\to\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,k)$$

de espacios vectoriales duales es sobreyectivo. El término del lado izquierdo es isomorfo a $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k},k)$, el cual por definición de los diferenciales, puede ser identificado con el conjunto $\mathrm{Der}_k(B,k)$ de k-derivaciones de B a k. Si $d:B\to k$ es una derivación, entonces $\delta'(d)$ es obtenido restringiéndose a $\mathfrak{m}$, y notamos que $d(\mathfrak{m}^2)=0$. Ahora, para probar que δ' es sobreyectivo, sea $h\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,k)$. Para cada $b\in B$, podemos escribir $b=\lambda+c,\lambda\in k,c\in\mathfrak{m}$, en una única manera. Definimos $db=h(\overline{c})$, donde $\overline{c}\in\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es la imagen de c. Entonces uno verifica inmediatamente que d es una k-derivación de B a k, y que $\delta'(d)=h$. Entonces δ' es sobreyectiva, como queríamos. □

2.5 Otra Construcción Para Los Diferenciales de Kähler

Existe una otra forma para la construcción del módulo de diferenciales que explicaremos a continuación. En lo siguiente supondremos que X y Y son esquemas afines reducidos sin singularidades, lo cual nos implica que todos sus puntos son regulares, así que sus anillos locales son regulares y por [[7], Teorema 5.1, p. 32] y el teorema de la función implícita tenemos que X y Y son variedades diferenciable.

Sea R un anillo, S una R-álgebra de homomorfismo estructural ρ, M un S-módulo. Dotamos al conjunto $D_S(M) = S \times M$ de estructura de anillo definiendo la suma y el producto como sigue:

$$\begin{aligned}(s,m)+(s',m') &= (s+s', m+m')\\ (s,m)(s',m') &= (ss', sm'+s'm)\end{aligned}$$

y de una estructura de S-álgebra de homomorfismo estructural la inyección $i : s \to (s, 0)$ de S en $D_S(M)$.

También, $D_S(M)$ es provisto de una estructura de R-álgebra con homomorfismo estructural $i \circ \rho$.

Si p es la preyección $(s,m) \mapsto s$ de $D_S(M)$ sobre S, entonces tenemos una sucesión exacta de S-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{i} D_S(M) \xrightarrow{p} S \to 0.$$

Sea R un anillo y S una R-álgebra. La aplicación A-bilineal $(s,s') \mapsto ss'$ de $S \times S$ en S define una aplicación R-lineal μ de $S \otimes_R S$ en S tal que

$$\mu(\sum_i s_i \otimes s_i') = \sum_i s_i s_i'$$

Esta aplicación es un morfismo de R-álgebras. Es sobreyectiva, además, si i_1 e i_2 son los homomorfismos de R-álgebras de S en $S \otimes_R S$ definidos por

$$i_1(s) = s \otimes 1 \qquad i_2(s) = 1 \otimes s$$

tenemos que

$$\mu \circ i_1 = \mu \circ i_2 = 1_S.$$

Proveemos a $S \otimes_R S$ la estructura de S-álgebra con morfismo estructural i_1. Es claro que μ es un homomorfismo de S-álgebras.

Proposición 2.5.1. *Sea S una R-álgebra, M un S-módulo. La aplicación $d \mapsto 1_S + d$, donde $(1_S + d)(s) = (s, d(s))$ es una biyección de conjuntos de $Der_R(S, M)$ sobre el conjunto de homomorfismos de A-álgebras de B en $D_S(M)$ inversos derechos de p.*

Demostración. Sea d una R-derivación de S en M. Poniendo $1_B + d = e$, tenemos que, para $s, s' \in S$, $e(ss') = (ss', d(ss')) = (ss', sd(s') + s'd(s)) = (s, d(s))(s', d(s')) = e(s)e(s')$.

Sea $r \in R, s \in S$. Entonces, $e(rs) = e(\rho(r)s) = (\rho(r)s, \rho(r)d(s)) = re(s)$ y por lo tanto e es un homomorfismo de R-álgebras de S en $D_S(M)$. Es claro que $p \circ e = 1_S$.

Recíprocamentte, sea e un homomorfismo de R-álgebras de S en $D_S(M)$ tal que $p \circ e = 1_S$. Si s es un elemento de S, $e(s)$ es escrito $(s, d(s))$. La definición del producto en $D_S(M)$ muestra que d es una derivación de S en M. Esta es una R-derivación porque, si $r \in R$, $e(\rho(r)) = (\rho(r), 0)$. $\square$

Lema 2.5.2. *El núcleo I de μ es el ideal de $S \otimes_R S$ generado por los elementos $1 \otimes s - s \otimes 1$, $s \in S$.*

