



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE QUÍMICA

PRÁCTICAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR A RÉGIMEN  
TRANSITORIO

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO QUÍMICO**

P R E S E N T A :

**GERARDO IVÁN ROCHA MIMBRERA**



MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## JURADO ASIGNADO

Presidente: Antonio Valiente Barderas

Vocal: Barragan Aroche José Fernando

Secretario: Eduardo Vivaldo Lima

1<sup>er</sup> Suplente: Ricardo Pérez Camacho

2<sup>o</sup> Suplente: Blanca Estela García Rojas

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Ingeniería Química, del Departamento de Ingeniería Química de la Facultad de Química, de la Universidad Nacional Autónoma de México.

ASESOR DE TESIS:

  
Dr. Antonio Valiente Barderas

SUSTENTANTE:

  
Gerardo Iván Rocha Mimbrera

## Agradecimientos

**A la Universidad Nacional Autónoma de México** por seguir siendo la mejor opción educativa y por permitirme formarme como profesional.

### **A los miembros del jurado**

Antonio Valiente Barderas

Barragan Aroche José Fernando

Eduardo Vivaldo Lima

Por las aportaciones en sus comentarios y tiempo dedicado para este trabajo.

En especial a mi asesor de Tesis, Dr. Antonio Valiente Barderas, por todo su apoyo, paciencia y por ser un ejemplo a seguir.

## Dedicatorias

**A mi madre** que siempre me alentó a seguir adelante con su ejemplo, aún estando en un lugar tan bello e inimaginable físicamente.

**A mi padre** por heredarme su esfuerzo, sus ganas y confianza en esta vida.

### **A mis hermanos:**

**Margarita** porque sin ella esta misión no hubiera sido posible, gracias por tu esfuerzo y tus sacrificios y por creer en mí.

**Gaby** por tu apoyo y confianza brindada en todo este tiempo.

**Alfredo** por tus consejos y tu apoyo incondicional.

A mi pequeña gran familia – **tía Alejandra, Adriana, Omar y Alfredito** – por estar ahí en todo momento y por contagiarme con sus ganas vivir, gracias por compartir esta vida.

A mis grandes amigos con los cuales he crecido y compartido esos buenos momentos que nutren la existencia de formas graciosas: Alejandro, Beto, Carlos, Claudia, Cheko, Hugo, Javier, Manuel, Mauricio, Miguel, Moy<sup>†</sup>, Santi, Rafael y Raúl.

Y a mis compañeros de la escuela que me acompañaron e hicieron más agradable el paso por la facultad: Andrea, Angel, Charly, Elizabeth, Gaby, Gustavo, Hugo, Irais, Isaac, Isabel, Iván, Karina, Leo, Mara, Mirna, Ricardo, Sandra y Ulises.

## ÍNDICE

JURADO ASIGNADO.....	2
ÍNDICE.....	4
ÍNDICE DE FIGURAS.....	6
ÍNDICE DE TABLAS.....	9
ANEXOS.....	10
INTRODUCCIÓN.....	11
OBJETIVOS.....	13
Capítulo.I <b>FUNDAMENTOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR</b> .....	14
1.1 La transferencia de calor como un proceso de no equilibrio termodinámico.....	14
1.2 Conducción a Régimen Estacionario.....	16
1.3 Convección.....	18
1.4 Radiación.....	20
Capítulo.II <b>CONDUCCIÓN A RÉGIMEN TRANSITORIO</b> .....	23
2.1 Ecuación de difusión de calor.....	23
2.1.1 Condiciones iniciales y de frontera.....	27
2.2 Método de la resistencia interna despreciable (sistemas concentrados).....	29
2.3 Calentamiento y enfriamiento de objetos sólidos a régimen transitorio.....	32
2.3.1 Conducción a régimen no permanente con resistencia superficial grande ( $Bi = hL/Ks \rightarrow 0$ ).....	33
2.3.2 Conducción a régimen no permanente con resistencia superficial despreciable ( $Bi = hL/Ks \rightarrow \infty$ ).....	34
2.3.3 Conducción a régimen no permanente en donde ambas, superficie y resistencia interna son importantes (Biot $\rightarrow$ intermedios).....	36
2.4 Gráficas para la conducción de calor a régimen transitorio en sólidos.....	40

<b>Capítulo.III</b>	<b>PRÁCTICAS ACTUALES DE TRANSFERENCIA DE CALOR A RÉGIMEN TRANSITORIO .....</b>	<b>46</b>
3.1	Balance de materia y energía a régimen transitorio.....	47
3.1.1	Problema .....	47
3.1.2	Parte experimental.....	47
3.1.3	Cuestionario.....	52
3.2	Convección forzada en una barra sólida.....	61
3.2.1	Problema .....	61
3.2.2	Parte experimental.....	61
3.2.3	Cuestionario.....	67
3.3	Conducción y convección en una barra sólida.....	77
3.3.1	Problema .....	77
3.3.2	Parte experimental.....	77
3.3.3	Cuestionario.....	83
<b>Capítulo.IV</b>	<b>EXPERIMENTO PROPUESTO.....</b>	<b>94</b>
4.1	Transferencia de calor en esferas a régimen no permanente.....	96
4.1.1	Problema .....	96
4.1.2	Parte experimental.....	96
4.1.3	Memoria de cálculo.....	100
4.1.4	Cuestionario.....	106
<b>Capítulo.V</b>	<b>GUIÓN EXPERIMENTAL PROPUESTO PARA EL ALUMNO .....</b>	<b>125</b>
5.1	Transferencia de calor en esferas a régimen no permanente.....	125
5.1.1	Problema .....	125
5.1.2	Parte experimental.....	125
5.1.3	Cuestionario.....	128
<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>		<b>129</b>
<b>CONCLUSIONES .....</b>		<b>132</b>

**RECOMENDACIONES** ..... 136

**BIBLIOGRAFÍA** ..... 139

**ANEXOS** ..... 141

**ÍNDICE DE FIGURAS**

Figura 1.1. Transferencia unidimensional de calor por conducción..... 17

Figura 1.2 Desarrollo de la capa límite en la transferencia de calor por convección. .... 18

Figura 2.1 Volumen de control diferencial ..... 24

Figura 2.2 Pared plana sometida a un flujo de convección ..... 30

Figura 2.4 Calor perdido y calor remanente en un objeto que se enfría con resistencia superficial despreciable. Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986). .... 35

Figura 2.5 Distribución de temperaturas dentro de esferas que están sometidas a enfriamiento, caso general. Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986). .... 37

Figura 2.6 Distribución de temperaturas dentro de esferas que están sometidas a enfriamiento, caso general. Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986). .... 38

Figura 2.7 Esquina superior izquierda de las figuras 2.5 y 2.6 Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986). .... 39

Figura 2.8 Representación general de una esfera, un cilindro finito y una placa plana infinita. Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986). .... 39

Figura 2.9 Temperatura del centro como función del tiempo en una esfera de radio  $r_0$ . Fuente: Incropera 1999. Fundamentos de Transferencia de calor ..... 42

Figura 2.10 Distribución de temperatura en una esfera de radio  $r_0$ . Fuente: Incropera 1999. Fundamentos de Transferencia de calor. .... 43

Figura 2.11 Cambio de energía interna como función del tiempo para una esfera de radio $r_0$ . Fuente: Incropera 1999. Fundamentos de Transferencia de calor. ....	43
Figura 3.1 Equipo para balances de materia y energía a régimen no permanente visto de frente 1.....	48
Figura 3.2 Equipo para balances de materia y energía a régimen no permanente visto de frente 2.....	49
Figura 3.3 Diagrama del mezclador .....	52
Figura 3.4 Temperatura experimental vs tiempo experimental.....	58
Figura 3.5 Temperatura teórica vs tiempo experimental .....	58
Figura 3.6 Temperatura experimental vs tiempo teórica .....	59
Figura 3.7 Perfil de temperaturas en el tanque térmico.....	59
Figura 3.8 Anexo A de la práctica 3.1 .....	60
Figura 3.9 Cambiador de calor de flujo cruzado vista lateral.....	63
Figura 3.10 Cambiador de calor de flujo cruzado vista lateral.....	63
Figura 3.11 Cambiador de calor de flujo cruzado vista lateral trasera.....	64
Figura 3.12 Diferencia de temperaturas logarítmica vs tiempo .....	67
Figura 3.13 Gráfico de ajuste para la barra de cobre .....	68
Figura 3.14 Diagrama de flujo transversal sobre un barra cilíndrica de longitud L .....	69
Figura 3.15 Gráfico de transferencia de calor y cantidad de movimiento entre un cilindro largo y una corriente transversal. Fuente: Bird. Fenómenos de Transporte, 1998.....	74
Figura 3.16 Anexo A de la práctica 3.2 .....	76
Esquema de condiciones en el graficador.....	76
Figura 3.17 Equipo para la transferencia de calor por conducción, convección y radiación en una barra de aluminio, vista lateral .....	79
Figura 3.18 Equipo para la transferencia de calor por conducción, convección y radiación en una barra de aluminio, vista lateral trasera .....	79

Figura 3.19 Equipo para la transferencia de calor por conducción, convección y radiación en una barra de aluminio, vista de frente.....	80
Figura 3.20 Transferencia de calor por conducción y convección en una barra de aluminio a través de un elemento diferencial .....	83
Figura 3.21 Transferencia de calor en una barra cilíndrica a régimen permanente.....	88
Figura 3.22 Transferencia de calor en una barra cilíndrica a régimen transitorio .....	88
Figura 4.1 y 4.2 Llenado (izquierda) y encendido (derecha) del baño de temperatura.....	98
Figura 4.3 Calentamiento de la esfera de aluminio a 50 °C con tapón.....	98
Figura 4.4 Calentamiento de la esfera de madera a 50 °C con tapón.....	99
Figura 4.5 Corridas 1, 2 y 3 en la esfera de aluminio a 50 °C .....	106
Figura 4.6 Corridas 4, 5, 6 y 7 en la esfera de aluminio a 60 °C .....	106
Figura 4.7 Corridas 1, 2 y 3 en la esfera de madera a 50 °C .....	107
Figura 4.8 Corridas 4 y 5 en la esfera de madera a 50 °C .....	107
Figura 4.9 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la esfera de aluminio a 50 °C .....	115
Figura 4.10 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la esfera de aluminio a 60 °C .....	116
Figura 4.11 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 1 .....	120
Figura 4.12 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 2 .....	120
Figura 4.13 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 3 .....	121
Figura 4.14 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 4 .....	121
Figura 4.15 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 5 .....	122

**ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 2.1. Tipos de condiciones de frontera ..... 28

Tabla 3.1. Características de flujo en el tanque térmico..... 50

Tabla 3.2 Historia de temperaturas ..... 50

Tabla 3.3 Historia de flujos a la salida..... 51

Tabla 3.4 Historia de temperaturas teórica y experimental en el tanque térmico ..... 57

Tabla 3.5 Diferencias de temperatura logarítmica vs tiempo ..... 65

Tabla 3.6 Diferencias de temperatura logarítmica vs tiempo ..... 66

Tabla 3.7 Coeficientes de la correlación para diferentes intervalos del número de Reynolds ..... 72

Tabla 3.8 Propiedades termofísicas del aire a 318.5 K..... 75

Tabla 3.9 Perfil de temperaturas a lo largo de la barra ..... 81

Tabla 3.10 Perfil de temperaturas a lo largo de la barra ..... 82

Tabla 4.1 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida n ..... 100

Tabla 4.2 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida 1..... 101

Tabla 4.3 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida 2 ..... 102

Tabla 4.4 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida 3 ..... 103

Tabla 4.5 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida 4 .....	104
Tabla 4.6 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida 5 .....	105
Tabla 4.7 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 1 .....	109
Tabla 4.8 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 2 .....	110
Tabla 4.9 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 3 .....	110
Tabla 4.10 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 4 .....	111
Tabla 4.11 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 5 .....	111
Tabla 4.12 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 6 .....	112
Tabla 4.13 Cálculo de $h_m$ para la corrida Aluminio 7 .....	112
Tabla 4.14 Cálculo de temperatura teórica vs temperatura experimental con $h_m$ a 50 °C en la esfera de aluminio .....	115
Tabla 4.15 Cálculo de temperatura teórica vs temperatura experimental con $h_m$ a 60 °C en la esfera de aluminio .....	116
Tabla 4.16 Resultados corrida madera 1 .....	123
Tabla 5.1. Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida n .....	127

## ANEXOS

<b>Anexo 1</b> Coeficientes para la aproximación de un término en las soluciones de serie de la conducción transitoria unidimensional .....	141
<b>Anexo 2</b> Funciones de Bessel de primera clase y de cero y primer orden ....	142
<b>Anexo 3.</b> Corridas experimentales en la esfera de madera <b>Tabla 4.16</b> Resultados de las corridas 2, 3, 4 y 5.....	143

## INTRODUCCIÓN

Esta tesis propone como punto de partida evaluar la factibilidad de realizar un guión experimental de acuerdo con la filosofía del “Principio de la Reforma de la Enseñanza Experimental” para la asignatura del laboratorio Ingeniería Química I. En donde se muestre y ejemplifique la conducción de calor a régimen transitorio en figuras de geometría definida. Para ello se revisan las características del equipo propuesto, la experimentación a distintas condiciones y el diseño del guión experimental.

También se desarrollan las anteriores prácticas de transferencia de calor a régimen transitorio con las cuales actualmente enseña el laboratorio de ingeniería química. Esto con el propósito de observar y valorar el conocimiento adquirido durante la realización de los guiones experimentales por los alumnos.

El equipo seleccionado para mostrar el mecanismo de conducción a régimen transitorio consta de dos esferas de diferentes materiales y diámetros, sumergidas en un baño de temperatura constante e instrumentos de medición. Este equipo de relativamente pequeñas dimensiones permite que un grupo de aproximadamente cinco personas trabaje en condiciones óptimas durante dos horas.

El contenido de este trabajo comprende una introducción, cinco capítulos y las conclusiones respectivas. En el primer capítulo se analizan las diferencias entre la termodinámica y la transferencia de calor, así como los mecanismos en los cuales se transfiere esta última. El segundo capítulo muestra la deducción de la ecuación de difusión de calor y las distintas formas en como se puede resolver.

En el tercer capítulo se realizan y analizan las prácticas de calor: balance de energía y materia a régimen transitorio, convección forzada en una barra sólida y transferencia de calor a través de una barra cilíndrica. En el cuarto capítulo se elabora el manual para el profesor, que incluye la solución paso a paso para resolver el guión experimental, así como gráficas y tablas de resultados, que muestran las relaciones tanto experimentales como teóricas del fenómeno de conducción de calor a régimen transitorio.

El quinto capítulo contiene el “guión experimental” que es el documento con el que se propone el experimento de acuerdo al Principio de la Reforma de la Enseñanza Experimental.

---

## OBJETIVOS

### Objetivo General:

Proponer un guión experimental basado en los “Principios de la Reforma de la Enseñanza Experimental” donde el alumno evidencie el efecto del mecanismo de conducción de calor a régimen transitorio en geometrías definidas con materiales y tamaños distintos.

### Objetivos Particulares:

- Ilustrar el mecanismo de conducción de calor a régimen transitorio, así como las formas en como se pueden resolver este tipo de problemas.
- Realizar y analizar desde la perspectiva de los “Principios de la Reforma a la Enseñanza Experimental”, las prácticas de transferencia de calor a régimen transitorio con las cuales actualmente cuenta el laboratorio de ingeniería química.
- Desarrollar un guión experimental que sea factible y que permita determinar la historia de los perfiles de temperatura, el coeficiente de transferencia de calor  $h_m$ , así como los modelos que pueden predecir la temperatura teórica para alcanzar el régimen permanente en cada geometría definida.

# Capítulo.I FUNDAMENTOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

## 1.1 La transferencia de calor como un proceso de no equilibrio termodinámico<sup>[4]</sup>

En los albores de la civilización el hombre utilizó su energía muscular – obtenida a través de los alimentos – para empezar a cambiar su entorno de manera que asegurará su supervivencia. Al encontrar un límite en sus fuerzas, impuesto por la acción de la naturaleza, el hombre tuvo que recurrir a un contexto espiritual, el cual explicaba el por qué de esos límites en el entorno, siempre representados en forma de dioses caprichosos, los cuales mostraban ejemplos de progreso para cada cultura. Dentro del desarrollo de la empresa llamada civilización, la humanidad descubrió que se encontraba rodeada de diversas manifestaciones de energía, y que después de muchos esfuerzos empezó a utilizarlas con distintos fines – energía de animales de carga, la energía eólica en la navegación, la hidráulica en los molinos, la geotérmica en baños de aguas termales, la energía contenida en los materiales sólidos, etc. –, las cuales proveyeron tanto de mejores alimentos como de materiales más resistentes para la construcción, dando pie a culturas mas refinadas en lo que respecta a su calidad de vida.

La revolución industrial además de otros factores, se desarrolló gracias al descubrimiento del contenido energético en los materiales líquidos – el petróleo-. Estas sustancias siguen siendo en nuestros días, el combustible del hombre por excelencia. Jeremy Rifking en su libro titulado “La era del hidrógeno” muestra que la etapa que viene gestándose para un futuro es la del aprovechamiento energético de sustancias tipo gas como el hidrógeno como última fase energética real para el planeta <sup>[18]</sup>.

Por lo tanto, nos encontramos en una transición más, la cual de no completarse podría truncar nuestro mito de crecimiento indefinido dado por el desarrollo económico de los países.

De lo anterior se desprende, que las leyes de la termodinámica vienen a ser la ciencia básica que sirve como punto de partida para el estudio y aplicabilidad de la relación del concepto de energía, y esta última a su vez demuestra la importancia de utilizarla lo mejor posible en nuestra civilización para transitar a una nueva era energética con menos impactos negativos, tanto sociales como ambientales. En consecuencia, resulta de gran importancia definir primero el concepto de energía, para así, entender sus múltiples transformaciones y/o mecanismos por las cuales se aprovecha y se transmite en un medio.

Energía – En física, la capacidad para realizar cualquier tipo de trabajo, cuya definición matemática es el producto de fuerza por longitud de desplazamiento. La energía se expresa en muchas formas – energía química, eléctrica, magnética, mecánica, etc. - y puede ser aprovechada hasta un cierto grado de eficiencia, la cual es impuesta por la naturaleza en cada una de ellas <sup>[8]</sup>. La energía se conserva en todas sus transformaciones. Ejemplo de ello, es la energía química contenida en la madera que al quemarla se transforma en calor.

El calor es una cantidad de energía que fluye a través de la frontera del sistema durante un cambio de estado, en virtud de una diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno y que fluye de un punto de temperatura mayor a otro de temperatura menor. A su vez, la temperatura representa la velocidad promedio del movimiento molecular en esa materia. Así pues, un litro de agua a 60 ° C contiene dos veces mas energía que medio litro de agua a 60 ° C (están vibrando doble número de moléculas), pero el litro y el medio litro tienen idéntica temperatura, pues la velocidad promedio del movimiento molecular es la misma en ambos casos <sup>[8]</sup>.

Además del estudio de la termodinámica se sabe que la energía se puede transferir mediante interacciones de un sistema con sus alrededores. Sin embargo, la termodinámica solamente trata de los estados finales del proceso durante el cual ocurre una interacción y no proporciona información alguna con respecto a la naturaleza de esta interacción o la rapidez con que ésta se produce <sup>[8]</sup>.

En la termodinámica no se consideran los mecanismos que realizan el intercambio de calor ni los métodos que existen para calcular la *velocidad* de este intercambio. La termodinámica trata de estados en equilibrio de la materia, donde un estado de equilibrio necesariamente excluye la existencia de un gradiente de temperatura, de un cambio en el tiempo, etc. Aunque la termodinámica sirve para determinar la cantidad de energía que se requiere en forma de calor para que un sistema pase de un estado de equilibrio a otro, no reconoce que *la transferencia de calor es inherentemente un proceso de no equilibrio* <sup>[4]</sup>.

Para que ocurra la transferencia de calor, debe haber un gradiente de temperatura, es decir un desequilibrio termodinámico. Lo que busca la disciplina de la transferencia de calor es complementar la termodinámica mediante la cuantificación de la velocidad a la que ocurren estos cambios <sup>[4]</sup>. Esto se lleva a cabo a través de ecuaciones o modelos que representan los tres mecanismos de transferencia de calor, los cuales se explican a continuación.

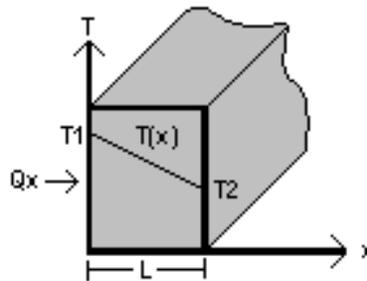
## 1.2 Conducción a Régimen Estacionario

La conducción es el mecanismo molecular de transferencia de calor, el cual se manifiesta por medio de la transferencia de energía de movimiento traslacional, rotacional o vibracional, entre moléculas adyacentes en un material. Las moléculas “más calientes”, presentan mayor energía interna y se encargan de impartir energía a las moléculas colindantes con niveles energéticos menores <sup>[4]</sup>.

El punto de vista moderno es atribuir la transferencia de energía a ondas reticulares inducidas por el movimiento atómico.

Una descripción de la transferencia de calor por el mecanismo de conducción está dado, por la ecuación de Fourier, la cual establece: la conducción es la velocidad con que se transfiere el calor en la dirección “x” por área unitaria perpendicular a la dirección de transferencia, y es proporcional al gradiente de temperatura,  $dT/dx$ , en esta dirección. En conducción de calor,  $q$  es la velocidad y  $\Delta T$  es la fuerza impulsora <sup>[4]</sup>.

Para que la ecuación de Fourier se cumpla se debe mantener una fuente de calor en todo momento, la cual tendrá que ser constante a lo largo del tiempo. Por lo tanto, la conducción se deberá considerar a régimen estacionario. La representación del mecanismo de conducción, descrito en la ley de Fourier, se muestra en la figura 1.1



$$q_x = -K \frac{dT}{dx} \dots (1.1) \quad \text{donde } q_x [=] \frac{W}{m^2}$$

Figura 1.1. Transferencia unidimensional de calor por conducción

La constante de proporcionalidad  $K$ , es una propiedad de transporte conocida como conductividad térmica la cual, tiene unidades de  $(W/mK)$  y es una característica del material de la pared. Ésta mide la habilidad de las sustancias para conducir el calor <sup>[4]</sup>.

La conductividad térmica de un sólido es mayor que la de un líquido, que a su vez es mayor que la de los gases. Esta diferencia se debe en gran parte a las diferencias en el espacio intermolecular para los dos estados de la materia.

El signo menos es una consecuencia del hecho de que el calor se transfiere en la dirección de la temperatura decreciente. También se deduce que un material que no transfiere calor se denomina material aislante. Éste se compone de materiales de baja conductividad térmica combinados para lograr un sistema de conductividad térmica aun más baja <sup>[4]</sup>.

### 1.3 Convección

El modo de transferir calor por convección se sustenta tanto en el movimiento molecular aleatorio como en el movimiento volumétrico del fluido en la capa límite. Considere el flujo de un fluido sobre la superficie calentada de la figura 1.2. Una consecuencia de la interacción fluido – superficie es el desarrollo de una región en el fluido en que la velocidad varia de cero en la superficie a un valor finito  $v_{\infty}$  asociado con el flujo. Esta región del fluido se conoce como capa límite hidrodinámica o de velocidad. Mas aun, si las temperaturas de la superficie y del fluido difieren, habrá una región del fluido a través de la cual la temperatura varía de  $T_s$  en  $y=0$  a  $T_{\infty}$  en el flujo exterior <sup>[4][11]</sup>.

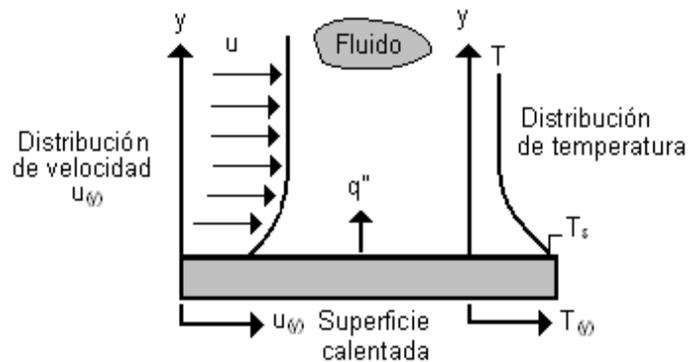


Figura 1.2 Desarrollo de la capa límite en la transferencia de calor por convección.

La contribución debida al movimiento molecular aleatorio (difusión) domina cerca de la superficie donde la velocidad del fluido es baja. De hecho, en la interfaz entre la superficie y el fluido ( $y=0$ ), la velocidad del fluido es cero y el calor solo se transfiere por este mecanismo. La contribución debida al movimiento volumétrico del fluido se origina del hecho de que la capa límite crece a medida que el flujo avanza en la dirección  $x$  <sup>[4]</sup>.

La transferencia de calor por convección se clasifica de acuerdo con la naturaleza del flujo:

- Convección forzada – Cuando el flujo es causado por medios externos como un ventilador, una bomba o vientos atmosféricos. Ejemplo: Considere el uso de una bomba que succiona el aire, la cual aumenta su velocidad, proporcionando enfriamiento por aire.
- Convección libre o natural – El flujo es inducido por fuerzas de empuje que surgen a partir de diferencias de densidad ocasionadas por diferencias de temperatura. Ejemplo: Considere la formación de los frentes fríos, ocasionados por el choque de masas de aire a diferentes temperaturas.

Por lo general, la energía que se transfiere es la energía térmica del fluido. Sin embargo hay que mencionar que existen procesos de convección en los que existen intercambios de calor latente. Este intercambio se asocia con un cambio de fase entre los estados líquido y vapor del fluido <sup>[4][11]</sup>.

Como ejemplo se tiene a la ebullición y la condensación. En situaciones prácticas y sobre todo para el manejo de condiciones de frontera, la transferencia de calor por convección se evalúa como la velocidad del intercambio de calor en la interfase entre un fluido y un sólido <sup>[14]</sup>.

Esta velocidad de calor transferido por convección es proporcional a la diferencia de temperaturas y se expresa como:

$$q_{conv} = h_T A (T_m - T_s) = h_T A \Delta T \quad \dots (1.2)$$

En donde  $h_T$  es llamado el coeficiente de transferencia de calor por convección,  $A$  es el área de interfase donde el calor esta siendo transferido y  $\Delta T$  es la fuerza impulsora para la transferencia de calor,  $T_m$  es la temperatura promedio del fluido y  $T_s$  es la temperatura interfacial. El coeficiente  $h_T$  se determina empíricamente y es una función de las condiciones en la capa límite mencionada arriba, en las que influyen la geometría, la naturaleza del movimiento del fluido y una variedad de propiedades termodinámicas del fluido y de transporte <sup>[14]</sup>.

Cualquier estudio de convección se reduce finalmente a un estudio de los medios por los que es posible determinar el coeficiente de transferencia de calor ya sea puntual o promedio del sistema <sup>[20]</sup>.

## 1.4 Radiación

Se define como radiación a la energía emitida por la materia que se encuentra a una temperatura finita. La radiación se puede atribuir, sin importar la forma de la materia, a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas constitutivos. La energía en la radiación es transportada por ondas electromagnéticas (o fotones) <sup>[4]</sup>.

La radiación emitida depende de la temperatura del cuerpo emisor en dos aspectos: por un lado, la cantidad de radiación aumenta tremendamente conforme lo hace la temperatura, y, por otro, su longitud de onda disminuye cuando la temperatura sube <sup>[8]</sup>.

Mientras la transferencia de energía por conducción o convección requiere la presencia de un medio material, la radiación no lo precisa.

La potencia emisiva superficial,  $E_b$ , es la radiación que una superficie emite a partir de su energía térmica y la velocidad con que ésta se libera por unidad de área ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). Sin embargo, existe un límite superior para la potencia emisiva, que es establecida por la ley de Stefan – Boltzman <sup>[4][11]</sup>:

$$E_b = \Gamma T_s^4 \dots (1.3)$$

donde  $T_s$  es la temperatura absoluta de la superficie en Kelvin y  $\Gamma$  es la constante de Stefan – Boltzman, la cual tiene un valor de  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2\text{K}^4$ . Dicha superficie se llama radiador ideal o cuerpo negro. El flujo de calor emitido por una superficie real es menor en orden de magnitud, que el de un cuerpo negro a la misma temperatura y está dado por la siguiente ecuación:

$$E = \epsilon \Gamma T_s^4 \dots (1.4)$$

Podemos ver que el nuevo término  $\epsilon$ , es una propiedad radiativa de la superficie denominada *emisividad*. Con valores del rango de  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , esta propiedad proporciona una medida de la eficiencia con que una superficie emite energía en relación con un cuerpo negro. Esta propiedad depende del material, de la superficie y del acabado <sup>[4][11]</sup>.

La siguiente expresión proporciona la diferencia entre la energía térmica que se libera debido a la emisión por radiación y la que se gana debido a la absorción de radiación:

$$q_{rad} = \frac{q}{A} = \varepsilon Eb(T_s) - \alpha(G) = \varepsilon\gamma(T_s^4 - T_{atr}^4) \dots (1.5)$$

En comparación con los otros dos mecanismos de transferencia de calor (conducción y convección), la radiación se hace importante como mecanismo dominante a temperaturas elevadas, y es independiente de las circunstancias del flujo del fluido <sup>[20]</sup>.

## Capítulo.II CONDUCCIÒN A RÈGIMEN TRANSITORIO

### 2.1 Ecuación de difusión de calor

No existe un sistema que de manera inicial se encuentre bajo condiciones estacionarias. Cierta tiempo debe transcurrir en la transferencia de calor para que el sistema alcance el estado de equilibrio. Durante ese período de transición el sistema está bajo condiciones de estado no estacionario. Claramente ningún sistema puede permanecer bajo condiciones no estacionarias, perpetuamente. La temperatura del sistema eventualmente alcanzará la temperatura de la fuente de calor y cuando ésto suceda, el sistema entrará en la fase de equilibrio térmico, a la cual hace referencia la termodinámica <sup>[4]</sup><sup>[11]</sup>.

Los mecanismos descritos anteriormente, parten de la idea de que la transferencia de calor se realiza en estado estacionario. El estado no estacionario es un poco más complicado que el estado estacionario, y en general los problemas que implican procesos en estado no estacionario deben considerar tanto las condiciones de frontera como las posibles condiciones iniciales que poseen las ecuaciones diferenciales deducidas por el balance general de energía, dentro de la cual se encontrarán representados los mecanismos de transferencia de calor como conducción, convección y/o radiación, según dominen en el fenómeno.

La ecuación de difusión de calor representa la transferencia de calor por conducción a régimen transitorio para un volumen de control que está dentro de los límites del problema. Esta ecuación describe el transporte de energía en un sólido o fluido homogéneo donde la transmisión de calor acompaña al flujo de un fluido <sup>[1]</sup>. A continuación se mostrarán los pasos a seguir para desarrollar la ecuación diferencial para la conducción a régimen inestable <sup>[4]</sup>.

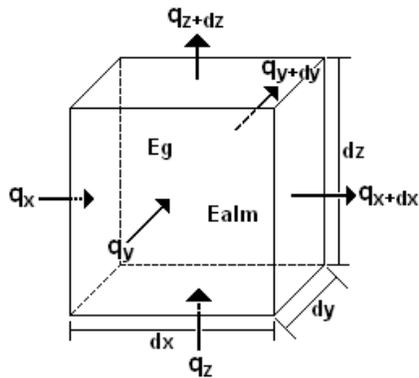
**Primer paso:** definición de un volumen de control diferencial


Figura 2.1 Volumen de control diferencial

Considerar un medio homogéneo, en el cual no existe movimiento de volumen y en el que la distribución de temperaturas se expresa en coordenadas cartesianas  $T(x, y, z)$ . Se elige formular la primera ley de la termodinámica en un instante.

Las velocidades de transferencia de calor por conducción en las superficies opuestas se expresan como una expansión en series de Taylor donde, omitiendo los términos de orden superior, se obtienen las ecuaciones 2.1 – 2.3.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad \dots (2.1)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad \dots (2.2)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad \dots (2.3)$$

En palabras esto quiere decir: para la ecuación 2.1 se afirma que el componente  $x$  de la rapidez de la transferencia de calor en  $x + dx$  es igual al valor de este componente en  $x$  más la cantidad por la que cambia con respecto a  $x$  veces  $dx$ .

