UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

"ANÁLISIS DE ALGORITMOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO EN COMPUTACIÓN

P R E S E N T A :

ANGÉLICA NONOAL SACAMIO

ASESOR:
ING. HUGO PORTILLA VÁZQUEZ

MÉXICO, D.F. 2008

Í N D I C E

TEMA **PÁGINA**

I N T R O D U C C I Ó N

En la actualidad el análisis de muchos problemas complejos de decisión pueden resolverse mediante la programación lineal que estudia la optimización (minimización o maximización) de una función lineal que satisface un conjunto de restricciones lineales, como un instrumento de conceptualización, más que como un instrumento que produzca la solución.

La formulación de un problema de optimización se enfoca en la selección de valores para cierto número de variables interrelacionadas con el objetivo de cuantificar la calidad de la decisión.

Existen muchos problemas para los que la programación lineal ofrece el marco apropiado para su análisis; como por ejemplo la perdida o ganancia, o la distribución de capital en un problema económico, la velocidad o distancia en un problema físico, problemas del transporte, la mezcla de productos, entre otras.

A partir de un modelo matemático que describa tales problemas, el Ingeniero en Computación debe ser capaz de construir un modelo manipulable que pueda usarse en una computadora, es por lo que la presente tesis ofrece una investigación sobre el análisis de los algoritmos más trascendentes, para resolver problemas generales de programación lineal, lo anterior a efecto de que la solución de dichos problemas se pueda realizar mediante algún programa de computadora.

El tema de tesis que a continuación se desarrolla, esta dividido en cuatro capítulos, de los cuales el primero, es introductorio de los conceptos fundamentales de la teoría de optimización y de algoritmos, además de que presenta resultados básicos del álgebra lineal.

La programación lineal ha demostrado su utilidad como modelo de numerosos problemas de distribución y de fenómenos económicos, es por lo que en el segundo capítulo se analizan además de las definiciones básicas de programación lineal, algunas hipótesis de problemas que conducen a ejemplos de problemas lineales, proporcionándose también descripciones gráficas de la solución de problemas. En este capítulo se delimitan las definiciones teóricas mas importantes de la programación lineal a partir de un análisis matemático, apoyado por interpretaciones gráficas, lo anterior con el fin de construir los modelos matemáticos adecuados sobre los cuales se desarrollaran los algoritmos que resuelvan los problemas de programación lineal.

En el tercer capítulo se presentan los detalles de los de los principales algoritmos para resolver cualquier problema de programación lineal, analizándose en primer lugar el método simplex, en el cual se empieza demostrando que, sí existe una solución óptima, entonces también existe un punto extremo óptimo, para caracterizar los puntos extremos en términos de soluciones básicas factibles; así también se estudia el método de la “M” Grande o penalización.

En el capítulo cuarto se enunciará en forma general las aplicaciones más importantes de la programación lineal en la administración de operaciones y en forma particular se analizarán problemas de mezcla de productos, los cuales se resolverán mediante el programa TORA.

C A P Í T U L O I

CONCEPTOS BÁSICOS DE OPIMIZACIÓN, ALGORIMOS Y MATRICES

1.1 Conceptos básicos de Optimización.

1.1.1 Definición de Optimización.

La optimización es uno de los principios básicos del análisis de problemas complejos de decisión, que incluye la selección de valores para cierto número de variables interrelacionadas, centrando la atención en un solo objetivo diseñado para cuantificar el rendimiento y medir la calidad de la decisión, como una técnica cuantitativa de análisis y una formulación de aproximación.

1.1.2 Problema lineal de Optimización.

El problema lineal de optimización se propone resolver lo siguiente:

Optimizar $\boldsymbol{z} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

Sujeto a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \text{ T } b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \text{ T } b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \text{ T } b_m$$
$$x_j \geq 0$$

En donde se distinguen las siguientes matrices:

$\mathbf{c} = [\ c_1,\ c_2,\ .\ .\ .\ c_n\ ]$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + \ .\ .\ .\ + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \ .\ .\ .\ + a_{2n} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1} + a_{m2} + \ .\ .\ .+ a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{vmatrix}$$

En donde optimizar se entiende maximizar o minimizar z, donde T representa a cualquiera de los símbolos ≤, =, ≥; la función objetivo es el producto de cx que se intenta optimizar y A x T b, x ≥ 0 constituyen las restricciones al problema.[1]

1. 2 Conceptos básicos de Teoría de Algoritmos.

1.2.1 Definición de Algoritmo.

Una definición amplia de algoritmo es el siguiente: es un método descrito paso a paso, para resolver un problema. También puede definirse un algoritmo, como un programa de computadora que producirá la respuesta correcta para cualquier entrada si permitimos que se ejecute durante el tiempo suficiente y le proporcionamos todo el espacio de almacenamiento que necesite.[2]

1.2.2 Propiedades de Algoritmos.

La definición formal de algoritmo indica que es un conjunto finito de instrucciones con las siguientes características.

- Precisión.- Los pasos se enuncian con precisión
- Unicidad.- Los resultados intermedios en cada paso quedan definidos de manera única y sólo dependen de las entradas y los resultados de los pasos anteriores.

---

[1] Métodos de Optimización, Programación Lineal y Gráficas, Francisco J. Jauffred M. Tercera edición, 1986, México, Editorial Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A. P., páginas 23-25.

[2] Matemáticas Discretas, Jonsonbaugh Richard, cuarta edición, 1997, editorial Prentice Hall, páginas 157-159.

- Carácter finito. El algoritmo se detiene después de ejecutar un número finito de instrucciones
- Entrada.- El algoritmo recibe una entrada
- Salida.- El algoritmo produce una salida
- Generalidad. El algoritmo se aplica a un conjunto de entradas

1.2.3 Clases de Algoritmos.

1.2.3.1 Iterativo.

La mayoría de los algoritmos diseñados para resolver problemas de optimización son de naturaleza iterativa. Al buscar un vector que resuelva un programa de programación lineal, se elige un vector inicial $\mathbf{x_0}$ y el algoritmo genera un vector mejorado $\mathbf{x_1}$. El proceso se repite y se encuentra una solución mejor $\mathbf{x_2}$. Continuando así se haya una sucesión de puntos cada vez más apropiados $\mathbf{x}0$, $\mathbf{x}1$, . . . $\mathbf{x}k$, . . . , que tiende a un punto solución $\mathbf{x^*}$. En problemas de programación lineal, la sucesión generada es de longitud finita, obteniendo el punto solución después de un número finito de pasos.

La teoría de los algoritmos iterativos puede dividirse en tres aspectos.

1. El primero se refiere a la creación de los algoritmos propiamente dichos.
2. El segundo aspecto es la comprobación de que un algoritmo dado generará una sucesión convergente hacia un punto solución, este aspecto se conoce como análisis de convergencia global y estudia la cuestión de si el algoritmo, iniciado lejos del punto solución, convergerá hacia este.

3. El tercer aspecto se refiere al análisis de la convergencia local, y rata de la proporción en que la sucesión generada de puntos converge hacia la solución.

1.2.3.2. Recursivo.

Un algoritmo recursivo es un algoritmo que contiene un procedimiento recursivo. Un problema de esta clase puede resolverse mediante la técnica divide y vencerás, en la cual el problema se descompone en problemas del mismo tipo del problema original. Cada subproblema a su vez, se descompone de nuevo hasta que el proceso produce subproblemas que se puedan resolver de manera directa. Por último, las soluciones de los subproblemas se combinan para obtener una solución del problema original.[3]

Ejemplo:

El factorial de *n* se define como:

$n! = 1$ si $n = 0$

$n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1)$ si $n \geq 1$

Es decir, si $n \geq 1$, $n!$ Es igual al producto de todos los enteros entre 1 y n. Por ejemplo, $3! = 3.2.1 = 6$

N factorial puede describirse en términos de si mismo, si quitamos n, el producto restante es $(n-1)!$; es decir

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1) = (n)(n-1)!$

Ejemplo: calcular 5!, donde:

$5! = 5.4!$

$4! = 4.3!$

$3! = 3.2!$

[3] Matemáticas Discretas, Johnsonbaugh Richard, cuarta edición, 1997, editorial Prentice Hall, páginas 157-159.

2! = 2.1!

1! = 1.0!

0! = 1

El algoritmo recursivo que calcula n! Es:

Entrada: n, un entero mayor o igual que 0

Salida : n!

1. procedure *factorial* (n)
2. if *n* = 0 then
3. return (1)
4. return (*n** factorial (*n* –1))
5. end *factorial*

1.2.4 Análisis de Algoritmos.

El análisis de algoritmos estudia los algoritmos con la intención de escoger uno entre varios con los que se podía resolver un problema determinado, usando los siguientes criterios:

El de corrección.- Para establecer que un algoritmo es correcto, necesitamos un planteamiento preciso de las características de las entradas con las que se espera que trabaje (llamadas condiciones previas) y del resultado que se espera que produzca con cada entrada (las condiciones posteriores), entonces si se satisfacen las condiciones previas, las condiciones posteriores se cumplirán cuando el algoritmo termine.

Un algoritmo tiene dos aspectos: el método de solución y la sucesión de instrucciones para ponerlo en práctica, es decir, su implementación. Establecer la corrección del método o de las instrucciones empleadas, puede requerir de una larga serie de teoremas acerca de los objetos con los que el algoritmo trabaja (grafos, permutaciones, matrices).

Cantidad de trabajo realizado.- Es necesario que la medida del trabajo que utilicemos nos diga algo acerca de la eficiencia del método empleado por un algoritmo, con independencia de la computadora, del lenguaje de programación, del programador y de los detalles de implementación o procesamiento, como la incrementación de índices de ciclos, el cálculo de índices de arreglos y el establecimiento de apuntadores de estructura de datos.

En muchos casos para analizar un algoritmo podemos aislar una operación específica que sea fundamental para el problema que se estudia, sin contar la inicialización y el control de ciclos y simplemente contar las operaciones básicas escogidas que el algoritmo efectúa.

En tanto que las operaciones básicas se escojan bien y el número total de operaciones efectuadas sea aproximadamente proporcional al número de operaciones básicas, tendremos una buena medida del trabajo realizado por un algoritmo y un buen criterio para comprobar varios algoritmos.

Algunos ejemplos de operaciones que podríamos considerar como básicas en algunos problemas son:

PROBLEMA	OPERACIÓN
Encontrar *x* en un arreglo de nombres	Comparación de *x* con un elemento del arreglo
Multiplicar dos matrices con entradas reales	Multiplicación y suma de números reales

Ordenar un arreglo de número	Comparación de dos elementos del arreglo
Procedimientos recursivos	Invocación de procedimiento

Análisis promedio y de peor caso.- La cantidad de trabajo realizado no se puede describir con un solo número porque el número de pasos ejecutados no es el mismo con todas las entradas, la cantidad de trabajo efectuada generalmente depende del tamaño de las entradas. Por ejemplo poner en orden alfabético un arreglo de 1000 nombres por lo regular requiere más operaciones que hacerlo con un arreglo de 100 nombres si se usa el mismo algoritmo. Resolver un sistema de doce ecuaciones lineales con 12 incógnitas requiere más trabajo que resolver un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Consecuentemente necesitamos una medida de tamaño de las entradas de un problema.

Ejemplos de medida del tamaño de las entradas:

PROBLEMA	TAMAÑO DE LAS ENTRADAS
Encontrar *x* en un arreglo de nombres.	El número de nombres en el arreglo
Ordenar un arreglo de números	El número de elementos del arreglo
Multiplicar dos matrices	Las dimensiones de las matrices
Resolver un sistema de ecuaciones	El número de ecuaciones o el número de incógnitas

Podemos describir el comportamiento de un algoritmo dando su **complejidad de peor caso** que se define como: Sea D_n el conjunto de entradas de tamaño n para un determinado problema, y sea *I* un elemento de D_n, con t(*I*) el número de operaciones básicas que el algoritmo ejecuta con la entrada *I*. Definimos la fusión **W** como: (n)= máx (t(*I*) *I* € D_n)

La función W(n) es la complejidad de peor caso de algoritmo. W(n) es el número máximo de operaciones básicas que un algoritmo ejecuta con cualquier entrada de tamaño n. El análisis de peor caso nos ayuda a estimar un límite de tiempo para una implementación dada de un algoritmo.

Una forma útil de describir el comportamiento de un algoritmo es indicar cuánto trabajo efectúa en promedio, es decir calcular el número de operaciones ejecutadas con cada entrada de tamaño n y luego sacar el promedio, **la complejidad promedio se define como:** Sea Pr (*I*) la probabilidad de que se presente la entrada *I*. Por lo que el comportamiento promedio de un algoritmo es: A(n)= $\sum_{I \,€\, Dn}$ Pr(*I*) t(*I*).

La función Pr (*I*) se determina con base en información especial acerca de la aplicación que se piensa dar al algoritmo.

<u>Consumo de espacio.-</u> Un programa requiere un espacio de almacenamiento para sus instrucciones, las constantes, variables que usa y los datos de entrada; también ocupa cierto espacio de trabajo para manipular los datos y guardar información que necesita para efectuar sus cálculos. Los datos de entrada pueden representarse de varias maneras, alguna de las cuales requieren más espacio que otras. Si hay varias formas de representar las entradas, consideraremos el espacio requerido para las entradas, además del espacio extra que se llegara a usar. Si la cantidad de espacio ocupada depende

de las entradas específicas, se podrá efectuar un análisis de peor caso y de caso promedio.[4]

1. 3 Principios matemáticos sobre determinantes, matrices y ecuaciones lineales simultaneas.

El estudio de los principios matemáticas sobre determinantes y matrices es importante en este espacio de nuestro estudio ya que contiene las bases de lo que será un análisis complejo de la programación lineal.

1.3.1. Matrices.

Una matriz es un arreglo rectangular de ***mn*** elementos dispuestos en ***m*** renglones y ***n*** columnas denotada por A = (aij) donde i varia de 1 a m y j de 1 a n. El orden (tamaño) de una matriz se dice que es (m x n) si la matriz tiene m renglones y n columnas.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ . & \\ . & \\ . & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{matrix}$$

1.3.1.1 Tipos de matrices.

1.- Una **matriz cuadrada** es una matriz en la cual ***m*** = ***n.***

[4]Algoritmos computacionales, introducción al análisis y diseño, Sara Baase, Allen Van Gelder, tercera edición, 2002, Pearson educación, páginas 30-39.

2.- Una **matriz identidad** es una matriz cuadrada en al cual todos los elementos en la diagonal principal son “unos” y todos los elementos que esta fuera de la diagonal son “ceros”, es decir $a_{ij} = 1$, para $i = j$ y $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

3.- Un **vector renglón** es una matriz con un renglón y n columnas.

4.- Un **vector columna** es una matriz con m renglones y una columna.

5.- La **matriz A^T**, se conoce como la transpuesta de A si el elemento a_{ij} en A es igual al elemento a_{ji} en A^T para toda i y j.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A^T} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \end{vmatrix}$$

1.3.1.2 Operaciones con matrices

Las operaciones matriciales, solo están definidas por la adición (sustracción) y la multiplicación.

La adición de dos matrices A = a_{ij} y B = b_{ij} se puede hacer si son del mismo orden (m x n). La suma D = A+B se obtiene adicionando los elementos correspondientes.

Propiedades relativas a la suma de matrices:

1.- A + B = B +A Conmutatividad.

2.- (A + B) + C = A + (B + C) Asociatividad

3.- A + 0 = 0+ A = A identidad

4.- A + (-A) = 0 inverso aditivo

5.- c(A + B) = cA + cB Distribuitividad de escalares

Multiplicación de matrices:

Podemos multiplicar dos matrices si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz. Si **A** es una matriz *m* por *p*, y **B** es una matriz *p* por *n*, se sigue que **AB** es una matriz **C** *m* por *n*, definida por:

$$\mathbf{C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}}$$

Por lo que $\mathbf{C_{ij}}$ es el producto punto del i-ésimo renglón de A por la j-ésima columna de B.

