



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Dinámica de Endomorfismos del Círculo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

LETICIA MONTSERRAT VARGAS ROCHA



DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ANA MARGARITA GUZMÁN GÓMEZ

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Dinámica de Endomorfismos del Círculo

realizado por **Vargas Rocha Leticia Montserrat** con número de cuenta **4-0003000-1** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Jefferson Edwin King Dávalos

Propietario Dr. Héctor Méndez Lango

Propietario Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez
Tutora

Suplente Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Suplente Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU ”

Ciudad Universitaria, D. F., a 29 de agosto de 2008

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

A mis padres, Leticia y Martín

A mi mamá, Carmen

A mi familia, mis hermanas, mis tías y mis primos

A mis hermanos espirituales

A todos aquellos que me apoyaron de alguna manera, aún si saberlo

Dinámica de los Endomorfismos del Círculo

Leticia Montserrat Vargas Rocha

Índice general

Introducción	5
Capítulo 1. Dinámica de los homeomorfismos del círculo	7
1. Sistemas dinámicos discretos	7
2. El círculo y los homeomorfismos que preservan la orientación	9
3. Rotaciones	9
4. Levantamientos	11
5. El número de rotación y la dinámica de un homeomorfismo	15
Capítulo 2. Un ejemplo particular de endomorfismo	25
1. El ejemplo	25
2. Caracterización de órbitas periódicas	28
3. Órbitas no periódicas	33
Capítulo 3. Endomorfismos del círculo	43
1. Conceptos básicos y resultados generales	43
2. Un tipo particular de endomorfismos	52
Bibliografía	67

Introducción

La idea de realizar este trabajo surgió a partir de un seminario de matemáticas aplicadas que trataba sobre el estudio de la dinámica de los homeomorfismos del círculo y su aplicación a modelos en biología, como la neurona mecánica y ritmos cardiacos. El estudio de la dinámica de rotaciones en el círculo surgió como consecuencia del estudio de la dinámica de un flujo en el toro (invariante bajo el flujo), iniciada por Poincaré. Posteriormente Newhouse, Palis y Takens [**Ne-Pa-Ta**] hicieron una generalización de esta teoría a funciones no inyectivas.

El objetivo de este trabajo es estudiar la dinámica de los endomorfismos del círculo. En el primer capítulo se exponen los resultados más importantes respecto a la dinámica de los homeomorfismos que preservan la orientación. El ejemplo más sencillo de un homeomorfismo de este tipo, es una rotación de ángulo α y su dinámica depende de si α es un número racional o irracional. Una herramienta importante para estudiar la dinámica de las funciones del círculo es la de usar funciones en los reales que reflejen las propiedades de esta dinámica, estas funciones se llaman levantamientos. A partir de los levantamientos se define el número rotación, el cual da la información suficiente para conocer la dinámica de un homeomorfismo, es decir qué tipo de órbitas se obtienen al iterar la función y cuál es su comportamiento.

En el segundo capítulo construimos un ejemplo de un endomorfismo. A través de este ejemplo mostramos que la dinámica de los endomorfismos es más complicada que la de los homeomorfismos, pues si tomamos distintos puntos iniciales, el número de rotación de cada uno de éstos bajo la función, puede ser distinto. Sin embargo, en este ejemplo también se muestra un conjunto invariante bajo el endomorfismo que se considera (es decir que su imagen bajo la función está en el mismo conjunto), y además en este conjunto hay puntos con número de rotación racional y también hay puntos con número de rotación irracional, aunque la órbita correspondiente a estos puntos puede ser

completamente diferente a la órbita de un homeomorfismo con el mismo número de rotación. Es decir que el número de rotación, en el caso de los endomorfismos, no da mucha información sobre su dinámica.

El tercer capítulo incluye conceptos generales sobre endomorfismos, como el conjunto de rotación de un endomorfismo del círculo como generalización del concepto de número de rotación para homeomorfismos del círculo. Demostraremos que este conjunto es un intervalo cerrado y acotado para un tipo particular de endomorfismos del círculo y daremos la construcción de una familia de funciones no decrecientes, que tienen una dinámica similar a la de un homeomorfismo (en el sentido de que su número de rotación no depende de la condición inicial), cuyo número de rotación determina el intervalo de rotación de las funciones que consideraremos.

Dinámica de los homeomorfismos del círculo

En este capítulo daremos algunas definiciones generales de sistemas dinámicos discretos, del círculo y de homeomorfismos que preservan la orientación. Daremos algunos ejemplos de los homeomorfismos con la dinámica más sencilla, las rotaciones, y una discusión sobre esta dinámica. Definiremos el concepto de levantamiento (no sólo para homeomorfismos, o endomorfismos que preserven la orientación, sino para endomorfismos en general, pues será utilizado más adelante en este trabajo), definiremos algunos conceptos relacionados con levantamientos y daremos algunas de sus propiedades. Por último daremos el concepto de número de rotación, hablaremos de su relación con la dinámica de un homeomorfismo y daremos también algunas de sus propiedades. En este capítulo no haremos demostraciones de las propiedades o de los teoremas enunciados, ya que en este trabajo nuestro interés principal no es la dinámica de los homeomorfismos sino la de los endomorfismos del círculo. Algunos de estos resultados están demostrados más generalmente para endomorfismos no decrecientes en el capítulo 3.

1. Sistemas dinámicos discretos

DEFINICIÓN 1.1. Sea X un espacio métrico. Para una función $f : X \rightarrow X$ y un punto x , la sucesión

$$O(x, f) = \{x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots\}$$

se llama la *órbita* de x bajo f .

$f^n(z) = f \circ f \circ \dots \circ f$, f compuesta consigo misma n veces, es la n -ésima iteración de f , es decir, la órbita de f es la sucesión formada por las iteraciones de la función aplicadas a x (en este sentido, $f^0(x) = x$, es el punto inicial de la órbita).

Dada una función f y un valor inicial x , la dinámica de una función f se refiere a cómo es el comportamiento de la sucesión $O(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$. Este proceso de iteración de una función

es un *sistema dinámico discreto*.

Por ejemplo si $f(x) = \text{sen } x$ y tomamos como punto inicial a $x_0 = \frac{\pi}{2}$, la órbita de x_0 es

$$O(x_0, f) = \left\{ \frac{\pi}{2}, 1, 0.0174524\dots, 0.0003046\dots, 0.00000053\dots, \dots \right\}$$

Se nota que los puntos de esta órbita van tendiendo a 0 (aunque lentamente). Ahora, si tomamos la función $g(x) = -(x-2)^2 + 4$, entonces

la órbita de $x_0 = -\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + 2$ es

$$O(x, f) = \{x_0, g(x_0) = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2, g^2(x_0) = -\sqrt{3} + 2, g^3(x_0) = 1, g^4(x_0) = 3, g^5(x_0) = 3, \dots, g^{50}(x_0) = 3\dots\}$$

Después de algunas iteraciones, esta órbita se detiene en 3.

Estos dos ejemplos nos muestran que hay diferentes tipos de órbitas, el primer ejemplo muestra una órbita que se aproxima a un punto y el segundo, una órbita que llega a un punto y no "sale" de él. En general, la dinámica de una función puede tener distintos comportamientos. La siguiente definición nos dará dos de éstos.

DEFINICIÓN 1.2. Un *punto fijo* es un punto tal que $f(x) = x$. El conjunto de puntos fijos se denota por $Fij(f)$. Un *punto periódico* es un punto x tal que $f^n(x) = x$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, es decir es un punto en $Fij(f^n)$. La n más pequeña de tales, es el *periodo* de x . El conjunto de puntos periódicos se denota por $Per(f)$.

DEFINICIÓN 1.3. Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Un punto y está en el conjunto *omega-límite* de un punto x en X bajo la función f , denotado por $\omega(x, f)$, si existe una subsucesión de la órbita de x bajo f que converge a y . Es decir, existe $\{n_k\}$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ tal que $y = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x)$.

Enseguida daremos un ejemplo de una función que tiene puntos con órbitas como las descritas en la definición anterior. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue $f(x) = x^2 - 1$. f tiene dos puntos fijos $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ pues $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$. f tiene puntos de periodo 2, el 0 y el -1 , pues $f^2(0) = 0$ y $f^2(-1) = -1$. Notemos que la órbita de 0 y de -1 , como conjunto, bajo f es la misma, $O(0, f) = O(-1, f) = \{0, -1\}$.

2. El círculo y los homeomorfismos que preservan la orientación

El círculo unitario $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ en el plano puede describirse como el conjunto de números complejos con módulo 1, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ una función continua e invertible tal que f^{-1} también es continua, entonces f es un *homeomorfismo* del círculo.

Dos puntos p, q distintos en S^1 determinan dos arcos del círculo. Diremos que el arco (p, q) está orientado positivamente si se obtiene al recorrer el círculo en el sentido contrario al de las manecillas del reloj partiendo de p y finalizando en q .

DEFINICIÓN 1.5. Decimos que un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ *preserva la orientación* si la imagen de cada arco (p, q) orientado positivamente, es el arco orientado positivamente $(f(p), f(q))$.

Por ejemplo, consideremos la función $r : S^1 \rightarrow S^1$, $r(z) = e^{\frac{2}{3}\pi i}z$. La imagen bajo r de cada punto s del círculo es un punto $r(s)$ sobre el círculo tal que el ángulo entre s y $r(s)$ es $\frac{1}{3}2\pi$. Consideremos $p, q \in S^1$, $r(p) = e^{\frac{2}{3}\pi i}p$ y $r(q) = e^{\frac{2}{3}\pi i}q$. Es claro que si (p, q) es un intervalo orientado positivamente, también lo es $r((p, q)) = (r(p), r(q))$. Por lo tanto r preserva la orientación.

3. Rotaciones

DEFINICIÓN 1.6. Sea $r_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $r_\alpha(z) = az$, donde $a = e^{2\pi i\alpha}$, r_α es una rotación de ángulo $2\pi\alpha$ en el círculo.

Claramente una rotación es un homeomorfismo de S^1 que preserva la orientación.

La n -ésima iteración de una rotación es $r_\alpha^n(z) = a^n z$. Veamos cómo es su dinámica. Para esto daremos primero dos ejemplos, la rotación con $\alpha = \frac{1}{5}$ y con $\alpha = \frac{2}{5}$.

Consideremos primero la rotación $r_{\frac{1}{5}}(z) = e^{\frac{2}{5}\pi i}z$. Entonces la órbita de z bajo $r_{\frac{1}{5}}$ es $O(r_{\frac{1}{5}}(z)) = \{z, e^{\frac{2}{5}\pi i}z, e^{\frac{4}{5}\pi i}z, e^{\frac{6}{5}\pi i}z, e^{\frac{8}{5}\pi i}z\}$, pues $e^{\frac{10}{5}\pi i}z = e^{2\pi i}z$. En la figura se muestra esta órbita para algún punto z en S^1 .

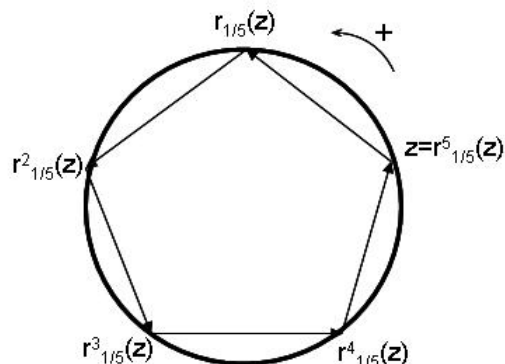


FIGURA 1. Órbita de z bajo $r_{\frac{1}{5}}$

Es claro que todas las órbitas de $r_{\frac{1}{5}}$ son periódicas de periodo 5.

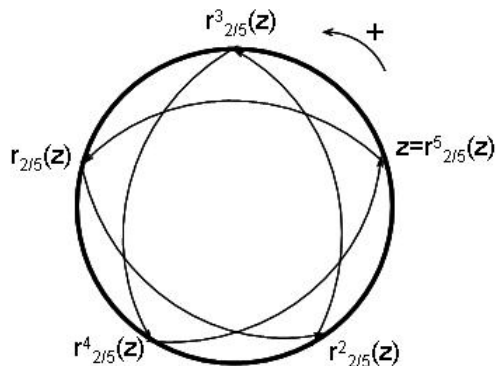
Notemos que la órbita de z , recorrida en el sentido positivo, da una vuelta al círculo para volver al punto de partida por primera vez.

Consideremos ahora la rotación $r_{\frac{2}{5}} = e^{\frac{4}{5}\pi i}z$. La órbita de z bajo $r_{\frac{2}{5}}$ es $O(r_{\frac{2}{5}}(z)) = z, e^{\frac{4}{5}\pi i}z, e^{\frac{8}{5}\pi i}z, e^{\frac{16}{5}\pi i}z, e^{\frac{32}{5}\pi i}z$, que se muestra en la siguiente figura.

En este caso también pasa que la rotación es de periodo 5, pues $r_{\frac{2}{5}}^5(z) = z$. Si comparamos las figuras, vemos que los puntos de ambas órbitas son los mismos si tomamos el mismo punto inicial, sin embargo en el caso de la rotación de ángulo $\frac{2}{5}2\pi$, la órbita recorre al círculo dos veces para volver al punto de partida por primera vez.

De manera más precisa, si consideramos los intervalos en el círculo cuyos extremos son los puntos sucesivos de la órbita de z , la unión de estos intervalos cubren al círculo 2 veces.

Si m y n son primos relativos, una rotación de ángulo $\frac{m}{n}2\pi$ tiene periodo n , y m determina el número de veces que un punto recorre al círculo para regresar al punto de partida. Si consideramos el intervalo

FIGURA 2. Órbita de z bajo $r_{\frac{2}{5}}$

$I = (z, r_\alpha(z))$ en el círculo, entonces $\bigcup_{i=0}^{n-1} r_\alpha^i(I)$ cubre m veces al círculo.

En general, r_α tiene puntos periódicos si $r_\alpha^n(z) = a^n z = z$ para alguna $n \in \mathbb{N}$; por lo tanto $r_\alpha^n(z) = z$ si y sólo si $a^n = 1$, por lo que a es una raíz n -ésima de la unidad, es decir, $(e^{2\pi i \alpha})^n = 1$ y esto pasa si y sólo si $\alpha = \frac{m}{n}$ con m, n enteros.

TEOREMA 1.1. r_α tiene puntos periódicos si y sólo si α es racional.

De aquí que si α no es racional, $Per(r_\alpha) = \emptyset$. Además si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, el teorema de Jacobi dice que todos los puntos de S^1 tienen órbita densa.

Como habíamos dicho, las rotaciones son un caso particular de un homeomorfismo del círculo. Veamos qué podemos decir de los homeomorfismos del círculo de manera más general. Para esto vamos a definir un tipo de funciones que nos ayudarán a estudiar su dinámica.

4. Levantamientos

Mucha veces es más sencillo estudiar una función de los reales en los reales que del círculo en el círculo, siempre y cuando la primera refleje todas las propiedades de la segunda. Pensando al círculo unitario

en el plano complejo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, la función $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ con $\pi(x) = e^{2\pi ix}$ determina un sistema de coordenadas.

Observemos que $\pi(x) = \pi(y)$ si y sólo si $x - y$ es un entero, es decir que $\pi(x)$ y $\pi(y)$ difieren por un ángulo múltiplo de 2π , o sea por algún número de vueltas al círculo.

¿Qué debe cumplir una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para que su dinámica nos de toda la información sobre la dinámica de f en el círculo?

Tomemos $f : S^1 \rightarrow S^1$ continua. Sea p un punto del círculo y x una coordenada de p . Entonces F tiene que cumplir que $F(x)$ es una coordenada de $f(p)$ para cada punto del círculo, por lo que es necesario que $\pi \circ F = f \circ \pi$. Una función F tal, puede ser o no continua, pues π no es inyectiva. Este caso lo excluirémos con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.7. Sea f un endomorfismo de S^1 . $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de f si se cumplen

- i) $\pi \circ F = f \circ \pi$
- ii) F es continua

La primera propiedad simplemente dice que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbb{R} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathbf{S}^1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{S}^1
 \end{array}$$

FIGURA 3. $\pi \circ F = f \circ \pi$

Veamos un ejemplo de un levantamiento. Tomemos $z \in \mathbb{C}$, entonces podemos ver a z como $e^{2\pi ix}$ con $x \in \mathbb{R}$. Un levantamiento de una rotación de ángulo $2\pi\alpha$ sería $R_\alpha(x) = x + \alpha$, pues $r_\alpha(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+\alpha)}$. Pero éste no es el único, de hecho cualquier función $R_\alpha^*(x) = x + \alpha + m$, con $m \in \mathbb{Z}$ es también un levantamiento de r_α . La gráfica de R_α es una

recta paralela a la identidad desplazada α , o α más un entero, verticalmente.

TEOREMA 1.2. *Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ una función continua. Entonces existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f .*

De hecho, para un endomorfismo dado $f : S^1 \rightarrow S^1$, hay una infinidad de levantamientos y todos difieren por un entero.

PROPIEDAD 1.1. *Sea f un endomorfismo del círculo y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f . Entonces F^* es un levantamiento de f si y sólo si $F^*(x) = F(x) + m$ para algún entero m .*

Otro ejemplo de un levantamiento es el siguiente. Consideremos la función en el círculo $f(z) = z^2$, si $z = e^{2\pi i x}$, $f(z) = e^{2\pi i(x+x)}$. Podemos ver a f como una función que duplica el ángulo en el círculo. Entonces un levantamiento de f es $F(x) = 2x$, una recta de pendiente 2.

Aunque el levantamiento de f resulta ser creciente y f preserva la orientación, f no es un homeomorfismo.

Observemos también que todo levantamiento F de f debe cumplir que $F(0,1)$ tiene longitud 2, pues si $x \in [0,1)$, $f \circ \pi(x)$ cubre dos veces al círculo: Entonces para que F sea continua necesitamos que $F(1) - F(0) = 2$ pues además $f(e^{2\pi i}) = e^{2\pi i 0}$. Mientras que en el primer ejemplo para que R_α sea continua necesitamos que $R_\alpha(1) - R_\alpha(0) = 1$, pues $r_\alpha(e^{2\pi i}) = r_\alpha(e^{0i})$, es decir, $\pi(0) = \pi(1)$ y si $x \in [0,1)$, $r \circ \pi(x)$ cubre una vez al círculo.

