UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

REPRESENTACIONES UNITARIAS DE GRUPOS DE LIE SOLUBLES

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

LEONARDO FAUSTINOS MORALES

DIRECTOR DE LA TESINA: DOCTOR EUGENIO GARNICA VIGIL

MÉXICO, D.F. JUNIO, 2008

Índice

1. Introducción

Una representación unitaria de un grupo de Lie G, es un homomorfismo $\pi : G \to \mathscr{U}(\mathscr{H}_\pi)$ donde $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathscr{U}(\mathscr{H}_\pi)$ denota el espacio de operadores acotados unitarios sobre $\mathscr{H}$. Este morfismo debe ser continuo en el siguiente sentido:

$$\|\pi_{g_n}\xi - \pi_g\xi\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad g_n \to g, \quad \text{para toda} \quad \xi \in \mathscr{H}_\pi$$

Estos objetos matemáticos son interesantes por si mismos, pues representan un tipo particular de acción de un grupo sobre un espacio de Hilbert, y su importancia está dada por su aplicación desde los años 20's en mecánica cuántica, principalmente difundida en el libro de Herman Weyl *Gruppentheorie und Quantenmechanik.*

Hay un estrecha relación entre las representaciones unitarias y el análisis armónico. Se usan para dar una definición abstracta de la transformada de Fourier sobre $L^1(G)$ a través de los caracteres de G (homomorfismos continuos entre G y el círculo unitario complejo), cabe señalar que cuando G es abeliano todas sus representaciones unitarias son caracteres (puede verse en [7]). Ciertas representaciones unitarias aparecen como sumandos directos discretos en la representación regular izquierda de G sobre $L^2(G)$ (ver [6]). Más acerca de representaciones unitarias y análisis armónico puede verse en [5] y acerca de anáslis armónico en grupos de Lie en [8].

El primer grupo localmente compacto cuyas representaciones irreducibles de dimensión infita fueron clasificadas se llama el grupo de Heisenberg, que es un grupo nilpotente (y por lo tanto soluble). El motivo por el cual se hizo esta clasificación fue para entender las relaciones de conmutación de Heisenberg en mecánica cuántica.

Desde entonces, la teoria de representaciones y sus aplicaciones han sido desarrolladas. En teoria de representaciones, los avances principales fueron hechos por Dixmier en los 50's y por Kirillov en los 60's, también por estos años aparecieron aplicaciones a la teoria ergódica.

Uno de los principales pioneros en la teoría general de representaciones unitarias es George Mackey, quien desarrolló esta teoría para grupos en general y cuyas aportaciones son de mucha importancia.

Para nosotros, el resultado presentado por Kirillov es esencial. Este resultado dice que existe un mapeo continuo y biyectivo entre el espacio de clases $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*G$ y $G^\wedge$ (el espacio de todas las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles unitarias de G) cuando el grupo de Lie G es nilpotente.

Este resultado sugiere, dada la similitud entre los grupos nilpotentes y los grupos solubles, que cuando G es soluble, la acción de G sobre $\mathfrak{g}^*$ contiene toda la información acerca de las representaciones unitarias de G.

En este trabajo se presentan tres formas distintas de extender el mapeo de Kirillov a cierta clase de grupos de Lie solubles, las cuales tienen distintos enfoques y distintos alcances. Ninguna de estas construcciones abarca a todos los grupos de Lie solubles, dejando el problema en general abierto.

Muchas personas han trabajado en este problema, entre las que destacan L. Auslander, C.C. Moore, Bernat, Brezin, Pukanzki y B. Kostant. Dentro de este trabajo veremos algunas de sus aportaciones.

2. Conceptos y construcciones básicas

Denotaremos con letras mayúsculas a los grupos de Lie y con minúsculas góticas a sus álgebras. Consideraremos solamente grupos de Lie conexos y simplemente conexos. De esta manera cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está relacionada únicamente con el grupo de Lie $G = \exp(\mathfrak{g})$ donde $\exp : \mathfrak{g} \to G$ es el mapeo exponencial de grupos de Lie.

Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Recordemos que cada homomorfismo entre grupos de Lie $\psi : G \to H$ define un homomorfismo entre las álgebras de Lie $\mathrm{d}\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{d}\psi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & H \end{tikzcd}$$

Como G actúa sobre si mismo a través de los morfismos $\alpha_x : G \to G$ dados por la conjugación, es decir $\alpha_x(g) = xgx^{-1}$, entonces G actúa también sobre $\mathfrak{g}$ a través de $\mathrm{d}(\alpha_x) = \mathrm{Ad}(x)$. El mapeo $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ dado por $x \mapsto \mathrm{Ad}(x)$ es conocido como la *representación adjunta*.