Demostración. Es claro que $\mu(1 \otimes s - s \otimes 1) = 0$. Por otra parte, si $\sum_i s_i \otimes s_i'$ pertenece a I, podemos escribir

$$\sum_i s_i \otimes s_i' = \sum_i (s_i \otimes s_i') - \sum_i (s_i s_i') \otimes 1 = \sum_i (s_i \otimes 1)(1 \otimes s_i' - s_i' \otimes 1)$$

ya que $\sum_i s_i s_i' = 0$. $\square$

Lema 2.5.3. *$S \otimes_R S = i_1(S) \oplus I$.*

Demostración. La igualdad $S \otimes_R S = i_1(S) + I$ resulta de la igualdad

$$s \otimes s' = (ss') \otimes 1 + (s \otimes 1)(1 \otimes s' - s' \otimes 1) \text{ si } s, s' \in S$$

La igualdad $\mu \circ i_1 = 1_S$ muestra también que $I \cap i_1(S) = (0)$. □

Del Lema 2.5.3 tenemos que $(S \otimes_R S)/I^2 = i_1(S) \oplus I/I^2$. Sea ψ el isomorfismo $i_1 \oplus 1_{I/I^2}$ de S-módulos $D_S(I/I^2) = S \oplus I/I^2$ sobre $(S \otimes_R S)/I^2$, π el epimorfismo canónico de $S \otimes_R S$ sobre $(S \otimes_R S)/I^2$. La sucesión de homomorfismos de R-álgebras

$$\begin{array}{ccccccccc} S & \xrightarrow{i_2} & S \otimes_R S & \xrightarrow{\pi} & (S \otimes_R S)/I^2 & \xrightarrow{\psi^{-1}} & D_S(I/I^2) & \xrightarrow{p} & S \\ s & \longrightarrow & 1 \otimes s & \longrightarrow & (s \otimes 1, \pi(1 \otimes s - s \otimes 1)) & \longrightarrow & (s, \pi(1 \otimes s - s \otimes 1)) & \longrightarrow & s \end{array}$$

indica que el homomorfismo $e = \psi^{-1} \circ \pi \circ i_2$ de R-álgebras de S a $D_S(M)$ es un inverso derecho de p.

La aplicación $d_{S/R}$ de S a I/I^2 definida por $d_{S/R}(s) = \pi(1 \otimes s - s \otimes 1)$ es entonces una R-derivación de S al S-módulo I/I^2.

Así que tenemos:

$$\Omega_{S/R} = I/I^2.$$

2.6 Diferenciales y el Fibrado Cotangente

Hemos dicho que el módulo de diferenciales tiene algo que ver con el fibrado tangente, y describiremos la conexión más precisamente.

En lo siguiente vamos a tomar a una ***variedad abstracta*** (o simplemente ***variedad***) como un esquema entero separado de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k. En particular una variedad algebraica (afín, cuasiafín, proyectiva o cuasiproyectiva) sobre k es una variedad en el sentido que acabamos de definir (ver [[7], Proposición 4.10, p. 104]). Más aún si es no singular (regular), por ([[7], Teorema 5.1, p.32]) y el teorema de la función implícita, es una variedad diferenciable.

Brevemente la conexión es la siguiente: Si Y es una variedad algebraica afín sobre un campo k con anillo de coordenadas S, entonces $\Omega_{S/k}$ juega el papel del fibrado cotangente de Y. Más generalmente, si $Y \to X$ es un morfismo de variedades afínes correspondiente al mapeo $R \to S$ de anillos de coordenadas, entonces $\Omega_{R/S}$ juega el papel del fibrado cotangente relativo del mapeo.

Aquí tenemos una descripción más detallada: para cualquier variedad diferenciable X (sobre $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) existe un fibrado vectorial sobre X, llamado el ***fibrado tangente*** y escrito TX, cuya fibra sobre un punto $x \in X$ es el espacio tangente T_xX de X en x. Si $\varphi : X \to Y$ es un mapeo diferenciable de variedades diferenciables, entonces para cada $x \in X$ la derivada de φ es un mapeo $D\varphi$ de T_xX al espacio tangente de Y en $\varphi(x)$, es decir a $T_{\varphi(x)}Y$. Estas derivadas se encajas juntas en un mapeo de fibrados vectoriales sobre X

$$D\varphi : TX \to \varphi^*TY$$

donde φ^*TY es el fibrado tangente a Y "jalado hacia atrás" por medio de φ, el cual denominamos el ***"pullback"*** y que puede ser definido como el producto fibrado $X \times_Y TY$, así que la fibra sobre x de φ^*TY es $T_{\varphi(x)}Y$.

Para conectar estas construcciones con las previas, sea S' el anillo de funciones suaves sobre X. Para cualquier $f \in S'$, pensada como un mapeo a $\mathbb{R}$, la derivada $Df : TX \to f^*T\mathbb{R} = X \times \mathbb{R}$ es un funcional lineal sobre cada fibra T_xX que varía suavemente con x. Entonces Df puede ser considerado como una sección global del dual T^*X de fibrado tangente, el cual llamamos el ***fibrado cotangente*** de X. Por supuesto, si g es otra función, entonces $D(fg) = fDg + gDf$, así que podemos pensar a D como una derivación del anillo S' de funciones suaves sobre X al S'-módulo Ω' de secciones globales del fibrado cotangente de X.

