



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“ MERCADO FINANCIERO CAMBIARIO
PESO-DÓLAR EN MÉXICO (1980-2008):
UN ANÁLISIS ECONOMÉTRICO”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

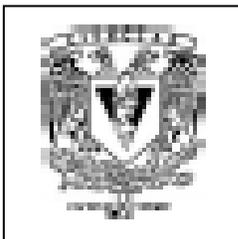
ACTUARIO

PRESENTA:

NOMBRE DEL ALUMNO
RAFAEL MACIAS Y DE MARIA Y CAMPOS

TUTOR
M. en C. MICHAEL ROJAS ROMERO

2008





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezo a mía tía Mary por todo su apoyo y paciencia, sin la cual nunca hubiera logrado mis objetivos profesionales. Todo se lo debo a ella.

Mi gratitud al Act. Mauricio Aguilar, Act. Jaime Vázquez Alamilla y al L. en C.C. Francisco Solsona.

Agradezco la asesoría y los conocimientos del Dr. Francisco López Herrera del Posgrado de la Facultad de Contabilidad y Administración.

Doy gracias a todo el personal académico y administrativo de la UNAM, en especial de la Facultad de Ciencias, motivarme sobretodo en los últimos momentos.

Mi sincero agradecimiento al Sr. Mario Arturo Pérez Rangel

Agradezco a los sinodales por transmitirme su alto nivel académico y su calidad humana en la elaboración de esta tesis.

DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno

Macías y De María y Campos
Rafael
55 24 53 33
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
405050851

2. Datos del tutor

M en C
Michael
Rojas
Romero

3. Datos del sinodal 1

Dra
Guillermina
Eslava
Gómez

4. Datos del sinodal 2

M en C
Jesica
Hernández
Rojano

5. Datos del sinodal 3

Act
Ernesto Gabriel
Hernández
Pérez

6. Datos del sinodal 4

Act
Maribel Haydeé
Alvarado
Castañeda

7. Mercado financiero cambiario peso-dólar en México (1980-2008): un análisis econométrico

92 p
2008

INDICE

Introducción	4
<p>Capítulo I. Modelos econométricos para series de tiempo estacionarias.</p> <p>1.1) Autorregresivos de orden p 1.2) Promedios móviles de orden q 1.3) Autorregresivos y promedios móviles de orden p y q 1.4) Autorregresivos y promedios móviles integrados de orden p, d y q. 1.5) Esperanzas, Varianzas y Covarianzas 1.6) Demostración de condiciones de estacionariedad e invertibilidad 1.6.1) Estacionariedad 1.6.2) Invertibilidad 1.7) Pruebas de raíces unitarias (DF, ADF, Phillips-Perron, KPSS) 1.7.1) Prueba Dickey Fuller 1.7.2) Prueba Phillips Perron 1.7.3) Prueba Dickey Fuller Aumentada 1.7.4) Prueba Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin 1.8) Estimación de parámetros 1.9) Función pronóstico 1.9.1) Pronóstico de series estacionarias 1.9.2) Pronóstico de series no estacionarias 1.10) Metodología Box Jenkins</p>	5
<p>Capítulo II. Análisis econométrico de la serie Tipo de Cambio Real y Nominal 1980-2008</p> <p>2.1) Aplicación de Box Jenkins a las series Tipo de Cambio Real y Nominal</p>	34
Resumen y Conclusiones	53
Anexos	56
Bibliografía	91

MERCADO FINANCIERO CAMBIARIO PESO-DÓLAR EN MÉXICO (1980-2008): UN ANÁLISIS ECONOMÉTRICO

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta tesis es analizar econométricamente el mercado del tipo de cambio del peso mexicano y el dólar estadounidense para el período enero de 1980 a marzo de 2008. Con este fin, se utilizan conceptos y métodos de la econometría de series de tiempo estacionarias.

Durante el último trimestre del año 2002, los primeros meses del 2003 y el tercer trimestre de 2008 se observó una devaluación del peso respecto al dólar. La explicación más extendida de este comportamiento es que la incertidumbre y los riesgos cambiarios, en el contexto internacional actual, se tradujeron en la salida de flujos de capitales de la esfera del peso lo que se tradujo en su devaluación. De acuerdo con Carstens y Werner en 1999 esta dinámica de los mercados cambiarios, pone en el centro de atención el análisis del mercado del tipo de cambio entre el peso y el dólar, más aún cuando la evolución del tipo de cambio en la economía mexicana es una variable fundamental, en la medida en que se encuentra fuertemente relacionada con la trayectoria de otras variables como la tasa de inflación, el tipo de interés nominal o la balanza comercial.

Algunos conceptos importantes que se incluyen en esta tesis son los procesos ARIMA que se conciben como mecanismos generadores de los datos del tipo de cambio peso-dólar. Y el de un mercado eficiente que es un mercado en donde los precios siempre reflejan completamente dicha información se le denomina eficiente. La utilización de pruebas unitarias durante este proceso es fundamental, en especial, la utilización de la Prueba de Dickey Fuller.