Sea $\mathfrak{g}^*$ el dual algebráico de $\mathfrak{g}$ como espacio vectorial. G actúa sobre $\mathfrak{g}^*$ a través de la *representación coadjunta* definida por:

$$((\mathrm{Ad}^* x)l)(Y) = l((\mathrm{Ad} x^{-1})Y) \quad \text{para } x \in G,\ Y \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^*$$

Recordemos que un grupo de Lie G es soluble si la sucesión de subgrupos normales

$$G \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \rhd \cdots$$

donde $G^{(1)} = (G, G)$, $G^{(n+1)} = \big(G^{(n)}, G^{(n)}\big)$ y (A, B) denota el subgrupo generado por elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$ con $x \in A$, $y \in B$, es finita y termina en $\{e\}$.

Esta condición es equivalente a que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G cumpla que la cadena de ideales

$$\mathfrak{g} \rhd \mathfrak{g}^{(1)} \rhd \mathfrak{g}^{(2)} \rhd \cdots$$

donde $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$, es finita y termina en $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$

Las representaciones unitarias de un grupo de Lie G son homorfismos π de G dentro del grupo $\mathscr{U}(\mathscr{H}_\pi)$ de operadores unitarios sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$ que son continuos en el siguiente sentido

$$\|\pi_{g_n}\xi - \pi_g\xi\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad g_n \to g, \quad \text{para toda} \quad \xi \in \mathscr{H}_\pi$$

Un operador de intercambio entre π y π', es un operador lineal acotado $A : \mathscr{H}_\pi \to \mathscr{H}_{\pi'}$ tal que

$$A\pi(g) = \pi'(g)A \quad \text{para toda } g \in G$$

Decimos que dos representaciones π, π' son *unitariamente equivalentes* si existe un operador de intercambio invertible e isométrico, y esta relación la denotamos como $\pi \cong \pi'$. Una representación π de G es irreducible si no existen subespacios propios cerrados invariantes bajo $\pi(G)$ dentro de $\mathscr{H}_\pi$. Estas representaciones están caracterizadas por el lema de Schur que dice que una representación es irreducible si y sólo si todos los operadores de intercambio entre ella misma son escalares, es decir, son de la forma $c\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\pi}$ con $c \in \mathbb{C}$

Denotaremos como $G^\wedge$ al espacio de las clases de equivalencia unitarias de representaciones irreducibles unitarias de G.

Si H es un subgrupo cerrado de G y π es una representación unitaria de H. Dado un automorfismo α de G podemos definir una representación unitaria $\alpha \cdot \pi$ de $\alpha(H)$ dada por:

$$(\alpha \cdot \pi)(x) = \pi(\alpha^{-1}x) \quad \text{para toda } x \in \alpha(H)$$

Si π' es otra representación unitaria de H y $\pi' \cong \pi$ entonces $\alpha \cdot \pi' \cong \alpha \cdot \pi$

Si agregamos la hipótesis de que H es normal, con la relación anterior obtenemos una acción de G sobre las representaciones unitarias de H a través de los homomorfismos α_x.

Existen tres tipos de grupos, clasificados a través de las propiedades de descomposición de sus representaciones unitarias. Dicha clasificación no es trivial, y para nosotros bastará con saber que para los grupos de tipo I, sus representaciones unitarias se pueden descomponer como suma directa de representaciones irreducibles. Los grupos del tipo II y tipo III no pueden ser descompuestos de esta forma.

Comencemos conociendo el resultado de Kirillov.

2.1. Teoria de Kirillov

La teoría de Kirillov clasifica las representaciones unitarias de un grupo de Lie nilpotente a través de un mapeo biyectivo entre $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*(G)$ y $G^\wedge$. Para poder establecer esta biyección necesitamos conocer algunos conceptos acerca de grupos de Lie y sus representaciones.

Recordemos que un grupo de Lie es nilpotente si la cadena

$$G \rhd G^{[1]} \rhd G^{[2]} \rhd \cdots$$

donde $G^{[0]} = G$, $G^{[n+1]} = \big(G, G^{[n]}\big)$, es finita y termina en $\big\{e\big\}$.

Por supuesto esta condición es equivalente a que el álgebra de Lie cumpla que la cadena de ideales

$$\mathfrak{g} \rhd \mathfrak{g}^{[1]} \rhd \mathfrak{g}^{[2]} \rhd \cdots$$

donde $\mathfrak{g}^{[0]} = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^{[n+1]} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{[n]}]$ termine en 0.

Notemos que en particular las álgebras de Lie nilpotentes son solubles ya que por inducción se puede demostrar que $\mathfrak{g}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{g}^{[n]}$.

Ambas estructuras están relacionadas de la siguiente manera, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es nilpotente.

Por otra parte, cada representación $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ de un subgrupo cerrado $K \subset G$ produce una representación natural $\sigma = \mathrm{Ind}(K \uparrow G, \pi)$ de G en un nuevo espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\sigma$. Esta representación se puede dar para K, G y π arbitrarios, pero muchas complicaciones técnicas desaparecen cuando K/G tiene una medida invariante por la derecha, pues en este caso el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$ se puede tomar como el espacio de todas las funciones Borel medibles $f : G \to \mathscr{H}_\pi$ tales que

1. $f(kg) = \pi(k)[f(g)]$
2. $\int_{K/G} \|f(g)\|^2 \mathrm{d}\dot{g}$ donde $\mathrm{d}\dot{g}$ es la medida invariante por la derecha sobre K/G

En este espacio el producto interno está dado por

$$\langle f, f' \rangle = \int_{K/G} \langle f(g), f'(g) \rangle \mathrm{d}\dot{g}$$

Se puede mostrar que este espacio es completo bajo la norma inducida por este producto interno, lo cual lo convierte en un espacio de Hilbert.