Se puede ver que en general, como un levantamiento F de f es una función continua, existe un entero k_f tal que $F(1) - F(0) = k_f$, y éste entero no depende del levantamiento de f . En el círculo, esto se traduce en que $f \circ \pi(x)$ recorre al círculo k_f veces, para $x \in [0,1]$.¹

DEFINICIÓN 1.8. *Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ continua y F un levantamiento de f . El grado de f se define como la diferencia $F(1) - F(0)$.*

Observemos que si escogemos otro levantamiento de f , digamos F^* , $F(1) - F(0) = F^*(1) - F^*(0)$, es decir que el grado no depende del levantamiento. Notemos que la discusión que hicimos arriba, se aplica para cualquier intervalo de la forma $[x, x+1]$, por lo que se cumple

PROPIEDAD 1.2. *Si F es un levantamiento de un endomorfismo de grado k_f , entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, $F(x+1) = F(x) + k_f$.*

¹Más precisamente: $f \circ \pi|_{[0,1]}$ es homotópica a una curva que cubre al círculo k_f veces.

En este trabajo sólo analizaremos los endomorfismos de grado 1, es decir, sobre los que cumplen que $F(x+1) = F(x) + 1$. Si además f es un homeomorfismo que preserva la orientación, F es creciente. De hecho cumple:

PROPIEDAD 1.3. $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo que preserva la orientación si y sólo si F es creciente, continua y $F(x+1) = F(x) + 1$ para cualquier levantamiento F de f .

Veamos cómo es un levantamiento de f^n , pues para estudiar la dinámica de f , nos interesa ver cómo son sus iteraciones. Sabemos que el diagrama de la figura 3 conmuta, por lo que el siguiente diagrama también conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\
 \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
 S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \cdots & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1
 \end{array}$$

FIGURA 4. $\pi \circ F^n = f^n \circ \pi$

De este esquema tenemos que si F es un levantamiento de f , entonces $\pi \circ F^n = f^n \circ \pi$ y además si F es continua también lo es F^n .

PROPOSICIÓN 1.1. Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un endomorfismo y F es un levantamiento de f , entonces F^n es un levantamiento de f^n .

Es importante hacer notar que f y F , un levantamiento de f , están definidos en espacios distintos, por lo que esperamos que tengan dinámicas muy distintas, de hecho, si α es racional todos los puntos de S^1 bajo r_α son periódicos con el mismo periodo, pero ningún punto de \mathbb{R} es periódico bajo R_α (a menos que $\alpha = 0$). Sin embargo, estudiar el comportamiento de F es útil con respecto a estudiar la dinámica de f por lo que se enuncia la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.2. Sean $p \in S^1$ tal que $\pi(x) = p$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un levantamiento de f , un endomorfismo del círculo.

- i) $p \in S^1$ es punto fijo de f si y sólo si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x) = x + m$.

- ii) p es punto periódico de f de periodo n si y sólo si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F^n(x) = x + m$ y $F^i(x) \notin \mathbb{Z}$ si $i < n$.

5. El número de rotación y la dinámica de un homeomorfismo

Veamos ahora cómo es la dinámica de un homeomorfismo del círculo que preserve la orientación y que no sea una rotación.

Si un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ tiene puntos fijos, entonces F , algún levantamiento de f , interseca a una recta de pendiente uno y ordenada al origen entera en los puntos cuyas respectivas coordenadas son los puntos fijos de f . Siempre podemos escoger un levantamiento de f adecuado para que esta recta sea la identidad. Supongamos que f tiene exactamente n puntos fijos z_1, z_2, \dots, z_n , entonces F interseca a la identidad en los puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en el intervalo $[0, 1]$, donde $z_j = e^{2\pi i x_j}$ y $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Como F es creciente y continua, tenemos que $F[x_i, x_{i+1}] = [x_i, x_{i+1}]$, además F no tiene puntos fijos en ningún intervalo de la forma (x_i, x_{i+1}) , por lo que $F(x) > x$ para toda $x \in (x_i, x_{i+1})$ o $F(x) < x$ para toda $x \in (x_i, x_{i+1})$. Tomemos x_0 (que llamaremos condición inicial) en (x_i, x_{i+1}) , supongamos que $F(x) > x \forall x \in (x_i, x_{i+1})$ y vamos a ver cómo es su órbita. Para esto veamos la gráfica de F .

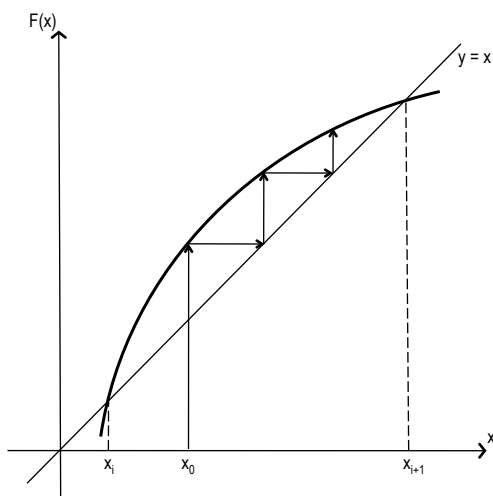


FIGURA 5. Método de la escalera

Podemos trazar una escalera entre la gráfica de F y la de la identidad, como en la figura. Es claro que $\{F^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión

creciente que tiende a x_{i+1} . Análogamente, si $F(x) < x$ en (x_i, x_{i+1}) entonces $\{F^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que tiende a x_i .

Lo anterior demuestra que si f es un homeomorfismo de S^1 en S^1 con n puntos fijos, entonces f tiene dos tipos de órbitas, las que constan de un solo punto (un punto fijo) y las que constan de sucesiones monótonas contenidas en los intervalos con puntos fijos como extremos y que tienden a éstos últimos. Es decir que el hecho de que f tenga n puntos fijos, determina el comportamiento de las demás órbitas.

Supongamos que F es derivable, al menos en una vecindad de x_i , con $i = 1, 2, \dots, n$. Si $F'(x_i) > 1$, $F'(x_{i+1}) < 1$ y $F'(x_{i+2}) > 1$ donde x_i , x_{i+1} y x_{i+2} son puntos fijos de F , entonces por la continuidad de F , $F(x) > x$ para toda $x \in (x_i, x_{i+1})$ y $F(x) < x$ para toda $x \in (x_{i+1}, x_{i+2})$. Si tomamos x_0 en (x_i, x_{i+1}) entonces los puntos de la órbita se alejan de x_i y se acercan a x_{i+1} , es decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_0) = x_{i+1}$. Análogamente, para $x_0 \in (x_{i+1}, x_{i+2})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_0) = x_{i+1}$. De ahí que x_i y x_{i+2} son puntos fijos repulsivos y x_{i+1} es un punto fijo atractor. (Ver la siguiente figura).

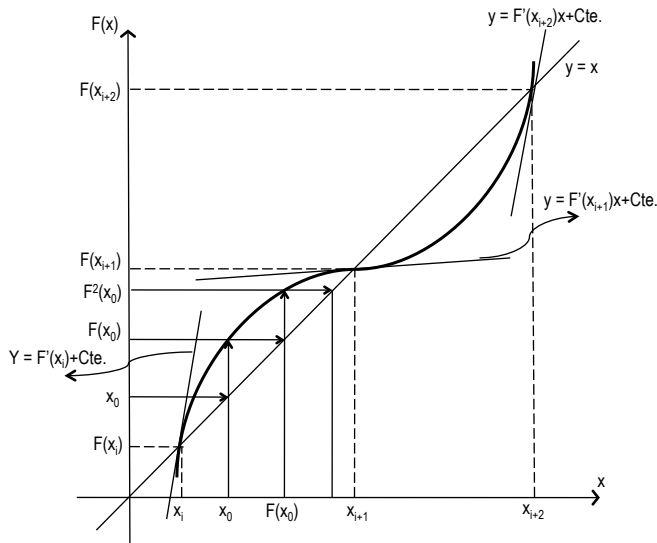


FIGURA 6. Puntos fijos de F atractores y repulsivos

Por lo tanto un criterio para determinar cuándo un punto fijo es atractor o repulsor es el siguiente. Sea F un levantamiento de $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo, tal que F es diferenciable en una vecindad de x , un punto fijo de F . Entonces x es atractor si $F'(x) < 1$ y es repulsor

si $F'(x) > 1$.

Veamos un ejemplo concreto. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = x + \varepsilon \operatorname{sen}(4\pi x)$$

donde $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\pi})$. F es un levantamiento de un homeomorfismo que preserva la orientación, pues es continua y monótona creciente. f tiene 4 puntos fijos en $[0, 1]$ de la forma $\frac{k}{4}$, con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$. Nos preguntamos cómo es la órbita de los puntos $x_k = \frac{k}{4}$. $F(\frac{k}{4}) = \frac{k}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que el conjunto de puntos fijos de f es $\operatorname{Fij}(f) = \{e^{\frac{2}{4}\pi i k} | k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Además, si k es par, se tiene que $F'(\frac{k}{4}) > 1$, es decir que $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_4 = 1$ son puntos fijos repulsivos. Y si k es impar, si $F'(\frac{k}{4}) < 1$, es decir que $x_1 = \frac{1}{4}$ y $x_3 = \frac{3}{4}$ son puntos fijos atractivos.

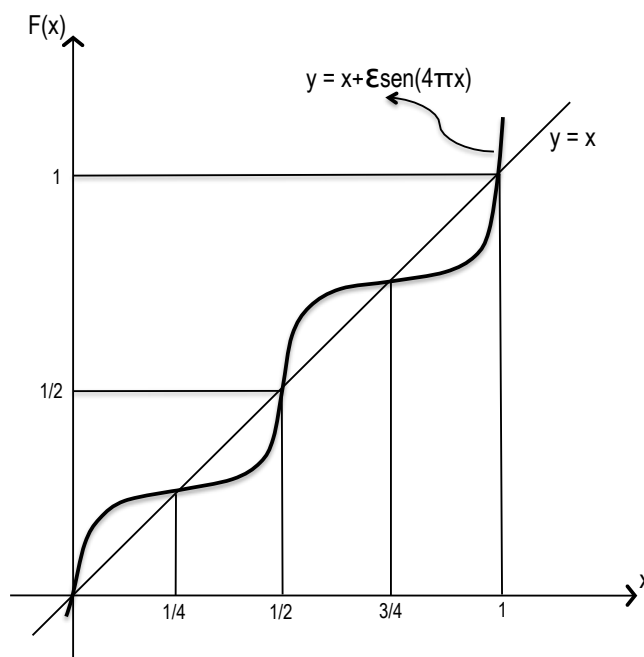


FIGURA 7. $F(x) = x + \varepsilon \operatorname{sen}(4\pi x)$

Daremos ahora un ejemplo de un levantamiento de un homeomorfismo $f_{\frac{1}{2}} : S^1 \rightarrow S^1$ con puntos periódicos, que es muy parecido al del ejemplo anterior, excepto que esta función está desplazada verticalmente por $\frac{1}{2}$, y por lo tanto no interseca nunca a la identidad (o a la identidad más un entero). Esto significa que $f_{\frac{1}{2}}$ no tiene puntos fijos.

Sea $F_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = x + \frac{1}{2} + \varepsilon \operatorname{sen}(4\pi x)$$

con $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\pi})$. La gráfica de esta función está representada en la siguiente figura.

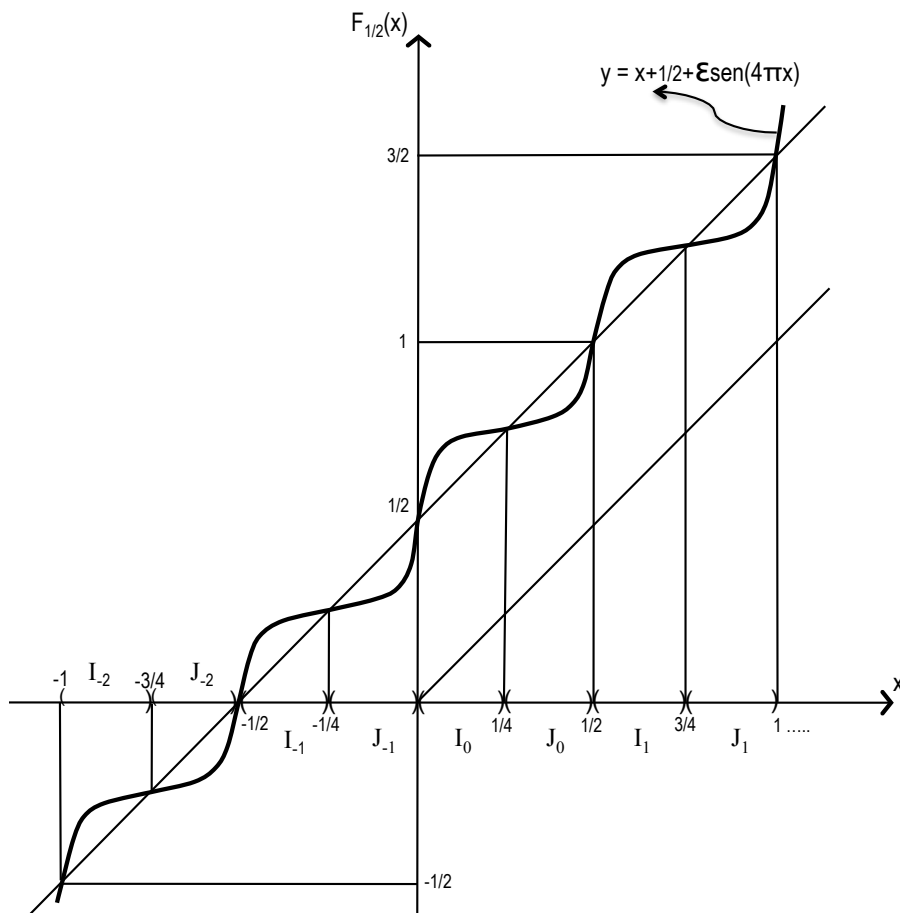


FIGURA 8. $F_{\frac{1}{2}}(x) = x + \frac{1}{2} + \varepsilon \operatorname{sen}(4\pi x)$

La órbita bajo $F_{\frac{1}{2}}$ de $\frac{1}{4}$ es $O(\frac{1}{4}, F_{\frac{1}{2}}) = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots\} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{3}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \dots\}$. En el círculo esto se traduce en que la órbita de $\pi(\frac{1}{4}) = \{\pi(\frac{1}{4}), \pi(\frac{3}{4})\}$. Y la órbita de $\pi(\frac{1}{2})$ es $\{\pi(\frac{1}{2}), \pi(1)\}$. Con esto hemos encontrado dos órbitas de periodo dos de $f_{\frac{1}{2}}$.

Para entender mejor la dinámica de esta función veremos cómo es $F_{\frac{1}{2}}^2$. Tenemos que $F_{\frac{1}{2}}^2(\frac{k}{4}) = \frac{k}{4} + 1$. Para $n \in \mathbb{Z}$, llamaremos I_n a

5. EL NÚMERO DE ROTACIÓN Y LA DINÁMICA DE UN HOMEOMORFISMO 9

cada intervalo de la forma $(\frac{2n}{4}, \frac{2n+1}{4})$ y J_n a los intervalos de la forma $(\frac{2n+1}{4}, \frac{2n+2}{4})$. Sean $I = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ y $J = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_n$. Notemos que $F_{\frac{1}{2}}(I_k) = I_{k+1}$ y $F_{\frac{1}{2}}^2(I_k) = I_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y lo mismo para cada J_k . Tenemos que $F_{\frac{1}{2}}(I) = I$ y $F_{\frac{1}{2}}(x) > x + \frac{1}{2}$ para toda $x \in I$, entonces $F_{\frac{1}{2}}^2(x) > F_{\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2} > x + 1$. Análogamente $F_{\frac{1}{2}}^2(J) = J$ y $F_{\frac{1}{2}}^2(x) < x + 1$ para toda $x \in J$. (Ver la siguiente figura de la gráfica de $F_{\frac{1}{2}}^2$).

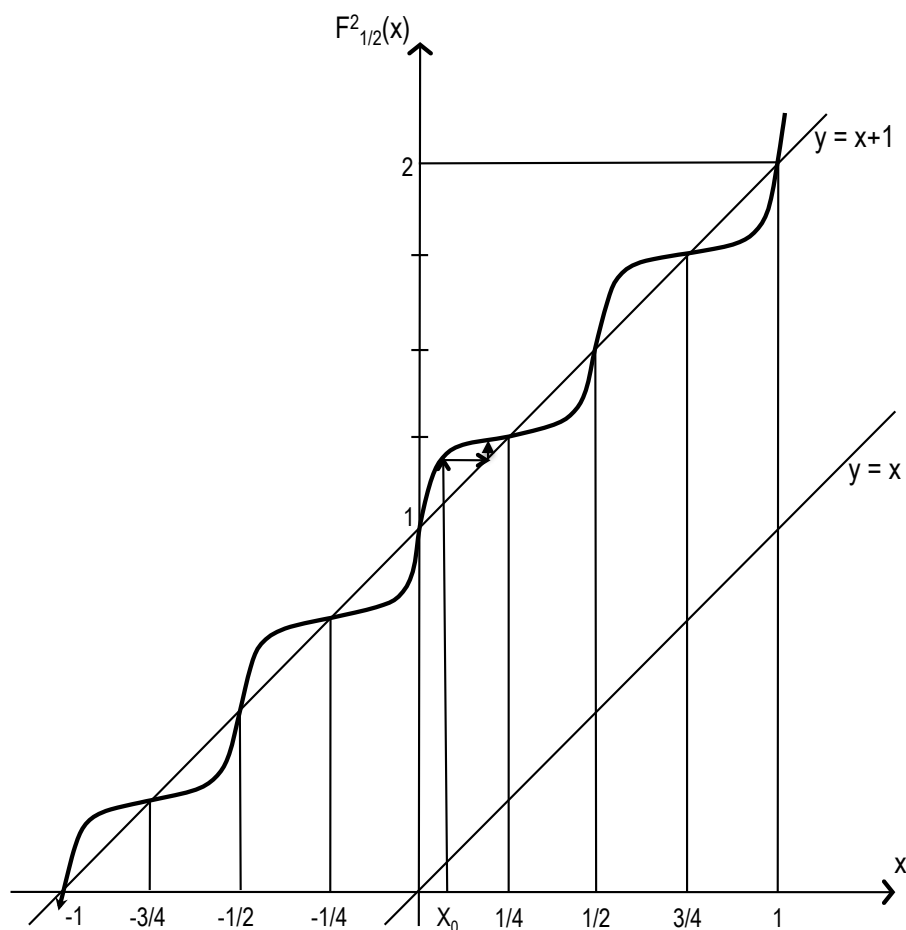


FIGURA 9. $F(x) = x + \frac{1}{2} + \varepsilon \text{sen}(4\pi x)$

La función $G(x) = F_{\frac{1}{2}}^2(x) - 1$ también es un levantamiento de $f_{\frac{1}{2}}^2$, y los puntos fijos $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ de G corresponden a puntos de periodo dos de $f_{\frac{1}{2}}$.