**Segundo paso:** identificación de los procesos que intervienen en la transferencia de energía.

Dentro del medio puede haber un término de fuente de energía asociado con la velocidad de generación de energía térmica. Este término se representa como:

$$E_g = q \, dx \, dy \, dz \quad \dots (2.4)$$

En donde  $q$  es la rapidez a la que se genera energía por unidad de volumen del medio ( $W/m^3$ ). Además pueden ocurrir cambios en la cantidad de energía térmica interna almacenada por el material en el volumen de control. El material no deberá experimentar un cambio de fase. Teniéndose ésto como cierto, los términos o efectos de energía latente no existen y el término de almacenamiento de energía en un tiempo se expresa como:

$$E_{alm} = \rho \, C_p \, \frac{dT}{dt} \, dx \, dy \, dz \quad \dots (2.5)$$

$E_g$  y  $E_{alm}$  representan diferentes procesos físicos. El término de  $E_g$  es la manifestación de algún proceso de conversión de energía que puede incluir energía térmica por un lado y energía química, eléctrica o nuclear por el otro. Para el término  $E_{alm}$  se considera que será positivo si la energía térmica se genera en el material (fuente) a expensas de alguna otra forma de energía; es negativo (sumidero) si la energía térmica se consume.

**Tercer paso:** introducir las ecuaciones de flujo apropiadas

Sobre una base de rapidez, la forma general del requerimiento de conservación de la energía es

$$E_{ent} + E_g - E_{sal} = E_{alm} \quad \dots (2.6)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.1 a la 2.5 en la 2.6, tenemos que:

$$q_x + q_y + q_z + q dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho C p \frac{dT}{dt} dx dy dz \dots (2.7)$$

como

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

y despejando

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx = q_x - q_{x+dx}$$

y reordenando

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q dx dy dz = \rho C p \frac{dT}{dt} dx dy dz$$

La rapidez de conducción de calor se evalúa a partir de la ley de Fourier como

$$q_x = -K dy dz \frac{dT}{dx}; \quad q_y = -K dx dz \frac{dT}{dy}; \quad q_z = -K dx dy \frac{dT}{dz};$$

sustituyendo las ecuaciones de rapidez de calor de Fourier en la ecuación de flujo se encuentra que

$$K dy dz dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + K dx dz dy \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + K dx dy dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q dx dy dz = \rho C p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

dividiendo las dimensiones del volumen de control (dx dy dz) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho C p \frac{dT}{dt}$$

Por lo tanto, la ecuación de difusión de calor describe una condición física importante es decir, la conservación de la energía.

El término  $\partial(K\partial T/\partial x)\partial x$  se relaciona con el flujo neto de calor por conducción en el volumen de control para la dirección en x. Una forma simplificada es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots (2.8)$$

donde  $\alpha = K / \rho C_p$  es llamada difusividad térmica  $\alpha$  expresa la capacidad con que el campo de temperaturas se distribuye a lo largo del área del sólido en un lapso de tiempo. Si  $q/K = 0$ , la forma abreviada de la ecuación de difusión de calor (2.8) es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad \dots (2.9)$$

### 2.1.1 Condiciones iniciales y de frontera

Para determinar la distribución de temperaturas en un medio es necesario resolver la forma apropiada de la ecuación de difusión de calor (2.8). Sin embargo esta solución depende de las condiciones físicas que existan en las fronteras del medio y, si la situación depende del tiempo, también se deberá considerar el tiempo inicial <sup>[4]</sup>.

Debido a que la ecuación de difusión de calor es de segundo orden en las coordenadas espaciales, deben expresarse dos condiciones de frontera necesarias en la descripción del sistema. Sin embargo, dado que la ecuación es de primer orden en el tiempo, se debe especificar solo una condición de tiempo, denominada condición inicial <sup>[4][11]</sup>.

Las tres clases de condiciones de frontera que normalmente se usan en la transferencia de calor se resumen en la tabla 2.1

**Tabla 2.1. Tipos de condiciones de frontera**

Condiciones de frontera	Diagrama
1. Temperatura superficial constante $T(0, t) = T_s$	
2. Flujo de calor superficial constante (a) Flujo finito de calor $-K \frac{dT}{dx} = q_s$ (b) Superficie adiabática o aislada $\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = 0$	
3. Condición de convección superficial $-K \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = h [T_\infty - T(0, t)]$	

Fuente: Fundamentos de Transferencia de Calor. Incropera 1999.

La primera condición corresponde a una situación en que la superficie se mantiene a una temperatura fija,  $T_s$ . Esta normalmente se denomina “Condición de Dirichlet” o condición de frontera de primera clase. Se usa mucho cuando la superficie está en contacto con un sólido que se funde o con un líquido en ebullición. En ambos casos hay transferencia de calor a la superficie, mientras que la superficie permanece a la temperatura del proceso de cambio de fase. La segunda condición corresponde a la existencia de un flujo de calor constante en la superficie <sup>[4]</sup>. Este flujo de calor se relaciona con el gradiente de temperatura en la superficie mediante la ley de Fourier, expresada como:

$$q_s(0) = -K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \dots (2.10)$$

Esta es denominada como la condición “Neumann” o condición de segunda clase y se logra uniendo un calentador eléctrico de película delgada a la superficie. Un caso especial de esta condición corresponde a la superficie perfectamente aislada, o adiabática, para la que  $\delta T / \delta x|_{x=0} = 0$ . La condición de frontera de tercera clase corresponde a la existencia de calentamiento (o enfriamiento) por convección en la superficie <sup>[4]</sup>.

## 2.2 Método de la resistencia interna despreciable (sistemas concentrados)

La esencia del método de resistencia interna despreciable es la suposición de que la temperatura del sólido es *espacialmente uniforme* en cualquier instante durante el proceso transitorio. Esta suposición implica que los gradientes de temperatura dentro del sólido sean insignificantes. De acuerdo con la ley de Fourier, la conducción de calor en ausencia de un gradiente de temperatura implica la existencia de una conductividad térmica infinita. Esta condición físicamente es imposible. Sin embargo, aunque la condición nunca se satisface de forma exacta, se acercará mucho a ello si la resistencia a la conducción dentro del sólido (sistema concentrado) es pequeña comparada con la resistencia a la transferencia de calor entre el sólido y sus alrededores <sup>[4]</sup>.

Al no tomar en cuenta los gradientes de temperatura dentro del sólido, ya no es posible considerar el problema desde dentro del marco de la ecuación de difusión de calor. En su lugar, la respuesta de temperatura transitoria se determina realizando un balance global de energía en el sólido <sup>[4]</sup>. Este balance debe relacionar la velocidad de pérdida de calor en la superficie con la rapidez de cambio de energía interna, quedando de la siguiente manera

$$\frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{(T_{s,2} - T_{\infty})} = \frac{(L / kA)}{(1 / hA)} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k_{sol}} = Bi \dots (2.11)$$

La relación  $(hL/k)$  se denomina número de Biot. Este número proporciona una medida de la caída de temperatura en el sólido en relación con la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido. Por ejemplo si  $Bi \ll 1$ , *la resistencia a la conducción dentro del sólido es mucho menor que la resistencia a la convección a través de la capa límite del fluido* <sup>[4]</sup>. La representación gráfica del número de Biot se muestra en la siguiente figura.

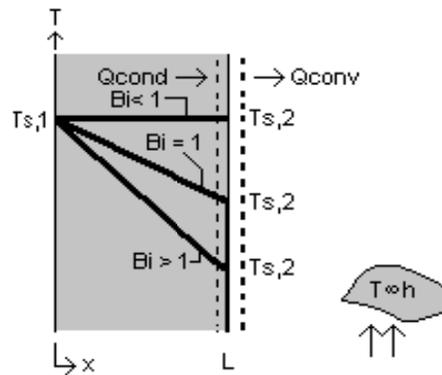


Figura 2.2 Pared plana sometida a un flujo de convección

De lo anterior se sigue que, cuando se presente un problema con mecanismos de conducción así como de convección de transferencia de calor, se debe calcular primero el número de Biot, satisfaciéndose la condición de que:

$$Bi = \frac{hL_c}{k_{sol}} < 0.1 \dots (2.12)$$

donde el valor de  $L_c = V/A_s$ . Esto proporcionará un error asociado pequeño en el uso del método de la resistencia interna despreciable. Por lo tanto, se considera que el cuerpo posee una alta conductividad térmica.

Por medio del análisis dimensional se puede deducir que las soluciones de las ecuaciones de calor a régimen transitorio están en función de los siguientes números adimensionales <sup>[19]</sup>:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \dots (2.13)$$

En consecuencia  $\theta^*$  debe estar en el rango  $0 \leq \theta^* \leq 1$ . Una coordenada espacial adimensional se define como

$$x^* = \frac{x}{L} \quad \dots (2.14)$$

donde L es la mitad del espesor de la pared plana, es también llamado el módulo de posición. El tiempo adimensional se define como

$$t^* = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo \quad \dots (2.15)$$

donde  $t^*$  es el módulo o número de Fourier adimensional, el cual es una medida del calor conducido a través del cuerpo en relación con el calor almacenado. Por tanto, un valor grande del número de Fourier indica una propagación más rápida del calor a través del cuerpo <sup>[11]</sup>. De lo anterior, se desprende que la forma adimensional para la transferencia de calor por conducción, se expresa ahora como

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = f(x^*, Fo, Bi) \quad \dots (2.16)$$

La ecuación 2.16 implica que para una geometría establecida, la distribución de temperaturas a régimen transitorio es una función de  $x^*$ , Fo y Bi. El trabajar en forma adimensional simplifica muchísimo la presentación y utilización de soluciones transitorias <sup>[4][11][20]</sup>.

## 2.3 Calentamiento y enfriamiento de objetos sólidos a régimen transitorio <sup>[12]</sup>

Si un objeto caliente es sumergido dentro de agua fría, éste se enfría, pero no instantáneamente. Dos son los factores que gobiernan el enfriamiento del objeto:

- La película de resistencia en la superficie del objeto, caracterizado, por el valor del coeficiente de transferencia de calor  $h$  para esa situación; y
- La cantidad de flujo de calor hacia el interior del objeto. La ecuación diferencial que gobierna este proceso es

— — — — —

La importancia relativa de los términos de la superficie y de la resistencia interna está caracterizada, por el número de Biot, definido en la sección 2.2

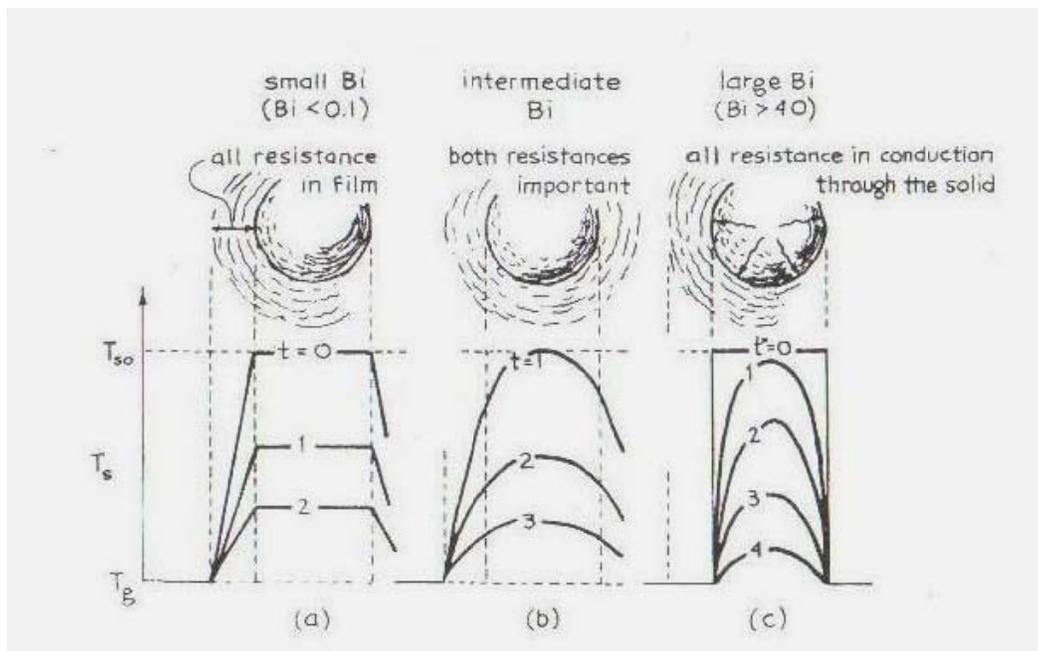


Figura 2.3 Historia temperatura – tiempo para una partícula que se enfría con diferentes números de Biot.

Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986).

Para números de Biot pequeños la principal resistencia se encuentra en la película. Para números grandes de Biot, la principal resistencia es en la conducción del calor dentro del cuerpo. La figura 2.3 muestra la historia temperatura – tiempo de varios regímenes para una partícula esférica [12].

Primero consideraremos los dos casos extremos y después el caso general donde ambas resistencias son importantes.

### 2.3.1 Conducción a régimen no permanente con resistencia superficial grande ( $Bi = hL/Ks \rightarrow 0$ ) [12]

En este extremo se considera que el objeto debe ser isotérmico a cualquier tiempo. Un balance de energía alrededor del objeto caliente que está siendo enfriado da

$$-q = \left( \begin{array}{l} \text{calor transferido a} \\ \text{través de la película} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{cantidad de calor} \\ \text{perdido por el objeto} \end{array} \right) \quad [W]$$

$$-q = hA(T_1 - T_\infty) = -V\rho Cp \frac{dT}{dt} \quad \dots (2.17)$$

Separando variables e integrando, con  $hA/V\rho Cp$  constante, se obtiene:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_{max}} = \frac{T_1 - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-Fo Bi} = e^{-\frac{h t}{\rho Cp L}} \quad \dots (2.18)$$

La cantidad instantánea de calor perdido en el objeto es encontrada mediante la combinación de las ecuaciones 2.17 y 2.18, esto es:

$$-q = -V\rho Cp \frac{dT}{dt} = hA(T_0 - T_\infty)e^{-Fo Bi} \quad \dots (2.19)$$

Otra forma similar de la ecuación 2.18 es:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[ - \left( \frac{h_m A_s}{\rho V C_p} \right) t \right] \dots (2.20)$$

La ecuación 2.20 se conoce como ecuación de enfriamiento Newtoniano.  $T(t)$  en la ecuación 2.20 es la temperatura del sólido a un tiempo  $t$ ,  $T_i$  es la temperatura inicial,  $T_\infty$  es la temperatura a la cual se encuentra el medio o fluido,  $\rho$  es la densidad del cuerpo,  $V$  es el volumen,  $A_s$  es el área superficial,  $C_p$  es la capacidad calorífica del material en cuestión y  $h_m$  es el coeficiente de transferencia de calor. Esta ecuación indica que la diferencia entre las temperaturas del sólido y el fluido deben decaer exponencialmente a cero conforme  $t$  se aproxima a infinito <sup>[4]</sup>.

### 2.3.2 Conducción a régimen no permanente con resistencia superficial despreciable ( $Bi = hL/K_s \rightarrow \infty$ ) <sup>[12]</sup>

Para este caso extremo, el objeto caliente es sumergido en un fluido frío donde la superficie inmediatamente cae a la temperatura del fluido, y la conducción dentro del objeto es lo único importante. Esto es ilustrado en la figura 2.3c. Resolviendo la ecuación 2.8, se obtiene la solución para una *esfera* en series infinitas para la temperatura <sup>[19]</sup>, esto es:

$$\frac{T_\infty - T(t)}{T_\infty - T_i} = Y = \frac{-2R}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i}{i} \cos \frac{i \pi r}{R} \exp \left( \frac{-i^2 \pi^2 \alpha t}{R^2} \right) \dots (2.21)$$

en donde  $R$  es el radio de la esfera y  $r$  cualquier otra posición radial. Para el centro de la esfera la ecuación anterior se reduce a <sup>[19]</sup>

$$Y = -2 \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^i \exp \left( - \frac{i^2 \pi^2 \alpha t}{R^2} \right) \dots (2.22)$$

Otra forma de la ecuación 2.22 propuesta por Schneider con aproximación a un solo término (es decir para valores de  $Fo > 0.2$ ) es

donde  $T_c$  representa la temperatura de la línea central. Esto es,  $T_m$  representa la temperatura del plano medio ( $x^* = 0$ ). Los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $\zeta_1$  ya se han terminado por Schneider y se enumeran en la tabla del anexo 1 para un rango de números de Biot <sup>[4]</sup>.

Se han derivado ecuaciones similares para cilindros infinitos y paredes planas. La figura 2.4 muestra la fracción de calor remanente y la fracción de calor perdido para estos sólidos regulares. Mediante la interpolación entre estas curvas uno puede estimar el calentamiento u enfriamiento de cualquier sólido irregular.

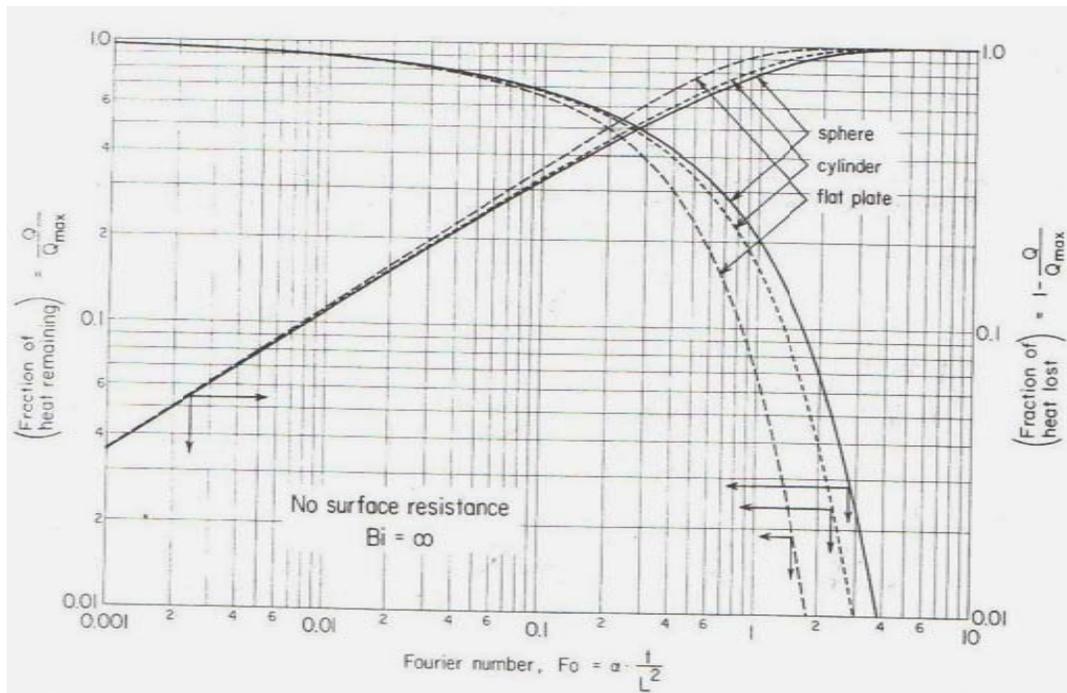


Figura 2.4 Calor perdido y calor remanente en un objeto que se enfría con resistencia superficial despreciable.

Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986).

### 2.3.3 Conducción a régimen no permanente en donde ambas, superficie y resistencia interna son importantes (Biot $\rightarrow$ intermedios) <sup>[12]</sup>

Aquí (ver figura 2.3b) utilizaremos las ecuaciones de conducción para el caso b tratado, con sus condiciones de frontera a cualquier tiempo

$$\left( \begin{array}{l} \text{Cantidad de flujo de calor} \\ \text{fuera de la superficie} \end{array} \right) = -q = hA(T_{s,l=L} - T_{\infty}) = K_s A \left( \frac{\partial T}{\partial l} \right)_{l=L} \dots (2.24)$$

Las soluciones de estas ecuaciones han sido derivadas para cierto número de figuras y se encuentran disponibles en varios textos de transferencia de calor como: Mator (1982) y Gröber (1961). En todos los casos estas soluciones involucran convergencias lentas de series infinitas, las cuales son tediosas de evaluar.

Sin embargo, las soluciones han sido representadas por gráficas convenientes, las cuales están evaluadas en términos de parámetros adimensionales, tales como: posición adimensional ( $r/r_0$ ); número de Biot ( $h_m r_0/K$ ); número de Fourier ( $\alpha t/r_0^2$ ) y para un cambio de temperatura  $\Delta T / \Delta T_{max}$  no concluido.

Las figuras 2.5 a 2.7 muestran las gráficas para una esfera, pertenecientes a Gurney – Lurie (1923), las cuales representan el cambio en la distribución de la temperatura dentro de sólidos que se enfrían (o calientan). Desafortunadamente no existe una amplia caracterización la cual permita que estas gráficas colapsen dentro de una sola. Por lo tanto, para sólidos irregulares uno deberá interpolar datos entre estas gráficas <sup>[12]</sup>.

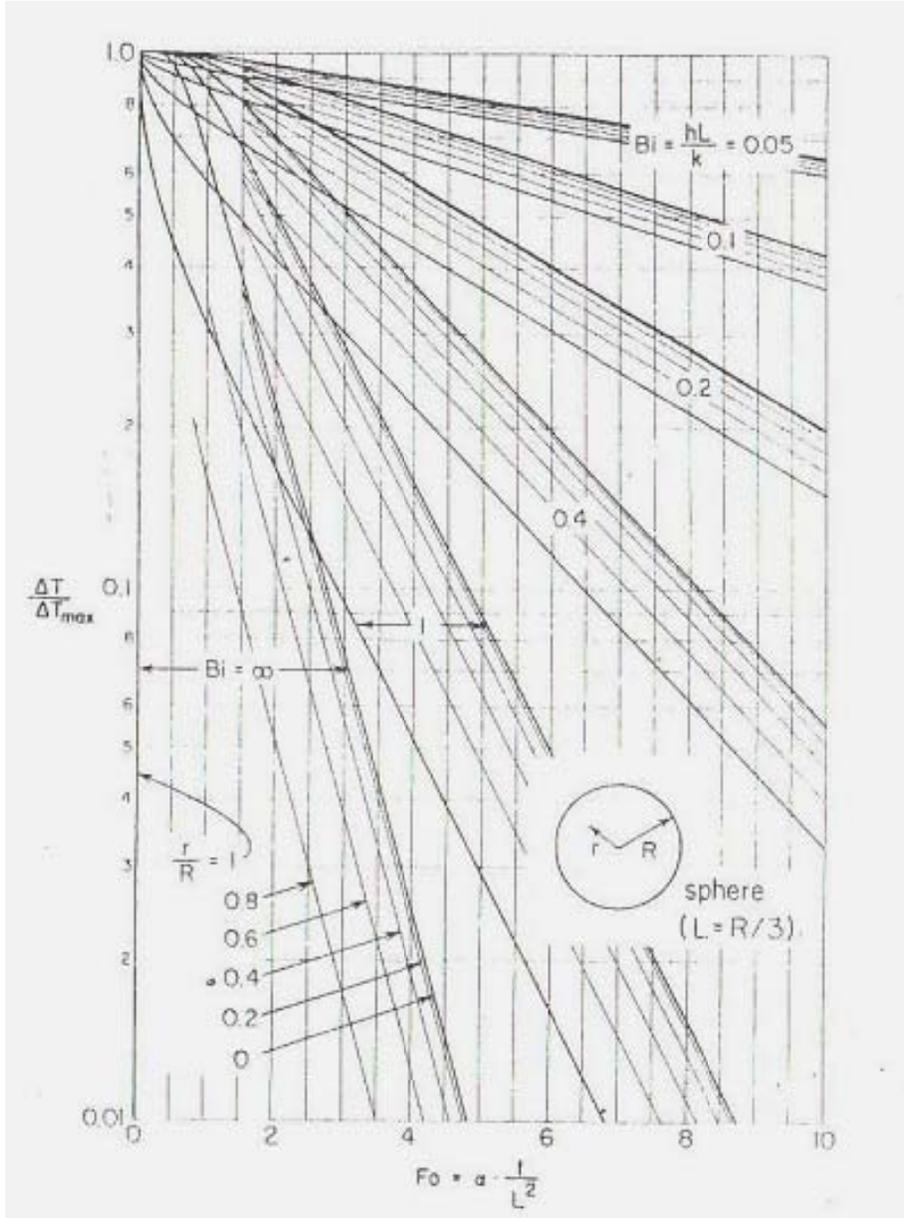


Figura 2.5 Distribuci3n de temperaturas dentro de esferas que est1n sometidas a enfriamiento, caso general.

Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986).

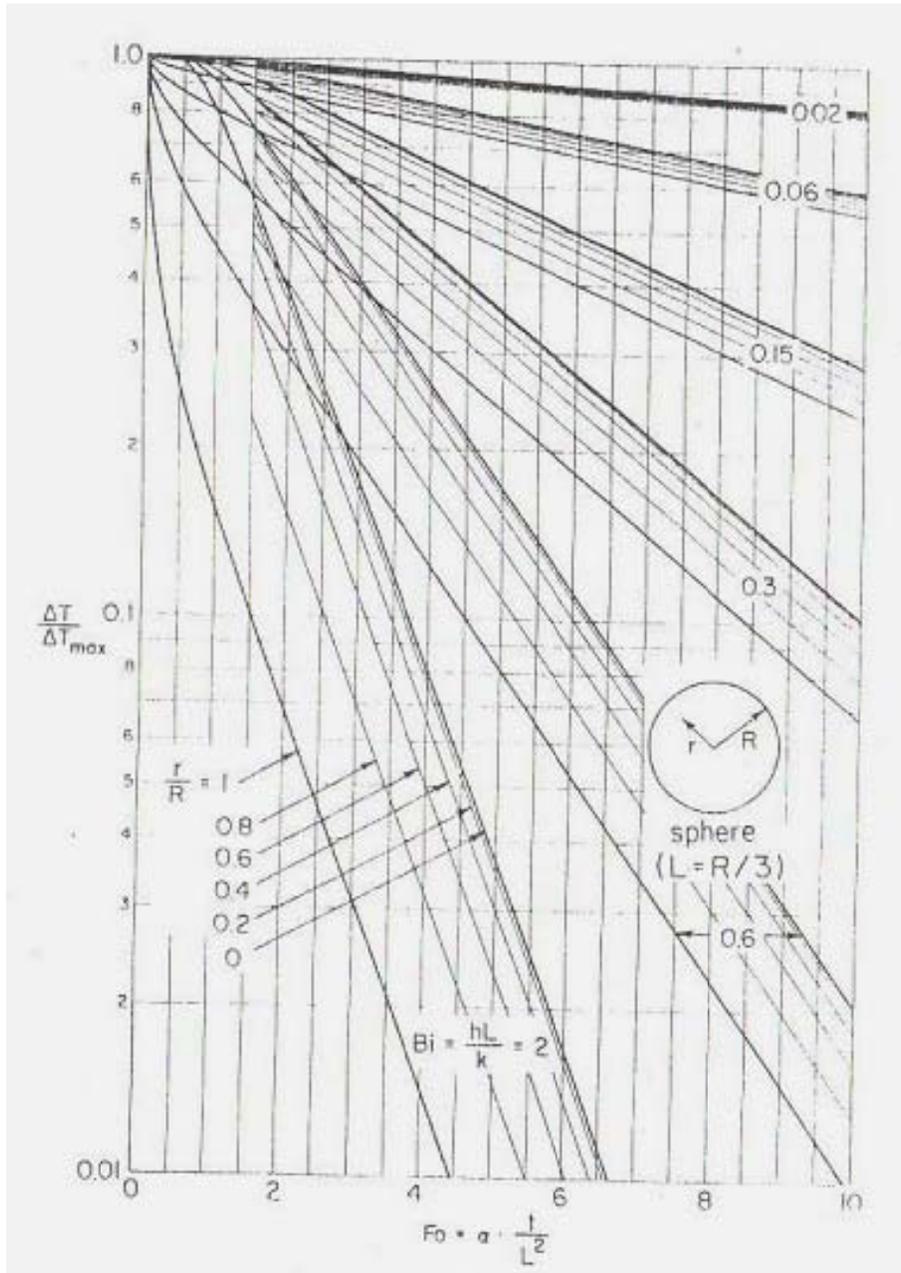


Figura 2.6 Distribuci3n de temperaturas dentro de esferas que est3n sometidas a enfriamiento, caso general.

Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986).

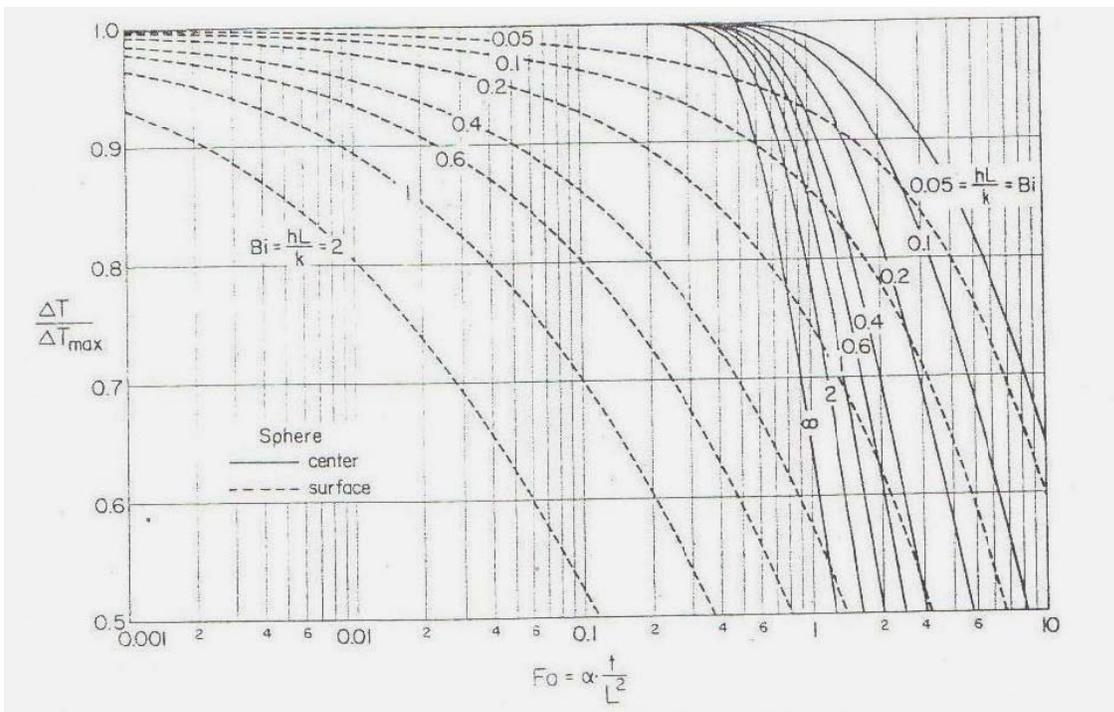


Figura 2.7 Esquina superior izquierda de las figuras 2.5 y 2.6 Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986).

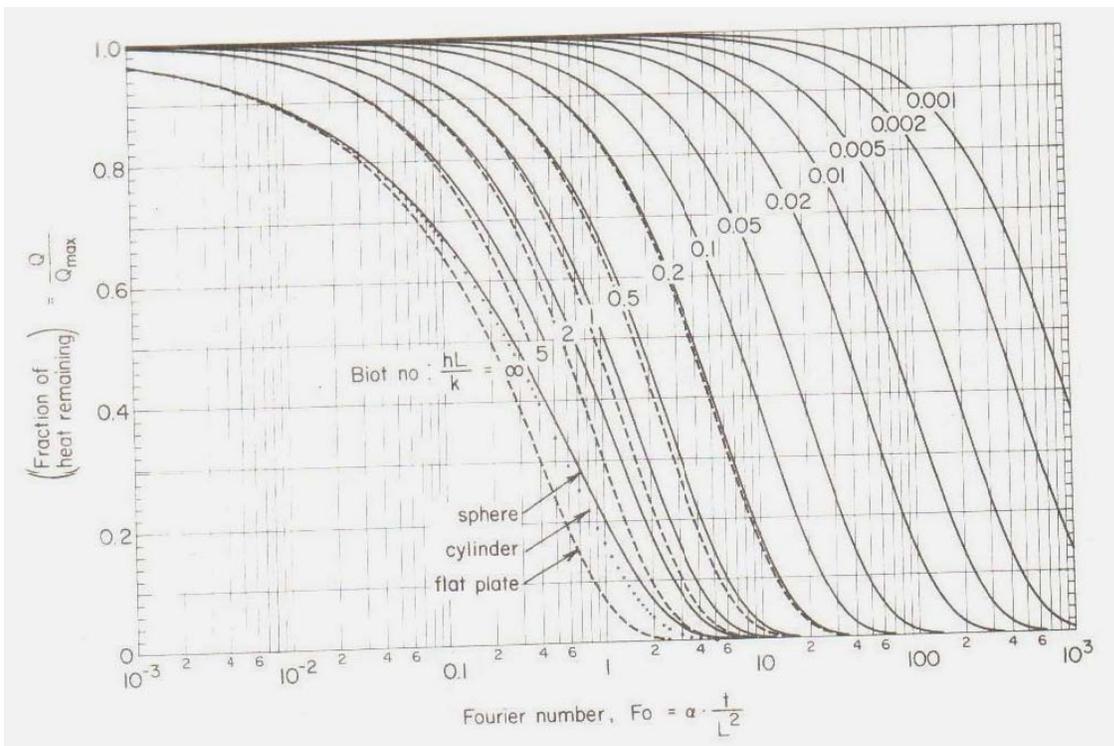


Figura 2.8 Representación general de una esfera, un cilindro finito y una placa plana infinita. Fuente: Levenspiel. Engineering Flow and Heat Exchange (1986).