Así, la representación inducida σ se define haciendo actuar a G por la derecha:

$$\sigma(x)f(g) = f(gx) \text{ para toda } x \in G$$

Este es un operador unitario debido a la invariancia por la derecha de $\mathrm{d}\dot{g}$ que además es continuo con respecto a G.

De esta manera, el problema se facilita si podemos construir una medida de Haar sobre el cociente K/G.

Para los grupos de Lie siempre existen medidas de Haar, las cuales pueden ser inducidas a través del mapeo exponencial usando coordenadas exponenciales sobre el grupo. Para construir estas coordenadas tomamos una base $\{X_i\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{g}$, las coordenadas exponenciales de G asociadas a la base $\{X_i\}$ están dadas por el mapeo $\phi : \mathbb{R}^n \to G$ definido como:

$$\phi(y) = \exp(y_1 X_1) \exp(y_2 X_2) \cdots \exp(y_n X_n)$$

estas coordenadas también son llamadas *coordenadas canónicas de segundo tipo* y ellas son las que llevan medidas de Lebesgue sobre $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ a medidas de Haar sobre G

En el caso particular de los grupos nilpotentes se pueden dar medidas de Haar a los cocientes a través de las coordenadas exponenciales determinas por ciertas bases especiales llamadas de Malcev. Decimos que una base $\{X_i\}_{i=1}^n$ es de Malcev si existen índices $\{i_j\}_1^k$ tales que las subálgebras $\mathfrak{g}_l = \mathbb{R}\text{−span}\{X_1, \cdots, X_{i_l}\}$ son ideales de $\mathfrak{g}$ para toda l. Usando las coordenadas exponenciales asociadas a estas bases, podemos generar medidas de Haar sobre el cociente.

Sea $l \in \mathfrak{h}^*$ donde $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie tal que $l([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = 0$, notemos que el mapeo $\chi_{l,H} : H \to S^1$ dado por:

$$\chi_{l,H}(\exp(Y)) = \mathrm{e}^{2\pi i l(Y)} \quad Y \in H$$

es una representación unitaria de H, sobre $\mathscr{U}(\mathbb{C}) = S^1$, a este tipo de representaciones se les conoce como *caracteres*. La condición de que $l([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = 0$ es necesaria pues

$$\exp(Y)\exp(X) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \text{conmutadores de tres términos o más})$$

esta fórmula es conocida como la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff.

Definimos el mapeo el mapeo de Kirillov $\kappa : \mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*(G) \to G^\wedge$ como $\kappa([l]) = \mathrm{Ind}(M \uparrow G, \chi_{l,M}) = \pi_l$ donde $M = \exp(\mathfrak{m})$ y

1. $l([\mathfrak{m},\mathfrak{m}])$=0
2. $\dim(\mathfrak{m}) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{r}))$
3. $\mathfrak{r}$ es el radical de la forma bilineal sobre $\mathfrak{g}$ $B(X,Y) = l([X,Y])$.

Si $\mathfrak{m}$ cumple estas propiedades se puede mostrar que π_l no depende de la elección de $\mathfrak{m}$ y además es irreducible. A las subálgebras que cumplen estas propiedades se les llama *álgebras maximales subordinadas* o *polarizaciones* de l.

En el caso en que G es nilpotente se puede demostar que para todo $l \in \mathfrak{g}^*$ existen polarizaciones, de hecho se puede dar una construcción para encontrar polarizaciones a través de bases de Malcev de la siguiente manera: dada una cadena de ideales $(0) \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ tal que $\dim(\mathfrak{g}_j) = j$, $l \in \mathfrak{g}^*$ y $l_j = l|\mathfrak{g}_j$ entonces $\mathfrak{m} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{r}(l_j)$ es una polarización para l.

Como veremos más adelante, para cierto de tipo de grupos solubles no todos los elementos de el dual del álgebra tienen polarizaciones.

Se puede mostrar que para G nilpotente el mapeo κ es una biyección, este resultado no es trivial, y la demostración con detalle de esto se puede ver en [6], [7]

Veamos cómo se puede extender este mapeo a algunas clases de grupos solubles.

