

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado en Ciencias Físicas

**Generación dinámica de masa en presencia de campos
magnéticos: Intensidad de campo y constante de
acoplamiento arbitrarios**

Estudiante: Eduardo Rojas Peña

Tutor Principal: Dr. Alejandro Ayala

Tesis que para obtener el Grado de Doctor presenta Eduardo
Rojas Peña .

Eduardo Rojas Peña

Dr. Alejandro Ayala

Comité Tutorial: Dr. Alejandro Ayala, Dr. Matías Moreno y Dr. Sarira Sahú .

México D.F., octubre del 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La tesis de Eduardo Rojas Peña es aprobada:

Director de tesis Fecha

Fecha

Fecha

Fecha

Fecha

Universidad Nacional Autónoma de México

2008

Agradecimientos

En primer lugar doy gracias a Dios por todo lo que hasta ahora me ha dado. También agradezco: a mi mamá, Flor de María Peña Hernández, ya que sin su amor y su lucha para que saliéramos adelante, nada de esto hubiera sido posible. A mi esposa Sara Rut, quien se ha convertido en mi soporte y en una ayuda idónea en todos los aspectos de mi vida. A mi pequeño Martín, por darme tanta felicidad y por fallar en el intento de destruir todo documento, artículo o papel relacionado con mi tesis. A mi hermana Claudia, por toda una vida caminando juntos en las duras y en las maduras, Gracias por ser leal, amiga y a veces también por cumplir su papel de hermana mayor. A mi cuñado Ivan y a mis sobrinas Elisabeth y Lina, por su amor y su apoyo en muchas etapas de este largo camino. A mis tíos Berta y Rito y a toda la familia Güiza-Peña, porque desde siempre, en las buenas o en las malas hemos podido compartir un plato de caldo de papa. A mi hermano William y mi tía Barbara por la confianza y el apoyo que me han brindado. A William y Nubia, nuestros Grandes amigos, quienes a pesar de la distancia, no han dejado de escribir en estos cuatro años. A la familia Castiblanco-Monguí, que espero me hayan perdonado por haberme robado a su hija, pongo esta nota en mi tesis para ver si se les ablanda el corazón. A Luis C, y a las comunidades fe en acción y La Roca por dejarnos ser parte de su familia. A Don José Luis y la Señora Clarita, quienes, para mi, han sido como unos padres aquí en México. A Luis Vicente Agudelo, por darme su ayuda en momentos difíciles, y aunque ya no está con nosotros, el recuerdo de su altruismo y buena voluntad es algo que nunca olvidaré.

De otra parte también quiero agradecer a México, a la amabilidad de su gente, que hacen de este país un lugar muy especial. A mi director de tesis Dr. Alejandro Ayala, por su guía, y por haberme permitido trabajar con él en sus proyectos. A los doctores Adnan Bashir y Alfredo Raya, por compartir su conocimiento con liberalidad. Al igual quiero agradecer a los Doctores miembros del jurado, Dr. Alejandro Ayala, Dr. Gabriel López, Dr. Alfredo Raya, Dr. Genaro Toledo, Dr. Alberto Güijosa, Dr. Fernando Matías Moreno y Dr. Eleazar Cuautle, por el tiempo invertido en revisar este trabajo y por haber hecho de manera oportuna las observaciones y correcciones de esta tesis. Quiero dar un agradecimiento muy especial a la Dra. Stella Huérfano, ya que sin su ayuda no hubiera sido posible hacer mi doctorado aquí en la Unam. Al cartel de colombianos en el ICN, Alex, carolina, William, Luisa, Milton, Mauricio, Nissim, Jorge, junto a los profesores Daniel y Hernando, con quienes pasamos buenos momentos y ajiacos. A todos mis amigos Mexicanos aquí en los cubículos, Nacho, Nettel, Adolfo, Mariano, Ángel,...,etc, por hacer un buen ambiente de trabajo. A pancho con quien tratamos resolver los problemas del planeta, la desigualdad social y de la física fundamental cada vez que íbamos por tacos. A la parte administrativa y de biblioteca del ICN. Al personal de limpieza y de seguridad cuya cordialidad fue siempre un motivo de ánimo al llegar al instituto. Al posgrado de ciencias físicas, a Yanalte y Rosa Isela por su ayuda y paciencia en tantos trámites. Al área de computo, en particular al ingeniero Luciano quien gustosamente me ayudo en muchos problemas. De seguro hay mucha gente de la cual estoy en deuda y que por razones de memoria no están mencionados aquí, no es falta de voluntad, a ellos también gracias.

Finalmente a la Universidad Nacional Autónoma de México, ya que gracias a su programa de becas DGEP me dio la oportunidad que no tuve en mi país, y por esto siempre me sentiré orgulloso al decir, yo también soy de la UNAM.

Índice general

	I
Agradecimientos	III
Prefacio	IX
Resumen	XI
Abstract	XIII
1. Introducción	1
1.1. Generación dinámica de masa	1
1.2. Campos magnéticos en el universo	1
1.3. Generación dinámica de masa en el vacío	2
2. Métodos no perturbativos	11
2.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	11
2.2. QED	13
2.2.1. ESD para el propagador del fotón	13
2.2.2. ESD para el propagador del electrón	16
2.3. Ecuación de Bethe-Salpeter	18
3. Simetría Quiral	23
3.1. Caso Abeliano	23
3.2. Caso no Abeliano	25
4. Modelo de Nambu-Jona-Lasinio	27
4.1. NJL como un modelo a bajas energías de QCD	27
4.2. Ecuación para la función de masa	29
4.3. Potencial efectivo para NJL	30
5. Generación dinámica de masa en presencia de campos magnéticos de intensidad arbitraria	35
5.1. ESD en espacio de momentos	37
5.2. Suma sobre niveles de Landau	39
5.3. Integrales angulares	41
5.4. Campo fuerte	42
5.5. Resultados numéricos	43
6. Conclusiones	47

A. Funciones propias del operador de masa	49
B. Normalización de las funciones propias del operador de masa	53
C. Propagador del fermión en espacio de momentos	55
D. Ecuación de Schwinger-Dyson en espacio de momentos	57
E. Suma sobre los niveles de Landau	65
F. Integrales angulares	71
F.1. Ecuación integral en norma arbitraria	73

Índice de figuras

1.1.	<i>Auto-energía del electrón en presencia de un campo magnético.</i>	2
1.2.	<i>Expansión perturbativa del propagador del fermión.</i>	3
1.3.	<i>Auto energía del electrón.</i>	3
1.4.	<i>Expansión perturbativa del propagador del fermión en términos de la auto-energía.</i>	4
1.5.	<i>ESD para el inverso del propagador del fermión.</i>	4
1.6.	<i>ESD para el inverso del propagador del fotón.</i>	5
1.7.	<i>ESD para el vértice fermión-fotón.</i>	5
1.8.	<i>ESD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris.</i>	6
1.9.	<i>Propagador del fermión en la aproximación arcoiris.</i>	7
2.1.	<i>Expansión perturbativa de la función de Green de cuatro puntos.</i>	18
2.2.	<i>Kernel irreducible.</i>	19
2.3.	<i>ESD para la función de Green de cuatro puntos.</i>	19
2.4.	<i>Ecuación de Bethe-Salpeter para la interacción fermión-fermión.</i>	22
5.1.	<i>Intensidad relativa del campo magnético \sqrt{eB}/m_0, donde m_0 es la masa dinámica en el vacío, como una función de la constante de acoplamiento α y del parámetro $2eB/\Lambda^2$. La intensidad relativa sólo se puede estudiar para $\alpha > \alpha_c = \pi/4$ donde $m_0 \neq 0$. Hacia el amarillo y el azul, estamos en el régimen de campo magnético fuerte y hacia el rojo, débil.</i>	44
5.2.	<i>Masa generada dinámicamente vs la intensidad del campo $\frac{2eB}{\Lambda^2}$ para $\alpha = 0.1$. Puntos azules corresponden a la solución con todos niveles de Landau, $M(0) = 0.001766x^{0.5}$. Puntos rojos corresponden a tener en cuenta sólo el primer nivel de Landau, $M(0) = 0.0017646x^{0.5}$. Vemos que para este régimen de parámetros $M(0) \sim \sqrt{eB}$</i>	45
5.3.	<i>Masa generada dinámicamente vs la constante de acoplamiento α. Cada par de curvas corresponde a la solución incluyendo todos los niveles de Landau e incluyendo sólo el primer de Landau respectivamente, para intensidades de campo $\frac{2eB}{\Lambda^2} = 1.0, 10^{-1}, 10^{-9}$. Es importante notar que para acoplamientos débiles es suficiente con el primer nivel de Landau, sin embargo, para acoplamientos fuertes la solución con todos los niveles difiere por varios órdenes respecto la solución con un solo nivel.</i>	45
5.4.	<i>Masa generada dinámicamente vs la intensidad del campo $\frac{2eB}{\Lambda^2}$ para $\alpha = 2$. Puntos azules y rojos corresponden a la solución incluyendo todos los niveles de Landau e incluyendo sólo el primer de Landau respectivamente</i>	46

Prefacio

Uno de los propósitos de la física es comprender las fuerzas de la naturaleza de la forma más general y simple posible. Sin embargo, hay aspectos difíciles de capturar usando solamente ecuaciones. Un ejemplo de esta clase de fenómenos es la generación dinámica de masa.

Inspirados por la observación experimental de que muchas simetrías pueden ser violadas por la naturaleza, ha llegado a ser ampliamente aceptado el hecho de que una teoría puede ser construida sobre diferentes vacíos, correspondiendo con diferentes fases de la teoría. Algunos formalismos no perturbativos, como las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) o las ecuaciones de Bethe-Salpeter, permiten estudiar cantidades físicas que nos indican la existencia de transiciones entre las diferentes fases para ciertos valores de los parámetros de la teoría.

Un fenómeno de particular interés desde el punto de vista fenomenológico es la generación dinámica de masa en presencia de campos magnéticos, en particular para regímenes de campo medio. En esta tesis obtenemos ecuaciones lo suficientemente simples para tener soluciones numéricas confiables, sin hacer ninguna referencia a la constante de acoplamiento ni a la intensidad de campo.

En el capítulo 1 hacemos una introducción general del tema para tener una visión global de lo que se hará en adelante, en los capítulos 2 y 3 revisamos algunos métodos no perturbativos y hacemos una breve introducción de la simetría quiral; estas son las herramientas y el lenguaje básico para comprender la literatura existente al respecto. En el capítulo 4 mostramos la exposición clásica de la generación dinámica de masa en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, allí introducimos el condensado quiral y vemos su conexión con la ruptura de la simetría quiral. El capítulo 5 es la parte central de esta tesis. Allí se muestran los desarrollos analíticos, el conjunto de aproximaciones sobre las que depende nuestra técnica y los resultados numéricos. Por último en el capítulo 6 se muestran las conclusiones y las perspectivas a futuro de este trabajo.

Resumen

En esta tesis estudiamos generación dinámica de masa de fermiones en el contexto de la QED, en la presencia de un campo magnético de intensidad arbitraria, solucionando las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) para la auto-energía del fermión en la aproximación arcoiris. Por razones técnicas, al implementar las ESD usamos el formalismo de las funciones propias de Ritus. Es bien conocido que los campos magnéticos catalizan la generación de la masa del fermión m , de forma que $m \propto \sqrt{eB}$ para el régimen de acoplamiento débil $\alpha \ll 1$ y campos magnéticos fuertes $eB \gg m$. Nuestros métodos permiten barrer todo el espacio de parámetros α y eB . Para acoplamientos débiles hallamos que $m \propto \sqrt{eB}$. Sin embargo, para acoplamientos fuertes $\alpha \sim 1$ encontramos que $m \propto \Lambda$, el corte ultravioleta de los momentos. Nuestra técnica permite verificar los resultados existentes en la literatura para los casos límites $eB \gg m$ y $\alpha \sim 1$. Por último hacemos notar la aplicabilidad de nuestras técnicas y resultados en muchos sistemas físicos de interés.

Abstract

In this thesis we study the dynamical generation of masses for fundamental fermions in quenched quantum electrodynamics, in the presence of magnetic fields of arbitrary strength, by solving the Schwinger-Dyson equation (SDE) for the fermion self-energy in the rainbow approximation. We employ the Ritus eigenfunction formalism which provides a neat solution to the technical problem of summing over all Landau levels. It is well known that magnetic fields catalyze the generation of fermion mass m for arbitrarily small values of electromagnetic coupling α . For intense fields it is also well known that $m \propto \sqrt{eB}$. Our approach allows us to span all regimes of parameters α and eB . We find that $m \propto \sqrt{eB}$ provided α is small. However, when α increases beyond the critical value α_c which marks the onslaught of dynamical fermion masses in vacuum, we find $m \propto \Lambda$, the cut-off required to regularize the ultraviolet divergences. Our method permits us to verify the results available in literature for the limiting cases of eB and α . We also point out the relevance of our work for possible physical applications.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generación dinámica de masa

Se sabe bien de la electrodinámica cuántica (QED) que los fermiones pueden adquirir masa a través de su auto-interacción sin la necesidad de que originalmente tengan una masa desnuda. Este fenómeno se conoce como *generación dinámica de masa* (GDM) y es un fenómeno no perturbativo que ocurre más allá de cierto valor crítico de la constante de acoplamiento. En contraste, la teoría de perturbaciones no permite la generación de masa cuando la masa desnuda es idénticamente cero, aun si se tomaran en cuenta un número muy alto, pero finito, de órdenes de magnitud.

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD), [1, 2], proveen un marco natural para estudiar la GDM ya que su derivación no hace ninguna referencia a la intensidad de la interacción. Las ESD son un conjunto infinito de ecuaciones integrales acopladas relacionando diferentes funciones de Green. La función de Green de dos puntos para el fermión está acoplada con todas las funciones de Green de órdenes superiores, por tanto se requiere un truncamiento no perturbativo para convertir esta torre de ecuaciones en un problema soluble. En qQED (*quenched quantum electrodynamics*) usualmente se parte de hacer un ansatz para el vértice fermión-fotón y se estudia la ecuación para el propagador del fermión en su forma desacoplada.

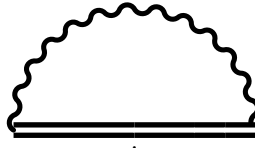
Una pregunta interesante concierne a la influencia de los campos magnéticos en la GDM para los fermiones. Se sabe que para campos magnéticos intensos es posible generar masa de fermiones no perturbativamente para cualquier valor de la constante de acoplamiento; este fenómeno se conoce como *catalisis magnética* [3, 4, 5, 6]. Sin embargo, no se ha estudiado suficiente el fenómeno con campos magnéticos débiles comparados con las energías típicas de la GDM en el vacío.

En esta tesis presentamos el estudio de la generación dinámica de masa de fermiones en qQED en presencia de campos magnéticos de intensidad arbitraria usando el método de eigenfunciones de Ritus [7].

1.2. Campos magnéticos en el universo

En muchos sistemas físicos la existencia de campos magnéticos intensos, aproximadamente constantes y uniformes, se debe a que clásicamente el campo magnético no hace trabajo sobre partículas cargadas, a diferencia de los campos eléctricos, y por tanto tienden a conservar su energía. Desde un punto de vista cuántico esto se traduce en el hecho de que en un campo magnético constante y uniforme, sin importar la intensidad, no hay creación de pares fermión-antifermión. Al cambiar de sistema de referencia, partiendo de un sistema donde sólo hay un campo magnético, i.e. $\mathbf{B} = B\hat{z}$ y $\mathbf{J}^\mu = 0$, aparecen campos eléctricos que aparentemente si podrían disipar energía.

Sin embargo, el hecho de que un campo magnético no disipa energía es una condición invariante de Lorentz, ya que se basa en la inexistencia de monopolos magnéticos [8], $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y en la uniformidad espacio-temporal del campo. En particular esta última propiedad hace que el campo eléctrico \mathbf{E} que surge en el nuevo sistema tenga también divergencia cero. Otra posible fuente de inestabilidades viene de la presencia en el Hamiltoniano de Dirac del término, $\Delta\mu\sigma \cdot \mathbf{B}$, donde $\Delta\mu$ es el momento magnético anómalo del electrón y σ son las matrices de Pauli. Este término introduce una corrección que disminuye la energía del estado base de [9], $E_0 = mc^2$, a $E_0 = mc^2|1 - \frac{\alpha}{4\pi} \frac{e\hbar B}{m^2 c^3}|$, donde m es la masa del electrón. De esta fórmula se tiene que para campos magnéticos del orden de $eB \sim 10^{16}$ la energía necesaria para producir un electrón en un campo magnético es cero. De confirmarse este resultado tendría profundas consecuencias en astrofísica y cosmología [10]. Sin embargo al hacer este cálculo en el marco de las teorías cuánticas de campos (TCC), a partir del diagrama de Feynman que se muestra en la figura 1.1, donde la línea ondulada es el propagador del fotón y la doble línea es el propagador del fermión en presencia de un campo magnético [11], el comportamiento lineal con el campo magnético de la corrección a la energía del estado base del electrón, se convierte en logarítmica para campos magnéticos del orden del campo crítico, $B_c \sim m^2/e \sim 10^{13}$ Gauss [9]. De la parte imaginaria del mismo diagrama, figura 1.1, se puede mostrar que la amplitud de probabilidad de creación de pares electrón-antielectrón en un campo magnético constante y uniforme es cero [11]. Esto muestra que para el régimen de campos magnéticos fuertes $B > B_c$, o ligeramente débiles $B \lesssim B_c$, los cálculos deben hacerse en el marco de las TCC.



(1.1)

Figura 1.1: *Auto-energía del electrón en presencia de un campo magnético.*

Dada la magnitud de B_c todo lo anterior parecería sólo especulación teórica, sin embargo, en nuestro universo los campos magnéticos fuertes, $B > B_c$ son omnipresentes. Campos magnéticos del orden de $10^{12} - 10^{14}$ Gauss se asocian con superficies de supernovas [12] y estrellas de neutrones [13]. Presumiblemente campos del orden 10^{16} Gauss están presentes en magnetares [14] e incluso se ha sugerido que en el interior de una estrella de neutrones existen campos de 10^{16} Gauss [15]. De otro lado, se presume que el universo temprano estuvo permeado por campos magnéticos primordiales que corresponderían a las semillas [16, 17] de los campos intergalácticos que se han observado a escalas de 100Kpc [18]. Estas observaciones hacen que el estudio de la catálisis magnética para campos de intensidades arbitrarias, que representa el principal objetivo de nuestra tesis, pueda llegar a ser una herramienta útil y relevante para el estudio de la fenomenología estelar y en consecuencia para la física de partículas.

1.3. Generación dinámica de masa en el vacío

Uno de los resultados más conocidos en teoría de perturbaciones es que la función masa $\mathcal{M}(p)$ depende linealmente de la masa desnuda m_0 , i.e,

$$\mathcal{M}(p) = m_0 \left(1 + c_1 \alpha \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + c_2 \alpha^2 \ln^2 \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \dots + c_N \alpha^N \ln^N \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) \right), \quad (1.2)$$

donde $\alpha = e^2(\mu)/4\pi$ es la constante de acoplamiento para alguna escala de energía μ . Así, si la “masa desnuda”, m_0 , es cero entonces la “masa vestida”, $\mathcal{M}(p)$, también. Esto nos dice que si

deseamos generar masa a partir de $m_0 = 0$ debemos estudiar el problema más allá de la teoría de perturbaciones, a todos los órdenes en α , es decir, no-perturbativamente. Una manera de atacar el problema es el uso de las ecuaciones de Schwinger-Dyson .

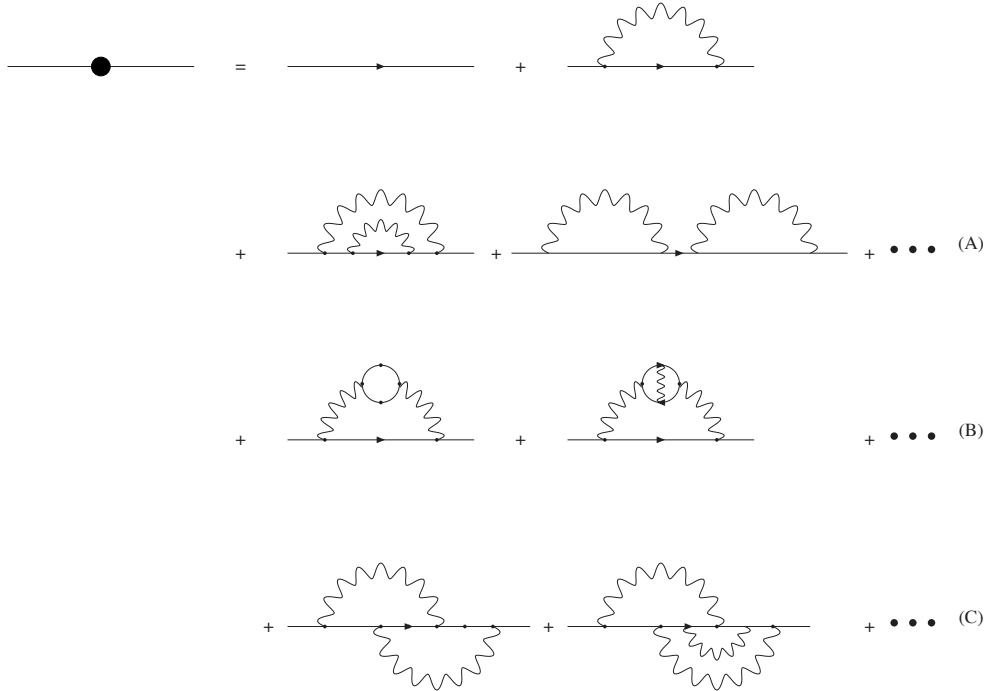


Figura 1.2: *Expansión perturbativa del propagador del fermión.*

En la figura 1.2 se muestra el diagrama que corresponde a la expansión perturbativa del propagador del fermión $S_F(p)$. Es útil notar que existen tres tipos de diagramas en la figura anterior: (A) los que corrigen al propagador del fermión, (B) los que corrigen al vértice fermión-bosón, y (C) los que corrigen al propagador del bosón. Es necesario en este contexto definir la auto-energía, $\Sigma(p)$, tal como se muestra en la figura 1.3.

$$\Sigma(p) \equiv \text{diagrama de auto-energía} \quad (1.3)$$

Figura 1.3: *Auto energía del electrón.*

Los puntos sólidos indican que se incluyeron todas las correcciones al propagador del fermión del fotón y del vértice. La definición es sin patas externas y no se corrige el primer vértice porque se

tiene en cuenta en el factor de simetría del segundo vértice. En la figura 1.4 se muestra la expansión del propagador del fermión como función de la auto-energía.

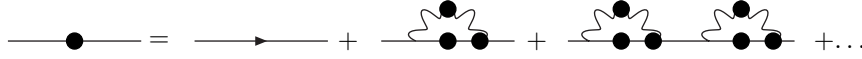


Figura 1.4: *Expansión perturbativa del propagador del fermión en términos de la auto-energía.*

que corresponde a:

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots \quad (1.4)$$

Esta es una serie geométrica que podemos expresar como:

$$S_F(p) = \frac{S_F^0(p)}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)}. \quad (1.5)$$

De esta relación podemos obtener

$$S_F(p) = S_F^0(p) + \frac{S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)}, \quad (1.6)$$

que se demuestra fácilmente expandiendo el denominador en potencias de $\Sigma(p)S_F^0(p)$. Usando estas relaciones se tenemos

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p). \quad (1.7)$$

Si multiplicamos esta relación del lado izquierdo por $S_F^0(p)^{-1}$ y a la derecha por $S_F(p)^{-1}$, obtenemos la ecuación de Schwinger-Dyson para el inverso del propagador del fermión $S_F^{-1}(p)$

$$S_F(p)^{-1} = S_F^0(p)^{-1} - \Sigma(p), \quad (1.8)$$

que diagramáticamente corresponde a la figura 1.5.



Figura 1.5: *ESD para el inverso del propagador del fermión.*

De forma similar obtenemos expresiones semejantes para el propagador del fotón y del vértice, figura 1.6 y figura 1.7 respectivamente.

Figura 1.6: ESD para el inverso del propagador del fotón.

Figura 1.7: ESD para el vértice fermión-fotón.

Nótese que en la ecuación para el vértice incluye las “patas” a diferencia de las ecuaciones para el propagador del fermión y del fotón. Si suponemos que conocemos la solución para el vértice en principio podemos resolver las dos primeras ecuaciones, sin embargo, la ecuación del vértice relaciona funciones de Green de dos, tres y cuatro puntos, que a su vez deben satisfacer en forma independiente unas ESD y el problema se convierte en una torre infinita de ecuaciones. De la estructura general de la solución de la ecuación de Dirac en el vacío se escribe el propagador del fermión de la forma [19]:

$$S_F(p) = \frac{F(p)}{\not{p} - \mathcal{M}(p)}, \quad (1.9)$$

donde $F(p)$ se conoce como la renormalización de la función de onda y $\mathcal{M}(p)$ como la función de masa. El propagador del fotón en general puede escribirse como:

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = \frac{\mathcal{G}(q)}{q^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^4}. \quad (1.10)$$

Aquí $\mathcal{G}(q)$ es la renormalización de la función de onda del fotón y ξ el parámetro de norma. Adoptamos la convención de que en el vértice de interacción de QED q representa el cuadrimento del fotón y p, k los cuadrimentos del fermión que entra y del que sale respectivamente. Así, la

función vértice, $\Gamma^\mu(k, p)$, puede expresarse como una combinación lineal de doce estructuras de Lorentz de la forma [20, 21]:

$$\Gamma^\mu(k, p) = \sum_{i=1}^{12} v_i(k, p) V_i^\mu, \quad (1.11)$$

donde

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= \gamma^\mu, & V_2^\mu &= k^\mu, & V_3^\mu &= p^\mu, \\ V_4^\mu &= \not{k}\gamma^\mu, & V_5^\mu &= \not{k}k^\mu, & V_6^\mu &= \not{k}p^\mu, \\ V_7^\mu &= \not{p}\gamma^\mu, & V_8^\mu &= \not{p}k^\mu, & V_9^\mu &= \not{p}p^\mu, \\ V_{10}^\mu &= \not{k}\not{p}\gamma^\mu, & V_{11}^\mu &= \not{k}\not{p}k^\mu, & V_{12}^\mu &= \not{k}\not{p}p^\mu. \end{aligned} \quad (1.12)$$

La forma usual para truncar la torre infinita de ESD, es tener en cuenta las propiedades de simetría que debe tener el vértice, esto no es trivial y se ha intentado resolver usando las identidades de Ward-Green-Takahashi, la expresión para el vértice en el límite perturbativo y la propiedad multiplicativa de las constantes de renormalización[20, 21, 19].