De la propiedad universal del módulo de diferenciales de Kähler se sigue que existe un homomorfismo de S'-módulos $\alpha : \Omega_{S'/k} \to \Omega'$ que lleva la derivación universal d a la derivación D arriba construida. Este no es usualmente un isomorfismo, esencialmente porque no tomamos en cuenta la topología al definir $\Omega_{S'/k}$, pero si X es realmente una variedad afín real y S su anillo de coordenadas, entonces podemos probar que $\Omega_{S/k}$ es precisamente el objeto algebraico análogo a Ω' en el sentido que $\Omega' = \Omega_{S/k} \otimes_S S'$. Como el fibrado T^*X y el módulo Ω' son objetos equivalentes, vemos que el módulo algebraico de diferenciales $\Omega_{S/k}$ es un buen sustituto para el fibrado cotangente. Similarmente, su dual $\mathrm{Der}_R(S, S)$ es un reemplazo satisfactorio para el fibrado tangente.

Si $\varphi : X \to Y$ es un mapeo de variedades diferenciables, escribimos $\varphi^\#$ para el homomorfismo del anillo de funciones suaves sobre Y al anillo de funciones suaves sobre X que es dado por la composición con φ. El dual del mapeo $D\varphi : TX \to \varphi^*TY$ es un mapeo $\varphi^*(T^*Y) \to T^*X$. Este es el mapeo que es análogo al mapeo $D(\varphi^\#)$.

La construcción que hemos hecho tiene algo análogo más general que es valioso tener en mente. Si $\varphi : X \to Y$ es un mapeo de variedades diferenciables cuya derivada $D\varphi$ es sobreyectiva en todas partes, es decir, es una ***sumersión***, entonces el núcleo de $D\varphi : TX \to \varphi^*TY$ es otra vez un fibrado sobre X, llamado el ***fibrado tangente relativo***, $T(X/Y)$, y su dual es el ***fibrado cotangente relativo*** $T^*(X/Y)$. El fibrado $T(X/Y)$ puede ser pensado como el fibrado de vectores tangentes que son tangentes a las fibras de φ. Dada cualquier función f sobre X, Df se restringe a un funcional lineal sobre $T(X/Y)$. Si f es la composición de φ con una función suave g sobre Y, entonces f será constante sobre las fibras, y Df inducirá el funcional 0 sobre $T(X/Y)$; esto es, $Df = 0$ en $T^*(X/Y)$.

De esto deducimos que D, como un mapeo de funciones sobre X a secciones de $T^*(X/Y)$, es una derivación R'-lineal, donde R' es el anillo de funciones suaves sobre X. Si X y Y son variedades afines con anillo de coordenadas S y R respectivamente, así que S es una R-álgebra, entonces el módulo $\Omega_{S/R}$ con su derivación universal R-lineal de S es la versión algebraica de esta construcción cotangente relativa.

En el caso geométrico de variedades diferenciables no singulares que hemos esbozado, la noción de fibrado tangente y cotangente tienen el mismo contenido; cada fibrado es obtenido del otro por dualización. En lugar de buscar en el módulo de diferenciales, uno podría muy bien buscar en el módulo de campos vectoriales tangentes, los cuales pueden ser pensados como derivaciones. Pero cuando trabajamos con variedades algebraicas con singularidades, esta equivalencia ya no se sostiene: Las derivaciones pueden venir de formas diferenciales, pero no inversamente. Esto es por lo cual usualmente trabajamos con $\Omega_{S/R}$ en lugar de con su dual $\mathrm{Der}_R(S, S)$.

El significado geométrico de la Proposición 2.2.4 es el siguiente: definimos el fibrado tangente relativo que viene de una sumersión $\varphi : X \to Y$ como el núcleo del mapeo $TX \to \varphi^*TY$, y correspondientemente el fibrado cotangente relativo es $T^*(X/Y) = T^*X/\mathrm{imagen}(\varphi^*T^*Y)$. Si $Z \to X \to Y$ son dos sumersiones de variedades, entonces simplemente de la definción se sigue que existe una sucesión exacta

$$\varphi^*(T^*(X/Y)) \to T^*(Z/Y) \to T^*(Z/X) \to 0,$$

la cual corresponde a nuestra sucesión cotangente relativa.

El nombre de sucesión conormal en la Proposición 2.2.5 también viene de un caso geométrico. Dada una subvariedad diferenciable X de una variedad diferenciable Y, podemos restringir el fibrado tangente de Y a X y conseguir un fibrado vectorial sobre X que contiene al fibrado tangente a X, $TX \hookrightarrow TY|_X$. El cokernel de esta inclusión es llamado el ***fibrado normal*** de X en Y, escrito $N(X/Y)$. Parte de su significado viene del hecho que $N(X/Y)$ se asemeja a una vecindad tubular de X en Y.