3. Grupos exponenciales

Un *grupo de Lie exponencial* es un grupo de Lie soluble para el cual el mapeo exponencial es un difeomorfismo. No todos los grupos de Lie solubles son exponenciales, pero todos están relacionados con el siguiente grupo

Sea $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$. Definimos el álgebra

$$\mathfrak{s}(\lambda) = \mathbb{R}b_1 \oplus \mathbb{R}b_2 \oplus \mathbb{R}b_3$$

con

$$[b_1, b_2] = \lambda_1 b_2 + \lambda_2 b_3$$

$$[b_1, b_3] = -\lambda_2 b_2 + \lambda_1 b_3$$

y el grupo

$$S(\lambda) = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \text{ con } (x, u)(y, v) = (x + y, \mathrm{e}^{-\lambda y} u + v)$$

lo que significa que $S(\lambda) = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}$ es un producto semidirecto cuyo subgrupo normal mínimo es $\mathbb{C}$, si $\lambda_2 \neq 0$. Con $(x_1, x_2 + ix_3) = (x_1, x_2, x_3) \in S(\lambda)$ los b_j están dados por:

$$b_1 = \partial_1 - (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3)\partial_2 - (\lambda_2 x_2 + \lambda_1 x_3)\partial_3, b_2 = \partial_2, b_3 = \partial_3$$

y el mapeo exponencial en las coordenadas complejas $\xi_2 + i\xi_3$ por

$$E(\xi_1 b_1 + \xi_2 b2 + \xi_3 b_3) = (\xi_1, \tilde{\mathrm{e}}(-\lambda\xi_1)(\xi_2 + i\xi_3)).$$

De esto podemos ver que $S(\lambda)$ es exponencial si y sólo si $\lambda_1 \neq 0$, y además que $S(i)$ es el único (salvo isomorfismos) grupo de Lie soluble simplemente conexo que no es exponencial de dimensión menor o igual que 3.

Se puede ver que la ausencia de $S(i)$, respectivamente $\mathfrak{s}(i)$, es responsable de que un grupo de Lie soluble simplemente conexo G sea exponencial:

Teorema 3.1 *Sea G un grupo de Lie soluble conexo y simplemente conexo de dimensión n y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Ningún grupo cociente de G tiene subgrupos cerrados isomorfos a $S(i)$.*

2. Ningún operador $\operatorname{ad}x$*,* $x \in \mathfrak{g}$ *tiene eigenvalores puramente imaginarios distintos de cero.*

3. El mapeo exponencial es inyectivo.

4. El mapeo exponencial es suprayectivo.

5. El mapeo exponencial es un difeomorfismo de $\mathfrak{g}$ *sobre* G*.*

Para grupos exponenciales, el mapeo de Kirillov funciona de la misma manera que para grupos nilpotentes, pues en este caso también se pueden generar medidas de Haar para los cocientes de G, además del hecho de que para todo $l \in \mathfrak{g}^*$ existen polarizaciones.

La diferencia entre este caso y el caso nilpotente es que a las álgebras polarizantes debemos pedirles que sean polarizaciones de Pukanski: Si $\mathfrak{m}$ es una polarización de $l \in \mathfrak{g}^*$ entonces decimos que $\mathfrak{m}$ es de Pukanski si

$$l + \mathfrak{m}^{\perp} = \operatorname{Ad}^* M(l) \quad \text{donde } \exp \mathfrak{m} = M$$

Las polarizaciones de Pukanski están dadas explícitamente a través de las bases de Jordan-Holder para G, que son la extensión de las bases de Malcev para grupos solubles. Una base es de Jordan-Holder si es una base de Malcev y los $\mathfrak{g}_k$ generados forman una serie de descomposición. Para los grupos exponenciales siempre existen este tipo de bases. Nuevamente en este caso las polarizaciones de Pukanski para cada $l \in \mathfrak{g}^*$ están dadas por $\sum_{j=1}^{k} \mathfrak{r}(l|\mathfrak{g}_j)$.

Para grupos exponenciales se puede demostrar nuevamente que $\pi_{l,M}$ es irreducible y no depende de la elección de $\mathfrak{m}$ si $\mathfrak{m}$ es de Pukanski.

El primero en presentar este resultado fue Bernat en [3], aunque la manera en que lo presentamos aquí tiene un enfoque más moderno. Las demostraciones detalladas de estos resultados se pueden ver en [12]

4. Grupos inductivos

La construcción de la extensión del mapeo de Kirillov para este tipo de grupos está dada a través del siguiente método. Si S es un grupo de Lie soluble con álgebra de Lie $\mathfrak{s}$, dado que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ es nilpotente, tiene sentido definir el *nil-radical* $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{s}$ como el ideal nilpotente máximo contenido en $\mathfrak{s}$. La idea en este caso es ver cuando las representaciones unitarias de S se pueden obtener a partir de representaciones unitarias de N.

El hecho de que las representaciones de S se puedan obtener a partir de representaciones de N, sugiere que la clasificación para las representaciones de N se pueda extender de alguna manera a las de S.

Nuevamente, como vamos a usar inducción desde un caracter, necesitamos que existan álgebras maximales subordinadas. Desafortunadamente, para grupos de Lie solubles, existe un álgebra de Lie $\mathfrak{d}$ para la cual hay un elemento en $\mathfrak{g}^*$ que no tiene un álgebra maximal subordinada.