La figura 2.8 representa el cambio en el contenido de calor de partículas que se enfrían, cuyos tamaños son medidos por sus características conocidas. Nótese que en un amplio rango de condiciones todas las curvas de esferas, cilindros y platos planos caen en una sola curva. Así que, el enfriamiento de cualquier partícula de forma irregular puede ser evaluado directamente de esta figura <sup>[12]</sup>.

Cabe mencionar que las ecuaciones 2.17 a 2.23 son útiles para predecir la respuesta transitoria de esferas que son sujetas a un cambio súbito en la temperatura de la superficie, dando como resultado que se produzcan números de Biot de diferentes magnitudes, que muestran a su vez, dónde se localiza la mayor resistencia a la transferencia de calor.

## **2.4 Gráficas para la conducción de calor a régimen transitorio en sólidos <sup>[11]</sup>**

Para las diversas formas simples de la conducción de calor en estado transitorio, ya se han calculado la distribución de temperaturas y el flujo de calor, las cuales están sujetas a condiciones limitantes como las que se explicaron en la sección 2.1.1 y 2.3. En esta sección se explicará la aplicación de estas gráficas a problemas típicos de conducción de calor en estado transitorio en sólidos, los cuales poseen un número de Biot  $> 0.1$ .

Como se mencionó en la sección anterior, las gráficas en un principio fueron desarrolladas por Gurney y Lurie (1923), para las tres geometrías simples – una placa infinita de ancho  $2L$ , cilindro infinitamente largo de radio  $r_0$  y una esfera de radio  $r_0$  - y, son semejantes a las que se emplean en transferencia de masa.

Mas tarde, autores como Heisler (1947), Gröber (1961) y Schneider (1963) mejoraron tanto la presentación como los resultados de éstas, para las mismas geometrías simples.

Las condiciones de frontera e iniciales son similares para las tres geometrías. La primera condición requiere que el gradiente de temperatura a la mitad de la placa, el eje del cilindro y el centro de la esfera sea igual a cero.

La segunda condición limitante requiere que el calor conducido hasta o desde la superficie, sea transferido por convección hacia o desde el fluido a la temperatura  $T_\infty$ , con un coeficiente de transferencia de calor uniforme y constante,  $h_m$ , es decir:

$$h_m(T_s - T_\infty) = -K \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s \quad \dots (2.25)$$

donde el subíndice s se refiere a condiciones en la superficie y n a la dirección coordenada normal a la superficie. Cabe mencionar que en el caso limitante de tener  $Bi \rightarrow \infty$  corresponde a una resistencia térmica insignificante en la superficie ( $h_m \rightarrow \infty$ ), de modo que la temperatura superficial se especifica como igual a  $T_\infty$  cuando  $t > 0$  <sup>[11]</sup>.

Las condiciones iniciales para las tres soluciones gráficas requieren que el sólido esté inicialmente a una temperatura uniforme  $T_s$  y que cuando comience la conducción transitoria en el instante  $t = 0$ , toda la superficie del cuerpo esté en contacto con el fluido  $T_\infty$ . El uso de las soluciones gráficas se analiza a continuación <sup>[11]</sup>.

Las soluciones para los tres casos se grafican en función de parámetros adimensionales iguales a los de la sección 2.3, excepto uno: la transferencia de calor adimensional  $Q(t)/Q_i$ , donde para una esfera  $Q_i = \rho C_p 4/3 \pi r_0^3 (T_i - T_\infty)$ . Asimismo, existen para cada geometría tres gráficas, las dos primeras son para las temperaturas y la tercera para el flujo de calor <sup>[11]</sup>.

En nuestro caso, solo es de interés la forma geométrica simple de una esfera de radio  $r_0$  ya que es la figura con que se experimenta en el guión propuesto. Por lo tanto, solamente se mostrarán las gráficas para esta figura geométrica.

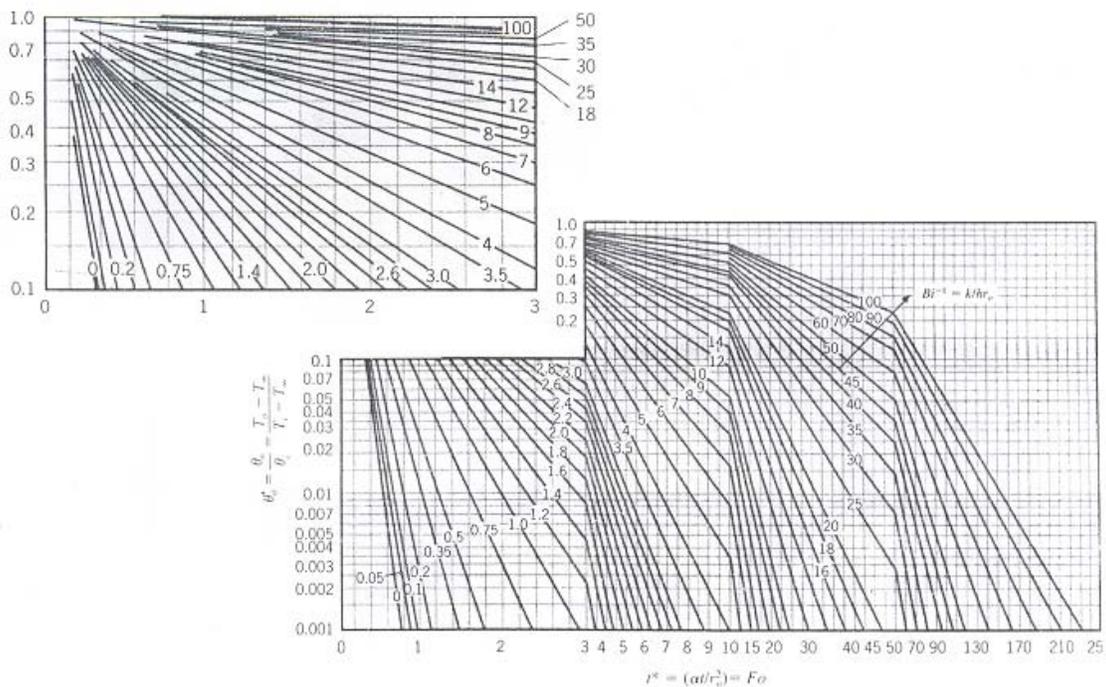


Figura 2.9 Temperatura del centro como función del tiempo en una esfera de radio  $r_0$ . Fuente: Incropera 1999. Fundamentos de Transferencia de calor

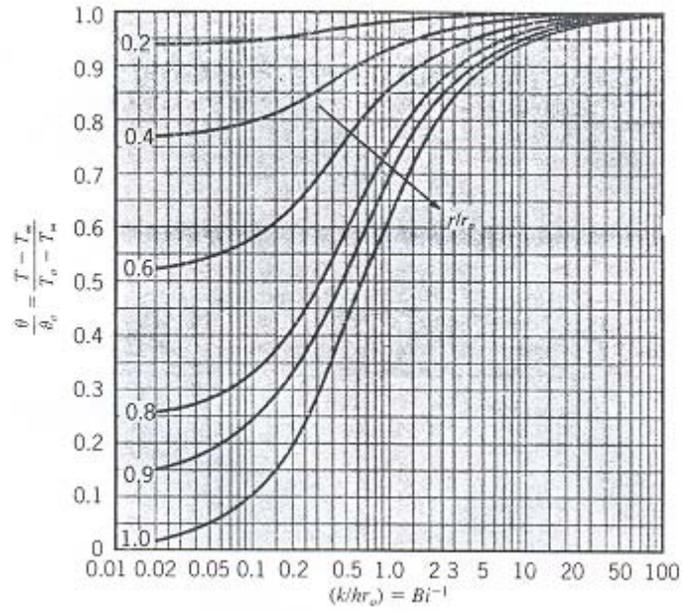


Figura 2.10 Distribuci3n de temperatura en una esfera de radio  $r_0$ . Fuente: Incropera 1999. Fundamentos de Transferencia de calor.

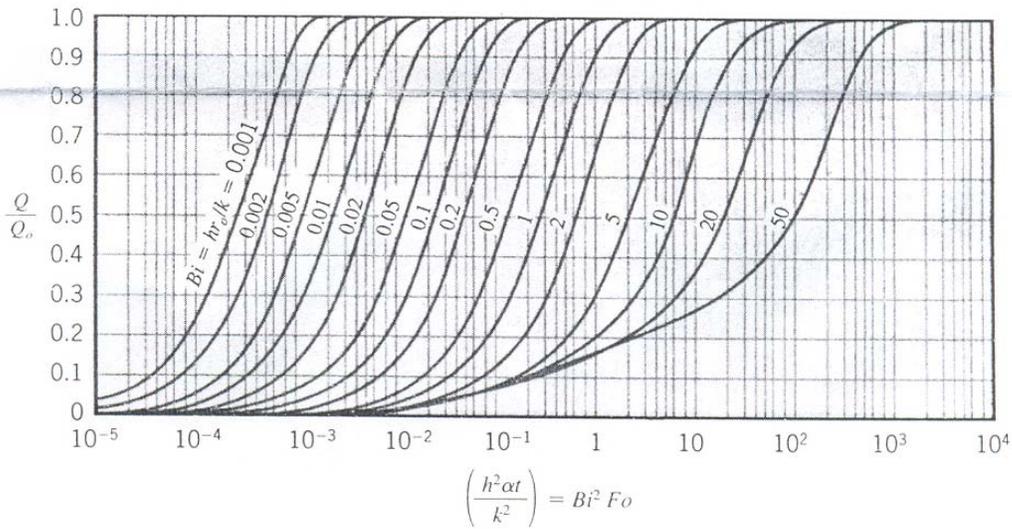


Figura 2.11 Cambio de energa interna como funci3n del tiempo para una esfera de radio  $r_0$ . Fuente: Incropera 1999. Fundamentos de Transferencia de calor.

Las temperaturas adimensionales se presentan en forma de dos gráficas interrelacionadas para cada figura (2.9 y 2.10). Para la primera gráfica de la esfera, se da la temperatura adimensional en el centro o punto medio como función del número de Fourier; ésto es, un tiempo adimensional, con el inverso del número de Biot, como parámetro constante. La temperatura adimensional del centro, o punto medio, para esta gráfica se define como <sup>[11]</sup>

$$\frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{\theta(0, t)}{\theta_i} \quad \dots (2.26)$$

Para evaluar la temperatura local como función del tiempo, se debe usar la segunda gráfica de temperatura (2.10). Esta gráfica muestra el cociente de la temperatura local con la temperatura en el centro y el punto medio como función del inverso del número de Biot para varios valores del parámetro distancia adimensional,  $r/r_0$  para la esfera. Para una esfera de radio  $r_0$ , este cociente de temperatura es <sup>[11]</sup>

$$\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{\theta(r, t)}{\theta(0, t)} \quad \dots (2.27)$$

Para determinar la temperatura local en cualquier instante  $t$ , se forma el producto

$$\begin{aligned} \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} &= \left[ \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right] \left[ \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T(0, t) - T_{\infty}} \right] \quad \dots (2.28) \\ &= \frac{\theta(0, t)}{\theta_i} \frac{\theta(r, t)}{\theta(0, t)} \end{aligned}$$

La ecuación 2.29 es la misma tanto para el cilindro como la esfera. Una vez que se conoce la distribución de temperatura, el cociente de transferencia de calor instantáneo hacia o desde la superficie del sólido puede evaluarse por medio de la ley de Fourier.

Cada valor de transferencia de calor,  $Q(t)$ , es la cantidad de calor total que se transfiere de la superficie del fluido durante el intervalo que va de  $t = 0$  a  $t = t$ . El factor normalizador,  $Q_i$ , es la cantidad inicial de energía en el sólido en el instante  $t = 0$ , cuando la temperatura de referencia para energía cero es  $T_\infty$ . Si el valor de  $Q(t)$  es positivo, el calor fluye del sólido al fluido, es decir, el cuerpo se enfría. Si es negativo, el sólido es calentado por el fluido <sup>[11]</sup>.

Es posible resolver dos clases generales de problemas transitorios utilizando las gráficas. Una de ellas implica el conocimiento del tiempo, mientras la temperatura local en ese tiempo no se conoce. En el otro tipo de problema, la temperatura local es la cantidad conocida y el tiempo requerido para alcanzar dicha temperatura se desconoce. La primera clase de problemas se pueden resolver directamente con las gráficas, mientras que la segunda clase a veces implica un procedimiento de ensayo y error <sup>[4] [11] [20]</sup>.

## Capítulo.III PRÁCTICAS<sup>1</sup> ACTUALES DE TRANSFERENCIA DE CALOR A RÉGIMEN TRANSITORIO

Como resultado de la implementación de la “Reforma de la Enseñanza Experimental” en el laboratorio de Ingeniería Química, actualmente se cuentan con prácticas experimentales en las distintas asignaturas que se imparten, las cuales están enfocadas principalmente al desarrollo de habilidades técnico – científicas en los alumnos. Sin embargo, el número de prácticas que hacen alusión al efecto de la transferencia de calor a régimen transitorio son relativamente pocas, en comparación con las que tratan con calor a régimen permanente.

Como consecuencia de lo anterior surgió el interés por realizar una revisión y análisis desde la perspectiva de los “Principios Básicos de la Reforma de la Enseñanza Experimental” a las prácticas que tocan el tema mencionado arriba. En la actualidad las prácticas o guiones experimentales que pueden clasificarse como de transferencia de calor a régimen transitorio son:

- a. Balance de materia y energía a régimen transitorio
- b. Convección forzada en una barra cilíndrica
- c. Conducción y convección en una barra sólida

Como parte del trabajo de esta tesis se efectuaron las prácticas propuestas y se resolvieron los cuestionarios, tal y como lo hacen los estudiantes. En ese mismo orden se muestra en este capítulo su desarrollo.

---

<sup>1</sup> Con base a lo establecido en la Reforma de la Enseñanza Experimental, emplear el término de práctica es erróneo. El término que se recomienda es el de “guión experimental”. El cual está siendo incorporado al uso común en el laboratorio.

## 3.1 Balance de materia y energía a régimen transitorio

### 3.1.1 Problema

Por balance de materia y de energía, establecer el modelo matemático que represente y permita calcular tanto el tiempo como la temperatura en cualquier instante, de un proceso de enfriamiento en un mezclador, cuando en éste la corriente de flujo a la salida es de 1000 ml/min. (s.i.c.)

### 3.1.2 Parte experimental

#### Material requerido

- 1 probeta de 1000 ml
- 2 cronómetros
- Termómetro
- Cubeta
- Extensión eléctrica
- Pinzas de tres dedos

#### Equipo

- Módulo para balances de materia y energía a régimen no permanente con sensor de tiempo - temperatura

#### Técnica de operación del equipo

1. Identifique en el módulo las siguientes partes:

- Tanques de alimentación y de almacenamiento
- Tanque térmico de mezclado (termo naranja)
- Bomba dosificadora de alimentación
- Sistema de agitación
- Sistema de calentamiento

2. Antes de encender el sistema de agitación, mida el volumen de mezclado ( $V_m$ ) alimentando agua con la probeta de 1000 ml, al tanque térmico hasta donde comience a derramar por el tubo de descarga.
3. Proceda a encender el sistema de agitación hasta la marca que se indica en el control de velocidad del agitador. No lo detenga hasta que finalice el experimento.
4. Encienda el sistema de calentamiento hasta que el agua alcance una temperatura de inicio de proceso entre 50 y 60 °C ( $T_0$ ). Una vez obtenida esta temperatura apague el sistema de calentamiento.
5. Fije un % de frecuencia y un % de volumen mediante el uso de la hoja de anexo A, para que la bomba entregue 1000 ml/min a la entrada del tanque térmico. Para la correcta operación de la bomba pulsatron es recomendable utilizar un % de volumen mayor a 20 % y un % de frecuencia de menores de 100 %.

### Diagrama del equipo



Figura 3.1 Equipo para balances de materia y energía a régimen no permanente visto de frente 1



Figura 3.2 Equipo para balances de materia y energía a régimen no permanente visto de frente 2

### Actividades experimentales

#### Realice lo siguiente:

1. Mida la temperatura del agua de entrada al mezclador, en el tanque de alimentación ( $T_E$ ).
2. Alimente agua al tanque térmico de mezclado con un gasto de 1000 ml/min. Al momento de encender la bomba comience a contar el tiempo con el cronómetro.
3. Cada minuto mida la temperatura ( $T_M$ ) del agua contenida en el mezclador (durante 20 minutos o hasta que se alcance la temperatura de equilibrio, lo que ocurra primero).

4. Determine el flujo volumétrico de salida ( $Q_s$ ), midiendo en el contenedor graduado la variación de volumen y con un cronómetro el tiempo en que ésta se da (asegúrese de que la válvula de salida se encuentre cerrada). Repita esta operación por lo menos tres veces.

### Resultados

Anote los datos experimentales en la tabla 3.1 y en las columnas correspondientes de la tabla 3.2. Al efectuarse el experimento, el agua del tanque térmico se enfrió, obteniéndose los siguientes datos:

**Tabla 3.1 Características de flujo en el tanque térmico**

Datos Bomba		$Q_E$ (ml/min)	$V_M$ (ml)	$T_E$ ( $^{\circ}C$ )	$Q_s$ (ml/min)
Frecuencia	% Volumen	Flujo volumétrico de entrada	Volumen de agua en el mezclador	Temperatura del agua en la entrada	Volumen a la salida
90	73	1000	5210	19	584.76

**Tabla 3.2 Historia de temperaturas**

Experimental	
Tiempo (min)	Temperatura ( $^{\circ}C$ )
0	( $T_0$ ) = 60
1	56
2	53
3	49
4	46
5	43
6	41
7	38
8	36
9	35
10	33

13	29
14	28
15	27
16	27
17	26
18	25
19	25
20	24

Los datos de % de frecuencia y % de volumen para la bomba, fueron escogidos mediante uso del anexo A página 59. Con base a las líneas del Anexo A, primero se localiza el gasto requerido de 1000 ml/min en la gráfica, se fija un valor para la frecuencia (90%), y el punto en donde se interceptan los valores será entonces el valor del % del volumen a la cual se deberá ajustar la bomba dosificadora, con el fin de entregar el gasto requerido a la entrada del tanque térmico.

El flujo  $Q_s$  es el resultado de un promedio de cinco mediciones hechas con cronómetro en el contenedor de la salida, ésto es:

**Tabla 3.3 Historia de flujos a la salida**

Corrida	$Q_s$ (ml/seg)	$Q_s$ (ml/min)
1	300/31	580.64
2	300/32	562.5
3	300/30	600
4	300/31	580.64
5	300/30	600
	Promedio	584.76

### 3.1.3 Cuestionario

1. Elabore el diagrama del mezclador, indicando en éste sus corrientes de flujo, así como las variables asociadas a los balances de materia y energía correspondiente.

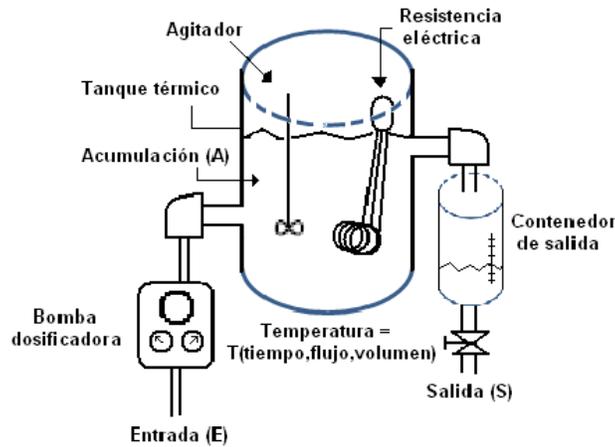


Figura 3.3 Diagrama del mezclador

2. Indicar por qué el proceso es a régimen no permanente.

Ésto es debido a que la variable dependiente del sistema - la temperatura - es función del tiempo, el cual, a su vez es independiente en el proceso de enfriamiento del líquido.

3. Identificar en qué parte del sistema se presenta acumulación, y cuál es la variable o propiedad que no es constante durante el tiempo del proceso.

La acumulación se presenta en el tanque térmico y, la variable que cambia durante el transcurso del experimento es la temperatura del líquido.

4. De la ecuación general de balance escriba el enunciado correspondiente al proceso que sucede en el mezclador.

## Balance de materia

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de líquido} \\ \text{que entra al tanque} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de líquido} \\ \text{que sale del tanque} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Líquido almacenado} \\ \text{en el tanque térmico} \end{array} \right\}$$

## Balance de energía

$$- \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de calor} \\ \text{que sale del tanque} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Calor almacenado} \\ \text{en el tanque térmico} \end{array} \right\}$$

5. Escriba las ecuaciones de balance de energía y materia, utilizando la nomenclatura empleada en el punto número 1 del cuestionario.

## Balance de materia

$$E - S = A$$

## Balance de energía

$$UA(T_s - T_\infty) - WCp(T - T_i) = \rho C_p V \frac{dT}{dt}$$

Esto es considerando que la resistencia eléctrica proporciona calor al líquido.

6. A partir de las ecuaciones de balance formule la expresión que describa la disminución de temperatura con respecto al tiempo en el mezclador y que de respuesta satisfactoria al problema.

A continuación se mostrará el desarrollo de la ecuación de balance de energía del sistema.

## Planteamiento

Aunque el sistema en un principio recibe por el calentamiento de la resistencia eléctrica una cantidad  $x$  de calor, este no se toma en cuenta en el balance de energía, ya que el propósito de la práctica es conocer el tiempo necesario para completar el enfriamiento de un líquido agitado en un tanque térmico. Este término se iguala a cero.

Sin embargo, hay que considerar que el proceso puede ser invertido también. Para poder determinar la disminución de temperatura con respecto al tiempo en el mezclador, es necesario hacer las siguientes consideraciones:

- Las propiedades del líquido cambian muy poco en los intervalos de temperatura manejados
- La temperatura en el líquido del tanque térmico es homogénea en todo instante – ésto se aproxima mucho con la utilización del sistema de agitación
- Se considera en el sistema un proceso de enfriamiento por lo cual  $UA(T_s - T_\infty) = 0$

Balance de energía

$$-WC_p(T - T_i) = \rho C_p V \frac{dT}{dt} \quad \dots (3.1)$$

Para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea, es necesario que  $W$  tenga unidades de flujo másico, por lo que

$$W = \rho * Q [=] Kg/min$$

sustituyendo esta igualdad en la ecuación tenemos que

$$-\rho Q C_p (T - T_i) = \rho C_p V \frac{dT}{dt}$$

arreglando la expresión y separando variables

$$-\frac{Q(T - T_i)}{V} = \frac{dT}{dt}$$

$$-\int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{(T - T_i)} = \frac{Q}{V} \int_0^t dt$$

Integrando ambos términos de la ecuación, tenemos que

$$\ln \frac{(T - T_i)}{(T - T_f)} = \frac{Q}{V} t$$

Por lo tanto, la expresión que calcula el tiempo en la cual el fluido se encuentra a cierta temperatura, es

$$t = \frac{V}{Q} * \ln \frac{(T - T_i)}{(T - T_f)} \quad \dots (3.2)$$

Si lo que deseamos conocer es la temperatura del líquido en cualquier tiempo  $t$ , lo que se tiene que realizar es despejar a  $T_f$  de la ecuación 3.2, esto es:

$$T_f = T - \frac{(T - T_i)}{\exp\left(\frac{tQ}{V}\right)} \quad \dots (3.3)$$

7. Con la expresión del punto número 6, determine:

a) El tiempo para cada valor experimental de la temperatura, anotándolo en la columna correspondiente de la tabla 3.4

Con  $V_M = 5210 \text{ ml}$ ,  $Q = 584.76 \text{ ml/min}$  y  $T = T_{\text{ent}} = 19 \text{ }^\circ\text{C}$  el cálculo para el tiempo a 1 minuto, es

$$t = \frac{V}{Q} * \ln \frac{(T - T_i)}{(T - T_f)} = \frac{5210 \text{ ml}}{584.76 \text{ ml/min}} * \ln \frac{(19 - 60)}{(19 - 56)} = 0.914 \text{ min}$$

Lo cual arroja una buena aproximación para el tiempo de enfriamiento. Ésto se realizó para cada uno de los datos experimentales, los resultados se pueden observar en la tabla 3.4.

b) La temperatura para cada valor experimental en el tiempo, anotándolo en la columna correspondiente de la tabla 3.4.

Con las mismas condiciones del inciso (a), se muestra el cálculo de la temperatura del líquido a tiempo cero y a tiempo de un minuto, esto es:

Tiempo = 0 min

$$T_f = 19 - \frac{(19 - 60)}{\exp\left(\frac{(0 \text{ min})584.76 \text{ ml/min}}{5210 \text{ ml}}\right)} = 19 - (-41)$$

$$T_f = 60 \text{ }^\circ\text{C}$$

Tiempo = 1 min

$$T_f = 19 - \frac{(19 - 60)}{\exp\left(\frac{(1 \text{ min})584.76 \text{ ml/min}}{5210 \text{ ml}}\right)} = 19 - (-36.64)$$

$$T_f = 55.65 \text{ }^\circ\text{C}$$

Ésto se llevó a cabo para cada minuto en el experimento. Los resultados completos se muestran en la tabla 3.4.

**Tabla 3.4 Historia de temperaturas teórica y experimental en el tanque térmico**

Experimental		Calculado con el modelo	
Tiempo (min)	Temperatura (° C)	Tiempo (min)	Temperatura (° C)
0	(T <sub>0</sub> ) = 60	0	60
1	56	0.91	55.65
2	53	1.67	51.76
3	49	2.78	48.28
4	46	3.72	45.17
5	43	4.77	42.39
6	41	5.55	39.91
7	38	6.85	37.69
8	36	7.84	35.7
9	35	8.38	33.93
10	33	9.57	32.35
11	31	10.95	30.93
12	30	11.72	29.66
13	29	12.57	28.53
14	28	13.51	27.52
15	27	14.56	26.61
16	27	14.56	25.81
17	26	15.75	25.08
18	25	17.12	24.44
19	25	17.12	23.86
20	24	18.75	23.34