La Ec. (1.8) puede escribirse en d -dimensiones como:

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0-1}(p) - 4\pi i\alpha \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q). \quad (1.13)$$

Para resolver esto, debemos conocer la forma del propagador del fotón y del vértice fotón-fermión. En la aproximación arcoiris no se tienen en cuenta loops de fermiones y se toma el vértice como en QED perturbativa, i.e. $\mathcal{G}(q) = 1$ y $\Gamma^\mu(k, p) = \gamma^\mu$. Tomando en cuenta esta aproximación, la Ec. (1.13) puede escribirse explícitamente como

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0-1}(p) - 4\pi i\alpha \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^0(q), \quad (1.14)$$

donde $\Delta_{\mu\nu}^0(q)$ es el propagador del fotón (1.10) con $\mathcal{G} = 1$. La ecuación (1.14) diagramáticamente corresponde a la figura 1.8

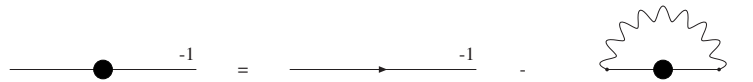


Figura 1.8: ESD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris

La aproximación arcoiris es generalmente válida para acoplamientos débiles y debe su nombre a la forma del diagrama para el propagador del fermión tal como se ve en la figura 1.9

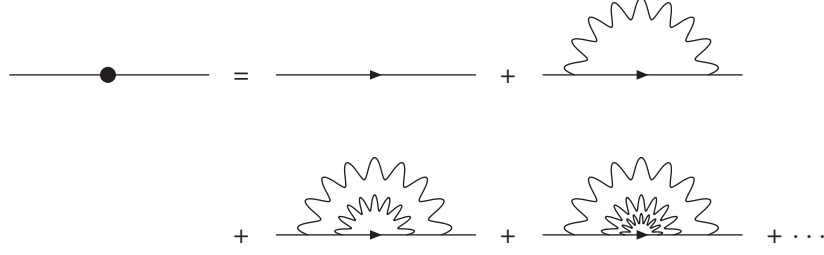


Figura 1.9: *Propagador del fermión en la aproximación arcoiris.*

La ecuación integral (1.14) puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones acopladas en $F(p)$ y $\mathcal{M}(p)$ [22, 23, 24, 25]. Para conseguir la primera ecuación tomamos la traza sobre índices fermiónicos y hacemos una rotación de Wick a espacio Euclidiano. La segunda ecuación se obtiene multiplicando por \not{p} y haciendo el mismo procedimiento. Para $d = 4$, las integrales angulares se pueden hacer fácilmente, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}(p)}{F(p)} &= m_0 + \frac{\alpha}{4\pi}(3 + \xi) \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{F(k)\mathcal{M}(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \left[\frac{k^2}{p^2} \theta(p^2 - k^2) + \theta(k^2 - p^2) \right] \\ \frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{F(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \left[\frac{k^4}{p^4} \theta(p^2 - k^2) + \theta(k^2 - p^2) \right], \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde Λ es un corte ultravioleta para el momento interno, m_0 es la masa desnuda del fermión y $\theta(k)$ es la función de escalón. Este sistema puede resolverse por técnicas numéricas si fijamos el parámetro de norma. En la norma de Landau $\xi = 0$, $F(p) = 1$, las ecuaciones se desacoplan entonces podemos escribir la ecuación para la masa generada dinámicamente como:

$$\mathcal{M}(p) = m_0 + \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{p^2} \int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2 \mathcal{M}(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k^2)} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} \frac{\mathcal{M}(k^2)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k^2)} \right]. \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) puede escribirse en forma diferencial: derivando respecto a p^2 , multiplicando por p^4 y diferenciando nuevamente, obtenemos

$$\frac{d}{dp^2} \left(p^4 \frac{d\mathcal{M}(p)}{dp^2} \right) = -\frac{3\alpha}{4\pi} \frac{p^2 \mathcal{M}(p)}{p^2 + \mathcal{M}^2(p)}. \quad (1.17)$$

Para obtener las condiciones de frontera reemplazamos esta ecuación en la Ec. (1.16)

$$\mathcal{M}(p) = m_0 - \frac{1}{p^2} \int_0^{p^2} dk^2 \frac{d}{dk^2} \left(k^4 \frac{d\mathcal{M}}{dk^2} \right) - \int_{p^2}^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{d}{dk^2} \left(k^4 \frac{d\mathcal{M}}{dk^2} \right). \quad (1.18)$$

al integrar obtenemos

$$\mathcal{M}(p) = m_0 + \mathcal{M}(p) + \frac{1}{p^2} \left[k^4 \frac{d\mathcal{M}}{dk^2} \right]_{k^2=0} - \left[\mathcal{M}(k) + k^2 \frac{d\mathcal{M}}{dk^2} \right]_{k^2=\Lambda^2}, \quad (1.19)$$

ya que los dos términos dependen en forma diferente de p^2 entonces deben anularse por separado y así las condiciones de frontera cuando $m_0 = 0$ son:

$$\frac{1}{p^2} \left[k^4 \frac{d\mathcal{M}(k)}{dk^2} \right]_{k^2=0} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \left[\mathcal{M}(k) + k^2 \frac{d\mathcal{M}(k)}{dk^2} \right]_{k^2=\Lambda^2} \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

La condición $k^2 \rightarrow 0$ se satisface fácilmente ya que la solución a la Ec.(1.17) en este límite es constante i.e. $\mathcal{M}(k^2 \rightarrow 0) \rightarrow \text{constante}$. Sin embargo la segunda condición es difícil de satisfacer y demanda una función no trivial ([19])

$$\mathcal{M}(p) = C \frac{\Lambda^2}{p} \left[\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1} \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} \right) - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1} \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (1.21)$$

donde C es una constante adimensional y $\alpha_c = \frac{\pi}{3}$ se conoce como el valor crítico de α , es decir, aquel α a partir del cual la solución de la Ec. (1.17) satisface las condiciones de frontera (1.20) y permite la existencia de una función de masa real.

Es útil para estudiar criticalidad ver el límite de momentos grandes $p^2 \gg \mathcal{M}^2(p)$, esto se tiene por el hecho de que para una teoría con $m_0 = 0$ la única escala es la masa generada dinámicamente. En este límite la Ec. (1.17) se reduce a

$$\frac{d}{dp^2} \left(p^4 \frac{d\mathcal{M}(p)}{dp^2} \right) \simeq -\frac{3\alpha}{4\pi} \mathcal{M}(p), \quad (1.22)$$

que tiene una solución en forma de potencias para la función de masa

$$\mathcal{M}(p) \sim (p^2)^s \quad (1.23)$$

donde

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3\alpha}{\pi} - 1}. \quad (1.24)$$

Si en la fase rota

$$\alpha \geq \alpha_c = \frac{\pi}{3}, \quad (1.25)$$

tomamos el límite $\alpha \rightarrow \alpha_c$, vemos que la solución se reduce a una ley de potencias de la forma

$$\mathcal{M}(p) \sim (p^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.26)$$

Este resultado es muy importante desde el punto de vista numérico para poder identificar criticalidad.

Es importante tener en cuenta que a nivel no-perturbativo la función de masa tiene una estructura no trivial en el plano complejo, por lo tanto, la rotación de Wick no está completamente justificada. La solución para la función de masa en el vacío (1.21), es una solución de la ecuación de masa en espacio Euclídeo, en este sentido, todo lo que podemos decir de la función de masa en espacio de Minkowski viene de argumentos de naturalidad y continuidad analítica. De acuerdo con este razonamiento se acostumbra a definir la masa generada dinámicamente, M , como el valor de la función de masa a momento externo igual a cero, i.e.,

$$M = \mathcal{M}(0). \quad (1.27)$$

Cuando la masa dinámica es generada por acoplamiento fuerte de la teoría, generalmente depende del corte ultravioleta. Esto se debe a que para $\alpha \sim 1$ la aproximación arcoiris ya no tiene validez y nuestras ecuaciones son equivalentes a un modelo efectivo para la QED, que sólo tiene sentido para cierto régimen de momentos menor que un corte ultravioleta Λ . Este corte está relacionado con la escala de energía para la cual la constante de acoplamiento es de orden uno. Un intento por definir la teoría para escalas de momento arbitrarias es imponer la condición de que la masa generada dinámicamente debe tener un límite bien definido cuando $\Lambda \rightarrow \infty$, i.e.,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M(p, \Lambda) = M(p) < \infty. \quad (1.28)$$

En la función de masa Ec. (1.21) vemos que el único parámetro ajustable con la escala de momentos es la constante de acoplamiento. En la versión linealizada de la ecuación de masa y con $m_0 = 0$ la condición anterior es equivalente a [26]

$$\alpha = \alpha_c + \frac{\pi^2 \alpha_c}{\ln^2(4\Lambda/M)} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \alpha_c = \pi/3. \quad (1.29)$$

Esta expresión se conoce como ley de escalamiento de Miransky. Formalmente en la aproximación arcoiris no hay correcciones al propagador del fotón y por tanto la constante de acoplamiento no cambia con la escala de momento. Sin embargo, como ya mencionamos, para acoplamiento fuerte qQED es un modelo efectivo y la constante de acoplamiento es simplemente un parámetro de este modelo.

En este capítulo hemos estudiado la generación dinámica de masa en el vacío. Para esto se introdujo las ESD a partir de los diagramas de Feynman de la teoría perturbativa. En el siguiente capítulo usando el formalismo funcional mostraremos que estas ecuaciones son válidas independiente de la convergencia o no de la expansión perturbativa.

Capítulo 2

Métodos no perturbativos

Para la gran mayoría de casos en el régimen de acoplamiento débil, en teorías cuánticas de campos, los cálculos se pueden hacer usando teoría de perturbaciones. Desafortunadamente, esta expansión perturbativa tiene muchas limitaciones para describir fenómenos cuyos observables tengan una dependencia no analítica con los parámetros de la teoría, sin importar si el acoplamiento es débil o fuerte. Este es precisamente el caso de la catálisis magnética y por esto resulta necesario mostrar que las ESD, establecidas en el capítulo anterior para el caso del vacío, no dependen de la validez de la expansión perturbativa.

2.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson son las ecuaciones de movimiento de una teoría de campo. Es importante tener claro que las configuraciones de campo no obedecen ninguna ecuación de movimiento, son las funciones de Green de la teoría libre las que satisfacen relaciones iguales a la ecuación clásica, salvo por ciertos términos que usualmente se denominan “términos de contacto”. Para teorías interactuantes sólo se satisface en promedio la ecuación clásica. Consideremos la situación más simple posible, la función de Green de tres puntos para el caso de un campo escalar real sin interacciones $\phi(x)$,

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) | \Omega \rangle = Z^{-1} [J = 0] \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3), \quad (2.1)$$

donde el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi(\square + m^2)\phi. \quad (2.2)$$

Si hacemos una variación infinitesimal del campo

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) + \epsilon(x), \quad (2.3)$$

ya que ϵ no depende de ϕ el cambio de variables no altera la medida de la integral funcional, i.e.

$$\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi', \quad (2.4)$$

así podemos escribir

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi')} \phi'(x_1) \phi'(x_2) \phi'(x_3) \quad (2.5)$$

donde

$$\mathcal{L}(\phi') \sim \mathcal{L}(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi)}{\partial \phi} \delta \phi, \quad (2.6)$$

con

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi)}{\partial \phi} \delta \phi = -\epsilon(x)(\square + m^2)\phi. \quad (2.7)$$

Si expandimos el lado derecho de Ec. (2.5) en potencias de ϵ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \left\{ \epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3) \right. \\ & \left. + \phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3) - i \int d^4x \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\epsilon(x)(\square + m^2)\phi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Podemos reescribir la expresión usando $\epsilon(x_i) = \int d^4x \epsilon(x)\delta(x - x_i)$. Ya que $\epsilon(x)$ es arbitrario el integrando en x debe ser cero

$$\begin{aligned} 0 = & \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \left\{ i\delta^4(x - x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\delta^4(x - x_2)\phi(x_3) \right. \\ & \left. + i\phi(x_1)\phi(x_2)\delta^4(x - x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)(\square + m^2)\phi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Así

$$\begin{aligned} & (\square_x + m^2)\langle \Omega | T\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) | \Omega \rangle = \\ & -i\langle \Omega | T\delta^4(x - x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) | \Omega \rangle - i\langle \Omega | T\phi(x_1)\delta^4(x - x_2)\phi(x_3) | \Omega \rangle \\ & -i\langle \Omega | T\phi(x_1)\phi(x_2)\delta^4(x - x_3) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde usamos

$$\langle \Omega | T(\dots \hat{\mathcal{O}}(x_i) \dots) | \Omega \rangle = Z^{-1}[J=0] \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} (\dots \mathcal{O}(x_i) \dots). \quad (2.11)$$

El resultado Ec. (2.10) puede generalizarse para una función de Green de n puntos

$$\begin{aligned} & (\square_x + m^2)\langle \Omega | T\phi(x)\phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \\ & -i \sum_{i=1}^n \langle \Omega | T\phi(x_1) \dots \delta^4(x - x_i) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

El caso particular $n = 1$ resulta

$$(\square_x + m^2)\langle \Omega | T\phi(x)\phi(x_1) | \Omega \rangle = -i\delta^4(x - x_1), \quad (2.13)$$

que corresponde con la interpretación usual de la función de Green. La relación Ec. (2.12) nos dice que cualquier función de Green de la teoría libre satisface la ecuación clásica sin fuentes, excepto en un conjunto discreto de puntos donde el argumento de dos operadores coincide, estos suelen llamarse puntos de contacto y se originan cuando el operador diferencial \square actúa sobre las funciones escalón, $\theta(x_{0i} - x_{0j})$, del ordenamiento temporal. Cuando hay fuentes en la Ec. (2.12) hacemos el remplazo

$$\square + m^2 \rightarrow \square_x + m^2 - J(x). \quad (2.14)$$

Así para el caso $n = 0$

$$(\square_x + m^2 - J)\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = 0, \quad (2.15)$$

esto significa que

$$\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = h + \int d^4y J(y) i \langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle_{J=0}, \quad (2.16)$$

donde h es una solución a la ecuación homogénea

$$(\square_x + m^2)h = 0. \quad (2.17)$$

Para el caso de una teoría interactuante la ecuación de movimiento en general es:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \right) = \frac{\delta}{\delta\phi} \int d^4x \mathcal{L} = 0. \quad (2.18)$$

El procedimiento es igual al que usamos para obtener la ecuación Ec.(2.12), consiguiendo

$$\begin{aligned} \langle\Omega|T \left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int d^4x' \mathcal{L}(x') \right) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)|\Omega\rangle = \\ - i \sum_{i=1}^n \langle\Omega|T\phi(x_1) \dots \delta^4(x - x_i) \dots \phi(x_n)|\Omega\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es importante notar que en el caso interactuante no podemos sacar de la integral funcional la ecuación de movimiento ya que en principio depende de ϕ . Así en este caso, la ecuación de movimiento se satisface en promedio, excepto por puntos de contacto. Las ecuaciones (2.19) se conocen como ecuaciones de Schwinger-Dyson y son un conjunto de ecuaciones acopladas que llevan toda la información, tanto perturbativa como no perturbativa de una teoría de campos. Como veremos en las siguientes secciones las ESD para QED coinciden con las que ya encontramos en el capítulo uno para el vacío.

2.2. QED

2.2.1. ESD para el propagador del fotón

La Ec. (2.19) puede fácilmente generalizarse para campos espinoriales y vectoriales. Si aplicamos esta fórmula al Lagrangiano

$$\mathcal{L}_T \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_J, \quad (2.20)$$

donde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (2.21)$$

y

$$\mathcal{L}_J = J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta. \quad (2.22)$$

Aquí A_μ y ψ corresponden al campo del bosón vectorial y del fermión respectivamente, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético, ξ es el parámetro que fija la norma y J_μ , η y $\bar{\eta}$ son corrientes auxiliares que por lo general se igualan a cero al final del cálculo. Estas corrientes no deben confundirse con las corrientes conservadas que tienen un significado físico y en general son diferentes de cero. Para el caso $n = 0$ de la Ec. (2.19) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} e^{i \int d^4 x' \mathcal{L}_T(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, x')} \\ &= \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \left(\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \int d^4 x' \mathcal{L}(x') + J_\mu(x) \right) e^{i \int d^4 x' \mathcal{L}_T(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, x')} \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \int d^4 x' \mathcal{L} \left(\frac{\delta}{i \delta J_\mu}, \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{i \delta \eta}, x' \right) + J_\mu(x) \right) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ya que

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \int d^4 x' \mathcal{L}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, x') = \left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu, -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (2.24)$$

si definimos

$$e^{iW[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]} \equiv Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}], \quad (2.25)$$

entonces la Ec. (2.23) se convierte en

$$J_\mu(x) + \left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \frac{\delta W}{\delta J_\nu(x)} + e \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} \gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} - i e \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \left(\gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) = 0. \quad (2.26)$$

Para obtener expresiones útiles es necesario escribir estas ecuaciones en términos de la funcional generatriz de los diagramas 1-PI (. . .):

$$\Gamma[\langle A_\mu \rangle, \langle \psi \rangle, \langle \bar{\psi} \rangle] = W[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] - \int d^4 x \left(J^\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} + \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) \quad (2.27)$$

donde

$$\langle A_\mu \rangle = \frac{\delta W}{\delta J^\mu}, \quad \langle \psi \rangle = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}}, \quad \langle \bar{\psi} \rangle = -\frac{\delta W}{\delta \eta} \quad (2.28)$$

y

$$J^\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle A_\mu \rangle}, \quad \bar{\eta} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \psi \rangle}, \quad \eta = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \bar{\psi} \rangle}. \quad (2.29)$$

Aquí definimos

$$\begin{aligned} \langle \dots \mathcal{O}(x_i) \dots \rangle &\equiv \langle \dots \mathcal{O}(x_i) \dots \rangle [J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \\ &\equiv Z^{-1}[J = 0] \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_T} (\dots \mathcal{O}(x_i) \dots). \end{aligned} \quad (2.30)$$

De la relación

$$\delta_{\alpha\beta} \delta^4(x - y) = \int d^4 z \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_\alpha(x) \delta \bar{\eta}_\gamma(z)} \frac{-\delta^2 \Gamma}{\delta \langle \psi_\gamma(z) \rangle \delta \langle \bar{\psi}_\beta(y) \rangle} \quad (2.31)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\delta^2 G}{\delta\eta_{\alpha}(x)\delta\bar{\eta}_{\beta}(z)} &= \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \left(\frac{-\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{\alpha}(z)\rangle\delta\langle\bar{\psi}_{\beta}(y)\rangle} \right)^{-1} \\ &= \text{tr} \left[\gamma^{\mu} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}(y)\rangle\delta\langle\psi(z)\rangle} \right)^{-1} \right].\end{aligned}\quad (2.32)$$

Si reemplazamos (2.28), (2.29) y (2.32) en (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A^{\nu}(x)\rangle} &= \left(\square g_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial_{\mu}\partial_{\nu} \right) \langle A^{\nu}(x)\rangle + e\langle\bar{\psi}(x)\rangle\gamma_{\mu}\langle\psi(x)\rangle \\ &\quad - ie \text{tr} \left[\gamma_{\mu} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}(x)\rangle\delta\langle\psi(x)\rangle} \right)^{-1} \right].\end{aligned}\quad (2.33)$$

Derivando este resultado respecto a $A_{\nu}(y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle\delta\langle A^{\mu}(x)\rangle} &= \left(\square g_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial_{\mu}\partial_{\nu} \right) \delta^4(x-y)g_{\nu}^{\mu} \\ &\quad - ie \text{tr} \left[\gamma_{\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\nu}(y)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}(x)\rangle\delta\langle\psi(x)\rangle} \right)^{-1} \right].\end{aligned}\quad (2.34)$$

Para obtener una expresión más útil del último término de la ecuación anterior derivamos respecto a $\langle A^{\nu}(y)\rangle$ la Ec. (2.31):

$$\int d^4 z \frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\alpha}(x)\delta\bar{\eta}_{\gamma}(z)} \right] \frac{-\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{\gamma}(z)\rangle\delta\langle\bar{\psi}_{\beta}(z')\rangle} = - \int d^4 z \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\alpha}(x)\delta\bar{\eta}_{\gamma}(z)} \frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle} \left[\frac{-\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{\gamma}(z)\rangle\delta\langle\bar{\psi}_{\beta}(z')\rangle} \right].\quad (2.35)$$

Multiplicando esta expresión por $\frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\beta}(z')\delta\bar{\eta}_{\delta}(x')}$ e integrando z' , obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\alpha}(x)\delta\bar{\eta}_{\delta}(x')} \right] &= \frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle} \left[\left(\frac{-\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{\alpha}(x)\rangle\delta\langle\bar{\psi}_{\delta}(x')\rangle} \right)^{-1} \right] \\ &\quad - \int d^4 z d^4 z' \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\alpha}(x)\delta\bar{\eta}_{\gamma}(z)} \frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle} \left[\frac{-\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\psi_{\gamma}(z)\rangle\delta\langle\bar{\psi}_{\beta}(z')\rangle} \right] \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_{\beta}(z')\delta\bar{\eta}_{\delta}(x')}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Si reemplazamos en la expresión anterior las definiciones para el propagador del fermión, S_c y del vértice, Λ_{ν}

$$\begin{aligned}S_c(x-y; J, \eta, \bar{\eta})_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}_{\alpha}(x)\delta\eta_{\beta}(y)}, \\ e\Lambda_{\nu}(x, y, z; J, \eta, \bar{\eta})_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(x)\rangle} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}_{\alpha}(y)\rangle\delta\langle\psi_{\beta}(z)\rangle} \right],\end{aligned}\quad (2.37)$$

donde “;” se usa para separar las variables normales de las variables funcionales, obtenemos la relación

$$\frac{\delta}{\delta\langle A^{\nu}(y)\rangle} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}_{\delta}(x')\rangle\delta\langle\psi_{\alpha}(x)\rangle} \right)^{-1} \right] = - \int d^4 z d^4 z' S_c(x' - z')_{\delta\beta} e\Lambda_{\nu}(y, z', z)_{\beta\gamma} S_c(z - x)_{\gamma\alpha}.\quad (2.38)$$

Remplazando este resultado en Ec. (2.34) conseguimos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle A^\nu(y) \rangle \delta \langle A^\mu(x) \rangle} &= \left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \delta^4(x-y) \\ &+ ie \operatorname{tr} \left[\gamma_\mu \int d^4 z d^4 z' S_c(x-z') e \Lambda_\nu(y, z', z) S_c(z-x) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Teniendo en cuenta

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \langle A^\nu(y) \rangle \delta \langle A^\mu(x) \rangle} = \Delta_{\mu\nu}^{-1}, \quad (2.40)$$

podemos identificar Ec. (2.39) con la ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del fotón. Como un bono extra de las Ecs. (2.41), (2.37) cuando las fuentes fermiónicas son cero

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \langle A(x; J)^\nu \rangle = -J - ie \operatorname{tr}[\gamma_\mu S_c(x, x; J)], \quad (2.41)$$

esta relación nos dice que la polarización del vacío puede actuar como una fuente de campo electromagnético. Para el caso de campos magnéticos puros, esperamos que estos efectos sean nulos ya que campos magnéticos no pueden generar pares fermión-antifermión. Sin embargo, esta expresión es muy importante para el caso de campos eléctricos.

2.2.2. ESD para el propagador del electrón

Como en el caso anterior partimos de la integral de una derivada total respecto al campo

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} e^{i \int d^4 x' \mathcal{L}_T(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, x')} \\ &= \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \int d^4 x' \mathcal{L}(x') + \eta(x) \right) e^{i \int d^4 x' \mathcal{L}_T(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, x')} \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \int d^4 x' \mathcal{L} \left(\frac{\delta}{i \delta J_\mu}, \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{i \delta \eta}, x' \right) + \eta(x) \right) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (2.21),

$$\left[\eta(x) + \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m - e \gamma^\mu \frac{\delta}{i \delta J^\mu(x)} \right) \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}(x)} \right] Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \quad (2.43)$$

donde

$$\frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}(x)} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} Z[J, \eta, \bar{\eta}]. \quad (2.44)$$

De la definición (2.37) la funcional W debe satisfacer

$$W[J, \eta, \bar{\eta}] = - \int d^4 y' d^4 x' \bar{\eta}(y') S(y' - x'; J, 0, 0) \eta(x') + \mathcal{O}(J, \eta^2, \bar{\eta}^2), \quad (2.45)$$

así

$$\frac{\delta W}{\bar{\eta}(x)} = - \int d^4 x' S(x - x'; J, 0, 0) \eta(x') \equiv \int d^4 x' S(x - x'; J) \eta(x') + \mathcal{O}(J, \eta, \bar{\eta}^2). \quad (2.46)$$

Escribiendo $\eta(x) = \int d^4x' \delta^4(x' - x) \eta(x')$ podemos reescribir (2.42) como

$$\int d^4x' \left\{ \delta^4(x' - x) \eta(x') - \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \right) (S(x, x'; J) \eta(x') + \mathcal{O}(J, \eta, \bar{\eta}^2)) \right\} Z = 0, \quad (2.47)$$

en esta expresión η queda como un término global que podemos factorizar. Igualando a cero el integrando obtenemos

$$\delta^4(x' - x) - \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu \langle A_\mu(x; J) \rangle - m - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \right) (S(x, x'; J) + \mathcal{O}(J, \bar{\eta}^2)) = 0 \quad (2.48)$$

donde

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} S(x, x', J) = \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left(\frac{\delta^2 W}{\bar{\eta}(x) \delta \eta(x')} \right) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left(\frac{-\delta^2 \Gamma}{\langle \bar{\psi}(x) \rangle \delta \langle \psi(x') \rangle} \right)^{-1} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}. \quad (2.49)$$

Usando la regla de la cadena, y considerando que en *QED* no tenemos vértices conectados con tres campos fermiónicos, ni a nivel local ni en el potencial efectivo, entonces podemos cambiar la derivada funcional sobre J a una derivada funcional sobre $\langle A^\mu \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} &= \int d^4z \left(\frac{\delta \langle A^\nu(z) \rangle}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \langle A^\nu(z) \rangle} + \frac{\delta \langle \psi(z) \rangle}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \langle \psi(z) \rangle} + \frac{\delta \langle \bar{\psi}(z) \rangle}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \langle \bar{\psi}(z) \rangle} \right) \\ &\longrightarrow \int d^4z \frac{\delta \langle A^\nu(z) \rangle}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \langle A^\nu(z) \rangle} = \int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x) \delta J_\nu(z)} \frac{\delta}{\delta \langle A^\nu(z) \rangle}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde usamos la relación (2.28). Reemplazando este resultado y la Ec. (2.38) en la Ec. (2.49) conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} S(x, x', J) &= \int d^4z'' \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x) \delta J_\nu(z'')} \frac{\delta}{\delta \langle A^\nu(z'') \rangle} \left(\frac{-\delta^2 \Gamma}{\langle \bar{\psi}(x) \rangle \delta \langle \psi(x') \rangle} \right)^{-1} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= \int d^4z'' d^4z' d^4z \Delta_c(x - z''; J)_\mu^\nu S_c(x - z'; J) e\Lambda_\nu(z'', z', z; J) S_c(z - x'; J), \end{aligned} \quad (2.51)$$

reemplazando este resultado en la Ec. (2.48) obtenemos

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu \langle A_\mu(x; J) \rangle - m) S(x, x'; J) + ie\gamma^\mu \int d^4z'' d^4z' d^4z D_c(x - z''; J)_\mu^\nu S_c(x - z'; J) \\ \times e\Lambda_\nu(z'', z', z; J) S_c(z - x'; J) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \delta^4(x' - x), \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde

$$\Delta_c(x - z''; J, \eta, \bar{\eta})_\mu^\nu \equiv \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x) \delta J_\nu(z'')}. \quad (2.53)$$

Si multiplicamos a la derecha de la Ec. (2.52) por $S^{-1}(x' - y)$ e integramos respecto a x' llegamos a

$$\begin{aligned} S^{-1}(x - y; J) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu \langle A_\mu(x; J) \rangle - m) \delta^4(x - y) \\ &\quad + ie\gamma^\mu \int d^4z'' d^4z' d^4z \Delta_c(x - z''; J)_\mu^\nu S_c(x - z'; J) e\Lambda_\nu(z'', z', y; J) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

esta es la ecuación de Schwinger-Dyson en presencia de un campo $\langle A_\mu(x; J) \rangle$, que satisface la ecuación Ec. (2.41).

2.3. Ecuación de Bethe-Salpeter

Existen varias razones para estudiar las ecuaciones de Bethe-Salpeter (BSE) en el contexto de la GDM. La ventaja de esta formulación es que permite, al menos en principio, determinar el espectro de estados ligados de una teoría cuántica de campos relativista. En este sentido, juega un papel similar al de la ecuación de Schrödinger en el caso no relativista. Además para momento en centro de masa del sistema ligado, $P = 0$, existe una relación entre la función de onda de los bosones de Goldstone, descrita por la BSE, y la masa generada dinámicamente (ver Ec. 9.38 en Ref. [26]). En nuestro caso la importancia de estudiar este formalismo reside en la gran cantidad de literatura que usa BSE para estudiar GDM [26].