Usando los mismos argumentos de la página 8, podemos observar el comportamiento de las órbitas de $f_{\frac{1}{2}}^2$: son sucesiones monótonas que tienden a $\pi(\frac{1}{4})$ o a $\pi(\frac{3}{4})$.

Como $f_{\frac{1}{2}} \circ \pi((0, \frac{1}{4})) = \pi((\frac{1}{2}, \frac{3}{4}))$ y $f_{\frac{1}{2}} \circ \pi((\frac{1}{2}, \frac{3}{4})) = \pi((0, \frac{1}{4}))$, las órbitas de $f_{\frac{1}{2}}^2$ con condiciones iniciales en $\pi((0, \frac{1}{4}))$, oscilan en los intervalos $\pi((0, \frac{1}{4}))$ y $\pi((\frac{1}{2}, \frac{3}{4}))$ y su ω -límite es $\{\pi(\frac{1}{4}), \pi(\frac{3}{4})\}$, o sea la órbita de periodo dos de $\pi(\frac{1}{4})$. Análogamente se ve que las órbitas con condiciones iniciales en $\pi((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}))$ oscilan en los intervalos $\pi((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}))$ y $\pi((\frac{3}{4}, 1))$ y también su ω -límite es $\{\pi(\frac{1}{4}), \pi(\frac{3}{4})\}$.

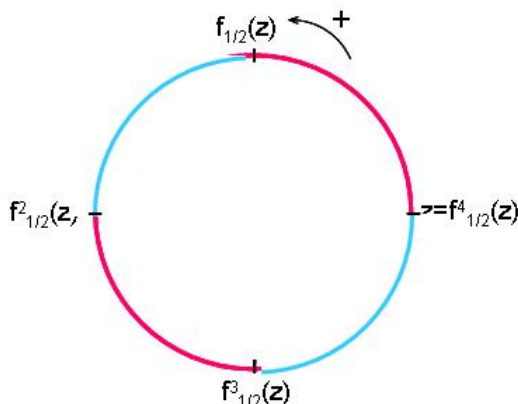


FIGURA 10. Órbitas de $(0, \frac{1}{4})$ y de $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ bajo $f \circ \pi$

En la figura se ve en color rosa la órbita de $\pi(0, \frac{1}{4})$ bajo f y en color azul, la órbita de $\pi(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ bajo f . Resumiendo, $f_{\frac{1}{2}}$ tiene dos órbitas periódicas de periodo dos, una de ellas es el ω -límite de todas las órbitas con excepción de la otra órbita periódica. Esto ocurre en general, como se enuncia en el siguiente

TEOREMA 1.3. *Sea f un homeomorfismo que preserva la orientación con una órbita periódica de periodo n , entonces*

- i) *todas sus órbitas son periódicas de periodo n .*
- ii) *El ω -lim de cualquier órbita es una órbita periódica.*²

²Una demostración del inciso (i) se puede ver en [Ka], pag. 127. El inciso (ii) se puede demostrar a partir de algunos resultados siguientes.

5. EL NÚMERO DE ROTACIÓN Y LA DINÁMICA DE UN HOMEOMORFISMO Q1

Este teorema garantiza que el hecho de que exista una órbita periódica obliga a que las otras órbitas, al menos asintóticamente, sean recorridas de una forma semejante a la que la órbita periódica lo es.

De hecho, queremos mostrar que una órbita periódica se relaciona de alguna manera con una rotación. Por ejemplo, $f_{\frac{1}{2}}$ estaría relacionado con la rotación $r_{\frac{1}{2}}$.

Con el ejemplo que se ilustra a continuación, se nota que $f_{\frac{2}{5}} : S^1 \rightarrow S^1$ está relacionada de alguna manera con la rotación de ángulo $\frac{2}{5}2\pi$.

Sea $F_{\frac{2}{5}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_{\frac{2}{5}}(x) = x + \frac{2}{5} + \varepsilon \text{sen}(10\pi x)$. Por las mismas razones que en el caso del ejemplo anterior, $F_{\frac{2}{5}}$ es un levantamiento de $f_{\frac{2}{5}}$. Sus puntos periódicos son $z_i = \pi(x_i)$, donde $x_i = \frac{i}{5}$ con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y son de periodo 5.

Las órbitas de $r_{\frac{2}{5}}$ y de $f_{\frac{2}{5}}$ con condiciones iniciales $\pi(\frac{i}{5})$, coinciden en el círculo y se verían así:

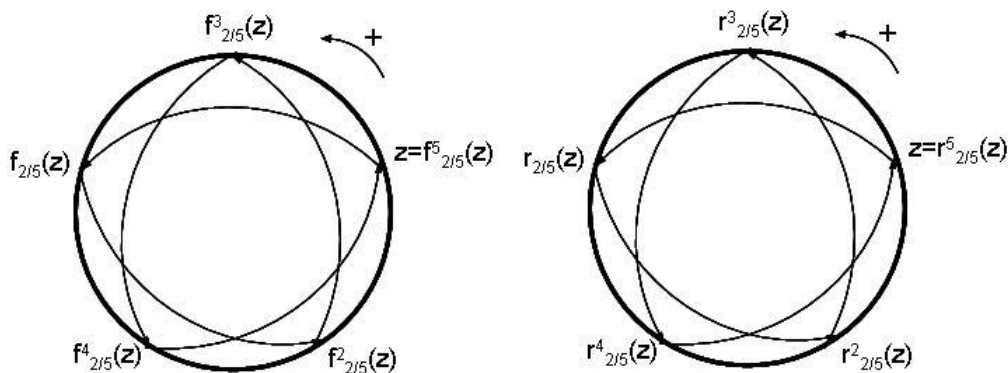


FIGURA 11. Órbita de z bajo $f_{\frac{2}{5}}$ y bajo $r_{\frac{2}{5}}$

Ahora construiremos un ejemplo de una función G con una dinámica esencialmente igual a la de $f_{\frac{2}{5}}$, pero deformando la gráfica de $F_{\frac{2}{5}}$ de tal manera que su órbita en el círculo, con condiciones iniciales $\pi(\frac{i}{5})$, no coincida con la de $F_{\frac{2}{5}}$.

Sea $H(x) = x - \frac{1}{2\pi} \text{sen}^2(x)$. $H'(x) > 0$ y $H(x) - x$ tiene periodo 1 por lo tanto H es un levantamiento de un homeomorfismo del círculo que

preserva la orientación. Entonces $G = H^{-1} \circ F_{\frac{2}{5}} \circ H$ es el levantamiento de un homeomorfismo g del círculo que preserva la orientación, cuya órbita en el círculo se ve como sigue:

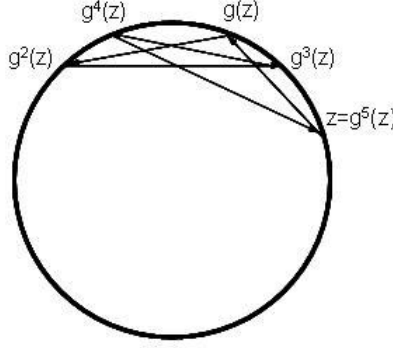


FIGURA 12. Órbita de z bajo g

PROPOSICIÓN 1.3. *Sea z_1 un punto periódico de f . Existe un único racional $\frac{p}{q}$ y una función continua e invertible $h : O(z_1, f) \rightarrow O(z_2, r_{\frac{p}{q}})$ que conserva la orientación tal que $h \circ f = r_{\frac{p}{q}} \circ h$*

En el caso de $f_{\frac{2}{5}}$, $h|_{O(z_i)}$ es la identidad, y en el caso de g , h es el homeomorfismo del círculo tal que H es su levantamiento y en ambos casos, $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$. En el caso de $f_{\frac{1}{2}}$, h también es la identidad y $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$. De manera intuitiva podemos decir que a los homeomorfismos $f_{\frac{1}{2}}$, $f_{\frac{1}{5}}$ y g , podemos asociarles un número que determina con qué rotación están relacionados. A este número lo llamaremos número de rotación.

Para determinar dicho número nos fijaremos en los ángulos entre cada iteración en la órbita de algún $p \in S^1$ y en su promedio. Si llamamos α_i al ángulo entre $f^{i-1}(p)$ y $f^i(p)$ con respecto al centro del círculo, entonces el promedio de estos ángulos es $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{n}$.

Ahora, si consideramos un levantamiento F de f adecuado, y x una coordenada de p , entonces el ángulo entre $f^{i-1}(p)$ y $f^i(p)$ es $2\pi(F^i(x) - F^{i-1}(x))$, por lo que el promedio de los ángulos de rotación de las primeras n iteraciones es

$$2\pi \sum_{i=1}^n \frac{F^i(x) - F^{i-1}(x)}{n} = \frac{2\pi}{n} (F^n(x) - x)$$

entonces el promedio de todos los ángulos de rotación es

$$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

En el caso de que f tenga una órbita periódica, intuitivamente es claro que este promedio está definido y no depende de una órbita particular. Pero esto ocurre en general.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea f un homeomorfismo que conserva la orientación y F un levantamiento de f , entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$ y éste no depende de x .*

DEFINICIÓN 1.9. Sea F un levantamiento de f un homeomorfismo que conserva la orientación y $x \in \mathbb{R}$. El número de rotación de F , denotado por $\rho(F)$ es

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

PROPOSICIÓN 1.5. *Si F_1 y F_2 son levantamientos de f , un homeomorfismo del círculo, entonces $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$.*

DEFINICIÓN 1.10. Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo. El número de rotación de f es el elemento de \mathbb{R}/\mathbb{Z} definido por $\rho(f) = \rho(F)(\text{mod } 1)$, donde F es un levantamiento de f .

TEOREMA 1.4. *Sea f un homeomorfismo que conserva la orientación, entonces $\rho(f)$ es racional si y sólo si f tiene alguna órbita periódica.*

Este teorema implica que si f es un homeomorfismo tal que $\rho(f) = 0$ entonces f tiene al menos un punto fijo.

Antes mencionamos que los homeomorfismos del círculo con número de rotación racional, tienen una dinámica similar a la de una rotación con ángulo un múltiplo racional de 2π . Esto se explica mejor con la siguiente:

DEFINICIÓN 1.11. Sea $h : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo que conserva la orientación. $f \sim g$ si y sólo si $f = h \circ g \circ h^{-1}$. En este caso, decimos que f y g son conjugadas y h es una conjugación entre f y g . Además \sim es una relación de equivalencia.

PROPOSICIÓN 1.6. *Si $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ son homeomorfismos que preservan la orientación tales que $f \sim g$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.*

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ entonces la rotación R_α tiene número de rotación irracional y no tiene ninguna órbita periódica. De manera intuitiva podemos pensar que un homeomorfismo del círculo sin órbitas periódicas tiene número de rotación irracional, pero ¿cómo son sus órbitas?

PROPOSICIÓN 1.7. *Consideremos r_α con $\alpha \notin \mathbb{Q}$ y f un homeomorfismo del círculo que conserva la orientación. Si $f = h \circ r_\alpha \circ h^{-1}$ (es decir, si $f \sim r_\alpha$), entonces todas las órbitas de f son densas.*

El siguiente teorema resume los resultados más importantes de este capítulo, es decir, la relación del número de rotación con la dinámica de un homeomorfismo del círculo que preserva la orientación. También enuncia un resultado (en el inciso c) que, aunque no se discutió en este capítulo, es importante mencionarlo.

TEOREMA 1.5. *Sea f un homeomorfismo del círculo que preserva la orientación y p, q enteros tales que $(p, q) = 1$ y $z_1, z_2 \in S^1$.*

- a) $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ si y sólo si f tiene órbitas periódicas.
- b) Además si $\rho(f) = \frac{p}{q}$ entonces se cumplen las siguientes tres propiedades:
 - i) Todas las órbitas periódicas tienen periodo q .
 - ii) Para cada órbita periódica de f , existe $h : O(z_1, f) \rightarrow O(z_2, r_{\frac{p}{q}})$ que conserva la orientación tal que $h \circ f = r_{\frac{p}{q}} \circ h$.
 - iii) El ω -límite de cualquier órbita periódica de f es una órbita periódica de f .
- c) Si $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ se cumple alguno de los dos siguientes casos:
 - i) Cada órbita de f es densa en el círculo, de hecho f es conjugada a r_α .
 - ii) Existe $\Omega \subset S^1$ perfecto y denso en ningún lado que es el ω -límite de cualquier órbita de f .³

Observación: Un conjunto perfecto y denso en ningún lado es un conjunto de Cantor, es decir, es un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor.

³Una demostración de varios incisos de este teorema se encuentra en [Ka], 97-128. También se encuentran varios ejemplos en [De].

Capítulo 2

Un ejemplo particular de endomorfismo

En el capítulo anterior describimos rápidamente la dinámica de los homeomorfismos de S^1 . Vimos que esta dinámica queda determinada por el número de rotación en el siguiente sentido:

- i) $\rho(f) = \frac{p}{q}$ para alguna $p \in \mathbb{Z}$, con $(p, q) = 1$ si y sólo si f tiene una órbita periódica de periodo q .
- ii) Si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, entonces el $\omega - \lim(z)$ de cualquier $z \in S^1$ es una órbita periódica de periodo q .
- iii) Si $\rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces el $\omega - \lim(z)$ es todo el círculo o un conjunto de Cantor.

En la siguiente sección analizaremos un endomorfismo y veremos que la relación entre su dinámica y la generalización del concepto de número de rotación no es tan determinante como en el caso de homeomorfismos.

1. El ejemplo

Consideremos la siguiente función: $F^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$F^*(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \in [0, \frac{2}{3}]; \\ -3x + 4, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $F(x) = F^*(x \pmod{1}) + [x]$ una extensión continua de $F^*(x)$, donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual a x . Como $F(x+1) = F(x)+1$, F es un levantamiento de una función $f : S^1 \rightarrow S^1$.

Podemos pensar en el círculo como $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Consideremos la recta real \mathbb{R} y definamos la relación de equivalencia \sim , donde $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$, es decir, definimos puntos equivalentes si difieren por un entero ($x = y \pmod{1}$). Definimos la *clase de equivalencia* de $x \in \mathbb{R}$ por $[x] := \{y \in \mathbb{R} | y \sim x\}$ y $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{[x] | x \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia es un espacio métrico. De esta manera, como conjunto de números, podemos identificar \mathbb{R}/\mathbb{Z} con $[0, 1)$.

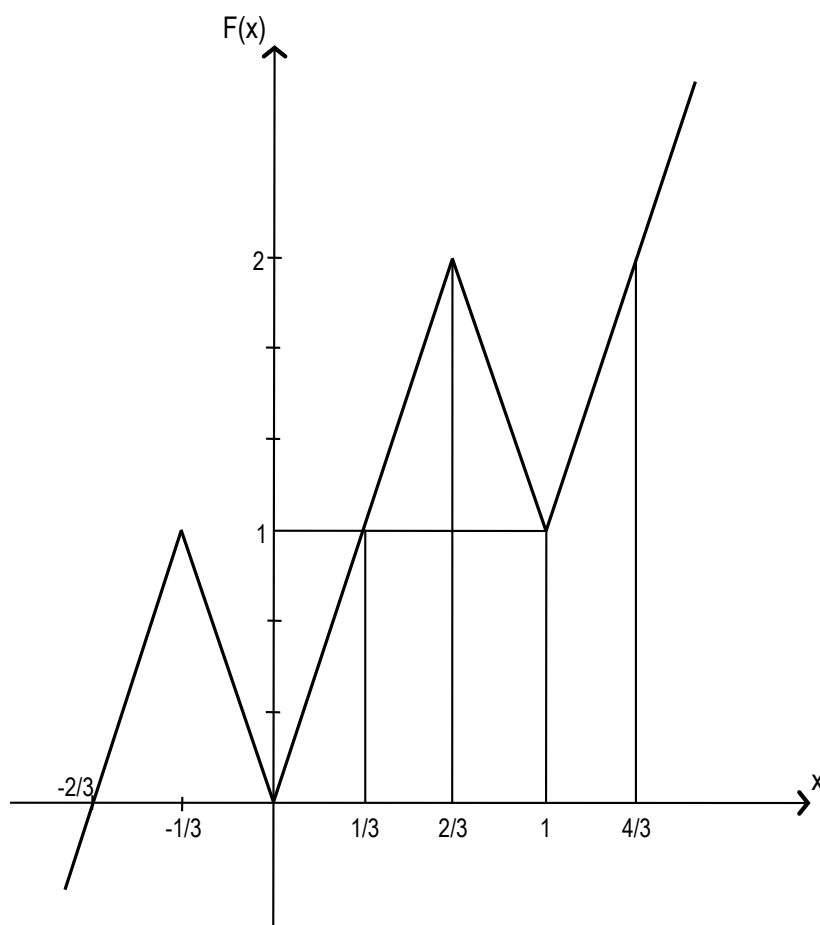


FIGURA 1. $F(x) = F^*(x \pmod{1}) + [x]$

Es más fácil analizar $F^n(x)$ describiendo los reales en $[0, 1]$ en base tres, es decir

$$(2.1) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

donde $a_i \in \{0, 1, 2\}$. Denotaremos por $x = 0.a_1a_2a_3a_4\dots$ a esta expansión, con $i \in \mathbb{N}$. Además denotaremos por

$$0.a_1a_2\dots\overline{a_k a_{k+1} \dots a_{k+p}} = 0.a_1a_2\dots a_k \dots a_{k+p} a_k \dots a_{k+p} \dots$$

En lo sucesivo siempre que nos referimos a x , vamos a considerar su expresión en base tres. Aquí es necesario observar que un punto puede tener dos representaciones en base tres distintas, pero los únicos son de

la forma

$$0.a_1\dots a_{k-1}1 = 0.a_1\dots a_{k-1}0\bar{2}.$$

Por ejemplo, $x = 0.0\bar{2} = 0.1$.