Para abordar el objetivo propuesto, esta tesis se divide en dos capítulos, un resumen y conclusiones y tres anexos. El primer capítulo contiene conceptos teóricos acerca de procesos ARIMA. En el capítulo dos se presenta un análisis econométrico del tipo de cambio peso/dólar utilizando conceptos de los procesos ARIMA. Enseguida de este capítulo, se presentan resultados obtenidos del este análisis y algunas conclusiones. La tesis termina con cinco anexos: el primero contiene la información utilizada en el análisis econométrico y el segundo se refiere al concepto de eficiencia del mercado cambiario. Este último anexo se presenta como un comentario referido a la posibilidad de obtener ganancias extraordinarias en el mercado cambiario mexicano en algunos subperíodos. En el tercero se encontrarán algunas demostraciones correspondientes a las ecuaciones de las secciones de teoría. En el cuarto se presentan todas las corridas en el paquete estadístico E-Views 5.0 del Tipo de Cambio Real y Nominal. Finalmente, en el quinto se encuentran las gráficas de x_t contra \hat{x}_t .

CAPÍTULO I. MODELOS ECONOMÉTRICOS PARA SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

Para los propósitos de esta tesis, un proceso estocástico se define como una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Si Y denota una variable aleatoria y si es continua, la denotamos como $Y(t)$, pero si es discreta la denotamos como Y_t

Un proceso estocástico es **estacionario** si la media y la varianza son constantes durante el tiempo y el valor de la covarianza entre dos períodos de tiempo dependen sólo de la distancia entre dichos dos períodos y no del tiempo actual en el que se calcula, es decir si

$$\begin{aligned} \text{Media} & E(Y_t) = \mu \\ \text{Varianza} & \text{Var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2 \\ \text{Covarianza} & \gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] \end{aligned}$$

donde γ_k es la covarianza con rezago k o dicho de otro modo la covarianza entre los valores de Y_t y Y_{t+k} . Si $k=0$, obtenemos γ_0 que es la varianza de Y o σ^2 . Si $k=1$, γ_1 es la covarianza entre dos valores de Y adyacentes. Ahora supongamos que cambiamos el origen de Y de Y_t a Y_{t+m} . Si Y_t es estacionario, la media, la varianza y las autocovarianzas de Y_{t+m} deberían de ser las mismas que las de Y_t . Las series de tiempo que no son estacionarias tendrán una media y una varianza variantes en el tiempo.

Los mecanismos generadores de los datos del tipo de cambio peso/dólar que se consideran en esta tesis y que fueron definidos por Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003) son procesos de la forma autorregresiva de medias móviles o ARMA. :

$$\theta(B)\bar{Z}_t = \phi(B)a_t$$

1.1) MODELO AUTORREGRESIVOS DE ORDEN P (AR(p))

Como caso general de un proceso autorregresivo consideremos el proceso AR(p) que se describe

$$\bar{Z}_t = \theta_1 \bar{Z}_{t-1} + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} + a_t$$

mediante la ecuación
en el cual $\bar{Z}_t = Z_t - \mu$.

Un proceso conocido como AR(p) será estacionario si y sólo si las raíces de la siguiente ecuación característica se encuentran fuera del círculo unitario:

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_p x^p = 0$$

Podemos además utilizar el teorema de Schur¹ para encontrar las condiciones de estacionariedad en términos de los

¹ Los modulos de las raíces de la ecuación $g^p - a_1 g^{p-1} - a_2 g^{p-2} - \dots - a_{p-1} g - a_p = 0$ serán menores que la unidad si y sólo si los p determinantes son positivos.

parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$. Los p determinantes deben ser positivos

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \theta_p \\ \theta_p & -1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \theta_p & \theta_{p-1} \\ \theta_1 & -1 & 0 & \theta_p \\ \theta_p & 0 & -1 & \theta_1 \\ \theta_{p-1} & \theta_p & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_p = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \theta_p & \theta_{p-1} & \dots & \theta_1 \\ \theta_1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \theta_p & \dots & \theta_2 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \theta_{p-1} & \theta_{p-2} & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & \theta_p \\ \theta_p & 0 & \dots & 0 & -1 & \theta_1 & \dots & \theta_{p-1} \\ \theta_{p-1} & \theta_p & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & \theta_{p-2} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_p & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Otra forma de verificar el supuesto de estacionariedad es a través de las autocorrelaciones usando las ecuaciones de Yule-Walker respectivas al proceso AR(p), esto significa

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \theta_1 + \theta_2 \rho_1 + \dots + \theta_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \theta_1 \rho_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p \rho_{p-2} \\ &\dots \\ \rho_p &= \theta_1 \rho_{p-1} + \theta_2 \rho_{p-2} + \dots + \theta_p \end{aligned} \quad (1)$$

de donde se obtienen los valores de las primeras p autocorrelaciones en función de los parámetros autorregresivos.