Para estudiar como se comporta la función de onda de un sistema de dos partículas generalizamos la noción del propagador de un fermión [27]

$$\psi(x_2) = -i \int d\sigma(x_1) S_2(x_2, x_1) \gamma^\mu n_\mu(x_1) \psi(x_1), \quad (2.55)$$

donde la integración es sobre una hipersuperficie cerrada de tres dimensiones que incluye el punto x_2 y $n(x_1)_\mu$ es la normal a esta hipersuperficie en el punto x_1 . Generalizando al caso de la función de onda de dos partículas tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_3, x_4) = \int d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) S_{\alpha\beta;\eta\xi}^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) \gamma_{\eta\theta}^\mu n_\mu(x_1) \\ \times \gamma_{\xi\chi}^\nu n_\nu(x_2) \psi_\theta^a(x_1) \psi_\chi^b(x_2), \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde las letras griegas denotan índices fermiónicos, a, b denotan los números cuánticos de las partículas rotuladas con x_1 y x_2 respectivamente y $S_{\alpha\beta;\eta\xi}^{ab}$, que definiremos mas adelante, es la función de Green de cuatro puntos. Si las dos partículas no interactúan la función de onda está dada por

$$\psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_2, x_1) = \psi_\alpha^a(x_2) \psi_\beta^b(x_1), \quad (2.57)$$

y la Ec. (2.56) se factoriza ya que

$$S_{\alpha\beta;\eta\xi}^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) = i S_{\alpha\eta}^{0a}(x_3, x_1) i S_{\beta\xi}^{0b}(x_4, x_2) \quad (2.58)$$

donde $S_{\alpha\beta}^0$ es el propagador del fermión libre. Si las dos partículas interactúan es necesario sumar correcciones de orden superior como se puede ver en la Figura 2.1

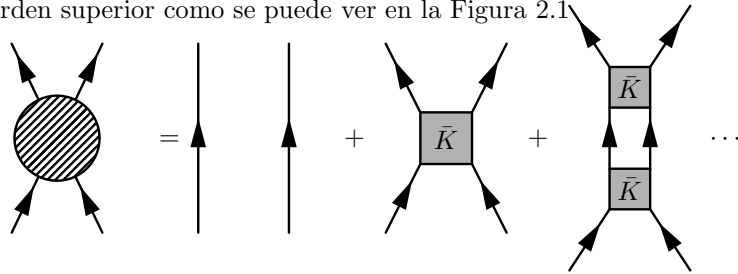


Figura 2.1: Expansión perturbativa de la función de Green de cuatro puntos.

donde \bar{K} es la suma de todos los diagramas que permanecen conexos después de cortar dos líneas fermiónicas internas como se muestra en la figura 2.2. \bar{K} se conoce como el kernel irreducible, podemos decir que \bar{K} es a la función de Green de cuatro puntos lo que la auto-energía es a la

función de Green de dos puntos.

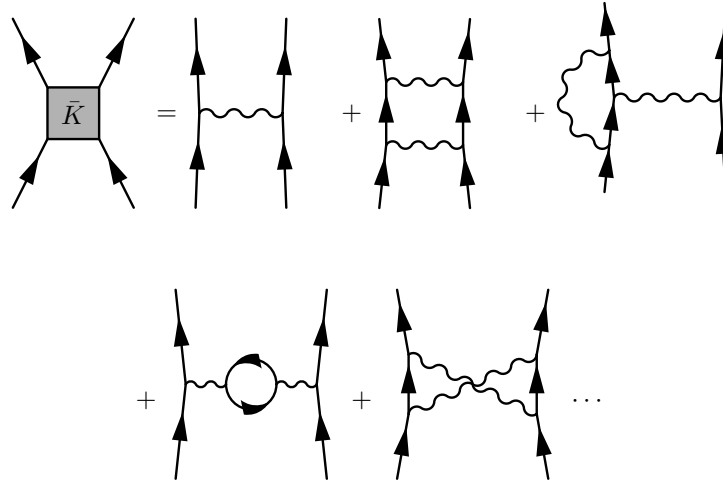


Figura 2.2: Kernel irreducible.

Podemos factorizar \bar{K} de forma que obtenemos la ecuación para la función de Green, Figura 2.3.

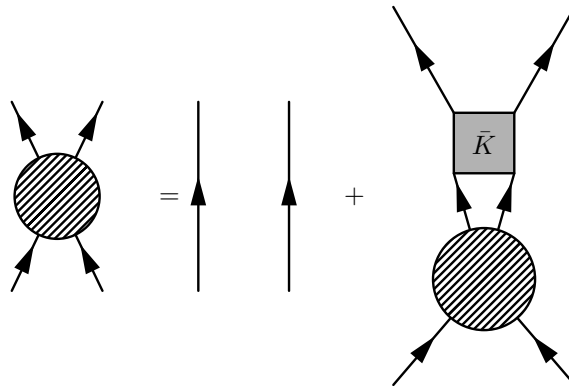


Figura 2.3: ESD para la función de Green de cuatro puntos.

En forma explícita

$$S_{\alpha\beta;\eta\xi}^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) = iS_{\alpha\eta}^{0a}(x_3, x_1)iS_{\beta\xi}^{0b}(x_4, x_2) + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iS_{\alpha\alpha'}^{0a}(x_3, x_5)iS_{\beta\beta'}^{0b}(x_4, x_6) \quad (2.59)$$

$$\times \bar{K}_{\alpha'\beta';\eta'\xi'}^{ab}(x_5, x_6; x_7, x_8)S_{\eta'\xi';\eta\xi}^{ab}(x_7, x_8; x_1, x_2). \quad (2.60)$$

Por cada diagrama que aparece en el Kernel irreducible, \bar{K} , estamos sumando una familia infinita de diagramas, por esta razón estas ecuaciones contienen información que no puede obtenerse

perturbativamente. Si reemplazamos este resultado en Ec. (2.56) obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_3, x_4) &= \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2) iS_{\alpha\eta}^{0a}(x_3, x_1) iS_{\beta\xi}^{0b}(x_4, x_2) \\
&\quad \times \gamma_{\eta\theta}^\mu n_\mu(x_1) \gamma_{\xi\chi}^\nu n_\nu(x_2) \psi_{\theta\chi}^{ab}(x_1, x_2) \\
&\quad + \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2) \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iS_{\alpha\alpha'}^{0a}(x_3, x_5) \\
&\quad \times iS_{\beta\beta'}^{0b}(x_4, x_6) \bar{K}_{\alpha'\beta';\eta'\xi'}^{ab}(x_5, x_6; x_7, x_8) \\
&\quad \times S_{\eta'\xi';\eta\xi}^{ab}(x_7, x_8; x_1, x_2) \gamma_{\eta\theta}^\mu n_\mu(x_1) \gamma_{\xi\chi}^\nu n_\nu(x_2) \psi_{\theta\chi}^{ab}(x_1, x_2). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Si usamos la Ec. (2.56) en la ecuación anterior obtenemos la versión integral de la ecuación de Bethe-Salpeter

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_3, x_4) &= \psi_{\alpha\beta}^{0ab}(x_3, x_4) \\
&\quad + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iS_{\alpha\alpha'}^{0a}(x_3, x_5) iS_{\beta\beta'}^{0b}(x_4, x_6) \\
&\quad \times \bar{K}_{\alpha'\beta';\eta'\xi'}^{ab}(x_5, x_6; x_7, x_8) \psi_{\eta'\xi'}^{ab}(x_7, x_8). \tag{2.62}
\end{aligned}$$

La solución generada por el propagador libre, $\psi_{\alpha\beta}^{0ab}(x_3, x_4)$, localmente se puede despreciar respecto a soluciones localizadas, la razón de esto es que sin interacciones no es posible que la función de onda de dos partículas se traslapen y por tanto el producto $\psi_\alpha^a(x_2)\psi_\beta^b(x_1)$ es cero localmente. Teniendo en cuenta que la función de Green satisface

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{\alpha\beta} S(x - x')_{\beta\gamma} = \delta^4(x - x') \delta_{\alpha\gamma}, \tag{2.63}$$

podemos reescribir la Ec. (2.62) como

$$\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} - m_a)(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_2^\nu} - m_b) \psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2) \\
&= - \int d^4x_3 d^4x_4 \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(x_1, x_2; x_3, x_4) \psi_{\eta'\xi'}^{ab}(x_3, x_4), \tag{2.64}
\end{aligned}$$

donde hemos renombrando algunos índices. Esta es la ecuación Integro-Diferencial de Bethe-Salpeter en espacio de coordenadas. Se puede conseguir una expresión más útil si hacemos la transformada de Fourier a espacio de momentos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{p_1 \cdot x_2} e^{p_2 \cdot x_1} (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} - m_a)(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_2^\nu} - m_b) \psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2) \\
&= - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{p_1 \cdot x_2} e^{p_2 \cdot x_1} \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(x_1, x_2; x_3, x_4) \psi_{\eta'\xi'}^{ab}(x_3, x_4) \\
&= - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 d^4x'_3 d^4x'_4 \delta^4(x_3 - x'_3) \delta^4(x_4 - x'_4) \\
&\quad \times e^{p_1 \cdot x_2} e^{p_2 \cdot x_1} \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(x_1, x_2; x_3, x_4) \psi_{\eta'\xi'}^{ab}(x_3, x_4). \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Usando la representación de la delta de Dirac

$$\delta^4(x_4 - x'_4) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p'_2 e^{p'_2 \cdot (x_4 - x'_4)}, \tag{2.66}$$

obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}
&(\gamma^\mu p_{1\mu} - m_a)(\gamma^\nu p_{2\nu} - m_b) \chi_{\alpha\beta}^{ab}(p_1, p_2) \\
&= - \int d^4p'_1 d^4p'_2 \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p_1, p_2; p'_1, p'_2) \chi_{\eta'\xi'}^{ab}(p'_1, p'_2), \tag{2.67}
\end{aligned}$$

donde

$$\chi_{\alpha\beta}^{ab}(p_1, p_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p'_1 \cdot x_1 + p'_2 \cdot x_2)} \psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2) \quad (2.68)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p_1, p_2; p_3, p_4) &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - p_3 \cdot x_3 - p_4 \cdot x_4)} \\ &\quad \times \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(x_1, x_2; x_3, x_4). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para un sistema de dos partículas es conveniente trabajar con los momentos

$$P = p_1 + p_2, \quad p = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad (2.70)$$

o equivalentemente,

$$p_1 = \frac{P}{2} + p, \quad p_2 = \frac{P}{2} - p. \quad (2.71)$$

En lo que sigue por simplicidad supondremos

$$m = m_a = m_b. \quad (2.72)$$

Ya que el kernel de interacción \bar{K}^{ab} , debe conservar el momento, i.e. $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, se puede hacer el ansatz

$$\bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = \delta^4(P - P') \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p, p'; P) \quad (2.73)$$

Reemplazando en la Ec. (2.67) obtenemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\gamma^\mu P_\mu + \gamma^\mu p_\mu - m\right)_{\alpha\alpha'} \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu P_\nu - \gamma^\nu p_\nu - m\right)_{\beta\beta'} \chi_{\alpha'\beta'}^{ab}(P, p) \\ &= - \int d^4p' d^4P' \left| \frac{\partial(p'_1, p'_2)}{\partial(p', P')} \right| \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p, p'; P) \delta^4(P - P') \chi_{\eta'\xi'}^{ab}(p', P') \\ &= - \int d^4p' \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p, p'; P) \chi_{\eta'\xi'}^{ab}(p', P), \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde tuvimos en cuenta que el jacobiano de la transformación es 1. Si hacemos el ansatz

$$\chi_{\alpha'\beta'}^{ab}(P, p) = \delta^4(P - K) \chi_{\alpha'\beta'}^{ab}(p). \quad (2.75)$$

Esto es equivalente a decir que en espacio de coordenadas la función de onda es el producto de una fase $e^{iK \cdot (x_1 + x_2)}$ por la transformada inversa de $\chi(p)$

$$\psi_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2) = e^{-i\frac{K}{2} \cdot (x_1 + x_2)} \int d^4p e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \chi_{\alpha\beta}^{ab}(p). \quad (2.76)$$

Reemplazando la Ec. (2.75) en la Ec. (2.74) e integrando respecto a P , obtenemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\gamma^\mu K_\mu + \gamma^\mu p_\mu - m\right)_{\alpha\alpha'} \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu K_\nu - \gamma^\nu p_\nu - m\right)_{\beta\beta'} \chi_{\alpha'\beta'}^{ab}(p) \\ &= - \int d^4k \bar{K}_{\alpha\beta;\eta'\xi'}^{ab}(p, k + p; K) \chi_{\eta'\xi'}^{ab}(k + p), \end{aligned} \quad (2.77)$$

aquí hicimos el cambio de variable $p' = k + p$ para que coincida con la forma tradicional. Esta ecuación integral tiene soluciones discretas en \bar{K} y en principio permite determinar el espectro discreto de estados ligados de dos fermiones.

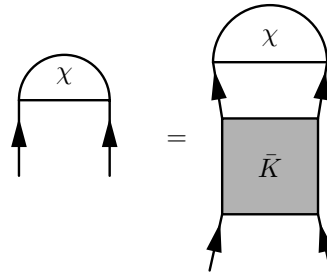


Figura 2.4: Ecuación de Bethe-Salpeter para la interacción fermión-fermión.

La ecuación de Bethe-Salpeter para interacción fermión-antifermión es muy similar, la diferencia es el kernel y la dirección de los propagadores fermiónicos. Ya que esta ecuación describe un par de partículas en un estado ligado, las partículas pueden interactuar con una frecuencia infinita. Esta complejidad se refleja en el hecho de que incluso para el kernel más simple la ecuación no tiene soluciones exactas. Sin embargo, resulta muy útil para estudiar el espectro de estados ligados del par electrón-positrón, mejor conocido como positronio.

Capítulo 3

Simetría Quiral

Una de las simetrías más útiles en física de partículas es la llamada simetría quiral. Se dice que hay simetría quiral cuando en el Lagrangiano las componentes derechas e izquierdas de un fermión de Dirac transforman de forma independiente. Esta simetría se rompe de manera espontánea cuando las partículas adquieren masa en virtud de sus auto-interacciones o por la interacción con un campo externo; en este caso se dice que la masa se ha generado dinámicamente y esta es precisamente la importancia de estudiar la simetría quiral en el contexto de esta tesis. Se acostumbra usar el término *simetría quiral rota*, para indicar que aún en el caso en el que los fermiones adquieren masa la corriente quiral clásica se sigue conservando; esta es una característica muy importante de la ruptura de la simetría quiral. En caso contrario hablamos de una ruptura anómala o explícita. La razón para que esta simetría se rompa es que el valor esperado del condensado quiral, $\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle$, adquiere un valor diferente de cero.

Consideremos el Lagrangiano de QED tal como se definió en el capítulo dos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + e_0A_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

De este Lagrangiano se puede mostrar que las corrientes

$$\begin{array}{ll} \text{vectorial} & j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \text{axial} & j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi. \end{array} \quad (3.2)$$

satisfacen

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu &= \bar{\psi}\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi, \\ &= i\bar{\psi}(m - e_0\gamma^\mu A_\mu)\psi + i\bar{\psi}(-m + e_0\gamma^\mu A_\mu)\psi, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu^5 &= i\bar{\psi}(m - e_0\gamma^\mu A_\mu)\gamma^5\psi + i\bar{\psi}(-m + e_0\gamma^\mu A_\mu)\gamma^5\psi \\ &= 2imP, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $P \equiv \bar{\psi}\gamma^5\psi$.

3.1. Caso Abelian

Es importante notar que la corriente axial, j_μ^5 , sólo se conserva para fermiones de masa cero, i.e. $m = 0$. Para lo que resta es suficiente escribir el Lagrangiano (3.1) de la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + e_0V_\mu + e_0A_\mu\gamma^5)\psi. \quad (3.5)$$

Este Lagrangiano es invariante ante la transformación $U_V(1)$:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x).\end{aligned}\tag{3.6}$$

De igual modo, y de forma independiente, transforma bajo $U_A(1)$:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\beta(x)\gamma^5}\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}e^{i\beta(x)\gamma^5}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu\beta(x),\end{aligned}\tag{3.7}$$

aquí V y A se refieren a vectorial y axial respectivamente. Esta es la llamada simetría quiral $U_V(1) \times U_A(1)$ para el caso particular de QED .

Es usual descomponer los campos fermiónicos en sus componentes “derechas” e “izquierdas”, para esto se introducen los operadores

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5),\tag{3.8}$$

que satisfacen

$$P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_+P_- = 0, \quad P_+ + P_- = 1.\tag{3.9}$$

Con estos operadores definimos

$$\psi_L \equiv P_- \psi, \quad \psi_R \equiv P_+ \psi,\tag{3.10}$$

donde usamos la convención $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. De $(\gamma^5)^2 = 1$ tenemos

$$\gamma^5\psi_\pm = \pm\psi_\pm.\tag{3.11}$$

El Lagrangiano, Ec. (3.5), puede escribirse en términos de estos campos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L\gamma^\mu(i\partial_\mu + e_0A_\mu^L)\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu(i\partial_\mu + e_0A_\mu^R)\psi_R,\tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned}A_\mu^L &= V_\mu + A_\mu, & V_\mu &= \frac{1}{2}(A_\mu^L + A_\mu^R), \\ A_\mu^R &= V_\mu - A_\mu, & A_\mu &= \frac{1}{2}(A_\mu^L - A_\mu^R).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Es claro que en la Ec. (3.12) podemos transformar componentes izquierdas y derechas por separado:

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow e^{i\Lambda_L(x)}\psi_L, & \delta\psi_L &= i\Lambda_L(x)\psi_L, \\ A_\mu^L &\rightarrow A_\mu^L + \partial_\mu\Lambda_L, \\ \psi_R &\rightarrow e^{i\Lambda_R(x)}\psi_R, & \delta\psi_R &= i\Lambda_R(x)\psi_R, \\ A_\mu^R &\rightarrow A_\mu^R + \partial_\mu\Lambda_R.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Así el Lagrangiano, Ec (3.5), también es simétrico ante $U_L(1) \times U_R(1)$.

3.2. Caso no Abelian

Contrario a lo que intuitivamente se pensaría, las principales características de los hadrones están determinadas por su contenido de sabor y no de color, esto se debe a que todas las partículas compuestas deben ser neutras en color, propiedad conocida como confinamiento. Esta es la razón de que modelos efectivos, como el Nambu-Jona-Lasinio, resulten de promediar sobre los grados de libertad gluónicos, dejando como grupo de simetría efectivo la llamada simetría quiral. Sin embargo, podemos ver que en ciertos límites el Lagrangiano fundamental de QCD

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + gA_\mu)\psi - m_0\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (3.15)$$

también es quiral-simétrico. Aquí ψ es el campo del quark en la representación fundamental del grupo de color y de sabor, $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$ es el campo gluónico y los λ^a 's son los generadores del grupo de norma que satisfacen

$$[\lambda^a/2, \lambda^b/2] = if^{abc}\lambda^c/2. \quad (3.16)$$

Aquí

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.17)$$

El Lagrangiano (3.15) es invariante ante las transformaciones

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow U_c \psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} U_c^\dagger \\ A_\mu &\rightarrow U_c A_\mu U_c^\dagger - \frac{1}{g} U_c i \partial_\mu U_c^\dagger, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $U_c(x) = e^{i\theta(x)^a \lambda_c^a / 2}$ y el subíndice c es por color. El Lagrangiano (3.15) también es invariante bajo rotaciones globales de sabor

$$\psi \rightarrow U_V \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U_V^\dagger, \quad U_V = e^{i\theta_V}, \quad (3.19)$$

donde $\theta_V = \theta_V^a \lambda_F^a / 2$. En analogía con el caso Abelian esta rotación es llamada vectorial. Es importante notar que los gluones no tienen índices de sabor y por tanto no son afectados por estas transformaciones.

En forma similar al caso Abelian el Lagrangiano de la Ec. (3.15) tiene una simetría **global** adicional en el límite $m_0 \rightarrow 0$

$$\psi \rightarrow U_A \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U_A, \quad U_A = e^{i\gamma^5 \theta_A}, \quad (3.20)$$

con $\theta_A = \theta_A^a \lambda_F^a / 2$. Dado que γ^0 y γ^5 anticonmutan ψ y $\bar{\psi}$ transforman de igual forma a diferencia del caso vectorial. Esta rotación suele denotarse como transformación vectorial-axial. La invariancia de un Lagrangiano ante las transformaciones de las Ecs. (3.19) y (3.20) es lo que suele llamarse **la simetría quiral**

$$U_V(N_f) \times U_A(N_f). \quad (3.21)$$

Usando la propiedad $U_A = (U_V)^{\gamma^5}$ podemos reescribir

$$\begin{aligned} U_V(\theta_V) U_A(\theta_A) &= U_V(\theta_V) (U_V(\theta_A))^{\gamma^5} \\ &= U_V(\theta_V)^{P_R + P_L} U_V(\theta_A)^{P_R - P_L}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dado que los operadores, $P_{R,L}$, son ortogonales y por tanto conmutan entre si obtenemos inmediatamente

$$\begin{aligned} U_V(\theta_V)U_A(\theta_A) &= (P_R e^{i\theta_V} + P_L e^{-i\theta_V})(P_R e^{i\theta_A} + P_L e^{-i\theta_A}) \\ &= P_R U_V(\theta_R) + P_L U_V(\theta_L), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde se define $U_V(\theta_R) \equiv U_V(\theta_V)U_V(\theta_A)$ y $U_V(\theta_L) \equiv U_V(\theta_V)U_V(-\theta_A)$. En el caso Abelianos se tiene $\theta_R = \theta_V + \theta_A$, $\theta_L = \theta_V - \theta_A$. Sin embargo, en general la relación es más complicada. Quarks izquierdos y derechos, tal como se definieron en (3.10), bajo la transformación quiral (3.22) resultan

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow U_V(\theta_L)\psi_L, & \bar{\psi}_L &\rightarrow \bar{\psi}_L U_V^\dagger(\theta_L) \\ \psi_R &\rightarrow U_V(\theta_R)\psi_R, & \bar{\psi}_R &\rightarrow \bar{\psi}_R U_V^\dagger(\theta_R). \end{aligned} \quad (3.24)$$

En el límite, $m_0 \rightarrow 0$, todos los términos en el Lagrangiano de la Ec. (3.15) acoplan componentes fermiónicas de igual quiralidad, por ejemplo

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L. \quad (3.25)$$

Esto no sucede con el término de masa, éste mezcla quiralidades

$$\bar{\psi}m^0\psi = \bar{\psi}_R m^0\psi_L + \bar{\psi}_L m^0\psi_R. \quad (3.26)$$

El significado físico de la simetría quiral, como veremos, resulta más claro al considerar fermiones de masa cero. Estos campos satisfacen la ecuación de Dirac en la representación de momentos

$$\gamma^\mu p_\mu\psi = 0, \quad p_\mu = i\partial_\mu \quad (3.27)$$

si multiplicamos esta ecuación por $\gamma^5\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ conseguimos

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}\psi = \gamma^5 p^0\psi \quad (3.28)$$

esto se obtiene cíclicamente de: $(\gamma^5\gamma^0)\gamma^1 = i\gamma^2\gamma^3 \equiv \Sigma^1$. Para una solución de energía positiva

$$\psi(x) = e^{-ik \cdot x}\psi(k). \quad (3.29)$$

La ecuación Ec. (3.27) requiere $k^2 = 0$, de forma que $k^0 = E = |k|$, que combinada con Ec. (3.28) consigue

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}\psi = \gamma^5\psi \quad (3.30)$$

y por lo tanto los estados propios de quiralidad resultan iguales a los de helicidad. En las soluciones de energía negativa se tiene lo contrario, pero esto es razonable en el sentido de que se interpretan como soluciones que viajan hacia atrás en el tiempo. Para fermiones de masa cero la helicidad, y por tanto la quiralidad, es un número cuántico bien definido, en el sentido de que la proyección del momento sobre el espín es independiente del sistema de referencia. En fermiones masivos el signo del momento depende del sistema de referencia, ya que viajan a una velocidad menor que la de la luz. Dado que en la naturaleza no hay fermiones sin masa, parecería inútil estudiar la simetría quiral, sin embargo, en muchos casos de interés se puede tener una simetría quiral en forma aproximada, debido a que la masa generada dinámicamente es mucho mayor que la masa desnuda que aparece en el Lagrangiano. Esta es la bien conocida hipótesis de conservación parcial de las corrientes axiales PCAC (Partially Conserved Axial Current) que ha tenido mucho éxito en modelos de QCD a bajas energías, como veremos en el siguiente capítulo [28, 26].

Capítulo 4

Modelo de Nambu-Jona-Lasinio

Al estudiar QCD a bajas energías se encuentran muchas dificultades debido a los problemas inherentes de una teoría con acoplamiento fuerte. Por esta razón se han propuesto una gran cantidad de modelos para describir QCD a escalas inferiores a $\Lambda_{QCD} \sim 200\text{MeV}$. Uno de los modelos más conocidos es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [29, 30]. A pesar de algunas dificultades severas, por ejemplo: no es renormalizable y no explica confinamiento, este modelo ha sido ampliamente usado tanto en física de partículas como en física nuclear [28].

4.1. NJL como un modelo a bajas energías de QCD

El modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) fue el primer modelo relativista en el que se estudió la ruptura dinámica de la simetría. La forma general de la funcional generatriz para QCD que describe la interacción entre quarks, q , y gluones, A_μ^a es:

$$Z_{QCD} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}A \bar{q} \exp \left\{ \int d^4x \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) q - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + g A_\mu^a j^{a\mu} \right\}. \quad (4.1)$$

Las convenciones son las mismas del capítulo anterior para una teoría de norma no abeliana. Podemos ver el origen del Lagrangiano de NJL integrando la parte gluónica en (4.1). En la densidad Lagrangiana de (4.1) aparecen términos de cuarto orden en A_μ y por tanto no es posible aplicar fórmulas Gaussianas. Para integrar los grados de libertad gluónicos usamos la identidad funcional

$$1 = \int \mathcal{D}G \delta(G - F) = \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\chi \exp \int d^4x i\chi(G - F). \quad (4.2)$$

donde $G = G_{\mu\nu}^a$ y $\chi = \chi_{\mu\nu}^a$ son tensores de segundo rango que sirven como campos auxiliares, y que después de integrar, A_μ^a , serán los encargados de llevar la información de los grados de libertad gluónica. Así

$$Z_{QCD} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}A \mathcal{D}G \mathcal{D}\chi \exp \left\{ \int d^4x \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + g A_\mu^a j^{a\mu} + i\chi_{\mu\nu}^a (G^{a\mu\nu} - F^{a\mu\nu}) \right\}. \quad (4.3)$$

El término cuadrático en A_μ resulta de

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} &= \chi_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) \\ &\equiv -2\chi_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} + g A^{b\mu} \hat{\chi}_{\mu\nu}^{bc} A^{c\nu}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $\hat{\chi}_{\mu\nu}^{bc} \equiv \chi_{\mu\nu}^a f^{abc}$. La integral funcional sobre A_μ

$$I_A \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \exp \int d^4x (gA_\mu^a j^{a\mu} + 2i\chi_{\mu\nu}^a \partial^\nu A^{a\mu} - igA^{b\mu} \hat{\chi}_{\mu\nu}^{bc} A^{c\nu}), \quad (4.5)$$

puede hacerse usando la identidad

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x \{ \int d^4y \frac{1}{2} \phi^a(x) Q_{xy}^{ab} \phi^b(y) - J^a(x) \phi^a(x) \}} \\ = \mathcal{N} (\text{Det} Q)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J^a(x) Q^{-1ab}_{xy} J^b(y)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde el inverso de Q es en sentido funcional

$$\int d^4z z Q_{xz}^{ab} Q^{-1bc}_{zy} = \delta^{ac} \delta^4(x-y), \quad (4.7)$$

y el $\text{Det} Q$ se toma sobre índices continuos y discretos

$$\text{Det} Q = \prod_a \lambda_a = e^{\log \prod_a \lambda_a} = e^{\sum_a \log \lambda_a} \equiv e^{\text{Tr} \log Q} \quad (4.8)$$

donde

$$\int d^4x Q u_a = \lambda_a u_a, \quad (4.9)$$

aquí Tr es la traza sobre a, b que representan índices continuos o discretos, cuando la traza sea sobre índices discretos usamos tr , tal como lo hemos hecho en los capítulos anteriores. En la Ec.(4.5)

$$\begin{aligned} Q_{xy} &= \frac{i}{2} g \hat{\chi}_{\mu\nu}^{bc}(x) \delta^4(x-y), \\ Q_{xy}^{-1} &= (ig\hat{\chi})^{-1bc}_{\mu\nu}(x) \delta^4(x-y), \\ J^{a\mu} &= g j^{a\mu} - 2i \partial^\nu \chi^{a\mu}_\nu \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $ig\hat{\chi}_{\mu\tau}^{ab} (ig\hat{\chi})^{-1\tau\nu}_{bc} = \delta_c^a \delta_\mu^\nu$. Es importante notar que Q es Hermítico y está bien definido como un operador local, esto se tiene porque $\hat{\chi}_{\mu\nu}^{ab}$ es real y antisimétrico y por tanto $(i\hat{\chi}_{\mu\nu}^{ab})^{T*} = i\hat{\chi}_{\mu\nu}^{ab}$. Sin embargo, Q_{xy}^{-1} , no tiene sentido cuando $\hat{\chi}_{\mu\nu}^{bc} \equiv \chi_{\mu\nu}^a f^{abc} \sim 0$, de forma que la integral funcional sobre $\chi_{\mu\nu}^a$ no está bien definida. Esto puede resolverse en el límite semiclásico donde el valor esperado en el vacío de $\chi_{\mu\nu}^a$ es aproximadamente constante. Dado que en este límite $\chi_{\mu\nu}^a$ no representa un grado de libertad dinámico de la teoría, no es necesario integrarlo funcionalmente. Así, la integral espacio-temporal de Q_{xy}^{-1} también será una constante en el sentido funcional, con unidades de inverso del momento al cuadrado, cuya escala de energía está dada por el condensado de gluones. Reemplazando en el exponente que aparece en Ec. (4.6) tenemos

$$\int d^4x d^4y J^a(x) Q^{-1ab}_{xy} J^b(y) = \int d^4x (g j^{a\mu} - 2i \partial^\rho \chi^{a\mu}_\rho) (ig\hat{\chi})^{-1ab}_{\mu\nu} (g j^{b\nu} - 2i \partial^\tau \chi^{b\nu}_\tau). \quad (4.11)$$

En esta expresión aparece un término de la forma

$$\frac{1}{2} g^2 j^{a\mu} (ig\hat{\chi})^{-1ab}_{\mu\nu} j^{b\nu}. \quad (4.12)$$

Esta es la interacción que da origen al Lagrangiano NJL. Aparece también un término de la forma $-2ig j^{a\mu} ((ig\hat{\chi})^{-1ab}_{\mu\nu}) \partial^\tau \chi^{b\nu}_\tau$, sin embargo, estos términos se anulan cuando se desprecian las fluctuaciones de χ respecto a su valor en el vacío χ_0 , i.e $\partial^\tau \chi \sim 0$. La integral sobre G se puede hacer fácilmente de forma que χ es el único campo que lleva información de los grados de libertad gluónicos.