El álgebra $\mathfrak{d}$ es llamada *álgebra diamante* y está definida como el álgebra de Lie generada por $\{X, Y, Z, W\}$ cuyos brackets distintos de cero son:

$$[X, Y] = -Z, \quad [X, Z] = Y, \quad [Y, Z] = W$$

Para esta álgebra, el funcional $l \in \mathfrak{g}^*$ dado por:

$$l(W) = 1, \quad l(X) = l(Y) = l(Z) = 0$$

es tal que el radical $\mathfrak{r}$ de la forma bilineal $B_l(X, Y) = l([X, Y])$ es la subálgebra de $\mathfrak{d}$ generada por X y W, así $\frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{r})) = 3$, pero la única subálgebra de esta dimensión es la generada por Y, Z y W, que no es subordinada para l. Podemos conculir que si $\mathfrak{m}$ es una subálgebra subordinada a l entonces $\dim(\mathfrak{r}) \leqslant 2$

Afortunadamente el hecho de que no existan álgebras maximales subordinadas está directamente relacionado con la aparición del álgebra diamante de la siguiente manera.

Llamemos $\mathrm{mxl}(l)$ a la colección de subálgebras $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ tales que son maximales subordinadas para l. Usando esta notación tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Sea* $\mathfrak{s}$ *un álgebra de Lie soluble. Si existe un funcional lineal* $l \in \mathfrak{s}^*$ *tal que* $\mathrm{mxl}(l)$ *es vacío, entonces existe una subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{s}$ *y un ideal* $\mathfrak{k}$ *en* $\mathfrak{h}$ *con la propiedad de que* $\mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ *es isomorfo al álgebra diamante.*

Una condición para que un grupo sea inductivo es equivalente a la existencia de álgebras maximales subordinas para todo elemento $l \in \mathfrak{s}^*$.

Un primer resultado en esta dirección que debe tomarse en cuenta es el siguiente.

Teorema 4.2 ***(Mackey)*** *Sea* S *un grupo de Lie soluble,* F *un subgrupo conexo cerrado de* S *y sea* $l \in \mathfrak{s}^*$*. Supongamos que* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de* $\mathfrak{s}$ *subordinada a* l *tal que* $S = HF$*. Entonces la restricción de* $\mathrm{Ind}(H \uparrow S, \chi_{l,\mathfrak{h}})$ *a* F *es* $\mathrm{Ind}(H \cap F \uparrow F, \chi_{l|\mathfrak{f},\mathfrak{h}\cap\mathfrak{f}})$

Combinando este resultado con el teorema de Kirillov obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3 *Sea* S *un grupo de Lie soluble, sea* N *un subgrupo de Lie conexo y nilpotente, y sea* $\phi \in \mathfrak{s}^*$*. Supongamos que existe una subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{s}$ *subordinada a* ϕ *que satisface:*

1. $S = HN$ *donde* $H = \exp(\mathfrak{h})$
2. $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \in \mathrm{mxl}(\phi|N)$.

Entonces $\mathrm{Ind}\,(H \uparrow S, \chi_\phi)$ *es irreducible.*

Para poder definir un grupo inductivo necesitamos introducir una serie de nuevos conceptos.

Denotaremos con $\mathrm{exl}(l)$ al subconjunto de $\mathrm{mxl}(l)$ que contiene a los elementos $\mathfrak{h}$ tales que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ está en $\mathrm{mxl}(l|\mathfrak{n})$ donde $\mathfrak{n}$ es el nil-radical de $\mathfrak{s}$. Se puede desmostrar que $\mathrm{exl}(l)$ es no vacío si y sólo si $\mathrm{mxl}(l)$ es no vacío.

Recordemos que si H es un subgrupo normal cerrado de S, el homomorfismo $\alpha_x \in \mathrm{Hom}(H,H)$ dado por la conjugación por un elemento $x \in S$, define una acción de S sobre $H^\wedge$.

Si N es un subgrupo normal cerrado nilpotente de S que contiene $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, podemos definir la acción de S sobre $\mathfrak{n}^*/\mathrm{Ad}^*N$ como $s \cdot [l] = \big\{(\mathrm{Ad}^* s|N)l' : l' \in [l]\big\}$. Se puede mostrar que si κ es el mapeo de Kirillov para N entonces $\alpha_x \cdot \kappa([l]) = \kappa(x \cdot [l])$.

Sea $\psi \in N^\wedge$ y F el subgrupo de S que deja a ψ fijo (bajo la acción anterior). Se puede mostrar que F es un subgrupo normal cerrado de S. Denotaremos a la órbita de ψ bajo S como Ω.

Si π es una representación unitaria de S, decimos que π está en la órbita Ω si existe una representación unitaria ψ' de F que cumple las siguientes propiedades:

1. La restricción de ψ' a N está en Ω (esto hace sentido pues ψ queda fijo bajo la acción de F)
2. π es la representación unitaria de S inducida por ψ'

De esta manera para describir las representaciones unitarias de S que están en Ω, basta describir las representaciones unitarias de F cuya restricción a N es un múltiplo de ψ.