De la definición, tenemos una sucesión exacta de fibrados

$$0 \to TX \to TY|_X \to N(X/Y) \to 0,$$

la cual podría ser llamada la "sucesión normal de X en Y". Dualizando, conseguimos la sucesión conormal de X en Y:

$$0 \to N^*(X/Y) \to T^*Y|_X \to T^*X \to 0.$$

En un contexto algebraico, trabajando sobre un campo base R, supongamos que Y es una variedad afín con anillo de coordenadas T, y que X es una subvariedad afín cerrada con anillo de coordenada $T = S/I$. Entonces T^*X corresponde a $\Omega_{T/R}$ y $T^*Y|_X$ corresponde a $T \otimes_R \Omega_{S/R}$, así que I/I^2 corresponde al fibrado conormal $N^*(X/Y)$ y la sucesión en la Proposición 2.2.5 es de hecho la sucesión conormal. La única cosa que aparece distinta en nuestro contexto algebraico general es que el mapeo $I/I^2 \to T \otimes_R \Omega_{S/R}$ no es siempre inyectivo.

2.7 Regularidad y Puntos Regulares

Teorema 2.7.1. *Sea B un anillo local que contiene a un campo k isomorfo a su campo de residuos. Asumamos más aún que k es perfecto, y que B es una localización de una k-álgebra finitamente generada. Entonces $\Omega_{B/k}$ es un B-módulo libre de rango igual a la dim B si y sólo si B es un anillo local regular.*

Demostración. Primero supongamos que $\Omega_{B/k}$ es libre de rango = dim B. Entonces por (2.4.9) tenemos que $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim B$, lo cual por definición dice que B es un anillo local regular. Notemos en particular que esto implica que B es un dominio entero (Ver [[10], Teorema 14.3, p. 106]).

Para la otra implicación usaremos el siguiente lema:

Lema 2.7.2. *Sea A un dominio entero noetheriano local, con campo de residuos k y campo cociente K. Si M es un A-módulo finitamente generado y si $\dim_k M \otimes_A k = \dim_K M \otimes_A K = r$, entonces M es libre de rango r.*

Demostración. Como $\dim_k M \otimes k = r$, el lema de Nakayama nos dice que M puede ser generado por r elementos. Así que existe un mapeo sobreyectivo $\varphi : A^r \to M \to 0$. Sea R su núcleo. Entonces obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to R \otimes K \to K^r \to M \otimes K \to 0,$$

porque la localización es un A-plano (Ver [[9], 3.D, p. 19]) y como $\dim_k M \otimes K = r$, obtenemos $R \otimes K = 0$. Pero R es libre de torsión, así que $R = 0$, y M es isomorfo a A^r.

Ahora inversamente, supongamos que B es local regular de dimensión r. Entonces $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$, así que por (2.4.9) tenemos que $\dim_k \Omega_{B/k} \otimes k = r$. Por otro lado, sea K el campo cociente de B. Entonces por (2.4.1) y (2.4.4) tenemos que $\Omega_{B/k} \otimes_B K = \Omega_{K/k}$. Ahora bien, como k es perfecto K es una extensión de campo separable de k y por tanto $\dim_k \Omega_{K/k} = \text{tr.d.}K/k$. Pero también tenemos que dim B = tr. d. K/k. Finalmente notemos que por (2.2.3), $\Omega_{B/k}$ es un B-módulo finitamente generado. Por el lema concluimos que $\Omega_{B/k}$ es un B-módulo libre de rango r. □

Ahora llevamos la definición del módulo de diferenciales sobre un esquema. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Consideramos el morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$. Tenemos que Δ da un isomorfismo de X sobre su imagen $\Delta(X)$. En efecto, sea $p_1 : X \times_Y X \to X$ la primera proyección, dado que $p_1 \circ \Delta = id_X$ se tiene que Δ es una inyección y por supuesto Δ es sobreyectivo sobre su imagen, así que Δ es un homeomorfismo sobre $\Delta(X)$. Por otra parte la sobreyectividad de $\Delta^\#$ es una cuestión local, ya que es sobreyectiva si lo es germen a germen. Es decir, tenemos que probar que $\Delta^\# : \mathcal{O}_{X \times_Y X, \Delta(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ es sobreyectiva. Ahora bien, una vecindad local de $\Delta(x)$ está dada por

Spec $A \times_{\text{Spec } B}$ Spec A que, por la Proposición 1.4.2, es Spec $(A \otimes_B A)$, así que tenemos un mapeo Δ : Spec $A \to$ Spec $(A \otimes_B A)$, al cual le corresponde un mapeo de álgebras $\Delta^\# : A \otimes_B A \to A$ dado por $a \otimes a' \mapsto aa'$ el cual es sobreyectivo con núcleo I el ideal generado por los elementos $1 \otimes a - a \otimes 1$ (Es claro que $\Delta^\#(1 \otimes a - a \otimes 1) = 0$. Por otra parte, si $\sum_i a_i \otimes a_i'$ pertenece a I, podemos escribir $\sum_i a_i \otimes a_i' = \sum_i (a_i \otimes a_i') - \sum_i (a_i a_i') \otimes 1 = \sum_i (a_i \otimes 1)(1 \otimes a_i' - a_i' \otimes 1)$ ya que $\sum_i a_i a_i' = 0$). Por lo tanto también tenemos un mapeo sobreyectivo en los anillos localizados, además sabemos que $\mathcal{O}_{X,x}$ es A_x (1.2.3), por lo que tenemos un mapeo sobreyectivo en los gérmenes y por consiguiente $\Delta^\#$ sobreyectiva.