Ejemplo: Si

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Entonces

$(AB)_{11} = (1)(2) + (2)(2) + (3)(3) = 15$

$(AB)_{12} = (1)(-1) + (2)(2) + (3)(-1) = 0$

$(AB)_{21} = (-1)(2) + (0)(2) + (-2)(3) = -8$

$(AB)_{22} = (-1)(-1)+ (0)(2) + (-2)(-1) = 3$

$(AB)_{31} = (4)(2) + (5)(2) + (-1)(3) = 15$

$(AB)_{33} = (4)(-1) + (5)(2) + (-1)(-1) = 7$

$$\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ -8 & 3 \\ 15 & 7 \end{vmatrix}$$

Las propiedades relativas a la multiplicación son:

1.- 0A = A0 = 0 para matrices nulas de orden adecuado.

2.- AI = IA = A para matrices identidad I de orden adecuado.

3.- A(BC) = (AB)C si cada lado está definido

4.- A(B + C) = AB +AC y (A + B)C = AC + BC

5.- $(AB)^T = B^T A^T$

La inversa de una matriz cuadrada **A** es cualquier matriz **B** que satisfaga **AB = BA = I**. No siempre existe la inversa, pero si existe, es única. Denotamos con $\mathbf{A^{-1}}$ la inversa; **A**, $\mathbf{A^{-1}}$ e **I** son matrices del mismo orden

Ejemplo: Si

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Se sigue que

$$\mathbf{A}^{-1} = k \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

Con k = 1/ [A] = 1/ (ad - bc)

A^{-1} no existe si [A] = 0

De lo anterior se puede establecer las siguientes propiedades de la inversa:[5]

1.- A^{-1} existe si y sólo si [A] ≠ 0

2.- Si A^{-1} existe, es única.

3.- Si A^{-1} existe, $[A^{-1}] = [A]^{-1} = 1/ [A]$

4.- $(A^{-1})^{-1} = A$

5.- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

6.- $I^{-1} = I$

7.- $A^{-1} = k\mathbf{C}$, con k = 1/ [A] y **C** la matriz de cofactores transpuesta, es decir , $c_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$.

---

[5] Análisis numérico, W. Allen Smith, primera edición, 1992, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A de C. V., páginas 40-42.

1.3.2 Determinantes.

La función determinante es una "función con valores reales de una variable matricial" en el sentido de que asocia un número real f(x) con una matriz X. Para definir una determinante, se define primero el producto elemental de una matriz A n x n el cual se entiende como cualquier producto de n elementos de A, de los cuales ningún par de elementos proviene del mismo renglón o de la misma columna.

Una matriz A de n x n tiene n! Productos elementales. Son los productos de la forma $a_{1j1}\ a_{2j2} \ldots a_{njn,}$ donde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación del conjunto (1, 2, 3, . . . , n). Por un producto elemental con signo de A se entenderá un producto elemental $a_{1j1}\ a_{2j2} \ldots a_{njn}$ multiplicado por +1 o por –1. Si $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación par se usa el signo +, y si $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación impar, se usa el signo **-**.

En general, el conjunto (1, 2, 3, . . . , n) tiene n(n-1)(n-2) ... (2)(1) = n! Permutaciones diferentes. Para denotar una permutación general del conjunto (1, 2, 3, . . . , n), se escribirá $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, donde j_1 es el primer entero de la permutación, j_2, es el segundo, y así sucesivamente. Se dice que en una permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ocurre una ***inversión*** siempre que un entero mayor precede a uno menor. El número total de inversiones que ocurren en una permutación puede obtenerse de la siguiente forma:

1. Encontrar el número de enteros que son menores que j_1 y que están después de j_1 en la permutación;
2. Encontrar el número de enteros que son menores que j_2 y que están después de j_2 en la permutación.

3. Continué este proceso de conteo para $j_{3,}$ . . . , $j_{n-1.}$ y la suma de estos números es el número total de inversiones que hay en la permutación.

Ejemplo: El número de inversiones en la permutación: (6,1,3,4,5,2) es: 5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8.

Una permutación es par si el número total de inversiones es un entero par, y es impar si el número total de inversiones es un entero impar.

1.3.2.1 Definición de determinante.

Sea A una matriz cuadrada. La función determinante se denota por **det**, y det(A) se define como la suma de los productos elementales con signo de A.

Ejemplo: Todos los productos elementales con signo de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Son:

Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	(1, 2, 3)	Par	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$
$a_{12}\ a_{22}\ a_{32}$	(1, 3, 2)	Impar	$-a_{12}\ a_{22}\ a_{32}$
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	(2, 1, 3)	Impar	$-a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	(2, 3, 1)	Par	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	(3, 1, 2)	Par	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	(3, 2, 1)	Impar	$-a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$

Como se observa, la evaluación directa de determinantes a partir de la definición conduce a dificultades de cómputo, es por lo que a continuación se estudia las propiedades de los determinantes, con el fin de simplificar su evaluación.

1.3.2.2 Propiedades de los determinantes.

El determinante de una matriz se puede evaluar expresando si se reduce la matriz a una forma escalonada, este método evita los extensos cálculos que se presentan cuando se usa la definición de determinante.

A continuación se enunciará los principales teoremas sobre determinantes, así como alguna de las propiedades fundamentales de la función determinante:

Teorema fundamental sobre determinantes:

1.- Si A tiene un renglón de ceros o una columna de ceros, entonces det(A) = 0.

2.- $\det(A) = \det(A^T)$.

3.- Si A es una matriz triangular n x n (triangular superior, triangular inferior o diagonal), entonces det(A) es el producto de los elementos de la diagonal de la diagonal principal; es decir $\det(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.

Sea A una matriz n x n.

4.- Si B es la matriz que se obtiene cuando un solo renglón o una sola columna de A se multiplican por un escalar K, entonces det(B) = k det(A).

5.- Si B es la matriz que se obtiene cuando se intercambian dos renglones o dos columnas de A, entonces det(B) = -det(A).

6.- Si B es la matriz que se obtiene cuando un múltiplo de un renglón de A se suma a otro renglón o cuando un múltiplo de una columna se suma a otra columna, entonces det(B) = det(A).

7.- Si A y B, son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces det(AB) = det (A)det(B).[6]

1.3.3 Sistemas de ecuaciones lineales.

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denomina sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal. Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se denomina solución del sistema si $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots x_n = s_n$, es una solución de todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Un sistema de ecuaciones que no tiene solución es inconsistente; si existe por lo menos una solución del sistema, éste se denomina consistente.

A continuación se revisará el método de eliminación de Gauss-Jordan, para la solución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo con tantas ecuaciones como incógnitas.

1.3.3.1. Método de Gauss-Jordan.

El método de eliminación Gauss-Jordan, es el que a continuación se describe[7], dado el sistema:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

---

[6] Introducción al álgebra lineal, Howard Antón, segunda edición, 1998, editorial Limusa, Grupo Noriega editores, páginas 107-117.

[7] Métodos de optimización, programación lineal y graficas, ob. cit.,páginas 1-4.

La transformación es:

a) Para el renglón que contiene al elemento con asterisco (pivote), se divide todo el renglón entre el pivote.

b) Para cualquier otro renglón al elemento a transformar se le resta el producto del elemento que se encuentra en su misma columna y renglón del pivote (ya transformado) por el elemento que se encuentra en el mismo renglón y columna del pivote. Este último producto se anulará si la intersección con la columna o renglón del pivote (transformado) es cero. De ahí que si una columna tiene al cero como elemento de intersección con el renglón del pivote no es alterada. Si es cero la intersección de un renglón con la columna del pivote no es alterado en la transformación. Después de la transformación, la columna del pivote queda constituida: un uno que corresponde al susodicho pivote y por ceros que corresponden a los restantes elementos.

Esquemáticamente la transformación es:

B	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$
B_1	A_{11^*}	a_{12}
B_2	a_{22}	a_{22}
B_1/a_{11}	1	a_{12}/a_{11}
$b_2 - (b_1 a_{21}/ a_{11})$	0	$a_{22} - (a_{12} a_{21}/ a_{11})$

Ejemplo:

Si tenemos el sistema:

(1) $2x_1 + 3x_2 = 10$

(2) $5x_1 + 4x_2 = 8$

Su solución es única porque la matriz del sistema es no singular, para obtenerla, seleccionamos el termino x_1 de la ecuación (1) señalándolo con un asterisco y dividiendo la ecuación (1) entre su coeficiente, para obtener:

(3) $\mathbf{x_1^{*} + 1.5x_2 = 5}$

Multiplicamos (3) por el coeficiente del termino x_1 en (2), pero cambiando de signo, obtenemos:

(4) $-5x_1 - 7.5x_2 = -25$

Sumando (2) y (4) da:

(5) $\mathbf{0x_1 - 3.5x_2 = -17}$

Nuestro sistema original se ha transformado

(6) $\mathbf{x_1^{*} + 1.5x_2 = 5}$

(7) $\mathbf{0x_1 - 3.5x_2 = -17}$

Ahora, señalamos con un asterisco el segundo término de la ecuación (7) y dividiéndola y dividiéndola entre el coeficiente de dicho término resulta:

(8) $\mathbf{0x_1 + x_2^{*} = 4.86}$

Multiplicando (8) por el coeficiente de x_2 de la ecuación (6), cambiando de signo, resulta:

$$\textbf{(9)} \qquad \mathbf{0x_1 - 1.5x_2 = -7.29}$$

Sumando (6) y (9) se obtiene:

$$\textbf{(10)} \qquad \mathbf{x_1 + 0x_2 = -2.29}$$

El sistema original se ha transformado en:

$$x_1 + 0x_2 = -2.29$$

$$0x_1 + x_2 = 4.86$$

Por lo que esquemáticamente la transformación es:

B	X_1	X_2
10	2^*	3
8	5	4
5	1	1.5
-17	0	-3.5^*
-2.29	1	0
4.86	0	1

C A P Í T U L O II

PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1 Definición de Programación Lineal

Este capítulo presenta las definiciones teóricas más importantes de la programación lineal.

La programación lineal es una herramienta determinística, es decir, todos los parámetros del modelo, se suponen conocidos con certeza.

Los programas lineales se encuentran entre los modelos más utilizados actualmente, representan varios sistemas de manera satisfactoria y son capaces de proporcionar una gran cantidad de información, en vez de una sola solución, además a menudo son usados para resolver cierto tipo de problemas de optimización no lineales, mediante aproximaciones lineales (sucesivas), y constituyen una herramienta importante en los métodos de resolución de problemas de optimización discretos lineales con variables restringidas enteras.

La programación lineal es un programa matemático en la cual la función objetivo es lineal en las incógnitas y las restricciones constan de igualdades y desigualdades lineales. Es decir, un programa lineal es un problema de minimizar o maximizar una función lineal en presencia de restricciones lineales de desigualdad y/o igualdad. La forma exacta de estas restricciones puede variar de unos problemas a otros, pero **CUALQUIER PROGRAMA LINEAL SE PUEDE CONVERTIR A LA FORMA ESTANDAR:**

Minimizar $\quad \mathbf{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n}$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1} \\
&\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2} \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m}
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(1)}
$$

y $\quad \mathbf{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0}$

donde las b_i, c_i y a_{ij} son constantes reales fijas, y las x_i son valores reales a determinar. Suponiendo siempre, que en caso necesario, cada ecuación se ha multiplicado por menos uno, de modo que todo $b_i \geq 0$.

En notación vectorial, este problema se expresa como:

Minimizar $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeto a $\mathbf{Ax = b}$ y $\mathbf{x \geq 0}$

Donde **x** es un vector columna n-dimensional, $\mathbf{c}^T$ es un vector fila n-dimensional, **A** es una matriz **m x n,** y **b** es un vector columna m-dimensional. La desigualdad vectorial $\mathbf{x \geq 0}$ quiere decir que las componentes de **x** son positivas.

A continuación se indicará como convertir a la forma estándar otras formas de programas lineales.

2.1.1 Variables de holgura.

El primer supuesto contempla las variables de holgura.

Si tenemos el problema:

Minimizar $\mathbf{c_1 x_1 + c_2 x_2 + . . . + c_n x_n}$

Sujeto a

$$\begin{aligned} &\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + . . . + a_{1n} x_n \le b_1} \\ &\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + . . . + a_{2n} x_n \le b_2} \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + . . . + a_{mn} x_n \le b_m} \end{aligned}$$

y $\mathbf{x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, . . . , x_n \ge 0}$

En donde el conjunto de restricciones se determina en totalidad por desigualdades lineales de la forma **≤**. El problema puede expresarse como:

Minimizar $\mathbf{c_1 x_1 + c_2 x_2 + . . . + c_n x_n}$

Sujeto a

$$\begin{aligned} &\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + . . . + a_{1n} x_n + y_1 = b_1} \\ &\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + . . . + a_{2n} x_n + y_2 = b_2} \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + . . . + a_{mn} x_n + y_m = b_m} \end{aligned}$$

con $\mathbf{x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, . . . , x_n \ge 0}$

y $\mathbf{y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, . . . , y_n \ge 0}$

Las nuevas variables positivas y_i introducidas para convertir las desigualdades en igualdades se denominan VARIABLES DE HOGURA. Si se considera que el problema tiene n + m incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$, éste adopta la forma estándar. La matriz m x (n +m), que ahora representa las restricciones de las desigualdades lineales, tiene la forma especial [**A,I**](donde, sus columnas se pueden separar en dos conjuntos, las n primeras columnas forman la matriz original **A** y las m últimas columnas forman la matriz identidad m x m).

2.1.2 Variables excedentes.

El segundo supuesto contempla las variables excedentes.
Si tenemos el problema:

Minimizar $\quad \mathbf{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n}$

Sujeto a
$$\mathbf{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1}$$
$$\mathbf{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geq b_2}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\mathbf{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m}$$

y $\quad \mathbf{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0}$

En donde el conjunto de restricciones se determina en totalidad por desigualdades lineales de la forma **≥**. El problema puede expresarse como:

Minimizar $\mathbf{c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n}$

Sujeto a

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n & - y_1 & & & = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n & & - y_2 & & = b_2 \\
. & & & & \\
. & & & & \\
. & & & & \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n & & & -y_m & = b_m
\end{array}$$

con $\mathbf{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0}$

y $\mathbf{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, ..., y_n \geq 0}$

Donde las variables y_i, incorporadas para transformar una desigualdad (mayor o igual que) en igualdad, se denomina VARIABLES EXCEDENTES.

2.1.3. Variables libres.

El tercer supuesto contempla el caso en que se da un programa lineal en forma estándar, pero una o más variables incógnitas no tiene la restricción de ser positivas, es decir contempla variables libres.

Un enfoque para convertir a la forma estándar cuando x_1 no tiene restricción de signo, es eliminar x_1 junto con una de las ecuaciones de restricción. Para ello se toma cualquiera de las m ecuaciones de **(1)** que para x_1 tenga un coeficiente distinto de cero. Ejemplo:

$$\mathbf{a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \geq b_i}$$

Donde $\mathbf{a_{i1} \neq 0}$. Entonces x_1 puede expresarse como una combinación lineal de las otras variables más una constante. Si esta expresión se sustituye por x_1 en la ecuación **(1)**, se tiene un nuevo problema de la misma forma, pero expresado solo en función de las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$. La *i*-ésima ecuación utilizada para determinar x_1, es ahora igual a cero y también puede eliminarse. Como resultado de esta simplificación se obtiene un programa lineal estándar de n-1 variables y m-1 ecuaciones de restricción. El valor de la variable x_1 se determina por la solución de: $\mathbf{a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \geq b_i}$. **([1]).**

Otra manipulación del problema consiste en que un problema de maximización (minimización) se puede convertir en un problema de minimización (maximización) multiplicando por –1 los coeficientes de la función objetivo. Después de completar la optimización del nuevo problema, el valor del problema original es –1 veces el valor óptimo del nuevo problema.