Los resultados que describen las representaciones de F están relacionados con una construcción llamada *la obstrucción de Mackey* y el resultado que ayuda a describir estas representaciones se llama *teorema del pequeño grupo de Mackey*. La descripción de estos objetos no es trivial y quedan fuera del alcance de nuestro enfoque pero pueden verse en [4]

A través de la obstrucción de Mackey se puede obtener el siguiente resultado

Teorema 4.4 *Sea S un grupo de Lie soluble, y sea N un subgrupo de Lie conexo nilpotente que contiene a (S, S). También sea ρ una representación unitaria irreducible de N que se queda fija bajo la acción de S, y sea ϕ un elemento de la órbita $\Omega \in N^*/\mathrm{Ad}^*N$ que corresponde a ρ. Entonces ρ se extiende a una representación unitaria de S si y sólo si, existe un subespacio V de $\mathfrak{s}$ tal que $\mathfrak{s} = V \oplus \mathfrak{n}$ y $\phi([V, \mathfrak{s}]) = 0$*

Sea S un grupo de Lie soluble, y sea F un subgrupo cerrado de S que contiene a (S, S). Decimos que una representación unitaria π de S es accesible desde

F si π está en la órbita de $F^\wedge$ bajo S. Diremos que π es accesible si es accesible desde el nil-radical N de S.

Con lo anterior podemos definir un grupo de Lie inductivo.

Definición. *Sea S un grupo de Lie soluble. Decimos que S es inductivo si:*

1. *Cualquier elemento de $S^\wedge$ es accesible.*
2. *S actúa regularmente sobre S^**
3. $\mathrm{exl}(\phi)$ *es no vacío para toda $\phi \in S^*$*

Sea S un grupo de Lie inductivo y soluble, N su nil-radical, y sean π_1, π_2 elementos de $S^\wedge$ tal que están en la misma órbita de $N^\wedge$ bajo S, y sea ψ un elemento de dicha órbita. Sea F_0 la componente que contiene a la identidad del grupo de isotropía de ψ en S. Diremos que π_1 y π_2 son Δ-equivalentes si π_1 y π_2 están bajo la misma órbita de $F_0^\wedge$ bajo S

Denotaremos por $\partial(l, H)$ a la clase de Δ-equivalencia en $S^\wedge$ que consiste de todos los elementos de $S^\wedge$ que están en la órbita

$$S \cdot \mathrm{Ind}(F_0 \uparrow H, \chi_{l|F_0}).$$

El siguiente teorema muestra la extensión del resultado de Kirillov para grupos inductivos.

Teorema 4.5 *Sea S un grupo de Lie soluble e inductivo.*

1. *Sea $l \in \mathfrak{s}^*$. Entonces $\partial(l, \mathfrak{h})$ no depende de la elección de $\mathfrak{h}$ en* $\mathrm{exl}(l)$.
2. *Sea $\partial : \mathfrak{s}^* \to S^\wedge/\Delta$ el mapeo definido por $\partial(l) = \partial(l, \mathfrak{h})$ para toda $l \in \mathfrak{s}^*$ y toda $\mathfrak{h} \in \mathrm{exl}(l)$.*

   Para toda $s \in S$ y toda $l \in \mathfrak{s}^*$, $\partial((\mathrm{Ad}^* s)l) = s \cdot \partial(l) = \partial(l)$. Es decir, ∂ define un mapeo $\kappa : \mathfrak{s}^*/\mathrm{Ad}^* S \to S^\wedge/\Delta$ el cual es biyectivo.

Se puede mostrar que si S es un grupo de Lie inductivo, $l \in \mathfrak{s}^*$ y el grupo de isotropia de l en S es conexo entonces la clase de equivalencia de $\partial(l)$ en $S^\wedge/\Delta$ consisite de un elemento. Es decir, si para todo $l \in \mathfrak{s}^*$ el grupo de isotropía de l en

S es conexo entonces el mapeo κ lleva biyectivamente $\mathfrak{s}^*/\mathrm{Ad}^*S$ en $S^\wedge = S^\wedge/\Delta$. En consecuencia el mapeo de Kirillov en estos casos es exactamente el mismo.

Este resultado tiene una propiedad importante, y es que no todos los grupos de Lie inductivos son de tipo I. Un ejemplo de esto es el grupo de Dixmier cuya definición se encuentra en [4] al igual que la demostración y la información detallada de estos resultados.

5. Grupos de Tipo I

L. Auslander y B. Kostant, demostraron que el resultado de Kirillov es válido para todos los grupos de Lie solubles de tipo I. Para probar este resultado fue necesario hacer una nueva contrucción para inducir representaciones. Esta teoria está basada en el uso de formas simplécticas y cuantización

Sea (X, ω) una variedad simpléctica; es decir, una variedad $2n$-dimensional con una 2-forma cerrada ω tal que ω^n no se anula sobre X y $d\omega = 0$ sobre X. Sea $[\omega] \in H^2(X, R)$ su clase de cohomología deRahm correspondiente. Se puede mostrar que todas las órbitas de $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*G$ tienen dimensión par y que la forma bilineal $f([X, Y])$ define una 2-forma ω_O en cada órbita O tal que (O, ω_O) es una variedad simpléctica, para un grupo de Lie G.