Sea $x \in [0, \frac{2}{3}]$. Aplicando F a esta condición inicial obtenemos $F(x) = a_1 + 0.a_2a_3\dots$. Si además $F(x)(\text{mod } 1) \in [0, \frac{2}{3}]$, $F^2(x) = a_1 + a_2 + 0.a_3a_4\dots$, etc. Como podemos ver, si $a_n \neq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la expresión de $F^n(x)$ es muy sencilla, pues si x tiene una expresión en base tres, donde todos sus dígitos son distintos de dos, la aplicación de F a x es equivalente a recorrer el punto a la derecha; así tenemos dos expresiones sencillas de la parte entera de $F^n(x)$, que denotaremos por $[F^n(x)]$; y de la parte "menor a uno" de $F^n(x)$, que denotaremos por x_n :

$$(2.2) \quad [F^n(x)] = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{y} \quad x_n = 0.a_{n+1}a_{n+2}\dots$$

Consideremos ahora un conjunto $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ cuyos puntos tienen órbitas que no intersecan $(\frac{2}{3}, 1)$.

Por la discusión anterior tenemos que $x \in \mathbf{K}$ si y sólo si x se puede expresar en un sistema terciario de la siguiente forma

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots \quad \text{con} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

A continuación estudiaremos las propiedades dinámicas de f restringiéndonos al conjunto \mathbf{K} .

Observación: Los elementos de \mathbb{R}/\mathbb{Z} son clases de equivalencia y siempre podemos tomar un representante de cada clase en el intervalo $[0, 1)$. Ya vimos que S^1 es isomorfo a \mathbb{R}/\mathbb{Z} , entonces para ahorrar notación usamos $f(x)$ con x como un representante en $[0, 1)$ del elemento correspondiente de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , y $F(x)$ con $x \in [0, 1)$ como subconjunto de \mathbb{R} .

PROPOSICIÓN 2.1. \mathbf{K} es un conjunto de Cantor invariante bajo f , es decir que $f(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$.

Demostración: Sea $x \in \mathbf{K}$, con $x = 0.a_1a_2\dots$ entonces $f(x) = 0.a_2a_3\dots \in \mathbf{K}$ pues $a_i \in \{0, 1\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ por lo tanto \mathbf{K} es invariante bajo f . Notemos que lo anterior implica que $f^k(x) \in \mathbf{K}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto \mathbf{K} es invariante bajo f^k . \square

Ahora veremos que \mathbf{K} es un conjunto de Cantor. Para esto recordaremos la construcción del conjunto ternario de Cantor \mathbf{C} , considerando que existe una representación de x en base 3 como en la expresión (1.1). Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el siguiente conjunto:

$$C_k := \{x \in [0, 1] \mid x = 0.a_1a_2\dots, \quad a_i \in \{0, 2\} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$$

En el caso de que x tenga dos expansiones terciarias basta que una de éstas cumpla que $a_i \in \{0, 2\}$. Por ejemplo $\frac{1}{3}$ está en C_1 , pues $\frac{1}{3} = 0.\bar{2}$.

En la figura se ilustran los conjuntos C_1 y C_2

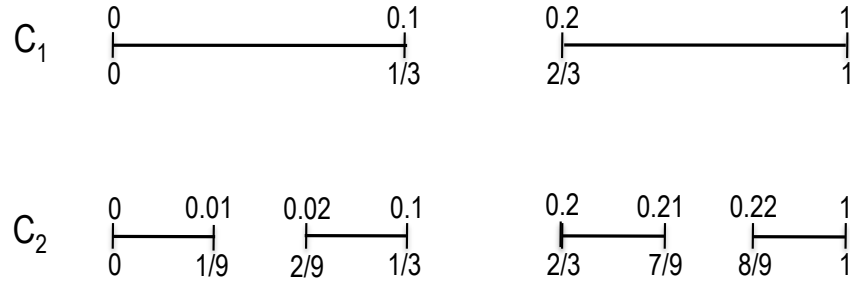


FIGURA 2. Conjuntos C_1 y C_2

Por definición, el conjunto ternario de Cantor en $[0, 1]$, \mathbf{C} es:

$$\mathbf{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \{x \in [0, 1] \mid x = 0.a_1a_2\dots, \quad a_i \in \{0, 2\} \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Nótese que \mathbf{C} es el conjunto de puntos que pueden representarse de la forma $x = 0.a_1a_2\dots$ con $a_i \in \{0, 2\} \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Ahora consideremos el conjunto que resulta de la contracción del conjunto ternario de Cantor al $[0, \frac{1}{2}]$, o sea, el conjunto formado por puntos de la forma $\frac{1}{2}c$, donde $c \in \mathbf{C}$. Estos puntos tienen la siguiente expresión: $0.b_1b_2\dots$, con $b_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, pues si c tiene como expansión terciaria $0.a_1a_2a_3\dots$, entonces la expansión terciaria de $\frac{1}{2}c$ es $0.b_1b_2b_3\dots$. Por lo tanto el conjunto \mathbf{K} es homeomorfo al conjunto \mathbf{C} , es decir, \mathbf{K} es un conjunto de Cantor.

2. Caracterización de órbitas periódicas

Ahora caracterizaremos los puntos periódicos bajo f . Decimos que x es un punto periódico de periodo q si $x_q = x$, siendo q el menor natural que lo cumple. Utilizando la expresión (1.1) tenemos que esto

equivale a que $0.a_{q+1}a_{q+2}\dots = 0.a_1a_2\dots$, es decir, $a_{q+j} = a_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$. De hecho $a_{kq+j} = a_j$ para toda k y $j \in \mathbb{N}$. Es decir que

$$0.\overline{a_1a_2\dots a_q} = 0.a_1a_2\dots a_qa_1a_2\dots a_q\dots$$

Con esto hemos dado la siguiente caracterización de los puntos periódicos.

PROPOSICIÓN 2.2. *$x \in \mathbf{K}$ es de periodo q si y sólo si $x = 0.\overline{a_1a_2\dots a_q}$, donde q es el menor natural que cumple esto.*

Nótese que en este caso hay órbitas de distintos periodos, por ejemplo $x_1 = 0.0\overline{1}$ y $x_2 = 0.00\overline{1}$ tienen periodo 2 y 3 respectivamente. De hecho es claro que

PROPOSICIÓN 2.3. *f tiene órbitas de todos los periodos.*

Observación: Este comportamiento no se da en homeomorfismos pues en éstos sólo coexisten órbitas de un solo periodo.

Ahora estudiaremos el número de rotación de f . Sea F un levantamiento de f . Definiremos provisionalmente el número de rotación de x por

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

si este límite existe

PROPOSICIÓN 2.4. *Si $x \in \mathbf{K}$, $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$*

Demostración: Por la expresión (1.1) tenemos que

$$\frac{F^n(x)}{n} = \frac{x_n + \sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Como $x_n \in [0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$, de donde se sigue el enunciado. \square

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $x \in \mathbf{K}$ es de periodo q entonces $\rho(x) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $k_n \in \mathbb{N}$ y $m_n \in \{0, \dots, q-1\}$ tales que $n = k_nq + m_n$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{k_nq} a_i + \sum_{i=k_nq+1}^{k_nq+m_n} a_i$$

como x es q -periódico, entonces $a_i = a_{q+i}$ por lo que

$$\sum_{i=1}^n a_i = k_n \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^{m_n} a_i$$

pero

$$\sum_{i=1}^{m_n} a_i \leq \sum_{i=1}^q a_i$$

de donde

$$k_n \sum_{i=1}^q a_i \leq \sum_{i=1}^n a_i < (k_n + 1) \sum_{i=1}^q a_i.$$

Así tenemos que

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{k_n q + m_n} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i$$

porque $\frac{k_n}{k_n q + m_n}$ tiende a $\frac{1}{q}$ cuando n tiende a infinito, pues $k_n \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$ y lo mismo pasa para $\frac{k_n + 1}{k_n q + m_n}$. \square

Notemos que la proposición (1.5) en particular muestra que si x es periódico, su número de rotación es racional (lo cual ocurre en cualquier homeomorfismo). Pero más que eso, cualquier número racional en $[0, 1]$ es un número de rotación de f (lo cual no ocurre para homeomorfismos).

PROPOSICIÓN 2.6. *Para toda $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ existe $x \in \mathbf{K}$ tal que x es periódica y $\rho(x) = r$.*

Demostración: Sea $r = \frac{p}{q}$ con $p \leq q$ y sea $x = 0.\overline{111\dots 10\dots 000}$, con p unos y $q - p$ ceros. Entonces x tiene periodo q y $\rho(x) = \frac{p}{q}$. \square

Analicemos con más detalle la proposición (1.5.) En los homeomorfismos hay una órbita de periodo q si y sólo si el número de rotación del homeomorfismo es $\frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$. Sin embargo $\sum_{i=1}^q a_i$ y q no necesariamente son primos relativos. Por lo que si x es periódico y $\rho(x) = \frac{r}{s}$ con $(r, s) = 1$ no necesariamente s es el periodo de x .

Veamos cuáles son las órbitas de periodo 3. Sea $x = 0.\overline{001}$, por la caracterización que dimos de los puntos periódicos, x es de periodo 3 y su órbita está formada por $f(x) = 0.\overline{010}$, $f^2(x) = 0.\overline{100}$ y $f^3(x) = x$, y por la proposición (1.5), $\rho(x) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i = \frac{1}{3}$. Ahora consideremos $x = 0.\overline{011}$, $O(x) = \{0.\overline{110}, 0.\overline{110}, 0.\overline{101}\}$. Evidentemente esta órbita también es de periodo 3 y $\rho(x) = \frac{2}{3}$. Notemos que las órbitas de estos dos puntos contienen a todos los puntos formados por tres cifras de ceros y unos, que no sean sólo ceros o sólo unos, por lo que son los únicos dos puntos de periodo en \mathbf{K} . En este caso el número de rotación

es $\rho(x) = \frac{r}{s}$ con s el periodo de x .

Las órbitas de periodo 4 son las de los puntos $x = 0.\overline{1000}$, $x = 0.\overline{1100}$ y $x = 0.\overline{1110}$. Las órbitas de cada uno de estos puntos contienen a todos los puntos posibles formados por cuatro cifras de ceros y unos, que no sean sólo ceros o sólo unos, por lo que éstos son los únicos puntos en \mathbf{K} con periodo 4. El primer punto tiene número de rotación $\frac{1}{4}$, el segundo $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y el último $\frac{3}{4}$. El segundo caso es un ejemplo de lo que mencionamos antes, tenemos un punto con número de rotación $\frac{1}{2}$ pero su periodo es $4 \neq 2$. En general tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 2.7. *Si $x \in \mathbf{K}$ es periódico y $\rho(x) = \frac{r}{s}$ con $(r, s) = 1$ entonces el periodo de x es múltiplo de s .*

Demostración: Sea $x \in \mathbf{K}$ q -periódico. Por la proposición (1.5) tenemos que $\rho(x) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i = \frac{r}{s}$. Como $(r, s) = 1$ lo anterior pasa si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha r = \sum_{i=1}^q a_i$ y $\alpha s = q$. Por lo tanto el periodo de x es múltiplo de s . \square

A continuación daremos la construcción de un ejemplo de una órbita de periodo $2k$ y número de rotación $\frac{1}{2}$.

Sea $x = 0.\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{2k}}$ con $k \in \mathbb{N}$ y

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, k\}; \\ 1 & \text{si } i \in \{k+1, k+2, \dots, 2k\} \end{cases}$$

Claramente, el periodo de x es $2k$ y su número de rotación es

$$\rho(x) = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{2k} a_i = \frac{1}{2k} k = \frac{1}{2},$$

pues

$$\sum_{i=1}^{2k} a_i = \sum_{i=k+1}^{2k} 1 = k.$$

Observemos que si q es el periodo de x , q es múltiplo de $\sum_{i=1}^q a_i$, es decir

$$q = \alpha \sum_{i=1}^q a_i,$$

en este caso con $\alpha = 2$. \square

Nótese que los puntos que cumplen con estas condiciones son una infinidad.

Esta construcción puede hacerse en general para obtener puntos con número de rotación $\frac{1}{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{N}$ y periodo q múltiplo de α y de hecho, para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ hay una infinidad de éstos. De ahí que podamos enunciar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.8. *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ y q múltiplo de α existe $x \in \mathbf{K}$ tal que x tiene periodo q y $\rho(x) = \frac{1}{\alpha}$.*

Demostración: Sea $x = 0.\overline{a_1 a_2 \dots a_{\alpha k}}$, con $k \in \mathbb{N}$ y

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, (\alpha - 1)k\}; \\ 1 & \text{si } i \in \{(\alpha - 1)k + 1, (\alpha - 1)k + 2, \dots, \alpha k\} \end{cases}$$

Claramente el periodo de x es αk y

$$\rho(x) = \frac{1}{\alpha k} \sum_{i=1}^{\alpha k} a_i = \frac{1}{\alpha k} k = \frac{1}{\alpha}.$$

Notemos que

$$q = \alpha \sum_{i=1}^q a_i,$$

entonces cualquier número que cumpla esta condición tendrá número de rotación $\frac{1}{\alpha}$. \square

También hay una infinidad de éstos.

PROPOSICIÓN 2.9. *Para cada racional $\frac{r}{s} < 1$ con $(r, s) = 1$ y cada múltiplo q de s , existe x q -periódico con $\rho(x) = \frac{r}{s}$.*

Demostración: Necesitamos construir $x = 0.\overline{a_1 a_2 \dots a_q}$ en \mathbf{K} que tenga una expansión terciaria tal que $\sum_{i=1}^q a_i = kr$ y $q = ks$ con $k \in \mathbb{N}$ y $(r, s) = 1$. Si $s > r$

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, (s - r)k\}; \\ 1 & \text{si } i \in \{(s - r)k + 1, (s - r)k + 2, \dots, sk\} \end{cases}$$

Entonces el periodo de x es ks y

$$\rho(x) = \frac{1}{ks} \sum_{i=1}^{sk} a_i = \frac{kr}{ks} = \frac{r}{s}.$$

\square

Notemos que de éstos también hay una infinidad.

3. Órbitas no periódicas

Para facilitar las demostraciones contenidas en esta sección, nos conviene definir lo siguiente:

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i,$$

donde a_i es la i -ésima cifra en la expansión en base tres de un punto $x \in \mathbf{K}$. Denotaremos por 0_n a una cadena de n ceros y por 1_n a una cadena de n unos. De esta manera podemos escribir la expansión en base tres de x como $x = .0_{n_1}1_{n_2}0_{n_3}\dots$

LEMA 2.1. *Sea $x = .0_{n_1}1_{n_2}0_{n_3}\dots \in \mathbf{K}$. $\rho(x)$ existe si y sólo si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{s_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{s_{2k+1}},$$

con $s_m = \sum_{i=1}^m a_i$.

Demostración: Sea $x = .0_{n_1}1_{n_2}0_{n_3}\dots$. Sea $s_k = \sum_{i=1}^k n_i$. Si $\rho(x)$ existe entonces es inmediato, pues el límite de cualquier subsucesión de $\{P_n\}$ es $\rho(x)$, en particular $(P_{s_{2k}})$ y $(P_{s_{2k+1}})$. \square

Ahora supongamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{s_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{s_{2k+1}}$. (Ver figura).

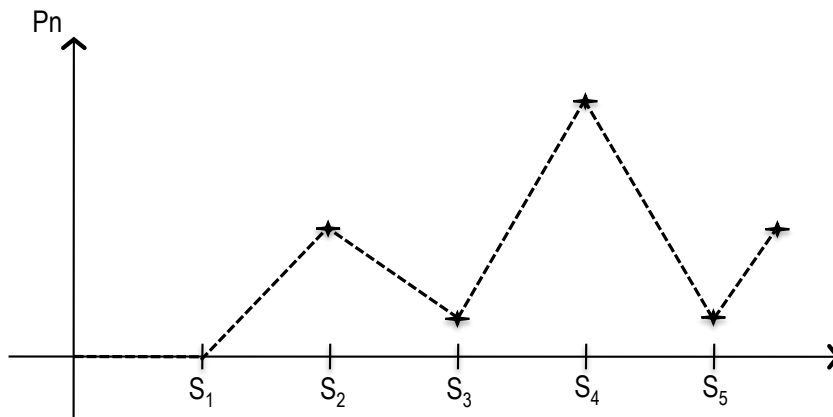


FIGURA 3. La sucesión P_n

P_n crece para $n \in [s_{2k-1}, s_{2k}] \cap \mathbb{N}$ pues con cada iteración estamos agregando un uno a la suma $\sum_{i=1}^n a_i$, y decrece para $n \in [s_{2k}, s_{2k+1}] \cap \mathbb{N}$ pues seguimos iterando la función pero no estamos agregando nada a la suma, por lo que $P_{s_{2k-1}} \leq P_n \leq P_{s_{2k}}$ para $n \in [s_{2k-1}, s_{2k}] \cap \mathbb{N}$ y $P_{s_{2k+1}} \leq P_n \leq P_{s_{2k}}$ para $n \in [s_{2k}, s_{2k+1}] \cap \mathbb{N}$. Por lo que si $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{s_{2k}}$

y $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{s_{2k+1}}$ existen y son iguales, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ existe y coincide con ellos.

Recordemos que en la sección anterior ya demostramos que $\{\rho(x) | x \in \mathbf{K}\}$ contiene al conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Ahora veremos que también contiene al conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ en la primera de las dos siguientes proposiciones.

PROPOSICIÓN 2.10. *Para toda $r \in [0, 1]$ existe $x \in \mathbf{K}$ con $\rho(x) = r$.*

Demostración: Ya lo demostramos en el caso de que $r \in \mathbb{Q}$. Tomemos $r \notin \mathbb{Q}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sean $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_{k+1}} < \frac{r}{k} < \frac{1}{n_k}.$$

Afirmamos que esta sucesión $\{n_k\}$ existe, pues si consideramos el intervalo $(0, 1)$, entonces la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ divide a este intervalo en una infinidad de subintervalos $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ ajenos entre sí.