8. Con los datos de la tabla 3.4 elabore las siguientes graficas:

a) Temperatura experimental vs tiempo experimental

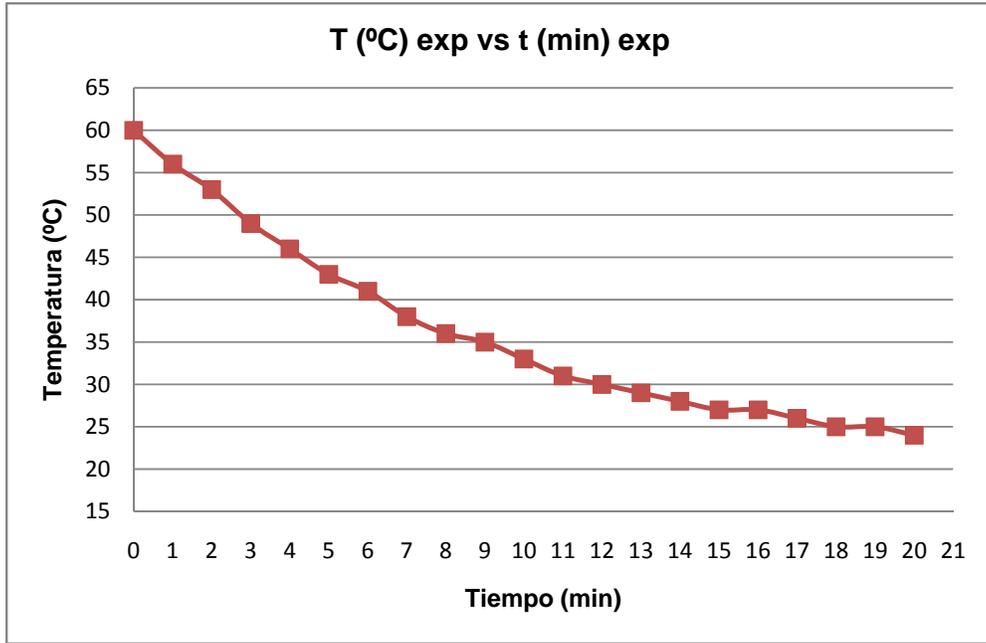


Figura 3.4 Temperatura experimental vs tiempo experimental

b) Temperatura teórica vs tiempo experimental

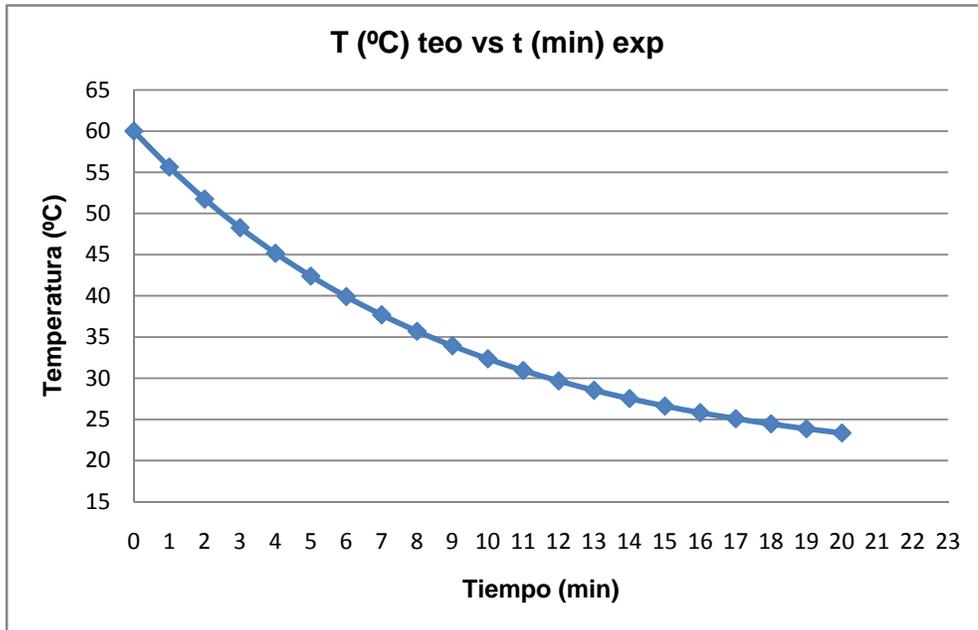


Figura 3.5 Temperatura teórica vs tiempo experimental

c) Temperatura experimental vs tiempo teórico

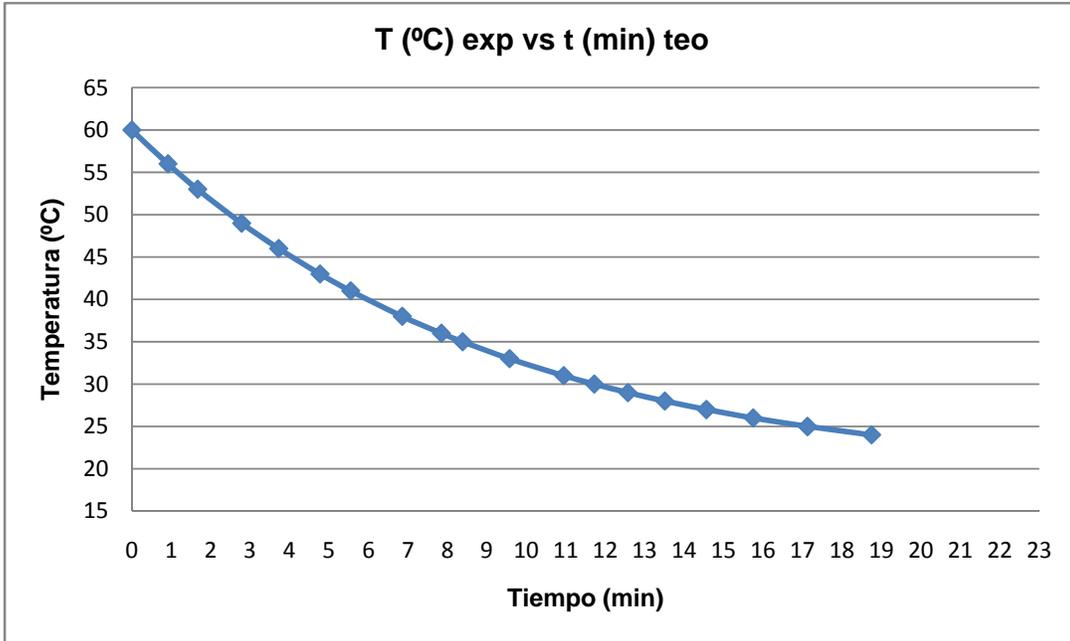


Figura 3.6 Temperatura experimental vs tiempo teórica

d) El perfil de temperaturas vs tiempo, tanto experimental como teórico

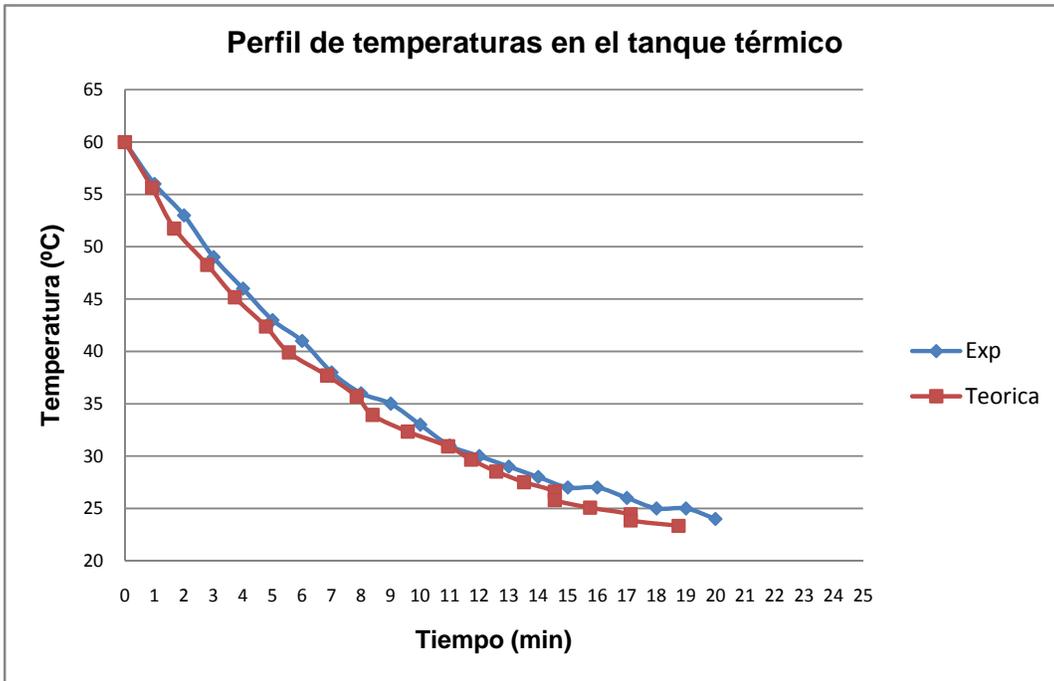
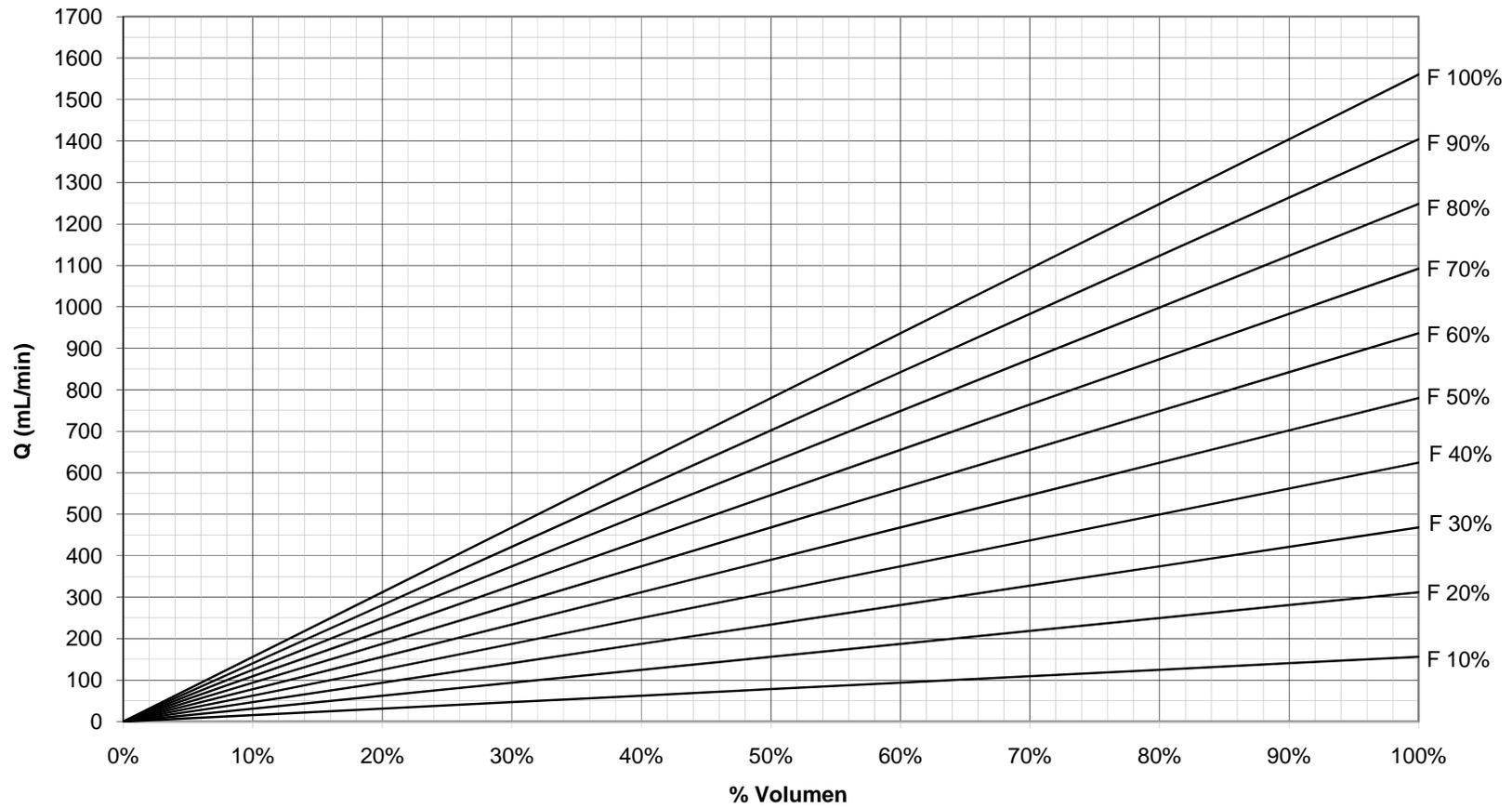


Figura 3.7 Perfil de temperaturas en el tanque térmico

Figura 3.8 Anexo A de la práctica 3.1

### Bomba Pulsatron



## 3.2 Convección forzada en una barra sólida

### 3.2.1 Problema

Una barra de cobre de dimensiones conocidas, inicialmente se encuentra a una temperatura máxima. Súbitamente se sumerge en una corriente de aire que lleva una cierta velocidad. ¿Diga en qué tiempo la barra tendrá una temperatura de 30 °C y cuanto calor habrá transferido al aire? Determine también el coeficiente de transferencia de calor promedio,  $h_m$  y, compárelo con correlaciones empíricas.

### 3.2.2 Parte experimental

#### Material requerido

- Termómetro
- Anemómetro
- Caja de accesorios de equipo
- Graficador
- Tubo de pitot y micro manómetro electrónico

#### Equipo

- Cambiador de calor de flujo cruzado

#### Técnica de operación del equipo

1. Conecte el registrador (1) de la temperatura a la corriente eléctrica.
2. Coloque el par de cables, uno en la barra (2) y el otro, en el termopar (3) localizado en la entrada del ducto del aire por el extremo. Conecte los extremos de los cables en el graficador como se indica en el anexo A.

3. Encienda el graficador y posicione la pluma, sin bajarla, sobre la línea cero del papel. Seleccione la escala 40mV/20 de sensibilidad y un mm/s de velocidad del papel en el panel del graficador.
4. Tape los orificios del ducto del aire con los tapones negros (4).
5. Accione la bomba (5) con el interruptor (9) para hacer pasar aire por el ducto. Mida la velocidad del aire, regulándola con la placa del orificio (6).
6. Apague la bomba e introduzca la barra en la resistencia eléctrica (7) y enciéndala (8). La pluma del graficador avanzará hacia la derecha indicando el calentamiento de la barra. Déjela avanzar hasta los 12.5 espacios.
7. Apague la resistencia (8) cuando la barra haya alcanzado una temperatura máxima y haya recorrido los 12.5 espacios.
8. Inmediatamente después baje la pluma del graficador e introduzca la barra caliente en el orificio del ducto (4), quitando un par de tapones negros, y accione simultáneamente el avance del papel (forward) en el registrador y la bomba del aire.
9. Deje avanzar el papel hasta que la gráfica de la curva de enfriamiento de la barra alcance una tendencia asintótica.
10. Suba la pluma del graficador y apague la bomba del aire (9) y el graficador

#### *Datos adicionales*

Masa de la barra de cobre: 0.1065 Kg

Diámetro de la barra: 0.01238 m

Longitud: 0.0951 m

Capacidad calorífica: 0.0908 Kcal/Kg °C

0.04 mV = 1 °C

1 mm en el papel = 1 segundo

Se absorben 2 mV = 40mV/20 en la escala de 12.5 espacios

Diagrama del equipo

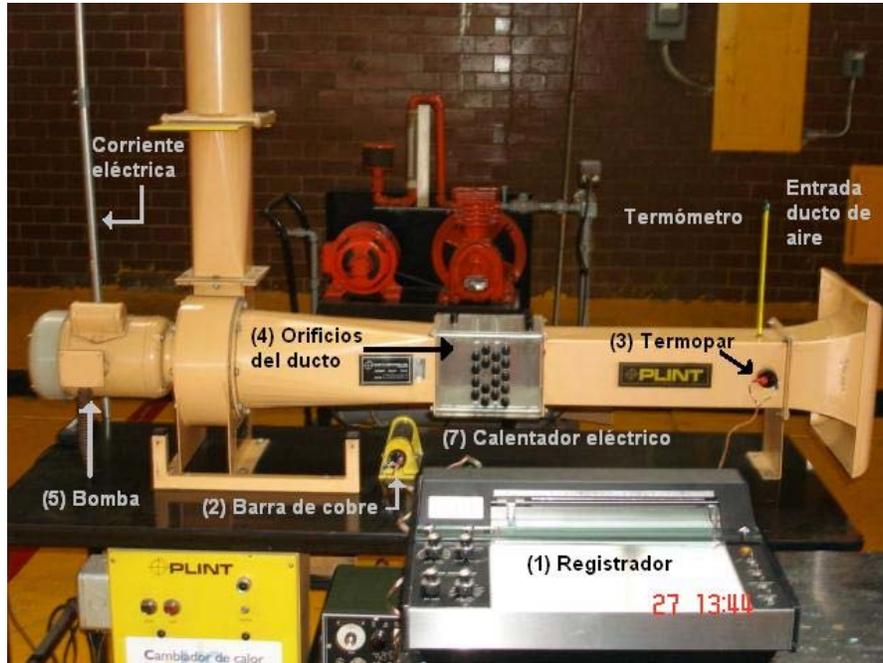


Figura 3.9 Cambiador de calor de flujo cruzado vista lateral

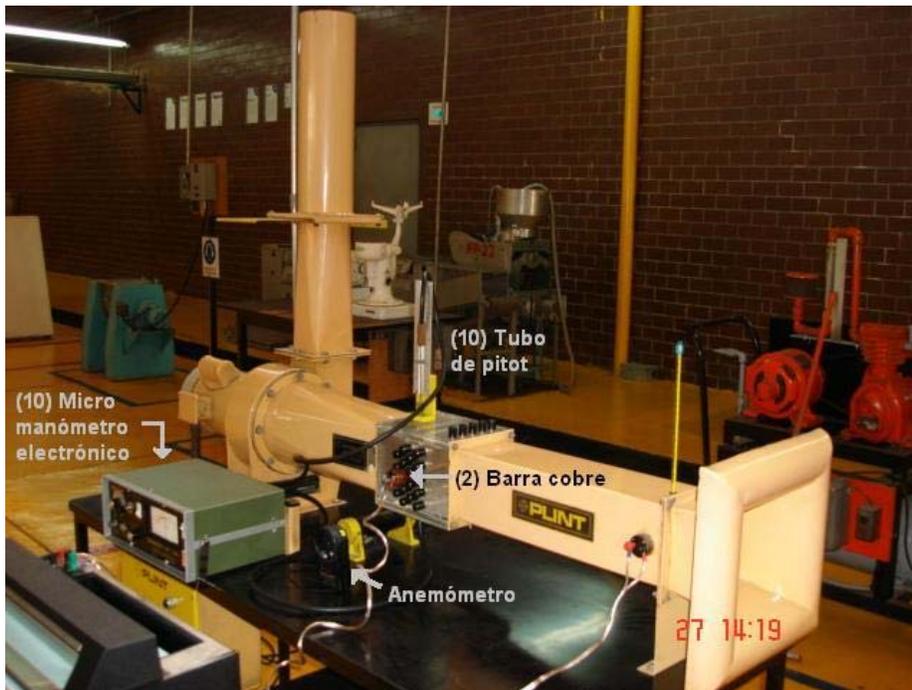


Figura 3.10 Cambiador de calor de flujo cruzado vista lateral

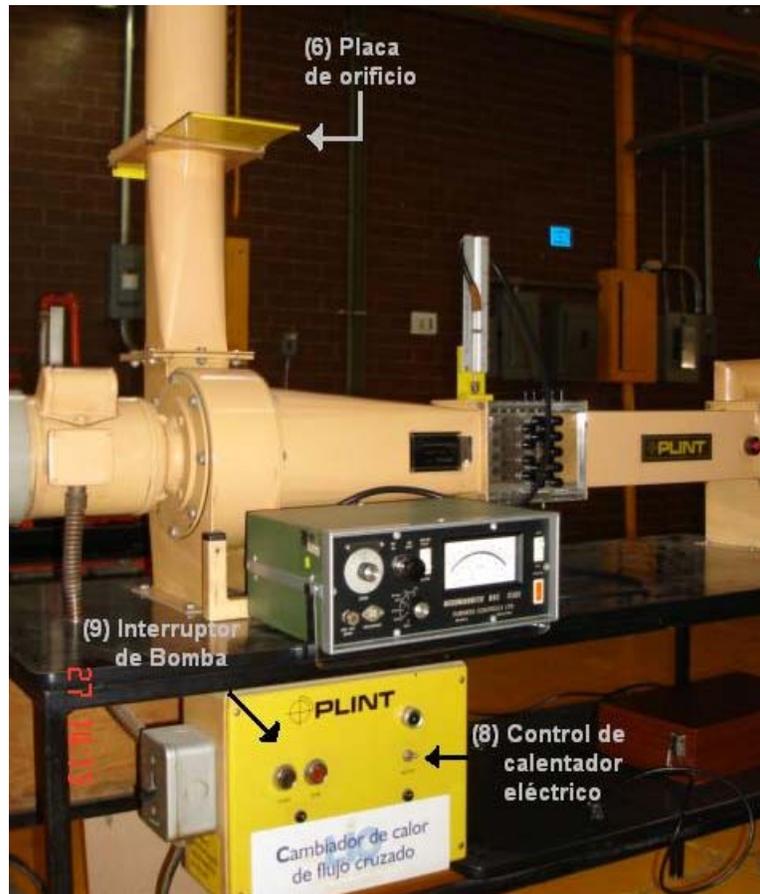


Figura 3.11 Cambiador de calor de flujo cruzado vista lateral trasera

### Actividades experimentales

#### Realice lo siguiente:

1. Fije el porcentaje de abertura (6) para la entrada del aire en el equipo, manipulando la placa móvil que se encuentra a lado de la bomba de inyección de aire. Calcule la velocidad del aire con ayuda de un anemómetro, así como con el micro manómetro electrónico del tubo de pitot (10).
2. Caliente la barra utilizando el calentador eléctrico hasta un  $\Delta T$  máximo de  $48.78\text{ }^{\circ}\text{C}$  (escala de 0 – 12.5 espacios en el graficador).

3. Introduzca la barra en la corriente de aire, al mismo tiempo que registra el enfriamiento de la misma, avanzando el papel en el graficador.
4. Con la curva de enfriamiento obtenida, reporte en la tabla 3.5 la información requerida.

**Tabla 3.5 Diferencias de temperatura logarítmica vs tiempo**

Espacios	$\Delta T$ (°C)	Tiempo (seg)	$\ln(T_s - T_a)$
12.5			
12			
11			
10			
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1			

Temperatura del aire (°C) = x

Velocidad del aire (m/s) con 90 % de abertura = x

### Resultados

Al efectuarse el experimento el cilindro se enfría obteniéndose los siguientes datos:

**Tabla 3.6 Diferencias de temperatura logarítmica vs tiempo**

Espacios	Tiempo (seg)	Ts – Ta	Ln(Ts – Ta)
12.5	5	48,78	3,89
12	9	46,83	3,85
11	12,5	42,93	3,76
10	18	39,02	3,66
9	24,5	35,12	3,56
8	27	31,22	3,44
7	34	27,32	3,31
6	42	23,41	3,15
5	52	19,51	2,97
4	65	15,61	2,75
3	79	11,71	2,46
2.5	89	9,76	2,28
2	99	7,80	2,05
1.75	106	6,83	1,92
1.6	109	6,24	1,83
1.5	115	5,85	1,77

Temperatura del aire (°C) = 21

Velocidad del aire (m/s) con 90 % de abertura = 26.05

El porcentaje de apertura que se empleó para el paso del aire fue de 90 %. El tubo de pitot mostró una caída de presión igual a  $\Delta P = 32 \text{ mm H}_2\text{O}$  (0.032 m de H<sub>2</sub>O), con  $g = 9810 \text{ N/m}^3$  y con el valor de la densidad del aire, se procedió a calcular la velocidad del aire quedando de la siguiente manera:

$$\rho_{\text{aire}} = \frac{P M_{\text{aire}}}{RT} = \frac{(0.769 \text{ atm}) \left(\frac{29 \text{ Kg}}{\text{Kmol}}\right)}{\left(\frac{0.082 \text{ atm m}^3}{\text{Kmol K}}\right) (273 + 21) \text{ K}} = 0.925 \text{ Kg/m}^3 \quad \dots (3.4)$$

sustituyendo los valores en la ecuación del tubo de pitot 3.5. La velocidad del aire es

$$V_{aire} = \sqrt{\frac{2 * g * \Delta P}{\rho_{aire}}} = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{9810N}{m^3}\right) (0.032m)}{\frac{0.925Kg}{m^3}}} = 26.05 \frac{m}{s} \dots (3.5)$$

### 3.2.3 Cuestionario

1. Grafique las temperaturas obtenidas con respecto al tiempo. Obtenga la función que mejor ajuste sus datos experimentales

Graficando los datos se obtiene que:

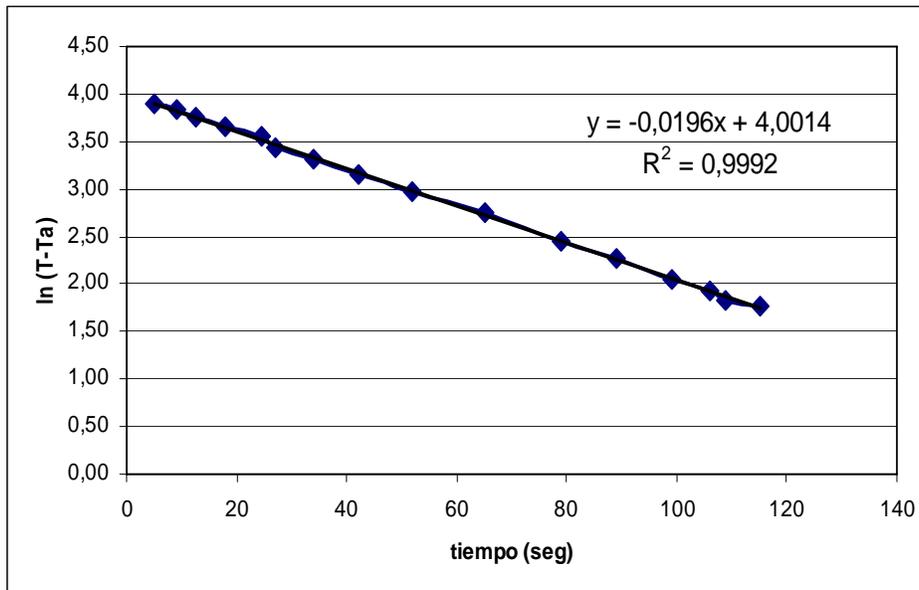


Figura 3.12 Diferencia de temperaturas logarítmica vs tiempo

Del gráfico se observa que la pendiente posee un valor de – 0.0196

2. Grafique el cociente del  $\Delta T$ /tiempo con respecto al tiempo. Indique ¿para qué tiempos la rapidez de enfriamiento en la barra es muy grande? ¿A partir de qué tiempo la rapidez de enfriamiento se vuelve asintótica? ¿En qué tiempo estima que la barra alcance la temperatura de 30 °C?

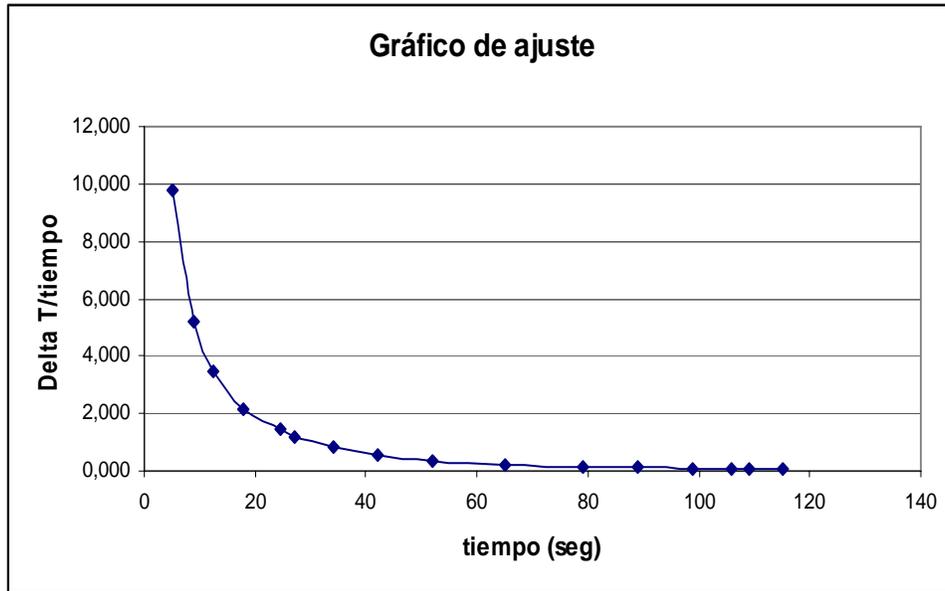


Figura 3.13 Gráfico de ajuste para la barra de cobre

Los tiempos en donde la barra se enfría rápidamente son dentro de los primeros 20 segundos. A un tiempo de 65 segundos la rapidez se vuelve asintótica. El tiempo estimado para que la barra obtenga una temperatura de 30 °C según el gráfico de cálculo de  $h_m$ , es de aproximadamente 80 segundos.

3. Plantee el balance de energía en la que se indique el mecanismo por el cual se gana calor al ambiente perdido por la barra. Integre la ecuación y obtenga el coeficiente convectivo de transferencia de calor,  $h_m$  ( $W/m^2\text{°C}$ )

### Traducción del sistema

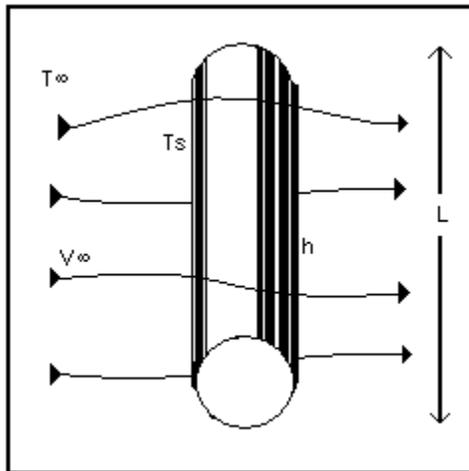


Figura 3.14 Diagrama de flujo transversal sobre un barra cilíndrica de longitud L

### Planteamiento

El cilindro pierde calor y la cantidad de calor que pierde se puede obtener por:

$$Q = mC_p(T_s - T_a)$$

o en forma diferencial:

$$Q = mC_p \frac{dT}{d\theta}$$

esa cantidad de calor perdido se transfiere al aire por convección:

$$Q = hA_s(T_s - T_a)$$

igualando el calor perdido por el cilindro con el transferido por convección al fluido (ambiente), tenemos que:

$$-mC_p \frac{dT_s}{d\theta} = hA_s(T_s - T_a) \dots (3.6)$$

e integrando

$$\int \frac{dT_s}{T_s - T_a} = -\frac{hA_s}{mC_p} \int d\theta$$

$$\ln(t - T_a) = -\frac{hA_s}{mC_p} \theta + C$$

de las condiciones iniciales

$$@ \theta = 0 \quad T_s = T_o$$

por lo tanto:

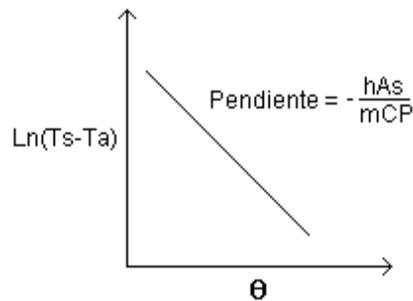
$$\ln(T_o - T_a) = C$$

esto es:

$$\ln(T_s - T_a) = -\frac{hA_s}{mC_p} \theta + \ln(T_o - T_a) \dots (3.7)$$

La ecuación 3.7 puede considerarse como la ecuación de una recta  $y = mx + b$ .

La gráfica queda de la manera siguiente:



### Cálculos

Área del cilindro

$$A_s = \pi D L = \pi (0.01238m)(0.0951m) = 3.698 \times 10^{-3} m^2$$

Recordando de la ecuación 3.7 que el valor de la pendiente es igual a  $(hA_s)/(mC_p)$ , podemos decir que:

$$-0.0196 = -\frac{hA_s}{mC_p}$$

con valores de las propiedades

$$A_s = 3.698 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$M_{cu} = 0.106 \text{ Kg}$$

$$C_p = 0.0908 \text{ kcal / kg}^\circ \text{C}$$

y sustituyendo los valores anteriores para despejar h, obtenemos que:

$$h = \frac{\left(-\frac{0.0196}{s}\right)(0.106 \text{ Kg})\left(\frac{0.0908 \text{ kcal}}{\text{Kg}^\circ \text{C}}\right)}{(-3.698 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = \frac{0.0510 \text{ kcal}}{s \text{ m}^2 \text{ }^\circ \text{C}} = \frac{213.48 \text{ W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

4. ¿Cuánto calor sensible  $Q_s(W)$  ha perdido la barra durante el tiempo de experimentación?

La ecuación para el cálculo es la siguiente:

$$Q_s = A_s \cdot h_m \cdot (T_s - T_{air}); \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$Q_s = (0.01238 \text{ m} \cdot 0.0951 \text{ m} \cdot \pi) \cdot (-213.48 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ \text{C}) \cdot (69.78 - 21^\circ \text{C})$$

$$Q_s = -38.52 \text{ W}$$

5. Localice correlaciones empíricas para obtener un coeficiente de transferencia de calor  $h_m$ , teórico y compare los resultados con el obtenido de manera experimental.

En las correlaciones siguientes, el coeficiente de transmisión de calor  $h_m$  está definido para la superficie total del objeto sumergido. Las correlaciones están dadas para una temperatura uniforme  $T_s$  de la superficie. El subíndice  $\infty$  se refiere a las condiciones de la corriente que se aproxima al objeto, mientras que el subíndice f denota propiedades evaluadas a la denominada “temperatura de película”  $T_f = (T_s + T_\infty)/2$  [1].

### Correlación de datos experimentales

Si se considera un flujo de aire sobre un tubo circular, donde el fluido se desplaza por fuera y, se tiene un gradiente de temperaturas entre el tubo circular y el fluido, de manera que existe una transferencia de calor en el sistema, el coeficiente de transferencia de calor por convección dependerá del valor del Reynolds y sus coeficientes, esto es <sup>[19]</sup>:

$$Nu = \frac{hDe}{k} = b(Re)^n \dots(3.8)$$

en donde los valores de n y b se encuentran registrados en la tabla siguiente:

**Tabla 3.7 Coeficientes de la correlación para diferentes intervalos del número de Reynolds**

Re	n	b
0.4 – 4	0.330	0.989
4 - 40	0.385	0.911
40 – 4000	0.466	0.683
4000 – 40,000	0.618	0.193
40,000 – 400,000	0.805	0.027

A continuación se obtendrá el número de Reynolds para el gas, empezando con el cálculo de la densidad del aire:

$$\rho = \frac{PP_M}{RT} = \frac{(29kg / Kmol * 0.769atm)}{(0.082m^3 atm / KmolK)(318.4K)} = 0.854 \frac{kg}{m^3}$$

La viscosidad del aire reportada en la tabla 1.1-1 del Bird et al <sup>[1]</sup>, es de 0.019 cps. Sustituyendo los valores para el Reynolds, tenemos que:

$$Re = \frac{(0.01238m)(0.854Kg/m^3)(26.05m/s)}{\left(\frac{1.9 \times 10^{-5}Kg}{s\ m}\right)} = 14495.5$$

Para este valor de Reynolds obtenido, los coeficientes de la tabla 3.7 valen:  $b = 0.193$  y  $n = 0.618$ . Por lo tanto el Nusselt quedaría de la siguiente forma:

$$Nu = \frac{h_m D}{k_f} = (0.193)(14495.5)^{0.618} = 71.97$$

despejando el valor de  $h_m$  de la ecuación 3.8:

$$h = k_f Nu / D = \frac{(27.67 \times 10^{-3} W / mk)(71.97)}{(0.01238m)} = 160.87 \frac{W}{m^2 k}$$

Por lo tanto, el porcentaje de error es:

$$\left| \frac{213.5 - 160.87}{213.5} \right| * 100 = 24.65\%$$

### **Coefficiente de transmisión de calor para convección forzada alrededor de objetos sumergidos**

La función  $j_H$ , relaciona la cantidad de movimiento con la transferencia de calor valiéndose de correlaciones adimensionales. En esta correlación el coeficiente de transferencia de calor,  $h_m$ , está definido para la superficie total del objeto sumergido, sea un fluido líquido o gaseoso <sup>[1]</sup>.

En la figura 3.15 se representa a la función  $j_H = Nu Re^{-1} Pr^{-1/3}$  frente a Reynolds para un cilindro largo cuyo eje es perpendicular a una corriente ilimitada que se aproxima con una velocidad  $v_\infty$ . Las propiedades físicas del fluido se evalúan a  $T_f$ , cuya gráfica se muestra a continuación [1].