Con lo anterior se pueden clasificar todos los grupos de Lie solubles de tipo I a través del siguiente teorema.

Teorema 5.1 *Si G es un grupo de Lie soluble conexo simplemente conexo, entonces G es tipo I si y sólo si*

1. *Todas las G-órbitas en $\mathfrak{g}^*$ son G_δ en la topología usual sobre $\mathfrak{g}^*$*
2. *$[\omega_O] = 0$ para toda O G-órbita*

En general si (X, ω) es cualquier variedad simpléctica entonces existe un haz lineal complejo L con conexión α tal que ω es la curvatura de la conexión α ($\omega = \mathrm{curv}(L, \alpha)$) si y sólo si la clase de cohomología deRham $[\omega]$ es integral.

Denotemos como $\mathcal{H}_\omega$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de parejas (L, α) tales que:

1. $\omega = \mathrm{curv}(L, \alpha)$
2. Existe una estructura Hermitiana paralela invariante sobre L

Si G es un grupo de Lie conexo denotamos como $\mathcal{H}_O$ a $\mathcal{H}_{\omega_O}$, donde O es cualquier G-órbita contenida en $\mathfrak{g}^*$. Si además G es soluble conexo simplemente conexo de tipo I, se puede mostrar que ω_O siempre es integral.

Con esto podemos describir el nuevo proceso de inducción para este caso, y dentro de este proceso también existen las polarizaciones. Para definir estas polarizaciones necesitamos las siguientes observaciones

Sea $l \in O$, G_l el grupo de isotropía de l cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_l$. Se puede demostrar que $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_l$ tiene dimensión par, digamos $2n$. Sea $\mathfrak{g}_C$ la complexificación de $\mathfrak{g}$ (un álgebra de Lie real la podemos volver compleja si hacemos el producto tensorial $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$).

Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra compleja de $\mathfrak{g}_C$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$, $\mathfrak{e} = (\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}$. Así $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{e}$. Sea ω_l la forma bilineal alternante sobre $\mathfrak{g}$ definida por $\omega_l(X, Y) = l([X, Y])$, ω_l induce una forma bilineal alternante no singular β_l sobre $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$, esto implica que $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ tiene dimensión par.

Sea $j(j^2 = -1)$ la estructura compleja sobre $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ inducida por $\mathfrak{h}$. Esto define una forma bilineal no singular σ_l sobre $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ dada por $\sigma_l(u, v) = \beta_l(u, jv)$.

Sea $\mathfrak{n}$ el nil-radical de $\mathfrak{g}$, $l' \in \mathfrak{n}^*$ tal que $l' = l|\mathfrak{n}$ y sea $\mathfrak{n}_{l'}$ el álgebra de Lie del grupo de isotropía de l' bajo la acción de $N = \exp \mathfrak{n}$. Así, el álgebra $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión par, digamos $2m$.

Una subálgebra compleja $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_C$ se llama *polarización admisible* de O si cumple las siguientes condiciones:

1. $(\mathfrak{g}_f)_C \subseteq \mathfrak{h}$.
2. $\mathfrak{h}$ es normalizada por G_l
3. $\dim_C \mathfrak{g}_C/\mathfrak{h} = n$
4. l visto como un elemento de $\mathfrak{g}_C^*$ se anula en $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$
5. $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}_C$, donde $\overline{\mathfrak{g}}$ denota la conjugación relativa a $\mathfrak{g}$
6. σ_l es positivo defina
7. $\dim_C \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_C = m$

Ahora supongamos que $\mathfrak{h}$ es una polarización admisible. Entonces el grupo producto $G_l D = A$ es un subgrupo de G, donde D es el subgrupo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{d}$. Esta D es normalizada por G_l. Así la eleción de una $\lambda \in \mathcal{H}_O$ define un caracter χ_λ de A. Sea π_λ la representación unitaria de G inducida por χ_λ y sea $\mathscr{H}_\lambda$ el espacio de Hilbert correspondiente. Podemos ver los elementos de $\mathscr{H}_\lambda$ como secciones de un haz lineal sobre G/A.

$B = G_l E$ también es un subgrupo de G, donde E es el subgrupo de G que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{e}$. Por la condición (6) tenemos que B/A tiene estructura de variedad de Kähler y sus G-transformaciones definen una fibración de G/A cuyas fibras son variedades de Kähler. Además la restricción del haz lineal definido por $\mathscr{H}_\lambda$ a estas fibras es holomorfa. Sea H_λ el subespacio cerrado de $\mathscr{H}_\lambda$ de todas las secciones en $\mathscr{H}_\lambda$ que son holomorfas en cada fibra. Así H_λ es estable bajo $\pi_\lambda(G)$ y de esta manera obtenemos una representación $\Pi_\lambda^{\mathfrak{h}}$ de G sobre H_λ.