Así que $\Delta(X)$ es un subesquema ***localmente cerrado*** de $X \times_Y X$, es decir, un subesquema cerrado de un subconjunto abierto W de $X \times_Y X$.

Definición 2.7.3. *Sea $\mathscr{I}$ la gavilla de ideales de $\Delta(X)$ en W. Entonces podemos definir la **gavilla de diferenciales** de X sobre Y como la gavilla $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ sobre X.*

Observación 2.7.4. *Primero notamos que $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$-módulo y que estamos usando la segunda carectización para el módulo de diferenciales. Entonces dado que Δ induce un isomorfismo de X a $\Delta(X)$, $\Omega_{X/Y}$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X$-módulo. Más aún, $\Omega_{X/Y}$ es cuasicoherente (1.6.10 y 1.6.14); si Y es noetheriano y f es un morfismo de tipo finito, entonces $X \times_Y X$ es también noetheriano, y por lo tanto $\Omega_{X/Y}$ es coherente (1.6.11 y 1.6.14).*

Si $U =$ Spec A es un subconjunto abierto afín de Y y $V =$ Spec B es un subconjunto abierto afín de X tal que $f(V) \subseteq U$, entonces $V \times_U V$ es un subconjunto abierto afín de $X \times_Y X$ isomorfo a Spec $(B \otimes_A B)$ (1.3.16), y $\Delta(X) \cap (V \times_U V)$ es el subesquema cerrado definido por el núcleo del homomorfismo diagonal. Entonces $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es la gavilla asociada al módulo I/I^2 de (2.5.2). Así que $\Omega_{V/U} \cong (\Omega_{B/A})^\sim$, donde $\sim$ es el funtor que a cada módulo le asigna su gavilla asociada.

Entonces nuestra definción de la gavilla de diferenciales de X/Y es compatible, en el caso afín, con el módulo de diferenciales definida arriba, vía el funtor $\sim$. Esto también muestra que podríamos haber definido $\Omega_{X/Y}$ cubriendo a X y Y con subconjuntos abiertos afines V y U como arriba y pegando las gavillas correspondientes $(\Omega_{B/A})^\sim$. Las derivaciones $d : B \to \Omega_{B/A}$ se pegan juntas para dar un mapeo $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/Y}$ de gavillas de grupos abelianos sobre X, el cual es una derivación del anillo local en cada punto. Por lo tanto, podemos llevar los resultados algebraicos a gavillas.

Tenemos el siguiente resultado que nos será útil.

Teorema 2.7.5. *Cualquier localización de un anillo local regular en un ideal primo es otra vez un anillo local regular.*

Demostración. Matsumura [[9], pág 139]. □

La conexión entre no singularidad y diferenciales está dado por el siguiente resultado.

Teorema 2.7.6. *Sea X una esquema separado irreducible de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k. Entonces $\Omega_{X/k}$ es una gavilla localmente libre de rango $n = \dim X$ si y sólo si X es una variedad no singular sobre k.*

Demostración. Si $x \in X$ es un punto, entonces el anillo local $B = \mathcal{O}_{x,X}$ tiene dimensión n, campo de residuos k, y es una localización de una k-álgebra de tipo finito. Más aún el módulo $\Omega_{B/k}$ de diferenciales de B sobre k es igual al germen $(\Omega_{X/k})_x$ de la gavilla $\Omega_{X/k}$. Entonces podemos aplicar (2.7.1) y ver que $(\Omega_{X/k})_x$ es libre de rango n si y sólo si B es un anillo local regular. Ahora el teorema sigue de ver (2.7.5) y (1.6.12). □

También tenemos algunos resultados para la gavilla de diferenciales análogos a los de resultados algebraicos.

Proposición 2.7.7. *Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ un morfismo de esquemas. Entonces existe una sucesión exacta de gavillas sobre X,*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0$$

Demostración. Sigue de (2.2.4). □

Proposición 2.7.8. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo, y sea Z un subesquema cerrado de X con gavilla de ideales $\mathscr{I}$. Entonces existe una sucesión exacta de gavillas sobre Z,*

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to \Omega_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z/Y} \to 0.$$

Demostración. Sigue de (2.2.5). □

Ejemplo 2.7.9. *Tomamos $Y = \mathbb{A}^1_k = Spec\ k[t]$ y sea*

$$X = Spec\ k[t][x,y]/(xy, x(t-x-y), y(t-x-y)).$$

La gavilla $\Omega_{X/Y}$ está dada como

$$\Omega_{X/Y} = \mathcal{O}_X\{dx, dy\}/(ydx + xdy, (t-2x)dx - xdy, -ydx + (t-2y)dy).$$