Las otras autocorrelaciones se obtienen de la siguiente ecuación

$$\rho_k = \theta_1 \rho_{k-1} + \theta_2 \rho_{k-2} + \dots + \theta_p \rho_{k-p}, \quad k \geq p+1$$

que es otra forma de escribir la ecuación en diferencia

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p) \rho_k = 0, \quad k = p+1, p+2, \dots$$

cuyas condiciones iniciales están dadas por (1). Por otra parte, es conveniente señalar que un proceso AR(p) estacionario tiene asociada una función de autocorrelación que decrece rápidamente hasta alcanzar el cero de manera exponencial como se verá a continuación.

Considérese un proceso AR(p) estacionario, cumpliéndose entonces que

$$\theta(B) \rho_k = 0 \text{ para } k > p$$

en donde las raíces de la siguiente ecuación están fuera del círculo unitario²

$$\theta(x) = (1 - g_1 x)(1 - g_2 x) \dots (1 - g_p x) = 0$$

esto es³, $|g_i| < 1$ para $i = 1, \dots, p$. Ahora bien, la solución de $\theta(B) \rho_k = 0$ es

² Esto se debe al Teorema Fundamental del Álgebra establece que un polinomio en una variable, no constante y a coeficientes complejos, tiene tantas raíces como su grado dado que las raíces se cuentan con sus multiplicidades.

$$\rho_k = c_1 g_1^k + c_2 g_2^k + \dots + c_p g_p^k \quad (2)$$

en donde puede apreciarse que ρ_k tenderá a cero tan rápido como lo indique el valor más grande de las g 's, digamos g_p , pero siempre de manera exponencial porque $|g_i| < 1$. Si en cambio g_p fuese cercano a uno, o sea $g_p = 1 - \varepsilon$ con ε un valor pequeño positivo, entonces ρ_p tendrá el siguiente desarrollo.

Desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} c_p g_p^k &= c_p (1 - \varepsilon)^k \\ &= c_p (1 - k\varepsilon + k^2 \varepsilon^2 - \dots) \\ &\approx c_p (1 - k\varepsilon) \\ &\approx c_p + (-c_p \varepsilon)k \end{aligned}$$

que es prácticamente una recta pero con pendiente $-c_p \varepsilon$ lo cual hace que el decrecimiento de ρ_k a cero sea más lento conforme ε sea más pequeño. Dicho de otro modo, conforme g_p sea más cercano a la unidad. Debe tomarse en cuenta que si Z_t es un proceso estacionario, la varianza de cualquier combinación lineal de las N variables aleatorias se $\bar{Z}_t, \bar{Z}_{t-1}, \dots, \bar{Z}_{t-N+1}$ digamos $L_t = d_1 \bar{Z}_t + d_2 \bar{Z}_{t-1} + \dots + d_N \bar{Z}_{t-N+1}$ obtiene como

$$\begin{aligned} Var(L_t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i d_j Cov(\bar{Z}_{t-i+1}, \bar{Z}_{t-j+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i d_j \tau_{|j-i|} \end{aligned}$$

Dicha varianza será siempre positiva, a menos que los coeficientes d_1, d_2, \dots, d_N y T_N sean todos cero. En términos matriciales $Var(L_t) = d' T_N d > 0$ donde $d' = (d_1, d_2, \dots, d_N)$ y T_N es la matriz simétrica

$$T_N = \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{N-1} \\ \tau_1 & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{N-2} \\ & & & \dots & \\ \tau_{N-1} & \tau_{N-2} & \tau_{N-3} & \dots & \tau_0 \end{bmatrix}$$

que debe ser positiva definida. Por lo tanto, la matriz de autocorrelaciones quedaría como sigue

$$Q_N = \tau_0^{-1} T_N = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{N-2} \\ & & & \dots & \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \rho_{N-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

debe ser también positiva definida. Esto implica además que tanto el determinante así como todos sus menores principales deber ser positivos. Esto nos lleva a necesitar que todos los determinantes

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_p \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ & & & \dots & \\ \rho_p & \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

³ Esto se debe a que $x > 1$ y a que $g = \frac{1}{x} < 1$.

que a continuación se muestran deben ser todos positivos a fin de que el proceso AR(p) correspondiente sea estacionario

Si el proceso AR(p) resulta ser estacionario es posible representarlo como una suma ponderada de choques aleatorios con ponderaciones convergentes. En otras palabras debe poder escribirse

$$\bar{Z}_i = a_i - \pi_1 a_{i-1} - \pi_2 a_{i-2} - \dots \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| = \text{constante} \quad (3)$$