4.2. Ecuación para la función de masa

El Lagrangiano del modelo NJL es [29, 30, 26]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + G^{(0)} \sum_{\alpha=0}^{N^2-1} \left(\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi \right)^2 + \left(\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}i\gamma^5\psi \right)^2, \quad (4.13)$$

donde las $\lambda^\alpha/2$ son los generadores en la representación fundamental del sabor de las matrices unitarias de dimensión N , $U(N)$, normalizadas de tal forma que satisfacen

$$\text{tr}[\lambda^\alpha/2, \lambda^\beta/2] = \delta^{\alpha\beta}/2. \quad (4.14)$$

Al igual que en el capítulo anterior para las teorías de norma no abelianas, los ψ_{al} llevan índices de color l , y de sabor a . Si usamos la identidad de Fierz $\sum_{\alpha=0}^{N^2-1} \frac{1}{2}\lambda_{ab}^\alpha\lambda_{cd}^\alpha = \delta_{ad}\delta_{cb}$ podemos escribir el Lagrangiano. Ec. (4.13) como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + 2G^{(0)}\bar{\psi}_L^a\psi_R^b\bar{\psi}_R^b\psi_L^a. \quad (4.15)$$

Este Lagrangiano es invariante ante $U_L(N) \times U_R(N)$. Este modelo está inspirado en el modelo no relativista de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS) para la superconductividad. La diferencia radica en que para las energías típicas de los electrones en un sólido no es necesario considerar positrones y por tanto el Lagrangiano describe la interacción electrón-electrón como se puede ver en (4.16), mientras el Lagrangiano del modelo NJL (4.13) describe la interacción electrón-positrón.

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\partial_0\psi + \psi^\dagger\left(\frac{\Delta}{2m} + \mu\right)\psi + \frac{g}{2}\psi_\beta^\dagger\psi_\alpha^\dagger\psi_\alpha\psi_\beta. \quad (4.16)$$

La física en los dos casos es muy similar, en el caso de BCS la presencia de un condensado se debe al apareamiento entre electrones en la superficie de Fermi por interacciones con los fonones de la red. En el modelo NJL el condensado es producto de la interacción fuerte entre fermiones y antifermiones virtuales del vacío. En lo que sigue del texto al hablar de apareamiento, estamos diciendo que dos grados de libertad fermiónicos se transforman en un grado de libertad bosónico. La ecuación de movimiento que se obtiene del Lagrangiano, Ec. (4.13), es:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}G^{(0)} \sum_{\alpha=0}^{N^2-1} \left(\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi \right) \lambda^\alpha\psi + \left(\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}i\gamma^5\psi \right) \lambda^\alpha i\gamma^5\psi = 0. \quad (4.17)$$

Para obtener información de esta ecuación se hacen cero todos los coeficientes de las lambdas excepto el correspondiente al escalar proporcional a λ^0 . Con esto estamos escogiendo una dirección en la representación adjunta del grupo de simetría, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{G^{(0)}}{2}(\bar{\psi}\lambda^0\psi)\lambda^0 &\rightarrow G^{(0)}N_c\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \equiv -m_{dyn} \\ \bar{\psi}\lambda^\alpha\psi\lambda^\alpha &\rightarrow 0, \quad \text{si } \alpha \neq 0, \\ \bar{\psi}\lambda^\alpha\gamma^5\psi &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $\lambda^0 = (2/N)^{1/2}I$. Ya que por cada sabor existen N_c colores, incluimos un factor N_c en la definición de masa dinámica. Aquí la simetría se rompe de forma espontánea ya que estamos exigiendo que el valor esperado de un operador en el vacío sea diferente de cero

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0. \quad (4.19)$$

Con esta aproximación la Ec. (4.17) se reduce a la ecuación de Dirac.

$$(i\gamma^\mu p_\mu - m_{dyn})\psi = 0, \quad (4.20)$$

aquí m_{dyn} está dada por

$$\begin{aligned} m_{dyn} &= -G^{(0)}N_c \langle 0 | \bar{\psi}_\alpha(0) \psi_\alpha(0) | 0 \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} G^{(0)}N_c \text{tr} \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle \\ &= i \lim_{x \rightarrow 0} G^{(0)}N_c \text{tr} G_{\alpha\beta}(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde la traza se toma sobre los índices espinoriales α, β y $G(x)$ es el propagador del fermión

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m_{dyn}}{p^2 - m_{dyn}^2 + i\epsilon}. \quad (4.22)$$

Remplazando estos resultados en la Ec. (4.21) obtenemos

$$m_{dyn} = \frac{4iG^{(0)}N_c}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{m_{dyn}}{p^2 - m_{dyn}^2 + i\epsilon}. \quad (4.23)$$

Si vamos a espacio Euclídeo y hacemos la integral angular tenemos

$$m_{dyn} = \frac{G^{(0)}N_c}{4\pi^2} \int_0^\Lambda p^2 dp^2 \frac{m_{dyn}}{p^2 + m_{dyn}^2}, \quad (4.24)$$

donde Λ es el corte ultravioleta. Haciendo la integral sobre los momentos obtenemos

$$m_{dyn} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{m_{dyn}^3}{\Lambda^2} \log \frac{\Lambda^2 + m_{dyn}^2}{m_{dyn}^2}, \quad (4.25)$$

donde $\kappa = G^{(0)}N_c\Lambda^2/4\pi^2$. Si $\kappa < 1$, las soluciones de Ec. (4.25) son imaginarias y suponemos que no representan estados físicos. A esta fase se le denomina fase simétrica, ya que la única solución real para el condensado, $m_{dyn} = \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle = 0$, es invariante ante el grupo quiral. Una solución real aparece para $\kappa > 1$ y se dice que el modelo está en la fase con simetría quiral rota, i.e., $U_L(N) \times U_R(N) = U_A(N) \times U_V(N) \rightarrow U_V(N)$. En este caso la presencia de un condensado no nulo implica, vía el teorema de Goldstone, que el vacío no es invariante ante todos los generadores del grupo. En esta fase $m_{dyn} \rightarrow 0$ cuando $\kappa \rightarrow 1$, así el valor crítico $\kappa = 1$, corresponde a una transición de fase continua o de segundo orden. Como en este caso la simetría se rompe de forma espontánea deben aparecer N^2 bosones de Goldstone, uno por cada generador de $U_A(N)$, para que la corriente quiral se siga conservando. Los Goldstone tienen los mismos números cuánticos que las cargas rotas y por tanto son pseudo-escalares que en principio pueden tener carga de sabor.

4.3. Potencial efectivo para NJL

Podemos considerar una variedad mayor de modelos tipos NJL de la forma

$$\mathcal{L}_{NJL} = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Lambda_\alpha \psi Q^{\alpha\beta} \bar{\psi} \Lambda_\beta \psi, \quad (4.26)$$

donde

$$\Lambda_\alpha = \mathbf{1}_c \otimes \lambda_f^a / 2 \otimes \Gamma_\alpha, \quad a = 0, \dots, 8 \quad (4.27)$$

con

$$\Gamma_\alpha \in \left\{ \mathbb{1}, i\gamma^5, \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_\mu, \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_\mu\gamma^5 \right\}. \quad (4.28)$$

El objetivo es describir el Lagrangiano, Ec. (4.26), como una teoría efectiva con grados de libertad bosónicos,

$$\eta \equiv \eta_\alpha \Lambda_\alpha, \quad (4.29)$$

que, como veremos más adelante, tienen una interpretación física por su relación con el condensado quiral. Para conseguir esto usamos la identidad

$$e^{\frac{1}{2} \int \bar{\psi} \Lambda_\alpha \psi Q^{\alpha\beta} \bar{\psi} \Lambda_\beta \psi} = \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(2\pi Q)}} \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int \eta_\alpha (Q^{-1})^{\alpha\beta} \eta_\beta - \int \eta_\alpha \bar{\psi} \Lambda_\alpha \psi}, \quad (4.30)$$

aquí el determinante se toma sobre índices de color, sabor y espinoriales tal como se definió en la Ec. (4.8). Usando (4.30) podemos escribir

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int d^4x \mathcal{L}_{NJL}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int \eta_\alpha (Q^{-1})^{\alpha\beta} \eta_\beta} Z_\psi[\eta], \quad (4.31)$$

donde

$$Z_\psi[\eta] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 - \eta) \psi}. \quad (4.32)$$

La interpretación física del campo escalar η resulta a partir de su ecuación de movimiento para una configuración de vacío $\eta_{0\alpha} \equiv \langle \eta_\alpha \rangle$

$$\langle \eta_\alpha \rangle = -Q^{\alpha\beta} \langle \bar{\psi} \Lambda_\alpha \psi \rangle. \quad (4.33)$$

Esto muestra que η está relacionado con el condensado de fermiones para $\alpha = 0$. En la Ec. (4.31) podemos integrar el campo fermiónico consiguiendo

$$Z_{NJL} = \int \mathcal{D}\eta e^{\int \mathcal{A}[\eta]} = \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \eta_\alpha (Q)_{\alpha\beta}^{-1} \eta_\beta + \text{Tr} \log(i\gamma^\mu \partial_\mu - \eta - m_0)} \quad (4.34)$$

El término $\text{Tr} \log(i\gamma^\mu \partial_\mu - \eta - m_0)$, es no lineal y no local, sin embargo η tiene un valor esperado en el vacío diferente de cero y por tanto este Lagrangiano puede tratarse semiclásicamente. Para reducir el análisis, el campo η puede descomponerse en términos de diferentes estructuras escalares

$$\eta = S + i\gamma^5 P - i\gamma^\mu V_\mu - i\gamma^\mu A_\mu \gamma^5, \quad (4.35)$$

aquí S es un escalar, P un pseudoescalar, V un campo vectorial y A un campo axial. Por su definición todos estos campos son proporcionales a matrices de sabor, $S = S^a \lambda^a / 2, \dots$ (ver Ec. (4.29)). Si se asume

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \kappa g^2 \delta^{\alpha\beta}, \quad (4.36)$$

contrayendo todos los índices se obtiene

$$\eta Q^{-1} \eta = \frac{1}{2G_1} \text{tr}(S^2 + P^2) + \frac{1}{2G_1} \text{tr}(V_\mu V^\mu + A_\mu A^\mu), \quad (4.37)$$

donde $G_2 = \frac{1}{2}G_1 = \frac{1}{3}g^2\kappa$. Si hacemos el cambio de variable $S \rightarrow S - m_0$, podemos escribir la Ec. (4.31) como

$$Z_{NJL} = \int \mathcal{D}S \mathcal{D}P \mathcal{D}V \mathcal{D}A e^{\mathcal{A}[S,P,V,A]} \quad (4.38)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[S, P, V, A] = & -\frac{1}{2G_1} \int d^4x \text{tr}((S - m_0)^2 + P^2) - \frac{1}{2G_1} \int d^4x \text{tr}(V_\mu V^\mu + A_\mu A^\mu) \\ & + \text{TrLog}(i(\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^\mu V_\mu + \gamma^\mu A_\mu \gamma^5) - (S + i\gamma^5 P)). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En una primera aproximación hagamos $V_\mu = A_\mu = 0$ y consideremos el caso $N_f = 1$, de forma que sólo nos limitamos al campo escalar y pseudoescalar. En lugar de dos campos reales usaremos el campo

$$M \equiv S + iP = \phi U = \phi(\cos \Theta + i \sin \Theta) \quad (4.40)$$

donde $\phi \in [0, \infty)$ y $\Theta \in [0, 2\pi)$ se conocen como el campo quiral radial y ángulo quiral respectivamente. Usando los operadores de proyección $P_{R,L}$ se muestra fácilmente

$$S + i\gamma^5 P = (S + iP)P_R + (S - iP)P_L = MP_R + M^\dagger P_L = \phi e^{i\gamma^5 \Theta}. \quad (4.41)$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones en, Ec. (4.39), resulta

$$\mathcal{A}[S, P] = \mathcal{A}[\phi, \Theta] = -\frac{1}{2G_1} \int d^4x (\phi^2 - 2\phi m_0 \cos \Theta + m_0^2) + \text{Tr} \log(i\gamma^\mu \partial_\mu - \phi e^{i\gamma^5 \Theta}). \quad (4.42)$$

La traza $\text{Tr} \log(i\gamma^\mu \partial_\mu - \phi e^{i\gamma^5 \Theta})$ es una cantidad divergente y por tanto requiere de regularización, sin embargo para teorías no renormalizables como NJL la regularización es parte del modelo, en el sentido que el resultado puede depender del método. Para esta clase de infinitos en operadores diferenciales es conveniente usar la regularización basada en el tiempo propio de Schwinger. Para implementar el método usamos la identidad

$$\log \mathcal{O} = - \lim_{\mathcal{O} \rightarrow \infty} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \mathcal{O}}. \quad (4.43)$$

Ya que estamos interesados en configuraciones de vacío podemos restringirnos a ϕ, Θ constantes. Para una simetría quiral exacta los resultados no deben depender del ángulo quiral por tanto esperamos que los resultados no cambien mucho si hacemos $\Theta = 0$. El determinante del operador es un escalar por tanto debe satisfacer [31]

$$\text{Tr} \log(i\gamma^\mu \partial_\mu - \phi) = \text{Tr} \log(-i\gamma^\mu \partial_\mu - \phi). \quad (4.44)$$

Ya que el logaritmo es aditivo la relación anterior nos permite escribir

$$\text{Tr} \log(i\gamma^\mu \partial_\mu - \phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} \log(\partial^2 + \phi^2). \quad (4.45)$$

así

$$\mathcal{A}_F = \frac{1}{2} \text{Tr} \log(\partial^2 + \phi^2) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(\partial^2 + \phi^2)}. \quad (4.46)$$

La traza puede evaluarse en una base de ondas planas

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_F &= -\frac{1}{2} \text{tr}_c \text{tr}_D \int d^4x \langle x | \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(\partial^2 + \phi^2)} | x \rangle \\
&= -\frac{1}{2} N_c \text{tr}_D \int d^4x d^4q d^4k \langle x | q \rangle \langle q | \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(\partial^2 + \phi^2)} | k \rangle \langle k | x \rangle \\
&= -\frac{1}{2} 4N_c \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(-k^2 + \phi^2)}, \tag{4.47}
\end{aligned}$$

donde tr_c y tr_D indican la traza sobre índices de color y de Dirac respectivamente. Aquí usamos $\langle k | x \rangle = e^{-ik \cdot x} / (2\pi)^4$. En espacio Euclídeo $-k^2 = |k|^2$ así

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(-k^2 + \phi^2)} &= \int \frac{d|k|}{(2\pi)^4} |k|^3 d\Omega_{S^3} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(|k|^2 + \phi^2)} \\
&= \int 2\pi^2 \frac{d|k|^2}{2(2\pi)^4} |k|^2 \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(|k|^2 + \phi^2)} \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-\tau\phi^2} \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left(\phi^4 \Gamma\left[0, \frac{\phi^2}{\Lambda^2}\right] + e^{-\frac{\phi^2}{\Lambda^2}} \Lambda^2 (\Lambda^2 - \phi^2) \right) \tag{4.48}
\end{aligned}$$

de esto tenemos

$$\mathcal{A}_F = -\frac{N_c}{16\pi^2} \int d^4x \left(\phi^4 \Gamma\left[0, \frac{\phi^2}{\Lambda^2}\right] + e^{-\frac{\phi^2}{\Lambda^2}} \Lambda^2 (\Lambda^2 - \phi^2) \right). \tag{4.49}$$

reemplazando en Ec. (4.42) conseguimos el potencial efectivo

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2G_1} \phi^2 + \frac{N_c}{16\pi^2} \left(\phi^4 \Gamma\left[0, \frac{\phi^2}{\Lambda^2}\right] + e^{-\frac{\phi^2}{\Lambda^2}} \Lambda^2 (\Lambda^2 - \phi^2) \right). \tag{4.50}$$

De esta expresión podemos calcular el valor esperado en el vacío del campo radial

$$\langle \phi \rangle = m_0 + 2G_1 \frac{N_c}{4\pi^2} \langle \phi \rangle^3 \Gamma\left(-1, \frac{\langle \phi \rangle}{\Lambda^2}\right). \tag{4.51}$$

De Ec. (4.33) con $\Lambda_\alpha = 1$ obtenemos

$$\langle \phi \rangle = m_0 - \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \tag{4.52}$$

con

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -2G_1 \frac{N_c}{4\pi^2} \langle \phi \rangle^3 \Gamma\left(-1, \frac{\langle \phi \rangle}{\Lambda^2}\right). \tag{4.53}$$

Esta relación permite interpretar el condensado como el radio del sombrero mexicano en el iso-espacio de $\langle \phi \rangle$ (ver Ec. 4.40), donde se encuentran todos los posibles vacíos de la teoría. Si el condensado es nulo el anillo se convierte en un punto, se pierde la degeneración y sólo es posible un vacío simétrico. El ángulo quiral corresponde al bosón de Goldstone del generador roto, y sólo es relevante cuando el condensado es no nulo. De esta forma la transición de fase quiral puede representarse con un campo escalar; sin embargo, es importante tener en cuenta que a diferencia de un sistema descrito por un potencial escalar, este campo sólo aparece para un acople crítico dado.

Capítulo 5

Generación dinámica de masa en presencia de campos magnéticos de intensidad arbitraria

Es bien conocido en la literatura que en presencia de campos magnéticos intensos, $eB \gg \mathcal{M}(0)$, con $\mathcal{M}(0)$ la masa dinámica del fermión, es posible generar masas de fermiones para cualquier valor de la constante de acoplamiento. Este fenómeno se conoce como catálisis magnética [3, 4, 5, 6]. En esta aproximación se parte de un Lagrangiano con masa desnuda cero para un fermión cargado. Dada la intensidad del campo los niveles de Landau se separan lo suficiente en el espacio de momento transverso por una cantidad $\sim \sqrt{eB}$, de forma que es suficiente considerar el nivel más bajo de Landau, ya que para fermiones de masa cero es difícil alcanzar niveles de energía más altos.

En nuestro trabajo usaremos la aproximación arcoiris, que como ya vimos en el capítulo uno, contempla sólo correcciones al propagador del fermión, despreciando correcciones al vértice y al propagador del fotón [32]. Esta aproximación está justificada para acoplamientos débiles en el caso perturbativo. En el caso no perturbativo y acoples débiles, se ha mostrado explícitamente que en la ESD para la masa del fermión, es suficiente con tener en cuenta correcciones al propagador del fermión, ya que la inclusión de correcciones al vértice y al propagador del fotón no afectan cualitativamente las soluciones [26]. En presencia de campos magnéticos los diagramas para las ESD son iguales a los presentados en el capítulo uno en las figuras 1.5-1.7, pero en lugar de usar el propagador del fermión para el vacío, usamos el propagador del fermión en presencia de un campo magnético E_c (5.6). A diferencia del límite de intensidades de campo fuerte, en el caso de campos magnéticos externos débiles los niveles de Landau están tan próximos que deben tomarse en cuenta todos los niveles, y ésta es precisamente la no trivialidad del problema que deseamos abordar.

La técnica para estudiar el problema la tomamos de Ritus [7]. El mostró que en presencia de un campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ el operador de masa \mathcal{M} debe ser una combinación de las estructuras escalares

$$\gamma^\mu \Pi_\mu, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, (F_{\mu\nu} \Pi^\nu)^2, \gamma_5 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

las cuales conmutan con el operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$, donde $\Pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu^{\text{ext}}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{\text{ext}} - \partial_\nu A_\mu^{\text{ext}}$, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} F_{\lambda\tau}$, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ y A^{ext} es el potencial vector del campo magnético externo constante y uniforme de magnitud B en la dirección \hat{z} , i.e., $A_{\text{ext}}^\mu = B(0, -y/2, x/2, 0)$. Es importante notar que existen varias normas para el potencial que genera campo magnético externo $B\hat{z}$, que satisfacen la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Sin embargo, para cada sistema de coordenadas puede

resultar conveniente usar alguna norma en particular. Dada la simetría del problema necesitamos trabajar en la representación generada por las eigenfunciones del operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$. Para hallar una representación diagonal del operador de masa, necesitamos encontrar las eigenfunciones $\psi_{p\sigma}$ del operador $(\gamma \cdot \Pi)^2$, es decir:

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 \psi_{p\sigma} u_{\sigma\chi} = p^2 \psi_{p\sigma} u_{\sigma\chi}, \quad (5.2)$$

donde $u_{\sigma\chi}$ son los eigenespinores de Σ_3 y γ_5 , y p denota todos los numeros $p = p_{\parallel}, n_p, s_p, l_p$ de acuerdo con la convención usada en [33]. Aquí trabajamos en coordenadas cilíndricas $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$ y en la representación quirral de las matrices γ_{\pm} donde Σ_3 y γ_5 son diagonales con valores propios $\sigma = \pm 1$ y $\chi = \pm 1$. Las eigenfunciones normalizadas $\psi_{p\sigma}$ (ver apéndices A, B y Ref. [34]) están dadas por

$$\psi_{p\sigma}(t, \mathbf{r}) = N e^{-i(E_p t - p_z z)} e^{i(l_p - \frac{(\sigma+1)}{2})\phi} I_{n_p - \frac{(\sigma+1)}{2}}^{s_p}(\rho), \quad (5.3)$$

donde $N = \sqrt{2\gamma/(2\pi)^3}$, $\rho = \gamma r^2$, $\gamma = eB/2$, $p^2 = E_p^2 - p_z^2 - 2eBn$ y

$$I_n^s(\rho) = \sqrt{\frac{s!}{n!}} e^{-\rho/2} \rho^{(n-s)/2} L_s^{n-s}(\rho), \quad (5.4)$$

son las funciones de Laguerre [34], con números cuánticos n, l, s que satisfacen $n = l + s$ [34]. Las soluciones puede arreglarse como una matriz de la forma

$$\Psi_p(x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \psi_{p\sigma}(x) \Delta(\sigma), \quad (5.5)$$

donde $\Delta(\sigma) \equiv \text{diag} \{ \delta_{\sigma 1}, \delta_{\sigma -1}, \delta_{\sigma 1}, \delta_{\sigma -1} \}$ es una matriz 4×4 y $x = (t, \mathbf{r})$. La matriz en la Ec. (5.5) se usa para . . . la función de Green de dos puntos, $G(x, y)$, del espacio de coordenadas al de momentos, $\mathcal{G}(k)$, es decir:

$$G(x, y) = \sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \Psi_k(x) \mathcal{G}(k) \bar{\Psi}_k(y), \quad (5.6)$$

donde $k_{\parallel} = (k_0, 0, 0, k_3)$ y $\bar{\Psi}_k = \gamma^0 \Psi_k^{\dagger} \gamma^0$. La expresión anterior puede sustituirse en definición de la función de Green de dos puntos [11]:

$$\gamma \cdot \Pi(x) G(x, y) - \int d^4 x' M(x, x') G(x', y) = \delta^4(x - y). \quad (5.7)$$

Para hallar la forma explícita de \mathcal{G} en espacio de momentos (ver apéndice B)

$$\mathcal{G}(k) = \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})}, \quad (5.8)$$

donde $\bar{k}_{\mu} = (k_0, 0, -\sqrt{4n_k \gamma}, -k_z)$. Para obtener esta expresión usamos la relación de completéz

$$\sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \Psi_k(x) \bar{\Psi}_k(y) = \delta^4(x - y) \quad (5.9)$$

al igual que las propiedades (ver apéndices A y B)

$$\gamma \cdot \Pi(x) \Psi(x) = \Psi(x) (\gamma \cdot \bar{k}), \quad (5.10)$$

$$\int d^4 x' M(x, x') \Psi(x')_k = \Psi(x)_k \Sigma(\bar{k}), \quad (5.11)$$

y

$$\int d^4x \bar{\Psi}_p(x) \Psi_{p'}(x) = \delta_{n_p n_{p'}} \delta_{s_p s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \Pi(n_p), \quad (5.12)$$

donde

$$\Pi(n_p) = \begin{cases} 1, & \text{si } n_p \neq 0 \\ \Delta(\sigma = 1), & \text{si } n_p = 0. \end{cases}$$

En lo que sigue la función de masa en espacio de coordenadas está dada por [11, 33]:

$$M(x, x') = -ie^2 \gamma^\mu G(x, x') \gamma^\nu D_{\mu\nu}^{(0)}(x - x'). \quad (5.13)$$

Esta expresión se obtiene de comparar la definición para $M(x, x')$ en la Ec. (5.7) con la ESD Ec. (2.52) y remplazar las expresiones para el vértice y el propagador del fotón en la aproximación arcoiris. Para campos magnéticos débiles, $eB \ll \mathcal{M}(0)$, tomar el vértice desnudo es razonable, ya que en el vacío, al menos en el infrarrojo, la identidad de Ward se satisface en la norma de Landau, i.e.

$$\Gamma_\mu = \frac{\partial S^{-1}(p)}{p^\mu} = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\gamma \cdot p - \mathcal{M}(p)}{\mathcal{F}(p)} \approx \gamma_\mu, \quad (5.14)$$

en la última igualdad tuvimos en cuenta que en la norma de Landau $\mathcal{F} = 1$, para campos magnéticos débiles esperamos un resultado similar ya que estamos en una situación física semejante a la del vacío. Igual resultado tenemos para campos magnéticos fuertes y acoplamiento débil, ya que nuestro propósito es interpolar estos dos regímenes de parámetros es natural usar esta aproximación para campos magnéticos de intensidad arbitraria [35].