Como existen dos generadores y tres relaciones, tenemos la sucesión

$$\mathcal{O}_X^{\oplus 3} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^{\oplus 2} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0,$$

donde φ está dada por la matriz

$$\varphi = \begin{pmatrix} y & t-2x & -y \\ x & -x & t-2y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7.10. *Si $X = \mathbb{A}^n_Y$, entonces $\Omega_{X/Y}$ es el $\mathcal{O}_X$-módulo libre de rango n generado por las secciones globales $dx_1, \ldots, dx_n$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas afines para $\mathbb{A}$.*

Ejemplo 2.7.11. *Consideremos el esquema $X = Spec\ S$ con $S = \mathbb{C}[x,y]/(xy)$. De la sección 2.3 sabemos que $\Omega_{S/\mathbb{C}}$ es el cokernel de la matriz Jacobiana $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^t$. Ahora bien, X es un esquema de dimensión 1, pero la dimensión de $\Omega_{S/\mathbb{C}}$ en el ideal $(x,y) \in Spec\ S$ correspondiente al punto $(0,0)$ es 2, por el Teorema 2.7.1 tenemos que (x,y) no es un punto regular.*

Ejemplo 2.7.12. *Tomemos el esquema $Y = Spec\ R$ donde $R = \mathbb{C}[x,y]/(y-x^2)$. Igualmente tenemos que $\Omega_{R/\mathbb{C}}$ es el cokernel de la matriz $\begin{pmatrix} -2x & 1 \end{pmatrix}^t$. Ahora bien Y es un esquema irreducible de dim $Y = 1 = rk\ \Omega_{R/\mathbb{C}}$, entonces por el Teorema 2.7.6 Y es una variedad no singular.*

Apéndice A

Producto Tensorial de Módulos

Sean M, N, P tres A-módulos. Un mapeo $f : M \times N \to P$ se dice A-lineal si para cada $x \in M$ el mapeo $y \mapsto f(x, y)$ de N en P es A-lineal, y para cada $y \in N$ el mapeo $x \mapsto f(x, y)$ de M en P es A-lineal.

Construiremos un A-módulo T, llamado el *producto tensorial* de M y N, con la propiedad de que los mapeos A-lineales $M \times N \to P$ están en correspondencia uno a uno con los mapeos A-lineales $T \to P$, para cualquier A-módulo P. Más precisamente:

Proposición A.0.13. *Sean M, N A-módulos. Entonces existe un par (T, g) consistente de un A-módulo T y una mapeo A-bilineal $g : M \times N \to T$, con la siguiente propiedad: Dado cualquier A-módulo P y cualquier mapeo A-bilineal $f : M \times N \to P$, existe un único mapeo A-lineal $f' : T \to P$ tal que $f = f' \circ g$ (en otras palabras, cada función bilineal sobre $M \times N$ se factoriza a través de T). Más aún, si (T, g) y (T', g') con dos parejas con esta propiedad, existe un único isomorfismo $j : T \to T'$ tal que $j \circ g = g'$.*

Demostración. i) *Unicidad.* Reemplazando (P, F) por (T', g') obtenemos un único $j : T \to T'$ tal que $g' = j \circ g$. Intercambiando el papel de T y T', obtenemos $j' : T' \to T$ tal que $g = j' \circ g'$. Cada una de las composiciones $j \circ j', j' \circ j$ deben ser la identidad, y por lo tanto j es un isomorfismo.

ii) *Existencia.* Sea C el A-módulo libre $A^{(M \times N)}$. Los elementos de C son las combinaciones formales lineales de elementos de $M \times N$ con coeficientes en A, i. e., son expresiones de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (x_i, y_i)$ $(a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N)$. Sea D el submódulo de C generado por todos los elementos de C del siguiente tipo:

$$
\begin{aligned}
(x + x', y) - (x, y) - (x', y)\\
(x, y + y') - (x, y) - (x, y')\\
(ax, y) - a \cdot (x, y)\\
(x, ay) - a \cdot (x, y).
\end{aligned}
$$

Sea $T = C/D$. Para cada elemento básico (x, y) de C, sea $x \otimes y$ su imagen en T. Entonces T es generado por elementos de la forma $x \otimes y$, y de la definición obtenemos:

$$
\begin{aligned}
(x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y,\\
x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y',\\
(ax) \otimes y = x \otimes (ay) &= a(x \otimes y).
\end{aligned}
$$

Equivalentemente, el mapeo $g : M \times N \to T$ definido por $g(x, y) = x \otimes y$ es A-lineal. Cualquier mapeo f de $M \times N$ en un A-módulo P se extiende por linealidad a un homomorfismo de A-módulos $\bar{f} : C \to P$. Supongamos en particular que f es A-bilineal. Entonces, de las definiciones, $\bar{f}$ se anula en todos los generadores de D, y por lo tanto en todo D, y por consiguiente induce un A-homomorfismo bien definido

f' de $T = C/D$ en P tal que $f'(x\otimes y) = f(x,y)$. El mapeo f' está únicamente definido por esta condición, y por lo tanto la pareja (T,g) satisface la condición de la proposición. □