Como r es irracional, $\frac{r}{k}$ es irracional, por lo que debe estar en algún subintervalo $\frac{1}{n_{k+1}} < \frac{r}{k} < \frac{1}{n_k}$, donde $\{n_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{\frac{1}{n}\}$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$, pues $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{k} = 0$.

Tomando la desigualdad del lado izquierdo, se tiene que $\frac{k}{n_{k+1}} < r$, por lo que

$$0 \leq \frac{k}{n_k} - \frac{k}{n_k + 1} = \frac{k}{n_k(n_k + 1)} < \frac{r}{n_k}.$$

De ahí que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n_k} - \frac{k}{n_k + 1} \right) = 0,$$

y como

$$\frac{k}{n_k + 1} < r < \frac{k}{n_k},$$

se concluye que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = r,$$

pues $\frac{k}{n_{k+1}} < r < \frac{k}{n_k}$. Ahora, sea $x = .a_1 a_2 a_3 \dots$ donde

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_k; \\ 1 & \text{si } n = n_k \end{cases}$$

Usando el lema anterior y el hecho de que x tiene una expresión con su expansión en base tres como cadenas de ceros y unos, obtenemos que

$$\rho(x) = r.$$

□

Notemos que esta propiedad implica que

$$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \subset \{\rho(x) | x \in \mathbf{K}\}.$$

Entonces, hasta ahora hemos demostrado que

$$[0, 1] \subset \{\rho(x) | x \in \mathbf{K}\}.$$

PROPIEDAD 2.1. Si $x \in \mathbf{K}$ y $\rho(x)$ existe, entonces $\rho(x) \in [0, 1]$.

Nótese que calcular $\rho(x)$ es tomar promedios de ceros y unos en cada iteración de f , por lo que no salimos nunca del intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto $\rho(x) \in [0, 1]$.

Hasta ahora hemos visto ejemplos en los que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$ existe para un punto particular en \mathbf{K} . Sin embargo existen puntos en \mathbf{K} para los que este límite no existe.

PROPIEDAD 2.2. $\rho(x)$ no siempre existe.

Demostración: Se construirá $x \in \mathbf{K}$ usando algunas propiedades de la sucesión de Fibonacci: $\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$, donde $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, etc. En general $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Esta sucesión cumple que

$$\begin{aligned} i) \sum_{i=1}^k f_i &= f_{k+2} - 1 \text{ y que} \\ ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Demostraremos el inciso (i) por inducción sobre k . Para $k = 1$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^1 f_i = f_1 = 1 = f_3 - 1,$$

por lo tanto en este caso se cumple la afirmación. Suponemos cierto para k y lo demostraremos para $k + 1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i = \sum_{i=1}^k f_i + f_{k+1},$$

por hipótesis de inducción, esto es igual a

$$f_{k+2} - 1 + f_{k+1} = f_{k+3} - 1 = f_{(k+1)+2} - 1.$$

Por lo que también se cumple en este caso. El inciso (ii) es un resultado conocido y no daremos la demostración. Sea

$$x = 0.1_{f_1} 0_{f_1} 1_{f_2} 0_{f_2} 1_{f_3} 0_{f_3} \dots$$

Para ver que $\rho(x)$ no existe, daremos dos subsucesiones de $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que convergen a números distintos, donde

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Para cada $k \geq 2$, sean

$$n_k = 2 \sum_{i=1}^{k-1} f_i + f_k \quad y \quad m_k = 2 \sum_{i=1}^k f_i.$$

En la primera subsucesión de $\{P_n\}$, $\{P_{n_k}\}$, estamos haciendo los promedios terminando siempre al final de una cadena de unos y en la segunda, $\{P_{m_k}\}$, terminando en una cadena de ceros. Entonces

$$P_{n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{2 \sum_{i=1}^{k-1} f_i + f_k} = \frac{f_{k+2} - 1}{2f_{k+1} - 2 + f_k}$$

por el inciso (i). Pero lo anterior es igual a

$$\frac{f_{k+2} - 1}{f_{k+2} + f_{k+1} - 2} = \frac{f_{k+2} - 1}{f_{k+3} - 2}.$$

Por el inciso (ii),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{k+2} - 1}{f_{k+3} - 2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}.$$

Y por otra parte

$$P_{m_k} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{2 \sum_{i=1}^k f_i} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto tenemos dos subsucesiones de $P_n = \frac{F^n(x)}{n}$ que tienden a números distintos. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ no existe.

Hasta aquí podemos decir que $\{\rho(x) | x \in \mathbf{K}\} = [0, 1]$. Ahora pasaremos a analizar el ω -límite de algunos puntos junto con sus números de rotación.

A continuación veremos dos ejemplos de órbitas de f no periódicas con número de rotación en \mathbb{Q} : para el primero, $\rho(x) = 0$ y para el segundo, $\rho(x) = \frac{1}{2}$. Veamos el primer ejemplo. Sea

$$x = 0.0_1 10_2 10_3 10_4 10_5 10_6 10_7 1 \dots$$

Claramente $x \in \mathbf{K}$ no es periódico y se ve que $\rho(x) = 0$ pues el número de ceros es cada vez mayor conforme iteramos F .

Recordemos que $y \in \omega(x, f)$ si existen subsucesiones n_k tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{n_k}(x) = y$. Veamos cuál es el $\omega(x, f)$. Para esto vamos a tomar todas las posibles subsucesiones convergentes de la órbita de x .

Notemos que siempre podemos tomar una subsucesión $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} = 0.01001\dots$; $x_{n_2} = 0.010001\dots$; $x_{n_3} = 0.0100001\dots$; etc. es decir, que el número de ceros entre el primer y el segundo uno va aumentando. Es claro que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = .01$, por lo tanto $.01 \in \omega - \lim(x_0)$. En general, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que hay sucesiones $\{n_k\}$ tales que $x_{n_1} = 0.0_n 10_{n+1} 1\dots$; $x_{n_2} = 0.0_n 10_{n+2} 1\dots$; $x_{n_3} = 0.0_n 10_{n+3} 1\dots$; $x_{n_j} = 0.0_n 10_{n+j} 1\dots$. Claramente x_{n_j} tiende a $0.0_n 1$, por lo tanto $0.0_n 1 \in \omega(x, f)$.

Por último, consideramos las sucesiones $\{n_k\}$ tales que $x_{n_1} = 0.1001\dots$; $x_{n_2} = 0.10001\dots$; $x_{n_3} = 0.100001\dots$; en general, $x_{n_{i+1}} = 0.10_{i+1} 1\dots$. Esta sucesión tiende a 0.1 , por lo tanto $0.1 \in \omega(x_0, f)$. Entonces el

$$\omega(x, f) \supset \Omega = \{1 \times 3^{-n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Hay que ver que éstos son todos los elementos del $\omega(x, f)$. Lo cual resultará mucho más fácil a partir de la siguiente caracterización de $\omega - \limite$.

PROPOSICIÓN 2.11. *Sean $x, y \in \mathbf{K}$. Entonces $y \in \omega(x, f)$ si y sólo si existe una sucesión $\{n_k\}$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$, tal que, para toda $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $a_{n_k+i} = b_i$.*

Para demostrar esta proposición usaremos el siguiente lema:

LEMA 2.2. *Si $|x - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^k}$, con $x, y \in \mathbf{K}$, $x = 0.a_1 a_2 \dots$, $y = 0.b_1 b_2 \dots$, si y sólo si $a_i = b_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Demostración: Supongamos que $|x - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^k}$, mostraremos que $a_i = b_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$ y lo haremos por inducción sobre k .

Para $k = 1$, si $|x - y| < \frac{1}{6}$, veremos que $a_1 = b_1$. Recordemos la construcción del conjunto de Cantor \mathbf{C} a partir de los conjuntos C_k , mencionada al principio de este capítulo. Cada conjunto C_k está formado por 2^k intervalos I_{k_j} , de longitud $\frac{1}{3^k}$, con $k \in \mathbb{N}$. Entonces la k del subíndice k_j de I_{k_j} corresponde a la k de C_k y $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$. Así $I_{1_1} = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_{1_2} = [\frac{2}{3}, 1]$. Sea C'_k el conjunto C_k comprimido a la mitad, o sea que $C'_k = \frac{1}{2} C_k$. Entonces C'_k está formado por 2^k intervalos I_{k_j}

(para no complicar más la notación, usaremos la misma que antes para estos intervalos), de longitud $\frac{1}{2 \cdot 3^k}$. La distancia entre los intervalos I_{1_1} e I_{1_2} es $d(I_{1_1}, I_{1_2}) = \frac{1}{6}$ y la longitud de cada uno de ellos es $l(I_{1_j}) = \frac{1}{6}$, con $j = 1, 2$. Como $x, y \in \mathbf{K}$, $x, y \in I_{1_1} \cup I_{1_2}$, si $x \in I_{1_j}$, entonces $y \in I_{1_j}$ por lo tanto $a_1 = b_1$.

Ahora suponemos cierto para k y lo demostraremos para $k + 1$, es decir, demostraremos que si $|x - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^{k+1}}$ entonces $a_i = b_i$ para toda $i \in \{1, \dots, k + 1\}$. Tenemos que $|x - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^k \cdot 3}$.

Sabemos que si $|x - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^k}$ entonces $a_i = b_i$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Sean $x, y \in \mathbf{K}$ tales que $|x - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^{k+1}}$, entonces $x, y \in I_{(k+1)_j} \subset C'_k$ para algún $j = 1, \dots, 2^k$, entonces $a_{k+1} = b_{k+1}$.

Ahora supongamos que $a_i = b_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $|x - y| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^k}$ pues si dos números en \mathbf{K} tienen las mismas k primeras cifras, ambos están en el intervalo I_{k_j} para alguna $j \in \{1, \dots, 2^k\}$. \square

Mostraremos ahora la proposición (2.11).

Demostración: Supongamos primero que $y \in \omega(x, f)$, entonces por el lema anterior, si $|x_{n_k} - y| < \frac{1}{2 \cdot 3^k}$, existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$, $x_{n_k} = .a_{n_k+1}a_{n_k+2} \dots a_{n_k+k} \dots$ y $y = .b_1b_2 \dots b_k$, por lo que $a_{n_k+i} = b_i$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$.

Ahora, si existe una sucesión $\{n_k\}$ que tiende a infinito si k tiende a infinito, por el lema anterior, $a_{n_k+i} = b_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces $|f^{n_k}(x)| \leq \frac{1}{3^k}$, por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. \square

Continuando con el ejemplo, por el lema sabemos que, si existe una sucesión $\{n_k\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ con $a_{n_k+i} = b_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $|f^{n_k} - y| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^k}$, por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Sea $y \in \omega(x, f)$. Denotemos por $y = .b_1 \dots$ y $x = .a_1a_2 \dots$. Supongamos que $y \notin \Omega = \{1 \times 3^{-n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, entonces y tiene por lo menos dos unos en su expresión en base tres. Sea m el lugar del segundo uno. Si la cadena $a_{n+1} \dots a_{n+m}$ tiene dos unos, entonces $n \leq m - 4 + \sum_{i=1}^{m-3} i$. Si para cada $k > m$ existe n_k tal que $a_{n_k+i} = b_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $n_k \leq m - 4 + \sum_{i=1}^{m-3} i$, por lo que $\{n_k\}$ no tiende a infinito, lo

cual es una contradicción. Por lo tanto $y \in \Omega$.

De esta manera queda claro que en el ejemplo con $x = 0.0_110_210_310_41\dots$ el $\omega(x, f) = \{0.0_k1\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \cup \{0\}$, $\rho(x) = 0$ y para toda $y \in \omega(x, f)$, $\rho(y) = 0$. Este conjunto es un punto fijo, el 0, junto con órbitas que llegan a éste en un número finito de iteraciones. (Ver la figura).

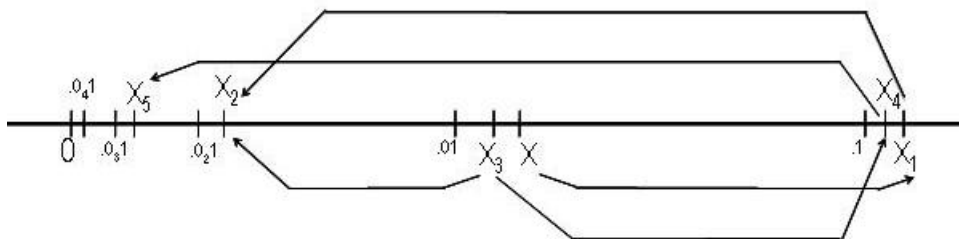


FIGURA 4. Órbita de $x = 0.0_110_210_310_41\dots$

Fijémonos en el intervalo $[0, 0.1]$. $x > 0.01$, entonces $x_1 > 0.1$, $x_2 > 0.001$ y $x_3 > 0.01$, pero $x_3 < x$, luego $0.1 < x_4 < x_1$, $0.0001 < x_5$, etc. De tal manera que con cada iteración la órbita se acerca cada vez más al 0 pero siempre a la derecha de 0.0_k1 con k cada vez mayor.

Observemos que tenemos un punto $x = 0.0_110_210_3$ con número de rotación racional y tal que $\omega(x, f)$ no es una órbita periódica, a diferencia de lo que pasa en homeomorfismos, en donde si $\rho(f) = \frac{p}{q}$ para cualquier $z \in S^1$ entonces el $\omega - \text{lim}(z)$ es una órbita periódica de periodo q . Sin embargo, el comportamiento de esta órbita, aunque no es tan sencillo como el de la órbita de un homeomorfismo, tampoco es tan complicado. Aunque, no siempre es así. Veamos ahora el segundo ejemplo.

Sea $x \in \mathbf{K}$ dado como sigue

$$x = 0.0_11_20_31_40_51_6\dots$$

Sea $s_j = \sum_{i=1}^j i$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{s_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{i=1}^k i}{\sum_{j=1}^{2k} j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(k+1)}{\frac{2k(2k+1)}{2}} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{s_{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{i=1}^k i}{\sum_{j=1}^{2k+1} j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(k+1)}{\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}} = \frac{1}{2}$$

Por el lema (1.1) de esta sección, $\rho(x)$ existe y es $\frac{1}{2}$. El

$$\omega(x, f) = \{0.0_k\bar{1}\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \cup \{0.1_k\bar{0}\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}.$$

Si $y \in \{0.0_k\bar{1}\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\rho(y) = 1$ y si $y \in \{0.1_k\bar{0}\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\rho(y) = 0$.

Notemos que $\omega(x, f)$ consta de dos puntos fijos, 0 y $0.\bar{1}$ junto con órbitas que llegan a estos puntos en un número finito de iteraciones. El hecho de que $\rho(x) = \frac{1}{2}$ no está relacionado con un comportamiento asintótico de la órbita de x a una órbita de periodo par (recordemos que las órbitas periódicas con número de rotación $\frac{1}{2}$ tienen periodo par). En este ejemplo $\rho(x)$ es simplemente el promedio de los números de rotación de las órbitas que forman su ω -*limite*.

PROPOSICIÓN 2.12. *Existe $x \in \mathbf{K}$ tal que $\omega(x, f) = \mathbf{K}$*

Demostración: Sea $\mathbf{F} = \{x_n^* = 0.a_1a_2\dots a_k \mid a_i \in \{0, 1\} \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\}$. Observemos que $\mathbf{F} \subset \mathbf{K}$ y como \mathbf{K} es cerrado, entonces $\overline{\mathbf{F}} \subset \mathbf{K}$. Ahora tomemos $y \in \mathbf{K}$ con $y = 0.a_1a_2\dots a_n\dots$ y $\{y_n\} \subset \mathbf{F}$ tal que $y_n = 0.a_1a_2\dots a_n\bar{0}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Por lo tanto $\mathbf{K} \subset \overline{\mathbf{F}}$. Entonces $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{K}$. Sea

$$x = 0.x_10x_10_2x_20_2x_10_3x_20_3x_30_3x_10_4x_20_4x_30_4x_40_4x_1\dots$$

donde $x_i = a_1a_2\dots a_k$ para cada $x_i^* = 0.a_1a_2\dots a_k$ en \mathbf{F} . Entonces para alguna $n \in \mathbb{N}$ $x_n = 0.x_j0\dots 0\dots$. Afirmamos que $x_j \in \omega(x, f)$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Sea n_1 tal que

$$x_{n_1} = 0.x_j0_jx_10_{j+1}1\dots$$

Sea n_2 tal que

$$x_{n_2} = 0.x_j0_{j+1}x_{j+1}0_{j+1}x_10\dots$$

En general sea n_k tal que

$$x_{n_k} = 0.x_j0_{j+k}x_{j+1}0_{j+k}x_{j+k}0_{j+k}x_10\dots$$

$\{n_k\}$ es una subsucesión de $\{n\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k}}{n_k} = 0.x_j$.

Por lo tanto $x_j \in \omega(x, f)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{F} \subset \omega(x, f)$.

Pero como $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado, entonces $\overline{\mathbf{F}} \subset \omega(x, f)$ y como vimos antes, $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{K}$, por lo que $\mathbf{K} \subset \omega(x, f)$. Nos falta demostrar que $\omega(x, f) \subset \mathbf{K}$. Observemos que $\overline{O(x)} \subset \overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$ y $\omega(x, f) \subset \overline{O(x)}$ por lo tanto $\omega(x, f) \subset \mathbf{K}$. Entonces $\omega(x, f) = \mathbf{K}$. \square

Nuestra intención en este capítulo ha sido mostrar, a través de los ejemplos discutidos en él, que en general, para $z \in S^1$ y f definida al inicio del capítulo, $\rho(z, f)$ no da suficiente información sobre la dinámica asintótica de la órbita de z , $O(z)$. Pero, uno de los resultados del siguiente capítulo es que, para cierto tipo de puntos del círculo, $\rho(z)$ si da información sobre su dinámica.

Capítulo 3

Endomorfismos del círculo

Un endomorfismo es una función continua que va de un espacio en el mismo espacio. En la primera sección daremos los conceptos necesarios para entender la dinámica de los endomorfismos del círculo de grado uno, que es el tipo de endomorfismo que nos interesa. Estos conceptos son el número de rotación de un punto y el conjunto de rotación. En el mismo sentido, daremos también algunos resultados generales importantes establecidos por P. Boyland en [Bp], necesarios para entender y demostrar los resultados que son el objeto de este trabajo.