Esta construcción detallada puede encontrarse en [1].

Esta nueva representación es la que extiende el teorema de Kirillov para grupos solubles de tipo I.

Teorema 5.2 *Sea G un grupo de Lie soluble, conexo, simplemente conexo de tipo I. Entonces existe un polarización admisible $\mathfrak{h}$ para cualquier O G-órbita, la representación unitaria $\Pi_\lambda^{\mathfrak{h}}$ es irreducible y la clase de equivalencia unitaria de $\Pi_\lambda^{\mathfrak{h}}$ es independiente de la polarización admisible.*

Se puede mostar que en el caso en que el grupo es nilpotente o exponencial, este resultado es exactamente el mismo que el obtenido por Kirillov y Bernat respectivamente.

Por supuesto, este resultado no acaba con el problema, pues no todos los grupos de Lie solubles son de tipo I, pero muestra la dificultad del problema pues esta construcción requiere de herramienta matemática bastante sofiscada como cohomología, variedades de Kähler, números de betti, entre otras.

En 1971 Pukanski publicó otro artículo acerca de representaciones unitarias de grupos de Lie solubles [14], en el cual trata de extender este resultado, basandose en esta contrucción, a todos los grupos de Lie solubles. En este artículo se encuentra un análisis detallado de estos métodos.

6. Comentarios Finales

Dentro de la teoría de representaciones unitarias existen muchas cosas interesantes que estudiar, aquí sólo presentamos lo relacionado a la paremetrización de $G^{\wedge}$ cuando G es un grupo Lie soluble, pero existen muchas cosas más y para cada una de ellas se utiliza mucha herramienta matemática.

Como ejemplo de lo anterior, dentro de las representaciones unitarias de grupo de Lie nilpotentes y exponenciales se puede demostrar que el mapeo de Kirillov es continuo, y para demostrarlo en el caso exponencial es necesario hacer uso de una construcción llamada *estructuras variables*. Esta técnica se puede ver en [12].

De la misma manera, para construir representaciones unitarias existen varios métodos, en este trabajo presentamos dos, una relacionada al análisis real introducida por Mackey y la otra relacionada al análisis complejo y sus teorías de cohomología asociadas que surgió gracias al trabajo de personas como Borel, Weil, Harish-Chandra, Bott, Langlands, Kostant y Schmid. Pero existen otras como la introducida por Zuckermann llamada *inducción cohomológica*, la cual es un análogo algebráico a la construcción de análisis complejo y se construye a partir de ver a las representaciones como un módulo. Toda esta teoría se encuentra desarrollada detallamente en [11].

Recientemente se han utilizado otras técnicas para atacar estos problemas relacionadas con la Geometría Diferencial no Conmutativa, las cuales involucran el estudio de las representaciones unitarias de ciertas álgebras-$*$ asociadas al grupo.

De esta manera el estudio de las representaciones unitarias de grupos de Lie se vuelve atractivo y accesible, pues existen muchas técnicas para atacarlo. En particular estoy interesado en estudiar los métodos relacionados a la geometría diferencial no conmutativa.

Las representaciones unitarias de grupos de Lie siguen siendo un campo abierto dentro de las matemáticas, pero para poder abordarlo es necesario conocer bastantes ramas de las matemáticas, lo cual las hace interesantes y atractivas como objetos matemáticos.

Referencias

[1] Atiyah, *Representation Theory of Lie Groups.* Cambridge University (1979)

[2] Auslander, L. y Kostant, B.,*Quantization and Representations of Solvable Lie Groups.* Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 73, No. 5 (1967)

[3] Bernat, P., *Sur le Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles.* Annales Scientifiques de l'E. N. S. 82 (1965)

[4] Brezin, J., *Unitary Representation Theory for Solvable Lie Groups.* Memoirs of the American Mathematical Society 79, (1968)

[5] Ed. Carmona, J. y Vergne, M.,*Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups* Springer (1983)

[6] Corwin, L. y Greenleaf, F., *Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications.* Cambrige University Press

[7] Faustinos, L., *Representaciones Unitarias de Grupos de Lie Nilpotentes*, Tesis de Licencitura, UNAM, (2006)

[8] Helgason, S., *Analysis on Lie Groups and Homogeneous Spaces*

[9] James, I.M. Ed., *Representation Theory of Lie Groups.* Cambrige University Press

[10] Kirillov, A. A., *Unitary Representations of Nilpotent Lie Groups.* Uspekhi Mathem. Nauk, 106 (1962)

[11] Knapp, Anthony W. y David A. Vogan Jr. *Cohomological Induction and Unitary Representations* Princeton University Press (1995)

[12] Leptin, H y Ludwig, J., *Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups.* de Gruytier, (1994)

[13] Mackey, George *Unitary Group Representations in Physics, Probability and Number Theory* Mathematics Lecture Notes Series 55

[14] Pukanski, L., *Unitary Representations of Solvable Lie Groups.* Annales Scientifiques de l'E. N. S. 4^e series tomo 4 número 4 (1971)

[15] Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer, (1983)