Observación A.0.14. *El A-módulo T construido como arriba es llamado el producto tensorial de M y N, y es denotado por $M \otimes_A N$, o sólo $M \otimes N$ si no hay ambigüedad del anillo A. Es generado como un A-módulo por los "productos" $x \otimes y$. Si $(x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}$ son una familia de generadores de M, N, respectivamente, entonces los elementos $x_i \otimes y_j$ generan $M \otimes N$. En particular, sin M y N son finitamente generados, también lo es $M \otimes N$.*

Proposición A.0.15. *Sean $M_1, \dots, M_r$ A-módulos. Entonces existe una pareja (T,g) consistente de un A-módulo T un mapeo A-multilineal $g : M_1 \times \cdots \times M_r \to T$ con la siguiente propiedad: Dado cualquier A-módulo P y cualquier mapeo A-multilineal $f : M_1 \times \cdots \times M_r \to T$, existe un único A-homomorfismo $f' : T \to P$ tal que $f' \circ g = f$. Más aún, si (T,g) y (T',g') son dos parejas con esta propiedad, entonces existe un único isomorfismo $j : T \to T'$ tal que $j \circ g = g'$.* □

Sean M, N, P A-módulos. Entonces tenemos las siguientes propiedades:

i) $M \otimes N \cong N \otimes M$

ii) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$

iii) $(M \oplus N)\otimes \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

iv) $A \otimes M \cong M$

Sean A, B anillos, M un A-módulo, P un B-módulo y N un (A,B)-bimódulo (esto es, N es simultáneamente un A-módulo y un B-módulo y las dos estructuras son compatibles en el sentido de que $a(xb) = (ax)b$ para toda $a \in A, b \in B, x \in N$). Entonces $M \otimes_A N$ es naturalmente un B-módulo, $N \otimes_B P$ es un A-módulo, y tenemos que

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

Sean $f : M \to M', g : N \to N'$ homomorfismos de A-módulos. Definimos $h : M \times N \to M' \otimes N'$ por $h(x,y) = f(x) \otimes g(y)$. Es fácil revisar que h es A-bilineal y por lo tanto induce un homomorfismo de A-módulos

$$f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

tal que

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \qquad (x \in M, y \in N).$$

Sean $f' : M' \to M''$ y $g' : N' \to N''$ homomorfismos de A-módulos. Claramente los homomorfismos $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ y $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ coinciden en todos los elementos de la forma $x \otimes y$ en $M \otimes N$. Como estos elementos generan $M \otimes N$, entonces

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

A.1 Propiedades de Exactitud del Producto Tensorial

Sea $f : M \times N \to P$ un mapeo A-lineal. Para cada $x \in M$ el mapeo $y \mapsto f(x,y)$ de N en P es A-lineal, por lo tanto f da lugar a un mapeo $M \to Hom(N,P)$ que es A-lineal porque f es lineal en la variable x. Inversamente, cualquier A-homomorfismo $\phi : M \to Hom_A(N,P)$ definen un mapeo bilineal, $(x,y) \mapsto \phi(x)(y)$. Por lo tanto el conjunto S de mapeos A-bilineales $M \times N \to P$ está en correspondencia natural uno a uno con $Hom(M \otimes N, P)$, por la propiedad que define al producto tensorial. Por lo tanto tenemos un isomorfismo canónico

$$Hom(M \otimes N, P) \cong Hom(M, Hom(N,P)). \tag{A.1}$$

Proposición A.1.1. *Sea*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \tag{A.2}$$

una sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos, sea N cualquier A-módulo. Entonces la suceción

$$M' \otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M'' \otimes N \to 0 \tag{A.3}$$

(donde 1 denota el mapeo identidad en N) es exacta.

Demostración. Denotamos por E la sucesión (A.2), y por $E \otimes N$ la sucesión (A.3). Sea P un A-módulo. Como (A.2) es exacta, la sucesión $Hom(E, Hom(N, P))$ es exacta por la exactitud del funtor contravariante $Hom(\cdot, Q)$ para cualquier módulo Q; por (A.1) la sucesión $Hom(E \otimes N, P)$ es exacta. Otra vez por la exactitud de $Hom(\cdot, Q)$, se sigue que $E \otimes N$ es exacta. □

Proposición A.1.2. *Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal y M un A-módulo. Entonces $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ es isomorfo a $M/\mathfrak{a}M$.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

por (A.1.1) tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathfrak{a} \otimes M \to A \otimes M \to A/\mathfrak{a} \otimes M \to 0$$

por las propiedades del producto tensorial tenemos un isomorfismo canónico $\mathfrak{a} \otimes M = \mathfrak{a}M$ definido por $r \otimes m \mapsto rm$, y $A \otimes M = M$, lo cual significa que tenemos la sucesión exacta

$$\mathfrak{a}M \to M \to A/\mathfrak{a} \otimes M \to 0.$$

El cokernel del mapeo $\mathfrak{a}M \to M$ es $M/\mathfrak{a}M$ y por lo tanto tenemos el isomorfismo entre $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ y $M/\mathfrak{a}M$. □

A.2 Torsión

En álgebra abstracta, el término ***torsión*** se refiere a un número de conceptos relacionados a elementos de orden finito en grupos y a la falla de ser libre en módulos.