En la segunda sección veremos cómo es el intervalo de rotación de los endomorfismos de una familia particular de éstos, usando las propiedades de ciertas funciones no decrecientes de las cuales daremos su construcción.

Como lo hemos hecho antes, en este capítulo nos vamos a referir a $f : S^1 \rightarrow S^1$ como un endomorfismo de grado uno del círculo y a $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como un levantamiento de f . También nos referiremos a z como un elemento de S^1 y a x como un elemento de \mathbb{R} tal que z es la coordenada de x , es decir, $\pi(x) = e^{2\pi i x} = z$.

1. Conceptos básicos y resultados generales

Recordemos que para homeomorfismos del círculo definimos el concepto de número de rotación y que este número da la información esencial sobre la dinámica de un homeomorfismo del círculo.

El número de rotación es $\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ y la proposición (1.4) del capítulo 1 enuncia que este límite existe y no depende de x . Por el contrario, en el caso de endomorfismos, este límite no siempre existe, como se vió en el ejemplo de la función f que construimos en el capítulo 2, considerando la dinámica del punto $x = .0_{f_1}1_{f_2}0_{f_3}\dots$. También vimos en el capítulo anterior, a través de varios ejemplos, que para distintos puntos $x \in \mathbb{R}$, $\rho(x, F)$ es distinto, a diferencia de lo que pasa para

homeomorfismos, en donde el número de rotación no depende de x . Sin embargo tenemos el siguiente lema.

LEMA 3.1. *La sucesión $\frac{F^n(x)-x}{n}$ está acotada.*

Demostración: Dado que F es el levantamiento de f , F es una función continua no decreciente y $F(x+1) = F(x)+1$. Entonces $F - Id$ es periódica de periodo uno, pues dado que F es un levantamiento, $F(x+1) = F(x)+1$, por lo que

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) + 1 - x - 1 = F(x) - x.$$

De estos dos hechos podemos deducir que existen m y $M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq F(x) - x \leq M$ y como podemos expresar a $F^n(x) - x$ como la suma telescópica,

$$F^n(x) - x = \sum_{k=1}^n F(F^{k-1}(x)) - F^{k-1}(x),$$

donde cada término de la suma cumple que $m \leq F(y) - y \leq M$ para $y = F^{k-1}(x)$, entonces

$$nm \leq \sum_{k=1}^n F(F^{k-1}(x)) - F^{k-1}(x) \leq nM,$$

por lo tanto $m \leq \frac{F^n(x)-x}{n} \leq M$. □

Entonces, aunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$ no siempre exista y dependa de x , el siguiente límite sí existe para cada $x \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 3.1. Para $f : S^1 \rightarrow S^1$ fijemos un levantamiento $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\rho(x, F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

Ésta es una generalización para endomorfismos del círculo del concepto de número de rotación para homeomorfismos del círculo y fue dada por Newhouse, Palis y Takens en [Ne-Pa-Ta].

DEFINICIÓN 3.2. El conjunto de rotación de F se define como

$$\rho(F) := \{\rho(x, F) | x \in \mathbb{R}\}.$$

El lema (3.1) implica que el conjunto $\{\rho(x, F) | x \in \mathbb{R}\}$ está acotado, por lo que tiene ínfimo y supremo.

DEFINICIÓN 3.3. Sean

$$\rho_1(F) := \inf\{\rho(F, x) | x \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\rho_2(F) := \sup\{\rho(F, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Ito demostró en [It] que $\rho(F)$ es un intervalo cerrado, o sea que $\rho(F) = [\rho_1(F), \rho_2(F)]$. En este trabajo daremos una demostración de ésto para un tipo particular de endomorfismos del círculo.

En el caso de un homeomorfismo h , el número de rotación de h es el mismo sin importar qué levantamiento de h se esté considerando. Es decir que si $H = H' + k$, $\rho(H) = \rho(H') + k$ con k un entero y H y H' levantamientos de h , sin embargo $\rho(h) = \rho(H)(\text{mod } 1) = \rho(H')(\text{mod } 1)$. En el caso de endomorfismos también es cierta esta propiedad.

PROPIEDAD 3.1. *Sea f un endomorfismo del círculo y F un levantamiento de f . Si F' es otro levantamiento de f tal que $F = F' + k$ con k un entero, entonces $\rho(x, F) = \rho(x, F') + k$.*

Demostración: Es inmediato pues $F^n(x) = (F')^n(x) + nk$. \square

DEFINICIÓN 3.4. El número de rotación de f en z es el elemento de \mathbb{R}/\mathbb{Z} definido por

$$\rho(z, f) = \rho(x, F)(\text{mod } 1),$$

donde x es una coordenada de z y F un levantamiento de f .

DEFINICIÓN 3.5. El conjunto de rotación de f es

$$\rho(f) = \{\rho(z, f) | z \in S^1\}.$$

Por el resultado de Ito, $\rho(f)$ puede ser un punto, un intervalo $[\rho_1(f), \rho_2(f)]$ en \mathbb{R}/\mathbb{Z} o todo \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Enseguida enunciaremos dos lemas que nos servirán para demostrar el teorema que les sigue. Este teorema afirma que para cierto tipo de endomorfismos, existe su número de rotación y está definido de la misma manera que el número de rotación de un homeomorfismo.

LEMA 3.2. *Sea H un levantamiento no decreciente y sea $P(x) = H(x) - x$. Entonces $P(x)$ es una función continua de periodo uno y cumple que $|P(x) - P(y)| < 1$ para toda x y $y \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Ya demostramos (en la demostración del lema 3.1) que la función $P(x) = H(x) - x$ es continua de periodo uno. Afir-mamos que $|P(x) - P(y)| < 1$ para toda x y $y \in \mathbb{R}$. Esto es equiv-alente a demostrar que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$m \leq P(x) < m + 1$. Como P es periódica, toma su mínimo m en algún $x_1 \in \mathbb{R}$. Veremos que para $x \in [x_1, x_1 + 1)$, $m \leq P(x) < m + 1$, de donde se sigue la afirmación.

Sea $x \in [x_1, x_1 + 1]$. Como H es no decreciente, $H(x) \leq H(x_1 + 1)$. Usando que $H(x_1 + 1) = H(x_1) + 1 = m + x_1 + 1$ y restando x se obtiene que $P(x) < m + 1 + x_1 - x \leq m + 1$. \square

LEMA 3.3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $P_k(x) = H^k(x) - x$. Entonces para cada k y $m \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes condiciones:*

- i) $P_k(x) + P_m(x) - 1 \leq P_{k+m}(x) \leq P_k(x) + P_m(x) + 1$ y
- ii) $mP_k(x) - (m - 1) \leq P_{km}(x) \leq mP_k(x) + m - 1$

Demostración: El lema (3.2.), se puede aplicar a H^k , de donde se sigue que para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$,

$$-1 + H^k(x) - x \leq H^k(y) - y \leq H^k(x) - x + 1,$$

entonces

$$-1 + H^k(x) - x + (y - x) \leq H^k(y) - x \leq y - x + H^k(x) - x + 1.$$

Sea $y = H^m(x)$, entonces

$$-1 + P_m(x) + P_k(x) \leq P_{k+m}(x) < P_m(x) + P_k(x) + 1.$$

La parte (ii) se demuestra usando (i) aplicando inducción sobre m . Veámoslo para el caso $m = 2$. Podemos ver a $P_{2k}(x)$ como $P_{k+k}(x)$, entonces, por el inciso i),

$$P_k(x) + P_k(x) - 1 \leq P_{2k}(x) \leq P_k(x) + P_k(x) + 1,$$

por lo que $2P_k(x) - 1 \leq P_{2k}(x) \leq 2P_k(x) + 1$. Suponemos cierto para m y veremos que es cierto para $m + 1$.

$P_{(m+1)k}(x) = P_{mk+k}(x)$, entonces, por el inciso i),

$$P_{mk}(x) + P_k(x) - 1 \leq P_{(m+1)k}(x) \leq P_{mk}(x) + P_k(x) + 1,$$

pero por hipótesis de inducción tenemos que

$$mP_k(x) - (m - 1) + P_k(x) - 1 \leq P_{mk}(x) + P_k(x) - 1 \quad y$$

$$P_{mk}(x) + P_k(x) + 1 \leq mP_k(x) + m - 1 + P_k(x) + 1,$$

por lo tanto

$$(m + 1)P_k(x) - m \leq P_{(m+1)k}(x) \leq (m + 1)P_k(x) + m.$$

\square

TEOREMA 3.1. *Si $h : S^1 \rightarrow S^1$ un endomorfismo de grado uno que no invierte la orientación y H es un levantamiento de h , entonces*

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^n(x) - x}{n}$ existe y no depende de x .
 b) $\rho(h) = \frac{p}{q}$ si y sólo si h tiene órbitas periódicas de periodo q .

Observación: En el capítulo 1 definimos un homeomorfismo del círculo que preserva la orientación. La misma definición se aplica para un endomorfismo del círculo que preserva la orientación, pues para que esto pase, tendría que ser una función monótona creciente. Así es que el hecho de que h no invierta la orientación equivale a que sus levantamientos son no decrecientes.

Demostración: Vamos a demostrar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{n}$. Usando el lema (3.3. (ii)), tomando $k = 1$ y $m = n$, tenemos que

$$P_1(x) - 1 \leq P_1(x) - \frac{(n-1)}{n} \leq \frac{P_n(x)}{n} \leq P_1(x) + \frac{n-1}{n} \leq P_1(x) + 1$$

por lo que la sucesión $\{\frac{P_n(x)}{n}\}$ tiene subsucesiones convergentes. Tomaremos dos de éstas y veremos que convergen al mismo límite.

Sean $\{m_j\}$ y $\{k_j\}$ sucesiones de naturales que tienden a infinito y que cumplen que $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_{m_j}}{m_j} = r$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_{k_j}}{k_j} = s$. Usando nuevamente el lema (3.3 (ii))

$$\frac{P_{k_j}(x)}{k_j} - \frac{(m_j-1)}{m_j} \frac{1}{k_j} \leq \frac{P_{m_j k_j}(x)}{m_j k_j} \leq \frac{P_{k_j}(x)}{k_j} + \frac{m_j-1}{m_j} \frac{1}{k_j}$$

De donde se sigue que $\frac{P_{m_j k_j}}{m_j k_j}$ converge a s , e intercambiando el papel de m_j y k_j , se sigue que converge a r , por lo que $r = s$, con lo que queda demostrada la existencia del límite.

Probaremos ahora la independencia de x . Aplicando el lema (3.2) a H^n tenemos que $|\frac{P_n(x) - P_n(y)}{n}| < \frac{1}{n}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ existe, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{n}$ existe, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(y)}{n}$. Por lo tanto el número de rotación de x y de y coinciden, con lo que queda demostrado el teorema. \square

Ahora no vamos a demostrar el inciso b) pues más adelante en el capítulo se demostrará algo más general en el teorema (3.3) Enseguida enunciaremos otra propiedad importante del número de rotación.

Sea $End(S^1)$ el conjunto de todas las funciones continuas de grado uno del círculo y denotamos por $D(S^1) \subset End(S^1)$ al conjunto de las funciones no decrecientes en el círculo. Nos proponemos demostrar que

$\rho : D(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$, es una función continua.

Trabajaremos en el espacio de los levantamientos, que llamaremos \mathbf{L} , con la métrica $d(H, \overline{H}) = \max_{x \in \mathbb{R}} |H(x) - \overline{H}(x)|$. Notemos que $|H(x) - \overline{H}(x)|$ es de periodo uno y por lo tanto es acotado. Así, la $d(H, \overline{H})$ sí define una métrica. Antes de demostrar que ρ es una función continua, demostraremos el siguiente lema.

LEMA 3.4. *Sea $q \in \mathbb{N}$ y $\psi : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$, tal que $\psi(H) = H^q$. Entonces ψ es una función continua.*

Demostración: Haremos la demostración por inducción sobre n . $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, por lo tanto H es uniformemente continua en $[0, 1]$. Como H es un levantamiento, es uniformemente continua en \mathbb{R} , es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que para toda x y $y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| < \delta_1$ entonces $|H(x) - H(y)| < \varepsilon$. Para el caso $n = 1$ es inmediato. Suponemos cierto para n y lo demostraremos para $n + 1$.

Sea $H \in \mathbf{L}$. Para cada $\varepsilon > 0$ sean $\delta_1(\varepsilon)$ y $\delta_2(\varepsilon)$ tales que para toda x y $y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| < \delta_1$ entonces $|H(x) - H(y)| < \varepsilon$ y $d(H, \overline{H}) < \delta_2(\varepsilon)$ entonces $d(H^n, \overline{H}^n) < \varepsilon$. Sea

$$\delta = \min\{\delta_2(\delta_1(\frac{\varepsilon}{2})), \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Sea $\overline{H} \in \mathbf{L}$ tal que $d(H, \overline{H}) < \delta$.

$$|H^{n+1}(x) - \overline{H}^{n+1}(x)| \leq |\overline{H}(\overline{H}^n(x)) - H(\overline{H}^n(x))| + |H(\overline{H}^n(x)) - H(H^n(x))|$$

Como $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

$$|\overline{H}(\overline{H}^n(x)) - H(\overline{H}^n(x))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y como $\delta < \delta_2(\delta_1(\frac{\varepsilon}{2}))$, entonces

$$|H(\overline{H}^n(x)) - H(H^n(x))| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto

$$|H^{n+1}(x) - \overline{H}^{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

□

Recordemos que queremos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 3.2. *Sea $h \in D(S^1)$. Entonces la función $\rho : D(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración: Usaremos el siguiente resultado (que será demostrado en el lema (3.5)):

$H^q(x) < x + p$ si y sólo si $\rho(H) < \frac{p}{q}$. Para simplificar, llamemos $\rho = \rho(H)$. Sean $\frac{p'}{q'}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tales que $\frac{p'}{q'} < \rho < \frac{p}{q}$. Entonces tenemos que $H^q(x) < x + p$. Como $H^q - Id$ es periódica y continua, alcanza su máximo, por lo que existe $\delta > 0$ para la que

$$H^q(x) < x + p - \delta$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Por continuidad de la función $\psi : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$, con $\psi(H) = H^q$, existe una vecindad de H tal que si \overline{H} está en ella,

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |H^q(x) - \overline{H}^q(x)| < \delta,$$

por lo que para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{H}^q(x) < H^q(x) + \delta < x + p,$$

y por lo tanto $\rho(\overline{H}) < \frac{p}{q}$. Un argumento similar para $\frac{p'}{q'}$ completa la prueba. \square

En lo sucesivo siempre que nos refiramos al cociente $\frac{p}{q}$, con p, q números enteros, estaremos considerando que $(p, q) = 1$.

DEFINICIÓN 3.6. Decimos que $z \in S^1$ es $\frac{p}{q}$ -periódico si z es de periodo q y si $\rho(z, f) = \frac{p}{q}$.

En el ejemplo del capítulo anterior, vimos que hay órbitas de periodo 4 y número de rotación $\frac{1}{2}$. Es por esto que en el caso de endomorfismos no es suficiente decir que $\rho(z, f) = \frac{p}{q}$ para que z tenga periodo q . Como vimos en el capítulo 1, en el caso de homeomorfismos esto no puede pasar, es decir que un homeomorfismo tiene número de rotación $\frac{p}{q}$ si y sólo si tiene órbitas periódicas de periodo q .

Por último demostraremos un teorema que relaciona al intervalo de rotación con las órbitas periódicas de un endomorfismo f con un levantamiento F de f .

Para demostrar ese teorema utilizaremos el siguiente lema. Este lema, así como algunos otros lemas y teoremas que enunciaremos, tiene que ver con $\rho_1 = \inf\{\rho(F, x) | x \in \mathbb{R}\}$ y $\rho_2 = \sup\{\rho(F, x) | x \in \mathbb{R}\}$, pero sólo demostraremos el resultado para ρ_1 pues la prueba para ρ_2 es análoga.

LEMA 3.5. Sean F un levantamiento de un endomorfismo en el círculo de grado uno, y $R_r(x) = x + r$, un levantamiento de una rotación, con $r \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$.

- a) Si $F \geq R_r$ (respectivamente $F \leq R_r$) entonces $\rho_1(F) \geq r$ ($\rho_2(F) \leq r$)
- b) Si $F > R_r$ ($F < R_r$) entonces $\rho_1(F) > r$ ($\rho_2(F) < r$)
- c) $F^q > R_p$ ($F^q < R_p$) si y sólo si $\rho_1(F) > \frac{p}{q}$ ($\rho_2(F) < \frac{p}{q}$).

Demostración: Empecemos por demostrar el inciso b).

Como $F(x) - x$ es continua y de periodo uno, alcanza su máximo y su mínimo. Por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $F(x) > x + r + \varepsilon$ para toda $x \in \mathbb{R}$ (pues por hipótesis $F(x) > x + r$ para toda $x \in \mathbb{R}$). Sea $\lambda = r + \varepsilon$, entonces $x + r + \varepsilon = R_\lambda(x)$. Queremos demostrar que $F^n(x) > R_\lambda^n(x) = x + n\lambda$, lo haremos por inducción sobre n .

Para $n = 1$ es válido. Sabemos que R_λ es creciente y que $F(y) > R_\lambda(y)$ para toda y . Entonces, como R_λ es creciente,

$$F^2(x) > R_\lambda(F(x)) > R_\lambda^2(x).$$

Suponemos cierto para $n - 1$, es decir $F^{n-1}(x) > R_\lambda^{n-1}(x)$.

Entonces

$$F^n(x) > R_\lambda(F^{n-1}(x)) > R_\lambda(R_\lambda^{n-1}(x)) = R_\lambda^n(x).$$

Por lo tanto $F^n(x) > x + n(r + \varepsilon)$ o sea, $\frac{F^n(x) - x}{n} > r + \varepsilon$. Entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \geq r + \varepsilon$. Como esto ocurre para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} : x \in \mathbb{R} \right\} \geq r + \varepsilon > r.$$

Por lo tanto $\rho_1(F) > r$.