5.1. ESD en espacio de momentos

Schwinger [11] fue el primero en obtener una expresión exacta para la función de Green en presencia de un campo magnético constante. Sin embargo, como dijimos anteriormente es más conveniente para nuestro análisis el método de Ritus [7], ya que en presencia de un campo los estados asintóticos del fermión no son ondas planas, sino funciones propias del operador $(\gamma^\mu \Pi_\mu)^2$. Trabajando en esta base de eigenfunciones el operador de masa $\hat{\mathcal{M}}$ es diagonal. Si rotamos la Ec. (5.13) a espacio de momentos, i.e.,

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4x' \bar{\Psi}_p(x) M(x, x') \Psi_{p'}(x') \\ &= -ie^2 \int d^4x d^4x' \bar{\Psi}_p(x) \gamma^\mu \sum_{n_k, s_k} \int d^2k_{\parallel} \Psi_k(x) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})} \bar{\Psi}_k(x') \gamma^\nu D_{\mu\nu}^0(x - x') \Psi_{p'}(x') \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde en la Ec. (5.13) usamos las definiciones

$$G(x, y) = \sum_{n_k, s_k} \int d^2k_{\parallel} \Psi_k(x) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})} \bar{\Psi}_k(y), \quad (5.16)$$

$$\Psi_p(x) = N \sum_{\sigma} e^{-i(p_{\parallel} \cdot x_{\parallel})} e^{i(l_p - \frac{\sigma+1}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}, s_p}(\rho) \Delta(\sigma), \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_p(x) &= \gamma^0 \Psi_p^\dagger(x) \gamma^0 \\ &= N \sum_{\sigma} e^{i(p_{\parallel} \cdot x_{\parallel})} e^{-i(l_p - \frac{\sigma+1}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}, s_p}(\rho) \Delta(\sigma)\end{aligned}\quad (5.18)$$

y

$$D_{\mu\nu}^0(x-x') = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot (x-x')}}{q^2 + i\epsilon} \Delta_{\mu\nu}^0(q) \quad (5.19)$$

con $\Delta(\sigma_p) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_p i \gamma^1 \gamma^2)$, $\Delta_{\mu\nu}^0(q) = (g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2})$ y haciendo las integrales sobre las coordenadas, tal como se muestra en el Apéndice D, Eq. (D.19) obtenemos

$$\begin{aligned}\delta_{n_p, n_{p'}} \delta_{s_p s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \Pi(n_p) \Sigma(\bar{p}) &= -ie^2 (2\pi N)^4 \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_{\mu\nu}^0}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \sum_{\sigma_p \sigma_{p'} \sigma_k \sigma_{k'}} \frac{2\pi}{2\gamma} i^{(l_k - \frac{\sigma_k+1}{2} - (l_p - \frac{\sigma_p+1}{2}))} I_{(n_k - \frac{\sigma_k+1}{2}, (n_p - \frac{\sigma_p+1}{2}))} I_{s_k, s_p}(x) \\ &\times \frac{2\pi}{2\gamma} i^{-(l_k - \frac{\sigma_{k'}+1}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'}+1}{2}))} I_{(n_k - \frac{\sigma_{k'}+1}{2}, (n_{p'} - \frac{\sigma_{p'}+1}{2}))} I_{s_k, s_{p'}}(x) \\ &\times \Delta(\sigma_p) \gamma^\mu \Delta(\sigma_k) \frac{1}{\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) - \Sigma(\bar{p} - \bar{q})} \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^\nu \Delta(\sigma_{p'})\end{aligned}\quad (5.20)$$

donde, $x = \frac{q_{\perp}^2}{4\gamma}$. De las deltas tenemos: $k_{\parallel} = p_{\parallel} - q_{\parallel}$ y $p_{\parallel} = k'_{\parallel}$.
En lo que sigue

$$(\bar{p} - \bar{q})_{\mu} = (p_0 - q_0, 0, -\sqrt{4n_k \gamma}, -(p_z - q_z)). \quad (5.21)$$

En Ec. (5.20) el factor global es:

$$-ie^2 N^4 \frac{(2\pi)^6}{(2\gamma)^2} = -ie^2 \left(\frac{2\gamma}{(2\pi)^3} \right)^2 \frac{(2\pi)^6}{(2\gamma)^2} = -ie^2. \quad (5.22)$$

Para Σ hacemos un ansatz similar al de la estructura perturbativa

$$\Sigma(\bar{p}) = \gamma \cdot \bar{p} z(\bar{p}) + \mathcal{M}(\bar{p}), \quad (5.23)$$

donde z es la renormalización de la función de onda. Teniendo en cuenta esta definición podemos describir

$$\frac{1}{\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) - \Sigma(\bar{p} - \bar{q})} = \frac{(1-z)\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) + \mathcal{M}}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2} \quad (5.24)$$

donde z y \mathcal{M} en general son funciones de $\bar{p} - \bar{q}$. Como nos interesa conocer la ecuación proporcional a \mathcal{M} , tomamos la traza sobre los índices espinoriales de la Ec. (5.20), que se reduce a calcular:

$$\begin{aligned}\text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^\mu \Delta(\sigma_k) \left((1-z)\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) + \mathcal{M} \right) \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^\nu \Delta(\sigma_{p'}) \right] \\ = \mathcal{M} \text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^\mu \Delta(\sigma_k) \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^\nu \Delta(\sigma_{p'}) \right],\end{aligned}\quad (5.25)$$

donde (ver apéndice D, Ec. (D.32))

$$\begin{aligned}\text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^\mu \Delta(\sigma_k) \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^\nu \Delta(\sigma_{p'}) \right] \Delta_{\mu\nu}^0 \\ = 4\delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} - \frac{4(1-\xi)}{q^2} \left\{ \frac{\delta_{\sigma_p \sigma_{p'}}}{2} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2} \right\} \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}}.\end{aligned}\quad (5.26)$$

Para simplificar la Ec. (5.20), hacemos $n_p = n_{p'}$ y $s_p = s_{p'}$, reemplazando estos resultados obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} I_{\left(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}, (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})\right)}^2(x) I_{s_k, s_p}^2(x) \\ &\times \frac{4\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} \\ &\times \left(1 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \frac{\delta_{\sigma_p \sigma_p}}{2} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2} \right\}\right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

si usamos la propiedad (ver apéndice D, Ec. (D.44))

$$I_{n_s}^2 = (-1)^{n-s} e^{-x} L_s^{n-s}(x) L_n^{-(n-s)}(x), \quad (5.28)$$

conseguiamos

$$\begin{aligned} \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-2x}}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} (-1)^{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}} (-1)^{s_p} \\ &\times (-1)^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}} L_{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}}^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})}(x) L_{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}}^{-\left(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})\right)}(x) \\ &\times (-1)^{s_k} L_{s_p}^{s_k - s_p}(x) L^{-(s_k - s_p)s_k}(x) \\ &\times \frac{4\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} \\ &\times \left(1 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \frac{\delta_{\sigma_p \sigma_p}}{2} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2} \right\}\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Esta es la ecuación de Schwinger-Dyson en espacio de momentos.

5.2. Suma sobre niveles de Landau

Una de las dificultades en este cálculo es hacer la suma sobre niveles de Landau sin la necesidad de hacer la expansión de campo débil o la expansión en niveles de Landau para campo fuerte. Este problema es resuelto usando técnicas similares a las del tiempo propio de Schwinger, pero con un tiempo propio imaginario asegurando la convergencia por medio de una prescripción $i\epsilon$ tal como se muestra a continuación. Algunas de las aproximaciones que usaremos en esta sección solo se pueden validar por la plausibilidad de los resultados y en algunos casos requieren una investigación adicional. La suma sobre las s_k en la Ec. (5.29) puede hacerse teniendo en cuenta la fórmula [36]

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k L_k^{m-k}(x) L_n^{k-n}(y) = A^m \left(\frac{1+A}{A}\right)^{m-n} e^{-xA} L_n^{m-n}(x+y+xA+y/A) \quad (5.30)$$

así

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{s_k} L_{s_p}^{s_k - s_p}(x) L^{-(s_k - s_p)s_k}(x) &= (-1)^{s_p} \left(\frac{1-1}{-1}\right)^0 e^x L_{s_p}^0(0) \\ &= (-1)^{s_p} e^x, \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde $A = -1$. Remplazando este resultado en Ec. (5.29) tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2ie^2 \sum_{n_k} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-2x}}{q^2 + i\epsilon} \\
 &\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} (-1)^{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}} \\
 &\times (-1)^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}} L_{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}}^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})}(x) L_{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}}^{-(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}))}(x) \\
 &\times \frac{\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} \\
 &\times \left(2 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \delta_{\sigma_p \sigma_k} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - |q_{\perp}|^2 \right\} \right), \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

donde $x = q^2/4\gamma$. Haciendo el cambio de variable $k = n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}$, resulta que k está en el intervalo: $-\frac{\sigma_k + 1}{2} \leq k < \infty$. Sin embargo, ya que $L_{-\frac{\sigma_k + 1}{2}}^l(x) = 0$ para $\sigma \pm 1$, el límite inferior de la suma sobre k es cero. Por simplicidad también definimos $m = n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}$ de forma que la expresión Ec. (5.32) resulta

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -i2e^2 \sum_{\sigma_p, \sigma_k} \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \frac{\mathcal{M}(q)}{(1-z)^2 \left\{ (q-p)_{\parallel}^2 - 2eB(k + (\sigma + 1)/2) \right\} - \mathcal{M}^2} \\
 &\times \left\{ 2 + (1-\xi)(1 - \delta_{\sigma_p \sigma_k}) \frac{q_{\perp}^2}{q^2} - (1-\xi)\delta_{\sigma_p \sigma_k} \frac{q_{\parallel}^2}{q^2} \right\} \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2}{4\gamma}\right) (-1)^{-m} \\
 &\times (-1)^k L_m^{k-m} \left(\frac{q_{\perp}^2}{4\gamma}\right) L_k^{-(k-m)} \left(\frac{q_{\parallel}^2}{4\gamma}\right). \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

Si usamos la identidad

$$\frac{1}{x} = -i \int_0^{\infty} \exp(is(x + i\epsilon)) \tag{5.34}$$

podemos sumar sobre k usando nuevamente la Ec. (5.30). La suma sobre las σ es inmediata (ver en el apéndice E el desarrollo previo a la Ec. E.9).

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2e^2 \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 + i\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
 &\times \exp \left[i \left((1-z)^2 \left\{ (2\sqrt{\gamma}Q - p)_{\parallel}^2 \right\} - \mathcal{M}^2 + i\epsilon \right) \frac{\tau}{2eB(1-z)^2} \right] \\
 &\times \exp(-Q_{\perp}^2 (1 - \exp(-i\tau))) \\
 &\times \left[\left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-in_p\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-in_p\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right. \\
 &\left. + \left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-i(n_p+1)\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-i(n_p-1)\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right], \tag{5.35}
 \end{aligned}$$

donde $Q = \frac{q}{2\sqrt{\gamma}}$ y $\tau = 4\gamma s$. Esta es la ecuación integral para la función de masa en el espacio de Minkowski. Si en la Ec. (5.35) rotamos los momentos al espacio euclídeo y usamos el teorema de

Cauchy para describir la integral en τ tal como se muestra en el desarrollo previo a la Ec. (E.13) del Apéndice E, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= 2e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
&\times \exp \left[-\frac{\left((1-z)^2 (2\sqrt{\gamma}Q - p)_\parallel^2 + \mathcal{M}^2 + i\varepsilon \right)}{2eB(1-z)^2} \tau \right] \\
&\times \exp(-Q_\perp^2 (1 - \exp(-\tau))) \\
&\times \left[\left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-n_p \tau) L_{n_p}^0 + \exp(-n_p \tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right. \\
&\left. + \left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-(n_p+1)\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-(n_p-1)\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right]. \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Tomando $n_p = 0$ en el lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos $\text{tr}[\Pi(n_p)] = \text{tr}[\Delta(-1)] = 2$ y del lado derecho $L_0^0 = 1$, de forma que después del cambio de variable

$$x = \exp(-\tau), \quad dx = -\exp(-\tau)d\tau \Rightarrow \tau = -\frac{dx}{x}, \quad x \in (1, 0),$$

conseguimos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{e^2}{(1-z)^2} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^1 dx \frac{x^\alpha}{x} \exp(-Q_\perp^2 (1-x)) \\
&\times \left[\left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} + \left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} \right\} x \right] \\
&\equiv \frac{e^2}{(1-z)^2} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^1 dx x^{\alpha-1} \exp(-Q_\perp^2 (1-x)) [f + gx], \quad (5.37)
\end{aligned}$$

donde $f = 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2}$, $g = 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2}$, $\alpha = \left[(Q-p)_\parallel^2 + \frac{\mathcal{M}^2}{2eB(1-z)^2} \right]$ y $\mathcal{M} = \mathcal{M}[\left(\frac{p}{4\gamma} - Q\right)_\parallel]$.

5.3. Integrales angulares

Una vez hecha la suma sobre niveles de Landau para campos de intensidad arbitraria, aparece un problema que en la práctica es más desafiante, escribir la ESD de forma que aparezcan máximo dos integrales. Para esto es necesario hacer tres integrales analíticas en forma consecutiva. En este problema siempre es posible hacer las dos primeras integrales sin importar el orden de integración, sin embargo, la integral que se deja para el final resulta muy complicada. Esto es resuelto tomando un orden conveniente de integración y usando una aproximación que toma en cuenta la suave dependencia que tiene el kernel de la ecuación integral respecto al momento externo. Para hacer estas integrales asumimos que la función de masa sólo depende de los momentos paralelos al campo magnético. Para ilustrar el cálculo trabajamos en la norma de Feynman, $\xi = 1$. Aquí resulta útil hacer el cambio de variable $Q \rightarrow Q + p_\parallel/\sqrt{4\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(p_\parallel/\sqrt{4\gamma}\right) &= e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}(Q_\parallel)}{(Q + p_\parallel)^2} \\
&\times \int_0^1 dx x^\lambda e^{-Q_\perp^2 (1-x)} 2(1+x), \quad (5.38)
\end{aligned}$$

donde $\lambda = Q_{\parallel}^2 + \frac{\mathcal{M}^2(Q_{\parallel})}{4\gamma} - 1$. Para hacer las integrales angulares escribimos $d^4Q = d^2Q_{\perp} d^2Q_{\parallel} = \frac{\pi}{2} dQ_{\perp}^2 dQ_{\parallel}^2 d\theta$, donde θ es el ángulo entre Q_{\parallel} y p_{\parallel} . En lo que sigue, asumimos que la función de masa sólo depende de la magnitud de su argumento, de forma que la integral angular pueda hacerse analíticamente, tal como se muestra en detalle en el apéndice F, para conseguir la Ec. (F.9). Allí obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_{\parallel}/\sqrt{4\gamma}) &= \frac{e^2}{2(2\pi)^2} \int_0^1 dx [1+x] \int dQ_{\parallel}^2 x^{\lambda} \mathcal{M}(Q_{\parallel}) \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{dQ_{\perp}^2 e^{-Q_{\perp}^2(1-x)}}{\sqrt{\left[Q_{\parallel}^2 - \frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}\right]^2 + 2Q_{\perp}^2 \left[\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\parallel}^2\right] + Q_{\perp}^4}}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ahora aproximamos el argumento de la raíz cuadrada en el denominador por intervalos. Para $p_{\parallel}^2/4\gamma \geq Q_{\parallel}^2$ hacemos $\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\parallel}^2 \sim \frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}$. De modo similar, para $Q_{\parallel}^2 \geq p_{\parallel}^2/4\gamma$ hacemos $\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\parallel}^2 \sim Q_{\parallel}^2$. Gracias a esta aproximación podemos hacer la integral sobre Q_{\perp} (ver detalles anteriores a la Ec. (F.13)), resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_{\parallel}/\sqrt{4\gamma}) &= \frac{e^2}{2(2\pi)^2} \int_0^1 dx [1+x] x^{\lambda} \mathcal{M}(Q_{\parallel}) \\ &\times \left\{ \int_0^{\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}} dQ_{\parallel}^2 \exp\left[(1-x)\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}\right] \Gamma\left[0, (1-x)\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}\right] \right. \\ &\left. + \int_{\frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}}^{\infty} dQ_{\parallel}^2 \exp\left[(1-x)Q_{\parallel}^2\right] \Gamma\left[0, (1-x)Q_{\parallel}^2\right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde $\Gamma(x, y)$ es la función gamma incompleta. Es importante tener en cuenta que para llegar a la Ec. (5.40) no hemos asumido nada respecto a la intensidad del campo magnético.

5.4. Campo fuerte

Para comparar nuestros resultados con los de la literatura necesitamos la ecuación integral para la función de masa en la aproximación del nivel más bajo de Landau. De la ecuación Ec. (50) en [4] tenemos:

$$\mathcal{M}(p_{\parallel}) \simeq e^2 4|eB| \int \frac{d^4\hat{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}^2} \quad (5.41)$$

$$\times \frac{\mathcal{M}(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + \mathcal{M}^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})}, \quad (5.42)$$

donde $\hat{q}_{\perp}^2 = \frac{q_{\perp}^2}{2eB}$. Hacemos el cambio de variable $q'_{\parallel} = p_{\parallel} - q_{\parallel}$ y $q'_{\perp} = q_{\perp}$ de forma que

$$\mathcal{M}(p_{\parallel}) \simeq 2e^2 \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\frac{q'^2}{4\gamma}}}{(p - q')^2} \frac{\mathcal{M}(q'_{\parallel})}{q'^2 + \mathcal{M}^2(q'_{\parallel})}, \quad (5.43)$$

aquí

$$\begin{aligned} (p - q')^2 &= (p_{\parallel} - q'_{\parallel})^2 + q'^2_{\perp} \\ &= p_{\parallel}^2 - 2|p| |q'_{\parallel}| \cos\theta + q'^2_{\parallel} + q'^2_{\perp}. \end{aligned}$$

En coordenadas esféricas

$$\mathcal{M}(p_{\parallel}) \simeq \frac{2e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{2} 2\pi dq_{\perp}^2 \frac{1}{2} d\theta dq_{\parallel}^2 \quad (5.44)$$

$$\times \frac{e^{-\frac{q_{\perp}^2}{4\gamma}}}{p_{\parallel}^2 - 2|p_{\parallel}||q_{\parallel}| \cos \theta + q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} \frac{\mathcal{M}(q_{\parallel})}{q_{\parallel}^2 + \mathcal{M}^2(q_{\parallel})}, \quad (5.45)$$

con

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p_{\parallel}^2 - 2|p_{\parallel}||q_{\parallel}| \cos \theta + q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} \\ = \frac{2\pi}{\sqrt{[(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + q_{\perp}^2][(p_{\parallel} + q_{\parallel})^2 + q_{\perp}^2]}}. \quad (5.46)$$

Remplazando este resultado obtenemos

$$\mathcal{M}(p_{\parallel}) = \frac{e^2}{2(2\pi)^2} \int dq_{\parallel}^2 dq_{\perp}^2 \frac{\mathcal{M}(q_{\parallel})}{q_{\parallel}^2 + \mathcal{M}^2(q_{\parallel})} \\ \times \frac{e^{-\frac{q_{\perp}^2}{4\gamma}}}{\sqrt{[(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + q_{\perp}^2][(p_{\parallel} + q_{\parallel})^2 + q_{\perp}^2]}}. \quad (5.47)$$

Si aproximamos por intervalos y después hacemos la integral sobre $q_{\perp}/4\gamma$, al igual que en la sección anterior, obtenemos

$$\mathcal{M}(p_{\parallel}) = \frac{e^2}{2(2\pi)^2} \left\{ \int_0^{p^2} dq_{\parallel}^2 \frac{\mathcal{M}(q_{\parallel})}{q_{\parallel}^2 + \mathcal{M}^2(q_{\parallel})} e^{\frac{q_{\parallel}^2}{4\gamma}} \Gamma\left[0, \frac{p_{\parallel}^2}{4\gamma}\right] \right. \\ \left. + \int_{p^2}^{\infty} dq_{\parallel}^2 \frac{\mathcal{M}(q_{\parallel})}{q_{\parallel}^2 + \mathcal{M}^2(q_{\parallel})} e^{\frac{q_{\parallel}^2}{4\gamma}} \Gamma\left[0, \frac{q_{\parallel}^2}{4\gamma}\right] \right\}. \quad (5.48)$$

5.5. Resultados numéricos

Las soluciones numéricas para la masa generada dinámicamente, como función de la intensidad de la constante de acoplamiento y de la intensidad del campo magnético, que se obtienen de las Ecs. (5.48) y (5.40), se muestran en las figuras 5.2-5.3. Nosotros tomamos como la masa generada dinámicamente el valor de la función de masa a momento cero, por las razones que presentamos en el capítulo uno. En la figura 5.1 se muestra un criterio para distinguir entre el régimen de campo débil y campo fuerte. Allí se muestra la región de parámetros donde no es válida LLL y por tanto es necesario sumar sobre todos los niveles de Landau. En la figura 5.2 graficamos las soluciones a las Ecs. (5.48) y (5.40) como función del campo magnético. Esta figura muestra que para campos magnéticos fuertes, i.e, $eB \sim \Lambda^2$, las soluciones que incluyen solo el nivel mas bajo de Landau y las soluciones incluyendo todos los niveles, son prácticamente idénticas. Esto confirma los resultados que se basan en la aproximación del nivel mas bajo de Landau para este régimen de campo magnético. En la figura 5.3 graficamos las soluciones a las Ecs. (5.48) y (5.40) como función de la constante de acoplamiento. Allí se puede ver que para el régimen de acoplamiento fuerte, comparado con la constante de acoplamiento crítica en el vacío $\alpha_c = \pi/4$, la solución con todos los niveles de Landau es varios órdenes de magnitud mayor que la solución con sólo el primer nivel de Landau, esto es de esperarse ya que en este régimen hay masa generada dinámicamente por efecto del acoplamiento y por tanto los demás niveles tienen un efecto considerable, en particular aquellos

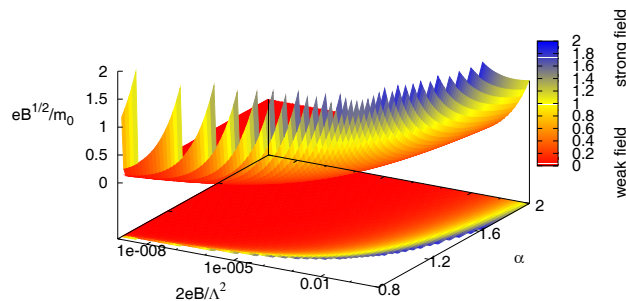


Figura 5.1: Intensidad relativa del campo magnético \sqrt{eB}/m_0 , donde m_0 es la masa dinámica en el vacío, como una función de la constante de acoplamiento α y del parámetro $2eB/\Lambda^2$. La intensidad relativa sólo se puede estudiar para $\alpha > \alpha_c = \pi/4$ donde $m_0 \neq 0$. Hacia el amarillo y el azul, estamos en el régimen de campo magnético fuerte y hacia el rojo, débil.

niveles con energías del mismo orden al de la masa generada dinámicamente. Es muy importante notar que no existe una constante de acoplamiento crítica como en el vacío, sin embargo, hay una supresión de varios órdenes de magnitud en la masa generada para valores del acoplamiento ligeramente menores a la constante de acoplamiento crítica del vacío. En la figura 5.4 graficamos la masa dinámica como función de la intensidad del campo magnético en el régimen de acoplamiento fuerte. Se puede ver que la masa dinámica es prácticamente independiente del campo magnético en este régimen o lo que es igual $\mathcal{M}/\Lambda^2 \sim c_0$, donde c_0 sólo depende ligeramente del acoplamiento, este resultado es similar al del vacío donde es necesario definir un acoplamiento que dependa de la escala de momento, como vimos en el capítulo uno, para evitar que $\mathcal{M} \sim \Lambda^2$ [26]. Ya que nosotros no hacemos ese tipo de escalamientos los resultados deben ser proporcionales al corte. La figura 5.2 muestra que el primer nivel de Landau es el que más contribuye en el régimen de acoplamientos débiles, tal como se afirma en la literatura.

En resumen: conseguimos reproducir los ya bien conocidos resultados de campo fuerte, en particular la dependencia de la masa generada dinámicamente con el campo magnético, i.e., $\mathcal{M} \sim \sqrt{eB}$. Al incrementar la constante de acoplamiento logramos ver como desaparece cualquier dependencia de la masa dinámica con el campo magnético y a la vez aparece una dependencia con el corte de momentos. Estos resultados son plausibles y están de acuerdo con los cálculos anteriores en estos regímenes de intensidad de campo y constante de acoplamiento, convirtiéndose de esta manera en una validación indirecta de nuestras aproximaciones. Uno de los resultados importantes de nuestro trabajo es que, a diferencia del vacío, en presencia de campos magnéticos no encontramos criticalidad. Estos resultados pueden tener consecuencias cosmológicas, por ejemplo, en el estudio de la transición de fase electrodébil. Es importante tener en cuenta que la presencia de campos hipermagnéticos hace que la transición de fase sea más de primer orden [37], si a esto se le suma la modificación del vacío por efectos dinámicos el efecto total puede ser relevante para la bariogénesis.

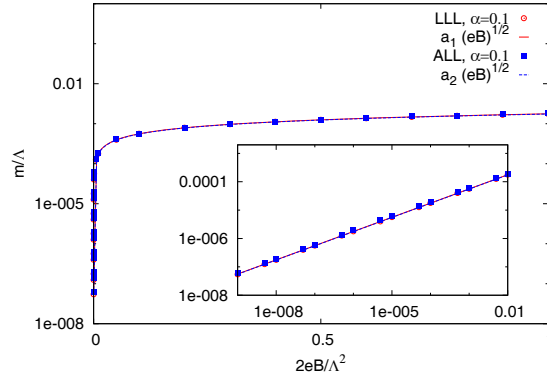


Figura 5.2: Masa generada dinámicamente vs la intensidad del campo $\frac{2eB}{\Lambda^2}$ para $\alpha = 0.1$. Puntos azules corresponden a la solución con todos niveles de Landau, $M(0) = 0.001766x^{0.5}$. Puntos rojos corresponden a tener en cuenta sólo el primer nivel de Landau, $M(0) = 0.0017646x^{0.5}$. Vemos que para este régimen de parámetros $M(0) \sim \sqrt{eB}$

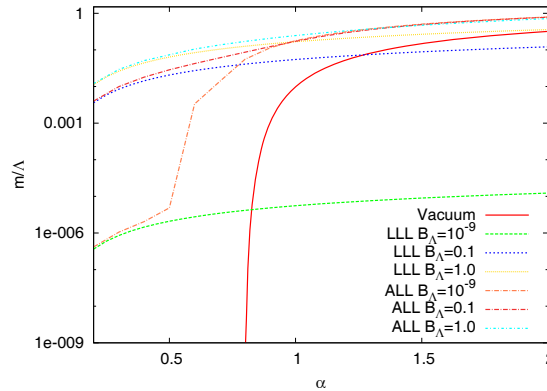


Figura 5.3: Masa generada dinámicamente vs la constante de acoplamiento α . Cada par de curvas corresponde a la solución incluyendo todos los niveles de Landau e incluyendo sólo el primer de Landau respectivamente, para intensidades de campo $\frac{2eB}{\Lambda^2} = 1.0, 10^{-1}, 10^{-9}$. Es importante notar que para acoplamientos débiles es suficiente con el primer nivel de Landau, sin embargo, para acoplamientos fuertes la solución con todos los niveles difiere por varios órdenes respecto la solución con un solo nivel.