Definición A.2.1. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Un elemento $m \in M$ es llamado un* ***elemento de torsión*** *si existe un no divisor de cero $a \in A$ tal que $a \cdot m = 0$.*

Si el anillo A es conmutativo, entonces el conjunto de todos los elementos de torsión forman un submódulo de M, llamado el ***submódulo de torsión*** de M, denotado $\tau(M)$. El módulo M es llamado un ***módulo de torsión*** si $\tau(M) = M$, y es llamado ***libre de torsión*** si $\tau(M) = 0$.

Más generalmente, sea A un anillo arbitrario y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Entonces podemos definir la noción de S-torsión como sigue. Un elemento m de un A-módulo M es llamado un ***elemento de S-torsión*** si existe $s \in S$ tal que s anula m, es decir, $sm = 0$.

Proposición A.2.2. *Sea M un A-módulo y $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Entonces los $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}M$ y $S^{-1}A \otimes_A M$ son isomorfos; más precisamente, existe un único isomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} f: & S^{-1}A \otimes_A M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ & (a/s) \otimes m & \longmapsto & am/s \end{array}$$

Demostración. Definimos el mapeo

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A \times M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ (a/s, m) & \longmapsto & am/s \end{array}$$

que es A-bilineal, y por la propiedad universal del producto tensorial induce un A-homomorfismo

$$f : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$$

que satisface lo que necesitamos. Claramente f es sobreyectiva y está únivocamente definida.

Sea $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i$ un elemento de $S^{-1}A \otimes M$. Si $s = \prod_i s_i \in S$, $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$, tenemos

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m,$$

así que cada elemento de $S^{-1}A \otimes M$ es de la forma $(1/s) \otimes m$. Supongamos que $f((1/s) \otimes m) = 0$. Entonces $m/s = 0$, por lo tanto $tm = 0$ para algún $t \in S$, y por consiguiente

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0.$$

Por lo tanto f es inyectiva y consecuentemente un isomorfismo. $\square$

Proposición A.2.3. *Sea S un conjunto multiplicativamente cerrado de A y M un A-módulo. Entonces tenemos un mapeo canónico*

$$\begin{array}{cccccc} \varphi : & M & \longrightarrow & S^{-1}A & \otimes_A & M \\ & m & \longmapsto & 1 & \otimes_A & m \end{array}$$

cuyo núcleo es precisamente el submódulo de S-torsión de M.

Demostración. Sea m un elemento de S-torsión, es decir, existe $s \in S$ tal que $sm = 0$. Luego

$$\begin{array}{rcccc} \varphi(m) & = & 1 \otimes m & = & \frac{s}{s} \otimes m \\ & = & \frac{1}{s} \otimes sm & = & \frac{1}{s} \otimes 0 \\ & = & 0 & & \end{array}$$

por lo tanto los elementos de S-torsión están contenidos en ker φ.

Sea $m \in$ ker φ, entonces $1 \otimes m = 0$, por (A.2.2) tenemos que $1 \cdot m = 0$ en $S^{-1}M$, es decir, existe $s \in S$ tal que $sm = 0$, y por lo tanto es un elemento de S-torsión. $\square$

Entonces el submódulo de torsión de M puede ser interpretado como el conjunto de elementos que se “anulan en la localización”. En particular si S es el conjunto de los no divisores de ceros tenemos que ker$\varphi = \tau(M)$.

Bibliografía

[1] ATIYAH, M. F. y MacDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Cambridge, Massachusetts: Perseus, 1969.

[2] BREDON, G. E. *Sheaf Theory.* New York: Springer, 1997.

[3] EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* New York: Springer, 1994.

[4] EISENBUD, David; y HARRIS, Joe. *The Geometry of Schemes.* New York: Springer, 2000.

[5] GROTHENDIECK, A. *Éléments de Géométrie Algébrique I.* Berlin: Springer, 1971.

[6] HARRIS, J. *Algebraic Geometry. A First Course.* New York: Springer, 1992.

[7] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry.* New York: Springer, 1977.

[8] LAFON, J. P. *Algèbre commutative. Langages géométrique et algébrique.* París: Hermann, 1977.

[9] MATSUMURA, H. *Commutative Algebra.* New York: W. A. Benjamin, 1970.

[10] MATSUMURA, H. *Commutative Ring Theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[11] MUMFORD, D. *Algebraic Geometry I. Complex Proyective Varieties.* Berlin: Springer, 1995.

[12] SMITH, K. E. [et al.]. *An Invitation to Algebraic Geometry.* New York: Springer, 2000.

[13] WEIL, A. *Foundation of Algebraic Geometry.* New York: Amer. Math. Soc., 1978.