Haremos ahora la prueba de a). Por hipótesis $F(x) \geq x + r = R_r$, por un argumento similar al del inciso b), tenemos que $F^n(x) \geq R_r^n(x) = x + nr$, entonces $\frac{F^n(x) - x}{n} \geq r$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in \mathbb{R}$, esto implica que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \geq r.$$

Para demostrar el inciso c) comencemos suponiendo que $F^q(x) > R_p(x)$. Como

$$\rho(x, F^q) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^q)^n(x) - x}{n} = q \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^{qn})(x) - x}{qn} \leq q\rho(x, F).$$

Entonces, usando el inciso b) de este lema tenemos que

$$p < \rho_1(F^q) \leq q\rho_1(F),$$

o sea $\frac{p}{q} < \rho_1(F)$.

Ahora suponemos que $\rho_1(F) > \frac{p}{q}$. Demostraremos por contrapositiva que $F^q > R_p$. Suponemos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) \leq R_p(x) = x + p$, entonces, por continuidad, tenemos dos posibilidades:

caso 1) $F^q < R_p$, $\rho_2(F) < \frac{p}{q}$ y por lo tanto $\rho_1(F) < \frac{p}{q}$. *caso 2)* existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) = x + p$. Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \frac{p}{q}$.

Tomando $n = lq + r$ con $r \in \{0, \dots, q-1\}$, entonces $F^n(x) = F^{lq+r}(x) = F^r \circ F^{lq}(x)$. Pero $F^{lq} = F^q \circ F^q \circ \dots \circ F^q$, l veces. Como $F^q(x) = x + p$ entonces $F^{2q}(x) = F^q(F^q(x)) = F^q(x + p) = x + 2p$.

Por inducción sobre l tenemos que $F^{lq}(x) = x + lp$, por lo que $F^{lq+r}(x) = F^r(x + lp) = F^r(x) + lp$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F^r(x) + lp}{lq + r} = \frac{lp}{lq} = \frac{p}{q},$$

pues $\{F^r(x) | r \in \{0, \dots, q-1\}\}$ es un conjunto finito y por lo tanto acotado.

Por lo tanto $\frac{p}{q} \in \rho(F)$ y $\rho_1(F) \leq \frac{p}{q}$. Entonces $\rho_1(F) > \frac{p}{q}$ implica que $F^q > R_p$. \square

TEOREMA 3.3. *Sea $f \in \text{End}(S^1)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\frac{p}{q} \in \rho(f)$

b) f tiene un punto $\frac{p}{q}$ -periódico

c) Existen un levantamiento F y $x \in \mathbb{R}$ tales que $F^q(x) = x + p$

Demostración:

b) implica a) es inmediato de la definición de punto $\frac{p}{q}$ -periódico.

Demostraremos primero que c) implica a). Existe F , un levantamiento de f , y $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) = x + p$. Demostraremos que $\frac{p}{q} \in \rho(f)$.

Para esto hay que demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{p}{q}$, (es decir que $\rho(z, f) = \frac{p}{q}$). Si tomamos $n = lq + r$, con $l \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{0, \dots, q-1\}$, ya demostramos en el caso 2) de la demostración anterior que $\frac{p}{q} \in \rho(f)$.

Ahora demostraremos que a) implica c).

Partimos de que $\frac{p}{q} \in \rho(f)$. Supongamos que $F^q(x) \neq x + p$ para toda x y para todo levantamiento F , entonces hay levantamientos de f tales

que $F^q(x) > x + p$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y hay levantamientos de f tales que $F^q(x) < x + p$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por el inciso (c) del lema (1.1) tenemos que $F^q(x) > x + p$ si y sólo si $\rho_1(F) > \frac{p}{q}$, entonces para los levantamientos que cumplen la primera desigualdad, $\frac{p}{q} \notin \rho(F)$. $F^q(x) < x + p$ si y sólo si $\rho_2(F) < \frac{p}{q}$, por lo que para los levantamientos que cumplen la segunda desigualdad $\frac{p}{q} \notin \rho(F)$. Por lo que para cualquier levantamiento F , $\frac{p}{q} \notin \rho(F)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existen x y F tales que $F^q(x) = x + p$.

Por último demostraremos que c) implica b). Queremos demostrar dos cosas,

1. $\frac{p}{q} \in \rho(f)$ y existe $z \in S^1$ tal que $f^q(z) = z$
2. q es el periodo de z .

La primera afirmación se sigue, tomando x como la coordenada de z , de que $\frac{p}{q} \in \rho(f)$ (demostramos que c) implica a)). Por otra parte veremos que q es el periodo de z . Supongamos que $s < q$ es el periodo de z , es decir $f^s(z) = z$. Entonces $f^q(z) = z$, para toda $q > s > 0$. Si suponemos que q es un múltiplo de s , es decir que $ns = q$, entonces $f^{q-ns}(z) = f^{q-ns}(f^{ns}(z))$ y esto es igual a $f^{q-ns+ns}(z) = f^q(z) = z$, por lo que $f^{q-ns}(z) = z$, lo cual es una contradicción, ya que, en este caso $0 < q - ns < s$.

Ahora, si q no es múltiplo de s , tenemos que $ns < q < (n+1)s$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $k < s$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $q - ns = k$. Entonces $x + p = F^q(x) = F^{ns+k}(x) = F^k \circ F^{ns}(x) = F^k(x + nm) = F^k(x) + nm$, lo cual es una contradicción, pues esto implica que $x + p = F^k(x) + nm$, pero $x + p \in \{x\} + \mathbb{Z}$ y $F^k(x) + nm \notin \{x\} + \mathbb{Z}$.

2. Un tipo particular de endomorfismos

El objetivo de esta sección es demostrar dos resultados importantes para un tipo particular de endomorfismos. En el capítulo anterior, la función que construimos es un claro ejemplo de que la dinámica de los endomorfismos puede ser bastante complicada en el sentido de que aunque dos puntos distintos tengan el mismo número de rotación, la dinámica de esos puntos bajo el endomorfismo en cuestión puede ser muy diferente. Sin embargo, dado $r \in \rho(g)$, estos resultados aseguran la existencia de un conjunto invariante bajo g , en el cual las órbitas coinciden con las de un endomorfismo que no invierte la orientación, en particular, que cumplen que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x) - x}{n} = r$, es decir que este

límite existe, y que los puntos en ese conjunto tienen una órbita sencilla.

Estudiaremos una clase de funciones no inyectivas del círculo que denotaremos por \mathbf{A} . Una función $g : S^1 \rightarrow S^1$ está en \mathbf{A} si es continua de grado uno y su levantamiento G es estrictamente monótono por partes un máximo $G(m_2)$ y un mínimo $G(m_1)$ en $(0, 1)$. Además pediremos que $G(m_1) \geq G(0)$ y $G(m_2) \leq G(1)$.

La función f del ejemplo que construimos en el capítulo anterior es conjugada a una de estas funciones, sea

$$(3.1) \quad \hat{g} = r^{-1} \circ f \circ r$$

donde r es la rotación de $\frac{1}{3}2\pi$. $\hat{g} \in \mathbf{A}$. En la sucesivo, cada vez que hablemos de \hat{g} nos referimos a esta función. En la figura se muestra la gráfica de un levantamiento \hat{G} de \hat{g} .

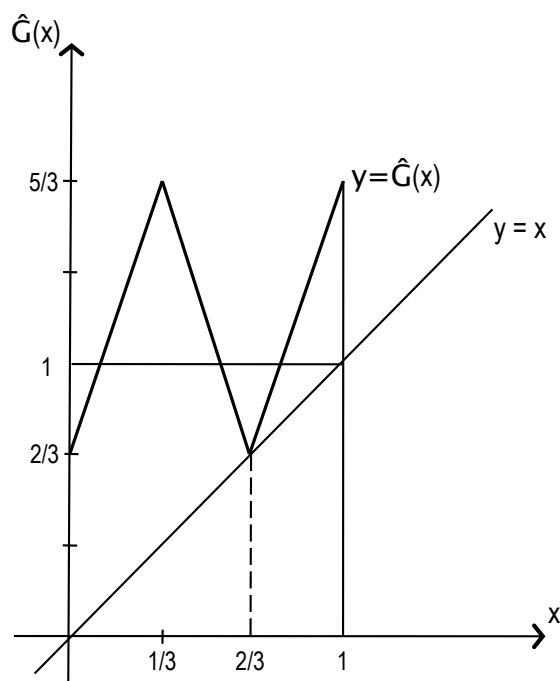


FIGURA 1. Gráfica de $\hat{G}(x)$

Daremos la construcción de una clase de funciones no decrecientes que será de mucha utilidad desde el punto de vista geométrico para entender algunas propiedades del intervalo de rotación de las funciones

en la clase **A**. Esta construcción se encuentra en el artículo de Boyland [Bp], quien menciona que se debe a Hall en [Ha] y que también fué usada por Kadanoff en [Ka].

Para una g fija en **A** y $\mu \in [1, 2]$, hay puntos $z_{1,\mu} \in [m_1, 1]$ y $z_{2,\mu} \in [0, m_2]$ únicos con

$$G(z_{1,\mu}) = G(z_{2,\mu}) = G(m_1) + (\mu - 1)(G(m_2) - G(m_1))$$

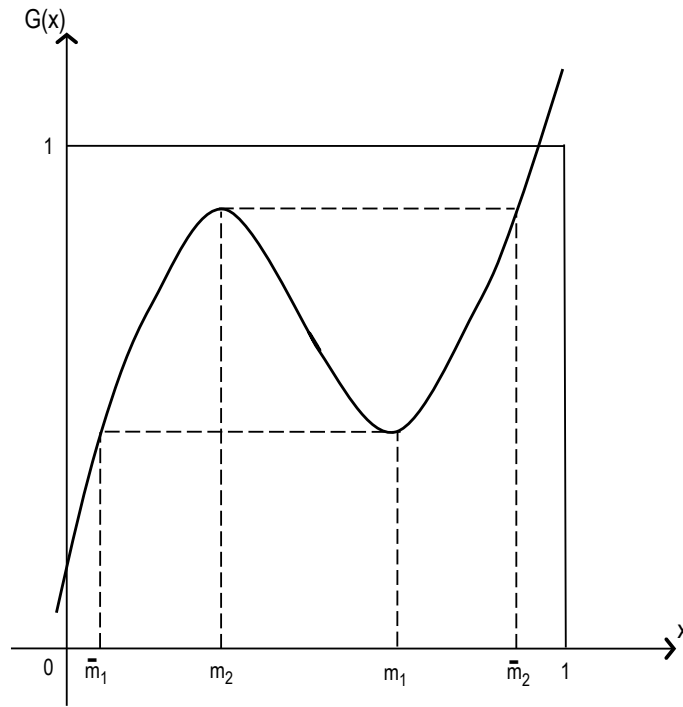


FIGURA 2. Gráfica de $G(x)$

Notemos que $z_{1,1} = m_1$ y que $z_{2,2} = m_2$. Por conveniencia de notación llamaremos $\bar{m}_1 = z_{2,1}$ y $\bar{m}_2 = z_{1,2}$ (ver la figura anterior).

DEFINICIÓN 3.7. Para cada $\mu \in [1, 2]$, $H_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$H_\mu(x) = \begin{cases} G(m_1) + (\mu - 1)(G(m_2) - G(m_1)) & \text{si } x \in [z_{2,\mu}, z_{1,\mu}]; \\ G(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora extendemos H_μ a los números reales tomando $H_\mu(x+1) = H_\mu(x) + 1$ y h_μ denota su proyección al círculo. Notemos que h_μ es una función continua y no invierte la orientación para toda $\mu \in [1, 2]$.

FIGURA 3. Gráfica de $H_\mu(x)$

Demostraremos que para este tipo de endomorfismos (es decir, los que están en **A**), el conjunto de rotación es un intervalo cerrado y que este intervalo es precisamente $[\rho(H_1), \rho(H_2)]$.

Esto se debe esencialmente a que, para los endomorfismos que no invierten la orientación, $\rho : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde $D(\mathbb{R})$ es el conjunto de levantamientos de S^1 no decrecientes, es una función monótona, es decir, si $H_1 < H_2$ entonces $\rho(H_1) < \rho(H_2)$, junto con la continuidad de ρ . Específicamente, cada número en el intervalo de rotación de g es un

número de rotación de alguna función no decreciente h_μ , con $\mu \in [1, 2]$.

Consideremos nuevamente la función \widehat{g} . Esta función tiene una órbita $\frac{1}{2}$ -periódica, la de los puntos $\frac{1}{24}$ y $\frac{19}{24}$, que corresponde a los puntos $0.\overline{10}$ y $0.\overline{01}$ $\frac{1}{2}$ -periódicos bajo f , y estos puntos están en la parte creciente de f . Entonces para $\mu \in [\frac{9}{8}, \frac{11}{8}]$, $\rho(h_\mu) = \frac{1}{2}$, donde h_μ es como en el dibujo.

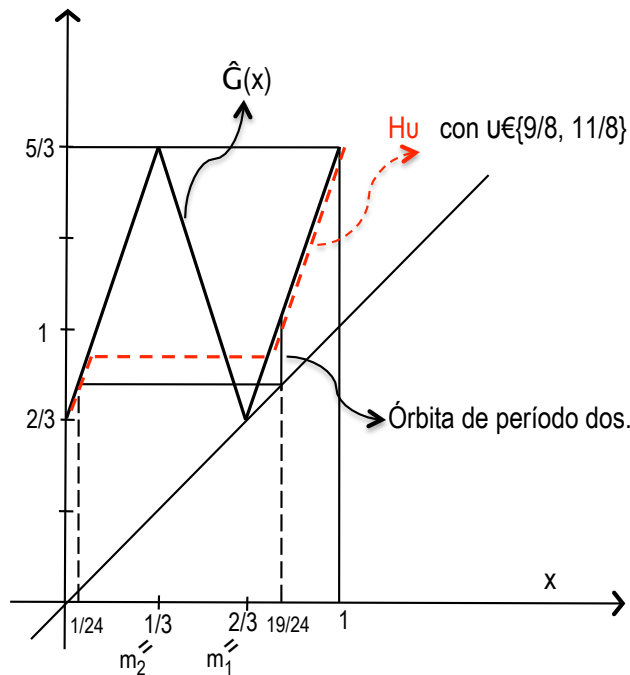


FIGURA 4. Gráfica de $\widehat{G}(x)$ y $\widehat{H}_\mu(x)$

El siguiente teorema da una interpretación del intervalo de rotación de un endomorfismo $G \in \mathbf{A}$. Específicamente, cada número en el intervalo de rotación de G es el número de rotación de un endomorfismo que no invierte la orientación H_μ .

TEOREMA 3.4. *Sea $G \in \mathbf{A}$. Entonces*

$$\rho(G) = [\rho(H_1), \rho(H_2)] = \{\rho(H_\mu) | \mu \in [1, 2]\}.$$

Para demostrar este teorema utilizaremos los siguientes dos lemas. El primero habla sobre la monotonía de ρ . Todas las desigualdades que

se enuncian en él se dan para toda $x \in \mathbb{R}$.

LEMA 3.6. Sean F , G y H levantamientos de funciones continuas de grado uno del círculo con G y H no decrecientes.

- a) Si $G \leq H$ entonces $\rho(G) \leq \rho(H)$.
- b) Si $F \geq H$, entonces $\rho_1(F) \geq \rho(H)$. Si $F \leq H$, entonces $\rho_2(F) \leq \rho(H)$.

Demostración: Para demostrar el inciso (a) demostraremos por inducción que $G^n \leq H^n$ si $G \leq H$ y el resultado se sigue de la definición de número de rotación. Tomemos el caso $n = 2$. Como G y H son no decrecientes se tiene que $G^2 \leq G(H) \leq H^2$. Suponemos cierto para n , entonces $G^{n+1} \leq G(H^n) \leq H^{n+1}$.

La demostración de (b) se sigue del hecho de que $F \geq H$ y que H es no decreciente implican que $F^n \geq H^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{H^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^n(x) - x}{n}.$$

□

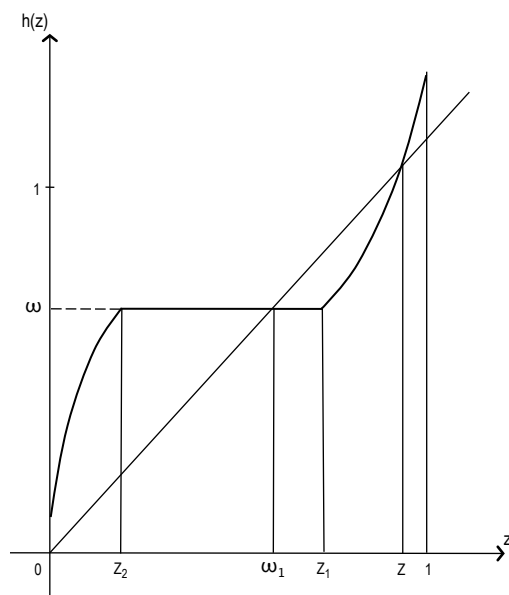
El siguiente lema examina funciones que son del estilo de h_μ , pero su importancia radica en que habla de la existencia de un punto z cuya órbita es igual bajo g y bajo h_μ . En este lema y en lo sucesivo, α denota un número irracional.

LEMA 3.7. Sea $h : S^1 \rightarrow S^1$ no decreciente, continua y con exactamente un intervalo $[z_2, z_1]$ con $h'(z) = 0$ para $z \in (z_2, z_1)$.

- a) Si $\rho(h) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces $O(z_i) \cap (z_2, z_1) = \emptyset$ para $i = 1, 2$.
- b) Si $\rho(h) = \frac{p}{q}$, entonces hay un punto z $\frac{p}{q}$ -periódico con $O(z) \cap (z_2, z_1) = \emptyset$.

Demostración: Para demostrar (a) notemos que si para alguna $k \in \mathbb{N}$, $h^k(z_i) \in [z_2, z_1]$, entonces $h^{k+1}(z_i) = h(z_i)$. Entonces $h(z_i)$ es un punto periódico de h por lo que $\rho(h) \in \mathbb{Q}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $O(z_i) \cap (z_2, z_1) = \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Antes de hacer la demostración del inciso b), veamos qué pasa para el caso $q = 1$. La siguiente figura es la gráfica de un levantamiento de h . Abusando de la notación estamos denotando igual a un punto en S^1 y su coordenada en S^1 . (Ver la figura).

FIGURA 5. Gráfica de $H(x)$

Si $w_1 \in I = (z_2, z_1)$ entonces w es punto fijo. Como se puede ver en la figura, el hecho de que h sea continua y no decreciente implica que existe otro punto fijo $z \notin I$.