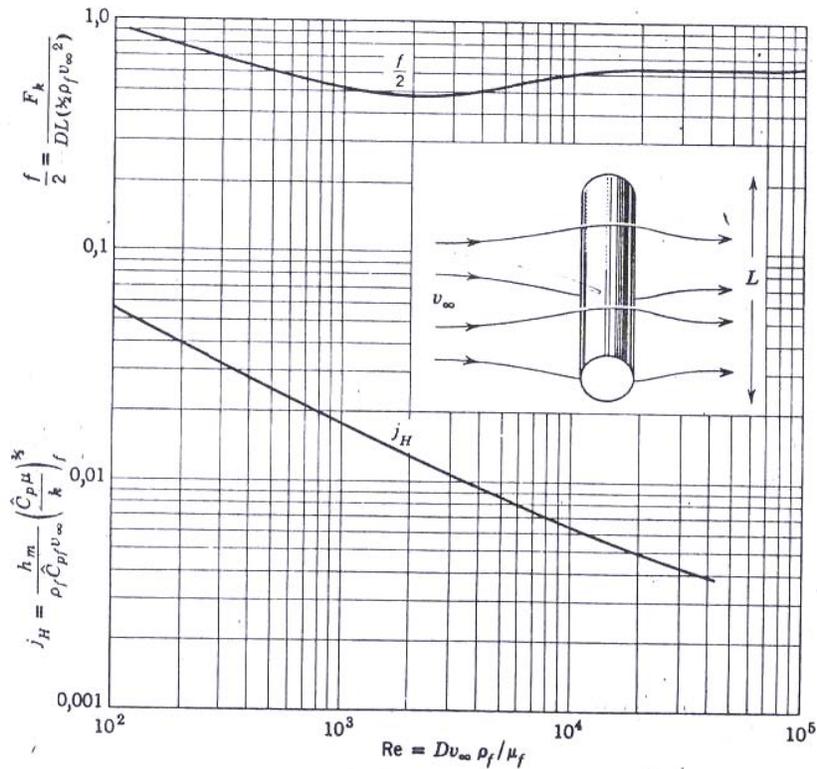


Figura 3.15 Gráfico de transferencia de calor y cantidad de movimiento entre un cilindro largo y una corriente transversal. Fuente: Bird et al, Fenómenos de Transporte, 1998

A continuación se calculará  $h_m$  con base a la función  $j_H$  y el Reynolds. Se utilizarán los valores de la tabla 3.8 cuyas propiedades termofísicas del fluido se encuentran evaluadas a  $T_f = 318.5K$ .

**Tabla 3.8 Propiedades termofísicas del aire a 318.5 K**

D (m)	$V_{\infty}$ (m/s)	P (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (kg/mseg)	$Cp_f$ (J/kg K)	$K_f$ (W/mK)	$K_{cobre}$ (W/mK)
0.01238	26.05	0.854	$1.9 \times 10^{-5}$	1007.74	$27.67 \times 10^{-3}$	401.15

Cálculo de Reynolds a  $T_f$

$$Re = \frac{(0.01238m)(0.854kg/m^3)(26.05m/s)}{(1.9 \times 10^{-5} kg/sm)} = 14495.5$$

Con un Reynolds de 14,495.5 y leyendo en la figura 3.15, a  $j_H$  le corresponde un valor de 0.0057. Con base a  $j_H$  y las demás variables conocidas, se procede a despejar y calcular  $h_m$ , como se muestra a continuación

$$j_H = \frac{h_m}{\rho_f Cp_f v_{\infty}} \left( \frac{Cp_f \mu}{k} \right)_f^{2/3} \dots (3.9)$$

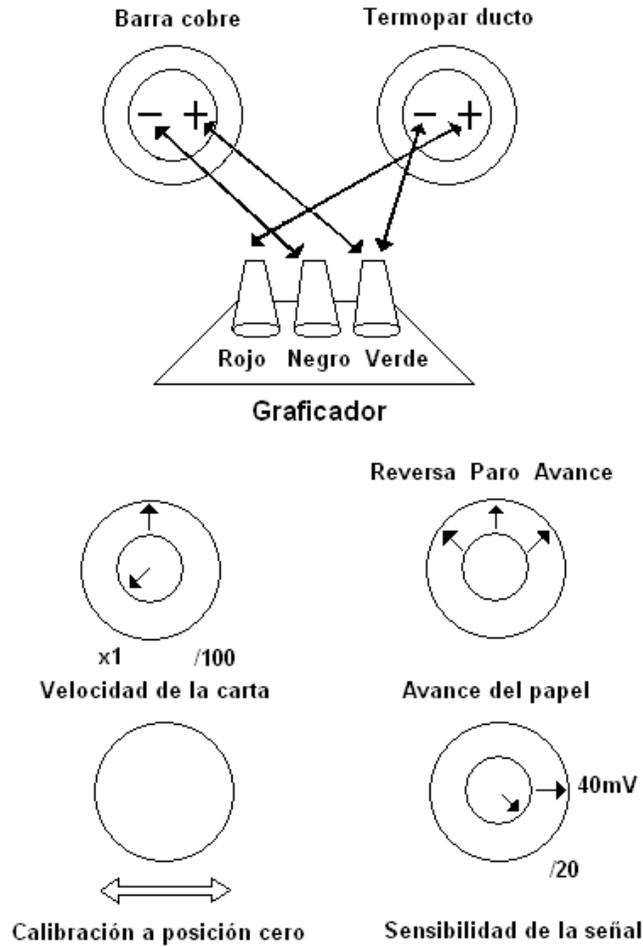
$$h_m = \frac{j_H * (\rho_f Cp_f v_{\infty})}{\left( \frac{Cp_f \mu}{k} \right)_f^{2/3}} = \frac{(0.0057) * \left( \frac{0.854kg}{m^3} * \frac{1007.74J}{kgK} * \frac{26.05m}{s} \right)}{\left( \frac{1007.74J / kgK * 1.9 \times 10^{-5} kg / ms}{27.67 \times 10^{-3} W / mK} \right)^{2/3}}$$

$$h_m = 163.34 \frac{W}{m^2 K}$$

Porcentaje de error

$$\left| \frac{213.5 - 163.34}{213.5} \right| * 100 = 23.5\%$$

Figura 3.16 Anexo A de la práctica 3.2



Esquema de condiciones en el graficador

### 3.3 Conducción y convección en una barra sólida

#### 3.3.1 Problema

Una barra de aluminio de propiedades y dimensiones conocidas, está conectada por su base a una fuente de calor, la cual se encuentra a temperatura ambiente. La fuente de calor empieza a utilizar vapor saturado de la caldera desde una presión inicial de  $2 \text{ Kg/cm}^2$  hasta una presión estabilizada de  $5 \text{ Kg/cm}^2$  como máximo. Ésto se logra empleando una válvula de control, de manera que se inicia una transferencia de calor hacia la barra, generándose con ésto un gradiente de temperatura a todo lo largo de la aleta. Responda ¿cuál es la distribución de temperaturas en la barra? Determine la eficiencia con que la barra transfiere calor al ambiente.

#### 3.3.2 Parte experimental

##### Material requerido

- Termopar
- Guantes de carnaza
- Cronómetro

##### Equipo

- Equipo de conducción de calor que utiliza vapor saturado como medio de calentamiento.

##### Técnica de operación del equipo

1. Asegúrese de que esté programado vapor de la caldera para la experimentación en el equipo.

2. Abra todas las válvulas, menos la válvula de paso (1), para que se liberen los condensados remanentes.
3. Revise que la mayoría de los condensados hayan sido liberados. Ésto se observa con una gran disminución de vapor a la salida.
4. Con ayuda de la escalera del laboratorio, abra toda la válvula principal de paso (1) para permitir la entrada de vapor al sistema.
5. Direccione el flujo de vapor hacia el sistema, cerrando la válvula (2) y manteniendo abiertas la (3), (4) y (5).
6. Antes de comenzar a tomar datos de temperatura en la barra, espere a que se presenten lecturas casi constantes en el manómetro, en caso de presentarse fluctuaciones en la presión, espere a que esta se normalice.
7. Inmediatamente después de que ya no fluctúe la presión en el manómetro, empiece a registrar sus datos de temperatura y deje que el sistema alcance el régimen permanente.
8. Alcanzándose el régimen permanente en la barra, empiece por abrir la válvula (2) con el fin de disminuir el flujo de vapor hacia sistema, enseguida cierre la (3) y por último la válvula (4). Esto permitirá direccionar el vapor hacia la salida en (5).
9. Por último cierre totalmente la válvula de paso (1) con ayuda de la escalera, recuerde que la válvula se encuentra a temperatura alta. No olvide utilizar los guantes de carnaza.

#### *Datos adicionales*

Longitud de la barra de aluminio: 0.9 m

Diámetro exterior de la barra: 0.019 m

Conductividad térmica constante: 173.9 Kcal/hr m °C

Correlación para obtener el coeficiente total de transferencia de calor por convección y radiación desde una barra de aluminio:

$$h_T = 9.74 + 0.07 \cdot \Delta T \text{ en W/m}^2 \text{ K}$$

## Diagrama del equipo

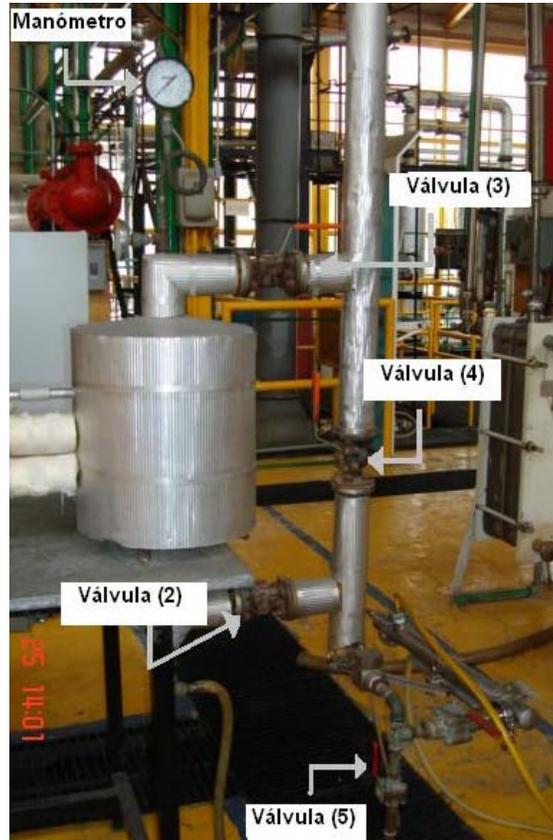


Figura 3.17 Equipo para la transferencia de calor por conducción, convección y radiación en una barra de aluminio, vista lateral

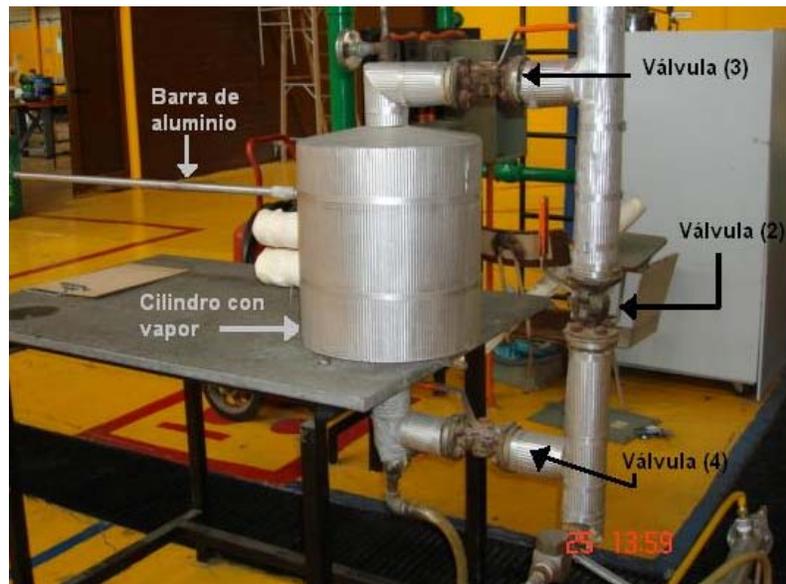


Figura 3.18 Equipo para la transferencia de calor por conducción, convección y radiación en una barra de aluminio, vista lateral trasera

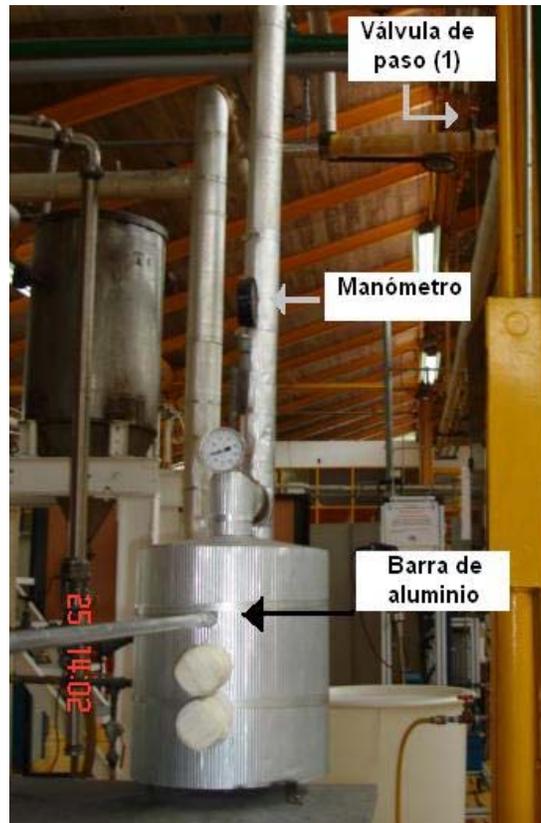


Figura 3.19 Equipo para la transferencia de calor por conducción, convección y radiación en una barra de aluminio, vista de frente

### Actividades experimentales

#### Realice lo siguiente:

1. Encienda el termopar y mida la temperatura a la que se encuentra el ambiente.
2. Encienda y programe el cronómetro.
3. Empiece la transferencia de calor desde la base de la fuente hacia la barra de aluminio, como se explica en la técnica de operación.
4. Obtenga del manómetro la presión a la cual está trabajando el sistema.

5. De inicio al cronómetro y obtenga las temperaturas que va alcanzando la barra en toda su longitud mediante lectura directa por el termopar en el transcurso del experimento.
6. Con los perfiles de temperatura obtenidos en la barra, reporte en la tabla 3.9 la información requerida.

**Tabla 3.9 Perfil de temperaturas a lo largo de la barra**

Tiempo (min)	0'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'
Longitud (m)	Temp (°C)							
0								
10								
20								
30								
40								
50								
60								
70								
80								
90								

Temperatura del ambiente (°C) = x

Presión manométrica (Kg/cm<sup>2</sup>) = x

Temperatura del vapor (°C) = x

**Resultados**

Al efectuarse el experimento, la barra de aluminio presentó las siguientes temperaturas:

**Tabla 3.10 Perfil de temperaturas a lo largo de la barra**

Tiempo (min)	2.5'	7.5'	12.5'	20'	25'	30'	35'	40'
Longitud (m)	Temp (°C)							
0	110	118.9	125	126.4	125.5	125.1	124.8	123.6
10	78.4	87	93	98.4	98.4	94.8	94.5	94.1
20	56.5	66.1	71.5	73.9	74.8	75.1	74.6	74.8
30	42.5	51.3	56.9	59.4	60.7	61	61.2	61.3
40	34.2	41.5	46.3	49.1	50.3	50.9	51.2	51.6
50	29.3	35	39.4	41.6	43.1	43.6	44.3	44.8
60	26.5	30.7	34.4	36.6	38.1	39	39.8	40.1
70	25	28.1	31.3	33.3	34.8	35.8	36.7	37.2
80	24.3	26.6	29.6	31.5	32.9	34.1	34.9	35.4
90	24.5	26.8	29.4	30.1	32	32.2	33.2	34

Temperatura del ambiente (°C) = 24.3

Presión manométrica (Kg/cm<sup>2</sup>) = 4.6

Temperatura del vapor (°C) = 154 °C;  $\theta_b = T_v - T_a = 129.7$  °C

El dato de la temperatura del vapor de la fuente de calor fue encontrado a través de la utilización de tablas de vapor de agua. A partir del valor de la presión absoluta, se leyó en tablas de vapor saturado el correspondiente valor de temperatura. Esto se describe a continuación

$$P_{abs} = P_{man} + P_{atm} \dots (3.10)$$

donde

$$P_{man} = \frac{4.6Kg}{cm^2} \left( \frac{98.066 kPa}{1 Kg/cm^2} \right) \left( \frac{1 atm}{101.325 kPa} \right) \left( \frac{14.7 lb/in^2}{1 atm} \right) = \frac{65.44lb}{in^2}$$

$$P_{atm} = 0.77atm \left( \frac{14.7 lb/in^2}{1 atm} \right) = 11.31 \frac{lb}{in^2}$$

$$P_{abs} = 65.44 + 11.31 = 76.75 \frac{lb}{in^2}$$

Con una presión absoluta de 76.75 psia, al vapor saturado le corresponde una temperatura de 309.15 °F (154 °C) según tabla de vapor de agua, Himmelblau [9].

### 3.3.3 Cuestionario

1. Realice el balance de energía del elemento diferencial a lo largo de la barra de aluminio y resuelva el sistema de ecuaciones. Con la solución del sistema de ecuaciones, grafique el perfil de temperaturas tanto teórica como experimental versus la longitud de la barra.

#### Traducción del sistema

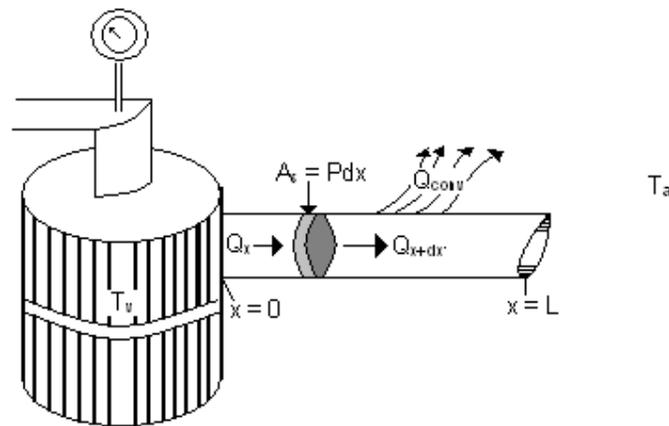


Figura 3.20 Transferencia de calor por conducción y convección en una barra de aluminio a través de un elemento diferencial

## Planteamiento

Podemos suponer condiciones de conducción unidimensional ya que en la práctica la barra (aleta) es delgada y los cambios de temperatura en la dirección longitudinal son mucho más apreciables que los de la dirección transversal. Sin embargo, hay que tener presente que la conducción bidimensional existe. Para determinar la transferencia de calor asociada con la aleta cilíndrica se tendrán que hacer suposiciones extras, como:

- Conducción de estado estable;  $dQ/dt = 0$
- La  $K$  permanecerá constante
- La radiación desde la superficie es insignificante
- Los efectos asociados con la generación de calor están ausentes
- El coeficiente de transferencia de calor  $h_m$  es uniforme sobre la superficie

## Balance de Energía

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de calor que} \\ \text{entra al volumen de} \\ \text{control} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de calor que} \\ \text{sale del volumen de} \\ \text{control} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de calor por} \\ \text{convección de la} \\ \text{superficie longitudinal} \end{array} \right\}$$

$$Q_x|_x = Q_x|_{x+\Delta x} + Q_{conv}$$

utilizando la ecuación de Fourier  $Q_x = -kA_s dT/dx$  y  $Q_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty)$ , y sustituyendo las ecuaciones en el balance de energía:

$$-KAs \frac{dT}{dx} \Big|_x = -KAs \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} + \bar{h}_m P \Delta x (T_s - T_a)$$

$$-KAs \frac{dT}{dx} \Big|_x + KAs \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} = \bar{h}_m P \Delta x (T_s - T_a)$$

$$\frac{KAs \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - KAs \frac{dT}{dx} \Big|_x}{\Delta x} = \frac{\bar{h}_m P \Delta x (T_s - T_a)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{KAs \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - KAs \frac{dT}{dx} \Big|_x}{\Delta x} \right] = \bar{h}_m P (T_s - T_a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ KAs \frac{dT}{dx} \Big|_x \right] = \bar{h}_m P (T_s - T_a) \quad \dots (3.11)$$

Para simplificar la forma de esta ecuación, transformamos la variable dependiente definiendo un *exceso de temperatura*  $\theta$  como  $\theta_{(x)} = T_{(x)} - T_a$ . Donde, como  $T_a$  es una constante,  $d\theta/dx = dT/dx$ . Al sustituir lo anterior en la ecuación 3.11, obtenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{h_m P \theta}{KA_T} = 0 \quad \dots (3.12) \quad \text{con } m = \left( \frac{h_m P}{KA_T} \right)^{1/2}$$

por lo tanto

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad \dots (3.13)$$

La ecuación resultante 3.13, es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes. Su solución general es:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad \dots (3.14)$$

Para evaluar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  de la solución general, es necesario especificar las condiciones de frontera del sistema. Una condición se especifica en términos de la temperatura de la base (fuente de calor) de la barra ( $x = 0$ )

$$C.F.1 \quad \theta(0) = T_v - T_a \equiv \theta_b$$

La segunda condición de frontera, corresponde a la suposición de que la pérdida de calor convectiva en el extremo de la barra es insignificante, en cuyo caso el extremo se trata como si fuera adiabático, por lo tanto:

$$C.F.2 \quad \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Al sustituir la primera condición de frontera en la solución general ecuación (3.14), tenemos que:

$$\begin{aligned} \theta_b &= C1e^{m(0)} + C2e^{-m(0)} \\ \theta_b &= C1 + C2 \quad \dots(3.15) \end{aligned}$$

De la misma manera, hacemos para la segunda condición de frontera, ésto es:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = \frac{d}{dx} (C1e^{mL} + C2e^{-mL}) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} = C1me^{mL} + C2me^{-mL} = 0$$

al dividir entre m, obtenemos:

$$C1e^{mL} + C2e^{-mL} = 0 \quad \dots(3.16)$$

podemos despejar C2 de la expresión (3.15) para sustituirla en (3.16) y con algunas manipulaciones más decimos que la constante C1 es:

$$C1 = \frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Al obtener C1, solamente tenemos que sustituirlo en la ecuación (3.15) para despejar a C2, dando como resultado:

$$C2 = \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Con C1 y C2 despejados, lo que sigue es sustituirlos en la ecuación (3.14) de la solución general para obtener la distribución de temperaturas, ésto es:

$$\theta = \frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{mx} + \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{-mx}$$

Factorizando  $\theta_b$  y reacomodando los superíndices x y L, obtenemos:

$$\theta = \frac{\theta_b (e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)})}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad \dots (3.17)$$

La ecuación 3.17 puede simplificarse todavía mas. Ésto se logra utilizando la igualdad trigonométrica,  $2\cosh (x) = e^{-x} + e^x$  y sustituyéndola en la expresión, por lo que obtenemos

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m (L - x)}{\cosh (mL)} \quad \dots (3.18)$$

Con base a la ecuación (3.18) y los datos de la tabla 3.10, se graficó el perfil de temperaturas, tanto teórico como experimental, de la barra contra la longitud de la misma. El régimen permanente se alcanzo a los 40 minutos de haber empezado el experimento. A continuación se muestra la gráfica que se obtuvo:

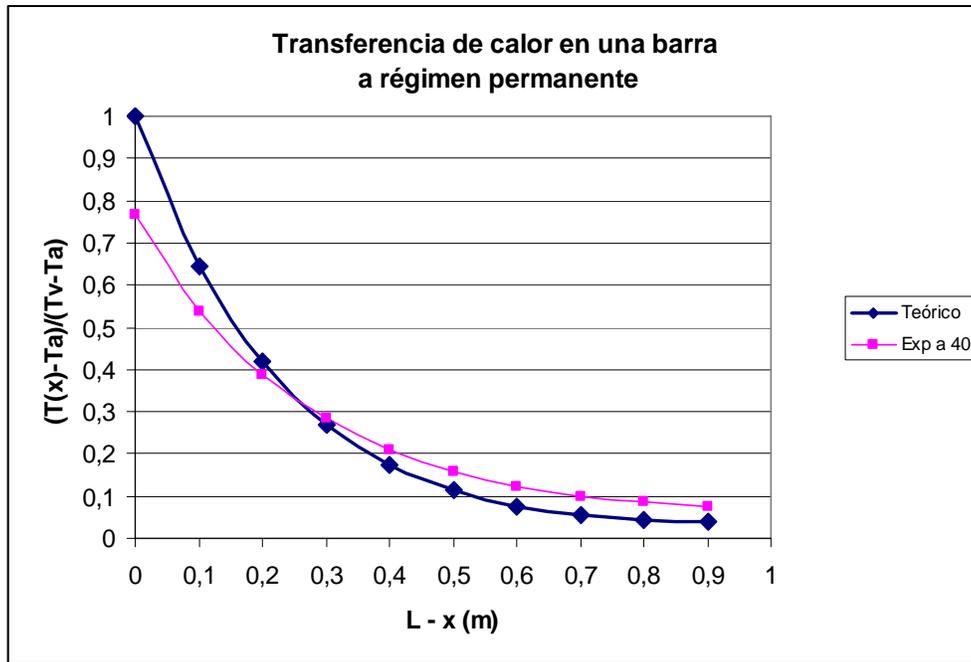


Figura 3.21 Transferencia de calor en una barra cilíndrica a régimen permanente

2. Grafique la distribución de temperaturas de la barra a régimen transitorio

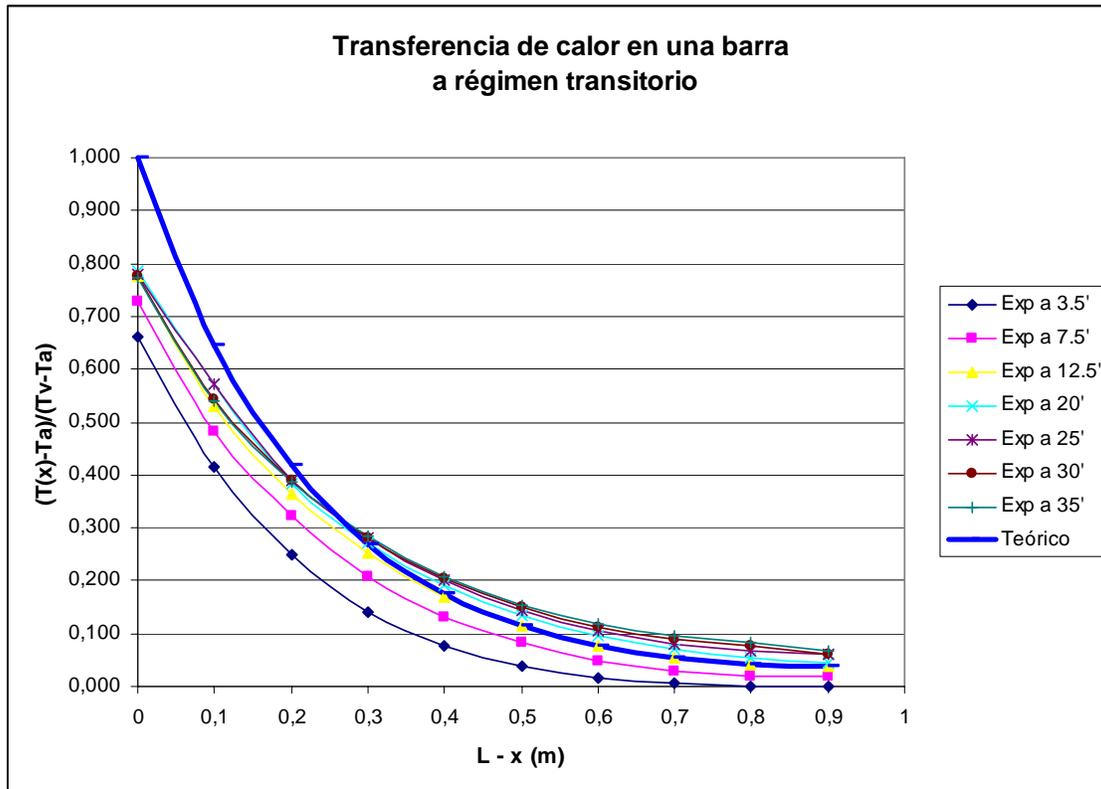


Figura 3.22 Transferencia de calor en una barra cilíndrica a régimen transitorio

El gráfico 3.22 muestra la diferencia entre las temperaturas alcanzadas en la barra a distintos tiempos en que se llevó a cabo el experimento. Se observa del gráfico 3.22 cómo en cada lapso de tiempo, el perfil de temperaturas se va acercando cada vez más al perfil de temperaturas teórico y en algunos casos se ve superado el valor del perfil teórico.

Esto se explica en función de la variación de las presiones de vapor entregadas al sistema por la caldera ya que, durante el tiempo de experimentación, se presentaron fluctuaciones en la presión de vapor. Por lo tanto, el valor de 4.6 Kg/cm<sup>2</sup> viene a ser el resultado del promedio de las presiones de vapor durante el experimento.

Estas variaciones de presión afectaron la temperatura con que se alimentaba la fuente de calor, la cual en su mayoría era conducida hacia la barra de aluminio. Al tenerse aumentos en la temperatura de la fuente de calor, la conducción en la barra presenta variaciones o desfases en comparación con el modelo teórico. Sin embargo, aun con el error experimental asociado, el resultado se puede considerar adecuado para la representación del fenómeno de transferencia de calor en la barra cilíndrica.

3. Con la ecuación de distribución de temperaturas obtenida en la pregunta 1, calcule el calor transferido desde la base de la barra al ambiente.

La deducción de la ecuación que describe el calor transferido desde la base de la aleta, parte de que todo el calor se transfiere unidireccionalmente en x, ésto es:

$$Q_b = \int_{x=0}^{x=L} h_T P (T_v - T_a) dx \quad \text{con } \theta = T_v - T_a$$

$$Q_b = \int_{x=0}^{x=L} h_T P \theta dx$$

Sabiendo que  $\theta$  esta definido por la ecuación (3.18)

$$Q_b = \int_{x=0}^{x=L} h_T P \theta_b \frac{\cos h m (L - x)}{\cos h (mL)} dx$$

y sacando de la integral los valores constantes

$$Q_b = \frac{h_T P \theta_b}{\cos h (mL)} \int_{x=0}^{x=L} \cos h m (L - x) dx \quad \dots (3.19)$$

Para resolver esta integral es necesario hacer una sustitución de variables, por lo que la sustitución se muestra a continuación

$$u = m(L - x); \quad -\frac{du}{m} = dx \quad \text{si } x = L \rightarrow u = 0; \quad \text{si } x = 0 \rightarrow u = mL$$

Con base a esta sustitución de variable la integral toma la siguiente forma:

$$Q_b = \frac{h_T P \theta_b}{\cos h (mL)} \int_{u=mL}^{u=0} -\frac{\cos h (u) du}{m} \quad \dots (3.20)$$

Resolviendo la integral en 3.20, obtenemos:

$$-Q_b = \frac{h_T P \theta_b}{\cos h (mL)} \frac{1}{m} [\text{sen } h (u)]_{u=mL}^{u=0}$$

Evaluando los límites de la integral, el resultado es:

$$Q_b = \frac{h_T P \theta_b \text{sen } h (mL)}{m \cos h (mL)} \quad \dots (3.21)$$

Recordando que  $m = (h_T P / KA_T)^{1/2}$  y sustituyéndolo en la ecuación (3.21)

$$Q_b = \frac{h_T P \theta_b \operatorname{sen} h(mL)}{\cos h(mL) \left(\frac{h_T P}{KA_T}\right)^{1/2}}$$

Por lo tanto,

$$Q_b = \sqrt{h_T P KA_T} \theta_b \tan h(mL) \quad \dots (3.22)$$

La ecuación 3.22 obtenida representa el calor transferido por convección, que cubre desde la base de la barra hasta su longitud final sobre la dirección x. Para obtener  $Q_b$  solamente tenemos que sustituir los valores que corresponden a cada variable en la ecuación 3.22, quedando de la siguiente manera:

Cálculo de  $h_T$  de la ecuación  $h_T = 9.74 + 0.07 \Delta T$  en  $W/m^2 K$

$$h_T = 9.74 + 0.07(427 - 297.3) = 18.819 \frac{W}{m^2 K}$$

Cálculo de P

$$P = \pi * D = \pi(0.019m) = 0.0597m$$

Cálculo de  $A_T$

$$A_T = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (0.019)^2 = 2.83 \times 10^{-4} m^2$$

Con las variables anteriores conocidas se puede calcular el valor de m, por lo que

$$m = \left( \frac{\frac{18.819W}{m^2 K} * 0.0597m}{\frac{205.86W}{mK} * 2.83 \times 10^{-4} m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.391$$

Cálculo de  $Q_b$

$$Q_b = \sqrt{\frac{18.819W}{m^2K} * 0.0597m * \frac{205.86W}{mK} * 2.83 \times 10^{-4}m(129.7K) \tanh(4.391 * 0.9)}$$

$$Q_b = 33.157 W$$

4. ¿Cuál es el factor de eficiencia de la aleta del sistema?

El factor de eficiencia  $\Omega$  se define como el calor real transferido desde la base de la barra, si la aleta estuviera en toda su longitud real a la temperatura uniforme  $T_v$ . Con esta definición a continuación se mostrará la deducción de la ecuación con el fin de calcular el valor de la eficiencia de la aleta cilíndrica.

El factor de eficiencia es igual a

$$\Omega = \frac{Q_b}{Q_A|_{T_v}} = \frac{\sqrt{h_T P K A_T} \theta_b \tanh(h mL)}{h_T P (T - T_a) dx} \quad \dots (3.23)$$

$Q_A$  en la ecuación 3.23 es el calor transferido en toda la barra a una temperatura uniforme  $T_v$ , por lo que integrando la expresión en la dirección  $x$ , obtenemos:

$$Q_A|_{T_v} = h_T P (T_v - T_a) \int_{x=0}^{x=L} dx$$

$$Q_A|_{T_v} = h_T P L (T_v - T_a)$$

Por lo tanto, sustituyendo  $Q_A$  para toda la aleta en la ecuación (3.23), tenemos que:

$$\Omega = \frac{Q_b}{Q_A|_{T_v}} = \frac{\sqrt{h_T P K A_T} \theta_b \tanh(h mL)}{h_T P L (T_v - T_a)}$$

Reacomodando términos:

$$\Omega = \frac{\sqrt{h_T P} \sqrt{KA_T} (T_v - T_a) \tan h (mL)}{h_T P L (T_v - T_a)}$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{KA_T} \tan h (mL)}{\sqrt{h_T P L}}$$

Recordando que  $m = (h_T P / KA_T)^{1/2}$  y sustituyéndolo en la ecuación anterior, se obtiene que el factor de eficiencia es igual a:

$$\Omega = \frac{\tan h (mL)}{mL} \quad \dots (3.24)$$

Cálculo del factor de eficiencia:

$$\Omega = \frac{\tan h (mL)}{mL} = \frac{\tan h (4.391 * 0.9)}{(4.391 * 0.9)} = 0.2528$$

$$\Omega = 25.28 \%$$

En caso de que nuestro objetivo fuera el de disipar la mayor cantidad de calor a través de una barra cilíndrica se observaría que con el valor de 25.3 % de eficiencia, la barra cilíndrica de estas dimensiones, no es el mejor arreglo geométrico para realizar mejor esta transferencia de calor.

## Capítulo.IV EXPERIMENTO PROPUESTO

Para demostrar algunos de los problemas vinculados con la conducción de calor a régimen transitorio en objetos sólidos, ésta se medirá en muestras de geometría sencilla en relación a las ecuaciones que lo predicen y describen, empleando como guía los principios inscritos en la “Reforma de la Enseñanza Experimental” que actualmente se utiliza en el laboratorio de Ingeniería Química.

Sea un cuerpo mantenido inicialmente a temperatura ambiente. Una vez sumergido en un baño termostático que está a una temperatura máxima, el tiempo que debe transcurrir para que su centro alcance el valor de la temperatura máxima, depende de la forma geométrica, de las dimensiones del objeto y de las propiedades termofísicas del material de que consta. Cuando a muestras dimensional y geoméricamente similares, pero de diferentes materiales, se les somete a idénticas condiciones térmicas, el tiempo necesario para que estas esferas lleguen al régimen permanente depende solamente de sus respectivas propiedades termofísicas (densidad, capacidad calorífica y conductividad térmica), y de las resistencias al calor presentes. Es conveniente que las muestras a ensayar tengan forma de esferas de diámetro finito, ya que la conducción al calor se experimenta unidireccionalmente, facilitando con ello las ecuaciones que describen el perfil teórico de temperaturas.

Para nuestro caso no fue necesario construir el sistema en su totalidad, sino que fue conformado tanto por equipo adquirido, como por material existente del laboratorio de Ingeniería Química, el cual consiste de:

1. Baño termostático con control marca Thermo Haake P5, modelo DC 10 (con dimensiones de 55 x 20 x 45 cm aproximadamente) dotado con una capacidad de circulación de líquido de 17 lt/min, termómetro graduado de  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ , mangueras de plástico para conexión y bomba de recirculación de 300 mbar como presión máxima.
2. Muestras por ensayar: esfera de aluminio de 5.9 cm de diámetro, esfera de madera barnizada de 10 cm de diámetro, cada una con orificios hasta el centro de 1/8 de pulgada de ancho y tapones de plástico que fijan el termopar en forma de popote.
3. Clamp Digital Multitester 100 con termopar tipo K de aleación (Ni – Al) Alumel, rango desde 0 a  $750\text{ }^{\circ}\text{C}$ , pantalla digital, marca Steren.
4. Cronómetro eléctrico.
5. Vasos de precipitados de 50 y 500 ml.
6. Líquido de calentamiento (agua potable)

Las dificultades mas importantes asociadas al experimento propuesto fueron:

(i) para la construcción de la esfera de aluminio fue difícil encontrar una casa de torno que la produjera con la mejor esfericidad posible; (ii) encontrar un termopar adecuado al experimento, ya que los termopares con buena precisión son muy caros en el mercado; (iii) el hallar los tapones de las medidas requeridas que resistieran las temperaturas impuestas por las condiciones del experimento, invirtiéndose en ello varios días en su búsqueda y por último, (iv) el diseño del guión propuesto, así como las preguntas al cuestionario basados en la didáctica de los “Principios de la Reforma de la Enseñanza Experimental”.

Descrito lo anterior, en este capítulo se expondrá el problema con que parte el experimento propuesto, su parte experimental y la solución a las preguntas del cuestionario que sirven como memoria de cálculo para el profesor.

## **4.1 Transferencia de calor en esferas a régimen no permanente**

### **4.1.1 Problema**

Esferas de diámetros conocidos y diferentes materiales se encuentran inicialmente a temperatura ambiente. Cada una posee un termopar desmontable en su centro. Súbitamente, las esferas son sumergidas en un baño de agua que se encuentra a una temperatura máxima, produciéndose con ello un gradiente de temperatura en los materiales. Determine la historia de temperaturas para las diferentes esferas. Además, determine en qué tiempo alcanzará cada esfera el régimen permanente, con base en sus propiedades termofísicas.

### **4.1.2 Parte experimental**

#### **Material requerido**

- Termopar tipo K
- Cronómetro
- Esferas de diferentes materiales
- Vaso de precipitados de 500 ml y de 50 ml

#### **Equipo**

- Baño termostático con control, Thermo Haake P5

#### **Técnica de operación del equipo**

1. Monte el equipo como se muestra en la figura (1). Empiece por llenar el baño termostático alimentando agua con la manguera de entrada (2) hasta la marca.

2. Conecte nuevamente la manguera de entrada al sistema de recirculación (3). Encienda el control del baño termostático, con el fin de hacer circular el líquido dentro el baño (4).
3. Fije la temperatura máxima del baño empleando las flechas que se encuentran en el panel de control (5). Deje que el baño alcance la temperatura deseada, que luego habrá de quedar constante.
4. Sumerja primero los soportes para cada esfera y ya alcanzado el equilibrio térmico entre éstos y el fluido, proceda a sumergir totalmente las esferas. Estas deben tener conectado el termopar en el centro (6) (asegúrese de ajustar bien el tapón en el orificio donde se coloca el termopar antes de sumergirlas).
5. Una vez alcanzado el régimen permanente en las esferas, empiece por detener la circulación del líquido del baño. Retire con precaución las esferas y sus soportes del baño, teniendo cuidado ya que el líquido se encuentra a una temperatura máxima.
6. Finalice vaciando el contenido del baño en la tarja, utilizando para esto el vaso de precipitados de 500 ml.

#### *Datos adicionales*

	Esferas	
	Aluminio	Madera
Diámetro (cm)	5.9	10
Cp (J/Kg K)	903	1380
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2702	510
K (W/m K)	237	0.12*

Todas las propiedades termofísicas están evaluadas a 300 K. \* Valor aproximado para la conductividad de la madera

## Diagrama del equipo

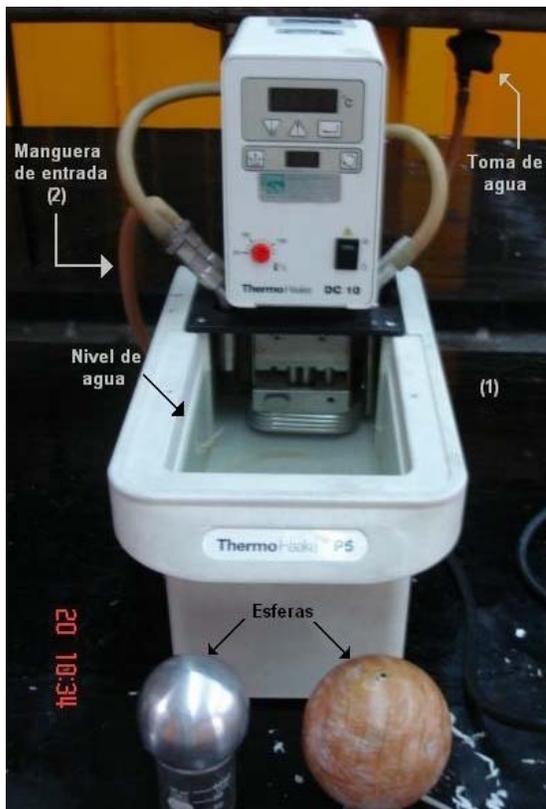


Figura 4.1 y 4.2 Llenado (izquierda) y encendido (derecha) del baño de temperatura



Figura 4.3 Calentamiento de la esfera de aluminio a 50 °C con tapón



Figura 4.4 Calentamiento de la esfera de madera a 50 °C con tapón

### Actividades experimentales

#### Realice lo siguiente:

1. Encienda y equilibre el termopar con la temperatura ambiente, anotando esta temperatura ( $T_{amb}$ ).
2. Mida las temperaturas del centro de las esferas con el termopar antes de colocarlas en la cámara de temperatura.
3. Coloque las muestras en la cámara. En ese instante empiece a contar el tiempo, así como la historia de las temperaturas para los centros de las muestras con ayuda del cronómetro y de los termopares. Reporte los resultados en la tabla.

**Tabla 4.1 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales,  
corrida n**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0		0	
10/60		0.5	
20/60		1	
30/60		1.5	
40/60		2	
50/60		2.5	

### 4.1.3 Memoria de cálculo

Para el primer experimento - corridas 1 a 3 - la temperatura ambiente fue de 21 °C y la temperatura máxima alcanzada en el baño termostático fue de 50 °C. Las esferas de aluminio y madera se calentaron, obteniéndose los siguientes datos:

**Tabla 4.2 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales,  
corrida 1**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0	23	0	22
10/60	33	0.5	24
20/60	40	1	25
30/60	44	1.5	25
40/60	46	2	25
50/60	48	2.5	26
1	49	3	26
1.1	49	3.5	26
1.2	49	4	27
1.3	50	4.5	27
1.5	50	5	28
2	50	5.5	29
2.1	50	6	29
		6.5	30
		7	31
		7.5	32
		8	32
		9	34
		10	35
		12	37
		15	40
		18	42
		20	43
		22	44
		25	45
		30	46

**Tabla 4.3 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales,  
corrida 2**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0	23	0	22
10/60	32	0.5	23
20/60	38	1	24
30/60	42	1.5	24
40/60	45	2	24
50/60	47	2.5	25
1	48	3	26
1.1	49	4	27
1.2	49	5	28
1.3	49	6	30
1.5	50	7	32
2	50	8	33
2.1	50	9	35
		10	36
		12	38
0	23	12.5	38
10/60	32	13	39
20/60	39	14	41
30/60	44	15	41
40/60	46	17	42
50/60	48	19	44
1	49	21	44
1.1	49	23	45
1.2	49	25	46
1.3	50	27	46
1.5	50	30	47
2	50		
2.1	50		

**Tabla 4.4 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales,  
corrida 3**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0	21	0	25
10/60	36	1	26
20/60	46	2	27
30/60	52	3	29
40/60	54	4	30
50/60	56	5	32
1	57	6	33
1.1	57	7	34
1.2	58	7.5	35
1.3	69	8	35
1.5	60	9	37
2	60	10	38
		11	39
		12	39
		14	41
		16	42
		18	43
		20	44
		21.5	45
		23	45
		25	46
		27	46
		30	47

Para las corridas 4 y 5 se manejo una  $T_{\text{máx}}$  de 50 °C en el baño para la esfera de madera y de 60 °C para la esfera de aluminio. Nuevamente la temperatura ambiente estuvo en 21° C.

**Tabla 4.5 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales,  
corrida 4**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0	22	0	19
10/60	35	1	20
20/60	43	2	22
30/60	49	3	23
40/60	52	4	25
50/60	56	5	27
1	58	6	28
1.1	59	7	30
1.2	59	7.5	31
1.3	60	8	33
1.5	60	9	33
		10	34
		11	36
		12	37
		14	39
0	22	16	40
10/60	39	18	42
20/60	49	20	43
30/60	54	21.5	44
40/60	56	23	45
50/60	58	25	45
1	59	27	46
1.1	59	30	46
1.2	60	32	47
1.3	60	34	47

**Tabla 4.6 Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales,  
corrida 5**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0	22	0	25
10/60	38	1	27
20/60	47	2	28
30/60	53	3	29
40/60	56	4	30
50/60	58	5	32
1	59	6	33
1.1	59	7	34
1.2	60	7.5	35
1.3	60	8	35
1.5		9	37
		10	38
		11	39
		12	39
		14	41
		16	42
		18	43
		20	44
		21.5	45
		23	45
		25	46
		27	46
		30	47
		32	47
		34	47

### 4.1.4 Cuestionario

1. Con base en los datos experimentales de temperatura obtenidos en cada esfera, realice un gráfico de temperatura contra tiempo.

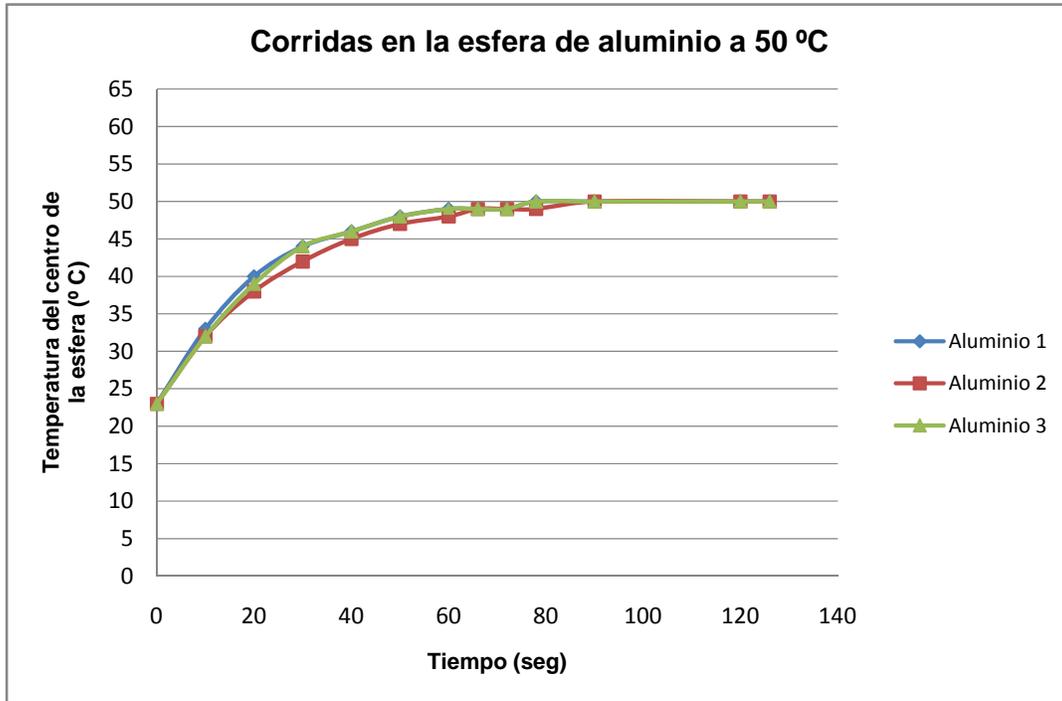


Figura 4.5 Corridas 1, 2 y 3 en la esfera de aluminio a 50 °C

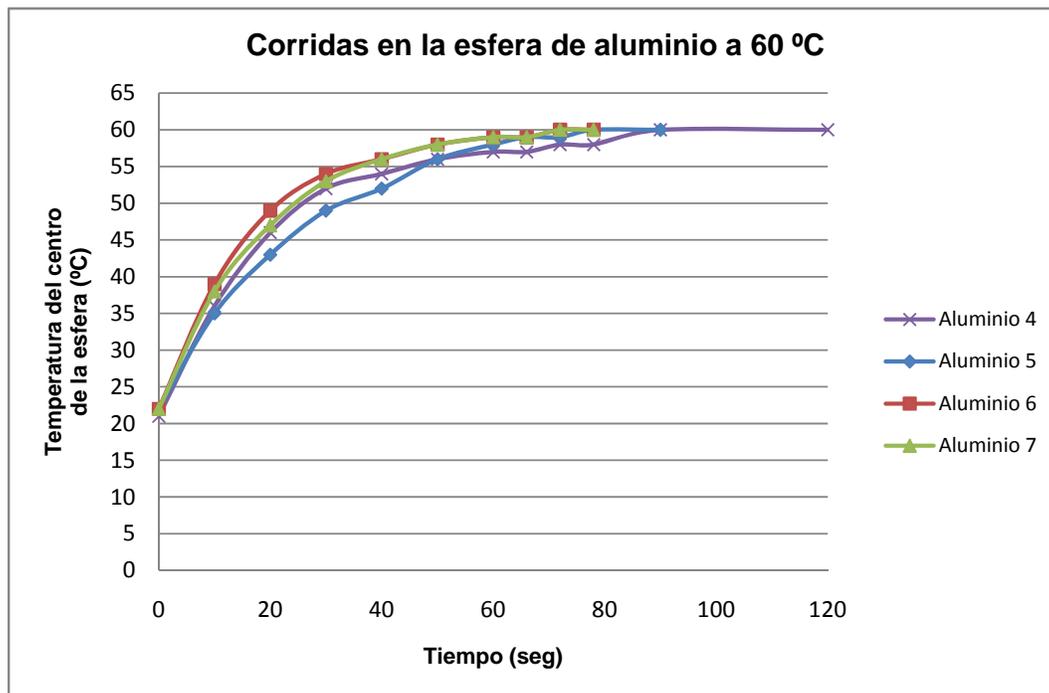


Figura 4.6 Corridas 4, 5, 6 y 7 en la esfera de aluminio a 60 °C

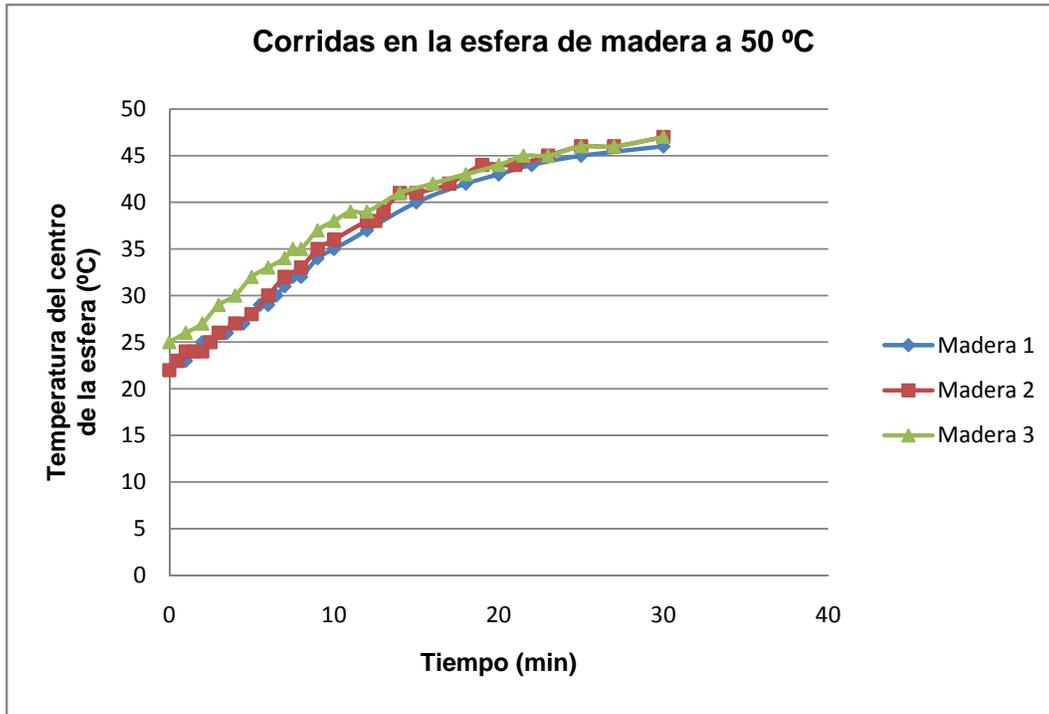


Figura 4.7 Corridas 1, 2 y 3 en la esfera de madera a 50 °C

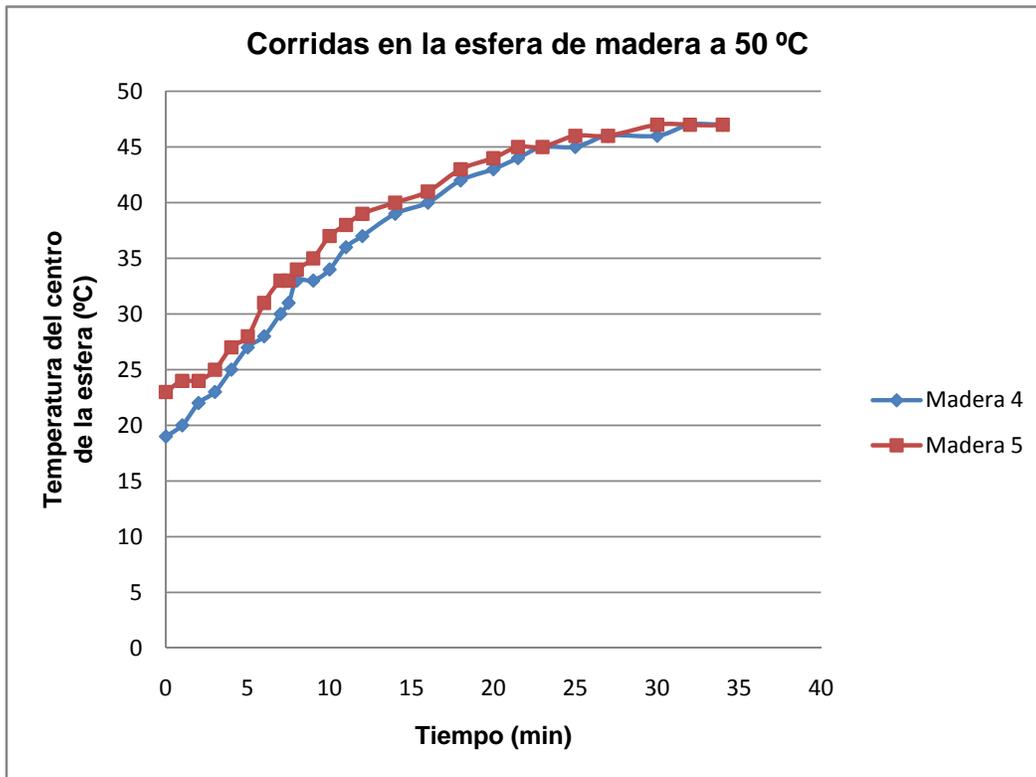


Figura 4.8 Corridas 4 y 5 en la esfera de madera a 50 °C

2. De las propiedades termofísicas de la esfera de aluminio y con su perfil de temperaturas resultado de la experimentación, calcule el coeficiente superficial de transferencia de calor  $h_m$ .

El cálculo del coeficiente de transferencia de calor se obtuvo, despejando  $h_m$  de la ecuación (2.20) de enfriamiento Newtoniano para las distintas temperaturas máximas del baño (50 y 60 °C) y tiempos en los cuales se llevó a cabo el experimento en la esfera de aluminio. Debido a esto, se obtuvieron resultados numéricos que difieren en magnitud para los intervalos de temperatura manejados. El desarrollo del cálculo se muestra en los siguientes párrafos.

Una forma similar de la ecuación de enfriamiento Newtoniano 2.20, pero para una esfera sólida a cualquier tiempo  $t$ , está dada por:

$$t = \frac{\rho V C_p}{h_m A_s} * \ln \frac{\theta_i}{\theta} = \frac{\rho r_0 C_p}{3 h_m} * \ln \frac{T_i - T_\infty}{T(t) - T_\infty} \quad \dots (4.1)$$

donde  $V/A_s = L_c$ . Para una esfera  $L_c = r_0/3$ ,  $r_0$  se refiere al radio de la esfera. De la ecuación anterior se observa que  $h_m$  se puede despejar y que al conocer las otras variables es posible, por lo tanto, calcular el valor de  $h_m$  a distintas temperaturas.

Por ejemplo, para la corrida 1, con un tiempo de 10 segundos de calentamiento, se obtuvo una temperatura en el centro de la esfera de aluminio de 33 °C. Conociendo los valores de las propiedades termofísicas de la esfera de aluminio, se puede calcular  $h_m$  para ese intervalo de tiempo.

Valores de las propiedades termofísicas del aluminio:  $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = 903 \text{ J/kg K}$ ,  $r_0 = (0.059/2) = 0.0295 \text{ m}$ ,  $T_i = 23 \text{ °C}$  y  $T_\infty = 50 \text{ °C}$ . Sustituyendo los valores en la ecuación 4.1,  $h_m$  queda como:

$$h_m = \frac{\left(\frac{2702 \text{ kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.0295 \text{ m} \cdot 903 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right)}{3 (10 \text{ s})} * \ln \frac{23 - 50}{33 - 50}$$

$$h_m = 1109.88 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Ésto se llevó a cabo para todos los valores de tiempo y temperatura, hasta el valor en donde la esfera de aluminio alcanzó el régimen permanente en el experimento. Los resultados se resumen en la tabla siguiente.

**Tabla 4.7 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 1**

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 1
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho \cdot r \cdot C_p)/(3 \cdot t)$	$\ln(T_i - T_{\infty}) / (T_o - T_{\infty})$
0	0	0,000
1109,95	2399,24	0,463
1191,53	1199,62	0,993
1202,88	799,75	1,504
1145,36	599,81	1,910
1248,90	479,85	2,603
1317,92	399,87	3,296
1198,11	363,52	3,296
1098,26	333,23	3,296
0	307,59	0
0	266,58	0
0	199,94	0
0	190,42	0

Obtenidos los valores de  $h_m$ , se procedió a calcular un promedio para la corrida "Aluminio 1". Para todas las demás corridas se procedió de igual manera. Sólomente se contabilizaron los valores numéricos y no las divisiones entre cero. El  $h_m$  promedio para la corrida "Aluminio 1" fue de 1189.11 W/m<sup>2</sup> K. Cabe mencionar que el experimento con una temperatura máxima de 50 °C en el baño se repitió tres veces y para el caso de 60 °C se repitieron cuatro veces. Ésto produjo una serie de resultados de  $h_m$  promedios para las distintas corridas "Aluminio" para cada uno de sus intervalos de temperatura, quedando de la siguiente manera:

Tabla 4.8 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 2

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 2
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho r_0 C_p)/(3^*t)$	$\ln(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$
0	0	0,000
972,81	2399,24	0,405
972,81	1199,62	0,811
972,81	799,75	1,216
1011,52	599,81	1,686
1054,33	479,85	2,197
1040,75	399,87	2,603
1198,11	363,52	3,296
1098,26	333,23	3,296
1013,78	307,59	3,296
0	266,58	0
0	199,94	0
0	190,42	0

Promedio 2	1037.24
------------	---------

Tabla 4.9 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 3

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 3
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho r_0 C_p)/(3^*t)$	$\ln(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$
0	0	0,000
972,81	2399,24	0,405
1077,19	1199,62	0,898
1202,88	799,75	1,504
1145,36	599,81	1,910
1248,90	479,85	2,603
1317,92	399,87	3,296
1198,11	363,52	3,296
1098,26	333,23	3,296
0	307,59	0
0	266,58	0
0	199,94	0
0	190,42	0

Promedio 3	1157.68
------------	---------

Tabla 4.10 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 4

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 4
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho r_0 C_p)/(3^*t)$	$\ln(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$
0	0	0,000
1164,85	2399,24	0,486
1229,02	1199,62	1,025
1266,90	799,75	1,584
1122,73	599,81	1,872
1092,74	479,85	2,277
1025,66	399,87	2,565
932,41	363,52	2,565
989,82	333,23	2,970
1126,89	307,59	3,664
0	266,58	0
0	199,94	0

Promedio 4	1105,67
------------	---------

Tabla 4.11 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 5

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 5
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho r_0 C_p)/(3^*t)$	$\ln(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$
0	0	0,000
1004,59	2399,24	0,419
964,94	1199,62	0,804
991,44	799,75	1,240
934,59	599,81	1,558
1080,28	479,85	2,251
1177,40	399,87	2,944
1322,34	363,52	3,638
1212,15	333,23	3,638
0	307,59	0
0	266,58	0

Promedio 5	1085,97
------------	---------

Tabla 4.12 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 6

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 6
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho r_0 C_p)/(3 \cdot t)$	$\ln(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$
0	0	0,000
1422,90	2399,24	0,593
1487,16	1199,62	1,240
1476,19	799,75	1,846
1350,35	599,81	2,251
1412,88	479,85	2,944
1454,57	399,87	3,638
1322,34	363,52	3,638
0	333,23	0
0	307,59	0

Promedio 6	1418.06
------------	---------

Tabla 4.13 Cálculo de  $h_m$  para la corrida Aluminio 7

Calentamiento Newtoniano		Aluminio 7
$h_m$ (W/m <sup>2</sup> K)	$(\rho r_0 C_p)/(3 \cdot t)$	$\ln(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$
0	0	0,000
1311,29	2399,24	0,547
1286,76	1199,62	1,073
1352,91	799,75	1,692
1350,35	599,81	2,251
1412,88	479,85	2,944
1454,57	399,87	3,638
1322,34	363,52	3,638
0	333,23	0
0	307,59	0

Promedio 7	1355.87
------------	---------

De las siete corridas para “Aluminio” llevadas a cabo las repeticiones 1, 2 y 3 corresponden a la temperatura máxima de 50 °C. De “Aluminio” 4 a 7, la temperatura máxima del baño fue de 60 °C. Los resultados de los promedios de  $h_m$  para todos los experimentos en los diferentes intervalos de temperatura se resumen en la siguiente tabla:

$h_m$ promedio a 50 °C	1128.01
$h_m$ promedio a 60 °C	1241.39

3. La esfera de aluminio posee la temperatura ambiente del experimento y es sumergida en el baño a una temperatura máxima. Después de 2 minutos de estar sumergida en el fluido, ¿cuál será la temperatura de la esfera si se utiliza el coeficiente superficial de transferencia de calor  $h_m$  calculado en la pregunta dos?

A continuación se muestra el cálculo de la temperatura en el centro de la esfera de aluminio, cuando transcurren cero y dos minutos de calentamiento. La esfera se sometió a las temperaturas máximas de 50 y 60 °C en el baño. Primero se procederá a calcular la temperatura con el valor de  $h_m$  a 50 °C para continuar con la de 60 °C.

Otra forma de la ecuación 2.20 que predice la temperatura del centro de la esfera de aluminio, en donde se presenta una resistencia interna despreciable y se encuentra bajo condiciones convectivas para un instante  $t$  cualquiera, es

$$T(t) = (T_i - T_\infty) \exp\left(-\frac{h_m A_s t}{m C_p}\right) + T_\infty \quad \dots (4.2)$$

Para nuestro primer caso,  $T_i = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $A_s = 4\pi(0.02985\text{m})^2 = 0.0109 \text{ m}^2$ ,  $m = 0.2825 \text{ kg}$ ,  $C_p = 903 \text{ J/kg K}$  y  $h_m = 1128.01 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Para un calentamiento de la esfera de cero y dos minutos en el baño a  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ , se tiene que

$$T(t) = (23 - 50 \text{ }^\circ\text{C}) \exp\left(-\frac{\frac{1128.01\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} 0.0109\text{m}^2 0 \text{ s}}{0.2825 \text{ kg } 903 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}}\right) + 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T(t) = 23 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T(t) = (23 - 50 \text{ }^\circ\text{C}) \exp\left(-\frac{\frac{1128.01\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} 0.0109\text{m}^2 120 \text{ s}}{0.2825 \text{ kg } 903 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}}\right) + 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T(t) = 49.916 \text{ }^\circ\text{C}$$

Para  $h_m$  promedio a  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ , se vuelven a repetir las propiedades termofísicas anteriores, sin embargo lo único que cambia es la temperatura inicial del centro de la esfera y la temperatura máxima que alcanza el baño, ésto es:  $T_i = 22 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = 60 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $h_m$  a  $60 \text{ }^\circ\text{C} = 1241.39 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Por lo tanto, la temperatura del centro de la esfera de aluminio a cero y dos minutos es:

$$T(t) = (22 - 60 \text{ }^\circ\text{C}) \exp\left(-\frac{\frac{1241.39\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} 0.0109\text{m}^2 0 \text{ s}}{0.2825 \text{ kg } 903 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}}\right) + 60 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T(t) = 22 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T(t) = (22 - 60 \text{ }^\circ\text{C}) \exp\left(-\frac{\frac{1241.39\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} 0.0109\text{m}^2 120 \text{ s}}{0.2825 \text{ kg } 903 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}}\right) + 60 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T(t) = 59.93 \text{ }^\circ\text{C}$$

De la misma forma como se realizaron los cálculos anteriores para conocer la temperatura de la esfera de aluminio a cero y dos minutos, se calculó y graficaron los perfiles de temperatura tanto teórico como experimental, a cualquier instante  $t$ , utilizando la ecuación 4.2. Los resultados se muestran a continuación.

Tabla 4.14 Cálculo de temperatura teórica vs temperatura experimental con  $h_m$  a 50 °C en la esfera de aluminio

$h_m = 1128.01$ a 50 °C	Cálculo teórico	Experimento
Tiempo (s)	T(t)	T(t)
0	23	23
10	33,35	33
20	39,74	40
40	46,10	44
50	47,59	46
60	48,52	48
66	48,89	49
72	49,17	49
78	49,38	49
90	49,65	50
120	49,92	50
126	49,94	50

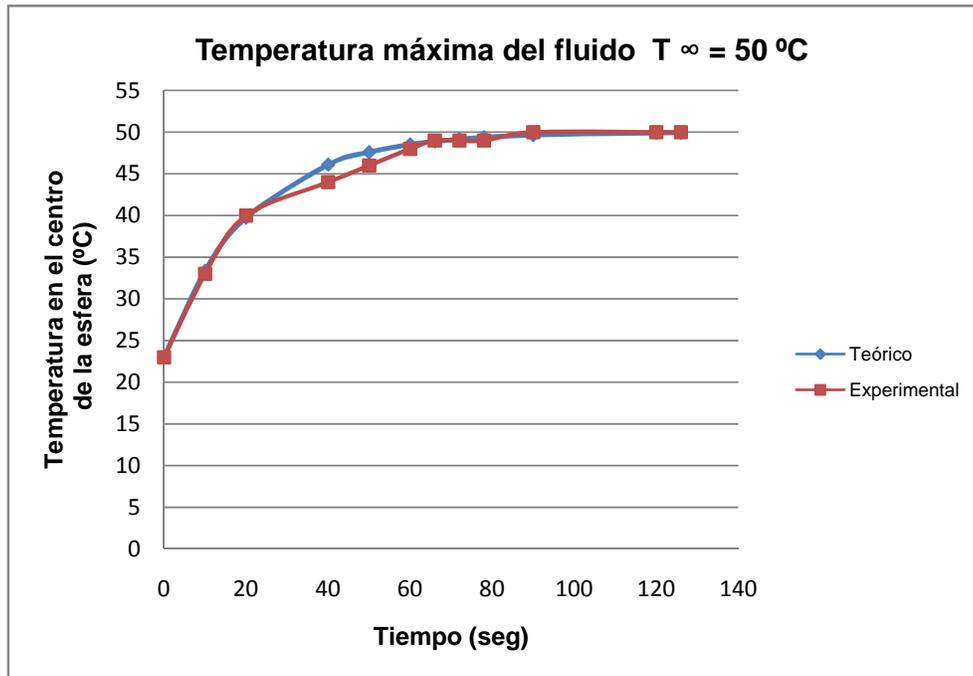


Figura 4.9 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la esfera de aluminio a 50 °C

Tabla 4.15 Cálculo de temperatura teórica vs temperatura experimental con  $h_m$  a 60 °C en la esfera de aluminio

$h_m = 1241.39$ a 60 °C	Cálculo teórico	Experimento
Tiempo (s)	T(t)	T(t)
0	22	22
10	37,68	35
20	46,89	43
30	52,30	49
40	55,48	52
50	57,34	56
60	58,44	58
66	58,87	59
72	59,18	59
78	59,40	60
90	59,68	60

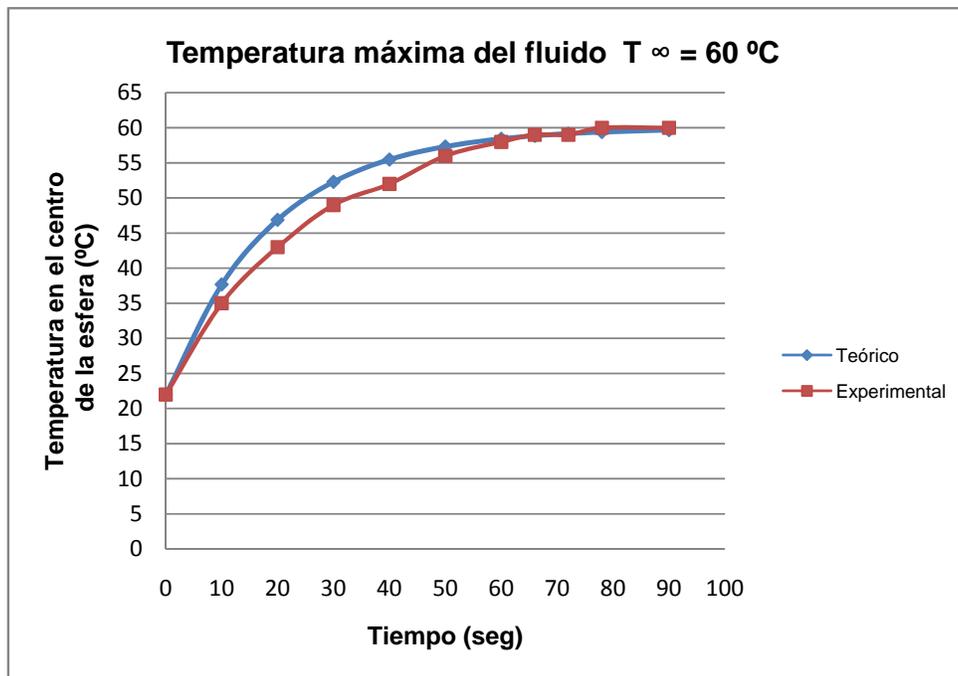


Figura 4.10 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la esfera de aluminio a 60 °C

Las corridas experimentales que se emplearon en las gráficas de temperatura máxima del fluido a 50 y 60 °C fueron las corridas “Aluminio 1 y 4”, respectivamente. Con base a la tendencia descrita en las gráficas, se puede decir que la esfera de aluminio alcanza el régimen permanente alrededor de los 80 segundos de haber sido calentada.

4. ¿Por qué no se puede calcular el coeficiente de transferencia de calor  $h_m$  en la esfera de madera con el modelo matemático utilizado en la esfera de aluminio?

De las gráficas de historia de temperaturas para cada esfera se puede observar que éstas muestran una tendencia muy distinta. El modelo que representa el calentamiento o enfriamiento de un sólido sumergido en un fluido a  $T_\infty$  máxima requiere que el sólido tenga una conductividad alta, o una resistencia interna despreciable, cosa que en el caso de la esfera de madera no se cumple físicamente. Por lo tanto, tampoco deberá cumplirse la predicción dada por el modelo teórico.

5. A partir del modelo de conducción a régimen no permanente con resistencia superficial despreciable, calcule el perfil teórico de temperaturas para el centro de la esfera de madera considerando el coeficiente de transferencia de calor por convección,  $h_m$ , obtenido del experimento con la esfera de aluminio.

A continuación se detalla el procedimiento por medio del cual se calcularon y obtuvieron los perfiles teóricos de temperatura para el centro de la esfera de madera.

Primero, utilizando los perfiles de temperatura obtenidos experimentalmente  $(T_{\infty} - T_{(t)})/(T_{\infty} - T_i) = Y$  para la esfera de madera y, con el dato de  $R^2 = 0.05^2$  m, se procede a despejar la difusividad térmica,  $\alpha$ , de la ecuación de conducción a régimen no permanente con resistencia interna despreciable.

Para la corrida madera 1, a un tiempo de 20 minutos, se obtuvo el perfil de temperaturas siguiente:  $T(20 \text{ min}) = 43$  °C,  $T_i = 22$  °C,  $T_{\infty} = 50$  °C, por lo que el cociente de temperaturas es:

$$\frac{T(20 \text{ min}) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{43 - 50}{22 - 50} = 0.25$$

Considerando la ecuación 2.22 de conducción a régimen no permanente con resistencia superficial despreciable, se despeja la difusividad térmica  $\alpha$

$$Y = \frac{T_{\infty} - T(t)}{T_{\infty} - T_i} = -2 \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^i \exp\left(-\frac{\alpha i^2 \pi^2 t}{R^2}\right) \dots (2.22)$$

Con  $i = 1$ , la difusividad térmica queda como:

$$\alpha = -\left(\frac{R^2}{\pi^2 t}\right) \ln\left(\frac{Y}{2}\right)$$

Sustituyendo los datos de la corrida "Madera 1" a un tiempo de 20 minutos, tenemos que la difusividad térmica vale:

$$\alpha = -\left(\frac{0.05m^2}{\pi^2 1200 s}\right) \ln\left(\frac{0.25}{2}\right)$$

$$\alpha = 4.39 \times 10^{-7} m^2/s$$

Ésto se repite para cada cociente de temperaturas ( $Y$ 's) mayor a 20 minutos debido a que la aproximación de un término de la ecuación para la esfera de madera a cualquier instante  $t$ , es válida sólo para valores de  $Fo > 0.2$ . Al tener los demás valores de difusividades térmicas calculados se procede a obtener el promedio, que en el caso de la corrida "Madera 1", fue de  $4.12 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Al tener una difusividad promedio para la corrida 1 se emplea éste para calcular el perfil teórico de temperaturas a cualquier instante  $t$ , así como los intervalos acotados por  $Fo > 0.2$ . Nuevamente, utilizando los datos anteriores de la corrida a 20 minutos y despejando  $T(t)$  con  $i = 5$  de la ecuación de conducción a régimen no permanente con resistencia superficial despreciable, obtenemos:

$$T(t) = T_{\infty} - (T_{\infty} - T_i) \left\{ \left[ 2(-1^1) \exp\left(-\frac{\alpha 1^2 \pi^2 t}{R^2}\right) \right] \dots + \dots \left[ 2(-1^5) \exp\left(-\frac{\alpha 5^2 \pi^2 t}{R^2}\right) \right] \right\}$$

$$T(t) = 50 - (50 - 22) \left\{ \left[ 2(-1^1) \exp\left(-\frac{4.12 \times 10^{-7} 1^2 \pi^2 1200 \text{ s}}{0.05^2}\right) \right] \dots \right.$$

$$\left. + \dots \left[ 2(-1^5) \exp\left(-\frac{4.12 \times 10^{-7} 5^2 \pi^2 1200 \text{ s}}{0.05^2}\right) \right] \right\}$$

$$T(20 \text{ min}) = 42.06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Ésto fue realizado para las cinco corridas experimentales llevadas a cabo con la esfera de madera. La tabla 4.16 muestra los resultados para la corrida 1. Los demás resultados de las corridas experimentales se encuentran en el anexo 3. La forma gráfica de los perfiles de temperatura, tanto teóricos como experimentales, para la esfera de madera quedó de la siguiente manera:

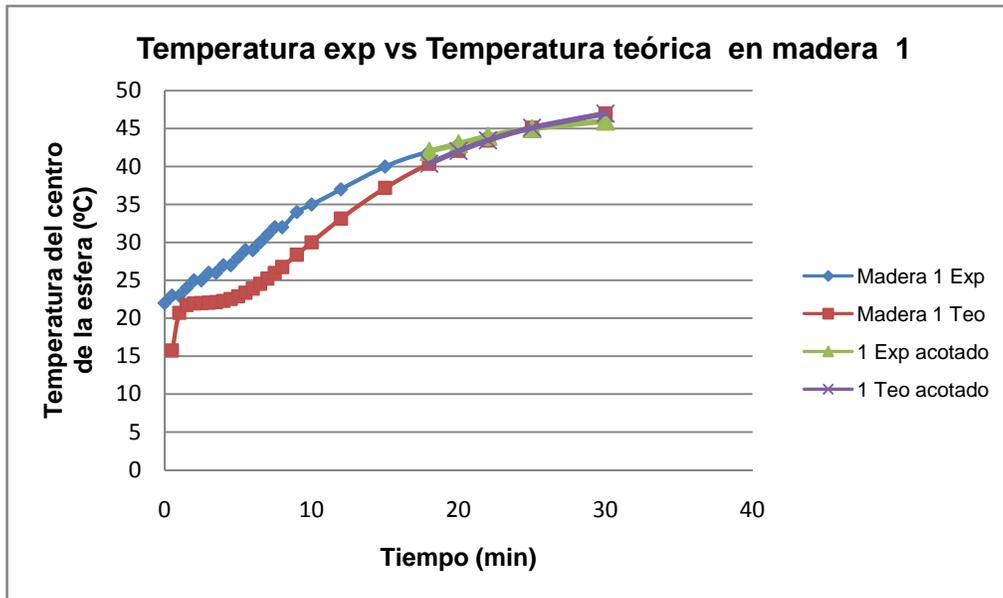


Figura 4.11 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 1

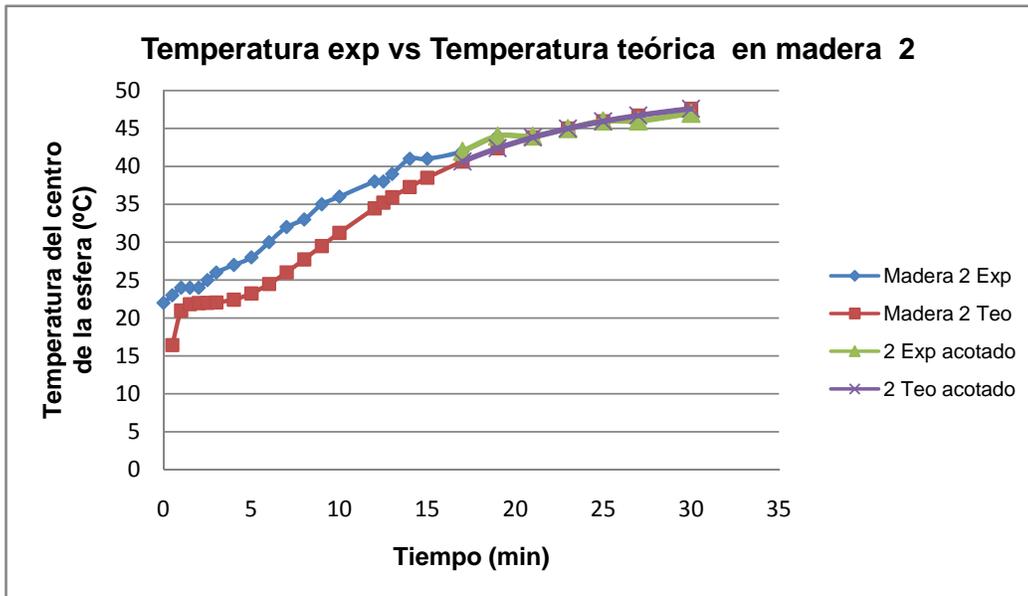


Figura 4.12 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 2

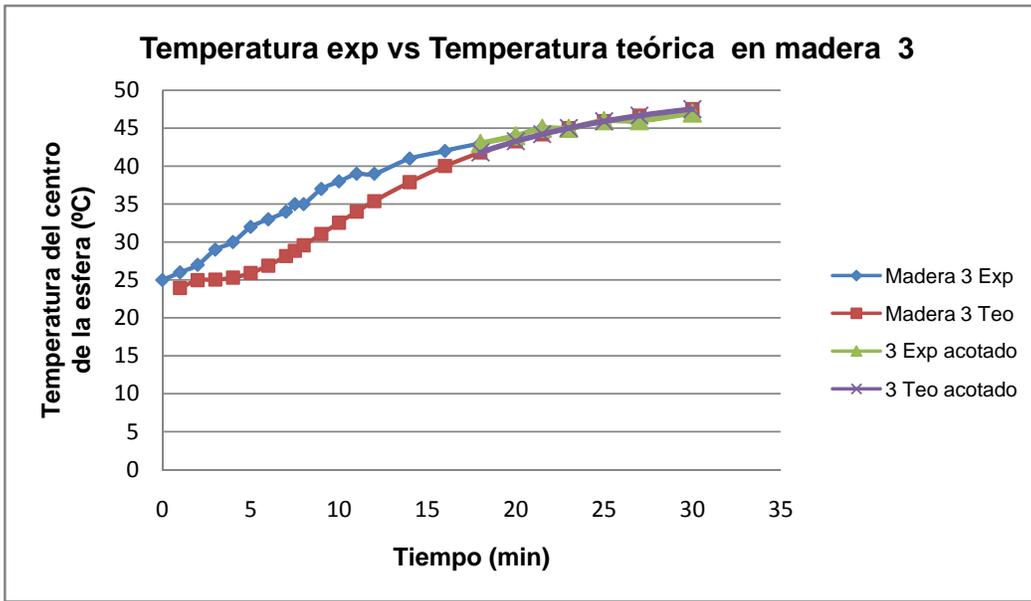


Figura 4.13 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 3

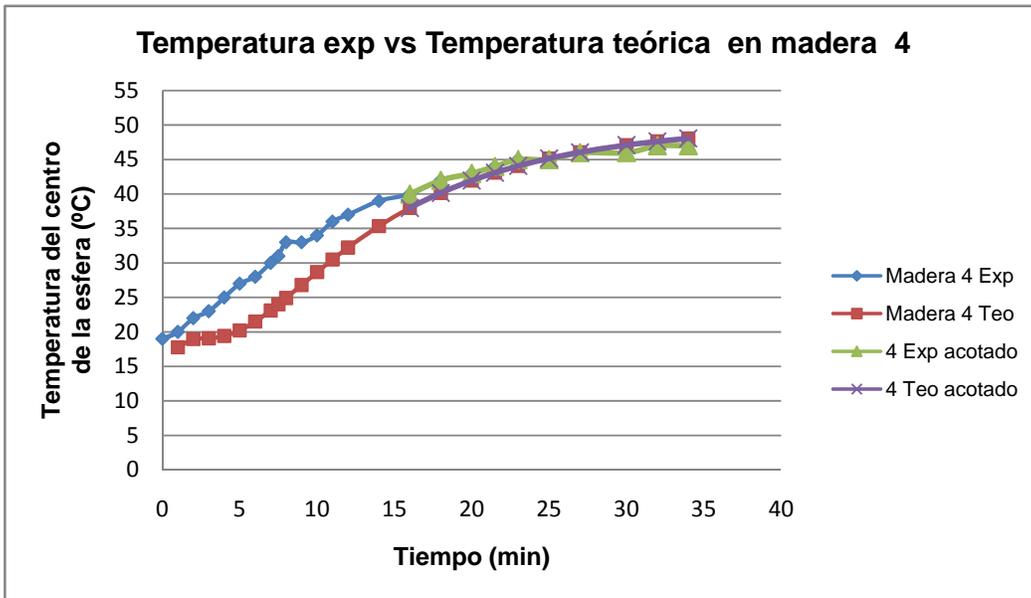


Figura 4.14 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 4

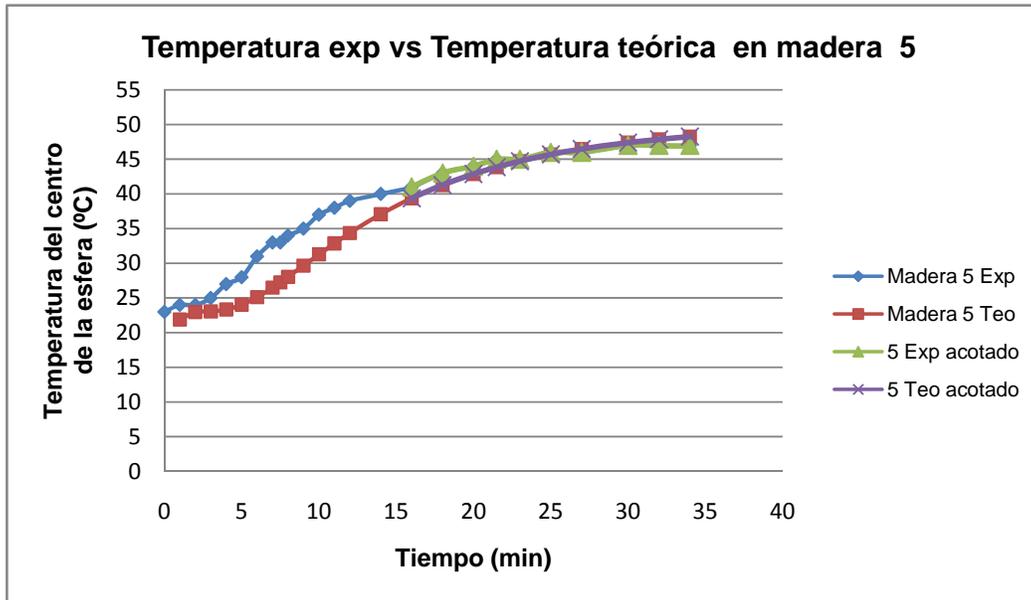


Figura 4.15 Temperatura teórica contra temperatura experimental en la corrida madera 5

Se puede observar de las figuras 4.11 a 4.15 que en la esfera de madera el régimen permanente se alcanza en un tiempo aproximado de 35 minutos.

**Tabla 4.16 Resultados corrida madera 1**

Madera 1		Ti = 22 °C	T∞ = 50 °C	Términos de la ecuación del centro de la esfera a T(t)					Suma de	S*(T∞ - Ti)	Temperatura	Error (%)
Tiempo (min)	Temperatura del centro (°C) Exp	(T(t) - T∞) / (Ti - T∞)	α analítico (m²/seg)	1 <sup>er</sup> término	2 <sup>o</sup> término	3 <sup>er</sup> término	4 <sup>to</sup> término	5 <sup>to</sup> término	términos (S)	S*(T∞ - Ti)	del centro (°C) Teórica	
0	22	1	0	2,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000	2,00	56,00	0,00	-
0,5	23	0,96	0	1,905	-1,646	1,290	-0,917	0,591	1,22	34,25	15,75	31,51
1	23	0,96	0	1,814	-1,354	0,831	-0,420	0,175	1,05	29,29	20,71	9,97
1,5	24	0,93	0	1,728	-1,114	0,536	-0,193	0,052	1,01	28,25	21,75	9,38
2	25	0,89	0	1,646	-0,917	0,346	-0,088	0,015	1,00	28,05	21,95	12,18
2,5	25	0,89	0	1,567	-0,754	0,223	-0,040	0,005	1,00	28,00	22,00	12,00
3	26	0,86	0	1,493	-0,621	0,144	-0,019	0,001	1,00	27,96	22,04	15,24
3,5	26	0,86	0	1,422	-0,511	0,093	-0,008	3,94E-04	1,00	27,88	22,12	14,91
4	27	0,82	0	1,354	-0,420	0,060	-0,004	1,16E-04	0,99	27,72	22,28	17,46
4,5	27	0,82	0	1,290	-0,346	0,039	-0,002	3,44E-05	0,98	27,46	22,54	16,51
5	28	0,79	0	1,228	-0,284	0,025	-0,001	1,02E-05	0,97	27,10	22,90	18,21
5,5	29	0,75	0	1,170	-0,234	0,016	-3,75E-04	3,00E-06	0,95	26,64	23,36	19,44
6	29	0,75	0	1,114	-0,193	0,010	-1,72E-04	8,87E-07	0,93	26,09	23,91	17,54
6,5	30	0,71	0	1,061	-0,158	0,007	-7,87E-05	2,62E-07	0,91	25,46	24,54	18,19
7	31	0,68	0	1,011	-0,130	0,004	-3,61E-05	7,74E-08	0,88	24,76	25,24	18,59
7,5	32	0,64	0	0,962	-0,107	0,003	-1,65E-05	2,29E-08	0,86	24,02	25,98	18,82
8	32	0,64	0	0,917	-0,088	0,002	-7,58E-06	6,76E-09	0,83	23,24	26,76	16,39
9	34	0,57	0	0,831	-0,060	0,001	-1,59E-06	5,90E-10	0,77	21,63	28,37	16,55
10	35	0,54	0	0,754	-0,040	3,08E-04	-3,34E-07	5,16E-11	0,71	19,99	30,01	14,27
12	37	0,46	0	0,621	-0,019	5,33E-05	-1,48E-08	3,93E-13	0,60	16,86	33,14	10,43
15	40	0,36	0	0,463	-0,006	3,83E-06	-1,37E-10	2,62E-16	0,46	12,81	37,19	7,02
18	42	0,29	0	0,346	-0,002	2,75E-07	-1,27E-12	1,74E-19	0,34	9,63	40,37	3,88
20	43	0,25	4,39E-07	0,284	-0,001	4,75E-08	-5,59E-14	1,33E-21	0,28	7,94	42,06	2,19
22	44	0,21	4,29E-07	0,234	-3,75E-04	8,22E-09	-2,47E-15	1,01E-23	0,23	6,54	43,46	1,23
25	45	0,18	4,08E-07	0,175	-1,16E-04	5,90E-10	-2,29E-17	6,75E-27	0,17	4,89	45,11	0,25
30	46	0,14	3,71E-07	0,107	-1,65E-05	7,33E-12	-9,35E-21	3,43E-32	0,11	3,00	47,00	2,17
		<b>Promedio α's</b>	<b>4,12E-07</b>									



## **Capítulo.V GUIÓN EXPERIMENTAL PROPUESTO PARA EL ALUMNO**

### **5.1 Transferencia de calor en esferas a régimen no permanente**

#### **Objetivo académico**

El alumno evidenciará el efecto en la conducción de calor a régimen transitorio usando, el coeficiente de película a distintas temperaturas,  $h_m$ , gráficas de conducción transitoria, y relaciones adimensionales, como Biot y Fourier, en geometrías esféricas de madera y aluminio que son sumergidas en un baño termostático.

#### **5.1.1 Problema**

Esferas de diámetros conocidos y diferentes materiales se encuentran inicialmente a temperatura ambiente. Cada una posee un termopar desmontable en su centro. Súbitamente, las esferas son sumergidas en un baño de agua que se encuentra a una temperatura máxima, produciéndose con ello un gradiente de temperatura en los materiales. Determine la historia de temperaturas para las diferentes esferas. Además, determine en qué tiempo alcanzará cada esfera el régimen permanente, con base en sus propiedades termofísicas.

#### **5.1.2 Parte experimental**

**Material requerido**

- Termopar tipo K
- Cronómetro
- Esferas de diferentes materiales
- Vaso de precipitados de 500 ml y de 50 ml

**Equipo**

- Baño termostático con control, Thermo Haake P5

**Técnica de operación del equipo**

1. Monte el equipo como se muestra en la figura (1). Empiece por llenar el baño de temperatura alimentando agua con la manguera de entrada (2) hasta la marca.
2. Conecte nuevamente la manguera de entrada al sistema de recirculación (3). Encienda el control del baño de temperatura constante, con el fin de hacer circular el líquido dentro el baño (4).
3. Fije la temperatura máxima del baño empleando las flechas que se encuentran en el panel de control (5). Deje que el baño alcance la temperatura deseada, que luego habrá de quedar constante.
4. Sumerja primero los soportes para cada esfera y ya alcanzado el equilibrio térmico entre éstos y el fluido, proceda a sumergir totalmente las esferas. Estás deben tener conectado el termopar en el centro (6) (asegúrese de ajustar bien el tapón en el orificio donde se coloca el termopar antes de sumergirlas).
5. Una vez alcanzado el régimen permanente en las esferas, empiece por detener la circulación del líquido del baño. Retire con precaución las esferas y sus soportes del baño, teniendo cuidado ya que el líquido se encuentra a una temperatura máxima.
6. Finalice vaciando el contenido del baño en la tarja, utilizando para esto el vaso de precipitados de 500 ml.

*Datos adicionales*

	Esferas	
	Aluminio	Madera
Diámetro (cm)	5.9	10
Cp (J/Kg K)	903	1380
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2702	510
K (W/m K)	237	0.12*

Todas las propiedades termofísicas están evaluadas a 300 K. \* Valor aproximado para la conductividad de la madera

**Actividades experimentales**

**Realice lo siguiente:**

1. Encienda y equilibre el termopar con la temperatura ambiente, anotando esta temperatura ( $T_{amb}$ ).
2. Mida las temperaturas del centro de las esferas con el termopar antes de colocarlas en la cámara de temperatura.
3. Coloque las muestras en la cámara. En ese instante empiece a contar el tiempo, así como la historia de las temperaturas para los centros de las muestras con ayuda del cronómetro y de los termopares. Reporte los resultados en la tabla.

**Tabla 5.1. Historia de temperaturas para esferas de diferentes materiales, corrida n**

Esferas			
Aluminio		Madera	
Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)	Tiempo (min)	Temperatura del centro (° C)
0		0	
10/60		0.5	
20/60		1	
30/60		1.5	
40/60		2	
50/60		2.5	

### 5.1.3 Cuestionario

1. Con base en los datos experimentales de temperatura obtenidos en cada esfera, realice un gráfico de temperatura contra tiempo.
2. De las propiedades termofísicas de la esfera de aluminio y con su perfil de temperaturas resultado de la experimentación, calcule el coeficiente superficial de transferencia de calor  $h_m$ .
3. La esfera de aluminio posee la temperatura ambiente del experimento y es sumergida en el baño a una temperatura máxima. Después de 2 minutos de estar sumergida en el fluido, ¿cuál será la temperatura de la esfera si se utiliza el coeficiente superficial de transferencia de calor  $h_m$  calculado en la pregunta dos?
4. ¿Por qué no se puede calcular el coeficiente de transferencia de calor  $h_m$  en la esfera de madera con el modelo matemático utilizado en la esfera de aluminio?
5. A partir del modelo de conducción a régimen no permanente con resistencia superficial despreciable, calcule el perfil teórico de temperaturas para el centro de la esfera de madera considerando el coeficiente de transferencia de calor por convección,  $h_m$ , obtenido del experimento con la esfera de aluminio.

Para el guión experimental propuesto, la bibliografía recomendada es: (Incropera, 1999), (Kreith, 2001), (Levenspiel, 1986), (Valiente, 1998) y (Yunus, 2004). Su referencia completa se encuentra en la sección de bibliografía.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se presenta el análisis de resultados obtenido del guión experimental propuesto, en donde se muestran los alcances dados por las respuestas a las preguntas del cuestionario.

Del resultado obtenido de la primera pregunta se mostraron las gráficas de las historias de temperaturas para las esferas de aluminio y madera, obtenidas de la experimentación. En éstas gráficas se pudo observar la diferencia, tanto en tiempos como en tendencias de los perfiles de temperatura para cada esfera. Ésto muestra que aún teniendo condiciones iniciales iguales en el baño termostático, el que una esfera u otra alcance el régimen permanente en un tiempo  $t$  dado, dependerá tanto del gradiente de temperatura inicial como de la capacidad del material para conducir el calor a través de éste.

En el cálculo del coeficiente de transferencia de calor,  $h_m$ , para la esfera de aluminio de la pregunta dos, se obtuvieron valores iguales a cero, los cuales no se tomaron en cuenta para el promedio. Ésto es resultado de que al alcanzarse el régimen permanente en la esfera de aluminio, el cociente de temperaturas  $(T_i - T_\infty)/(T(t) - T_\infty)$  es igual a uno y la ecuación de enfriamiento Newtoniano para una esfera sólida a cualquier tiempo  $t$  calcula un logaritmo natural a este cociente de temperaturas, dando cero como resultado.

Otro aspecto que llamó mas la atención fueron los valores de  $h_m$  a 50 y 60 °C calculados, en donde el primero fue de 1128.01 y 1241.39 W/m<sup>2</sup>K para el segundo. La diferencia de 10 % en magnitud puede considerarse no muy grande para este tipo de estimaciones, ya que no se pudo conocer la velocidad del flujo de agua en el baño termostático a las diferentes temperaturas. Debido a que se tenían dos orificios de salida de difícil acceso, no se pudo medirla.

Por lo tanto, no se constató experimentalmente que las pequeñas diferencias entre los valores de los coeficientes de transferencia de calor obtenidos a distintas temperaturas, se hayan debido a una disminución o incremento en la velocidad del flujo de agua.

De la pregunta tres, en el cálculo de la temperatura teórica a cero y dos minutos de calentamiento en la esfera de aluminio, se pudieron observar muy buenos resultados, los cuales son mostrados por las tablas 4.14 y 4.15, con  $h_m$  a 50 y 60 °C. También se observó que existe un error de redondeo, el cual se mantuvo, ya que el termopar utilizado no mostraba las temperaturas con cifras significativas, sino solo en unidades. Sin embargo, de los gráficos se puede ver que existe una buena concordancia entre los datos calculados por el modelo matemático que representa el calentamiento de la esfera de aluminio a un tiempo  $t$ , y los datos obtenidos experimentalmente.

La respuesta dada en la pregunta cuatro solamente explica los límites de la aplicación de un modelo matemático que predice la temperatura en una geometría con una alta conductividad térmica. En el caso de esferas de aluminio y madera es evidente cuál material conduce mejor el calor. Ello permite intuir que el modelo no es necesariamente aplicable a las dos esferas. Un caso interesante sería experimentar con esferas de materiales menos comunes, tales como: acrílico, latón, cerámica, etc.

En la solución a la pregunta cinco, se empleó la ecuación 2.22 para predecir la temperatura teórica en la esfera de madera, la cual solo aplica para valores grandes de coeficientes de transferencia de calor  $h_m$ , pudiéndose reducir la serie infinita a un término cuando se tienen valores de  $Fo > 0.2$ . Ésto hizo que se obtuvieran resultados solo válidos en los últimos tiempos del experimento, los cuales son mostrados en las gráficas como “acotados”. En caso de tener valores de  $Fo < 0.2$  la ecuación sigue aplicando, pero no se puede reducir a un sólo término. Por lo tanto, se empleó  $i = 5$  términos para estos tiempos de calentamiento.

De la tabla 4.16 se puede observar que a tiempo igual a cero, no se tiene temperatura teórica reportada. Ésto es consecuencia de que la ecuación aplica sólo para intervalos mayores a cero. La manera en cómo la temperatura teórica inicial a un tiempo mayor a cero se aproxima a la temperatura inicial del experimento, es utilizando un número mayor de términos  $i$  en la ecuación. A mayor número de términos, mayor precisión y mejor aproximación.

En todos los datos en donde no se cumplía con la condición de  $Fo > 0.2$  se presentaron errores altos, teniéndose un máximo de 31.51 % en el tiempo de 0.5 minutos para la corrida "Madera 1". Sin embargo, la magnitud del error tiende a disminuir a mayores tiempos. En los datos donde sí se cumplía la condición descrita arriba, los errores reportados fueron los mas pequeños. Tal es el caso de 25 minutos con un error de 0.25 %. Lo mismo se presentó en las demás corridas experimentales.

En el comienzo de los gráficos de los perfiles de temperatura, tanto teórico como experimental, para la esfera de madera se puede observar un desfase entre las tendencias de la temperatura teórica y experimental. Ésto puede ser resultado de que la esfera de madera fue cubierta con varias capas de barniz con el fin de no permitir que se mojara por el fluido, por lo que esta capa pudo desviar el proceso de calentamiento natural predicho por la teoría. Se puede decir que la correlación entre el modelo teórico y los resultados experimentales es buena para los intervalos acotados y representa de manera aproximada el calentamiento de una esfera cuya conductividad es baja en orden de magnitud. De tal manera que, a partir de esta información experimental contenida y respondida en las preguntas formuladas por el cuestionario, se cumple con uno de los principios básicos establecidos en la "Reforma de la Enseñanza Experimental", que es la adquisición del conocimiento por el estudiante en una actitud activa frente al fenómeno.

---

## CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en cada práctica, se puede concluir lo siguiente:

### **1. Balance de materia y energía a régimen transitorio**

En esta práctica se pudo constatar que con los resultados mostrados en la tabla 3.4, se observa una buena concordancia entre los datos obtenidos experimentalmente y los calculados por el modelo matemático. Además, en todos los gráficos realizados se muestra la misma tendencia del sistema la cual tiende a la disminución de la temperatura del líquido a través del tiempo.

La figura 3.7 muestra el comportamiento, tanto teórico como experimental, del enfriamiento del líquido en el tanque térmico. A pesar de las consideraciones hechas en el balance de energía macroscópico, se demuestra que el modelo matemático representa y calcula de manera satisfactoria el tiempo, así como la temperatura de enfriamiento en el sistema.

Un inconveniente que se presentó al realizar la práctica de balance de energía y materia a régimen no permanente fue el mandar a arreglar tanto el sensor tiempo - temperatura del tanque térmico, así como la resistencia del sistema de calentamiento, ya que estos en un principio no funcionaban. Ésto supuso un atraso en el comienzo de la práctica. Sin embargo, las fallas fueron reparadas y corregidas y, el sistema funcionó de manera correcta.

## **2. Convección forzada en una barra sólida**

Las incertidumbres asociadas con mediciones como velocidad del aire, la estimación de la pérdida de calor en los extremos del cilindro y con promediar la temperatura de la superficie del cilindro, que varía de forma axial y circunferencial, hicieron que el resultado experimental sea preciso a no más de 25 %. Un factor importante es el usar la temperatura apropiada cuando se evalúan las propiedades del fluido.

A pesar de lo anterior, con la realización de este experimento se pudo constatar el comportamiento de la disminución de temperatura de la barra de cobre al emplear un flujo externo perpendicular, debido al gradiente de temperatura generado entre la superficie de la barra y el fluido.

Con ello se ejemplificó, el mecanismo de convección, el cual fue dominante en la transferencia de calor para este experimento. También se usaron las diferentes correlaciones experimentales existentes que permiten calcular y comparar el valor de  $h_m$  para un cilindro sometido a un flujo transversal.

## **3. Conducción y convección en una barra sólida**

En la realización de la práctica se pudo comprobar que el perfil de temperaturas se comporta de manera decreciente, disminuyendo la temperatura a todo lo largo de la barra de aluminio. En caso de que se hubiera tenido una temperatura semejante a lo largo de la barra, se hubiera concluido que el mecanismo de conducción era mucho más dominante que la convección. Pero en cambio al observar lo contrario en los datos de la tabla 3.10, se concluye que la mayor disipación de calor a través de la barra en el medio se debió al mecanismo de convección.

De los gráficos obtenidos, se constató que el sistema alcanzó el régimen permanente aproximadamente a los 40 minutos de haber iniciado el experimento. Además se observó que los cambios de temperatura en la barra durante el transcurso de la experimentación fueron acercándose cada vez más al modelo del régimen permanente, hasta alcanzarlo y en algunos casos se rebasó. Con ésto se comprobó que las condiciones del estado no estacionario son precursores de las condiciones del estado estacionario del sistema.

El balance de energía nos permitió conocer la cantidad de calor que se disipa desde la base de la barra hacia el ambiente de una manera sistemática y precisa. El valor del factor de eficiencia de 25.3 % indica que la barra no tiene ni el tamaño adecuado, ni la forma apropiada para aprovechar al máximo la transferencia de calor por conducción y convección.

De la participación con los grupos de alumnos que realizaron las prácticas de transferencia de calor a régimen transitorio, se pudo constatar en su mayoría que no se percatan de la existencia del fenómeno aun con la experimentación. Las preguntas las ven como mayor carga de trabajo y no como una guía para conseguir el objetivo académico planeado. En otras palabras, no se encuentran adecuadamente preparados para enfrentar de manera activa la descripción y solución del problema planteado por el fenómeno fisicoquímico.

#### 4. Experimento propuesto “Transferencia de calor en esferas a régimen transitorio”

- El guión experimental producto de esta tesis representa una propuesta para el Laboratorio de Ingeniería Química I, de acuerdo con el Programa de la Enseñanza Experimental.
- El sistema presentado y estudiado en esta tesis, desde un punto de vista didáctico, permite analizar conceptos fundamentales de transferencia de calor, tales como, coeficientes de transferencia de calor,  $h_m$ , tablas de conducción transitoria, relaciones adimensionales, Biot, Fourier y modelos matemáticos que permiten calcular perfiles de temperatura teóricos.
- Desde un punto de vista de diseño de guiones experimentales, el sistema reúne características adecuadas para su implementación, tales como: dimensión, lo cual permite que un grupo de cinco alumnos participe en el manejo, control y toma de datos; fácil operatividad y, bajo o nulo mantenimiento a no ser el que usualmente se provee a un baño termostático, dado que las esferas no lo necesitan.

---

## RECOMENDACIONES

Las recomendaciones sugeridas para cada práctica experimental, así como para el guión experimental intitulado “Transferencia de calor en esferas a régimen no permanente” son:

### **1. Balance de materia y energía a régimen transitorio**

Un aspecto importante del sistema es que tiene la capacidad de manejarse con una variedad de configuraciones, tales como recirculación, sistemas con reacciones, calentamiento de fluidos, sistemas multicomponentes, etc. Por lo tanto, con un buen mantenimiento, tanto correctivo como preventivo, por parte del personal del Laboratorio de Ingeniería Química, se permitirá al sistema ser un excelente dispositivo con el cual se puedan generar más y mejores guiones experimentales donde se evidencie el efecto de los balances de materia y energía a régimen transitorio.

### **2. Convección forzada en una barra sólida**

En la realización de la práctica se demostró que el “Cambiador de calor de flujo cruzado” se encuentra en adecuadas condiciones de operación para realizar la práctica. A pesar de lo anterior, creo que es recomendable adquirir o mejorar los dispositivos que miden la historia de temperaturas (graficador), el anemómetro y el micro manómetro electrónico del tubo de pitot, ya que estos son muy antiguos y en cualquier momento podrían fallar. Para el caso del graficador, éste se puede sustituir por una computadora con impresora, la cual traería mejores resultados en las gráficas – precisión, escalas apropiadas, ecuaciones de tendencia, etc. - en menor tiempo.

En cambio, la mejora en los dos últimos instrumentos repercutiría en una mayor precisión en la medición de la velocidad del viento que se relaciona directamente con el valor del coeficiente de transferencia de calor y las correlaciones experimentales empleadas.

### **3. Conducción y convección en una barra sólida**

Considero que el sistema ya no es el más adecuado para transferir calor hacia una barra, debido a que se presentan pérdidas de temperatura en la base de la fuente de calor, la cual afecta los resultados. Pienso que la utilización de un equipo con resistencias eléctricas podría también calentar un fluido con el fin de transferir el calor a otro cuerpo. Aunque la temperatura alcanzada en este equipo no sea tan grande en magnitud, por lo menos, si se podría tener una cuantificación más precisa de la cantidad de calor generado por el calentamiento óhmico. Con esto, las posibles pérdidas en el sistema se podrían conocer mejor. En consecuencia, el sistema tendría mayor número de variables controladas, con lo cual la experimentación se vería mejorada en su repetibilidad.

### **4. Para una mejor implementación del guión experimental propuesto, será necesario hacer algunas actividades adicionales como:**

- Adquirir por lo menos dos esferas de diferentes materiales (acrílico y latón) y diámetros, con el fin de poder ampliar los perfiles de temperatura, los tiempos en los cuales se lleva a cabo la experimentación y aumentar con ello a diez el número de alumnos en el guión experimental.

- 
- Contar por lo menos con dos termopares tipo K, los cuales puedan leer un mayor número de cifras significativas, con lo cual se aumentaría la precisión en las temperaturas dadas por el calentamiento en los centros de las esferas.
  - Realizar las actividades experimentales (inmersión de las esferas en el baño termostático hasta alcanzar el régimen permanente) por triplicado, permitiéndose con ello una mayor generación de datos y una mejor representación del fenómeno físico.
  - Diseñar y construir los soportes adecuados para las esferas, tomando en cuenta la densidad de éstas mismas y el espacio reducido del baño termostático. Esto permitirá a los alumnos trabajar con una mayor seguridad en lo concerniente a la inmersión de las esferas en el baño termostático.
  - En caso de aumentar la temperatura del baño termostático a más de 60 °C proveer a los alumnos de guantes protectores o pinzas especiales para evitar posibles quemaduras en los alumnos.

---

## BIBLIOGRAFÍA

1. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N. Fenómenos de Transporte. 1a edición. Reverté. 1998. 15 – 15.4 y 15.19 – 15.26 pp.
2. Connell John P. O., Haile J. M. Thermodynamics – Fundamentals for Applications. Cambridge University Press. 2005. 10 – 27 pp.
3. Escalante Reyes O. (2007). Tesis de licenciatura en IQ “Guión experimental para un intercambiador de placas”. Facultad Química. UNAM.
4. Frank P. Incropera., David P. Dewitt. Fundamentos de Transferencia de Calor. 4ª edición. Prentice Hall. 1999. 2 – 17, 124 - 145 y 210 – 243 pp.
5. Furió Carlos., Furió Cristina. (2000). Dificultades conceptuales y epistemológicas en el aprendizaje de los procesos químicos. Educación Química. **11**, 300 – 308 pp.
6. González García F. R. (1991). Tesis de licenciatura en IQ “Diseño, construcción y experimentación de un aparato para el estudio de perfiles de temperaturas en barras”. U. La Salle.
7. Hernández Luna M., Llano Lomas M. (1994). Propuesta de reforma de la enseñanza experimental. Ciencia y Tecnología IMIQ. 5 – 7 pp.
8. Hewitt Paul G. Física Conceptual. 10ª edición. Pearson Addison Wesley. 2007. 290 – 294, 306 – 317 y 765 pp.
9. Himmelblau David M. Principios Básicos y Cálculos en Ingeniería Química. 6ª edición. Pearson Prentice Hall. 2002. 604 – 615 y 645 pp.
10. Howell John R., Buckius Richard. O. Principios de Termodinámica para Ingeniería. 1ª edición. Mc Graw-Hill. 1990. 579 – 591 pp.
11. Kreith Frank., Bohn Mark S. Principios de Transferencia de Calor. Sexta edición. Thomson Learning. 2001. 171 – 198 pp.
12. Levenspiel Octave. Engineering Flow and Heat Exchange. 1ª edición. Plenum Press. 1986. 199 – 205, 210 – 213 pp.
13. Margarita R., Gómez – Moline., Neus Sanmartí. (2000). Reflexiones sobre el lenguaje de la ciencia y el aprendizaje. Educación Química. **11**, 266 – 273 pp.

14. Martínez Mota B. S. (2000). Tesis de licenciatura en Ingeniería de Alimentos “Aplicación del método de los elementos finitos en la resolución de problemas de ingeniería durante el procesamiento de alimentos sometidos a radiación en hornos de microondas”. FES Cuautitlán. UNAM.
15. Moreno Pulido J. C. (1982). Tesis de licenciatura en IQ “Determinación de conductividad térmica a régimen no permanente”. U. La Salle.
16. Pitts D. R., Sissom L. E. Transferencia de Calor, teoría y 296 problemas resueltos. Serie Schaum. Mc Graw-Hill. 1979. 160 -174 pp.
17. Quintana P., Villalobos E., Cornejo M. C. Métodos Numéricos con Aplicaciones en Excel. 1ª edición. Reverté. 2005. 98 – 107 pp.
18. Rifkin Jeremy. La economía del hidrógeno. Paidós. 2002.
19. Valiente Barderas A. Problemas de Transferencia de Calor. 1ª edición. Limusa. 1998. 89 – 118 pp.
20. Yunus A. Cengel., Transferencia de Calor. 2a edición. Mc Graw-Hill. 2004. 114 - 110 pp.
21. Zill Denniss G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. 3a edición. Grupo Editorial Iberoamérica. 1997. 541 – 551 pp.

## ANEXOS

### Anexo 1 Coeficientes para la aproximación de un término en las soluciones de serie de la conducción transitoria unidimensional

Bi <sup>a</sup>	Pared plana		Cilindro infinito		Esfera	
	$\zeta_1$ (rad)	C <sub>1</sub>	$\zeta_1$ (rad)	C <sub>1</sub>	$\zeta_1$ (rad)	C <sub>1</sub>
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1732	1.0049	0.2439	1.0075	0.2989	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2217	1.0082	0.3142	1.0124	0.3852	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3708	1.0173	0.4550	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0160	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6608	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8448	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.0164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0185	1.1346	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3225	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1725	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1795	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7201
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8674
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8921
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781

30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
$\infty$	1.5707	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.000

$Bi = hL/K$  para la pared plana y  $hr_0/K$  para el cilindro infinito y la esfera

## Anexo 2 Funciones de Bessel de primera clase y de cero y primer orden

$\zeta$	$J_0(\zeta)$	$J_1(\zeta)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202
2.6	-0.0968	-0.4708
2.8	-0.1850	-0.4097
3.0	-0.2601	-0.3391
3.2	-0.3202	-0.2613

**Anexo 3.** Corridas experimentales en la esfera de madera

**Tabla 4.16** Resultados de las corridas 2, 3, 4 y 5

Madera 2		Ti = 22 °C	T∞ = 50 °C	Términos de la ecuación del centro de la esfera a T(t)							Temperatura del centro			
Tiempo (min)	Temperatura del centro (°C) Exp	(T(t) - T∞) / (Ti - T∞)	α analítico (m <sup>2</sup> /seg)	1 <sup>er</sup>	2 <sup>o</sup>	3 <sup>er</sup>	4 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>	Suma de términos (S)	S*(T∞ - Ti)	Temperatura del centro (°C) Teórica	Error (%)		
				término	término	término	término	término						
0	22	1	0	2,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000	2,000	56	-6	-		
0,5	23	0,96	0	1,898	-1,621	1,247	-0,864	0,538	1,198	33,55	16,45	28,50		
1	24	0,93	0	1,801	-1,314	0,778	-0,373	0,145	1,036	29,01	20,99	12,54		
1,5	24	0,93	0	1,709	-1,065	0,485	-0,161	0,039	1,006	28,17	21,83	9,04		
2	24	0,93	0	1,621	-0,864	0,302	-0,070	0,011	1,001	28,03	21,97	8,44		
2,5	25	0,89	0	1,538	-0,700	0,188	-0,030	0,003	1,000	27,99	22,01	11,95		
3	26	0,86	0	1,460	-0,568	0,118	-0,013	0,001	0,998	27,93	22,07	15,12		
4	27	0,82	0	1,314	-0,373	0,046	-0,002	5,52E-05	0,985	27,57	22,43	16,93		
5	28	0,79	0	1,183	-0,245	0,018	-4,51E-04	4,00E-06	0,956	26,76	23,24	16,98		
6	30	0,71	0	1,065	-0,161	0,007	-8,41E-05	2,90E-07	0,911	25,51	24,49	18,38		
7	32	0,64	0	0,959	-0,106	0,003	-1,57E-05	2,10E-08	0,856	23,97	26,03	18,66		
8	33	0,61	0	0,864	-0,070	0,001	-2,92E-06	1,53E-09	0,795	22,26	27,74	15,95		
9	35	0,54	0	0,778	-0,046	4,06E-04	-5,45E-07	1,11E-10	0,732	20,50	29,50	15,73		
10	36	0,50	0	0,700	-0,030	1,58E-04	-1,02E-07	8,02E-12	0,670	18,77	31,23	13,24		
12	38	0,43	0	0,568	-0,013	2,39E-05	-3,53E-09	4,21E-14	0,555	15,53	34,47	9,28		
12,5	38	0,43	0	0,538	-0,011	1,49E-05	-1,53E-09	1,13E-14	0,528	14,78	35,22	7,33		
13	39	0,39	0	0,511	-0,009	9,27E-06	-6,59E-10	3,05E-15	0,502	14,07	35,93	7,87		
14	41	0,32	0	0,460	-0,006	3,61E-06	-1,23E-10	2,21E-16	0,454	12,72	37,28	9,08		
15	41	0,32	0	0,414	-0,004	1,40E-06	-2,29E-11	1,61E-17	0,411	11,49	38,51	6,08		
17	42	0,29	0	0,336	-0,002	2,12E-07	-7,96E-13	8,44E-20	0,334	9,36	40,64	3,23		
19	44	0,21	4,96E-07	0,272	-0,001	3,20E-08	-2,77E-14	4,43E-22	0,271	7,60	42,40	3,64		
21	44	0,21	4,49E-07	0,221	-2,96E-04	4,84E-09	-9,63E-16	2,33E-24	0,220	6,17	43,83	0,39		
23	45	0,18	4,43E-07	0,179	-1,28E-04	7,32E-10	-3,35E-17	1,22E-26	0,179	5,00	45,00	0,01		
25	46	0,14	4,46E-07	0,145	-5,52E-05	1,11E-10	-1,16E-18	6,43E-29	0,145	4,06	45,94	0,13		
27	46	0,14	4,13E-07	0,118	-2,39E-05	1,67E-11	-4,05E-20	3,38E-31	0,118	3,29	46,71	1,54		
30	47	0,11	4,12E-07	0,086	-6,77E-06	9,82E-13	-2,62E-22	1,29E-34	0,086	2,40	47,60	1,27		
		<b>Promedio α's</b>	<b>4,43E-07</b>											

Madera 3		Ti = 25 °C	T∞ = 50 °C	Términos de la ecuación del centro de la esfera a T(t)							Temperatura del centro		Error (%)
Tiempo (min)	Temperatura del centro (°C) Exp	(T(t) - T∞) / (Ti - T∞)	α analítico (m²/seg)	1 <sup>er</sup> término	2 <sup>o</sup> término	3 <sup>er</sup> término	4 <sup>to</sup> término	5 <sup>to</sup> término	Suma de términos (S)	S*(T∞ - Ti)	del centro (°C) Teórica		
0	25	1	0	2,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000	2,000	50	0	-	
1	26	0,96	0	1,809	-1,339	0,811	-0,402	0,163	1,042	26,05	23,95	7,90	
2	27	0,92	0	1,637	-0,897	0,329	-0,081	0,013	1,001	25,03	24,97	7,53	
3	29	0,84	0	1,480	-0,600	0,133	-0,016	0,001	0,998	24,96	25,04	13,64	
4	30	0,8	0	1,339	-0,402	0,054	-0,003	8,84E-05	0,988	24,70	25,30	15,67	
5	32	0,72	0	1,211	-0,269	0,022	-0,001	7,21E-06	0,964	24,09	25,91	19,03	
6	33	0,68	0	1,096	-0,180	0,009	-1,32E-04	5,88E-07	0,924	23,11	26,89	18,51	
7	34	0,64	0	0,991	-0,121	0,004	-2,66E-05	4,80E-08	0,874	21,86	28,14	17,22	
7,5	35	0,6	0	0,943	-0,099	0,002	-1,19E-05	1,37E-08	0,846	21,16	28,84	17,60	
8	35	0,6	0	0,897	-0,081	0,001	-5,34E-06	3,91E-09	0,817	20,43	29,57	15,53	
9	37	0,52	0	0,811	-0,054	0,001	-1,07E-06	3,19E-10	0,758	18,94	31,06	16,06	
10	38	0,48	0	0,734	-0,036	2,41E-04	-2,16E-07	2,60E-11	0,698	17,45	32,55	14,33	
11	39	0,44	0	0,664	-0,024	9,78E-05	-4,34E-08	2,12E-12	0,640	15,99	34,01	12,80	
12	39	0,44	0	0,600	-0,016	3,97E-05	-8,72E-09	1,73E-13	0,584	14,61	35,39	9,25	
14	41	0,36	0	0,491	-0,007	6,52E-06	-3,53E-10	1,15E-15	0,484	12,10	37,90	7,57	
16	42	0,32	0	0,402	-0,003	1,07E-06	-1,43E-11	7,65E-18	0,399	9,97	40,03	4,69	
18	43	0,28	0	0,329	-0,001	1,77E-07	-5,76E-13	5,09E-20	0,328	8,19	41,81	2,77	
20	44	0,24	4,48E-07	0,269	-0,001	2,91E-08	-2,33E-14	3,38E-22	0,269	6,71	43,29	1,62	
21,5	45	0,2	4,52E-07	0,232	-3,60E-04	7,50E-09	-2,10E-15	7,88E-24	0,231	5,78	44,22	1,74	
23	45	0,2	4,23E-07	0,199	-1,97E-04	1,94E-09	-1,89E-16	1,83E-25	0,199	4,98	45,02	0,05	
25	46	0,16	4,27E-07	0,163	-8,84E-05	3,19E-10	-7,65E-18	1,22E-27	0,163	4,08	45,92	0,16	
27	46	0,16	3,95E-07	0,133	-3,97E-05	5,25E-11	-3,09E-19	8,11E-30	0,133	3,34	46,66	1,44	
30	47	0,12	3,96E-07	0,099	-1,19E-05	3,50E-12	-2,51E-21	4,40E-33	0,099	2,47	47,53	1,13	
		<b>Promedio α's</b>	<b>4,23E-07</b>										

Madera 4		Ti = 19 °C	T∞ = 50 °C	Términos de la ecuación del centro de la esfera a T(t)					Suma de	S*(T∞ - Ti)	Temperatura	Error (%)
Tiempo (min)	Temperatura del centro (°C) Exp	(T(t) - T∞) / (Ti - T∞)	α analítico (m²/seg)	1 <sup>er</sup> término	2 <sup>o</sup> término	3 <sup>er</sup> término	4 <sup>to</sup> término	5 <sup>to</sup> término	términos (S)	S*(T∞ - Ti)	del centro (°C) Teórica	
0	19	1	0	2,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000	2,00	62,00	-12,00	-
1	20	0,97	0	1,806	-1,330	0,798	-0,391	0,156	1,04	32,23	17,77	11,17
2	22	0,90	0	1,631	-0,884	0,319	-0,076	0,012	1,00	31,04	18,96	13,80
3	23	0,87	0	1,473	-0,588	0,127	-0,015	0,001	1,00	30,94	19,06	17,12
4	25	0,81	0	1,330	-0,391	0,051	-0,003	7,42E-05	0,99	30,59	19,41	22,37
5	27	0,74	0	1,201	-0,260	0,020	-0,001	5,79E-06	0,96	29,78	20,22	25,11
6	28	0,71	0	1,084	-0,173	0,008	-1,12E-04	4,52E-07	0,92	28,51	21,49	23,23
7	30	0,65	0	0,979	-0,115	0,003	-2,18E-05	3,52E-08	0,87	26,89	23,11	22,97
7,5	31	0,61	0	0,931	-0,094	0,002	-9,64E-06	9,85E-09	0,84	26,00	24,00	22,59
8	33	0,55	0	0,884	-0,076	0,001	-4,26E-06	2,75E-09	0,81	25,08	24,92	24,49
9	33	0,55	0	0,798	-0,051	0,001	-8,33E-07	2,15E-10	0,75	23,19	26,81	18,77
10	34	0,52	0	0,721	-0,034	2,06E-04	-1,63E-07	1,68E-11	0,69	21,31	28,69	15,62
11	36	0,45	0	0,651	-0,022	8,21E-05	-3,18E-08	1,31E-12	0,63	19,49	30,51	15,25
12	37	0,42	0	0,588	-0,015	3,28E-05	-6,22E-09	1,02E-13	0,57	17,76	32,24	12,88
14	39	0,35	0	0,479	-0,007	5,23E-06	-2,38E-10	6,21E-16	0,47	14,66	35,34	9,38
16	40	0,32	0	0,391	-0,003	8,33E-07	-9,08E-12	3,78E-18	0,39	12,03	37,97	5,07
18	42	0,26	4,80E-07	0,319	-0,001	1,33E-07	-3,47E-13	2,30E-20	0,32	9,84	40,16	4,39
20	43	0,23	4,60E-07	0,260	-0,001	2,12E-08	-1,33E-14	1,40E-22	0,26	8,04	41,96	2,42
21,5	44	0,19	4,59E-07	0,223	-3,09E-04	5,34E-09	-1,15E-15	3,06E-24	0,22	6,91	43,09	2,06
23	45	0,16	4,62E-07	0,191	-1,68E-04	1,35E-09	-9,90E-17	6,67E-26	0,19	5,93	44,07	2,06
25	45	0,16	4,25E-07	0,156	-7,42E-05	2,15E-10	-3,78E-18	4,06E-28	0,16	4,84	45,16	0,36
27	46	0,13	4,29E-07	0,127	-3,28E-05	3,42E-11	-1,45E-19	2,47E-30	0,13	3,94	46,06	0,12
30	46	0,13	3,86E-07	0,094	-9,64E-06	2,18E-12	-1,08E-21	1,17E-33	0,09	2,90	47,10	2,38
32	47	0,10	4,00E-07	0,076	-4,26E-06	3,47E-13	-4,12E-23	7,16E-36	0,08	2,37	47,63	1,34
34	47	0,10	3,76E-07	0,062	-1,88E-06	5,53E-14	-1,58E-24	4,36E-38	0,06	1,93	48,07	2,27
			<b>Promedio α's</b>	<b>4,31E-07</b>								

Madera 5		Ti = 23 °C	T∞ = 50 °C	Términos de la ecuación del centro de la esfera a T(t)							Suma de	S*(T∞ - Ti)	Temperatura	Error (%)
Tiempo (min)	Temperatura del centro (°C) Exp	(T(t) - T∞) / (Ti - T∞)	α analítico (m²/seg)	1 <sup>er</sup> término	2 <sup>o</sup> término	3 <sup>er</sup> término	4 <sup>to</sup> término	5 <sup>to</sup> término	términos (S)		del centro (°C) Teórica			
0	23	1	0	2,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000	2,000	54	-4	-		
1	24	0,96	0	1,808	-1,335	0,805	-0,397	0,160	1,041	28,11	21,89	8,79		
2	24	0,96	0	1,634	-0,891	0,324	-0,079	0,013	1,001	27,03	22,97	4,31		
3	25	0,93	0	1,477	-0,595	0,131	-0,016	0,001	0,998	26,95	23,05	7,80		
4	27	0,85	0	1,335	-0,397	0,053	-0,003	8,15E-05	0,988	26,66	23,34	13,57		
5	28	0,81	0	1,207	-0,265	0,021	-0,001	6,52E-06	0,962	25,98	24,02	14,21		
6	31	0,70	0	1,091	-0,177	0,009	-1,22E-04	5,21E-07	0,922	24,90	25,10	19,03		
7	33	0,63	0	0,986	-0,118	0,003	-2,42E-05	4,16E-08	0,871	23,52	26,48	19,76		
7,5	33	0,63	0	0,937	-0,096	0,002	-1,08E-05	1,18E-08	0,843	22,76	27,24	17,45		
8	34	0,59	0	0,891	-0,079	0,001	-4,81E-06	3,32E-09	0,814	21,97	28,03	17,55		
9	35	0,56	0	0,805	-0,053	0,001	-9,55E-07	2,66E-10	0,753	20,34	29,66	15,25		
10	37	0,48	0	0,728	-0,035	2,24E-04	-1,89E-07	2,12E-11	0,693	18,71	31,29	15,44		
11	38	0,44	0	0,658	-0,023	9,02E-05	-3,76E-08	1,70E-12	0,635	17,13	32,87	13,51		
12	39	0,41	0	0,595	-0,016	3,63E-05	-7,46E-09	1,36E-13	0,579	15,63	34,37	11,88		
14	40	0,37	0	0,486	-0,007	5,89E-06	-2,94E-10	8,65E-16	0,479	12,93	37,07	7,32		
16	41	0,33	0	0,397	-0,003	9,55E-07	-1,16E-11	5,52E-18	0,394	10,63	39,37	3,98		
18	43	0,26	4,79E-07	0,324	-0,001	1,55E-07	-4,56E-13	3,53E-20	0,323	8,72	41,28	3,99		
20	44	0,22	4,64E-07	0,265	-0,001	2,51E-08	-1,79E-14	2,25E-22	0,264	7,14	42,86	2,58		
21,5	45	0,19	4,67E-07	0,228	-3,36E-04	6,41E-09	-1,59E-15	5,09E-24	0,227	6,14	43,86	2,53		
23	45	0,19	4,37E-07	0,196	-1,83E-04	1,64E-09	-1,40E-16	1,15E-25	0,195	5,28	44,72	0,61		
25	46	0,15	4,40E-07	0,160	-8,15E-05	2,66E-10	-5,52E-18	7,34E-28	0,160	4,31	45,69	0,68		
27	46	0,15	4,07E-07	0,131	-3,63E-05	4,31E-11	-2,18E-19	4,68E-30	0,131	3,52	46,48	1,03		
30	47	0,11	4,07E-07	0,096	-1,08E-05	2,81E-12	-1,70E-21	2,39E-33	0,096	2,60	47,40	0,85		
32	47	0,11	3,81E-07	0,079	-4,81E-06	4,56E-13	-6,70E-23	1,53E-35	0,079	2,13	47,87	1,86		
34	47	0,11	3,59E-07	0,064	-2,14E-06	7,39E-14	-2,64E-24	9,74E-38	0,064	1,74	48,26	2,69		
			<b>Promedio α's</b>	<b>4,27E-07</b>										