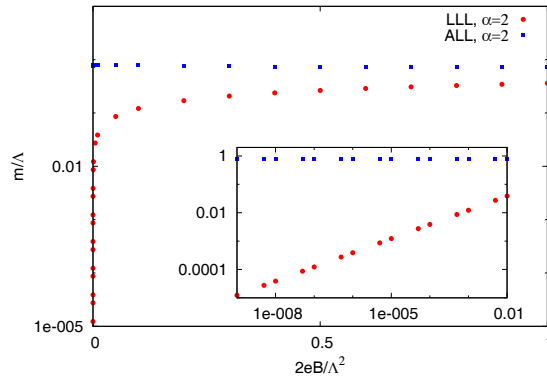


Figura 5.4: Masa generada dinámicamente vs la intensidad del campo $\frac{2eB}{\Lambda^2}$ para $\alpha = 2$. Puntos azules y rojos corresponden a la solución incluyendo todos los niveles de Landau e incluyendo sólo el primer de Landau respectivamente

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la generación dinámica de masas en presencia de campos magnéticos de intensidad y acoplamiento arbitrarios. Para esto fue necesario rotar las ESD a espacio de momentos usando el formalismo de Ritus. Se introdujo este formalismo para evitar complicaciones técnicas relacionadas con la fase que aparece en el formalismo alterno de Schwinger. En el formalismo de Ritus se usa una base de ondas planas para los momentos paralelos al campo magnético y una base discreta para los momentos transversos. En esta base el operador de masa es diagonal permitiendo una gran simplificación de las expresiones. Una de las dificultades al comienzo del cálculo es hacer la suma sobre niveles de Landau sin la necesidad de hacer la expansión de campo débil o la expansión en niveles de Landau para campo fuerte. Esta problema fué resuelto usando técnicas similares a las del tiempo propio de Schwinger, pero con un tiempo propio imaginario asegurando la convergencia por medio de una prescripción $i\epsilon$ tal como se muestra en la sección 5.2. Una vez hecha la suma sobre niveles de Landau para campos de intensidad arbitraria, aparece un problema que en la práctica es más desafiante, escribir la ESD de forma que aparezcan máximo dos integrales. Para esto es necesario hacer tres integrales analíticas en forma consecutiva. En este problema siempre es posible hacer las dos primeras integrales sin importar el orden de integración, sin embargo, la integral que se deja para el final resulta muy complicada. Esto fué resuelto tomando un orden conveniente de integración y usando una aproximación que toma en cuenta la suave dependencia que tiene el kernel de la ecuación integral respecto al momento externo. Para hacer estas integrales asumimos que la función de masa sólo depende de los momentos paralelos al campo magnético. Estas aproximaciones se pueden validar únicamente por la plausibilidad de los resultados.

Las ESD que resultan del procedimiento descrito en el párrafo anterior, fueron resueltas numéricamente usando un programa en Mathematica [38] que usa una técnica auto-consistente para resolver la ecuación integral. Empleando esto conseguimos reproducir los ya bien conocidos resultados de campo fuerte, en particular la dependencia de la masa generada dinámicamente con el campo magnético, i.e., $\mathcal{M} \sim \sqrt{eB}$. Al incrementar la constante de acoplamiento logramos ver como desaparece cualquier dependencia de la masa dinámica con el campo magnético y a la vez aparece una dependencia con el corte de momentos. Estos resultados son plausibles y están de acuerdo con los cálculos anteriores en estos regímenes de intensidad de campo y constante de acoplamiento, convirtiéndose de esta manera en una validación indirecta de nuestras aproximaciones.

Uno de los resultados importantes de nuestro trabajo es que, a diferencia del vacío, en presencia de campos magnéticos no encontramos criticalidad, es decir, la masa puede ser generada para acoplamientos arbitrariamente pequeños. Este resultado puede tener implicaciones profundas ya que en el universo temprano es probable que existiera un régimen de campo medio y acoplamiento débil donde la generación dinámica de masas tendría lugar. Generalmente la masa generada dinámicamente por efecto de campos magnéticos no es relevante en las partículas del modelo estándar, esto

se debe a que las correcciones dinámicas están suprimidas por la magnitud de la masa del fermión [39]. Sin embargo, antes de la transición de fase electrodébil (TFE) los fermiones del modelo estándar son no masivos. Como ya mencionamos anteriormente, este resultado puede tener implicaciones en la TFE ya que hay razones para pensar en la existencia de campos hipermagnéticos en el universo temprano [16, 17]. Además dado que el Higgs, que es una partícula con hipercarga y masa cero en el universo temprano, es quien regula la TFE, es probable que el orden de la transición misma se vea afectada por la GDM [37].

Otro lugar donde pueden ser relevantes nuestras técnicas y resultados es en el contexto de colisiones de iones pesados relativistas. Recientemente se ha propuesto que campos magnéticos intensos pueden afectar los observables en colisiones no centrales de iones pesados en RHIC, en Brookhaven y en el LHC, dando una posible señal de existencia de dominios en el plasma de quarks y gluones donde se viola CP [40, 41, 42]. Si este es el caso se esperan campos del orden de $6m_\pi^2 \sim 10^{19}$ Gauss [43].

Estas referencias muestran que el tema desarrollado en esta tesis no sólo es de interés académico, sino que puede ser relevante para analizar algunos de los problemas fundamentales de la física en este momento.

Apéndice A

Funciones propias del operador de masa

En la representación quiral las matrices de Dirac son:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

El vector potencial y la derivada covariante para un campo magnético en la dirección z están dados por

$$A^\mu = B(0, -y/2, x/2, 0), \quad \Pi_\mu \equiv i\partial_\mu + e_0 A_\mu. \quad (\text{A.2})$$

En general asumimos que $e_0 \geq 0$ y $B \geq 0$. Con estas definiciones podemos construir explícitamente el operador

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \Pi &= \gamma^0 i\partial_t + i\gamma^3 \partial_z + \gamma^1 (i\partial_x + e_0 A_x) + \gamma^2 (i\partial_y + e_0 A_y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} i\partial_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} i\partial_z \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(i\partial_x + \frac{e_0 B}{2} y \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(i\partial_y - \frac{e_0 B}{2} x \right). \quad (\text{A.4})$$

De la definición,

$$\Psi = \sum_{\sigma=\pm 1} N e^{(E_p t - p_z z)} e^{(l_p - \frac{\sigma+1}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}, s_p}(\rho) \Delta(\sigma), \quad (\text{A.5})$$

podemos hacer el replazo

$$i\partial_t \longrightarrow E, \quad i\partial_z \longrightarrow -p_z. \quad (\text{A.6})$$

Los términos transversales son algo más complicados

$$\gamma^1 \Pi_x + \gamma^2 \Pi_y = \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(i(\partial_x - i\partial_y) + \frac{e_0 B}{2}(y + ix)\right) \\ 0 & 0 & \left(i(\partial_x + i\partial_y) + \frac{e_0 B}{2}(y - ix)\right) & 0 \\ 0 & -\left(i(\partial_x - i\partial_y) + \frac{e_0 B}{2}(y + ix)\right) & 0 & 0 \\ -\left(i(\partial_x + i\partial_y) + \frac{e_0 B}{2}(y - ix)\right) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Pi_- \\ 0 & 0 & \Pi_+ & 0 \\ 0 & -\Pi_- & 0 & 0 \\ -\Pi_+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

donde $\Pi_- \equiv i(\partial_x - i\partial_y) + \frac{e_0 B}{2}(y + ix)$ y $\Pi_+ \equiv i(\partial_x + i\partial_y) + \frac{e_0 B}{2}(y - ix)$. En la Ref. [34] trabajan con el operador

$$\mathbf{P} = -i\vec{\nabla} + e_0 \mathbf{A} \quad (\text{A.10})$$

donde $\mathbf{A} = (-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0)$ y sus componentes satisfacen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \pm i\mathbf{P}_y &= -\left(i\partial_x + \frac{e_0 B}{2}y\right) \pm -i\left(i\partial_y - \frac{e_0 B}{2}x\right) \\ &= -i(\partial_x \pm i\partial_y) - \frac{e_0 B}{2}(y \mp ix) \\ &= -\Pi_{\pm} = -ie^{\pm i\phi}(\partial_r \pm \frac{i}{r}\partial_{\phi} \mp \gamma r), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

aquí usamos la Ec. (19.55) de la Ref. [34] y definimos $\gamma \equiv \frac{e_0 B}{2}$. Haciendo el cambio de variables.

$$\rho = \gamma r^2, \quad \partial_r = \sqrt{4\gamma\rho}\partial_{\rho} \quad (\text{A.12})$$

y teniendo en cuenta que

$$i\partial_{\phi}e^{i\phi} = -le^{i\phi}, \quad (\text{A.13})$$

conseguimos

$$\begin{aligned} \Pi_+ e^{i\phi} &= ie^{i\phi}\sqrt{\gamma\rho}(2\partial_{\rho} - \frac{l}{\rho} - 1)e^{i\phi} \equiv ie^{i\phi}\mathbf{R}_{1l} \\ \Pi_- e^{i\phi} &= ie^{-i\phi}\sqrt{\gamma\rho}(2\partial_{\rho} + \frac{l}{\rho} + 1)e^{i\phi} \equiv ie^{-i\phi}\mathbf{R}_{2l}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Usando las identidades 19.64 de la Ref. [34]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1l-1}I_{n-1,s} &= \sqrt{\gamma\rho}(2\partial_{\rho} - \frac{l-1}{\rho} - 1)I_{n-1,s} = -\sqrt{4n\gamma}I_{n,s}, \\ \mathbf{R}_{2l}I_{n,s} &= \sqrt{\gamma\rho}(2\partial_{\rho} - \frac{l}{\rho} - 1)I_{n-1,s} = \sqrt{4n\gamma}I_{n-1,s}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \Pi_+ e^{i(l-1)\phi}I_{n-1,s} &= ie^{i\phi}e^{i(l-1)\phi}\mathbf{R}_{1l-1}I_{n-1,s} = -i\sqrt{4n\gamma}e^{i\phi}I_{n,s} \\ \Pi_- e^{i\phi}I_{n,s} &= ie^{-i\phi}e^{i\phi}\mathbf{R}_{2l}I_{n,s} = i\sqrt{4n\gamma}e^{i(l-1)\phi}I_{n-1,s}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Remplazando estos resultados en $\gamma \cdot \Pi_{\perp} \Psi$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& (\gamma^1 \Pi_1 + \gamma^2 \Pi_2) \Psi = \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Pi_- \\ 0 & 0 & \Pi_+ & 0 \\ 0 & -\Pi_- & 0 & 0 \\ -\Pi_+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i(l-1)\phi} I_{n-1,s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{il\phi} I_{n,s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(l-1)\phi} I_{n-1,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{il\phi} I_{n,s} \end{pmatrix} \\
& = i\sqrt{4n\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i(l-1)\phi} I_{n-1,s} \\ 0 & 0 & -e^{il\phi} I_{n,s} & 0 \\ 0 & -e^{i(l-1)\phi} I_{n-1,s} & 0 & 0 \\ e^{il\phi} I_{n,s} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& = i\sqrt{4n\gamma} \begin{pmatrix} e^{i(l-1)\phi} I_{n-1,s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{il\phi} I_{n,s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(l-1)\phi} I_{n-1,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{il\phi} I_{n,s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Es fácil ver que esta expresión es proporcional a γ^2 . De

$$i\sigma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

podemos reescribir la Ec. (A.17) como

$$\gamma^1 \Pi_1 + \gamma^2 \Pi_2 \Psi = -\sqrt{4n\gamma} \Psi \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{4n\gamma} \Psi \gamma^2, \quad (\text{A.19})$$

teniendo en cuenta este resultado y (A.6), finalmente conseguimos

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot \Pi \Psi &= (\gamma^0 E_p - \gamma^3 p_z + \gamma^1 \Pi_1 + \gamma^2 \Pi_2) \Psi \\
&= \Psi (\gamma^0 E_p - \gamma^3 p_z + \gamma^1 0 - \sqrt{4n\gamma} \gamma^2) \\
&= \Psi \bar{p} \cdot \gamma, \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que γ^0 y γ^3 conmutan con Ψ , y definimos

$$\bar{p}_{\mu} = (E_p, 0, -\sqrt{4n\gamma}, -p_z). \quad (\text{A.21})$$

De estas expresiones tenemos que

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 \Psi = \Psi (\bar{p} \cdot \gamma)^2 = \bar{p}^2 \Psi \quad (\text{A.22})$$

con $p^2 = E_p^2 - p_z^2 - 4\gamma n$.

Apéndice B

Normalización de las funciones propias del operador de masa

Nuestro propósito es mostrar, salvo una constante de normalización, que

$$\int d^4x \bar{\Psi}_p(x) \Psi_{p'}(x) = \delta_{n_p n_{p'}} \delta_{s_p s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \Pi(n_p), \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\Pi(n_p) = \begin{cases} 1, & \text{si } n_p \neq 0 \\ \Delta(\sigma = 1), & \text{si } n_p = 0. \end{cases}$$

De la definición de $\bar{\Psi}_p(x)$, Ec. (5.5), tenemos

$$\begin{aligned} & \int d^4x \bar{\Psi}_p(x) \Psi_{p'}(x) \\ &= \int d^4x \gamma^0 \left(\sum_{\sigma=\pm 1} \psi_{p\sigma} \Delta(\sigma) \right)^\dagger \gamma^0 \sum_{\sigma'=\pm 1} \psi_{p'\sigma'} \Delta(\sigma') \\ &= \int r dr d\phi dz \sum_{\sigma\sigma'=\pm 1} \psi_{p\sigma}^* \Delta(\sigma) \psi_{p'\sigma'} \Delta(\sigma') \\ &= \int \frac{1}{2\gamma} d\rho d\phi dz \sum_{\sigma\sigma'=\pm 1} N e^{i(E_p - p_z z)t} e^{-i(l_p - \frac{1+\sigma}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}, s_p}(\rho) \Delta(\sigma) \\ & \quad \times N e^{-i(E_{p'} - p'_z z)t} e^{i(l_{p'} - \frac{1+\sigma'}{2})\phi} I_{n_{p'} - \frac{\sigma'+1}{2}, s_{p'}}(\rho) \Delta(\sigma') \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{N^2}{2\gamma} \sum_{\sigma} 2\pi \delta(E_p - E_{p'}) 2\pi \delta(p_z - p'_z) 2\pi \delta_{l_p l_{p'}} \Delta(\sigma_k) \begin{cases} 1, & \text{si } n_p - \frac{\sigma+1}{2} \geq 0 \\ 0, & \text{si } n_p - \frac{\sigma+1}{2} < 0, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

donde usamos $\Delta^\dagger = \Delta$, γ^0 conmuta con $\Delta(\sigma)$, $\Delta(\sigma)\Delta(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}\Delta(\sigma)$, $\rho = \gamma r^2$, y

$$\int d\rho I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}}(\rho) I_{n_{p'} - \frac{\sigma'+1}{2}, s_{p'}}(\rho) = \begin{cases} \delta_{n_p n_{p'}} \delta_{s_p s_{p'}}, & \text{si } n_p - \frac{\sigma+1}{2} \geq 0 \\ 0, & \text{si } n_p - \frac{\sigma+1}{2} < 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Por último hacemos la suma sobre las $\sigma' s$, teniendo en cuenta la relación de completitud

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \Delta(\sigma) = 1, \tag{B.5}$$

consiguiendo

$$\int d^4x \bar{\Psi}_p(x) \Psi_{p'}(x) = \frac{(2\pi)^3 N^2}{2\gamma} \delta_{n_p n_{p'}} \delta_{s_p s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \begin{cases} 1, & \text{si } n_p \neq 0 \\ \Delta(\sigma = 1), & \text{si } n_p = 0 \end{cases}$$

Apéndice C

Propagador del fermión en espacio de momentos

La transformada de Fourier del propagador del fermión, $\mathcal{G}(\bar{k})$, se define implícitamente como

$$G(x, y) = \sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \Psi_k(x) \mathcal{G}(\bar{k}) \bar{\Psi}_k(y), \quad (\text{C.1})$$

reemplazando esta definición en la definición de la función de Green de dos puntos

$$\gamma \cdot \Pi(x) G(x, y) - \int d^4 x' M(x, x') G(x', y) = \delta^4(x - y) \quad (\text{C.2})$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \gamma \cdot \Pi(x) \Psi_k(x) \mathcal{G}(\bar{k}) \bar{\Psi}_k(y) - \sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \int d^4 x' M(x, x') \Psi_k(x') \mathcal{G}(\bar{k}) \bar{\Psi}_k(y) \\ = \sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \Psi_k(x) \bar{\Psi}_k(y), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde usamos las relaciones:

$$\sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \Psi_k(x) \bar{\Psi}_k(y) = \delta^4(x - y), \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma \cdot \Pi \Psi_k(x) = \Psi_k(x) \bar{k} \cdot \gamma \quad (\text{C.5})$$

y

$$\int d^4 x' M(x, x') \Psi_k(x') \equiv \Sigma(\bar{k}) \Psi_k(x), \quad (\text{C.6})$$

conseguiamos

$$\sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_{\parallel} \Psi_k(x) \left(\gamma \cdot \bar{k} \mathcal{G}(\bar{k}) - \Sigma(\bar{k}) \mathcal{G}(\bar{k}) - 1 \right) \bar{\Psi}_k(y). \quad (\text{C.7})$$

Para obtener la forma del propagador, es necesario tener en cuenta que

$$\Psi_k \Pi(n_k) = \Psi_k, \quad (\text{C.8})$$

donde

$$\Pi(n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } n > 0 \\ \Delta(\sigma = -1) & \text{para } n = 0, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

el resultado es claro para $n_k > 0$, para $n_k = 0$ el resultado se tiene de: $\Psi(n_k = 0) \sim \Delta(-1)$, y de $\Delta(-1)^2 = \Delta(-1)$. Por tanto podemos introducir potencias de $\Pi(n)$ arbitrariamente en la Ec. (C.7). Esto hace nuestro resultado no unívocamente definido en espacio de momentos. Si deseamos analizar ambigüedades, la forma más general de la posible solución satisface:

$$\left(\Pi(n_k)^r \gamma \cdot \bar{k} \mathcal{G}(\bar{k}) \Pi(n_k)^s - \Pi(n_k)^t \Sigma(\bar{k}) \mathcal{G}(\bar{k}) \Pi(n_k)^u - \Pi(n_k)^w \right) = 0, \quad (\text{C.10})$$

es útil tener en cuenta que $\Pi(n)$ no tiene inversa ya que $\Delta(\sigma)$ no tiene. Si deseamos despejar \mathcal{G} esto reduce nuestra ecuación a

$$\left(\gamma \cdot \bar{k} \mathcal{G}(\bar{k}) - \Sigma(\bar{k}) \mathcal{G}(\bar{k}) - \Pi(n_k)^w \right) = 0, \quad (\text{C.11})$$

como $\Pi(n)^2 = \Pi(n)$, es suficiente tomar la primera potencia, $w = 1$, así

$$\mathcal{G}(\bar{k}) = \frac{\Pi(n_k)}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})}. \quad (\text{C.12})$$

Como ya mencionamos anteriormente, en nuestro caso siempre podemos aplicar $\Pi(n_k)$ a Ψ_k , de forma que es indiferente usar esta expresión o la expresión

$$\mathcal{G}(k) = \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})}. \quad (\text{C.13})$$

Apéndice D

Ecuación de Schwinger-Dyson en espacio de momentos

Tenemos la ecuación de Schwinger-Dyson en espacio de coordenadas

$$M(x, x') = -ie^2 \gamma^\mu G(x, x') \gamma^\nu D_{\mu\nu}^0(x - x'), \quad (\text{D.1})$$

la forma de rotar esta expresión a espacio de momentos es:

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4x' \bar{\Psi}_p(x) M(x, x') \Psi_{p'}(x') &= \int d^4x \bar{\Psi}_p(x) \Psi_{p'}(x) \Sigma(\bar{p}') \\ &= \delta_{n_p n_{p'}} \delta_{s_p s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \Pi(n_p) \Sigma(\bar{p}), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

donde usamos Ec. (5.12), y postulamos

$$\int d^4x' M(x, x') \Psi_{p'}(x') = \Psi_{p'}(x) \Sigma(\bar{p}'). \quad (\text{D.3})$$

De igual modo procedemos en lado derecho de la Ec. (D.1)

$$\int d^4x d^4x' \bar{\Psi}_p(x) \gamma^\mu \sum_{n_k, s_k} \int d^2k_{\parallel} \Psi_k(x) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})} \bar{\Psi}_k(x') \gamma^\nu D_{\mu\nu}^0(x - x') \Psi_{p'}(x'). \quad (\text{D.4})$$

Teniendo en cuenta que

$$D_{\mu\nu}^0(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot (x-x')}}{q^2 + i\epsilon} \Delta_{\mu\nu}^0(q), \quad (\text{D.5})$$

$$\Psi_p(x) = N \sum_{\sigma} e^{-i(p_{\parallel} \cdot x_{\parallel})} e^{i(l_p - \frac{\sigma+1}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}, s_p}(\rho) \Delta(\sigma), \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_p(x) &= \gamma^0 \Psi_p^\dagger(x) \gamma^0 \\ &= N \sum_{\sigma} e^{i(p_{\parallel} \cdot x_{\parallel})} e^{-i(l_p - \frac{\sigma+1}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma+1}{2}, s_p}(\rho), \Delta(\sigma) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

y reemplazando estos resultados en la Ec. (D.1) conseguimos

$$\begin{aligned}
 \delta_{n_p, n_{p'}} \delta_{s_p, s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \Pi(n_p) \Sigma(\bar{p}) &= -ie^2 \int d^4x d^4x' \sum_{n_k, s_k} d^2k_{\parallel} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot (x-x')}}{q^2 + i\epsilon} \Delta_{\mu\nu}^0(q) \\
 &\times N \sum_{\sigma_p} e^{i(p_{\parallel} \cdot x_{\parallel})} e^{-i(l_p - \frac{\sigma_p+1}{2})\phi} I_{n_p - \frac{\sigma_p+1}{2}, s_p}(\rho) \Delta(\sigma_p) \gamma^{\mu} \\
 &\times N \sum_{\sigma_k} e^{-i(k_{\parallel} \cdot x_{\parallel})} e^{i(l_k - \frac{\sigma_k+1}{2})\phi} I_{n_k - \frac{\sigma_k+1}{2}, s_k}(\rho) \Delta(\sigma_k) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})} \\
 &\times N \sum_{\sigma_{k'}} e^{i(k_{\parallel} \cdot x'_{\parallel})} e^{-i(l_{k'} - \frac{\sigma_{k'}+1}{2})\phi'} I_{n_{k'} - \frac{\sigma_{k'}+1}{2}, s_{k'}}(\rho') \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^{\nu} \\
 &\times N \sum_{\sigma_{p'}} e^{-i(p'_{\parallel} \cdot x'_{\parallel})} e^{i(l_{p'} - \frac{\sigma_{p'}+1}{2})\phi'} I_{n_{p'} - \frac{\sigma_{p'}+1}{2}, s_{p'}}(\rho') \Delta(\sigma_{p'}). \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable

$$\rho = \gamma r^2, \quad d^4x = d^2x_{\parallel} \frac{1}{2\gamma} d\rho d\phi \tag{D.9}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
 q \cdot (x - x') &= q_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - x'_{\parallel}) - q_{\perp} \cdot x_{\perp} + q_{\perp} \cdot x'_{\perp} \\
 &= q_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - x'_{\parallel}) - |q_{\perp}| \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \cos \phi + |q_{\perp}| \sqrt{\frac{\rho'}{\gamma}} \cos \phi'. \tag{D.10}
 \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la Ec. (D.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \delta_{n_p, n_{p'}} \delta_{s_p, s_{p'}} \delta^2(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \Pi(n_p) \Sigma(\bar{p}) &= -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int d^2k_{\parallel} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_{\mu\nu}^0}{q^2 + i\epsilon} \\
 N^4 \int d^2x_{\parallel} d^2x'_{\parallel} e^{i(p_{\parallel} - k_{\parallel} - q_{\parallel}) \cdot x_{\parallel}} e^{i(k_{\parallel} - p'_{\parallel} + q_{\parallel}) \cdot x'_{\parallel}} &\sum_{\sigma_p \sigma_k \sigma_{k'} \sigma_{p'}} \\
 \frac{1}{2\gamma} \int d\rho d\phi I_{n_p - \frac{\sigma_p+1}{2}, s_p}(\rho) I_{n_k - \frac{\sigma_k+1}{2}, s_k}(\rho) e^{-i\left((l_p - \frac{\sigma_p+1}{2})\phi - (l_k - \frac{\sigma_k+1}{2})\phi - |q_{\perp}| \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \cos \phi\right)} & \\
 \frac{1}{2\gamma} \int d\rho' d\phi' I_{n_{p'} - \frac{\sigma_{p'}+1}{2}, s_{p'}}(\rho') I_{n_{k'} - \frac{\sigma_{k'}+1}{2}, s_{k'}}(\rho') e^{-i\left((l_{k'} - \frac{\sigma_{k'}+1}{2})\phi' - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'}+1}{2})\phi' + |q_{\perp}| \sqrt{\frac{\rho'}{\gamma}} \cos \phi'\right)} & \\
 \Delta(\sigma_p) \gamma^{\mu} \Delta(\sigma_k) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})} \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^{\nu} \Delta(\sigma_{p'}). &\tag{D.11}
 \end{aligned}$$

Para calcular esta expresión debemos tener en cuenta:

$$\begin{aligned}
 \int d^2x_{\parallel} e^{i(p_{\parallel} - k_{\parallel} - q_{\parallel}) \cdot x_{\parallel}} &= (2\pi)^2 \delta^2(p_{\parallel} - k_{\parallel} - q_{\parallel}), \\
 \int d^2x'_{\parallel} e^{i(k_{\parallel} - p'_{\parallel} + q_{\parallel}) \cdot x'_{\parallel}} &= (2\pi)^2 \delta^2(k_{\parallel} - p'_{\parallel} + q_{\parallel}). \tag{D.12}
 \end{aligned}$$

Para calcular la integral sobre ϕ usamos

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{iz \cos \phi} e^{in\phi} d\phi = 2 \int_0^{\pi} d\phi e^{iz \cos \phi} \cos(in\phi) d\phi = 2\pi i^n J_n(z), \tag{D.13}$$

así

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i\phi(l_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2} - (l_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2}))} e^{i|q_\perp| \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \cos \phi} \\ &= 2\pi i^{(l_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2} - (l_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2}))} J_{l_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2} - (l_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2})} \left(|q_\perp| \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (D.14)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-i\phi'(l_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}))} e^{-i|q_\perp| \sqrt{\frac{\rho'}{\gamma}} \cos \phi'} \\ &= 2\pi i^{-(l_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}))} J_{-(l_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}))} \left(-|q_\perp| \sqrt{\frac{\rho'}{\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (D.15)$$

Estos resultados los podemos reescribir usando la identidad

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z), \quad (D.16)$$

donde n es entero y z real. Remplazando en la Ec. (D.11) los resultados desde la Ec. (D.12) hasta la Ec. (D.15) obtenemos

$$\begin{aligned} & \delta_{n_p, n_{p'}} \delta_{s_p, s_{p'}} \delta^2(p_\parallel - p'_\parallel) \Pi(n_p) \Sigma(\bar{p}) = -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int d^2 k_\parallel \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_{\mu\nu}^0}{q^2 + i\epsilon} \\ & \times N^4 (2\pi)^2 \delta^2(p_\parallel - k_\parallel - q_\parallel) (2\pi)^2 \delta^2(k_\parallel - p'_\parallel + q_\parallel) \sum_{\sigma_p \sigma_k \sigma_{k'} \sigma_{p'}} \\ & \times \frac{1}{2\gamma} \int d\rho d\phi I_{n_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2}, s_p}(\rho) I_{n_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2}, s_k}(\rho) 2\pi i^{(l_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2} - (l_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2}))} \\ & \quad \times J_{l_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2} - (l_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2})} \left(|q_\perp| \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \right) \\ & \times \frac{1}{2\gamma} \int d\rho' d\phi' I_{n_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}, s_{p'}}(\rho') I_{n_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2}, s_k}(\rho') 2\pi i^{-(l_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}))} \\ & \quad \times J_{l_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2})} \left(|q_\perp| \sqrt{\frac{\rho'}{\gamma}} \right) \\ & \times \Delta(\sigma_p) \gamma^\mu \Delta(\sigma_k) \frac{1}{\gamma \cdot \bar{k} - \Sigma(\bar{k})} \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^\nu \Delta(\sigma_{p'}). \end{aligned} \quad (D.17)$$

Para hacer la integrales de la expresión anterior usamos la formula de la referencia [34]

$$\int_0^\infty d\rho J_{l-l'}(2\sqrt{x\rho}) I_{n,s} I_{n',s'} = I_{n,n'}(x) I_{s,s'}(x), \quad (D.18)$$

donde en nuestro caso $x = \frac{q_\perp^2}{4\gamma}$, así

$$\begin{aligned} & \delta_{n_p, n_{p'}} \delta_{s_p, s_{p'}} \delta^2(p_\parallel - p'_\parallel) \Pi(n_p) \Sigma(\bar{p}) = -ie^2 (2\pi N)^4 \delta^2(p_\parallel - p'_\parallel) \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_{\mu\nu}^0}{q^2 + i\epsilon} \\ & \times \sum_{\sigma_p \sigma_{p'} \sigma_k \sigma_{k'}} \frac{2\pi}{2\gamma} i^{(l_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2} - (l_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2}))} I_{(n_k - \frac{\sigma_{k+1}}{2}, (n_p - \frac{\sigma_{p+1}}{2}))} I_{s_k, s_p}(x) \\ & \quad \times \frac{2\pi}{2\gamma} i^{-(l_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}))} I_{(n_k - \frac{\sigma_{k'+1}}{2}, (n_{p'} - \frac{\sigma_{p'+1}}{2}))} I_{s_k, s_{p'}}(x) \\ & \quad \times \Delta(\sigma_p) \gamma^\mu \Delta(\sigma_k) \frac{1}{\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) - \Sigma(\bar{p} - \bar{q})} \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^\nu \Delta(\sigma_{p'}). \end{aligned} \quad (D.19)$$

De las deltas obtuvimos las relaciones: $k_{\parallel} = p_{\parallel} - q_{\parallel}$ y $p_{\parallel} = k'_{\parallel}$. En lo que sigue

$$(\bar{p} - \bar{q})_{\mu} = (p_0 - q_0, 0, -\sqrt{4n_k\gamma}, -(p_z - q_z)). \quad (\text{D.20})$$

En la Ec. (D.19) el factor global es

$$-ie^2 N^4 \frac{(2\pi)^6}{(2\gamma)^2} = -ie^2 \left(\frac{2\gamma}{(2\pi)^3} \right)^2 \frac{(2\pi)^6}{(2\gamma)^2} = -ie^2. \quad (\text{D.21})$$

Para Σ hacemos un ansatz similar a la de la estructura perturbativa

$$\Sigma(\bar{p}) = \gamma \cdot \bar{p} z(\bar{p}) + \mathcal{M}(\bar{p}) \quad (\text{D.22})$$

donde z es la renormalización de la función de onda. Teniendo en cuenta esta definición podemos reescribir

$$\frac{1}{\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) - \Sigma(\bar{p} - \bar{q})} = \frac{(1-z)\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) + \mathcal{M}}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2}, \quad (\text{D.23})$$

donde z y \mathcal{M} en general son funciones de $\bar{p} - \bar{q}$. Como nos interesa conocer la ecuación proporcional a \mathcal{M} , tomamos la traza sobre índices espinoriales en Ec. (D.19), que se reduce a calcular:

$$\text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^{\mu} \Delta(\sigma_k) \left((1-z)\gamma \cdot (\bar{p} - \bar{q}) + \mathcal{M} \right) \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^{\nu} \Delta(\sigma_{p'}) \right] = \mathcal{M} \text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^{\mu} \Delta(\sigma_k) \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^{\nu} \Delta(\sigma_{p'}) \right]. \quad (\text{D.24})$$

Aquí usamos la definición

$$\Delta(\sigma_p) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_p i \gamma^1 \gamma^2), \quad (\text{D.25})$$

donde $\sigma = \pm 1$. En lo que sigue tendremos en cuenta que la traza de un número impar de γ 's es nula y la propiedad cíclica de las trazas. Si usamos la identidades

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma_p) \Delta(\sigma_{p'}) &= \Delta(\sigma_p) \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}}, \\ [\Delta(\sigma), \gamma_{\parallel}^{\mu}] &= [\nabla(\sigma), \gamma_{\parallel}^{\mu}] = 0, \\ \Delta(\sigma) \gamma_{\perp}^{\mu} &= \gamma_{\perp}^{\mu} \nabla(\sigma), \\ \nabla(\sigma) &= 1 - \Delta(\sigma) = \Delta(-\sigma), \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

donde $\gamma_{\parallel}^{\mu} = (\gamma^0, 0, 0, \gamma^3)$, $\gamma_{\perp}^{\mu} = (0, \gamma^1, \gamma^2, 0)$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^{\mu} \Delta(\sigma_k) \Delta(\sigma_{k'}) \gamma^{\nu} \Delta(\sigma_{p'}) \right] &= \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} \text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) \gamma^{\mu} \Delta(\sigma_k) \gamma^{\nu} \right] \\ &= \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} \text{tr} \left[\Delta(\sigma_p) (\gamma_{\parallel}^{\mu} + \gamma_{\perp}^{\mu}) \Delta(\sigma_k) \gamma^{\nu} \right] \\ &= \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} \text{tr} \left[(\Delta(\sigma_p) \delta_{\sigma_p \sigma_k} \gamma_{\parallel}^{\mu} + \Delta(\sigma_p) \nabla(\sigma_k) \gamma_{\perp}^{\mu}) \gamma^{\nu} \right] \\ &= \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} \text{tr} \left[(\Delta(\sigma_p) \delta_{\sigma_p \sigma_k} \gamma_{\parallel}^{\mu} + \Delta(\sigma_p) (1 - \delta_{\sigma_p \sigma_k}) \gamma_{\perp}^{\mu}) \gamma^{\nu} \right] \\ &= \delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} \text{tr} \left[(\Delta(\sigma_p) \delta_{\sigma_p \sigma_k} (\gamma_{\parallel}^{\mu} - \gamma_{\perp}^{\mu}) + \Delta(\sigma_p) \gamma_{\perp}^{\mu}) \gamma^{\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Para simplificar esta traza necesitamos contraerla con $\Delta_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2})$

$$\begin{aligned}
& \text{tr}[\dots\gamma^\mu \dots\gamma^\nu]\Delta_{\mu\nu}^0 \\
&= \delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}}\text{tr}\left[(\Delta(\sigma_p)\delta_{\sigma_p\sigma_k}(\gamma_{\parallel}^\mu - \gamma_{\perp}^\mu) + \Delta(\sigma_p)\gamma_{\perp}^\mu)\gamma^\nu\right](g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) \\
&= \delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}}\left\{\text{tr}\left[\frac{1}{2}(1 + \sigma_p i\gamma^1\gamma^2)\delta_{\sigma_p\sigma_k}(\gamma_{\parallel}^2 - \gamma_{\perp}^2) + \frac{1}{2}(1 + \sigma_p i\gamma^1\gamma^2)\gamma_{\perp}^2\right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 - \xi}{q^2}\text{tr}\left[\frac{1}{2}(1 + \sigma_p i\gamma^1\gamma^2)\delta_{\sigma_p\sigma_k}(\not{q}_{\parallel} - \not{q}_{\perp})\not{q} + \frac{1}{2}(1 + \sigma_p i\gamma^1\gamma^2)\not{q}_{\perp}\not{q}\right]\right\}, \tag{D.28}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\gamma_{\parallel}^2 &\equiv \gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel}^\mu = (\gamma^0)^2 - (\gamma^3)^2 = 2, \\
\gamma_{\perp}^2 &\equiv \gamma_{\perp\mu}\gamma_{\perp}^\mu = -(\gamma^1)^2 - (\gamma^2)^2 = 2, \tag{D.29}
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\dots\gamma^\mu \dots\gamma^\nu]\Delta_{\mu\nu}^0 &= \text{tr}\left[\frac{1}{2}(1 + \sigma_p i\gamma^2\gamma^2)2\right]\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}} \\
&\quad - \frac{1 - \xi}{q^2}\left\{\frac{\delta_{\sigma_p\sigma_k}}{2}\left[q_{\parallel\mu}q_{\mu'}\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^{\mu'}) + \sigma_p iq_{\parallel\mu}q_{\mu'}\text{tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^\mu\gamma^{\mu'}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q_{\perp\mu}q_{\mu'}\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^{\mu'}) - \sigma_p iq_{\perp\mu}q_{\mu'}\text{tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^\mu\gamma^{\mu'})\right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}q_{\perp\mu}q_{\mu'}\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^{\mu'}) + \frac{1}{2}\sigma_p iq_{\perp\mu}q_{\mu'}\text{tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^\mu\gamma^{\mu'})\right\}\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}}, \tag{D.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\dots\gamma^\mu \dots\gamma^\nu]\Delta_{\mu\nu}^0 &= 4\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}} \\
&\quad - \frac{1 - \xi}{q^2}\left\{\frac{\delta_{\sigma_p\sigma_k}}{2}\left[4q_{\parallel}\cdot q + \sigma_p iq_{\parallel\mu}q_{\mu'}4(g^{12}g^{\mu\mu'} - g^{1\mu}g^{2\mu'} + g^{1\mu'}g^{2\mu}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q_{\perp}\cdot q - \sigma_p iq_{\perp\mu}q_{\mu'}4(g^{12}g^{\mu\mu'} - g^{1\mu}g^{2\mu'} + g^{1\mu'}g^{2\mu})\right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}q_{\perp}\cdot q + \frac{1}{2}\sigma_p iq_{\perp\mu}q_{\mu'}4(g^{12}g^{\mu\mu'} - g^{1\mu}g^{2\mu'} + g^{1\mu'}g^{2\mu})\right\}\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}}, \tag{D.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr}[\dots\gamma^\mu \dots\gamma^\nu]\Delta_{\mu\nu}^0 \\
&= 4\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}} - \frac{4(1 - \xi)}{q^2}\left\{\frac{\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}}{2}(q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2}\right\}\delta_{\sigma_p\sigma_{p'}}\delta_{\sigma_k\sigma_{k'}}, \tag{D.32}
\end{aligned}$$

donde en el penúltimo y último paso tuvimos en cuenta:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^{\mu'}) &= 4g^{\mu\mu'} \\
\text{tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^\mu\gamma^{\mu'}) &= 4(g^{12}g^{\mu\mu'} - g^{1\mu}g^{2\mu'} + g^{1\mu'}g^{2\mu}) \tag{D.33}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q_{\parallel\mu}q_{\mu'}g^{\mu\mu'} &= q_0^2 - q_3^2 = q_{\parallel}^2 \\ q_{\perp\mu}q_{\mu'}g^{\mu\mu'} &= q_{\perp}^2 = -q_1^2 - q_2^2 = -|q_{\perp}|^2, \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

respectivamente. Remplazando estos resultados en (D.19) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{n_p, n_{p'}} \delta_{s_p, s_{p'}} \text{tr}[\Pi(n_p)] \mathcal{M}(\bar{p}) &= -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \sum_{\sigma_p \sigma_{p'} \sigma_k \sigma_{k'}} i^{(l_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'} + 1}{2}))} I_{(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}, (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}))} I_{s_k, s_p}(x) \\ &\times i^{-(l_k - \frac{\sigma_{k'} + 1}{2} - (l_{p'} - \frac{\sigma_{p'} + 1}{2}))} I_{(n_k - \frac{\sigma_{k'} + 1}{2}, (n_{p'} - \frac{\sigma_{p'} + 1}{2}))} I_{s_k, s_{p'}}(x) \\ &\times \frac{\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2 (\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} 4\delta_{\sigma_p \sigma_{p'}} \delta_{\sigma_k \sigma_{k'}} \\ &\times \left(1 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \frac{\delta_{\sigma_p \sigma_{p'}}}{2} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Para simplificar esta ecuación hacemos $n_p = n_{p'}$ y $s_p = s_{p'}$, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\Pi(n_p)] \mathcal{M}(\bar{p}) &= -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} I_{(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}, (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}))}^2(x) I_{s_k, s_p}^2(x) \\ &\times \frac{4\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2 (\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} \\ &\times \left(1 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \frac{\delta_{\sigma_p \sigma_p}}{2} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Del Sokolov and Ternov pag 205 [34] tenemos

$$I_{n_s}(x) = \frac{1}{\sqrt{s!n!}} e^{-x/2} x^{\frac{n-s}{2}} Q_s^{n-s}(x), \quad (\text{D.37})$$

donde

$$Q_s^{n-s}(x) = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^{j+s} s!(l+s)! x^{s-j}}{j!(s-j)!(s+l-j)!}, \quad (\text{D.38})$$

si hacemos el cambio de variable $m = s - j$, con $m = s, \dots, 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} Q_s^{n-s}(x) &= \sum_{m=s}^0 \frac{(-1)^{2s-m} s!(l+s)! x^m}{(s-m)! m!(l+m)!} \\ &= s! L_s^l(x), \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

donde usamos la definición

$$L_s^l(x) = \sum_{m=0}^s \frac{(-1)^{2s-m} (l+s)! x^m}{(s-m)! m!(l+m)!}, \quad (\text{D.40})$$

para conseguir la igualdad invertimos el orden de la suma, esto no implica ningun signo. De este resultado tenemos

$$I_{ns}(x) = \sqrt{\frac{s!}{n!}} e^{-x/2} x^{\frac{n-s}{2}} L_s^l(x). \quad (\text{D.41})$$

Si usamos la propiedad $(-1)^l x^{-l} Q_{l+s}^{-l}(x) = Q_s^l$, conseguimos la relación

$$\begin{aligned} (-1)^l x^{-l} (s+l)! L_{s+l}^{-l}(x) &= s! L_s^l(x) \\ L_s^l(x) &= (-1)^l x^{-l} \frac{(s+l)!}{s!} L_{s+l}^{-l}(x). \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Usando $l = n - s$ tenemos

$$\begin{aligned} I_{ns}(x) &= \sqrt{\frac{s!}{n!}} e^{-x/2} x^{\frac{n-s}{2}} \left((-1)^l x^{-l} \frac{(s+l)!}{s!} L_{s+l}^{-l}(x) \right) \\ &= \sqrt{\frac{n!}{s!}} (-1)^{n-s} e^{-x/2} x^{-\frac{n-s}{2}} L_n^{-(n-s)}(x). \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

Si multiplicamos (D.48) con (D.43), conseguimos

$$\begin{aligned} I_{ns}^2 &= \sqrt{\frac{s!}{n!}} e^{-x/2} x^{\frac{n-s}{2}} L_s^{n-s}(x) \sqrt{\frac{n!}{s!}} (-1)^{n-s} e^{-x/2} x^{-\frac{n-s}{2}} L_n^{-(n-s)}(x), \\ &= (-1)^{n-s} e^{-x} L_s^{n-s}(x) L_n^{-(n-s)}(x), \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

reemplazando en (D.36) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{tr}[\Pi(n_p)] \mathcal{M}(\bar{p}) &= -ie^2 \sum_{n_k, s_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-2x}}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} (-1)^{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}} (-1)^{s_p} \\ &\times (-1)^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}} L_{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}}^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})}(x) L_{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}}^{-\left(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})\right)}(x) \\ &\times (-1)^{s_k} L_{s_p}^{s_k - s_p}(x) L^{-(s_k - s_p)s_k}(x) \\ &\times \frac{4\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} \\ &\times \left(1 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \frac{\delta_{\sigma_p \sigma_p}}{2} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - \frac{|q_{\perp}|^2}{2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

La suma sobre las s_k puede hacerse teniendo en cuenta la identidad [36]

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k L_k^{m-k}(x) L_n^{k-n}(y) = A^m \left(\frac{1+A}{A} \right)^{m-n} e^{-xA} L_n^{m-n}(x+y+xA+y/A) \quad (\text{D.46})$$

asi

$$\begin{aligned} \sum_{s_k=0}^{\infty} (-1)^{s_k} L_{s_p}^{s_k - s_p}(x) L^{-(s_k - s_p)s_k}(x) &= (-1)^{s_p} \left(\frac{1-1}{-1} \right)^0 e^x L_{s_p}^0(0) \\ &= (-1)^{s_p} e^x. \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

Remplazando este resultado en la Ec. (D.48) llegamos a

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2ie^2 \sum_{n_k} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-2x}}{q^2 + i\epsilon} \\
 &\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} (-1)^{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}} \\
 &\times (-1)^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}} L_{n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}}^{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2})}(x) L_{n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2}}^{-(n_k - \frac{\sigma_k + 1}{2} - (n_p - \frac{\sigma_p + 1}{2}))}(x) \\
 &\times \frac{\mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q})}{(1-z)^2(\bar{p} - \bar{q})^2 - \mathcal{M}^2(\bar{p} - \bar{q})} \\
 &\times \left(2 - \frac{(1-\xi)}{q^2} \left\{ \delta_{\sigma_p \sigma_k} (q_{\parallel}^2 + |q_{\perp}|^2) - |q_{\perp}|^2 \right\} \right). \tag{D.48}
 \end{aligned}$$

Apéndice E

Suma sobre los niveles de Landau

Partiendo de la expresión Ec. (5.32) para la ecuación de la función de masa en espacio de Minkowsky

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -i2e^2 \sum_{\sigma_p, \sigma_k, k} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\varepsilon} \frac{\mathcal{M}(q)}{(1-z)^2 \left\{ (q-p)_\parallel^2 - 2eB(k + (\sigma+1)/2) \right\} - \mathcal{M}^2} \\
 &\times \left\{ 2 + (1-\xi)(1 - \delta_{\sigma_p \sigma_k}) \frac{q_\perp^2}{q^2} - (1-\xi)\delta_{\sigma_p \sigma_k} \frac{q_\parallel^2}{q^2} \right\} \exp\left(-\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right) (-1)^{-m} \\
 &\times (-1)^k L_m^{k-m} \left(\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right) L_k^{-(k-m)} \left(\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right), \tag{E.1}
 \end{aligned}$$

si aplicamos la identidad $\frac{1}{x} = -i \int_0^\infty \exp(is(x+i\epsilon))$ podemos escribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2ie^2 \sum_{\sigma_p, \sigma_k, k} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}(q)}{q^2 + i\varepsilon} \\
 &\times (-i) \int_0^\infty \exp \left[i \left((1-z)^2 \left\{ (q-p)_\parallel^2 - 2eB(k + (\sigma+1)/2) \right\} - \mathcal{M}^2 + i\epsilon \right) s \right] \\
 &\times \left\{ 2 + (1-\xi)(1 - \delta_{\sigma_p \sigma_k}) \frac{q_\perp^2}{q^2} - (1-\xi)\delta_{\sigma_p \sigma_k} \frac{q_\parallel^2}{q^2} \right\} \exp\left(-\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right) (-1)^{-m} \\
 &\times (-1)^k L_m^{k-m} \left(\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right) L_k^{-(k-m)} \left(\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right). \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

La suma sobre k se hace con la identidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k L_l^{m-k}(x) L_n^{k-n}(y) = A^m \left(\frac{1+A}{A} \right)^{m-n} \exp(-xA) L_n^{m-n}(x+y+xA+y/A), \tag{E.3}$$

en nuestro caso $A = -e^{-i2(1-z)^2 eBs}$ y $n = m$ y $x = y = \frac{q_\perp^2}{4\gamma}$, así:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} (-\exp(-i2(1-z)^2 eBs))^k L_l^{m-k}(x) L_m^{k-m}(x) \\
&= \left(-e^{-i2(1-z)^2 eBs}\right)^m \left(\frac{1 - \exp(-i2(1-z)^2 eBs)}{-\exp(-i2(1-z)^2 eBs)}\right)^0 \\
&\times \exp\left\{-x \left(-e^{-i2(1-z)^2 eBs}\right)\right\} \\
&\times L_m^0 \left[x + x - x e^{-i2(1-z)^2 eBs} + \frac{x}{-e^{-i2(1-z)^2 eBs}}\right] \\
&= \left(-e^{-i2(1-z)^2 eBs}\right)^m \exp\left[x e^{-i2(1-z)^2 eBs}\right] \\
&\times L_m^0 [4x \sin [(1-z)^2 eBs]], \tag{E.4}
\end{aligned}$$

reemplazando este resultado obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2ie^2 \sum_{\sigma_p \sigma_k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}(q)}{q^2 + i\varepsilon} \\
&\times (-i) \int_0^\infty ds \exp\left[i \left((1-z)^2 \left\{(q-p)_\parallel^2 - 2eB(\sigma_k + 1)/2\right\} - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon\right) s\right] \\
&\times \left\{2 + (1-\xi)(1 - \delta_{\sigma_p \sigma_k}) \frac{q_\perp^2}{q^2} - (1-\xi)\delta_{\sigma_p \sigma_k} \frac{q_\parallel^2}{q^2}\right\} \exp\left(-\frac{q_\perp^2}{4\gamma}\right) (-1)^{-m} \\
&\times \left(-\exp(-i2(1-z)^2 eBs)\right)^m \exp\left(x \left(\exp(-i2(1-z)^2 eBs)\right)\right) \\
&\times L_m^0 \left(\frac{q_\perp^2}{\gamma} \sin((1-z)^2 eBs)\right), \tag{E.5}
\end{aligned}$$

aquí asumimos que z no depende de k , de hecho en el cálculo la supondremos constante. Si hacemos los cambios de variables $q = 2\sqrt{\gamma} Q$, $s = \frac{\tau}{2eB(1-z)^2}$

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2i(2eB)e^2 \sum_{\sigma_p \sigma_k} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 + i\varepsilon} \\
&\times (-i) \int_0^\infty \frac{d\tau}{(2eB)(1-z)^2} \\
&\times \exp\left[i \left((1-z)^2 \left\{(2\sqrt{\gamma}Q-p)_\parallel^2 - eB(\sigma_k + 1)\right\} - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon\right) \frac{\tau}{2eB(1-z)^2}\right] \\
&\times \left\{2 + (1-\xi)(1 - \delta_{\sigma_p \sigma_k}) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} - (1-\xi)\delta_{\sigma_p \sigma_k} \frac{Q_\parallel^2}{Q^2}\right\} \exp(-Q_\perp^2) \exp(Q_\perp^2 (\exp(-i\tau))) \\
&\times \exp(-im\tau) L_m^0 \left(4Q_\perp^2 \sin^2 \left[\frac{\tau}{2}\right]\right), \tag{E.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= -2e^2 \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 + i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
&\times \exp \left[i \left((1-z)^2 \left\{ (2\sqrt{\gamma}Q - p)_\parallel \right\}^2 - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon \right) \frac{\tau}{2eB(1-z)^2} \right] \\
&\times \exp(-Q_\perp^2) \exp(Q_\perp^2 (\exp(-i\tau))) \\
&\times \sum_{\sigma_p \sigma_k} \exp -i \frac{(\sigma_k + 1)}{2} \tau \exp(-im\tau) L_m^0 \left(4Q_\perp^2 \sin^2 \left[\frac{\tau}{2} \right] \right) \\
&\times \left\{ 2 + (1-\xi)(1-\delta_{\sigma_p \sigma_k}) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} - (1-\xi) \delta_{\sigma_p \sigma_k} \frac{Q_\parallel^2}{Q^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

La suma sobre sigma es:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma_p \sigma_k = \pm} \exp \left[-i \left(m + \frac{(\sigma_k + 1)}{2} \right) \tau \right] L_m^0 \left(4Q_\perp^2 \sin^2 \left[\frac{\tau}{2} \right] \right) \\
&\times \left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} - (1-\xi) \left\{ \frac{Q_\perp^2 + Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} \delta_{\sigma_p \sigma_k} \right\} \\
&= \sum_{\sigma_p \sigma_k = \pm} \exp \left[-i \left(n_p + \frac{(\sigma_k - \sigma_p)}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{(1+\sigma_p)}{2}}^0 \\
&\times \left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} - (1-\xi) \left\{ \frac{Q_\perp^2 + Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} \delta_{\sigma_p \sigma_k} \right\} \\
&= \sum_{\sigma_p} \exp \left[-i \left(n_p + \frac{(-1) - \sigma_p}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{(1+\sigma_p)}{2}}^0 \\
&\times \left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} - (1-\xi) \left\{ \frac{Q_\perp^2 + Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} \delta_{\sigma_p, (-1)} \right\} \\
&\quad + \exp \left[-i \left(n_p + \frac{1 - \sigma_p}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{(1+\sigma_p)}{2}}^0 \\
&\times \left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} - (1-\xi) \left\{ \frac{Q_\perp^2 + Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} \delta_{\sigma_p, (1)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[-i \left(n_p + \frac{(-1) - (-1)}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{1+(-1)}{2}}^0 \\
&\times \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} - (1 - \xi) \left\{ \frac{Q_{\perp}^2 + Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \delta_{(-1), (-1)} \right\} \\
&+ \exp \left[-i \left(n_p + \frac{1 - (-1)}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{(1-1)}{2}}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \\
&+ \exp \left[-i \left(n_p + \frac{(-1) - 1}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{(1+1)}{2}}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \\
&+ \exp \left[-i \left(n_p + \frac{1 - 1}{2} \right) \tau \right] L_{n_p - \frac{(1+1)}{2}}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} - (1 - \xi) \left\{ \frac{Q_{\perp}^2 + Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \right\} \\
&= \exp(-i(n_p \tau)) L_{n_p}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} - (1 - \xi) \left\{ \frac{Q_{\perp}^2 + Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \right\} \\
&+ \exp(-i(n_p + 1)\tau) L_{n_p}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \\
&+ \exp(-i(n_p - 1)\tau) L_{n_p - 1}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \\
&+ \exp(-i n_p \tau) L_{n_p - 1}^0 \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} - (1 - \xi) \left\{ \frac{Q_{\perp}^2 + Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \right\}. \tag{E.8}
\end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en Ec. (E.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)] \mathcal{M}(\vec{p}) &= -2e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 + i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
&\times \exp \left[i \left((1-z)^2 \left\{ (2\sqrt{\gamma}Q - p)_{\parallel}^2 \right\} - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon \right) \frac{\tau}{2eB(1-z)^2} \right] \exp(-Q_{\perp}^2 (1 - \exp(-i\tau))) \\
&\times \left[\left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} - (1 - \xi) \left\{ \frac{Q_{\perp}^2 + Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \right\} \left[\exp(-i n_p \tau) L_{n_p}^0 + \exp(-i n_p \tau) L_{n_p - 1}^0 \right] \right. \\
&\left. + \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \left[\exp(-i(n_p + 1)\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-i(n_p - 1)\tau) L_{n_p - 1}^0 \right] \right] \\
&= -2e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 + i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
&\times \exp \left[i \left((1-z)^2 \left\{ (2\sqrt{\gamma}Q - p)_{\parallel}^2 \right\} - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon \right) \frac{\tau}{2eB(1-z)^2} \right] \\
&\times \exp(-Q_{\perp}^2 (1 - \exp(-i\tau))) \\
&\times \left[\left\{ 2 - (1 - \xi) \frac{Q_{\parallel}^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-i n_p \tau) L_{n_p}^0 + \exp(-i n_p \tau) L_{n_p - 1}^0 \right) \right. \\
&\left. + \left\{ 2 + (1 - \xi) \frac{Q_{\perp}^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-i(n_p + 1)\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-i(n_p - 1)\tau) L_{n_p - 1}^0 \right) \right]. \tag{E.9}
\end{aligned}$$

Pasando a espacio Euclideo.

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= 2e^2 i \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
&\times \exp \left[-i \frac{\left((1-z)^2 (2\sqrt{\gamma}Q - p)_\parallel^2 + \mathcal{M}^2 + i\epsilon \right)}{2eB(1-z)^2} \tau \right] \\
&\times \exp(-Q_\perp^2 (1 - \exp(-i\tau))) \\
&\times \left[\left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{-(Q^2)} \right\} \left(\exp(-in_p\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-in_p\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right. \\
&\left. + \left\{ 2 + (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{-(Q^2)} \right\} \left(\exp(-i(n_p+1)\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-i(n_p-1)\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right]. \tag{E.10}
\end{aligned}$$

La integral en τ , se puede ver como:

$$\int_0^\infty \exp(-i\alpha\tau) d\tau + \int_{\text{Arco}} \exp(-\alpha\tau) d\tau + \int_{-\infty i}^0 \exp(-\alpha\tau) d\tau \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp(-i\alpha\tau) d\tau &= - \int_{-\infty i}^0 \exp(-i(\alpha)(i\tau_y))(di\tau_y) \\
&= - \int_{-\infty}^0 i \exp(-i^2\alpha\tau_y)(d\tau_y) \\
&= - \int_{\infty}^0 i \exp(-\alpha\tau_y)(-d\tau_y) \\
&= -i \int_0^\infty \exp(-\alpha\tau_y)(d\tau_y), \tag{E.12}
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\Pi(n_p)]\mathcal{M}(\bar{p}) &= 2e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\
&\times \exp \left[- \frac{\left((1-z)^2 (2\sqrt{\gamma}Q - p)_\parallel^2 + \mathcal{M}^2 + i\epsilon \right)}{2eB(1-z)^2} \tau \right] \\
&\times \exp(-Q_\perp^2 (1 - \exp(-\tau))) \\
&\times \left[\left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-n_p\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-n_p\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right. \\
&\left. + \left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} \right\} \left(\exp(-(n_p+1)\tau) L_{n_p}^0 + \exp(-(n_p-1)\tau) L_{n_p-1}^0 \right) \right]. \tag{E.13}
\end{aligned}$$

Tomando $n_p = 0$ en el lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos $\text{tr}[\Pi(n_p)] = \text{tr}[\Delta(-1)] = 2$ y del lado derecho $L_0^0 = 1$. Así

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1-z)^2} \\ & \times \exp(-\alpha\tau) \exp(-Q_\perp^2 (1 - \exp(-\tau))) \\ & \times \left[\left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} + \left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} \right\} \exp(-\tau) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

donde

$$\alpha = \frac{\{(1-z)^2 (2\sqrt{\gamma}Q - p)_\parallel^2 + \mathcal{M}^2 + i\epsilon\}}{\{2eB(1-z)^2\}}.$$

Si hacemos cambio de variable

$$x = \exp(-\tau), \quad dx = -\exp(-\tau)d\tau \Rightarrow \tau = -\frac{dx}{x}, \quad x \in (1, 0)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{e^2}{(1-z)^2} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^1 dx \frac{x^\alpha}{x} \exp(-Q_\perp^2 (1-x)) \\ & \times \left[\left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2} \right\} + \left\{ 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2} \right\} x \right] \\ \equiv & \frac{e^2}{(1-z)^2} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\varepsilon} \int_0^1 dx x^{\alpha-1} \exp(-Q_\perp^2 (1-x)) [f + gx], \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

con

$$f = 2 - (1-\xi) \frac{Q_\parallel^2}{Q^2}, \quad g = 2 - (1-\xi) \frac{Q_\perp^2}{Q^2}.$$

Apéndice F

Integrales angulares

En la expresión que obtuvimos en el apéndice anterior

$$\mathcal{M} = e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{Q^2 - i\epsilon} \int_0^1 dx x^\lambda \exp(-Q_\perp^2(1-x)) 2[1+x], \quad (\text{F.1})$$

con

$$\lambda = \left(\vec{Q}_\parallel - \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 + \frac{\mathcal{M}^2 - i\epsilon}{2eB} - 1, \quad (\text{F.2})$$

es necesario hacer las las integrales indicadas, de forma que al final solo queden máximo dos para que se pueda solucionar numéricamente sin usar métodos de montecarlo. Si hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \vec{Q}_\parallel'' &= \vec{Q}_\parallel - \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \\ \vec{Q}_\perp'' &= \vec{Q}_\perp, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

así

$$\mathcal{M} = e^2 \int \frac{d^4 Q''}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}}{\left(\vec{Q}'' + \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 - i\epsilon} \times \int_0^1 dx x^{\lambda''} \exp(-Q_\perp^2(1-x)) 2(1+x), \quad (\text{F.4})$$

donde $\lambda'' = Q_\parallel''^2 + \frac{\mathcal{M}^2[Q_\parallel''] - i\epsilon}{2eB} - 1$. Es importante notar que en estas nuevas variables \mathcal{M} y λ'' no dependen del ángulo entre \vec{P} y \vec{Q} , pero aparece una dependencia en el denominador.i.e

$$\begin{aligned} \vec{Q}'' + \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} &= \vec{Q}_\perp'' + \vec{Q}_\parallel'' + \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \rightarrow \\ \left(\vec{Q}'' + \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 &= Q_\perp^2 + \left(\vec{Q}_\parallel'' + \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 \\ &= Q_\perp^2 + \left(Q_\parallel''^2 + 2|\vec{Q}_\parallel''| \frac{|\vec{P}_\parallel|}{2\sqrt{\gamma}} \cos\theta + \frac{|\vec{P}_\parallel|^2}{4\gamma} \right) \\ &= Q_\perp^2 + Q_\parallel''^2 + 2|Q_\parallel''| \frac{|\vec{P}_\parallel|}{2\sqrt{\gamma}} \cos\theta + \frac{|\vec{P}_\parallel|^2}{4\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$(\text{F.6})$$

así

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [1+x] \int d^2 Q_{\perp} \exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \int \frac{d^2 Q_{\parallel}'' x^{\lambda''}}{Q_{\perp}^2 + (\vec{Q}_{\parallel}'' + \frac{P_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2}. \quad (\text{F.7})$$

Como las variables de integración son mudas podemos quitar los doble primas. La última integral puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} d(Q_{\parallel}^2) d\theta \frac{1}{Q_{\perp}^2 + Q_{\parallel}^2 + 2|Q_{\parallel}| \frac{|P_{\parallel}|}{2\sqrt{\gamma}} \cos \theta + \frac{|P_{\parallel}|^2}{4\gamma}} \\ &= \frac{1}{2} \int d(Q_{\parallel}^2) \frac{2\pi}{\sqrt{\left[Q_{\parallel}^2 - \frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}\right]^2 + 2Q_{\perp}^2 \left[\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\parallel}^2\right] + Q_{\perp}^4}}, \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 dx [1+x] 2 \int \frac{d(Q_{\parallel}^2)}{2} x^{Q_{\parallel}^2 + \frac{M^2 - i\epsilon}{2eB} - 1} \\ &\times (2\pi) \int_0^{\infty} \frac{dQ_{\perp}^2}{2} \frac{\exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \mathcal{M}}{\sqrt{\left[Q_{\parallel}^2 - \frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}\right]^2 + 2Q_{\perp}^2 \left[\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\parallel}^2\right] + Q_{\perp}^4}}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 dx [1+x] \left[\int_0^{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} + \int_{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}}^{\infty} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \right] x^{\lambda} (2\pi) \\ &\times \int_0^{\infty} dQ_{\perp}^2 \frac{\exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \mathcal{M}}{\sqrt{\left[Q_{\parallel}^2 - \frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}\right]^2 + 2Q_{\perp}^2 \left[\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\parallel}^2\right] + Q_{\perp}^4}}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Si en cada intervalo despreciamos el menor de los momentos paralelos en los denominadores obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\approx \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx [1+x] \left[\int_0^{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \int_0^{\infty} dQ_{\perp}^2 \frac{\exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \mathcal{M}}{\sqrt{\left[\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}\right]^2 + 2Q_{\perp}^2 \left[\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}\right] + Q_{\perp}^4}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}}^{\infty} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \int_0^{\infty} dQ_{\perp}^2 \frac{\exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \mathcal{M}}{\sqrt{\left[Q_{\parallel}^2\right]^2 + 2Q_{\perp}^2 \left[Q_{\parallel}^2\right] + Q_{\perp}^4}} \right] x^{\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx [1+x] \left[\int_0^{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \int_0^{\infty} dQ_{\perp}^2 \frac{\exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \mathcal{M}}{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma} + Q_{\perp}^2} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{P_{\parallel}^2}{4\gamma}}^{\infty} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \int_0^{\infty} dQ_{\perp}^2 \frac{\exp(-Q_{\perp}^2 (1-x)) \mathcal{M}}{Q_{\parallel}^2 + Q_{\perp}^2} \right] x^{\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx [1+x] \left[\int_0^{\frac{P^2}{4\gamma}} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \exp\left[(1-x)\frac{P^2}{4\gamma}\right] \Gamma\left[0, (1-x)\frac{P^2}{4\gamma}\right] + \int_{\frac{P^2}{4\gamma}}^{\infty} \frac{dQ_{\parallel}^2}{2} \exp\left[(1-x)Q_{\parallel}^2\right] \Gamma\left[0, (1-x)Q_{\parallel}^2\right] \right] x^{\lambda} \mathcal{M}, \quad (\text{F.13})$$

donde $\lambda = Q_{\parallel}^2 + \frac{\mathcal{M}^2 - i\epsilon}{2eB} - 1$. La única aproximación aquí es la de despreciar por intervalos, los momentos paralelos menos relevantes.

F.1. Ecuación integral en norma arbitraria

Nuestra ecuación Integral en cualquier norma es

$$\mathcal{M} = e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}[\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}} - \vec{Q}_{\parallel}]}{|\vec{Q}|^2 - i\epsilon} \int_0^1 dx x^{\lambda} \exp\left(-\vec{Q}_{\perp}^2(1-x)\right) [f + gx]; \quad (\text{F.14})$$

$$\lambda = \left(\vec{Q}_{\parallel} - \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + \frac{\mathcal{M}^2[\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}} - \vec{Q}_{\parallel}] - i\epsilon}{2eB} - 1, \quad (\text{F.15})$$

donde $f = 2 - (1 - \xi) \frac{|\vec{Q}_{\parallel}|^2}{|\vec{Q}|^2}$ y $g = 2 - (1 - \xi) \frac{|\vec{Q}_{\perp}|^2}{|\vec{Q}|^2}$. De esto podemos ver que:

$$f + gx = 2(1+x) - (1-\xi) \left(\frac{|\vec{Q}_{\parallel}|^2}{|\vec{Q}|^2} + x \frac{|\vec{Q}_{\perp}|^2}{|\vec{Q}|^2} \right), \quad (\text{F.16})$$

el primer término corresponde a la norma de Feynman i.e. $\xi = 1$, el término restante en Ec. (F.14) le denotaremos con una δ_{ξ}

$$\delta_{\xi} = -(1-\xi)e^2 \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}[\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}} - \vec{Q}_{\parallel}]}{|\vec{Q}|^2 - i\epsilon} \int_0^1 dx x^{\lambda} e^{-|\vec{Q}_{\perp}|^2(1-x)} \frac{|\vec{Q}_{\parallel}|^2 + x|\vec{Q}_{\perp}|^2}{|\vec{Q}|^2}. \quad (\text{F.17})$$

Si hacemos el Cambio de variable

$$\vec{Q}'_{\parallel} = \vec{Q}_{\parallel} - \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}, \quad \vec{Q}'_{\perp} = \vec{Q}_{\perp}, \quad (\text{F.18})$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}} - \vec{Q}_{\parallel}] &\longrightarrow \mathcal{M}[\vec{Q}'_{\parallel}] \\ \vec{Q} &\longrightarrow \vec{Q}' + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}, \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

$$\begin{aligned} \delta_{\xi} = -e^2(1-\xi) \int \frac{d^4 Q'}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{M}[\vec{Q}'_{\parallel}]}{(\vec{Q}' + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2 - i\epsilon} \int_0^1 dx x^{\lambda'} \exp\left(-|\vec{Q}'_{\perp}|^2(1-x)\right) \\ \times \frac{(\vec{Q}'_{\parallel} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2 + x|\vec{Q}'_{\perp}|^2}{(\vec{Q}' + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2}, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

con

$$\left(\vec{Q}' + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 = \left(\vec{Q}'_{\parallel} + \vec{Q}'_{\perp} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 = \left(\vec{Q}'_{\parallel} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + |\vec{Q}'_{\perp}|^2, \quad (\text{F.21})$$

podemos quitar las primas ya que las variables de integración son mudas. Si tomamos el ángulo entre $\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}$ y $|\vec{Q}_{\parallel}|$ como ángulo de integración entonces

$$d^4Q = d^2Q_{\parallel} d^2Q_{\perp} = \frac{1}{2} d|\vec{Q}_{\parallel}|^2 d\theta \frac{2\pi}{2} d|\vec{Q}_{\perp}|^2, \quad (\text{F.22})$$

aquí tuvimos en cuenta que el integrando solo depende de $|\vec{Q}_{\perp}|$ y por tanto la integral angular en las variables perpendiculares es trivial. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\xi} = -e^2(1-\xi) \int \frac{d|\vec{Q}_{\parallel}|^2}{2(2\pi)^4} \mathcal{M}[\vec{Q}_{\parallel}] \int_0^1 dx x^{\lambda} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{d|\vec{Q}_{\perp}|^2}{2} \exp\left(-|\vec{Q}_{\perp}|^2(1-x)\right) \\ \times \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(\vec{Q}_{\parallel} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2 - (1-x)|\vec{Q}_{\perp}|^2}{\left((\vec{Q}_{\parallel} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2\right)^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

con

$$\lambda = |\vec{Q}_{\parallel}|^2 + \frac{\mathcal{M}^2[\vec{Q}_{\parallel}] - i\epsilon}{2eB} - 1. \quad (\text{F.24})$$

Hemos sumado y restado en el numerador convenientemente $|\vec{Q}_{\perp}|^2$. La integral en θ puede escribirse como

$$\begin{aligned} I_{\theta} &= \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \frac{1}{(\vec{Q}_{\parallel} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2} - \frac{(1-x)|\vec{Q}_{\perp}|^2}{\left((\vec{Q}_{\parallel} + \frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}})^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2\right)^2} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \frac{1}{|\vec{Q}_{\parallel}|^2 + |\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + 2|\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}||\vec{Q}_{\parallel}|\cos\theta + |\vec{Q}_{\perp}|^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-x)|\vec{Q}_{\perp}|^2}{\left(|\vec{Q}_{\parallel}|^2 + |\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + 2|\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}||\vec{Q}_{\parallel}|\cos\theta + |\vec{Q}_{\perp}|^2\right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

Esta integrale la puede hacer mathematica, con solucion

$$\begin{aligned} I_{\theta} &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(|\vec{Q}_{\parallel}|^2 - |\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}|^2\right)^2 + 2|\vec{Q}_{\perp}|^2\left(|\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_{\parallel}|^2\right) + |\vec{Q}_{\perp}|^4}} \\ &\quad - \frac{2\pi\left(|\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_{\parallel}|^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2\right)(1-x)|\vec{Q}_{\perp}|^2}{\sqrt{\left(|\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}| - |\vec{Q}_{\parallel}|\right)^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2} \sqrt{\left(|\frac{\vec{P}_{\parallel}}{2\sqrt{\gamma}}| + |\vec{Q}_{\parallel}|\right)^2 + |\vec{Q}_{\perp}|^2}}. \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

Este resultado lo podemos aproximar en el denominador, dependiendo si $|\vec{Q}_\parallel|^2$ es mayor o menor que $|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2$. Para $|\vec{Q}_\parallel| \leq |\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2$, $|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\parallel|^2 \approx |\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2$ tenemos

$$\begin{aligned}
I_{\theta, |\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 \geq |\vec{Q}_\parallel|^2} &\approx \frac{2\pi}{\sqrt{|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^4 + 2|\vec{Q}_\perp|^2|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^4}} \\
&= \frac{2\pi \left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right) (1-x)|\vec{Q}_\perp|^2}{\sqrt{|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2} \sqrt{|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2}} \\
&= \frac{2\pi}{|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2} - 2\pi(1-x)|\vec{Q}_\perp|^2 \frac{\left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 + |\vec{Q}_\parallel|^2 \right)}{\left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^3} \\
&= \frac{2\pi}{|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2} - 2\pi(1-x) \frac{|\vec{Q}_\perp|^2}{\left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^2} \\
&\quad - 2\pi(1-x) \frac{|\vec{Q}_\parallel|^2 |\vec{Q}_\perp|^2}{\left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^3}. \tag{F.27}
\end{aligned}$$

Si reemplazamos Ec. (F.27) en Ec. (F.28) obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta_\xi &= -e^2(1-\xi) \int \frac{d|\vec{Q}_\parallel|^2}{2(2\pi)^4} \mathcal{M}[\vec{Q}_\parallel] \int_0^1 dx x^\lambda 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\vec{Q}_\perp|^2}{2} \exp\left(-|\vec{Q}_\perp|^2(1-x)\right) \\
&\quad \times \left\{ \left[\frac{2\pi}{|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2} - 2\pi(1-x) \frac{|\vec{Q}_\perp|^2}{\left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\pi(1-x) \frac{|\vec{Q}_\parallel|^2 |\vec{Q}_\perp|^2}{\left(|\frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}}|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^3} \right] \theta\left[\left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 - |\vec{Q}_\parallel|^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2\pi}{|\vec{Q}_\parallel|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2} - 2\pi(1-x) \frac{|\vec{Q}_\perp|^2}{\left(|\vec{Q}_\parallel|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\pi(1-x) \frac{|\vec{Q}_\parallel|^2 |\vec{Q}_\perp|^2}{\left(|\vec{Q}_\parallel|^2 + |\vec{Q}_\perp|^2 \right)^3} \right] \theta\left[|\vec{Q}_\parallel|^2 - \left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 \right] \right\}. \tag{F.28}
\end{aligned}$$

Para simplificar la integración Integramos por partes hasta obtener

$$\begin{aligned}
\delta_\xi = & -\frac{e^2(1-\xi)}{4} \int_0^\infty \frac{d|\vec{Q}_\parallel|^2}{(2\pi)^2} \mathcal{M}[\vec{Q}_\parallel] \int_0^1 dx x^\lambda \\
& \times \left\{ \theta \left(\left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 - |\vec{Q}_\parallel|^2 \right) \left[\left(1 - (1-x) + (1-x)^2 |\vec{Q}_\parallel|^2 \right) \int_0^\infty \frac{e^{-z(1-x)}}{\left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 + z} + \right. \right. \\
& - (1-x) \frac{|\vec{Q}_\parallel|^2}{2 \left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2} + \left. \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} |\vec{Q}_\parallel|^2 (1-x)^3 \right) \int_0^\infty e^{-z(1-x)} \frac{z}{\left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 + z} \right] + \\
& + \theta \left(|\vec{Q}_\parallel|^2 - \left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 \right) \left[\left(1 - (1-x) + (1-x)^2 |\vec{Q}_\parallel|^2 \right) \int_0^\infty \frac{e^{-z(1-x)}}{|\vec{Q}_\parallel|^2 + z} + \right. \\
& \left. \left. - \frac{(1-x)}{2} + \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} |\vec{Q}_\parallel|^2 (1-x)^3 \right) \int_0^\infty e^{-z(1-x)} \frac{z}{|\vec{Q}_\parallel|^2 + z} \right] \right\}, \tag{F.29}
\end{aligned}$$

donde solo hay que calcular las integrales

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{e^{-z(1-x)}}{y+z} = e^{y(1-x)} \Gamma[0, y(1-x)] \\
\int_0^\infty e^{-z(1-x)} \frac{z}{y+z} &= \frac{1}{1-x} - ye^{y(1-x)} \text{ExpIntegralE}[1, y(1-x)], \tag{F.30}
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $\left| \frac{\vec{P}_\parallel}{2\sqrt{\gamma}} \right|^2 = y$, $|\vec{Q}_\parallel|^2 = Q^2$ y reemplazando este resultado en δ_ξ y a su vez este resultado en Ec. (F.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(y) = & \frac{e^2}{4} \int_0^\infty \frac{dQ^2}{(2\pi)^2} \mathcal{M}[\vec{Q}_\parallel] \int_0^1 dx x^\lambda \left\{ \theta(y - Q^2) \right. \\
& \times \left[\{ 2(1+x) - (1-\xi)(1 - (1-x) + (1-x)^2 Q^2) \} e^{y(1-x)} \Gamma[0, y(1-x)] + \right. \\
& + (1-\xi)(1-x) \frac{Q^2}{2y} + \\
& - (1-\xi) \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} Q^2 (1-x)^3 \right) \left(\frac{1}{1-x} - ye^{y(1-x)} \text{ExpIntegralE}[1, y(1-x)] \right) \left. \right] + \\
& + \theta(Q^2 - y) \\
& \times \left[\{ 2(1+x) - (1-\xi)(1 - (1-x) + (1-x)^2 Q^2) \} e^{Q^2(1-x)} \Gamma[0, Q^2(1-x)] + \right. \\
& + (1-\xi) \frac{(1-x)}{2} + \\
& \left. \left. - (1-\xi) \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} Q^2 (1-x)^3 \right) \left(\frac{1}{1-x} - Q^2 e^{Q^2(1-x)} \text{ExpIntegralE}[1, Q^2(1-x)] \right) \right] \right\}. \tag{F.31}
\end{aligned}$$

Ya que $\text{ExpIntegralE}[1, y(1-x)] = \Gamma[0, y(1-x)]$, la anterior expresión se reduce a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(y) &= \frac{e^2}{4} \int_0^\infty \frac{dQ^2}{(2\pi)^2} \mathcal{M}[\vec{Q}_\parallel] \int_0^1 dx x^\lambda \left\{ \theta(y - Q^2) \right. \\
&\times \left[\left\{ 2(1+x) - (1-\xi) \left(1 - (1-x) + (1-x)^2 Q^2 - y \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} Q^2 (1-x)^3 \right) \right) \right\} \right. \\
&\times e^{y(1-x)} \Gamma[0, y(1-x)] + \\
&+ (1-\xi)(1-x) \frac{Q^2}{2y} + \\
&- (1-\xi) \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} Q^2 (1-x)^3 \right) \frac{1}{1-x} \left. \right] + \\
&+ \theta(Q^2 - y) \\
&\times \left[\left\{ 2(1+x) - (1-\xi) \left(1 - (1-x) + (1-x)^2 Q^2 - Q^2 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} Q^2 (1-x)^3 \right) \right) \right\} \right. \\
&\times e^{Q^2(1-x)} \Gamma[0, Q^2(1-x)] + \\
&+ (1-\xi) \frac{(1-x)}{2} + \\
&- (1-\xi) \left((1-x)^2 - \frac{1}{2} Q^2 (1-x)^3 \right) \frac{1}{1-x} \left. \right\}, \tag{F.32}
\end{aligned}$$

en variables adecuadas

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(y) &= \frac{e^2}{4} \int_0^\infty \frac{dz}{(2\pi)^2} \mathcal{M}[\vec{Q}_\parallel] \int_0^1 dx x^\lambda \left\{ \right. \\
&\times \left[\left\{ 2(1+x) - (1-\xi) \left(1 - (1-x) + (1-x)^2 z - y(1-x)^2 + \frac{1}{2} yz(1-x)^3 \right) \right\} \right. \\
&\times e^{y(1-x)} \Gamma[0, y(1-x)] + \\
&+ (1-\xi)(1-x) \left(\frac{z}{2y} - 1 + \frac{1}{2} z(1-x) \right) \left. \right] \theta(y-z) + \\
&\times \left[\left\{ 2(1+x) - (1-\xi) \left(1 - (1-x) + \frac{1}{2} z^2(1-x)^3 \right) \right\} \right. \\
&\times e^{z(1-x)} \Gamma[0, z(1-x)] + \\
&+ (1-\xi)(1-x) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z(1-x) \right) \left. \right] \theta(z-y) \left. \right\} \tag{F.33}
\end{aligned}$$

donde

$$\lambda = z + \frac{\mathcal{M}^2[\vec{Q}_\parallel] - i\epsilon}{2eB} - 1. \tag{F.34}$$

Bibliografía

- [1] J.S. Schwinger. *Proc. Nat. Acad. Sc.* **37** 452, 1951.
- [2] F.J. Dyson. *F.J. Dyson, Phys. Rev.* **75** 1736, 1949.
- [3] V.A. Miransky V.P. Gusynin and I.A. Shovkovy. *Phys. Lett. B* **349** 477 (1995). *Nucl. Phys. B* **563**, 361, 1999.
- [4] C.N. Leung and Y.J. Ng. *Phys. Rev. D* **55** 6504, 1997.
- [5] D.K. Hong. *Phys. Rev. D* **57**, 3759, 1998.
- [6] E.J. Ferrer and V. de la Incera. *Phys. Lett. B* **481**, 287, 2000.
- [7] V. I. Ritus. *Annals of Physics.* **09**, 555-582, 1972.
- [8] A.E.Shabad and V.V.Usov. *Phys.Rev.Lett.***96**,180401, 2006.
- [9] B. Jancovici. *Phys.Rev.***187**,2275-2276, 1969.
- [10] M. Demeur. *Acad. Roy. Bel., Classe Sci., Mem.* **28**,No.1643, 1953.
- [11] J. Schwinger. *Phys. Rev. D.* **82**, 664, 1951.
- [12] V. Giuzburg. *High Energy Gamma Ray Astrophysics.* North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [13] I. Fushiki E. H. Gudmundsson and C.J. Pethick. *Astrophys. J.***342**, 958, 1989.
- [14] R. C. Duncan and C. Thompson. *Astrophys. J.* **392** L9, 1992.
- [15] D. Lai and S.L. Shapiro. *Astrophys. J.* **383** 745 and references therein, 1991.
- [16] D. Grasso and H.R. Rubinstein. *Phys. Rep.* **348**, 163, 2001.
- [17] K. Enqvist. *Int. J. Mod. Phys. D7*, 331, 1998.
- [18] Y. Sofue M. Fujimoto and R. Wielebinski. *Ann. Rev.Astron. Astrophys.* **24**, 459, 1986.
- [19] M.R. Pennington. *Swimming with quarks. Preprint hep-ph/0504262*, 2005.
- [20] J.C. Ball and T. W. Chiu. *Phys. Rev. D* **22**, 2542, 1980.
- [21] J. Bernstein. *Elementary particles and their currents.* W.H. Freeman and Company, 1968.
- [22] T. Maskawa and H.Nakajima. *Prog. Theor. Phys.* **52** 1326, 1974.
- [23] P.I. Fomin and V.A. Miransky. *Phys. Lett.* **B64** 166, 1976.
- [24] R. Fukuda and T. Kugo. *Nucl. Phys.* **B117** 250, 1976.

-
- [25] P.I. Fomin v.P. Gusynin and V.A. Miransky. *Phys. Lett.* **B78** 136, 1978.
- [26] V.A. Miransky. *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [27] W.Greiner and J. Reinhart. *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [28] Hugo Reinhardt Reinhard Alkofer. *Chiral Quark Dynamics*. Springer-Verlag, 1995.
- [29] Y.Nambu and G.Jona-Lasinio. *Phys.Rev.* **122**, 345, 1961.
- [30] Y.Nambu and G.Jona-Lasinio. *Phys.Rev.* **124**, 246, 1961.
- [31] W.Dittrich and M. Reuter. *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*. Lecture Notes in Physics **220**, Springer-Verlag, 1985.
- [32] K. Lane T. Appelquist and U. Mahanta. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1553, 1988.
- [33] A. Ayala A. Bashir A. Raya y E. Rojas. *Phys.Rev.D* **73**, 105009, 2006.
- [34] A.A. Sokolov and I.M. Ternov. *Radiation from Relativistic Electrons*. American Institute of Physics New york, 1986.
- [35] E. Rojas A. Ayala A. Bashir y A. Raya. *Phys. Rev. D***77**,093004, 2008.
- [36] A.P. Prudnikov Yu. A. Brichkov y O.I. Marichev. *Integrals and Series volume 2: Special Functions*. Gordon and Breach Science Publishers, 1992.
- [37] A. Ayala A. Sánchez G. Piccinelli and S. Sahu. *Phys. Rev. D* **71**, 023004, 2005.
- [38] A. Raya IFM-UMICH. *sin publicar*.
- [39] A.V.S Smilga V.P. Gusynin. *Phys.Lett.***B450**, 267-274, 1999.
- [40] I. V. Selyuzhenkov [STAR Collaboration]. *Rom. Rep. Phys.* **58**, 049 [arXiv:nucl-ex/0510069]. 2006.
- [41] D. Kharzeev. *Phys. Lett. B* **633**, 260, 2006.
- [42] L. D. McLerran D. E. Kharzeev and H. J. Warringa. *Nucl.Phys.* **A803**,227-253, 2008.
- [43] E. S. Fraga and A. J. Mizher. *Phys.Rev.D* **78**, 025016, 2008.