Para demostrar (b) llamemos I al intervalo (z_2, z_1) y sea $w = h(I)$. Por el teorema (1.2) h tiene un punto w_1 $\frac{p}{q}$ -periódico. Si $O(w_1) \cap I = \emptyset$ se sigue el resultado. Supongamos entonces que $O(w_1) \cap I \neq \emptyset$.

En este caso w es $\frac{p}{q}$ -periódico, pues como w_1 es $\frac{p}{q}$ -periódico, todos los puntos de su órbita son $\frac{p}{q}$ -periódicos y $h^k(w_1) \in I$ para alguna k , por lo que $w \in O(w_1)$. Veremos que existe otro punto $\frac{p}{q}$ -periódico cuya órbita no interseca a I .

Vamos a demostrar a través de las siguientes tres afirmaciones que un levantamiento $H^q(x)$ de $h^q(z)$ tiene una gráfica como la de la figura de abajo.

Del hecho de que la gráfica sea así, usando el teorema del valor intermedio, se sigue que existe un punto fijo de h^q , z_0 contenido en un

intervalo donde h^q no es constante. Demostraremos en la cuarta afirmación que su órbita bajo h no interseca a I , con lo que quedará demostrado el lema.

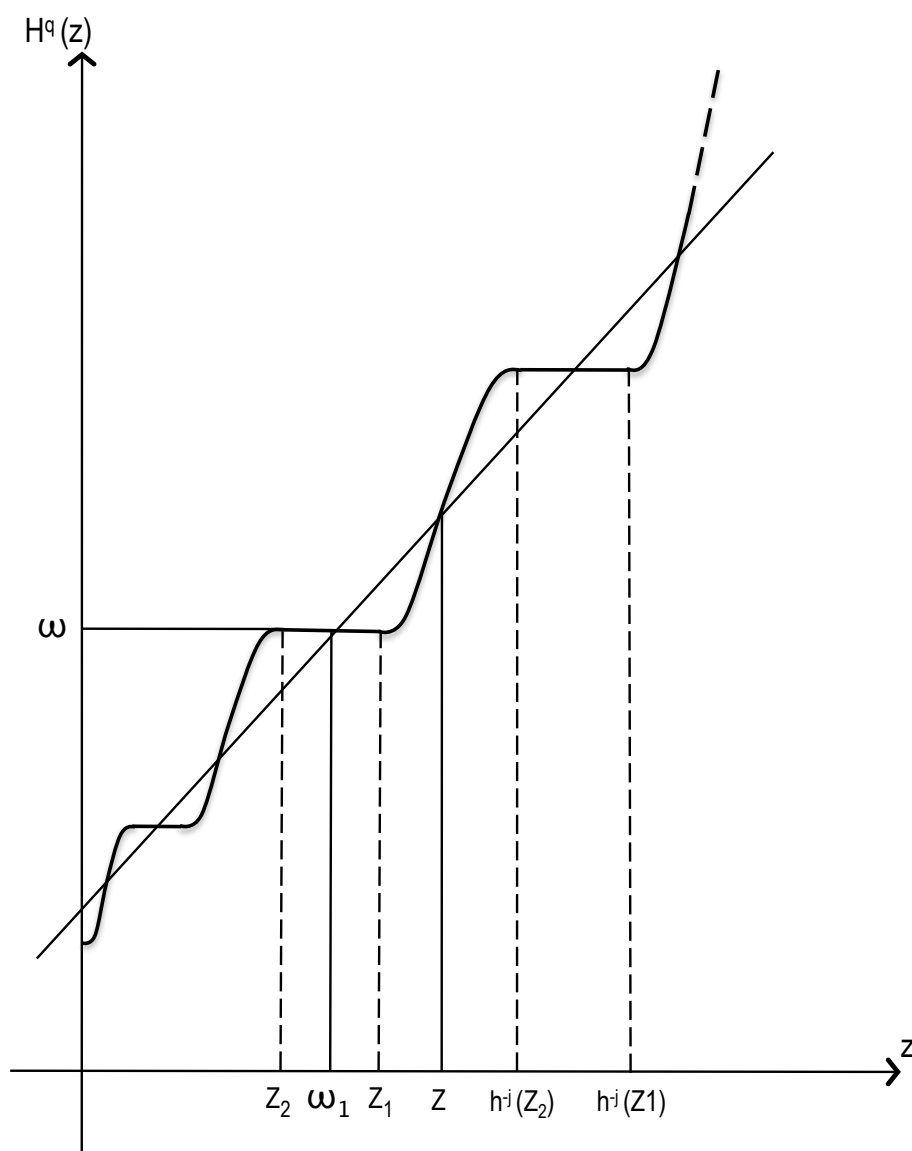


FIGURA 6. Gráfica de $H^q(x)$

Afirmación 1: Para $i \in \{0, \dots, q-1\}$ sea $I_{-i} = h^{-i}(I)$, entonces $\{I_{-i}\}$ es una colección de q intervalos ajenos. Supongamos que $z \in I_{-i} \cap I_{-j}$ con $j > i$. Entonces $h^i(z) \in I$ y $h^j(z) \in I$ y por lo tanto

$h^{i+1}(z) = h^{j+1}(z) = w$. Entonces $h^{j-i}(z) = h^{j-i}(h^{i+1}(z)) = h^{j+1}(z) = w$ por lo que w es periódica con periodo menor o igual a $j - i < q$, una contradicción. Por lo que $I_{-i} = h^{-i}(I)$ es una colección de intervalos ajenos.

Afirmación 2: Hay un punto de la órbita de w en cada uno de los intervalos I_{-i} . De hecho, $h^{q-(i+1)}(w) \in I_{-i}$. $w = h^i(h^{q-i}(w))$, entonces $h^{q-i}(w) \in h^{-i}(w) = I_{-(i-1)}$.

Afirmación 3: h^q manda a cada intervalo I_{-i} al punto de la órbita de w que está en I_{-i} . $h^q(I_{-i}) = h^{q-i}(h^i(I_{-i})) = h^{q-i}(I) = h^{q-(i+1)}(w)$.

Afirmación 4: La órbita de z_0 no interseca a I . Si $h^j(z_0) \in I$, con $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, entonces $h^{j+1}(z_0) = w$. Como z_0 es $\frac{p}{q}$ -periódico entonces $z_0 \in O(w) \subset \bigcup_{i=0}^{q-1} I_{-i}$, lo cual es una contradicción.

Recordemos qué dice el teorema que queremos demostrar:

Sea $G \in \mathbf{A}$. Entonces

$$\rho(G) = [\rho(H_1), \rho(H_2)] = \{\rho(H_\mu) | \mu \in [1, 2]\}.$$

Demostración: Primero vamos a demostrar que $\rho(G) \subset [\rho(H_1), \rho(H_2)]$. Tenemos que $H_1 \leq G \leq H_2$, entonces

$$\rho(H_1) \leq \rho_1(G) \leq \rho_2(G) \leq \rho(H_2),$$

por lo tanto $\rho(G) \subset [\rho(H_1), \rho(H_2)]$.

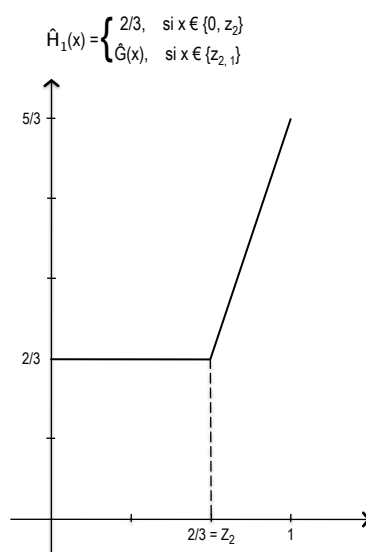
Ahora mostraremos que $\rho(G) \supset [\rho(H_1), \rho(H_2)]$. Para esto, notemos que $\mu \rightarrow \rho(H_\mu)$ es continua y creciente, por lo que

$$\{\rho(H_\mu) | \mu \in [1, 2]\} = [\rho(H_1), \rho(H_2)].$$

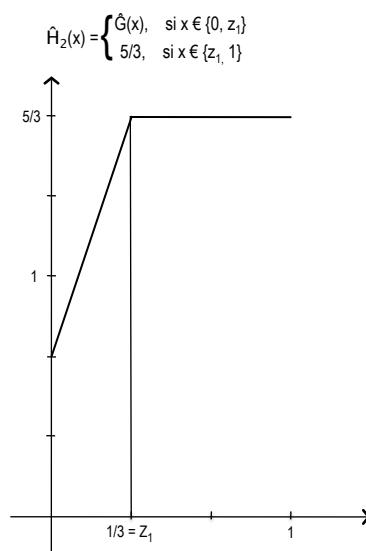
Sea $\xi \in [\rho(H_1), \rho(H_2)]$ y sea μ tal que $\rho(H_\mu) = \xi$. Por el lema (3.7) existe z tal que $O(z, h_\mu)$ no interseca al intervalo $(z_{2,\mu}, z_{1,\mu})$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $h_\mu^n(z) = g^n(z)$, por lo que $\rho(z, g) = \rho(h_\mu)$, de donde $\xi \in \rho(g)$.

Retomemos la función \widehat{g} de la expresión (3.1). \widehat{H}_1 y \widehat{H}_2 tienen la siguiente expresión y gráficas.

$$\widehat{H}_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{si } x \in [0, z_2]; \\ \widehat{G}(x), & \text{si } x \in (z_2, 1) \end{cases}$$

FIGURA 7. Gráfica de $\hat{H}_1(x)$

$$\hat{H}_2(x) = \begin{cases} \hat{G}(x), & \text{si } x \in [0, z_1]; \\ \frac{5}{3}, & \text{si } x \in (z_1, 1) \end{cases}$$

FIGURA 8. Gráfica de $\hat{H}_2(x)$

Veamos que $\rho(\widehat{H}_1) = 0$, pues tiene un punto fijo: z_2 , y $\rho(\widehat{H}_2) = 1$, pues interseca a la gráfica de $y = x + 1$ en $x = 1$, por lo que tiene el mismo número de rotación que $R_1(x) = x + 1$. Por lo tanto $\rho(\widehat{G}) = [0, 1]$.

Nótese que $\{\rho(x, \widehat{G}) | x \in \widehat{\mathbf{K}}\} = [0, 1]$, donde $\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{3}(\text{mod } 1)$, entonces los puntos que no están en $\widehat{\mathbf{K}}$ no aportan más al intervalo de rotación de \widehat{g} .

En general, para $g \in \mathbf{A}$, definimos el conjunto

$$\Sigma(g) = \{z \in S^1 : O(z, g) \cap (m_2, m_1) = \emptyset\}$$

Notemos que $\Sigma(g) = \bigcap_{i=0}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])$, y por lo tanto es un conjunto compacto e invariante.

Demostración: Sea $z \in S^1$ tal que $O(z, g) \cap (m_2, m_1) = \emptyset$, entonces $O(z, g)$ está contenida en $[m_1, m_2]$, o sea que $g^n(z) \in [m_1, m_2]$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $z \in g^{-n}([m_1, m_2])$, por lo tanto $z \in \bigcap_{i=0}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])$.

Ahora, si tomamos $z \in \bigcap_{i=0}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])$, $z \in g^{-n}([m_1, m_2])$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $g^n(z) \in [m_1, m_2]$, es decir, para toda $n \in \mathbb{N}$, $g^n(z) \notin (m_2, m_1)$, por lo tanto $z \in \Sigma(g)$. Además $\Sigma(g)$ es compacto pues es la intersección de conjuntos cerrados y acotados.

Sea $z \in \bigcap_{i=0}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])$. Podemos expresar a $\Sigma(g)$ como

$$[m_1, m_2] \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2]),$$

entonces

$$g(z) \in g([m_1, m_2] \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])) \subset g([m_1, m_2]) \cap g(\bigcap_{i=1}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])),$$

por lo que

$$g(z) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} g(g^{-i}([m_1, m_2])).$$

Como g es suprayectiva

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} g(g^{-i}([m_1, m_2])) = \bigcap_{i=1}^{\infty} g^{-(i-1)}([m_1, m_2])$$

y esto es igual a $\bigcap_{i=0}^{\infty} g^{-i}([m_1, m_2])$, por lo tanto $\Sigma(g)$ es un conjunto invariante. \square

Nótese que $\Sigma(\widehat{g}) = \widehat{\mathbf{K}}$.

Los teoremas que enunciaremos a continuación son los resultados más importantes que enunciaremos en este trabajo. El siguiente teorema garantiza que $\rho(g) = \{\rho(z, g) | z \in \Sigma(g)\}$, más específicamente:

TEOREMA 3.5. *Sea $g \in A$.*

- a) $\frac{p}{q} \in \rho(g)$ si y sólo si existe un punto $z \in \Sigma(g)$ $\frac{p}{q}$ -periódico.
- b) $\alpha \in \rho(g)$ si y sólo si existe $z \in \Sigma(g)$ tal que $\rho(z, g) = \alpha$.
- c) Para $i = 1$ o 2 , $\rho_i(g) = \alpha$ entonces $\rho(m_i, g) = \alpha$. En particular, $\rho_i(g) = \alpha$ implica que $m_i \in \Sigma(g)$.

Demostración:

Si $z \in \Sigma(g)$ la implicación se sigue de la definición de punto $\frac{p}{q}$ -periódico. Si $\frac{p}{q} \in \rho(g)$, por el teorema (3.4) existe $\mu \in [1, 2]$ para la que $\frac{p}{q} = \rho(h_\mu)$. El lema (3.6) implica que existe z $\frac{p}{q}$ -periódico bajo h_μ tal que $O(z, h_\mu) \cap (z_{2,\mu}, z_{1,\mu}) = \emptyset$, pero $h_\mu = g$ fuera de $(z_{2,\mu}, z_{1,\mu})$, por lo que $O(z, h_\mu) = O(z, g)$, pero $(m_2, m_1) \subset (z_{2,\mu}, z_{1,\mu})$. Por lo tanto $z \in \Sigma(g)$.

La prueba de (b) es similar.

Probemos el inciso (c). Supongamos que $\rho_1(g) = \alpha$, entonces por el teorema (3.4.) se tiene que $\rho(h_1) = \alpha$ y por el lema (3.7.) $O(z_{1,1}, h_1) \cap (z_{2,1}, z_{1,1}) = \emptyset$. Como $z_{1,1} = m_1$ y $z_{2,1} = \overline{m_1}$ se sigue que las órbitas de m_1 bajo h_1 y bajo g coinciden y no intersecan a $(\overline{m_1}, m_1)$; en particular $m_1 \in \Sigma(g)$, además $\rho(m_1, g) = \alpha$. \square

El hecho de que $z \in \Sigma(g)$ no implica que su órbita sea como la órbita de un homeomorfismo.

Como ya hemos mostrado antes, puede haber puntos periódicos en $\Sigma(g)$ que no sean $\frac{p}{q}$ -periódicos (por ejemplo, hay puntos de periodo cuatro con número de rotación $\frac{1}{2}$). Es más, puede haber puntos $\frac{p}{q}$ -periódicos en $\Sigma(g)$ cuya órbita no sea conjugada a la de una rotación.

Por ejemplo, consideremos la órbita bajo f del punto $0.\overline{00011}$. Este punto es $\frac{2}{5}$ -periódico. Esta órbita corresponde a la órbita bajo \widehat{g} que está ilustrada en las figuras.

FIGURA 9. Gráficas de $\widehat{G}(x)$ y de $\widehat{g}(x)$

$w_0 \in \Sigma(\widehat{g})$. w_0 es $\frac{2}{5}$ -periódico, pero, como se ve en la figura, su órbita no es igual a la órbita de algún endomorfismo que no invierta la orientación.

Sin embargo, para todo $r \in \rho(g)$ existen puntos cuya dinámica es la misma que la de un endomorfismo que no invierte la orientación. Estos puntos son precisamente aquellos cuya órbita coincide con la de

alguna h_μ . Más específicamente:

TEOREMA 3.6. *Dada $g \in \mathbf{A}$, para cada $r \in \rho(g)$, existe un conjunto no vacío Λ_r contenido en $\Sigma(g)$, tal que para toda $z \in \Lambda_r$*

- i) $\rho(z, g) = r$ y la órbita de z coincide con la órbita de un endomorfismo que no invierte la orientación.
- ii) Λ_r es la unión de conjuntos cerrados e invariantes.

Demostración: Sea $r \in \rho(g)$ y sea $\mu \in [1, 2]$ tal que $\rho(h_\mu) = r$. Sea

$$\mathbf{B}_\mu = \bigcap_{i=0}^{\infty} h_\mu^{-i}([z_{1,\mu}, z_{2,\mu}]).$$

\mathbf{B}_μ es precisamente el conjunto formado por los puntos cuyas órbitas bajo h_μ no intersecan $(z_{1,\mu}, z_{2,\mu})$, y por lo tanto g coincide con h_μ en \mathbf{B}_μ . $\mathbf{B}_\mu \neq \emptyset$ por el lema (3.7) y es cerrado e invariante bajo g (la prueba es igual que la que se hizo para $\Sigma(g)$). Sea

$$\Lambda_r = \bigcup_{\mu} \{\mathbf{B}_\mu | \rho(h_\mu) = r\},$$

entonces Λ_r es la unión de cerrados e invariantes. □

Bibliografía

- [Bp] Boyland, Philip. *Bifurcations of Circle Maps: Arnol'd Tongues, Bistability and Rotation Intervals* Communications in Mathematical Physics. 106, 353-381. Springer-Verlag, 1986.
- [Ne-Pa-Ta] Newhouse, S., Palis, J., Takens, F. *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 57, 5-72 (1983).
- [It] Ito, R. *Rotation Sets are closed*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 89, 107-111. 1981.
- [Ha] Hall, G. Personal communication with Boyland, P. 1983.
- [Ka] Kadanoff, L. Supercritical behavior of an ordered trajectory. J. Stat. Phys. 31, 1-27. 1983.
- [Ha-Ka] Hasselblatt, B., Katok, A. *A First Course in Dynamics with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press. 123-139. 2003.
- [Gu] Guzmán, Ana. *Dinámica generada por homeomorfismos del círculo*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1985.
- [De] Devaney, R. *Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley.