UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Encajando conos en hiperespacios

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en Ciencias

PRESENTA:

Hugo Villanueva Méndez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alejandro Illanes Mejía

2008

Índice general

Introducción

Un continuo es un espacio métrico compacto conexo y no vacío. Dado un continuo X podemos considerar su cono, denotado por $Cono(X)$, como el espacio cociente que se obtiene cuando, en el espacio $X \times [0,1]$, se identifica el conjunto $X \times \{1\}$ en un solo punto. El hiperespacio de subcontinuos de X es el espacio $C(X)$ que se define por $C(X) = \{A \subset X : A$ es un subcontinuo de $X\}$. A $C(X)$ se le considera con la métrica de Hausdorff.

En el estudio del hiperespacio $C(X)$ se ha observado que éste contiene estructuras similares a las del $Cono(X)$. Se sabe que en $C(X)$ se pueden dar arcos ordenados desde los conjuntos de la forma $\{p\}$ hasta el elemento X de $C(X)$. Estos arcos se parecen a los arcos de la forma $\{p\} \times [0,1]$ del cono. Por otra parte, los niveles de Whitney de $C(X)$, en algunos continuos, se parecen a los niveles de la forma $X \times \{t\}$ del cono. Para entender estas semejanzas se pueden leer las secciones 7 y 80 de [4] y el capítulo 8 de [8].

El problema de determinar cuándo $Cono(X)$ es homeomorfo (o topológicamente equivalente) a $C(X)$ es un problema clásico de la teoría de hiperespacios y ha sido estudiado ampliamente, desde hace unos 40 años, por varios autores. Para el caso en que la dimensión de $C(X)$ es finita, el problema está prácticamente resuelto. En los artículos [3] y [6], apoyándose de todo lo que se habia hecho previamente, se da una respuesta muy completa a este problema. Este problema tiene una solución casi exacta porque los continuos que satisfacen esta propiedad en realidad no son demasiados. Esto se debe a que, en general, $C(X)$ es mucho mayor (en términos de dimensión) que $Cono(X)$.

Diremos que un continuo X es CE (cono encajable) si existe un encaje h de $Cono(X)$ en $C(X)$ tal que $h(p,0) = \{p\}$ para cada $p \in X$. También diremos que X es CEO (cono encajable ordenado) si existe un encaje h como el mencionado que tiene la propiedad adicional de que $h(p,s) \subsetneq h(p,t)$ cuando $p \in X$ y $s < t$.

Por nuestra experiencia en el estudio de los hiperespacios sabemos que la clase CE es mucho más amplia que la clase de continuos cuyo cono e hiperespacio son homeomorfos. El problema esencial que trabajamos es el de determinar cuáles continuos tienen las propiedades CE y CEO.

Este problema se ve muy difícil de resolver en general. Sin embargo, hemos obtenido algunos resultados imponiendo algunas condiciones adicionales a los continuos. También se nos han presentado algunas preguntas para abordar en este tema. Ambos temas son presentados en este trabajo.

Este problema fue planteado en un taller de hiperespacios, agradezco a las personas que estuvieron trabajando en él durante el taller, pues surgieron varias ideas para atacarlo.

Capítulo 1

Continuos

Un continuo es un espacio métrico compacto conexo y no vacío. En este capítulo daremos una serie de conceptos y resultados importantes, acerca de los continuos y sus hiperespacios, a los cuales haremos referencia.

1.1. Hiperespacios

Dado un continuo X definimos los siguientes hiperespacios de X:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X,\ A \neq \emptyset\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}. \end{aligned}$$

A $C(X)$ se le conoce como el *hiperespacio de subcontinuos* de X.

La métrica que se le da al espacio 2^X es la *métrica de Hausdorff*, dada por

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\},\ A, B \in 2^X,$$

donde $N(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x,a) < \epsilon \text{ para algún } a \in A\}$, denota la *nube de radio ϵ centrada en A*.

Como $C(X) \subset 2^X$, la métrica de Hausdorff restringida a $C(X)$ es una métrica para el hiperespacio de subcontinuos de X.

Observemos que $F_1(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más un punto}\} = \{\{x\} : x \in X\}$ es homeomorfo a X. Además, como $\{x\}$ es un subcontinuo de X, se tiene que $F_1(X) \subset C(X)$. A $F_1(X)$ se le suele llamar la *base del hiperespacio* $C(X)$.

El primer lema presentado es útil en la demostración de que las dendritas son continuos CEO.

Lema 1.1 *Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X tal que $\lim A_n = A$. Entonces $p \in A$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n = p$.*

Demostración. Supongamos primero que existe una sucesión de puntos $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n = p$. Si $p \notin A$, sea $\epsilon = \frac{1}{2}d(p, A)$. Como $\lim A_n = A$ y $\lim p_n = p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $d(p, p_n) < \epsilon$ y $H(A, A_n) < \epsilon$. Entonces $A_N \subset N(\epsilon, A)$. Como $p_N \in A_N$, existe $a \in A$ tal que $d(p_N, a) < \epsilon$. De aquí que $d(p, a) \leq d(p, p_N) + d(p_N, a) < 2\epsilon = d(p, A)$. Concluimos que $d(p, a) < d(p, A)$, una contradicción. Por tanto $p \in A$.

Supongamos ahora que $p \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como A_n es compacto, existe $p_n \in A_n$ tal que $d(p, p_n) = d(p, A_n)$. Veamos que $\lim p_n = p$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$, siempre que $n \geq N$. Dada $n \geq N$, como $p \in A \subset N(\epsilon, A_n)$ existe $a_n \in A_n$ tal que $d(p, a_n) < \epsilon$. Pero $d(p, p_n) = d(p, A_n) \leq d(p, a_n) < \epsilon$. Por tanto, $\lim p_n = p$. Esto termina la prueba. ■

Otros resultados que serán de utilidad son los siguientes.

Lema 1.2 *Si Λ es un subcontinuo de 2^X tal que $\Lambda \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\cup\Lambda$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Como $\Lambda \in 2^{2^X}$, se tiene que $\cup\Lambda$ es un subconjunto compacto de X por [8, Lema 1.48, p. 78]. Mostremos que $\cup\Lambda$ es un subconjunto conexo de X.

Supongamos que no. Entonces $\cup\Lambda$ es la unión de dos subconjuntos cerrados ajenos no vacíos M_1 y M_2. Sea $A \in C(X) \cap \Lambda$. Como A es conexo, se tiene que $A \subset M_1$ o $A \subset M_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \subset M_1$. Sean

$$\Lambda_1 = \{L \in \Lambda : L \subset M_1\}$$

y

$$\Lambda_2 = \{L \in \Lambda : L \cap M_2 \neq \emptyset\}.$$

Observemos que Λ_1 y Λ_2 son subconjuntos cerrados ajenos en 2^X tales que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Puesto que $A \in \Lambda$ y $A \subset M_1$, entonces $\Lambda_1 \neq \emptyset$. Además, como $M_2 \neq \emptyset$ y $M_2 \subset \cup\Lambda$, se tiene que $\Lambda_2 \neq \emptyset$. Hemos mostrado que Λ no es conexo. Lo cual es una contradicción. Concluimos que $\cup\Lambda$ es un conexo de X y por tanto un subcontinuo de X. ■

Teorema 1.3 *Sea Y un continuo indescomponible y sea $\Lambda \subset 2^Y$ un continuo arcoconexo. Si $\cup\Lambda = Y$ y si $\Lambda \cap C(Y) \neq \emptyset$, entonces $Y \in \Lambda$.*

Recordemos que un continuo es *indescomponible* si no es la unión de dos de sus subcontinuos propios.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [8, Teorema 1.50, p. 80].

Capítulo 2

Las propiedades CE y CEO

Este es el capítulo principal del trabajo. En él daremos los resultados obtenidos, así como las preguntas que nos hemos planteado acerca de este tema. Recordemos que el cono de un espacio topológico X, denotado por $Cono(X)$, se define como el espacio cociente que se obtiene al identificar, en el espacio $X \times [0,1]$, el conjunto $X \times \{1\}$ en un solo punto. Definamos las propiedades CE y CEO.

Definición 2.1 *Un continuo X es CE (cono encajable) si existe un encaje h de $Cono(X)$ en $C(X)$ tal que $h(p,0) = \{p\}$ para cada $p \in X$.*

Definición 2.2 *Un continuo X es CEO (cono encajable ordenado) si X es CE y el encaje h se puede escoger con la propiedad adicional de que $h(p,s) \subsetneq h(p,t)$ cuando $p \in X$ y $s < t$.*

La propiedad adicional en la definición de un continuo CEO tiene el siguiente significado: los arcos de la forma $\{p\} \times [0,1]$ del cono, se pueden ver como arcos ordenados de $\{p\}$ a $h(v)$ en el hiperespacio $C(X)$. Recordemos que si $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, un arco ordenado en el hiperespacio $C(X)$ es una función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$. Se sabe que existe un arco ordenado de A a B siempre que $A \subsetneq B$ con $A, B \in C(X)$ ([1, Teorema 6.10, p. 90]).

2.1. Dendritas

Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. Se sabe ([7, Teorema 10.7, p. 168]) que las dendritas tienen dos clases de puntos, los puntos de corte y los puntos extremos. Un punto p de un espacio topológico X se dice que es un *punto de corte* si $X - \{p\}$ es disconexo. Y se dice que es un *punto extremo* si para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe un conjunto abierto V tal que $p \in V \subset U$ y $fr(U)$ consiste de sólo un punto.

Un punto p en un continuo arcoconexo se dice que es un punto extremo en el sentido clásico si es un punto extremo de cada arco en X que lo contiene. Sabemos que en las dendritas, un punto es extremo si y sólo si es un punto extremo en el sentido clásico. Esta caracterización de punto extremo para las dendritas es la que utilizaremos. Denotaremos por $E(X)$ al conjunto de puntos extremos del continuo X.

Existen varias caracterizaciones de las dendritas. Decimos que un continuo X es *unicoherente* si siempre que A y B son subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Un continuo se dice que es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes. Se sabe que un continuo localmente conexo es una dendrita si y sólo si es hereditariamente unicoherente ([7, Teorema 10.34, p. 180]).

En las dendritas se puede considerar una métrica particular que induce la topología del espacio.

Definición 2.3 *Una **métrica convexa** para un espacio X es una métrica, d, para X, que induce la topología sobre X y para la cual siempre existen los puntos medios; es decir, para cualesquiera $x, y \in X$, existe $m \in X$ tal que*

$$d(x,m) = \frac{1}{2}d(x,y) = d(m,y).$$

Por [4, Teorema 10.3, p.80], todo continuo localmente conexo, en particular las dendritas, tiene una métrica convexa. Usaremos la siguiente propiedad.

Proposición 2.4 *Sea X un continuo con una métrica convexa d. Entonces cualesquiera dos puntos, x y y, de X pueden ser unidos por un arco, J, en X tal que J es isométrico al intervalo cerrado* $[0, d(x, y)]$.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [4, Proposición 10.4, p. 81]. Como las dendritas son únicamente arcoconexas, la anterior proposición dice que el único arco que une dos puntos es isométrico al intervalo cerrado mencionado. En particular, si z es un punto en el arco que une a los puntos x y y, entonces $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Al arco que une los puntos x y y lo denotaremos por xy.

Otra propiedad que usaremos de las dendritas es la suavidad. Dado un dendroide (continuo arcoconexo hereditariamente unicoherente) X y un punto $p \in X$; se dice que X es *suave en p* si siempre que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a un punto $x \in X$, se tiene que $\lim px_i = px$. Se sabe que las dendritas son suaves en cada uno de sus puntos.

Para mostrar que las dendritas son continuos CEO, necesitamos algunos lemas preliminares.

Lema 2.5 *Sean X una dendrita con métrica convexa d, y $p, q \in X$. Entonces existe $e \in E(X)$ tal que $p \in qe$ y $d(q, g) \leq d(q, e)$ para cada $g \in E(X)$ con $p \in qg$.*

Demostración. Sea $F = \{x \in X : p \in qx\}$. Veamos que F es cerrado. Tomemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de F tal que $\lim x_n = x$. Por la suavidad de las dendritas, se tiene que $\lim qx_n = qx$. Como $p \in qx_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el Lema 1.1. implica que $p \in qx$. Así que $x \in F$. Concluimos que F es cerrado y por tanto compacto.

Consideremos la función $d_q : F \longrightarrow [0, \infty)$, dada por $d_q(x) = d(q, x)$. Como F es compacto y d_q continua, existe $e \in F$ tal que $d_q(e) \geq d_q(x)$ para cada $x \in F$. Veamos que $e \in E(X)$.

Si $e \notin E(X)$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $e \in x_1x_2 \setminus \{x_1, x_2\}$. Observemos que no pueden estar ambos, x_1 y x_2, en el arco qe. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 \notin qe$. Entonces $qx_1 = qe \cup ex_1$. Por tanto

$p \in qe \subset qx_1$. Se sigue que $x_1 \in F$. Además, como $e \neq x_1$, $d(q, x_1) = d(q, e) + d(e, x_1) > d(q, e)$. Lo cual contradice la elección de e. Hemos mostrado que $e \in E(X)$. Esto concluye la prueba. ■

Teorema 2.6 *Las dendritas son continuos CEO*

Demostración. Por la Proposición 2.4, podemos considerar una métrica convexa d para X. Dados $p \in X$ y $e \in E(X)$, definimos la función $\alpha_{p,e} : [0,1] \longrightarrow pe$ dada por $\alpha_{p,e}(t)$ es el único punto $x \in pe$ tal que $d(p, x) = td(p, e)$.

Definamos la función $f : X \times I \longrightarrow C(X)$ como

$$f(p, t) = \bigcup_{e \in E(X)} \alpha_{p,e}([0, t]).$$

Observemos que $p \in \alpha_{p,e}([0, t])$ para cada $e \in E(X)$. Por tanto, $f(p, t)$ es unión de conjuntos conexos cada uno de los cuales contiene a p. Entonces $f(p, t)$ es conexo. Veamos que $f(p, t)$ es cerrado.

Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $f(p, t)$ tal que $\lim y_n = y$. Dada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f(p, t)$. Entonces existe $e_n \in E(X)$ tal que $y_n \in pe_n$ y $d(p, y_n) \leq td(p, e_n)$. Como X es compacto, podemos suponer que la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $x \in X$. Por la suavidad de las dendritas, tenemos que $\lim pe_n = px$. Puesto que $y_n \in pe_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.1, se tiene que $y \in px$.

La continuidad de la función distancia y la desigualdad $d(p, y_n) \leq td(p, e_n)$, implican que $d(p, y) \leq td(p, x)$. Sea $e \in E(X)$ tal que $x \in pe$. Entonces $d(p, x) \leq d(p, e)$. Por tanto $d(p, y) \leq td(p, e)$. Así que $y \in \alpha_{p,e}([0, t]) \subset f(p, t)$. Hemos mostrado que $f(p, t)$ es cerrado y por tanto compacto. Concluimos que $f(p, t) \in C(X)$.

Veamos ahora que f es continua. Para eso, mostremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Sean $p, q \in X$ y $e \in E(X)$. Si $p_s = \alpha_{p,e}(s)$ y $q_s = \alpha_{q,e}(s)$, entonces $d(p_s, q_s) \leq 2d(p, q)$

Caso 1. p, q y e están en el mismo arco. Supongamos sin pérdida de generalidad que q está entre p y e.

Caso 1.1. $p_s \in pq$.
Como $q_s \in qe$, $d(p_s, q_s) = d(p_s, q) + d(q, q_s) = (d(p,q) - d(p, p_s)) + d(q, q_s) = d(p,q) - s(p,e) + sd(q,e) = d(p,q) + s(d(q,e) - d(p,e)) \leq d(p,q) + |d(q,e) - d(p,e)| = d(p,q) + d(p,q) = 2d(p,q)$.

Caso 1.2. $p_s \in qe$.
Entonces $d(p_s, q_s) = |d(p, q_s) - d(p, p_s)| = |d(p,q) + d(q, q_s) - d(p, p_s)| \leq d(p,q) + |sd(q,e) - sd(p,e)| = d(p,q) + s\,|d(q,e) - d(p,e)| \leq 2d(p,q)$

Caso 2. Existe $v \in X$ tal que $pe \cap qe = ve$.

Observemos que $|d(p,e) - d(q,e)| = |d(p,v) + d(v,e) - d(q,v) - d(v,e)| = |d(p,v) - d(q,v)| \leq |d(p,v) + d(q,v)| = d(p,q)$.

Caso 2.1. $p_s \in pv$, $q_s \in qv$.
Como $p_s q_s \subset pq$, se tiene que $d(p_s, q_s) \leq d(p,q)$.

Caso 2.2. $p_s \in ve$, $q_s \in qv$.
Entonces, $d(p_s, q_s) = d(q_s, v) + d(v, p_s) = (d(q,v) - d(q, q_s)) + (d(p, p_s) - d(p,v)) \leq |d(q,v) - d(p,v)| + s\,|d(p,e) - d(q,e)| \leq 2d(p,q)$.

Caso 2.3. $p_s \in pv$, $q_s \in ve$.
Entonces, $d(p_s, q_s) = d(p_s, v) + d(v, q_s) = (d(p,v) - d(p, p_s)) + (d(q, q_s) - d(q,v)) \leq |d(p,v) - d(q,v)| + s\,|d(q,e) - d(p,e)| \leq 2d(p,q)$.

Caso 2.4. $p_s, q_s \in ve$.
Entonces, $d(p_s, q_s) = |d(v, q_s) - d(v, p_s)| = |d(q, q_s) - d(q,v) - d(p, p_s) + d(p,v)| \leq |d(p,v) - d(q,v)| + s\,|d(q,e) - d(p,e)| \leq 2d(p,q)$.

Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Ahora, tomemos $\epsilon > 0$. Sea $0 < \delta < \text{mín}\{\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{2di\acute{a}m(X)}\}$. Sean $(p,t), (q,s) \in X \times I$ tales que $D((p,t),(q,s)) < \delta$, donde D es la métrica para $X \times I$ dada por $D((p,t),(q,s)) = d(p,q) + |t - s|$.

Afirmación 2. $H(f(p,t), f(p,s)) < \frac{\epsilon}{2}$. Mostremos que $f(p,t) \subset N(\frac{\epsilon}{2}, f(p,s))$. Sea $x \in f(p,t)$. Entonces existe $e \in E(X)$ tal que $x \in pe$ y $d(p,x) \leq$

$td(p,e)$. Sean $p_t = \alpha_{p,e}(t)$ y $p_s = \alpha_{p,e}(s)$. Si $x \in pp_s \subset f(p,s)$, entonces $x \in N(\frac{\epsilon}{2}, f(p,s))$.

Supongamos que $x \in p_s e$. Como $x \in pp_t$, se tiene que $x \in p_s p_t$. Entonces $p_s \in f(p,s)$ es tal que $d(x,p_s) \leq d(p_t,p_s) = d(p,p_t) - d(p,p_s) = td(p,e) - sd(p,e) = (t-s)d(p,e) \leq |t-s|\, d(p,e) \leq |t-s|\, di\acute{a}m(X) < \delta di\acute{a}m(X) < \left(\frac{\epsilon}{2di\acute{a}m(X)}\right) di\acute{a}m(X) = \frac{\epsilon}{2}$. Hemos mostrado que $f(p,t) \subset N(\frac{\epsilon}{2}, f(p,s))$. Un argumento similar muestra que $f(p,s) \subset N(\frac{\epsilon}{2}, f(p,t))$. De aquí, concluimos que $H(f(p,t), f(p,s)) < \frac{\epsilon}{2}$.

Afirmación 3. $H(f(p,s), f(q,s)) < \frac{\epsilon}{2}$. Veamos que $f(p,s) \subset N(\frac{\epsilon}{2}, f(q,s))$. Sea $x \in f(p,s)$. Entonces existe $e \in E(X)$ tal que $x \in pe$ y $d(p,x) \leq sd(p,e)$. Sean $p_s = \alpha_{p,e}(s)$ y $q_s = \alpha_{q,e}(s)$. Si $x \in pq$, entonces $q \in f(q,s)$ es tal que $d(x,q) \leq d(p,q) < \delta < \frac{\epsilon}{2}$.

Supongamos que $x \notin pq$. Así que $x \in qe$. Si $x \in qq_s \subset f(q,s)$, entonces $x \in N(\frac{\epsilon}{2}, f(q,s))$. Supongamos entonces que $x \in q_s e$. Como $x \in pp_s$, se tiene que $x \in q_s p_s$. De aquí que $q_s \in f(q,s)$ es tal que $d(x,q_s) \leq d(p_s,q_s) \leq 2d(p,q) < 2\delta < 2\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \frac{\epsilon}{2}$. Esto muestra que $f(p,s) \subset N(\frac{\epsilon}{2}, f(q,s))$. Un argumento análogo muestra que $f(q,s) \subset N(\frac{\epsilon}{2}, f(p,s))$. Concluimos que $H(f(p,s), f(q,s)) < \frac{\epsilon}{2}$.

Las afirmaciones 2 y 3 muestran que si $(p,t),(q,s) \in X \times I$ son tales que $D((p,t),(q,s)) < \delta$, entonces $H(f(p,t), f(q,s)) \leq H(f(p,t), f(p,s)) + H(f(p,s), f(q,s)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Esto prueba la continuidad de f.

Observemos que para cada $p \in X$, $f(p,1) = \bigcup_{e \in E(X)} \alpha_{p,e}([0,1]) = \bigcup_{e \in E(X)} pe = X$. Además, si $t < 1$, para cada $e \in E - \{p\}$, se tiene que $e \notin f(p,t)$. Por tanto, $f(p,t) = X$ si y sólo si $t = 1$.

Tomemos $(p,t),(q,s) \in X \times [0,1)$, tales que $f(p,t) = f(q,s)$. Mostremos que $(p,t) = (q,s)$.

Por el Lema 2.5, podemos tomar $e_q \in E(X)$ tal que $p \in qe_q$ y $d(e_q,q) \geq d(e,q)$ para cada $e \in E(X)$ que cumpla $p \in qe$. Sean $p_t = \alpha_{p,e_q}(t)$ y $q_s = \alpha_{q,e_q}(s)$. Como $p_t \in f(p,t) = f(q,s)$, existe $e \in E(X)$ tal que $p_t \in qe$ y $d(q,p_t) \leq sd(q,e)$. Observemos que $p \in pp_t \subset qp_t \subset qe$. Por la elección de

e_q, se tiene que $d(q,e) \leq d(q,e_q)$. Por tanto, $d(q,p_t) \leq sd(q,e_q) = d(q,q_s)$. Concluimos que $p_t \in qq_s$. Más aún, $pp_t \subset qq_s$.

Ahora bien, como $q_s \in f(q,s) = f(p,t)$, existe $e' \in E(X)$ tal que $q_s \in pe'$ y $d(p,q_s) \leq td(p,e')$. Como $p \in qq_s$ y $q_s \in pe'$, tenemos que $p \in qe'$. Por la elección de e_q, se tiene que $d(q,p) + d(p,e') = d(q,e') \leq d(q,e_q) = d(q,p) + d(p,e_q)$. De aquí que $d(p,e') \leq d(p,e_q)$. Por tanto, $d(p,q_s) \leq td(p,e_q) = d(p,p_t)$. Concluimos que $d(q,q_s) = d(q,p) + d(p,q_s) \leq d(q,p) + d(p,p_t) = d(q,p_t)$. Con la desigualdad mostrada arriba, se tiene que p_t y q_s son puntos en el arco qe_q tales que $d(q,p_t) = d(q,q_s)$. Hemos mostrado que $p_t = q_s$.

Puesto que $p_t = q_s$, se tiene que $d(p_t,e_q) = d(q_s,e_q)$. Por tanto, $(1-t)d(p,e_q) = (1-s)d(q,e_q)$. Como $p \in qe_q$, se tiene que $d(p,e_q) \leq d(q,e_q)$. De aquí que $1-t \geq 1-s$. Se sigue que $s \geq t$.

Ahora, tomemos $e_p \in E(X)$ tal que $q \in pe_p$ y $d(e_p,p) \geq d(e,p)$ para cada $e \in E(X)$ que cumpla $q \in pe$. Siguiendo un razonamiento análogo, se demuestra que $t \geq s$. Concluimos que $s = t$. Como ambos son menores a 1, la igualdad $(1-t)d(p,e_q) = (1-s)d(q,e_q)$ implica que $d(p,e_q) = d(q,e_q)$. Esto muestra que $p = q$. Se sigue que si $f(p,t) = f(q,s)$ con $s,t \in [0,1)$, entonces $(p,t) = (q,s)$. Es decir, f es inyectiva en $X \times [0,1)$.

Observemos que $f(p,0) = \displaystyle\bigcup_{e\in E(X)} \alpha_{p,e}(0) = \{p\}$ para cada $p \in X$. Además, si $s < t$, $f(p,s) = \displaystyle\bigcup_{e\in E(X)} \alpha_{p,e}([0,s]) \subset \bigcup_{e\in E(X)} \alpha_{p,e}([0,t]) = f(p,t)$. Si $t = 1$, se tiene que $f(p,s) \subsetneq X = f(p,t)$. Si $t < 1$, la inyectividad en $X \times [0,1)$ implica que $f(p,s) \subsetneq f(p,t)$. En ambos casos se tiene que $f(p,s) \subsetneq f(p,t)$.

Consideremos la función cociente $\pi : X \times I \longrightarrow Cono(X)$. Veamos que f es constante bajo las fibras de π. Si v es el vértice del cono, entonces $\pi^{-1}(v) = X \times \{1\}$. Por otro lado $f(p,1) = X$ para cada $p \in X$. Así que f es constante en $\pi^{-1}(v)$. Para un punto $w \neq v$, se tiene que $\pi^{-1}(w)$ es un punto y por tanto f es constante en esa fibra. Hemos mostrado que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Trasgresión. Por tanto, la función $h = f \circ \pi^{-1} : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ es una función continua.

Veamos que h es inyectiva. Sean $w \neq z \in Cono(X)$. Si uno de ellos es el vértice v del cono, supongamos $w = v$, se tiene que $h(v) = X$. Por otro lado,

$\pi^{-1}(z) = (p,t)$, con $p \in X$ y $t < 1$. Por tanto $f(\pi^{-1}(p,t)) = f(p,t) \subsetneq X$. Así que $h(w) \neq h(z)$. Supongamos que ninguno de los dos es el vértice. Tenemos entonces que $\pi^{-1}(w) = (p,t)$ y $\pi^{-1}(z) = (q,s)$, con $(p,t) \neq (q,s)$ y $s,t \in [0,1)$. Como f es inyectiva en $X \times [0,1)$, se tiene que $f(p,t) \neq f(q,s)$. Por tanto $h(w) \neq h(z)$. Hemos mostrado que h es una función continua e inyectiva de un compacto a un espacio Hausdorff. Por tanto h es un encaje.

Además, si $0 \leq s < t \leq 1$, se tiene que $h(p,s) = f(p,s) \subsetneq f(p,t) = h(p,t)$. Observemos finalmente que $h(p,0) = f(p,0) = \{p\}$. Por tanto, h es el encaje deseado. Concluimos que las dendritas son continuos CEO. ■

Los árboles (graficas finitas sin curvas cerradas simples) son dendritas; por tanto son continuos CEO. En general, todavía no sabemos si todas las gráficas finitas son continuos CEO.

Por otro lado, como sabemos que las dendritas son dendroides, es natural preguntarse si existen dendroides que no sean continuos CE. O bien, ¿qué condiciones debe tener un dendroide para que sea un continuo CE? Por ejemplo, ¿serán los abanicos suaves continuos CE? O más generalmente, ¿serán los dendroides suaves continuos CE?

2.2. Propiedades de continuos CE

En esta sección demostraremos algunas propiedades de los continuos CE. Primero probaremos que si un continuos es CE, entonces contiene a lo más un continuo indescomponible. Recordemos que para un continuo X y un punto $p \in X$, la composante del punto p se define como $\kappa(p) = \bigcup\{A \subset X : A$ es un subcontinuo propio de X y $p \in A\}$.

Definición 2.7 *Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y κ una composante de Y. Decimos que κ se* ***sale*** *de Y si existe un subcontinuo Z de X tal que $Z \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $Z \cap \kappa \neq \emptyset$ y $Y \nsubseteq Z$.*

Veamos que bajo ciertas hipótesis, un subcontinuo indescomponible no puede tener demasiadas composantes que se salgan de él.

Lema 2.8 *Sea X un continuo tal que* $\dim(C(X)) < \infty$. *Si Y es un subcontinuo indescomponible no degenerado de X, entonces a lo más un número finito de composantes de Y se salen de Y.*

Demostración. Supongamos que este lema es falso. Sea n un número natural. Entonces podemos tomar n composantes $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n$, que se salgan de Y. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sea Z_i un subcontinuo de X tal que $Z_i \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $Z_i \cap \kappa_i \neq \emptyset$ y $Y \nsubseteq Z_i$.

Supongamos que $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$ para algunas $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq j$. Sea W_i una componente de $Z_i \cap \kappa_i$ y W_j una componente de $Z_j \cap \kappa_j$. Veamos que W_i es cerrado. Como Z_i es cerrado, $\overline{W_i} \subset Z_i$. Observemos que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo de Y. Si $\overline{W_i}$ intersecta dos composantes de Y, como Y es indescomponible, se tiene que $Y = \overline{W_i} \subset Z_i$ (por [5, Teorema 5, p. 212]). Lo cual es una contradicción. Concluimos que $\overline{W_i} \subset \kappa_i$. Hemos mostrado que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo de $Z_i \cap \kappa_i$. Puesto que W_i es una componente de $Z_i \cap \kappa_i$, tenemos que $W_i = \overline{W_i}$. Un razonamiento similar muestra que W_j es cerrado.

Como κ_i y κ_j son composantes distintas, se tiene que W_i y W_j son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Por tanto, existen abiertos U_i, U_j de X tales que $W_i \subset U_i$, $W_j \subset U_j$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Observemos que, como $W_i \subset Y$ y $Z_i \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, entonces $W_i \subsetneq Z_i$. Análogamente se tiene que $W_j \subsetneq Z_j$.

Como W_i, Z_i son subcontinuos de X tales que $W_i \subsetneq Z_i$, podemos tomar un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ de W_i a Z_i en $C(X)$, tal que $\alpha_i(0) = W_i, \alpha_i(1) = Z_i$. Por la continuidad de α_i, existe $t \in (0, 1)$ tal que $W_i \subsetneq \alpha_i(t) \subset U_i$.

Observemos que $\alpha_i(t) \cap \kappa_i \neq \emptyset$. Además, puesto que $\alpha_i(t) \subset Z_i$ y $Y \nsubseteq Z_i$, se tiene que $Y \nsubseteq \alpha_i(t)$. Si $\alpha_i(t) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$, entonces $\alpha_i(t)$ es un subcontinuo de Y tal que $W_i \subsetneq \alpha_i(t) \subsetneq Z_i$. Si $\alpha_i(t)$ intersecta dos composantes de Y, por [5, Teorema 5, p. 212], $Y = \alpha_i(t) \subset Z_i$. Lo cual es una contradiccion. Por tanto $\alpha_i(t) \subset \kappa_i$. Hemos mostrado que $\alpha_i(t)$ es un subcontinuo de $Z_i \cap \alpha_i(t)$. Puesto que W_i es una componente de $Z_i \cap \kappa_i$, tenemos que $W_i = \alpha_i(t)$. Esto contradice que $W_i \subsetneq \alpha_i(t)$. La contradicción surgió al suponer que $\alpha_i(t) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$. Se sigue que $\alpha_i(t) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

Concluimos que $\alpha_i(t)$ es un subcontinuo de X con las mismas propiedades de Z_i pero que además satisface $\alpha_i(t) \subset U_i$.

Análogamente, considerando un arco ordenado $\alpha_j : [0,1] \longrightarrow C(X)$ de W_j a Z_j, podemos tomar un subcontinuo $\alpha_j(s)$ de X tal que $\alpha_j(s) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $\alpha_j(s) \cap \kappa_j \neq \emptyset$, $Y \not\subseteq \alpha_j(s)$ y $\alpha_j(s) \subset U_j$.

Por tanto, $\alpha_i(t) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$. Repitiendo este procedimiento con cualquier par de conjuntos Z_i que se intersecten, podemos suponer que $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq j$.

Entonces $Y \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} Z_i \right]$ es un n-odo. Se sigue que $C(X)$ contiene una n-celda ([1, Teorema 7.3, p. 100]). Como esto lo podemos hacer para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $C(X)$ contiene una n-celda para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\dim(C(X)) = \infty$. Lo cual contradice que $\dim(C(X)) < \infty$. Esto concluye la demostración del lema. ■

Teorema 2.9 *Sea X un continuo tal que $\dim(C(X)) < \infty$. Sea Y un subcontinuo indescomponible no degenerado de X. Supongamos que $A, B \in C(X)$ pertenecen a la misma arcocomponente de $C(X) \setminus \{Y\}$ y que $A \subset \lambda_1, B \subset \lambda_2$ y λ_1, λ_2 son composantes distintas de Y. Entonces λ_1 y λ_2 se salen de Y.*

Demostración. Sea $f : [0,1] \longrightarrow C(X) \setminus \{Y\}$ un encaje tal que $f(0) = A$ y $f(1) = B$. Sea $\alpha = \operatorname{Im} f$.

Si $\alpha \subset C(Y)$, entonces, por el Lema 1.2, $\cup\alpha$ es un subcontinuo de Y que intersecta a composantes distintas de Y. Así que, como Y es indescomponible, $\cup\alpha = Y$ (por [5, Teorema 5, p. 212]). Por tanto, por el Teorema 1.3, $Y \in \alpha$. Esto contradice el hecho de que $\alpha \subset C(X) \setminus \{Y\}$. Concluimos que $\alpha \not\subseteq C(Y)$.

Ahora, sea $s_0 = \sup\{s \in [0,1] : f([0,s]) \subset C(Y)\}$. Observemos que $s_0 < 1$ y que $f([0,s_0])$ es un arco en $C(Y)$ o un conjunto de un solo elemento. Entonces, $\cup f([0,s_0])$ es un subcontinuo de Y que intersecta a λ_1. Si $\cup f([0,s_0])$ intersecta a otra composante de Y, entonces $\cup f([0,s_0]) = Y$ por [5, Teorema 5, p. 212]. De aquí que $Y \in f([0,s_0])$ por el Teorema 1.3. Lo cual es una contradicción, puesto que $f([0,s_0]) \subset \alpha \subset C(X) \setminus \{Y\}$. Concluimos que $\cup f([0,s_0])$ es un subcontinuo de λ_1.

De aquí que, por la continuidad de la unión ([8, Lema 1.48, p. 78]), existe $t_0 > s_0$ tal que $Y \not\subseteq [\cup f([s_0,t_0])]$. Entonces $\cup f([s_0,t_0])$ es un subcontinuo de

X tal que $\cup f([s_0, t_0]) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ y que no contiene a Y. Además, como $f(s_0)$ es un subcontinuo de λ_1, se tiene que $\lambda_1 \cap [\cup f([s_0, t_0])] \neq \emptyset$. Esto prueba que λ_1 se sale de Y. Similarmente, λ_2 se sale de Y. ■

Estamos listos para probar la propiedad mencionada de los continuos CE.

Teorema 2.10 *Si X es un continuo CE tal que* $\dim(C(X)) < \infty$, *entonces X contiene a lo más un continuo indescomponible no degenerado.*

Demostración. Sea Y un subcontinuo indescomponible no degenerado de X. Sea $h : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje del cono de X en el hiperespacio $C(X)$. Mostremos que $h(v) = \{Y\}$, donde v es el vértice del cono.

Por el Lema 2.8, a lo más un número finito de composantes de Y se salen de Y. Como Y es un continuo indescomponible, tiene una cantidad no numerable de composantes. Así que podemos tomar tres composantes distintas κ_1, κ_2 y κ_3 de Y que no se salen de Y.

Tomemos $i \in \{1, 2, 3\}$ y $x_i \in \kappa_i$. Consideremos la función $f_i : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ definida como $f_i(t) = (x_i, t)$. Observemos que f_i es un encaje tal que $f_i(0) = (x_i, 0)$ y $f_i(1) = v$. Sea $\alpha_i = \operatorname{Im} f_i$. Como α_i es un arco y h es un encaje, se tiene que $h(\alpha_i)$ es un arco en $C(X)$ que une a $h(x_i, 0) = \{x_i\}$ con $h(v)$.

Observemos que si $i \neq j$, entonces $h(\alpha_i) \cap h(\alpha_j) = h(v)$. Así que $h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$ es un arco en $C(X)$ que une a $\{x_1\}$ con $\{x_2\}$.

Ahora bien, como $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ son subcontinuos de composantes distintas que no se salen de Y, por el Teorema 2.9, tenemos que $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ no pueden estar en la misma arcocomponente de $C(X) \setminus \{Y\}$, de manera que $Y \in h(\alpha_1) \cup h(\alpha_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Y \in h(\alpha_1)$.

Por otro lado, $h(\alpha_2) \cup h(\alpha_3)$ es un arco en $C(X)$ que une a $\{x_2\}$ con $\{x_3\}$. Un razonamiento similar muestra que $Y \in h(\alpha_2) \cup h(\alpha_3)$. Supongamos que $Y \in h(\alpha_2)$. Concluimos que $Y \in h(\alpha_1) \cap h(\alpha_2) = h(v)$. Hemos mostrado que $Y = h(v)$.

Ahora bien, si Y_1 y Y_2 son dos subcontinuos indescomponibles no degenerados, se tiene que $Y_1 = h(v) = Y_2$. Por tanto, X tiene a lo más un subcontinuo indescomponible no degenerado. ■

Si X es un continuo CE tal que $\dim(C(X)) < \infty$ y si Y es un subcontinuo indescomponible no degenerado de X, es natural preguntarse si Y también es un continuo CE. La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema 2.11 *Sea X un continuo CE tal que* $\dim(C(X)) < \infty$ *y Y un subcontinuo indescomponible no degenerado de X. Entonces Y también es un continuo CE.*

Demostración. Sea $h : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje. Entonces $h' = h|_{Cono(Y)} : Cono(Y) \longrightarrow C(X)$ es una función continua e inyectiva. Mostremos que $h'(y,t) \in C(Y)$ para cada $y \in Y$ y cada $t \in [0,1]$.

Observemos primero que $h'(y,0) = h(y,0) = \{y\} \in C(Y)$ y $h'(x,1) = h(v) = Y \in C(Y)$ para cada $y \in Y$ (esto último se observa de la prueba del Teorema 2.10).

Sean $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n$ las composantes de Y que se salen de Y. Por el Lema 2.8, son un número finito. Sea $y \in Y$ y κ la composante de y en Y.

Supongamos que existe $t \in [0,1]$ tal que $h(y,t) \notin C(Y)$. Sea $s_0 = \sup\{s \in [0,1] : h(\{y\} \times [0,s]) \subset C(Y)\}$. Observemos que $s_0 < 1$. Además, como $\{y\} \times [0, s_0]$ es un arco y h un encaje, $h(\{y\} \times [0, s_0])$ es un arco en $C(Y)$. Por el Lema 1.2, $\cup h(\{y\} \times [0, s_0])$ es un subcontinuo de Y.

Si $\cup h(\{y\} \times [0, s_0])$ intersecta a diferentes composantes de Y, por [5, Teorema 5, p. 212], $\cup h(\{y\} \times [0, s_0]) = Y$. Entonces, por el Teorema 1.3, $Y \in h(\{y\} \times [0, s_0])$. Lo cual es una contradicción, pues $s_0 < 1$. Por tanto, $\cup h(\{y\} \times [0, s_0])$ es un subcontinuo de κ.

Por la continuidad de la unión, existe $t_0 > s_0$ tal que $Y \nsubseteq [\cup h(\{y\} \times [s_0, t_0])]$. Se sigue que $[\cup h(\{y\} \times [s_0, t_0])$ es un subcontinuo de X tal que $[[\cup h(\{y\} \times [s_0, t_0])] \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $[[\cup h(\{y\} \times [s_0, t_0])] \cap \kappa \neq \emptyset$ y no contiene a Y. Esto muestra que κ se sale de Y. Hemos mostrado que si existe $t \in [0,1]$

tal que $h(y,t) \notin C(Y)$, entonces $\kappa \in \{\kappa_1, ..., \kappa_n\}$. Concluimos que, para toda $t \in [0,1]$, si κ es una composante que no se sale de Y, entonces $h(y,t) \in C(Y)$.

Supongamos que κ es una composante que se sale de Y. Como Y tiene una cantidad no numerable de composantes que no se salen de Y, podemos tomar una composante λ de Y que no se sale de Y. Puesto que λ es densa en Y, existe una sucesión $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ en λ tal que $\lim y_i = y$. Sea $t \in [0,1]$. Observemos que $\lim(y_i, t) = (y,t)$. Por tanto, $\lim h(y_i, t) = h(y,t)$. Como λ es una composante que no se sale de Y, sabemos que $h(y_i, t) \in C(Y)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de $C(Y)$,se tiene que $h(y,t) \in C(Y)$.

Hemos mostrado en ambos casos que $h(y,t) \in C(Y)$ para toda $t \in [0,1]$. Por tanto, $h'(y,t) = h(y,t) \in C(Y)$ para cada $y \in Y$ y para cada $t \in [0,1]$. ■

Observemos que se mostró que en el caso en que tengamos un subcontinuo indescomponible no degenerado Y, cualquier arco en $C(X)$ que une dos elementos contenidos en composantes distintas de Y, que no se salen de Y, debe pasar por Y. Esta propiedad del continuo indescomponible la podemos encontrar en otro tipo de continuos. Recordemos que un subcontinuo no degenerado Y de un continuo X es *terminal* si siempre que $A \in C(X)$ es tal que $A \cap Y \neq \emptyset$, se tiene que $A \subset Y$ o bien $Y \subset A$.

Mostraremos que un continuo CE tiene a lo más un continuo terminal. Primero probemos el siguiente lema, donde se muestra la propiedad planteada arriba.

Lema 2.12 *Sea X un continuo y Y un subcontinuo terminal no degenerado de X. Si α es un arco en $C(X)$ que une un punto de $C(Y)$ con uno de $C(X) \setminus C(Y)$, entonces $Y \in \alpha$.*

Demostración. Sea α un arco en $C(X)$ que une a $M \in C(Y)$ con $N \in C(X) \setminus C(Y)$. Consideremos un homeomorfismo $f : [0,1] \longrightarrow \alpha$ tal que $f(0) = M$ y $f(1) = N$. Supongamos que $Y \notin \alpha$.

Sea $s_0 = \sup\{s \in [0,1] : f([0,s]) \subset C(Y)\}$. Observemos que $s_0 < 1$. Por el Lema 1.2, $\cup f([0,s_0])$ es un subcontinuo de Y. Por la continuidad de la unión, existe $t_0 > s_0$ tal que $Y \nsubseteq \cup f([s_0, t_0])$. Como $f(s_0) \in C(Y)$, $\cup f([s_0, t_0])$ es un subcontinuo de X que intersecta a Y, que no está contenido en Y y no lo contiene. Esto contradice que Y es un subcontinuo terminal. Concluimos que $Y \in \alpha$. ■

Teorema 2.13 *Sea X es un continuo CE. Entonces X tiene a lo más un subcontinuo terminal no degenerado.*

Demostración. Sea $h : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje del cono de X en el hiperespacio $C(X)$. Sea Y un continuo terminal no degenerado de X. Denotemos por v al vértice del cono. Mostremos que $h(v) = Y$.

Supongamos que esto no ocurre. Entonces tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1) $Y \notin \operatorname{Im} h$.
Tomemos los puntos $p \in Y$ y $q \in X \setminus Y$. Definamos $f : [0,1] \longrightarrow C(X)$ como

$$f(t) = \begin{cases} h(p, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h(q, 2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que $f(0) = \{p\} \in C(Y)$ y $f(1) = \{q\} \in C(X) \setminus C(Y)$. Por tanto, $\alpha = \operatorname{Im} f$ es un arco en $C(X) \setminus \{Y\}$ que une a un elemento de $C(Y)$ con uno de $C(X) \setminus C(Y)$. Esto contradice el Lema 2.12. Concluimos que este caso es imposible.

Caso 2) $Y \in (\operatorname{Im} h) \setminus \{h(v)\}$. Sea $(y, t) \in Cono(X)$ tal que $h(y, t) = Y$. Entonces $t < 1$. Tomemos $q \in X \setminus Y$ y $p \in Y$ tal que $p \neq y$. Definamos $g : [0,1] \longrightarrow C(X)$ como

$$g(s) = \begin{cases} h(p, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h(q, 2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\beta = \operatorname{Im} g$ es un arco en $C(X)$ que une a $\{p\}$ con $\{q\}$ que no pasa por Y. Además, $\{p\} \in C(Y)$ y $\{q\} \in C(X) \setminus C(Y)$. Esto contradice el Lema 2.12. Esto muestra que este casi también es imposible. Hemos probado entonces que $h(v) = Y$.

Ahora bien, si Y y Z son dos subcontinuos terminales no degenerados de X, se tiene que $Z = h(v) = Y$. Hemos mostrado que X tiene a lo más un subcontinuo terminal no degenerado. ■

Nuevamente, es natural preguntarse si un subcontinuo terminal no degenerado de un continuo CE, también es un continuo CE. La respuesta nuevamente es afirmativa como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.14 *Si X es un continuo CE y Y es un subcontinuo terminal no degenerado de X, entonces Y también es un continuo CE.*

Demostración. Sea $h : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje del cono de X en el hiperespacio $C(X)$. Sea $h' = h|_{C(Y)} : Cono(Y) \longrightarrow C(X)$. Observemos que h' es continua e inyectiva. Veamos que $h'(y,t) \in C(Y)$ para cada $y \in Y$ y cada $t \in [0,1]$.

Dado $y \in Y$, se tiene que $h(y,0) = \{y\} \in C(Y)$ y $h(y,1) = h(v) = Y \in C(Y)$. Tomemos $0 < t_0 < 1$ y $y \in Y$. Supongamos que $h(y,t_0) \in C(X)\backslash C(Y)$. Definamos $f : [0,1] \longrightarrow C(X)$ como $f(t) = h(y, tt_0)$. Como $\{y\} \times [0,t_0]$ es un arco que no pasa por el vértice del cono, entonces $f([0,1]) = h(\{y\} \times [0,t_0])$ es un arco en $C(X)$ que no pasa por Y. Sin embargo, es un arco que une a $\{y\} \in C(Y)$ con $h(y,t_0) \in C(X) \setminus C(Y)$. Esto contradice el Lema 2.12. Concluimos que $h'(y,t) = h(y,t) \in C(Y)$ para cada $y \in Y$ y cada $t \in [0,1]$. ■

Ahora bien, dado un continuo X que es compactación de rayo $[0,\infty)$ con residuo Y, se tiene que Y es un subcontinuo terminal de X. Es natural preguntarnos qué compactaciones del rayo son continuos CE. El Teorema 2.14 nos dice que debemos buscar una compactación tal que el residuo sea un continuo CE. La primera pregunta en este sentido es ¿qué compactaciones del rayo cuyo residuo es un arco son continuos CE?, o bien ¿qué compactaciones del rayo cuyo residuo es una gráfica finita son continuos CE?

Por último, sabemos que dado un continuo X, $Cono(X)$ es contraible. Es natural preguntarse si dado un continuo CE, se tiene contractibilidad en $C(X)$.

Dado un subespacio $Y \subset Z$, y $z_0 \in Z$, decimos que Y es *contraíble a z_0 en Z* si existe una función continua $K : Y \times [0,1] \longrightarrow Z$ tal que, para toda $y \in Y$, se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $K(y,0) = y$,

(b) $K(y,1) = z_0$.

Así, K es un *contracción de Y a z_0 en Z.*

El siguiente teorema da una respuesta.

Teorema 2.15 *Supongamos que X es un continuo CE. Sea $h : Cono(X) \longrightarrow C(X)$ un encaje del cono de X en el hiperespacio $C(X)$. Sea N el subcontinuo de X tal que $h(v) = N$, donde v es el vértice del cono. Entonces existe una contracción $H : F_1(X) \times [0,1] \longrightarrow C(X)$ de $F_1(X)$ a N en $C(X)$ tal que H es inyectiva sobre $F_1(N) \times [0,1)$.*

Demostración. Definamos $H : F_1(X) \times [0,1] \longrightarrow C(X)$ como $H(\{x\}, t) = h(x,t)$. Entonces H es una función continua tal que $H(\{x\}, 0) = h(x,0) = \{x\}$ y $H(\{x\}, 1) = h(x,1) = h(v) = N$.

Ahora bien, tomemos $(\{x\}, t), (\{y\}, s) \in F_1(N) \times [0,1)$ tales que $H(\{x\}, t) = H(\{y\}, s)$. Entonces $h(x,t) = h(y,s)$. Como $s, t < 1$ y h es un encaje, se tiene que $(x,t) = (y,s)$. Es decir, $(\{x\}, t) = (\{y\}, s)$. Esto concluye la demostración. ■

Observemos que el Teorema 2.15 nos dice que si un continuo X es CE, entonces $F_1(X)$ es contraible en $C(X)$. Por [1, Teorema 9.1, p. 125], se tiene que si X es un continuo CE, entonces $C(X)$ es contraible. Por otro lado, sabemos que si un continuo X es contraíble, entonces $C(X)$ es contraible. Entonces surge la pregunta si existen continuos contraíbles que no sean continuos CE.

Hemos estado avanzando en dar respuesta a algunas preguntas planteadas a lo largo del trabajo. Algunas otras se ven más complicadas y parece que nos llevará más tiempo en responderlas. Y aún faltan más por surgir.

Bibliografía

[1] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (28), Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[2] A. Illanes, *The cone=hyperspace property, a characterization*, Topology Appl. 113 (2001), 61-67.

[3] A. Illanes y M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones, II*, Topology Appl. 126 (2002), 377-391.

[4] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[5] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, New York, 1968.

[6] M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones*, Topology Appl. 126 (2002), 361-375.

[7] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, an Introduction*, Pure and Applied Mathematics 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[8] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (33), Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

Índice