Del análisis anterior se observa que un programa lineal dado puede expresarse en diferentes formas equivalentes por medio de manipulaciones idóneas: La forma estándar (o normal) y la canónica. Se dice que un programa lineal esta en forma estándar, si todas las restricciones son igualdades y todas las variables son no negativas. Un problema de minimización está en forma canónica si todas las variables son, no negativas y todas las restricciones son del tipo ≥. Un problema de maximización esta en forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo ≤.[2]

[1] Programación lineal y no lineal, David E. Luenberger, Segunda edición, 1989, editorial Addison-Wesley Iberoamericana, páginas, 11-13.
[2] Programación lineal y flujo en redes. Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali. Editorial Limusa. Segunda Edición, 1998, página 7.

2.2 Problemas que resuelve la programación lineal y construcción de modelos.

La programación lineal es un modelo significativo de numerosos problemas de distribución y de fenómenos económicos, en el presente apartado se presentan algunos ejemplos de situaciones que tienen formulaciones naturales de programación lineal.

El modelado y análisis de un problema de programación lineal se desarrolla a través de varias etapas: [10]

La etapa **fase de planteamiento del problema** implica un estudio detallado del sistema, la recolección de datos y la identificación del problema específico que es necesario analizar, junto con las restricciones o limitaciones del sistema y la fusión objetivo.

La siguiente etapa implica la elaboración de una abstracción del problema mediante un **modelo matemático**, en este sentido se debe asegurar de que el modelo represente de manera satisfactoria al sistema bajo análisis y que sea matemáticamente tratable.

La tercera etapa es **deducir una solución**. Es posible buscar una o más soluciones óptimas, o tal vez sólo sea posible determinar una solución heurística o aproximada junto con alguna evaluación de su calidad.

---

[10] Programación lineal y flujo en redes, Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali, segunda edición, 1998, Editorial Limusa Noriega editores, páginas. 8-9.

La cuarta etapa es la **prueba y análisis del modelo**. Este análisis evalúa la confiabilidad del modelo mediante la comparación de los resultados predichos y los resultados esperados usando la experiencia pasada o aplicando la prueba de manera retroactiva, usando datos históricos.

La etapa final es la **implementación**, donde el modelo se pone en marcha para auxiliar interactivamente el proceso de toma de decisiones.

A continuación se describirá algunos problemas que pueden plantearse como programas lineales.

2.2.1 Problema de destilación de crudos.

Una compañía de Petróleo produce en sus refinerías gasóleo (G), gasolina sin plomo (P) y gasolina súper (S) a partir de dos tipos de crudos, C_1 y C_2. Las refinerías están dotadas de dos tipos de tecnologías. La tecnología nueva T_n utiliza en cada sección de destilación 7 unidades de C_1 y 12 de C_2, para producir 8 unidades de G, 6 de P y 5 de S. Con la tecnología antigua T_a, se obtienen en cada destilación 10 unidades de G, 4 de P y 4 de S, con un gasto de 10 unidades de C_1 y 8 de C_2.

Estudios de demanda permiten estimar que para el próximo mes se deben producir al menos 900 unidades de G, 300 de P y entre 800 y 1700 de S. La disponibilidad de crudo C_1 es de 1400 unidades y de C_2 2000 unidades. Los beneficios por unidad producida son: De G, el beneficio por unidad es de 4, de P el beneficio por unidad es de 6 y el de S es de 7.

La compañía desea conocer cómo utilizar ambos procesos de destilación, que se pueden realizar total o parcialmente, y los crudos disponibles para que el beneficio sea el máximo.

La construcción de modelo matemático del problema anterior es el siguiente: [11]

Primero se fijan las variables de decisión, las actividades en que está interesada la compañía son el número de destilaciones con cada tecnología, por tanto las variables de decisión son:

X_1 = número de destilaciones con T_n

X_2 = número de destilaciones con T_a

Las restricciones son las limitaciones en la disponibilidad de ambos tipos de crudos:

Para C_1 [(7 unidades de C_1 + x x_1 destilaciones) + (10 de C_1 x x_2)] ≤ [disponibilidad de C_1], es decir:

$7x_1 + 10x_2 \leq 1400$

La restricción para C_2 es:

$12x_1 + 8x_2 \leq 2000$.

Además, si se producen x_1 destilaciones con T_n y x_2 destilaciones con T_a los productos obtenidos son:

$8x_1 + 10x_2$ unidades de G

$6x_1 + 7x_2$ unidades de P

$5x_1 + 4x_2$ unidades de S

[11] Programación lineal y aplicaciones, Sixto Rios Insua, David Rios Insua, Alfonso Mateos Caballero, Jacinto Martín Jiménez, primera edición, 1998, editorial Alfaomega, páginas 2-4.

De los estudios de demanda podemos establecer las restricciones:

$8x_1 + 10x_2 \geq 900$ (demanda de G)

$6x_1 + 7x_2 \geq 300$ (demanda de G)

$5x_1 + 4x_2 \leq 1700$ (demanda de S)

$5x_1 + 4x_2 \geq 1700$ (demanda de S)

Como en el proceso de destilación se permiten valores fraccionales, ya que éste puede realizarse parcialmente. El objetivo es maximizar el beneficio B del producto destilado. Este es:

$B = 4(8x_1 + 10x_2) + 6(6x_1 + 7x_2) + 7(5x_1 + 4x_2) = 103x_1 + 110x_2$.

Por tanto el programa lineal es:

Max $B = 103x_1 + 110x_2$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$7x_1 + 10x_2 \leq 1400$

$12x_1 + 8x_2 \leq 2000$

$8x_1 + 10x_2 \geq 900$

$6x_1 + 7x_2 \geq 300$

$5x_1 + 4x_2 \leq 1700$

$5x_1 + 4x_2 \geq 800$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.2.2 Problema de distribución de capital.

Un proyecto de construcción municipal requiere fondos de \$2, \$4, \$8 y \$5 millones durante los próximos 4 años, respectivamente. Suponemos que todo el dinero para un año dado se requiere al principio del año. El ayuntamiento intenta vender un número exacto de bonos a largo plazo suficiente para cubrir los fondos requeridos para llevar a cabo el proyecto, y todos estos bonos, independientemente de cuándo sean vendidos, serán pagados (se vencerán) en la misma fecha de algún año futuro distante. Se ha estimado que las tasas de interés en el mercado de bonos a largo plazo (es decir los costos de vender los bonos) en los próximos 4 años serán del 7%, 6%, 6.5% y 7..5%, respectivamente. El pago de los intereses de los bonos empezará 1 año después de haber completado el proyecto y continuará durante 20 años, después de los cuales los bonos serán pagados. Por otra parte, se ha estimado que durante el mismo periodo, las tasas de interés a corto plazo sobre depósitos a plazo fijo(es decir, lo que el ayuntamiento puede ganar en depósitos) serán de 6%, 5.5% y 4.5% respectivamente (es claro que el ayuntamiento no invertirá dinero en depósitos a corto plazo durante el cuarto año). ¿Cuál es la estrategia óptima que debe seguir el ayuntamiento para la venta de bonos y el depósito de fondos en cuantas a plazo fijo a fin de completar el proyecto de construcción?.

Para plantear este problema como un programa lineal, sea x_j, j = 1,. . . , 4 la cantidad de bonos vendidos al principio de cada año *j*. Al vender los bonos, una parte del dinero se usará inmediatamente en la construcción y otra se depositará a corto plazo para ser usada en años posteriores. Sea y_j, j = 1,. . . , 3 el dinero depositado a plazo fijo al principio del año *j*. Considere el principio del primer año. La cantidad de bonos vendidos menos la cantidad de depósitos a plazo fijo es lo que se usará para los fondos requeridos en ese año. [12] Por lo tanto:

$$X_1 - y_1 = 2.$$

[12] Programación lineal y flujo en redes, ob. cit., páginas 13-14.

Considere ahora el principio del segundo año. Además de los bonos vendidos y los depósitos hechos a plazo fijo, ahora también se tienen depósitos a plazo fijo más los intereses disponibles del año anterior. Por lo tanto, se tiene:

$$1.06y_1 + x_2 - y_2 = 4$$

Las restricciones para los años tercero y cuarto se obtiene de manera semejante.

Ignorando el hechos de que las cantidades ocurren en años distintos (es decir, el valor del dinero en el tiempo), el costo por unidad de la venta de bonos es 20 veces la tasa de interés. Por tanto, para los bonos vendidos al principio del primer año se tiene c_1 =20(0.07). Los otros coeficientes de costo se calculan de manera semejante.

Finalmente, el modelo de programación lineal se puede escribir como sigue:

Minimizar $20(0.07)x_1 + 20(0.06)x_2 + 20(0.065)x_3 + 20(0.075)x_4$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
x_1 - y_1 &= 2\\
1.06y_1 + x_2 - y_2 &= 4\\
1.055y_2 + x_3 - y_3 &= 8\\
1.045y_3 + x_4 &= 5
\end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

2.2.3 El problema del transporte.

Las cantidades a_1, a_2, ... a_m de cierto producto se tiene que enviar desde m lugares y se recibirán en cantidades b_1, b_2, ..., b_n en n destinos, respectivamente. Se asocia con el envió de una unidad de producto desde el origen *i* hacia el destino j, un costo de envió por unidad c_{iij}. Se desea determinar las cantidades x_{ij} a enviar entre cada par origen-destino i = 1,2, ... , m; j = 1, 2, ..., n; de modo que se satisfagan las necesidades del envió y minimice el costo total del transporte. Formulamos este problema como un problema de programación lineal con la siguiente matriz. [13]

$$
\begin{array}{ccccc}
X_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & a_1 \\
X_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & a_2 \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & a_m \\
 & b_1 & b_2 & \dots & b_n
\end{array}
$$

La i- ésima fila de esta matriz define las variables asociadas al origen i-ésimo, mientras que la j-ésima columna determina las variables asociadas al j-ésimo destino. El problema consiste en situar variables no negativas x_{ij} en la matriz, de modo que la suma de la i- ésima fila sea a_i, la suma de la j-ésima columna sea b_j y la suma pondera $\sum^{n}_{j=1} \sum^{m}_{i=1} c_{ij}\, x_{ij}$, que representa el costo de transporte, sea mínima.

Por lo que el problema de programación lineal se representa como:

Minimizar: $\sum_{ij} c_{ij}x_{ij}$

Sujeto a:

$\sum^{n}_{j=1} x_{ij} = a_i$ para i = 1, 2, . . . , m

[13] Programación lineal y no lineal, David E. Luenberger, ob. cit. página 15.

$\sum^{m}_{i=1} x_{ij} = b_j$ para j = 1, 2, . . . , n

$x_{ij} \geq 0$ para i = 1, 2, . . . , m

para j = 1, 2, . . . , n

2.3 Teorema fundamental de la Programación Lineal

Dado el conjunto Ax = b de m ecuaciones lineales simultaneas de n incógnitas, sea B cualquier submatriz de m x m no singular formada por columnas de A. Entonces, si todas las n – m componentes de x no asociadas a columnas de B se igualan a cero, la solución del conjunto resultante de ecuaciones se llama **solución básica** de (8) respecto a la base **B.** Las componentes de x asociadas a columnas de B se denominan variables básicas.

En la definición anterior, B se considera como un base, al estar formada por m columnas linealmente independientes que se pueden tomar como una base del espacio E^m. La solución básica corresponde a una expresión para el vector b como combinación lineal de estos vectores base.

La ecuación Ax = b puede no tener soluciones básicas, por lo que es necesario plantear ciertas hipótesis elementales sobre la estructura de la matriz A.

Sea A una matriz de m x n. El rango por renglón de la matriz es igual al número máximo de renglones linealmente independientes de A. El rango por columna de A es el número máximo de columnas linealmente independientes de A. El rango por renglón de una matriz siempre es igual a su rango por columna, de modo que el rango de la matriz es igual al número máximo de renglones linealmente independientes de A. [14]

Una colección de vectores a_1, a_2, . . . ,a_k de dimensión n es linealmente independiente si:

$\sum^{k}_{j=1}\lambda_j\, a_j = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para j = 1,2,...,k

Considere el sistema Ax = b y la matriz aumentada (A, b) con m renglones y n+1 columnas:

1.- Si el rango de (A, b) es mayor que el rango de A, entonces b no se puede representar como una combinación lineal de a_1,a_2, . . . , a_n, y por tanto el sistema **Ax = b** no tiene solución.

2.- Suponga ahora que el rango (A) = rango (A, b) = K. Quizá después d reordenar los renglones de (A, b) sea posible escribir

$$(A, b) = \begin{matrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{matrix}$$

En donde A_1 es k x n, b_1 es un K-vector, A_2 es una matriz de (m-k) x n, b_2 es un (m-k)-vector y rango (A_1) = rango (A_1, b_1) = k.

Si un vector x satisface $A_1x = b_1$, automáticamente satisface $A_2x = b_2$. Por tanto es posible eliminar las restricciones redundantes o dependientes $A_2x = b_2$ y considerar solo las restricciones independientes $A_1x = b_1$. Puesto que rango (A_1) = k, es posible elegir k columnas linealmente independientes de A_1. Tal vez luego de reordenar las columnas de A_1 sea posible escribir A_1 = (B, N), en

[14] Programación lineal y flujo en redes, ob. cit., páginas 61-62.

donde B es una matriz no singular de k x k de k x k, y N es una matriz de k x (n-k). Observe que tal matriz B existe, ya que el rango de A_1 es k. Aquí B se denomina matriz básica (pues las columnas de B forman una base de E^k), y N se denomina matriz no básica. De manera consistente, x se descompone en x_B y x_N, en donde x_B consta de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y por consiguiente x_N consta de $x_k + 1, \ldots, x_n$. Entonces, la ecuación $A_1x = b_1$ significa que (B, N) $x_B = b_1$.

x_n

Es decir, $Bx_B + Nx_n = b_1$. Como B tiene inversa, entonces x_B se puede resolver en términos de x_N, premultiplicando por B^{-1} para obtener:

$X_B = B^{-1} b_1 - B^{-1} Nx_N$

3.- En el siguiente caso K = n, la matriz N es vacía y se tiene una solución única para el sistema $A_1x = b_1$, la cual es: $x_B = B^{-1} b_1 = A_1^{-1}b_1$. Por otra parte, si n > k, entonces asignando valores arbitrarios al vector $\mathbf{x}_N$ es posible resolver en forma única para $\mathbf{x}_B$, mediante la ecuación $\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_1 - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}\mathbf{x}_N$.

De esta manera se obtiene una solución X_B

X_N

Para el sistema $A_1x = b_1$. En este caso existe un número infinito de soluciones del sistema $A_1x = b_1$, y por tanto del sistema Ax = b.

Para que Ax = b tenga solución, en primer lugar, suele suponerse que n>m, es decir, que el número de variables x_i es superior al número de restricciones de igualdad. Segundo, las filas de A deben ser linealmente independientes, lo que corresponde a la independencia lineal de las m ecuaciones. Una dependencia lineal entre filas de A daría lugar a restricciones contradictorias y, por tanto y no daría ninguna solución.

Consecuentemente se tiene por supuesta la siguiente:

Hipótesis del rango completo: La matriz A de m x n tiene m < n, y las m filas de A son linealmente independientes.

Según la hipótesis anterior, el sistema Ax = b siempre tendrá solución y, siempre tendrá como mínimo una solución básica.

Las variables básicas de una solución básica no son necesariamente todas distintas de cero" si una o más variables básicas de una solución básica es igual a cero, se dice que esa solución es una solución básica degenerada.

Cuando se toma en cuenta la restricción de positividad en las variables se aplica la siguiente definición: Un vector x que satisfaga **Ax = b** y x ≥ 0, se dice que es factible para estas restricciones. Una solución factible para dichas restricciones, que también sea básica, se denomina solución factible básica, si esta solución es, además, una solución básica degenerada, se denomina solución factible básica degenerada.

El teorema fundamental de la programación lineal establece que: [15]

Dado un programa lineal de la forma estándar

Minimizar $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeto a **Ax = b** y **x ≥ 0**

Donde A es una matriz de m x n de rango m.

1) Si hay una solución factible, hay una solución factible básica;

2) Si hay una solución factible óptima, hay una solución factible básica óptima.

[15] Programación lineal y no lineal, David E. Luenberger, ob. cit. páginas. 18-19.

2.4 Solución básica factible y puntos extremos.

En el apartado anterior se obtuvo una condición necesaria y suficiente para tener una solución no acotada, también se demostró que si existe una solución óptima, entonces también existe un punto extremo óptimo. El concepto de punto extremo es un concepto geométrico y para poder utilizarlo desde el punto de vista computacional, es necesaria una caracterización algebraica de los puntos extremos.

2.4.1. Definición de solución básica factible.

Considere el sistema **Ax** = **b** y **x** ≥ **0**, en donde **A** es una matriz m x n y **b** es un vector m. Se supone que el rango de (A, b) = rango (**A**, **b**) = rango (**A**) = m. Después de un posible reordenamiento de las columnas de **A**, sea **A** = [**B, N**], en donde **B** es una matriz invertible de m x m y **N** es una matriz de m x (n-m).

La solución **x** = $\begin{vmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{vmatrix}$

De las ecuaciones **Ax = b,** en donde $\mathbf{x}_B$ = $\mathbf{B}^{-1}$ **b** y $\mathbf{x}_N$ = 0, se denomina solución básica del sistema. **B** se denomina matriz básica (o simplemente, la base y **N** se denomina matriz no básica. Las componentes de $\mathbf{x}_B$ se denominan variables básicas (o variables dependientes), y las componentes de $\mathbf{x}_N$ se llaman variables no básicas (o variables dependientes). Si $\mathbf{x}_B$ > 0, entonces **x se denomina solución básica factible no degenerada, y si por lo menos una componente de** $\mathbf{x}_B$ = 0, entonces **x se denomina solución básica factible degenerada.**

Ejemplo, considere el conjunto poliédrico definido por las siguientes desigualdades:

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

Introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4, el problema se puede escribir en la siguiente forma estándar:

$$\begin{aligned} X_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ X_2 \quad + x_4 &= 3 \\ X_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La matriz de restricciones es $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

Las soluciones básicas factibles corresponden a encontrar una matriz básica **B** de 2 x 2 con $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ no negativa. A continuación se muestran las formas posibles en que **B** se puede obtener a partir de **A**:

1.- $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\mathbf{x}_B = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}$

$\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \end{vmatrix}$

$$\mathbf{x_B = B^{-1}b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{vmatrix} X_3 \\ X_4 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x_N} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2.- El resultado para **B** = [a_1, a_4], es:

$$x_B = \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$x_N = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

3.- Para **B** = [a_2, a_3],

$$x_B = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$x_N = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

4.- Para **B** = [a_2, a_4],

$$x_B = \begin{vmatrix} 6 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$x_N = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

5.- Para **B** = [a_3, a_4],

$$x_B = \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$x_N = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Los puntos correspondientes a los casos 1, 2, 3 y 5 son soluciones básicas factibles. El punto que se obtiene en el caso 4 es una solución básica, pero no es factible porque viola la restricción de no negatividad. Las cuatro soluciones básicas factibles pertenecen a E^4, ya que después de introducir las variables de holgura, se tienen cuatro variables. Al proyectar estas soluciones básicas factibles sobre E^2, se obtienen los cuatro puntos siguientes:

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Estos puntos son los puntos extremos de la región factible.

En general el número de soluciones factibles básicas es menor o igual que:

$$\begin{vmatrix} N \\ M \end{vmatrix} = n!/ m (n - m)!$$

A continuación se analizará la relación entre soluciones básicas factibles y puntos extremos.

Antes de dar la definición de **punto extremo,** definiremos lo que geométricamente se puede interpretar como un conjunto convexo.

Un conjunto es convexo si, dados dos puntos de un conjunto, todo punto del segmento de recta que une estos dos puntos, es también un miembro del conjunto.

2.4.2. Definición de punto extremo.

Un punto **x** de un conjunto convexo **C**, se denomina punto extremo de C si no hay dos puntos distintos x_1 y x_2 en C tales que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ para algún α, $0< \alpha < 1$.

Un punto extremo es aquel que no se encuentra estrictamente dentro del segmento de recta que une otros dos puntos del conjunto. Por ejemplo, los puntos extremos de un triángulo son sus tres vértices.

A continuación se enunciarán los principales teoremas sobre puntos extremos y soluciones básicas factibles: [16]

[16] Programación lineal y flujo en redes, ob. cit., páginas 99-108.

- Teorema 1.- La colección de puntos extremos corresponde a la colección de soluciones básicas factibles y ambas son no vacías, en el supuesto de que la región factible es no vacía.
- Teorema 2.- Suponiendo que la región factible es no vacía, entonces una solución óptima finita existe si y solo si $\mathbf{cd}_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, l$, en donde $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_l$ son las direcciones extremas de la región factible. En caso contrario, la solución óptima es no acotada.
- Teorema 3.- Si existe una solución optima entonces existe un punto extremo óptimo, es decir una solución básica factible.
- Teorema 4.- A todo punto extremo (solución básica factible) corresponde una base (no necesariamente única) y, al revés, a toda base corresponde un punto extremo (único). Además si un punto extremo tiene más de una base que lo representa, entonces es degenerado. Al revés, un punto extremo degenerado tiene más de una base que lo representa, si y solo si el sistema $\mathbf{Ax = b}$ en sí no implica que las variables básicas degeneradas correspondientes a una base asociada sean idénticamente cero.

C A P Í T U L O III

MÉTODOS QUE RESUELVEN PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1. Método Simplex

En 1949, George B. Dantzig publicó el “método simplex” para resolver programas lineales. A partir de entonces ha habido diversas contribuciones al campo de la programación lineal de varias formas, incluyendo el desarrollo teórico, aspectos computacionales e investigación de nuevas aplicaciones. El método simplex es ampliamente aceptado debido a su capacidad para modelar problemas importantes y complejos de decisiones administrativas y su capacidad para producir soluciones en un lapso razonable.

El método simplex, necesita que cada una de las restricciones esté en forma estándar, en la que todas las restricciones se expresen como ecuaciones, mediante la adición de variables de holgura o de exceso, según sea necesario. Este tipo de conversión conduce generalmente a un conjunto de ecuaciones simultaneas en donde el número de variables excede al número de ecuaciones, lo que significa que las ecuaciones dan un número infinito de puntos solución.

Los puntos extremos de este espacio pueden identificarse algebraicamente por medio de las **soluciones básicas** del sistema de ecuaciones simultaneas. De acuerdo con la teoría del álgebra lineal, una solución básica se obtiene igualando a cero las variables necesarias con el fin de igualar el número total de variables y el número total de ecuaciones para que la solución sea única, y luego se resuelve el sistema con las variables restantes.

Al no tener un espacio de soluciones gráficas que nos guié hacia el punto óptimo, necesitamos un procedimiento que identifique en forma inteligente las soluciones básicas promisorias. Lo que hace el método simplex es identificar una solución inicial y luego moverse sistemáticamente a otras soluciones básicas que tengan el potencial de mejorar el valor de la función objetivo. [17]

La primera suposición básica del método simplex es la de no degeneración que establece que toda solución factible básica de Ax = b x ≥ 0 es una solución factible básica no degenerada. En esta hipótesis se apoya todo el desarrollo del método simplex. En esencia el método consiste en determinar una base inicial e irla cambiando hasta obtener la óptima, siempre bajo la suposición anterior.

Con el objeto de no tener que calcular todas las soluciones básicas factibles, necesitamos un criterio que permita definir cuál es el vector $\mathbf{x}_j$ que en cada etapa debe pasar a formar parte e la base y cuál es el que la debe abandonar. Para seleccionar el vector que debe entrar se hará uso de la función objetivo, entrará, en cada etapa, aquel $\mathbf{x}_j$ que suministre, con su entrada, el mayor incremento positivo para z (función objetivo). Los conceptos mencionados se traducen en cocientes de los números en la columna **b** entre los correspondientes a la columna seleccionada para entrar en la base. El menor de los cocientes define el vector que debe dejar la base, Es decir, para definir el vector que debe dejar la base se usa el criterio de seleccionar aquel que implica el cociente mínimo, con objeto de que no altere el signo de las que ya se encuentran en la base, y lograr que la nueva solución básica sea también factible.

[17] Investigación de operaciones, Hamdy A. Taha, quinta edición, 1995, editorial Alfaomega, páginas, 70-71.

Sea el problema

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + a_{0,\,n+1} x_{n+1} + a_{0,\,n+2} x_{n+2} + \ldots + a_{0,\,n+m} x_{n+m}$

Sujeto a:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2$

. . . . . .

. . . . . .

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m$

con $x_j \geq 0$

En forma abreviada tenemos:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} x_{n+I}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

i = 1

$x_j \geq 0$

Como las variables básicas son las x_{n+i} i=1, . . ., m, se despejarán estas últimas en cada una de las restricciones:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ , } i=1, \ldots, m$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} b_i - \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{0,\,n+i} a_{ij} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} b_i - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} a_{ij} - c_j \right) x_j$$

haciéndo:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} b_i \; ; \qquad z_j \sum_{i=1}^{m} a_{0,\,n+i} a_{ij}$$

se obtiene

$$z = z_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[- (z_j - c_j) x_j \right]$$

El vector que entra en la base es aquel cuyo coeficiente - $(z_j - c_j)$ sea mayor, lográndose así el mayor incremento para z_0, luego la columna j es seleccionada de entre las que tienen signo negativo y será la de mayor valor absoluto. De no existir alguna de signo negativo no habrá incremento para z_0. En cada una de las etapas se aplica este criterio, substituyendo b_i por a_{i0}, a_{ij} por y_{ij}.

3.1.1 Teoremas en los que se basa el método simplex.

Los teoremas en que se base el método simplex son los siguientes:

a) Dada una solución básica factible $x_B = B^{-1}b$ al conjunto de restricciones $Ax = b$, para un problema de programación lineal con $z_B = c_B x_B$ como valor de la función objetivo para la solución considerada. Si para cualquier columna a_j en A, pero no en B, se tiene $(z_j - c_j) \leq 0$ y al menos un $y_{ij} > 0$, es posible obtener una nueva solución básica factible substituyendo una de las columnas de B con a_j y el nuevo valor de la función objetivo ž, satisface que ž ≥ z. En particular, si la solución básica factible no es degenerada ž ≥ z. De igual manera, si para alguna a_j en A pero no en B $(z_j - c_j) \geq 0$ y al menos un $y_{ij} > 0$, es posible obtener una nueva solución básica factible sustituyendo una columna de B por a_j; la ž, satisface que ž ≤ z.

b) Dada una solución básica factible para un problema de programación lineal, si para esta solución existe una columna a_j que no esta en B para la cual para la cual $(z_j - c_j) < 0$ y $y_{ij} \leq 0$; existe una solución factible en la que m + 1 variables son distintas de cero y el valor de la función objetivo es arbitrariamente grande. En tal caso, el problema tiene una solución no acotada si se intenta maximizar la función objetivo.

c) Si existe una solución básica factible óptima para un problema de programación lineal y para a_j que no esta en B, $z_j - c_j = 0$ con $y_{ij} \leq 0$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{Bi} - \theta a_{ij})\, b_i + \theta a_j = b, \ \theta > 0$$

es también una solución óptima. [18]

Ejemplo 1:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

usando variables de holgura:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \qquad &= 11 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 18 \\ x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Empleando un arreglo en forma de tabla tenemos :

Θ	v. b.	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	1	-1	1	1		
5.5	x_4	11	1	2		1	
18	x_5	18	3	1			1
	$z_j - c_j$		-2	-3			
-	X_2	1	-1	1	1		

[18] Métodos de optimización, programación lineal y graficas, Francisco J. Jauffred M. ob. cit., páginas, 20-30.

3	x_4	9	3		-2	1	
4.25	x_5	17	4		-1		1
	$z_j - c_j$	3	-5		3		
12	X_2	4		1	0.33	o.33	
-	X_1	3	1		-o.67	0.33	
2.98	x_5	5			1.67	-1.33	1
	$z_j - c_j$	18			-0.33	1.67	
	X_2	3		1		0.60	-0.20
	X_1	5	1			-0.20	0.40
	x_5	3			1	-0.80	0.60
	$z_j - c_j$	19				1.40	0.20

3.1.2 Proceso de Pivotación

Para comprender bien el procedimiento simples es fundamental entender el proceso de pivotación en un conjunto de ecuaciones lineales simultaneas, hay dos interpretaciones duales del procedimiento de pivote. La primera interpretación considera al siguiente sistema en forma canónica:

1	0 . . . 0	$y_{1,\ m+1}$	$y_{1,\ m+2}$ . . .		y_{1n}	y_{10}
0	1 . . . 0	$y_{2,\ m+1}$	$y_{2,\ m+2}$ . . .		y_{2n}	y_{20}
0	0 . . . 0	.	.	.	.	.
.	. .	.	.	.	.	.
.	. .	.	.	.	.	.
.	. .	.	.	.	.	.
0	0 . . . 1	$y_{m,\ m+1}$	$y_{m,\ m+2}$ . . .		y_{mn}	y_{m0}

El procedimiento de pivotación es el siguiente: [19] Supóngase que en el sistema canónico descrito, se desea sustituir la variable básica x_p, $1 \leq p \leq m$ por la variable no básica x_q. Esto se puede realizar si, y solo si, y_{pq} es distinto de cero, lo que se logra dividiendo la fila p entre y_{pq} para obtener un coeficiente unitario para x_q en la p-ésima ecuación y restando después múltiplos adecuados a la fila p de cada una de las otras filas, a fin de obtener un coeficiente cero para x_q en las demás ecuaciones. Esto transforma la q-ésima columna de la tabla en cero, excepto en su p-ésimo registro (que es la unidad) y no afecta a las columnas de las otras variables básicas. **Al denotar por y'_{ij} los coeficientes del nuevo sistema en forma canónica, resulta:**

$\mathbf{y'_{ij} = y_{ij} - [\, y_{pj}/y_{pq}]y_{iq},\ i \neq p}$

$\mathbf{y'_{pj} = y_{pj}/y_{pq}}$.

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones pivote, donde el elemento y_{pq} es el elemento pivote del sistema original. La segunda interpretación del procedimiento de pivote considera a las columnas del sistema de ecuaciones lineales en forma canónica, en lugar de los renglones, pero los resultados son los mismos que las ecuaciones anteriores.

Ejemplo ([20])

Max $z = x_1 + 3x_2$

Sujeto a :

$X_1 \leq 5$

$X_1 + x_2 \leq 8$

$X_1 \leq 4$

---

[19] Programación lineal y no lineal, David E. Luenberger. ob. cit., páginas, 30-32.

[20] Programación lineal y aplicaciones, Sixto Rios Insua, David Rios Insua, Alfonso Mateos Caballero, Jacinto Martín Jiménez, ob. cit., páginas, 62-65.

$X_1, x_2 \geq 0$

El programa en formato estándar, agregando variables de holgura queda como sigue :

Max $z = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Sujeto a :

$X_1 + x_3 = 5$

$X_1 + x_2 + x_4 = 8$

$X_2 + x_5 = 4$

$X_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Construimos la tabla inicial del simplex. La base inicial es :

$$B_0 = (a_3, a_4, a_5) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El vector de coeficientes de las variables básicas en la función objetivo es :

$c_B = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0)$

con lo que los vectores interiores son $y_j = B_0^{-1}a_j = a_j$, j= 1, . . . , 5 y los indicadores:

$$z_1 - c_1 = c^T{}_b\, y_1 - c_1 = (0, 0, 0) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} -1 = -1$$

y, análogamente,

$z_2 - c_2 = - 3$, $z_3 - c_3 = 0$, $z_4 - c_4 = 0$, $z_5 - c_5 = 0$.

Los valores de las variables básicas iniciales son:

$$X_B = \begin{vmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{vmatrix} = B_0^{-1}b = b = \begin{vmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{vmatrix}$$

con lo que la tabla inicial es :

	c_j	1	3	0	0	0	
c_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	x_B
0	X_3	1	0	1	0	0	5
0	X_4	1	1	0	1	0	8
0	X_5	0	1^*	0	0	1	4
	Z_j - c_j	-1	-3	0	0	0	12

Los indicadores negativos son $z_1 - c_1 = -1$ y $z_2 - c_2 = -3$, teniendo sus respectivos vectores interiores $y_1 = (1, 1, 0)$ e $y_2 = (0, 1, 1)$, al menos un elemento positivo. Por tanto, es posible mejorar la solución actual a otra solución básica factible. La variable de entrada es x_2, que tiene el indicador más negativo, siendo j = 2 la columna pivote. La variable de salida se obtiene mediante la regla de mínima razón.

$\text{Min}_i\ [x_{Bi}/y_{i2} > 0\ ] = \min\ [x_{B2}/y_{22},\ x_{B3}/y_{32}] = \min\ [8/1, 4/1] = 4.$

Así la variable básica x_5 en la fila pivote i = 3, es la variable que deja la base. El elemento pivote es $y_{32} = 1$. Podemos obtener, mediante la transformación basada en el pivote, la nueva tabla del simples en la que ahora las variables básicas son x_3, x_4, x_2. Siendo la nueva tabla la siguiente:

	c_j	1	3	0	0	0	
c_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	x_B
0	X_3	1	0	1	0	0	5
0	X_4	1^*	0	0	1	-1	4
3	X_2	0	1	0	0	1	4
	Z_j - c_j	-1	0	0	0	3	12

De nuevo vemos que es posible la mejora de la solución actual. La variable de entrada en la base es x_1, su indicador $z_1 – c_1 = -1$, es negativo y su vector interior $y_1 = (1,1, 0)$ tiene elementos positivos. La variable de salida es x_4, ya que proporciona la mínima razón 4/1 = 4. El pivote es $y_{21} = 1$. La nueva tabla es:

	c_j	1	3	0	0	0	
c_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	x_B
0	X_3	0	0	1	-1	1	1
1	X_1	1	0	0	1	-1	4
3	X_2	0	1	0	0	1	4
	Z_j - c_j	0	0	0	1	2	16

Esta tabla es óptima, ya que todos los indicadores son no negativos. Además, el óptimo es único pues sólo las variables básicas (x_1, x_2, x_3) en esta tabla final tienen indicador nulo. La solución óptima es:

$X^* = (x^*_{1,} x^*_2, x^*_{3,} x^*_4, x^*_5) = (4, 4, 1, 0, 0)$,

Con valor optimo para el objetivo $z^* = 16$.

3.1.3 Análisis del algoritmo simplex en un problema de minimización.

A continuación se analizara un problema de minimización mediante el método simplex [21].

Minimizar cx

Sujeto a Ax = b

$X \geq 0$

En donde A es una matriz m x n con rango m.

- PASO 1. Seleccionar una solución básica factible inicial con base B.
- PASO 2. Resolver el sistema $Bx_B = b$ (con solución única $x_B = B^{-1} b = b'$). Sean $x_B = b'$, $x_N = 0$ y $z = c_Bx_B$.
- PASO 3. Resolver el sistema $wB = c_B$ (con solución única $W = c_B B^{-1}$). (El vector w se denomina vector de multiplicadores simplex porque sus componentes son los multiplicadores de los renglones de A que se suma a la función objetivo a fin de llegar a la forma canónica.) Para todas las variables no básicas, calcular $z_j\text{-}c_j = wa_j - c_j$ (esto se denomina operación de apreciación). Sea $z_k - c_k$ = Máximo $z_j\text{-}c_j$., donde j Є R y R es el conjunto actual de índices asociados con las variables no básicas. Si $z_k - c_k \leq 0$, entonces el proceso se detiene con la solución básica factible presente como una solución óptima. En caso contrario se continua con el siguiente paso con x_k como variable de entrada.
- PASO 4. Resolver el sistema $By_k = a_k$ (con solución única $y_k = B^{-1} a_k$). Si $y_k \leq 0$, entonces el proceso se detiene con la conclusión de que la solución optima es no acotada a lo largo del rayo Si y_k no es menor o igual a cero, se continúa con el siguiente paso:

---

[21] Programación lineal y flujo en redes, Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali, páginas, 120-139.

- PASO 5. Ahora, x_k entra en la base. El índice r de la variable de bloqueo x_{Br}, que sale de la base, se determina mediante el criterio de la razón mínima:

b'_r/y_{rk} = Mínimo $(1 \leq i \leq m) \left\{ b'_i/y_{ik}: y_{ik} > 0 \right\}$

Se actualiza la base B, en donde a_k reemplaza a a_{Br}, se actualiza el conjunto R de índices, y se repite el paso uno.

3.1.4 análisis del algoritmo simplex en formato de tabla

A continuación se analizará el algoritmo del método simplex en formato de tabla. Suponemos que se tiene una solución básica factible inicial x con base B. El problema de programación lineal se puede representar de la siguiente forma:

Minimizar z

Sujeto a $z - c_B x_B - c_N x_N = 0$ (1)

$Bx_B + Nx_N = b$ (2)

$X_B, x_N \geq 0$

Por la ecuación (2) se tiene:

$X_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$ (3)

Multiplicando (3) por c_B y sumando el resultado a la ecuación (1) se tiene:

$Z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b$ (4)

En este momento, $x_N = 0$, y de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$X_B = B^{-1}b$ y $z = c_B B^{-1}b$.

Las ecuaciones (3) y (4) es posible representar de manera conveniente la solución básica factible actual con base B en la tabla siguiente, en donde z es como es como una variable básica que debe minimizarse, haciendo referencia al renglón objetivo como renglón 0 y a los renglones restantes como los renglones 1 hasta m. La columna del lado derecho (LD) denotará los valores de las variables básicas (incluyendo el valor de la función objetivo). Las variables básicas se identificarán en la columna izquierda.

	z	x_B	x_N	LD
Z	1	0	$c_BB^{-1}N - c_N$	$c_BB^{-1}b$
X_B	0	1	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Esta tabla, en que z y x_B se expresan en términos de x_N está en forma canónica, y no solo proporciona el valor de la función objetivo $c_BB^{-1}b$ y el de las variables básicas $B^{-1}b$ en el lado derecho, sino que también proporciona toda la información necesaria para proceder con el método simples. El renglón de costo $c_BB^{-1}N - c_N$, consta de los valores $z_j - c_j$ para las variables no básicas. El renglón cero dirá si ya se ha llegado a la solución óptima (**si todo $z_j - c_j \leq 0$**), y, en caso contrario, qué variable no básica se debe incrementar. Si se incrementa x_k, entonces el vector $y_k = B^{-1a}{}_K$, que esta representado en los renglones de 1 a m en la tabla, bajo la variable x_k, ayudará a determinar que tanto es necesario incrementar x_k. Si $y_K \leq 0$, entonces x_k puede crecer indefinidamente sin ser bloqueda y el objetivo óptimo es no acotado. Si y_k tiene por lo menos una componente positiva, entonces el incremento en x_k será bloquedo por una de las variables básicas actuales, que se vuelve cero. La prueba de la razón mínima (que es posible efectuar, ya que **$B^{-1}b = b$** y **y_k** está disponibles en la tabla) determina la variable de Bloqueo. Consecuentemente, el algoritmo que se debe seguir es el siguiente:

1.- Actualizar las variables básicas y sus valores.

2.- Actualizar los valores $z_j - c_j$ de las nuevas variables no básicas.

3.- Actualizar las columnas y_j.

Ejemplo:

Minimizar $x_1 + x_2 - 4x_3$

Sujeto a $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$

$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Se introducen las variables de holgura no negativas x_4, x_5 y x_6.

Minimizar $x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

Sujeto a $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$

$X_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$

$-x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Puesto que $b \geq 0$, entonces la base inicial se puede escoger como $B = [a_4, a_5, a_6] = I_3$ y, de hecho, $B^{-1}b = b' \geq 0$. Con lo que se tiene la siguiente tabla inicial.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
X_4	0	1	1	2	1	0	0	9
X_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
X_6	0	-1	1	1*	0	0	1	4

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
X_4	0	3*	-1	0	1	0	-2	1
X_5	0	0	2	0	0	1	1	6
X_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	1	3	-4	0	-1	0	-2	-16
X_1	0	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3

X_5	0	0	2	0	0	1	1	6
X_3	0	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

Esta es la tabla óptima, ya que $z_j - c_j \leq 0$ para todas las variables no básicas. La solución óptima es: $x_1 = 1/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 13/3$, con $z = -17$.

Convergencia finita del método simples en ausencia de degeneración: En cada iteración se efectúa una de las tres acciones siguientes:

1.- El proceso se detiene con un punto extremo óptimo si $z_k - c_k > 0$.

2.- El proceso se detiene con una solución no acotada, si $z_k - c_k > 0$ y $y_k \leq 0$.

3.- Se genera una nueva solución básica factible si $z_k - c_k > 0$ y y_k tiene por lo menos una componente positiva.

Cuando no hay degeneración, $b'_r > 0$ y entonces $x_k = b'_r/y_{rk} > 0$. Consecuentemente, la diferencia entre los valores objetivos de la iteración anterior y los de la iteración presente es $x_k(z_k - c_k) > 0$. Es decir la función objetivo decrece en cada iteración y por tanto las soluciones básicas factibles generadas por el método simplex son distintas, y como solo hay un número finito de soluciones básicas factibles, entonces el algoritmo se detendrá en un número finito de pasos, ya sea con una solución óptima finita o con una solución óptima no acotada.

3.2 El método de dos fases

En los casos en que no se dispone de una solución básica factible inicial, se necesita de algún trabajo previo antes de iniciar el método simples, EN ESTOS CASOS EXISTE EL MÉTODO DE LAS DOS FASES Y EL MÉTODO DE PENALIZACIÓN O DE LA "M" GRANDE, ambas usando **variables artificiales** para obtener una solución básica factible inicial de un conjunto de restricciones modificado.

Después de manipular las restricciones e introducir variables de holgura, suponemos que las restricciones se han escrito en la forma **$Ax = b, x \geq 0$,** en donde A es una matriz de mxn y **$x \geq 0$**es un m-vector y que A no contiene ninguna submatriz identidad, en este caso se recurrirá a las variables artificiales para obtener una solución básica factible inicial, y después se aplicará el mismo método simples para eliminar tales variables artificiales.

Si se cambian las restricciones, añadiendo un vector artificial x_a, con lo cual se obtiene el sistema **$Ax + x_a = b, x \geq 0, x_a \geq 0$**, ahora se tiene una matriz identidad correspondiente a un vector artificial, obteniéndose de inmediato una solución básica factible del nuevo sistema, **$x_a = b$ y $x = 0$,** aunque ahora se tiene una solución básica factible inicial se ha cambiado el problema, y para resolver el problema original, es necesario hacer que estas dos variables artificiales de vuelvan cero, ya que **$Ax = b$** si y solo si **$Ax + x_a = b$**, con **$x_a = 0$.**

Ejemplo, si tenemos las restricciones siguientes:

$X_1 + 2x_2 \geq 4$

$-3x_1 + 4x_2 \geq 5$

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Introduciendo las variables do holgura x_3, x_4 y x_5, se obtiene:

$$X_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$-3x_1 + 4x_2 - x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 6$$

$X_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Esta matriz de restricciones, no contiene ninguna submatriz identidad. Es posible introducir tres variables artificiales para obtener una solución básica factible inicial, sin embargo, como x_5 aparece solo en el último renglón y su coeficientes es 1, basta introducir dos variables artificiales x_6 y x_7, lo cual lleva al siguiente sistema:

$$
\begin{array}{llll}
X_1 + 2x_2 - x_3 & + x_6 & = 4 \\
-3x_1 + 4x_2 - x_4 & + x_7 & = 5 \\
2x_1 + x_2 + x_5 & & = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, & x_6, x_7 & \geq 0
\end{array}
$$

Ahora se tiene una solución básica factible inicial del nuevo sistema que es: $x_5 = 6$, $x_6 = 4$ y $x_7 = 5$. Se desea que a la larga las variables artificiales se vuelvan cero.

A continuación se analizará el **método de las dos fases** [22] que es posible aplicar a fin de eliminar las variables artificiales, este procedimiento se denomina método de las dos fases porque en la primera fase se reducen las variables artificiales al valor cero, o bien se concluye que el problema original no tiene soluciones factibles. En la primera situación, la segunda fase minimiza la función objetivo original empezando con la solución básica factible obtenida al final de la fase I. En seguida se describe este método.

FASE I

Se resuelve el siguiente programa lineal, empezando con la solución básica factible $x = 0$ y $x_a = b$.

Minimizar $\mathbf{1x_a}$

Sujeto a $\mathbf{Ax + x_a = b}$

$\mathbf{x, x_a \geq 0}$

Si al optimizar se tiene que $x_a \neq 0$, entonces el proceso termina; en este caso, el problema original no tiene soluciones factibles. De lo contrario, sean x_B y x_N las

[22] Programación lineal y flujo en redes, ob. cit., páginas, 163-172.

variables legitimas, básica y no básica, respectivamente. El siguiente paso es la fase II.

FASE II.

Se resuelve el siguiente programa lineal, empezando con la solución básica factible $\mathbf{x_B = B^{-1}b}$ **y** $\mathbf{x_N = 0}$**.**

Minimizar $\mathbf{c_B\, x_B + c_N\, x_N}$

Sujeto a $\mathbf{x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b}$

Con $x_B, x_N \geq 0$

Este problema equivale al problema original.

Ejemplo:

$X_1 + 2x_2 \geq 4$

$-3x_1 + 4x_2 \geq 5$

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Introduciendo las variables do holgura x_3, x_4 y x_5, se obtiene:

Minimizar $x_1 - 2x_2$

Sujeto a:

$$X_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$X_1, x_2 \geq 0$$

Después de introducir variables de holgura se obtiene:

Minimizar $x_1 - 2x_2$

Sujeto a:

$$\begin{array}{lllll} X_1 + x_2 - x_3 & & & = 2 \\ -x_1 + x_2 & - x_4 & & = 1 \\ \quad x_2 & & + x_5 & = 3 \end{array}$$

$X_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Como no se dispone de una matriz identidad original, se introducen las variables artificiales x_6 y x_7. La fase I empieza minimizando $x_0 = x_6 + x_7$.

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
0	1	1	-1	0	0	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	3

Se suma los renglones 1 y 2 al renglón 0, para obtener $z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0$

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	1	0	2	-1	-1	0	0	0	3
X_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
X_7	0	-1	1^*	0	-1	0	0	1	1
X_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	1	2	0	-1	1	0	0	-2	1
X_6	0	2^*	0	-1	1	0	1	-1	1
X_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
X_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0

X_1	0	1	0	-1/2	½	0	½	-1/2	½
X_2	0	0	1	-1/2	-1/2	0	½	½	3/2
X_5	0	0	0	1/2	½	1	-1/2	-1/2	3/2

Aquí termina la fase I. Se tiene una solución básica factible inicial (x_1 + x_2) = (1/2, 3/2).

En la fase II el objetivo original se minimiza empezando en el punto extremo (1/2, 3/2), ignorándose por completo las variables artificiales.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
1	-1	2	0	0	0	0
0	1	0	-1/2	1/2	0	½
0	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
0	0	0	1/2	1/2	1	3/2

Los renglones 1 y 2 se multiplican por 1 y –2, respectivamente, y se suma al renglón cero 0 para obtener $z_1 – c_1 = z_2 –c_2 = 0$.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	1	0	0	½	3/2	0	-5/2
X_1	0	1	0	-1/2	½*	0	½
X_2	0	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
X_5	0	0	0	½	½	1	3/2

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	1	-3	0	0	0	0	-4
X_4	0	2	0	-1	1	0	1

X_2	0	1	1	-1	0	0	2
X_5	0	-1	0	1^*	0	1	1

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	1	-1	0	0	0	-2	-6
X_4	0	1	0	0	1	1	2
X_2	0	0	1	0	0	1	3
X_3	0	-1	0	1	0	1	1

Como $z_j - c_j \leq 0$ para todas las variables no básicas, entonces se ha alcanzado el punto óptimo (0,3) con objetivo –6.

3.3 El método de la "M" Grande o Penalización

Además del método de dos fases, otra posibilidad para eliminar variables artificiales consiste en asignar coeficientes a estas variables en la función objetivo original, a fin de hacer que su presencia en la base, en un nivel positivo, sea muy poco atractiva desde el punto de vista de la función objetivo.

Si se desea resolver el siguiente problema de programación lineal, en el que $b \geq 0$.

Minimizar **cx**

Sujeto a **Ax = b**

X ≥ 0

Y no se conoce una base conveniente, entonces se introduce el vector artificial x_a, con lo cual se obtiene el siguiente sistema:

$$\mathbf{Ax + x_a = b}$$

$x, x_a \geq 0$

La solución básica factible inicial esta dada por $x_a = b$ y $x = 0$. Para reflejar la inconveniencia de un vector artificial distinto de cero, la función objetivo se modifica de modo que se pague un castigo o pena muy alta cuando se tenga una solución de este tipo, específicamente consideramos el siguiente problema [23]:

Minimizar $\mathbf{cx + M1x_a}$

Sujeto a $\mathbf{Ax + x_a = b}$

$\mathbf{x, x_a \geq 0}$

en donde M es un número positivo muy grande. El término $\mathbf{M1x_a}$ se puede interpretar como una penalización (o multa) que es necesario pagar por cualquier solución con $\mathbf{x_a \neq 0}$. La estrategia anterior se puede interpretar como aquella que minimiza $1x_a$ con prioridad 1 y entre todas las soluciones optimas alternativas para este objetivo, la que minimiza el objetivo secundario cx. Entonces, aunque la solución inicial $x = 0$, $x_a = b$ es factible para las nuevas restricciones, tiene un valor objetivo poco atractivo que es M1b, por tanto el método simplex tratará de sacar de la base a las variables artificiales, y después continuará hasta encontrar la solución optima del problema original.

El siguiente ejemplo, ha sido resuelto aplicando el método de dos fases, a continuación se resolverá mediante el método de penalización:

Minimizar $x_1 - 2x_2$

Sujeto a:

$X_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$X_1, x_2 \geq 0$

[23] Programación lineal y flujo en redes, ob. cit. páginas. 180-187.

Se introducen las variables de holgura x_3, x_4 y x_5, y las variables artificiales x_6 y x_7 se incorporan a las dos primeras restricciones. La función objetivo modificada es $z = x_1 - 2x_2 + Mx_6 + Mx_7$, en donde M es un número positivo muy grande. Esto conduce a la siguiente sucesión de tablas:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
0	1	1	-1	0	0	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	3

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	1	-1	2+2M	-M	-M	0	0	0	3M
X_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
X_7	0	-1	1^*	0	-1	0	0	1	1
X_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	1	1+2M	0	-M	2+M	0	0	-2-2M	-2 +M
X_6	0	2^*	0	-1	1	0	1	-1	1
X_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
X_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	1	0	0	½	3/2	0	-1/2-M	-3/2-M	-5/2
X_1	0	1	0	-1/2	$1^*/2$	0	½	-1/2	½

X_2	0	0	1	-1/2	-1/2	0	½	½	3/2
X_5	0	0	0	½	1	1	-1/2	3/2	3/2

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	1	-3	0	2	0	0	-2 – M	-M	-4
X_4	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
X_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
X_5	0	-1	0	1^*	0	1	-1	0	1

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	1	-1	0	0	0	-2	– M	-M	-6
X_4	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
X_2	0	0	1	0	0	1	0	0	3
X_3	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

Como $z_j - c_j \leq 0$ para toda variable no básica, entonces la ultima tabla proporciona la solución óptima.

Para resolver el problema de penalización, se plantea el problema original P y el problema penalizado P(M), en donde el vector b es no negativo.

El problema P es:

Minimizar **cx**

Sujeto a **Ax = b**

X ≥ 0

El problema P(M) consiste en:

Minimizar $\mathbf{cx + M1x_a}$

Sujeto a $\mathbf{Ax + x_a = b}$

$\mathbf{x, x_a \geq 0}$

Como el problema P(M) tiene una solución factible, entonces al resolver el problema por el método simplex, es posible que se presenten uno de los dos casos siguientes:

1.- Se llegará a una solución óptima de P(M).

En este caso se tiene dos posibilidades:

En la primera, la solución óptima de P(M) tiene todas las variables artificiales igual a cero, $(x^*, 0)$ es una solución óptima de P(M), donde x^* es una solución óptima del problema P, lo anterior se comprueba como sigue: sea x cualquier solución factible del problema P, además (x, 0) es una solución factible del problema P(M). Como $(x^*, 0)$ es una solución óptima del problema P(M), entonces $cx^* + 0 \leq cx + 0$; es decir, $cx^* \leq cx$. Como x^* es una solución factible del problema P, entonces x^* es una solución optima de P.

En el segundo supuesto, no todas las variables artificiales son cero, en este caso, (x^*, x^*_a) es una solución óptima de P(M) y $x^*_a \neq 0$. Si M es un número positivo muy grande, se concluye que no existe una solución factible de P

2.- Se concluirá que P(M) tiene una solución optima no acotada; es decir, $z \to -\infty$. En este caso, durante la solución del problema penalizado la columna actualizada y_k es ≤ 0, en donde el índice k corresponde al más positivo de los $z_j - c_j$. Entonces el problema P(M) tiene una solución óptima no acotada. En este caso, si todas las variables artificiales son cero, entonces el problema original tiene una solución óptima no acotada. De lo contrario, si por lo menos una variable artificial es positiva, entonces el problema original es no factible.

C A P Í T U L O IV

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES

4.1 Definición de la Administración de Operaciones.

Los administradores de operaciones son los responsables de la producción de los bienes o servicios de las organizaciones. Los administradores de operaciones toman decisiones que se relacionan con la función de operaciones y los sistemas de transformación que se utilizan, por consiguiente, la administración de operaciones es el estudio de la toma de decisiones en la función de operaciones. A continuación se describirán los principales conceptos de la definición dada: [24]

Función.- Los gerentes de operaciones son responsables del manejo en aquellos departamentos o funciones de las organizaciones que producen bienes y servicios, estos departamentos tiene nombres distintos en industrias diferentes. En las compañías de manufactura, la función de operaciones podría denominarse departamento de manufactura, de producción o de operaciones. En las de servicio, la función de operaciones podría denominarse según la industria en particular a que se refiera.

---

[24] Administración de operaciones, Roger G. Schroeder, tercera edición, 1992, editorial McGraw-Gill. páginas. 19-22.

Sistema.- Se refiere a sistemas de transformación que producen bienes y servicios.

Decisiones.- La toma de decisiones es un elemento importante en la administración de operaciones, mantiene un criterio para dividir las operaciones en varias partes basándose en los tipos de decisiones importantes.

4.2. Aplicación de la Programación Lineal en Operaciones

La Programación Lineal se aplica a un gran rango de áreas que impliquen decisiones. En particular, dentro del área de la administración de operaciones, entre las aplicaciones más conocidas se incluyen las siguientes:

1.- MEZCLA DE PRODUCTOS.- Un beneficio de la solución óptima de la mezcla de productos en una empresa es la de identificación de problemas de coordinación entre producción y mercadotecnia, la mejor mezcla de productos desde un punto de vista de producción, se proporciona por la solución de la programación lineal.

2.- COMBINACIÓN.- La decisión de combinación determina los mejores recursos para fabricar un producto mezclado, tal como gasolina, embutidos etc.

3.- PLANEACIÓN DE LA PRODUCCIÓN.- La productividad se define como la relación entre las entradas y las salidas de un sistema productivo. Es conveniente medir esta relación como una razón de la salida dividida entre la entrada. Si se produce más salida con las mismas entradas, se mejorará la productividad; del mismo modo, si se utilizan menos entradas para producir la misma salida, también se mejora la productividad. Los gerentes de operaciones son los encargados de mejorar la productividad en las empresas a través de la planificación de la producción.

4.- DISTRIBUCIÓN.- La programación lineal se aplica a un amplio rango de decisiones de distribución, tales como los patrones de embarque óptimos y la localización optima de plantas y bodegas, pueden identificarse las mejores trayectorias y patrones de embarque.

4.2.1. Solución al problema de la planeación de la producción mediante el método simplex.

A continuación se aplicará el método simplex para la solución de un problema para la planeación de la producción de impresoras.

Una compañía fabrica impresoras matriciales y láser. La demanda de ambos tipos de impresoras supera la capacidad de producción. La compañía esta interesada en desarrollar una política de producción óptima. Si cada impresora matricial necesita 1 hora para su fabricación y 2 horas para su control de calidad, mientras que una impresora láser necesita, respectivamente 1.5 y 1 horas. El número de horas de fabricación disponible por semana es de 200 y de control de calidad 175 y los beneficios notos de venta de las impresoras son de 2,000.00 pesos por unidad para las matriciales y 3,000.00 por unidad para las láser.

La compañía desea obtener el máximo beneficio, independientemente del número de unidades producidas, por lo que se debe determinar cual es le programa óptimo.

En primer termino introducimos las variables de decisión:

MAT = Producción de impresoras matriciales.

LAS = Producción de impresoras láser.

Las restricciones se deben a las limitaciones en la disponibilidad de los tiempos de fabricación y de control de calidad.

$MAT + 1.5\ LAS \leq 200$

$2MAT + LAS \leq 175$

La función objetivo a maximizar, con la introducción de variables de holgura (s_1 y s_2) es:

Maximizar $2MAT + 3LAS + 0s_1 + 0s_2$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$MAT + 1.5\ LAS + s_1 = 200$

$2MAT + LAS + s_2 = 175$

$MAT, LAS, s_1, s_2 \geq 0$

Aplicando el método simples se obtiene la solución óptima en una iteración. La tabla final es:

	c_j	2	3	0	0	
c_B	VB	MAT	LAS	s_1	s_2	x_B
3	LAS	2/3	1	2/3	0	133.3
0	s_2	4/3	0	-2/3	1	41.66
	$z_j - c_j$	0	0	2	0	400

Suponiendo valores de producción no enteros, la solución óptima es:

$MAT^* = 0$, $LAS^* = 133.33$, $s_1 = 0$, $s_2 = 41.66$, con beneficio óptimo $B^* = 400{,}000.00$, es decir, toda la producción se restringirá a fabricar 133 impresoras láser. Al ser $s_1 = 0$, se consumen las 200 horas de trabajo; sin embargo, como s_2

= 41.6, de la disponibilidad de 175 horas de tiempo de control de calidad no se utilizarán 41.6 horas con el plan óptimo.

4.2.2 Solución al problema de la mezcla de productos mediante la aplicación del programa Tora.

A continuación se darán dos problemas de mezcla de productos que se resolverán mediante el programa TORA que contiene el CD-ROM que se incluye en la quinta edición del libro de Investigación de Operaciones de HAMDY A. TAHA descrito en la bibliografía de la presente tesis.

A.- El problema de la mezcla de productos de una compañía de muebles: Supóngase una compañía de muebles que fabrica únicamente dos tipos de productos: mesas y sillas. La compañía ha limitado recursos de madera, mano de obra y capacidad de terminado con los cuales producir estos artículos. A la administración de la compañía le gustaría determinar la mejor mezcla de productos para fabricar: puras sillas, puras mezas o una mezcla de sillas y mesas. La administración define la mejor mezcla de productos como aquella que maximice la contribución total a la utilidad sujeta a la disponibilidad limitada de recursos que ya se mencionó. Este problema se puede formular en términos matemáticos de la siguiente manera:

X_1 = el número total de mesas producidas

X_2 = el número total de sillas producidas

Donde X_1 y X_2 son variables desconocidas que serán determinadas por la solución del problema de programación lineal. También supóngase que se da la siguiente matriz unitaria de tecnología de producción. Esta matriz describe el proceso de transformación utilizado para convertir los escasos recursos (madera, mano de obra y capacidad de terminado) en mesas o sillas. Por ejemplo, se requieren 30 metros de tabla para fabricar una mesa y 20 metros de tabla para fabricar una silla y la cantidad de recursos escasos disponibles son: 120 metros de tabla, 9 horas de mano de obra y 24 horas de capacidad de terminado.

Si se multiplican los valores en la matriz unitaria de tecnología de

	MESAS	SILLAS
Madera, metros de tabla	30	20
Mano de obra, horas	2	2
Capacidad de terminado, horas	4	6

Producción por el número de unidades producidas y se suman ambos productos, se obtendrán los recursos totales requeridos de cada tipo. Estos requerimientos deben ser menores que la cantidad de recursos disponibles. Entonces se tiene:

$30X_1 + 20X_2 \leq 120$

$2X_1 + 2X_2 \leq 9$

$4X_1 + 6X_2 \leq 24$

Dado que se requieren 30 metros de tabla para cada mesa, $30X_1$ metros de tabla se requerirán para X_1 mesas como se indica en la primera restricción anterior. De la misma manera, se requieren $20X_2$ metros de la tabla para producir X_2 sillas. La cantidad total requerida e tabla para producir las mesas y las sillas ($30X_1 + 20X_2$) debe ser menor que o igual que la cantidad disponible (120).

La administración desea encontrar los valores de X_1 y X_2 que maximicen la contribución a la utilidad. Para formular esta función objetivo, se asume que cada mesa contribuye con \$10 y cada silla con \$8 a la utilidad. Entonces la contribución total de X_1 mesas y X_2 sillas es:

$10X_1 + 8X_2$

Finalmente, se requiere que X_1 y X_2 no sean valores negativos. Reuniendo las restricciones y la función objetivo que se especifico, el problema de la mezcla de productos se puede resumir de la siguiente forma:

Objetivo: max $10X_1 + 8X_2$

Sujeto a $30X_1 + 20X_2 \leq 120$

$2X_1 + 2X_2 \leq 9$

$4X_1 + 6X_2 \leq 24$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

Antes de resolver este problema mediante el programa TORA, se resolverá mediante el método algebráico simplex:

El primer paso en el método simplex es convertir el problema de programación lineal al formato apropiado cambiando todas las restricciones con desigualdad e igualdades, en nuestro ejemplo, eso se lleva a cabo agregando una variable de holgura a cada restricción de desigualdad, como se indica a continuación:

Objetivo: max $10X_1 + 8X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$

Sujeto a $30X_1 + 20X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 120$

$2X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 = 9$

$30X_1 + 20X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 120$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0$

En la primera restricción, se agrega la variable X_3 al lado izquierdo para conservar la relación entre el valor del lado izquierdo original y el lado derecho de la desigualdad. Entonces X_3 también debe restringirse a no ser negativa para que represente en forma apropiada su holgura en el lado izquierdo de la primera restricción. De manera similar se agregan X_4 y X_5 como variables de holgura para la segunda y tercera restricción, respectivamente. Dado que no se quiere que estas variables de holgura afecten la utilidad, se introducen con coeficientes cero en la función objetivo. El problema revisado tendrá exactamente la misma solución óptima para X_1 y X_2 que el problema original.

Ahora que el problema está en la forma requerida para el método simplex, se prepara la primera tabla.

C_j		10	8	0	0	0	
	Variable Solución	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Cantidad Solución
0	X_3	**30**	20	1	0	0	120
0	X_4	2	2	0	1	0	9
0	X_5	4	6	0	0	1	24
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	10	8	0	0	0	

La tabla simplex se construye separando los coeficientes de las variables y colocando los coeficientes mismos en las líneas y columnas apropiadas de la tabla. Por ejemplo, la primera línea en el cuerpo de la tabla es la primera ecuación de restricción, la segunda línea, es la segunda ecuación y así sucesivamente. En la columna del lado derecho de la tabla se coloca el lado derecho de las restricciones bajo el encabezado de “cantidad solución”. En cada tabla, esta columna representa los valores de las variables X_j para la solución actual. Las variables particulares X_j en la solución se indican en el recuadro identificado como "variable solución", en el lado izquierdo de la tabla. Por ejemplo, la solución inicial es X_3 = 120, X_4 = 9, X_5 = 24. Siempre se asume que no todas las variables en la solución tienen valores cero. Entonces , X_1 = 0 y X_2 = 0 en la primera tabla.

En la parte superior de la tabla, los coeficientes de la función objetivo se colocan en la forma correspondiente a las columnas representadas por cada variable X_j. Por ejemplo, el coeficiente de utilidad X_1 es 10, el cual se escribe arriba del símbolo X_1. Los valores de la C_j que corresponden a las variables solución se listan a la izquierda de las variables solución en la tabla. En la primera tabla, estos valores de C_j son todos cero, dado que únicamente las variables de holgura están en la solución inicial.

Finalmente, la tabla tiene dos renglones en la parte inferior identificados con Z_j y $C_j - Z_j$. El renglón de Z_j se calcula multiplicando los valores de C_j en el lado izquierdo por los coeficientes de cada columna y sumándolos. Por ejemplo, Z_1 se calcula de la siguiente manera:

$Z_1 = 0(30) + 0(2) + 0(4) = 0$

En la primera tabla, los valores resultantes de Z_j son cero, dado que todos los valores de C_j son cero.

El último renglón de la tabla $C_j - Z_j$ es el resultado de sustraer los valores de Z_j que se acaban de calcular de C_j en la parte superior de la tabla.

En administración de operaciones, los valores de Z_j se pueden interpretar económicamente como la utilidad bruta debida a la introducción de una unidad de variable correspondiente X_j. Por ejemplo, en la columna 1, si una unidad de X_1 se introduce en la solución, el valor de X_3 se debe reducir por 30 para mantener la igualdad en el primer renglón, X_4 se debe reducir por 2 para conservar la igualdad en el segundo renglón y X_5 se debe reducir por 4 para conservar la igualdad en el tercer renglón. Por lo tanto, los coeficientes en la columna de X_1 representan las tasas físicas de sustitución entre X_1 y cada una de las variables en la solución. Cuando estas tasas de sustitución se multiplican por sus respectivos coeficientes de utilidad, el resultado es Z_1, la utilidad bruta resulta perdida cuando una unidad de X_1 se introduce. Sin embargo, la utilidad ganada por introducir una unidad de X_1 es el valor de $C_1 = 10$. Por lo tanto, el valor de $C_1 – Z_1$ representa la utilidad neta ganada al introducir una unidad de X_1. Es lógico, entonces, que introducir ya sea X_1 o X_2 en la solución de la primera tabla mejorará la utilidad neta debido a que los valores de $C_1 – Z_1$ y $C_2 – Z_2$ son positivos.

El método simplex trabaja al moverse de una esquina de la región factible a una esquina adyacente, sin alguna referencia gráfica se puede determinar que variable entrará a la solución y cuál saldrá, utilizando la siguiente regla:

Regla de entrada. Para llegar a la solución, se selecciona la variable con el valor más grande de $C_j – Z_j$. Se le llama a ésta la columna clave.

Regla de salida. Se toma la razón de la cantidad solución a los coeficientes de la columna clave para aquellos coeficientes de la columna clave que son positivos. Se selecciona la variable del renglón que tenga la razón más pequeña para que salga, a este renglón se le llama clave.

En la primera tabla, por la aplicación de la regla de entrada, X_1 se selecciona para entrar. La aplicación de la regla de salida produce las siguientes razones, una para cada renglón: 120/30, 9/2, y 24/4. Dado que 120/30 es la razón más pequeña para el primer renglón, la variable representada en ese renglón, X_3 será la que salga de la solución. Intuitivamente, conforme el valor de X_1 se incrementa en la columna 1, X_3 será la primera variable en la solución actual para llegar a cero. Este hecho se determina calculando las razones anteriores para los coeficientes positivos. La columna clave y el renglón clave se identifican en la primera tabla. La intersección de la columna clave y el renglón clave recibe el nombre de elemento pivote, el cual se marca en la tabla.

Después de aplicar las reglas de entrada y salida, el siguiente paso es transformar la tabla para la nueva solución utilizando el elemento pivote. Esto se realiza mediante el proceso de eliminación Gaussiana que transforma la tabla, pero conserva la misma solución para las ecuaciones de restricción. En la eliminación Gaussiana, cualquier renglón en la tabla se puede multiplicar o dividir por una constante diferente de cero y colocarla en la nueva tabla. También cualquier renglón se puede multiplicar por una constante diferente de cero y sumarlo a cualquier otro renglón, con la suma colocada en la nueva tabla, lo que se hace con el método de eliminación gaussiana es resolver ecuaciones simultáneas. De acuerdo con las reglas Gaussianas, todos los coeficientes en el renglón clave se dividen entre el elemento pivote y el resultado se coloca en la nueva tabla.

C_j		10	8	0	0	0	
	Variable Solución	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Cantidad Solución
10	X_3	1	2/3	1/30	0	0	4
0	X_4	0	**2/3**	-2/30	1	0	1
0	X_5	0	10/3	-4/30	0	1	8
	Z_j	10	20/3	10/3	0	0	40
	C_j - Z_j	0	4/3	-10/30	0	0	

Entonces el renglón clave se multiplica por una constante y se suma a otro renglón diferente, de tal forma que resulte un cero en la columna clave.

Después de que se termina este paso, se calculan los valores de Z_j y $C_j - Z_j$, actualizándose los cálculos con los nuevos valores de coeficientes en la tabla que antecede.

La nueva tabla es igual a la tabla anterior excepto que se tiene reemplazada la columna 3 por la columna 1 en la solución. La columna uno en la nueva tabla tiene un 1 en la primera posición y el resto son ceros, dando una matriz identidad en la tabla. Esto hace posible leer la solución directamente de la tabla.

En la segunda tabla, se tiene $X_1 = 4$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 1$ y $X_5 = 8$, esto es, la segunda tabla ya no es óptima dado que se presenta un incremento positivo en la utilidad neta en el renglón de $C_j - Z_j$. Dado que $C_2 - Z_2$ es el valor positivo más grande, la columna 2 es la columna clave. Tomando las razones, se encuentra que el renglón 2 tiene la razón mínima, de tal forma que el renglón 2 es el renglón clave y X_4 sale de la solución. Pivoteando en el renglón 2 y la columna 2, se obtiene la tercera tabla por eliminación Gaussiana.

C_j		10	8	0	0	0	
	Variable Solución	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Cantidad Solución
10	X_1	1	0	1/10	-1	0	3
8	X_2	0	1	-1/10	3/2	0	3/2
0	X_5	0	0	6/30	-5	1	3
	Z_j	10	8	2/10	2	0	42
	$C_j - Z_j$	0	0	-2/10	-2	0	

Dado que no se tienen valores positivos de $C_j - Z_j$, se ha llegado a la solución óptima; no es posible mejorar la utilidad neta. La solución óptima en la tercera tabla es: $X_1 = 3$, $X_2 = 3/2$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ y $X_5 = 3$.

A CONTINUACIÓN SE MOSTRARÁN LOS RESULTADOS OBTENIDOS PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ANTERIOR, MEDIANTE EL PROGRAMA TORA.

El software TORA resuelve temas de programación lineal y entera, transporte, redes, histogramas, inventarios, líneas de espera, entre otros, los cuales se muestran en el menú principal, que aparece enseguida.

```
+---------- MAIN ---------+
 ¦ Linear programming      ¦
 ¦ Transportation model    ¦
 ¦ Network models          ¦
 ¦ Integer programming     ¦
 ¦ PERT-CPM                ¦
 ¦ Queueing analysis       ¦
 ¦ Histogram/Forecast      ¦
 ¦ Inventory models        ¦
```

```
+---------------- Enter new problem ---------------------+

¦Problem  Title                                           :
¦
¦Nbr  of  Variables                                       :
¦
```

```
¦Nbr   of   Constraints                                    :
¦
¦User-defined      Vars      Names            (y/n)?      :
¦
¦Nonzero      Lower      Bounds                (y/n)?      :
¦
¦Finite      Upper      Bounds                 (y/n)?      :
¦
¦Unrestricted      Variables                  (y/n)?      :
¦
+---------------------------------------------------------¦
+----------------------Message Area-----------------------¦
+---- <F1>Main Menu  <F8>Done!  <F9>Exit TORA -----------+

------------------- Enter new problem ---------------------
Problem Title                 : MEZCLA DE PRODUCTOS
Nbr of Variables                 : 5      Indexed VARIABLES
names: x1 to x5
Nbr of Constraints            : 3
User-defined Vars Names (y/n)? : n
Nonzero Lower Bounds    (y/n)? : n
Finite Upper Bounds     (y/n)? : n
Unrestricted Variables  (y/n)? : n
-----------------------------------------------------------

               max/min   x1      x2      x3      x4      x5
Obj. Function:    max    10       8      0       0       0
```

```
   +----- SOLVE/MODIFY ----+
   ¦ Solve Problem         ¦
   ¦ Modify data           ¦
   ¦ View data             ¦
   ¦ Print data            ¦
   +-----------------------+
-----------------------Message Area------------------------

--------- <F1>Main Menu  <F8>Done!  <F9>Exit TORA ---------

  +-------------- OPTIMUM --------------+
  ¦View solution/sensitivity summary    ¦
  ¦Print solution/sensitivity summary   ¦
  ¦Obtain alternative optimum           ¦
  ¦View optimum tableau                 ¦
  ¦Print optimum tableau                ¦
  ¦View original data                   ¦
  ¦Print original data                  ¦
  +-------------------------------------+


¦MEZCLA  DE  PRODUCTOS                                   max
Final Iteration No: 4   ¦
+----------------------------------------------------------¦
¦               *** OPTIMUM SOLUTION SUMMARY ***
¦Obj    value    =                                  42.0000
¦
¦---------------------------------------------------------- ¦
```

```
¦Variable Value     Obj Coeff Obj Val Contrib Reduced Cost¦
¦---------------------------------------------------------- ¦
¦ x1      3.0000    10.0000     30.0000           0.0000  ¦
¦ x2      1.5000    8.0000      12.0000           0.0000  ¦
¦ x3      0.0000    0.0000       0.0000           0.2000  ¦
¦ x4      0.0000    0.0000       0.0000           2.0000  ¦
¦ x5      3.0000    0.0000       0.0000           0.0000

¦More to come... Press PgDn/PgUp to scroll

+------------ <PgUp/PgDn>Scroll  <F6>Optimum Menu --------+

Obj value =        42.0000
-----------------------------------------------------------
Constraint     RHS  Slack(-)/Surplus(+)      Dual Pri
-----------------------------------------------------------
1 (=)     120.0000       0.0000                0.20
2 (=)       9.0000       0.0000                2.00
3 (=)      24.0000       0.0000                0.00

         More to come... Press PgDn/PgUp to scroll

+----------------------------------------------------------
¦MEZCLA DE PRODUCTOS
max (phase_2)
(Final)Iteration No: 4
+-----------------------------------------------------------
¦Basic        x1     x2     x3     x4     x5     Rx6     Rx7
```

```
¦----------------------------------------------------------
¦z             0.00  0.00  0.20  2.00   0.00  0.20    2.00
¦----------------------------------------------------------
¦ 1) x1        1.00  0.00  0.10 -1.00   0.00  0.10   -1.00
¦ 2) x2        0.00  1.00 -0.10  1.50   0.00 -0.10    1.50
¦ 3) x5        0.00  0.00  0.20 -5.00   1.00  0.20   -5.00
¦----------------------------------------------------------
¦+/-=(x+  -  x-)   s/S=slack/Surplus   R=artif     '=upper  bd
+----------------------------------------------------------+
¦Basic            Rx8    Solution
¦-----------------------------------
¦z                0.00     42.00
¦-----------------------------------
¦1) x1            0.00     3.00
¦2) x2            0.00     1.50
¦3) x5            1.00     3.00
¦-----------------------------------
¦                   x1   x2   x3   x4   x5              RHS
¦---------------------------------------------------------
¦max                10   8    0    0    0
¦----------------------------------------------------------
¦Constraint  1:     30   20   1    0    0       =       120
¦Constraint  2:     2    2    0    1    0       =       9
¦Constraint  3:     4    6    0    0    1       =       24
¦----------------------------------------------------------
```

B.- Planificación de mezclas en una planta química:

Una planta química fabrica dos productos A y B mediante dos procesos I y II. La siguiente tabla da los tiempos de producción de A y B, en cada procesos y los beneficios (en miles de pesos)n por unidad vendida

	Producto	
Proceso	A	B
I	2	3
II	3	4
Beneficio /unidad	4	10

Se dispone de 16 horas de operación del proceso I y de 24 horas del proceso II. La producción de B da, además, un subproducto C (sin coste adicional) que puede venderse a 3000 pesos/ unidad. Sin embargo, el sobrante de C debe destruirse con coste de 2000 pesos /unidad. Se obtienen dos unidades de C por cada unidad de B producida. La demanda de C se estima en, a lo sumo, 5 unidades. La administración desea un plan de producción con máximo beneficio, por lo que consideramos las variables de decisión:

X_1 = producción de A

X_2 = producción de B

X_3 = cantidad de C vendida

X_4 = cantidad de C destruida

Con esta definición la suma $X_3 + X_4$ será la producción de C.

Las restricciones se deban a:

Proporción de la producción de C a partir de B

$X_2 = 1/2\ (X_3 + X_4)$

Límite de demanda de C

$X_3 \leq 5$

Límites de tiempo de ambos procesos

$2X_1 + 3X_2 \leq 16$, $3X_1 + 4X_2 \leq 24$

La función objetivo, que es el beneficio neto a maximizar en miles de pesos, es

$B = 4X_1 + 10X_2 + 3X_3 – 2X_4$

Por lo que el programa lineal que se resolverá mediante el programa TORA, es el siguiente:

Max $B = 4X_1 + 10X_2 + 3X_3 – 2X_4$

Sujeto a las restricciones siguientes:

$-2X_2 + X_3 + X_4 = 0$

$2X_1 + 3X_2 \leq 16$

$3X_1 + 4X_2 \leq 24$

$X_3 \leq 5$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

```
+----------------------------------------------------------+
PLANIFICACIÓN DE MEZCLAS                max              Final
Iteration No: 4
+----------------------------------------------------------¦
¦ *** OPTIMUM SOLUTION SUMMARY ***                          ¦

¦Obj value =        57.000
==> (Alternative solution detected at x4) ¦
¦--------------------------------------------------------- ¦
¦Variable  Value  Obj Coeff  Obj Val Contrib  Reduced Cost¦
¦--------------------------------------------------------- ¦
¦x1       4.2500    4.0000         17.0000         0.0000  ¦
¦x2       2.5000   10.0000         25.0000         0.0000  ¦
¦x3       5.0000    3.0000         15.0000         0.0000  ¦
¦x4       0.0000   -2.0000         -0.0000         0.0000  ¦
¦
```

```
 More    to    come...    Press    PgDn/PgUp    to    scroll
¦
¦-----------------------------------------------------------
¦Constraint    RHSS      lack(-)/Surplus(+)      Dual Price
¦-----------------------------------------------------------
¦1 (=)        0.0000        0.0000             -2.0000
¦2 (<)        16.0000       0.0000-              2.0000
¦3 (<)        24.0000       1.2500-              0.0000
¦4 (<)         5.0000       0.0000-              5.0000
¦
¦More to come... Press PgDn/PgUp to scroll
¦
+-----------------------------------------------------------
¦PLANIFICACION   DE   MEZCLAS                max   (phase_2)
(Final)Iteration No: 4
+-----------------------------------------------------------
¦==> Alternative solution detected at x4
¦
¦Basic    x1    x2   x3    x4    Rx5   sx6   sx7
¦-----------------------------------------------------------
¦z      0.00  0.00  0.00  0.00 -2.00  2.00  0.00
¦-----------------------------------------------------------
¦1) x3  0.00  0.00  1.00  0.00  0.00  0.00  0.00
¦2) x1  1.00  0.00  0.00  0.75  0.75  0.50  0.00
¦3)sx7  0.00  0.00  0.00 -0.25 -0.25 -1.50  1.00
 4)x2   0.00  1.00  0.00 -0.50 -0.50  0.00  0.00
¦-----------------------------------------------------------
¦+/-=(x+ - x-)  s/S=slack/Surplus  R=artif   '=upper bd
```

```
¦
+-----------------------------------------------------------
¦     Basic        sx8  Solution
¦-----------------------------------
¦     z            5.00    57.00
¦-----------------------------------
¦ 1) x3            1.00     5.00
¦ 2) x1           -0.75     4.25
¦ 3) sx7           0.25     1.25
¦ 4) x2            0.50     2.50
¦-----------------------------------
¦+/-=(x+  -  x-)   s/S=slack/Surplus   R=artif     '=upper  bd
+----------------------------------------------------------
¦PLANIFICACION DE MEZCLAS                            Size: 4
constrs x 4 vars
+-----------------------------------------------------------
¦                  x1    x2    x3    x4             RHS
¦-----------------------------------------------------------
¦max               4     10    3     -2
¦-----------------------------------------------------------
¦Constraint  1:     0     -2    1      1       =       0
¦Constraint  2:     2      3    0      0       <=      16
¦Constraint  3:     3      4    0      0       <=      24
¦Constraint  4:     0      0    1      0       <=      5
¦----------------------------------------------------------
```

C O N C L U S I O N E S

La programación lineal se refiere a la modelación y resolución de problemas de toma de decisiones en los que las variables de decisión se relacionan mediante restricciones lineales y la función de evaluación de la decisión o función objetivo es lineal en las variables de decisión.

En la actualidad, los modelos de programación lineal constituyen una de las herramientas más utilizadas e importantes de los métodos cuantitativos de gestión y planificación.

El método simplex introducido por Dantzig en 1947 permitió resolver cualquier problema de programación lineal y con la aparición de las computadoras modernas existe la posibilidad de resolver problemas de mayor tamaño.

Las aplicaciones de la programación lineal son variadas, por lo que constituyen una herramienta vital de planificación en diversas áreas y es de gran ayuda, tanto en problemas con los que solo nos enfrentamos una vez, como en otros que correspondan a actividades que deban repetirse en forma sistemática.

En cada caso, el encargado de la toma de decisiones debe organizar los distintos recursos para alcanzar cierto objetivo, usualmente la maximización de beneficios y minimización de perdidas.

Por lo anteriormente expuesto se concluye que es necesario dedicar atención no solo a los algoritmos de solución de programación lineal, sino también al proceso de construcción de modelos que constituye un apartado tan importante como el de solución de problemas, es decir, una buena construcción del modelo matemático del programa lineal que se asemeje tanto como sea posible a la realidad, es la base para la solución de problemas de su clase.

Los modelos de programación lineal se incluyen en la clase más general de los modelos de optimización, en los que se optimiza una función de variables de decisión, denominada función objetivo , sujeta a un conjunto de limitaciones o restricciones sobre las variables de decisión.

La formulación general de un problema de optimización es:

Max $z = f(x_1, \ldots, x_n)$

Sujeto a $g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$, $j = 1, \ldots m$

Donde f es la función objetivo, $(x_1, \ldots, x_n)$ son las variables de decisión y las restricciones se caracterizan por las desigualdades sobre $g_1,\ldots,g_m$

Cualquier programa lineal se puede convertir a la forma estándar:

Minimizar $\quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\;\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

y $\quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

donde las b_i, c_i y a_{ij} son constantes reales fijas, y las x_i son valores reales a determinar. Suponiendo siempre, que en caso necesario, cada ecuación se ha multiplicado por menos uno, de modo que todo $b_i \geq 0$.

En notación vectorial, este problema se expresa como:

Minimizar $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeto a $\mathbf{Ax = b}$ y $\mathbf{x \geq 0}$

Donde $\mathbf{x}$ es un vector columna n-dimensional, $\mathbf{c}^T$ es un vector fila n-dimensional, **A** es una matriz **m x n,** y **b** es un vector columna m-dimensional. La desigualdad vectorial $\mathbf{x \geq 0}$ quiere decir que las componentes de **x** son positivas.

Un problema de maximización (minimización) se puede convertir en un problema de minimización (maximización) multiplicando por –1 los coeficientes de la función objetivo. Después de completar la optimización del nuevo problema, el valor del problema original es –1 veces el valor óptimo del nuevo problema.

La solución básica de un programa lineal se define de la siguiente forma.- Dado el conjunto Ax = b de m ecuaciones lineales simultaneas de n incógnitas, sea B cualquier submatriz de m x m no singular formada por columnas de A. Entonces, si todas las n – m componentes de x no asociadas a columnas de B se igualan a cero, la solución del conjunto resultante de ecuaciones se llama **solución básica** respecto a la base **B.** Las componentes de x asociadas a columnas de B se denominan variables básicas.

En la definición anterior, B se considera como una base, al estar formada por m columnas linealmente independientes que se pueden tomar como una base del espacio E^m. La solución básica corresponde a una expresión para el vector b como combinación lineal de estos vectores base.

La ecuación $Ax = b$ puede no tener soluciones básicas, por lo que es necesario plantear ciertas hipótesis elementales sobre la estructura de la matriz A:

Sea A una matriz de m x n. El rango por renglón de la matriz es igual al número máximo de renglones linealmente independientes de A. El rango por columna de A es el número máximo de columnas linealmente independientes de A. El rango por renglón de una matriz siempre es igual a su rango por columna, de modo que el rango de la matriz es igual al número máximo de renglones linealmente independientes de A.

Considere el sistema $Ax = b$ y la matriz aumentada (A, b) con m renglones y n+1 columnas:

1.- Si el rango de (A, b) es mayor que el rango de A, entonces b no se puede representar como una combinación lineal de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y por tanto el sistema **Ax = b** no tiene solución.

2.- Si el rango (A) = rango (A, b) = K. Quizá después de reordenar los renglones de (A, b) sea posible escribir

$$(A, b) = \begin{matrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{matrix}$$

En donde A_1 es k x n, b_1 es un K-vector, A_2 es una matriz de (m-k) x n, b_2 es un (m-k)-vector y rango (A_1) = rango (A_1, b_1) = k.

Si un vector x satisface $A_1x = b_1$, automáticamente satisface $A_2x = b_2$. Por tanto es posible eliminar las restricciones redundantes o dependientes $A_2x = b_2$ y considerar solo las restricciones independientes $A_1x = b_1$. Puesto que rango (A_1)= k, es posible elegir k columnas linealmente independientes de A_1. Tal vez luego de reordenar las columnas de A_1 sea posible escribir $A_1 = (B, N)$, en donde B es una matriz no singular de k x k de k x k, y N es una matriz de k x (n-k). Observe que tal matriz B existe, ya que el rango de A_1 es k. Aquí B se denomina matriz básica (pues las columnas de B forman una base de E^k), y N se denomina matriz no básica. De manera consistente, x se descompone en x_B y x_N, en donde x_B consta de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y por consiguiente x_N consta de $x_k + 1, \ldots, x_n$. Entonces, la ecuación $A_1x = b_1$ significa que (B, N) $x_B = b_1$.

Es decir, $Bx_B + Nx_n = b_1$. Como B tiene inversa, entonces x_B se puede resolver en términos de x_N, premultiplicando por B^{-1} para obtener:

$X_B = B^{-1} b_1 - B^{-1} Nx_N$

3.- En el siguiente caso K = n, la matriz N es vacía y se tiene una solución única para el sistema $A_1x = b_1$, la cual es: $x_B = B^{-1} b_1 = A_1^{-1}b_1$. Por otra parte, si n > k, entonces asignando valores arbitrarios al vector $\mathbf{x}_N$ es posible resolver en forma única para $\mathbf{x}_B$, mediante la ecuación $\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_1 - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$.

De esta manera se obtiene una solución: $\begin{vmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{vmatrix}$

Para el sistema $A_1x = b_1$. En este caso existe un numero infinito de soluciones del sistema $A_1x = b_1$, y por tanto del sistema Ax = b.

Para que Ax = b tenga solución, en primer lugar, suele suponerse que n>m, es decir, que el número de variables x_i es superior al número de restricciones de igualdad. Segundo, las filas de A deben ser linealmente independientes, lo que corresponde a la independencia lineal de las m ecuaciones. Una dependencia lineal entre filas de A daría lugar a restricciones contradictorias y, por tanto y no daría ninguna solución.

Consecuentemente, si la matriz A de m x n tiene m < n, y las m filas de A son linealmente independientes, el sistema **Ax = b** siempre tendrá solución y, siempre tendrá como mínimo una solución básica.

Si una o más variables básicas de una solución básica es igual a cero, se dice que esa solución es una solución básica degenerada.

Cuando se toma en cuenta la restricción de positividad en las variables se aplica la siguiente definición: Un vector x que satisfaga **Ax = b** y $x \geq 0$, se dice que es factible para estas restricciones.

Una solución factible para dichas restricciones, que también sea básica, se denomina solución factible básica, si esta solución es, además, una solución básica degenerada, se denomina solución factible básica degenerada.

La solución básica factible se define de la siguiente forma:

Considere el sistema **Ax** = **b** y **x** ≥ **0**, en donde **A** es una matriz m x n y **b** es un vector m. Se supone que el rango de (A, b) = rango (**A**, **b**) = rango (**A**) = m. Después de un posible reordenamiento de las columnas de **A**, sea **A** = [**B, N**], en donde **B** es una matriz invertible de m x m y **N** es una matriz de m x (n-m).

La solución **x** = $\begin{vmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{vmatrix}$

De las ecuaciones **Ax = b,** en donde $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\mathbf{x}_N = 0$, se denomina solución básica del sistema. **B** se denomina matriz básica (o simplemente, la base y **N** se denomina matriz no básica. Las componentes de $\mathbf{x}_B$ se denominan variables básicas (o variables dependientes), y las componentes de $\mathbf{x}_N$ se llaman variables no básicas (o variables independientes). Si $\mathbf{x}_B > 0$, entonces **x se denomina solución básica factible no degenerada, y si por lo menos una componente de** $\mathbf{x}_B = 0$, entonces **x se denomina solución básica factible degenerada.**

El teorema fundamental de la programación lineal establece que:

Dado un programa lineal de la forma estándar

Minimizar $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeto a $\mathbf{Ax = b}$ y $\mathbf{x \geq 0}$

Donde A es una matriz de m x n de rango m.

1)Si hay una solución factible, hay una solución factible básica;

2)Si hay una solución factible optimal, hay una solución factible básica optimal.

El principal método para resolver problemas de programación lineal es el método simplex, el cual se resume en un problema de minimización, como sigue.

Minimizar cx

Sujeto a Ax = b

$X \geq 0$

En donde A es una matriz m x n con rango m.

PASO 1. Seleccionar una solución básica factible inicial con base B.

PASO 2. Resolver el sistema $Bx_B = b$ (con solución única $x_B = B^{-1} b = b'$). Sean $x_B = b'$, $x_N = 0$ y $z = c_Bx_B$.

PASO 3. Resolver el sistema $wB = c_B$ (con solución única $W = c_B B^{-1}$). (El vector w se denomina vector de multiplicadores simples porque sus componentes son los multiplicadores de los renglones de A que se suma a la función objetivo a fin de llegar a la forma canónica.) Para todas las variables no básicas, calcular z_j-c_j = $wa_j - c_j$ (esto se denomina operación de apreciación). Sea $z_k - c_k$ = Máximo z_j-c_j., donde j Є R y R es el conjunto actual de índices asociados con las variables no básicas. Si $z_k - c_k \leq 0$, entonces el proceso se detiene con la solución básica factible presente como una solución optima. En caso contrario se continua con el siguiente paso con x_k como variable de entrada.

PASO 4. Resolver el sistema $By_k = a_k$ (con solución única $y_k = B^{-1} a_k$). Si $y_k \leq 0$, entonces el proceso se detiene con la conclusión de que la solución optima es no acotada a lo largo del rayo. Si y_k no es menor o igual a cero, se continúa con el siguiente paso:

PASO 5. Ahora, x_k entra en la base. El índice r de la variable de bloqueo x_{Br}, que sale de la base, se determina mediante el criterio de la razón mínima:

b'_r/y_{rk} = Mínimo $(1 \leq i \leq m)$ $\{b'_i/y_{ik}: y_{ik} > 0\}$

Se actualiza la base B, en donde a_k reemplaza a a_{Br}, se actualiza el conjunto R de índices, y se repite el paso uno.

El software TORA resuelve temas de programación lineal basados en un modelo matemático, sin embargo, la modelación de un problema es el paso mas importante para su solución.

La modelación de programación lineal comienza por definir las variables de decisión, que representan las variables sobre las que el decisor tiene control y que se suponen continuas. Se representan algebraicamente en la forma x_1, x_2, ... o bien con nombres específicos que faciliten su identificación, las variables de decisión representan productos o bienes a producir, almacenar o vender, disponibilidad o adquisición de materias primas, etc.

El siguiente paso será el reconocimiento de las restricciones y su construcción. Las restricciones representan limitaciones o requisitos y definirán las decisiones admisibles es decir, la región factible del problema. Podrán ser de la forma de desigualdades y/o igualdades, según representen el deseo de no exceder cierto valor especifico (≤), no descender por debajo de tal valor (≥) o ser igual a el (=).

Finalmente se construye la función objetivo, que representa alguna cantidad que se desea maximizar, por ejemplo, beneficio, renta, eficacia o producción; o bien minimizar el costo, tiempo o inventario.

BIBLIOGRAFÍA

- Investigación de Operaciones

  Hamdy A. Taha

  Editorial Alfaomega

  Quinta edición, México, 1995

- Tora, Optimization System,

  Hamdy A. Taha

  Version 1.044, oct 1992.copyright © 1989-92.

- Programación lineal y no lineal,

  David E. Luenberger

  Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.

  Segunda edición, México,1989.

- Programación lineal y flujo en redes

  Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali

  Editorial Limusa Noriega editores.

  Segunda edición, México 1998,

- Programación lineal y aplicaciones

Sixto Rios Insua, David Rios Insua, Alfonso Mateos Caballero, Jacinto Martín Jiménez

Editorial Alfaomega

Primera edición, México,1998

- Algoritmos computacionales, introducción al análisis y diseño

  Sara Baase, Allen Van Gelder

  Pearson educación

  Tercera edición, México, 2002

- Matemáticas discretas

  Johnsonbaugh Richard

  Editorial Prentice Hall.

  Cuarta edición, México,1997

- Métodos numéricos

  Francis Scheid, Rosa Elena Di Constanzo

  Editorial Mc Graw Hill.

  Segunda edición, México, 1991

- Introducción al álgebra lineal

  Howard Antón

  Editorial Limusa, Grupo Noriega editores.

  Segunda edición, México,1998

- Métodos de optimización, programación lineal y gráficas
  Francisco J. Jauffred M
  Editorial Representaciones y servicios de ingeniería, S. A.
  Tercera edición, 1986, México

- Administración de operaciones
  Roger G. Schroeder
  Editorial Mc Graw Hill.
  Tercera edición, México,1992