Los coeficientes π_i para $i=1,2,\dots$ se obtienen a partir del hecho de que un proceso AR(p) estacionario se debe expresar como $\theta(B)\bar{Z}_i = a_i$ y $\bar{Z}_i = \pi(B)a_i$ o dicho de otro modo

$$\pi(B) = 1/\theta(B) \text{ y } 1 = \theta(B)\pi(B) \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta(B) &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{p-1} B^{p-1} - \theta_p B^p), \text{ de manera que} \\ 1 &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{p-1} B^{p-1} - \theta_p B^p)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) \\ &= (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) - \theta_1 (B - \pi_1 B^2 - \pi_2 B^3 - \dots) - \dots \\ &\quad - \theta_{p-1} (B^{p-1} - \pi_1 B^p - \pi_2 B^{p+1} - \dots) - \theta_p (B^p - \pi_1 B^{p+1} - \pi_2 B^{p+2} - \dots) \\ &= 1 - (\pi_1 + \theta_1)B - (\pi_2 - \theta_1 \pi_1 + \theta_2)B^2 - \dots \\ &\quad - (\pi_{p-1} - \theta_1 \pi_{p-2} - \theta_2 \pi_{p-3} - \dots + \theta_{p-1})B^{p-1} \\ &\quad - (\pi_p - \theta_1 \pi_{p-1} - \theta_2 \pi_{p-2} - \dots - \theta_{p-1} \pi_1 + \theta_p)B^p - \dots \end{aligned}$$

así que, para que se cumpla esta última relación, todos los coeficientes que aparecen multiplicando a B^i para $i \geq 1$ deben ser cero, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \pi_1 &= -\theta_1 \\ \pi_2 &= \theta_1 \pi_1 - \theta_2 \\ &\dots \\ \pi_{p-1} &= \theta_1 \pi_{p-2} + \theta_2 \pi_{p-3} + \dots - \theta_{p-1} \\ \pi_p &= \theta_1 \pi_{p-1} + \theta_2 \pi_{p-2} + \dots + \theta_{p-1} \pi_1 - \theta_p \text{ y en general} \\ \pi_i &= \theta_1 \pi_{i-1} + \theta_2 \pi_{i-2} + \dots + \theta_{i-1} \pi_1 - \theta_i \text{ para } i \geq 2 \text{ con } \theta_i = 0 \text{ para } i > p \end{aligned}$$

Es de hacerse notar que el mismo proceso AR(p) puede representarse con p parámetros autorregresivos o mediante un número infinito de coeficientes π asociados con el proceso a_i .

Sin embargo, es preferible en la práctica trabajar con un número finito que con un número infinito de parámetros, sobretodo si la explicación que se tiene del fenómeno es la misma. Por lo que la ecuación (3) será de mucha utilidad si todos los coeficientes π_1, π_2, \dots fuesen distintos de cero, como ocurre con el caso de un proceso AR(1) estacionario, en el cual $(1 - \theta B)\bar{Z}_i = a_i$ implica

$$\bar{Z}_i = (1 - \theta B)^{-1} a_i = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) a_i$$

de manera que $\pi_i = -\theta^i$, para $i=1,2,\dots$ y por tanto $\pi_i \neq 0$ para toda i . Varias veces, dichos coeficientes son diferentes a cero hasta cierto número, a partir del cual todos son cero, o dicho de otro modo se tiene

$$\pi_1 \neq 0, \pi_2 \neq 0, \dots, \pi_q \neq 0, \pi_{q+1} = 0, \pi_{q+2} = 0, \dots$$

Como ejemplo, se podría pensar en el caso extremo en el que p fuese infinito y que el proceso estacionario tuviese la representación

$$(1 - \theta B + \theta^2 B^2 - \dots)\bar{Z}_i = a_i \text{ con } |\theta| < 1 \quad (5)$$

La cual también se puede expresar como

$$\begin{aligned}\bar{Z}_t &= (1 - \theta B + \theta^2 B^2 - \dots)^{-1} a_t \\ &= (1 + \theta B) a_t\end{aligned}\tag{6}$$

$$= (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) a_t\tag{7}$$

en donde $\pi_1 = -\theta$ y $\pi_i = 0$ para $i \geq 2$.

1.2) MODELO PROMEDIOS MÓVILES DE ORDEN Q (MA(q))

Los modelos de promedios móviles fueron introducidos por Yule en 1926 y Slutsky en 1927 según indica Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003). La idea central se basa en representar un proceso estocástico $\{\bar{Z}_t\}$ cuyos valores pueden ser dependientes unos de otros, como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes $\{a_t\}$

o sea

$$\bar{Z}_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q) a_t = \phi(B) a_t\tag{8}$$

en donde $\{\bar{Z}_t\}$ representa las desviaciones de $\{Z_t\}$ respecto a su nivel medio μ y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ son las ponderaciones o parámetros de promedios móviles asociados con los choques aleatorios en los periodos t-1, t-2, ..., t-q, respectivamente. Se debe observar también que la suma $\sum_{i=1}^q |\phi_i|$ al considerar un número finito de sumandos, es una constante finita. A menos que alguna ϕ_i fuese infinito, pero esto significa que \bar{Z}_t es infinito.

Además, podríamos darle la interpretación de que dado un proceso que se encuentre en equilibrio, las fluctuaciones alrededor de ese punto de equilibrio, llámense $\{\bar{Z}_t\}$ son originadas por choques asociados con eventos inesperados. Tales choques no necesariamente se absorben de manera instantánea, sino que pueden seguir causando efectos aún después de transcurrido cierto tiempo o periodos y además, la intensidad del choque se ve reflejado en el valor de su ponderación ϕ_i . En general, un proceso estocástico se dice que sigue un esquema de promedios móviles de orden $q \geq 1$ si se le puede representar como

$$\bar{Z}_t = a_t - \phi_1 a_{t-1} - \phi_2 a_{t-2} - \dots - \phi_q a_{t-q} \text{ con } \bar{Z}_t = Z_t - \mu,$$

en donde μ es el nivel del proceso, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ son los parámetros de promedios móviles y a_t es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza constante σ_a^2 .

Como se observó todo proceso MA es estacionario y se observa en las fórmulas que se enlistan a continuación que, ni la media, ni la varianza, ni las covarianzas dependen del tiempo

$$E(\bar{Z}_t) = E(Z_t) - \mu = 0$$

$$\gamma_0 = (1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_q^2) \sigma_a^2\tag{9}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\phi_k + \phi_1 \phi_{k+1} + \dots + \phi_{q-k} \phi_q) \sigma_a^2, & \text{si } k=1, \dots, q \\ 0, & \text{si } k \geq q+1 \end{cases}$$

y para permitir su generalidad se define $\phi_0 = \phi_{q+1} = \phi_{q+2} = \dots = 0$.

De aquí se deriva la función de autocorrelación

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\phi_k + \phi_1\phi_{k+1} + \dots + \phi_{q-k}\phi_q}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_q^2}, & \text{si } k=1, \dots, q \\ 0, & \text{si } k \geq q+1 \end{cases}$$

la cual nos dice que MA (q) tiene una memoria limitada a q períodos.

Las condiciones de invertibilidad se obtienen por dualidad con las de estacionariedad para un proceso AR(q). Por lo que de acuerdo al teorema de Schur para que un MA(q) sea invertible se requiere que los q determinantes sean todos positivos.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \phi_q \\ \phi_q & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \phi_q & \phi_{q-1} \\ \phi_1 & -1 & 0 & \phi_q \\ \phi_q & 0 & -1 & \phi_1 \\ \phi_{q-1} & \phi_q & 0 & -1 \end{vmatrix}, \dots$$

$$D_q = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \phi_q & \phi_{q-1} & \dots & \phi_1 \\ \phi_1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \phi_q & \dots & \phi_2 \\ \dots & \dots \\ \phi_{q-1} & \phi_{q-2} & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & \phi_q \\ \phi_q & 0 & \dots & 0 & -1 & \phi_1 & \dots & \phi_{q-1} \\ \phi_{q-1} & \phi_q & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & \phi_{q-2} \\ \dots & \dots \\ \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_q & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Si el proceso resulta ser invertible, entonces admitirá la representación

$$\lambda(B)\bar{Z}_t = \bar{Z} - \lambda_1\bar{Z}_{t-1} - \lambda_2\bar{Z}_{t-2} - \dots = a_t$$

con $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$, donde los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ se obtienen de $\lambda(B)\phi(B)=1$ lo cual implica que

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2 - \dots)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_q B^q) \\ &= (1 - \phi^1 B - \dots - \phi_q B) - \lambda_1 (B - \phi_1 B^2 - \dots - \phi_q B^{q+1}) - \lambda_2 (B^2 - \phi_1 B^3 - \dots - \phi_q B^{q+2}) - \dots \\ &= 1 - (\phi_1 + \lambda_1)B - (\phi_2 - \lambda_1\phi_1 + \lambda_2)B^2 - (\phi_3 - \lambda_1\phi_2 - \lambda_2\phi_1 + \lambda_3)B^3 - \dots \end{aligned}$$

de tal forma que se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\phi_1 \\ \lambda_2 &= \lambda_1\phi_1 - \phi_2 \\ \lambda_3 &= \lambda_2\phi_1 + \lambda_1\phi_2 - \phi_3 \\ &\dots \\ \lambda_j &= \lambda_{j-1}\phi_1 + \lambda_{j-2}\phi_2 + \dots + \lambda_1\phi_{j-1} - \phi_j, \quad j > q\end{aligned}$$

en donde $\phi_j = 0$ para $j > q$.

1.3) MODELOS AUTORREGRESIVOS Y PROMEDIOS MÓVILES DE ORDEN P Y Q (ARMA(p,q))

Una manera de generalizar los modelos AR y MA, consiste en combinar ambas clases de modelos para obtener lo que se denomina modelos autorregresivos y de promedios móviles (ARMA), los cuales fueron ampliamente estudiados por Wold en 1938 y Bartlett en 1946 según refiere Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003). Este proceso ARMA(p,q) se representa mediante $\theta(B)\bar{Z}_t = \phi(B)a_t$ donde $\theta(B)$ y $\phi(B)$ son polinomios de retraso de orden p y q respectivamente, $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco y \bar{Z}_t es la serie de desviaciones de la variable Z_t respecto a su nivel μ .

Esta generalización nace debido a que las series de tiempo que se observan en la realidad, muchas veces presentan características tanto de los procesos AR como de los MA. Por otro lado, se desea construir modelos que incluyan el menor número de parámetros lo cual puede lograrse mezclando parámetros tanto autorregresivos como de promedios móviles.

Como acabamos de decir un proceso ARMA(p,q) se representa a través de la siguiente igualdad

$$\theta(B)\bar{Z}_t = \phi(B)a_t$$

es decir,

$$\bar{Z}_t - \theta_1\bar{Z}_{t-1} - \dots - \theta_p\bar{Z}_{t-p} = a_t - \phi_1a_{t-1} - \dots - \phi_qa_{t-q} \quad (10)$$

Para que este proceso sea estacionario es necesario que las raíces de $\theta(x) = 0$ se encuentren fuera del círculo unitario, y para que sea invertible la condición es que las raíces de la ecuación $\phi(x) = 0$ se encuentren también fuera del círculo unitario. Si eso llega a suceder, entonces el proceso admite

$$\begin{aligned}\bar{Z}_t &= \frac{\phi(B)}{\theta(B)}a_t = \pi(B)a_t, \quad \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\bar{Z}_t = \lambda(B)\bar{Z}_t = a_t \\ \text{con } \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| < \infty \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty; \quad i=1,2,\dots \text{ y } j=1,2,\dots\end{aligned}$$

las representaciones AR y MA siguientes

en donde los coeficientes π_i , $i=1,2,\dots$ y λ_j , $j=1,2,\dots$ se obtienen al igualar coeficientes de potencias del operador B en las ecuaciones

$$\begin{aligned}(1 - \pi_1B - \pi_2B^2 - \dots)(1 - \theta_1B - \theta_2B^2 - \dots - \theta_pB^p) &= 1 - \phi_1B - \phi_2B^2 - \dots - \phi_qB^q \\ (1 - \lambda_1B - \lambda_2B^2 - \dots)(1 - \phi_1B - \phi_2B^2 - \dots - \phi_qB^q) &= 1 - \theta_1B - \theta_2B^2 - \dots - \theta_pB^p.\end{aligned}$$

De la ecuación (10) se sigue que si el proceso es estacionario, la media es cero. Por otra parte para

$$\begin{aligned}k \geq 0, \quad \gamma_k &= E(\bar{Z}_t\bar{Z}_{t-k}) = \theta_1E(\bar{Z}_{t-1}\bar{Z}_{t-k}) + \theta_2E(\bar{Z}_{t-2}\bar{Z}_{t-k}) + \dots + \theta_pE(\bar{Z}_{t-p}\bar{Z}_{t-k}) \\ &\quad + E(a_t\bar{Z}_{t-k}) - \phi_1E(a_{t-1}\bar{Z}_{t-k}) - \dots - \phi_qE(a_{t-q}\bar{Z}_{t-k})\end{aligned} \quad (11)$$

en donde \bar{Z}_{t-k} esta afectada por los choques aleatorios $a_{t-k}, a_{t-k-1}, \dots$ pero es independiente de $a_{t-k+1}, a_{t-k+2}, \dots$ y $E(a_{t-i}\bar{Z}_{t-k}) = 0$ si $k > i$. Por consiguiente la ecuación (11) da como resultado

$$\gamma_k = \theta_1 \gamma_{k-1} + \theta_2 \gamma_{k-2} + \dots + \theta_p \gamma_{k-p}$$

para $k > p$ en tanto que para $k \leq q$, γ_k involucra $\phi_k, \phi_{k+1}, \dots, \phi_q$. En particular, la varianza resulta de la ecuación

$$\gamma_0 = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \dots + \theta_p \gamma_p - \sigma_a^2 - \phi_1 E(a_{t-1} \bar{Z}_t) - \dots - \phi_q E(a_{t-q} \bar{Z}_t)$$

la cual debido a $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ tiene que ser resuelta simultáneamente con las expresiones para estas p autocovarianzas.

Cabe destacar que

$$E(a_{t-i} \bar{Z}_t) = E(a_{t-i-1} \bar{Z}_{t-1}) = E(a_{t-i-2} \bar{Z}_{t-2}) \dots \text{ para } i=0, +1, \dots \text{ y}$$

$$E(a_t \bar{Z}_t) = \sigma_a^2 \text{ y}$$

$$E(a_{t-i} \bar{Z}_t) = \theta_1 E(\bar{Z}_{t-1} a_{t-i}) + \theta_2 E(\bar{Z}_{t-2} a_{t-i}) + \dots + \theta_i E(\bar{Z}_{t-i} a_{t-i}) - \phi_i \sigma_a^2 \text{ con } i=1, 2, \dots, \max(p, q)$$

$$\text{donde } \phi_{q+1}, \phi_{q+2}, \dots, \phi_p = 0 \text{ si } q < p \text{ y } \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \dots = \theta_q = 0 \text{ si } p < q.$$

Con respecto a las autocorrelaciones para procesos ARMA(p,q), éstas se obtienen para retrasos mayores que q, de la relación

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \theta_1 \rho_{k-1} + \theta_2 \rho_{k-2} + \dots + \theta_p \rho_{k-p}, \quad k > p$$

y, para retrasos menores que q, la autocorrelación ρ_k involucra a $\phi_k, \phi_{k+1}, \dots, \phi_q$. Esto significa que si $q < p$, la FAC estará determinada sólo por la ecuación en diferencia

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p) \rho_k = 0, \quad k > p$$

sujeta a las p condiciones iniciales regidas por $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$. Por otra parte, si $p \leq q$, q autocorrelaciones iniciales $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ no tendrán el comportamiento general de la función de autocorrelación, pero las autocorrelaciones $\rho_{q+1}, \rho_{q+2}, \dots$ se comportarán de acuerdo con la ecuación

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p) \rho_k = 0, \quad k > q$$

en diferencia

y las p condiciones iniciales $\rho_{q-p+1}, \rho_{q-p+2}, \dots, \rho_q$.

Es importante hacer notar que hemos hablado de modelos estacionarios, pero en la práctica lo más usual es que las series que se encuentran sean no estacionarias. Si se trata de una serie con una tendencia estocástica entonces se podrá eliminar la misma mediante la aplicación del operador diferencia, lo cual da origen a los modelos ARIMA que se verán en el siguiente inciso.

Si por el contrario la no estacionariedad se debe a que la varianza no es constante entonces se recomienda estabilizar la varianza de la serie aplicando una de varias transformaciones. Un ejemplo de transformación sería la Box-Cox

$$T(\bar{Z}_t) = \begin{cases} Z_t^\lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(Z_t) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

1.4) MODELO AUTORREGRESIVOS Y PROMEDIOS MÓVILES INTEGRADOS DE ORDEN P, D Y Q (ARIMA(p,d,q))

Los modelos autorregresivos e integrados de promedios móviles, o mejor conocidos como ARIMA, son una generalización de los modelos ARMA estudiados en el inciso anterior. En 1955, de acuerdo

con Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003), Yaglom sugirió la posibilidad de que una cierta clase de no estacionariedad mostrada por algunas series de tiempo, podía tener una representación distinta mediante la simple toma sucesiva de diferencias de la serie original. Esto permite gran flexibilidad de representación de los modelos ARMA ya que al aplicar el operador diferencia ∇^d se elimina una posible tendencia polinomial de orden d en la serie analizada. En otras palabras, si el proceso original $\{\bar{Z}_t\}$ es no estacionario causado por una tendencia polinomial estocástica es posible construir un proceso estacionario $\{W_t\}$ en donde

$$W_t = \nabla^d \bar{Z}_t \quad \forall t \quad (12)$$

Para esta nueva serie obtenida podría ser posible obtener un modelo ARMA

$$\theta(B)W_t = \phi(B)a_t$$

que es equivalente a considerar el modelo ARIMA

$$\theta(B)\nabla^d \bar{Z}_t = \phi(B)a_t, \quad d \geq 1 \quad (13)$$

para $\{\bar{Z}_t\}$ en donde $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco. Cuando nos referimos a que es un modelo integrado lo que queremos decir es que \bar{Z}_t se obtiene de la igualdad (12) por inversión del operador ∇^d dando como resultado una suma infinita o mejor conocida como una integración de términos W_t . Esto se puede ver cuando aplicamos la serie de Mclaurin a¹⁴ $(1-B)^{-n}$ con n entero. Al hacerlo obtenemos

$$(1-B)^{-n} = 1 + nB + \frac{n(n+1)}{2!}B^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}B^3 + \dots$$

Y de este resultado sabríamos que el inverso del operador

$$\nabla \text{ es } \nabla^{-1} = (1-B)^{-1} = 1 + B + B^2 + \dots$$

$$\text{y si } W_t = \nabla \bar{Z}_t \text{ entonces } \bar{Z}_t = \nabla^{-1}W_t = W_t + W_{t-1} + W_{t-2} + \dots$$

Se expresa un modelo de este tipo como ARIMA(p,d,q) que se refiere a que consta de un polinomio autorregresivo de orden p, de una diferencia de orden d y de un polinomio de promedios móviles de orden q. Por lo que el modelo (13) se escribe como

$$W_t - \theta_1 W_{t-1} - \dots - \theta_p W_{t-p} = a_t - \phi_1 a_{t-1} - \dots - \phi_q a_{t-q} \text{ con } W_t = \nabla^d \bar{Z}_t \quad (15)$$

Debido a que nos interesan los modelos estacionarios e invertibles, se requiere que las raíces $\theta(x)=0$ y $\phi(x)=0$

se encuentren fuera del círculo unitario, o bien, si se considera como operador autorregresivo generalizado a

$$\varphi(B) = \theta(B)\nabla^d \quad (16)$$

la condición es que d de las raíces de $\varphi(x)=0$ sean unitarias, mientras que las restantes deben estar fuera del círculo unitario. Con el uso de la expresión (16) la relación (15) se convierte en

$$\bar{Z}_t = \varphi_1 \bar{Z}_{t-1} + \varphi_2 \bar{Z}_{t-2} + \dots + \varphi_{p+d} \bar{Z}_{t-p-d} + a_t - \phi_1 a_{t-1} - \dots - \phi_q a_{t-q} \quad (17)$$

y, la representación en términos de suma ponderada de choques aleatorios resulta de la relación

$$\bar{Z}_t = \varphi^{-1}(B)\phi(B)a_t = \pi(B)a_t$$

de donde se deduce que

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d})(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q)$$

y que las ponderaciones π deben satisfacer la ecuación en diferencia⁴

$$\varphi(B)\pi_j = \theta(B)\nabla^d \pi_j = 0 \text{ para } j > \max\{p+d-1, q\}$$

⁴ Esto se logra multiplicando a (16) por ambos lados por π_j .

De la misma forma, si el proceso que indica (17) es invertible, se tiene

$$\lambda(B)\bar{Z}_t = \phi^{-1}(B)\varphi(B)\bar{Z}_t = a_t \quad (18)$$

con las ponderaciones λ que satisfacen

$$\phi(B)\lambda_j = 0 \text{ para } j > \max\{p+d,q\}.$$

En esta tesis, las series de tiempo económicas se estudian con un enfoque de proceso estocástico discreto. En el apartado que sigue se definen algunos conceptos de este tipo de procesos.

Por otra parte basta conocer la media, la varianza y las autocovarianzas para caracterizar una serie estacionaria.

1.5) Esperanzas, Varianzas y Covarianzas

A continuación se obtiene las esperanzas, las varianzas y la covarianzas para cada uno de los modelos.

- CASO AR(p)

Sea

$$\bar{Z}_t = \theta_1\bar{Z}_{t-1} + \theta_2\bar{Z}_{t-2} + \theta_3\bar{Z}_{t-3} + \dots + \theta_p\bar{Z}_{t-p} + a_t$$

despejando algunos términos resulta en

$$\bar{Z}_t - \theta_1\bar{Z}_{t-1} - \theta_2\bar{Z}_{t-2} - \theta_3\bar{Z}_{t-3} - \dots - \theta_p\bar{Z}_{t-p} = a_t$$

ocupando el operador rezago se tiene

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p) \bar{Z}_t = a_t$$

y despejando

$$\bar{Z}_t = \frac{1}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p)} a_t$$

sacando esperanzas

$$E(\bar{Z}_t) = \frac{1}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p)} E(a_t) = 0$$

Para obtener la varianza se tiene

$$Var(\bar{Z}_t) = E[(\bar{Z}_t - \mu)^2] = E[\bar{Z}_t^2]$$

pero

$$E[\bar{Z}_t \bar{Z}_t] = E[\theta_1 \bar{Z}_{t-1} \bar{Z}_t + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} \bar{Z}_t + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} \bar{Z}_t + a_t \bar{Z}_t]$$

así que

$$\gamma_0 = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \dots + \theta_p \gamma_p + \gamma_e^2$$

Para obtener las siguientes covarianzas seguimos un procedimiento similar. Como las covarianzas son simétricas tenemos lo siguiente

$$Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t+1}] = Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-1}] = E[(\bar{Z}_t - \mu)(\bar{Z}_{t-1} - \mu)] = E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-1}]$$

esto es igual a

$$E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-1}] = E[\theta_1 \bar{Z}_{t-1} \bar{Z}_{t-1} + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} \bar{Z}_{t-1} + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} \bar{Z}_{t-1} + a_t \bar{Z}_{t-1}]$$

$$\gamma_1 = \theta_1 \gamma_0 + \theta_2 \gamma_1 + \dots + \theta_p \gamma_{p-1}$$

Análogamente

$$Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t+2}] = Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-2}] = E[(\bar{Z}_t - \mu)(\bar{Z}_{t-2} - \mu)] = E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-2}]$$

que es igual a

$$E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-2}] = E[\theta_1 \bar{Z}_{t-1} \bar{Z}_{t-2} + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} \bar{Z}_{t-2} + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} \bar{Z}_{t-2} + a_t \bar{Z}_{t-2}]$$

$$\gamma_2 = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_0 + \theta_3 \gamma_1 + \theta_4 \gamma_2 + \dots + \theta_p \gamma_{p-1}$$

...

y ahora para k

$$Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t+k}] = Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-k}] = E[(\bar{Z}_t - \mu)(\bar{Z}_t - \mu)] = E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-k}]$$

por lo que

$$E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-k}] = E[\theta_1 \bar{Z}_{t-1} \bar{Z}_{t-k} + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} \bar{Z}_{t-k} + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} \bar{Z}_{t-k} + a_t \bar{Z}_{t-k}]$$

$$\gamma_k = \theta_1 \gamma_{k-1} + \theta_2 \gamma_{k-2} + \theta_3 \gamma_{k-3} + \theta_4 \gamma_{k-4} + \dots + \theta_p \gamma_{k-p}$$

para p

$$Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-p}] = Cov[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t+p}] = E[(\bar{Z}_t - \mu)(\bar{Z}_{t-p} - \mu)] = E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-p}]$$

y similarmente

$$E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-p}] = E[\theta_1 \bar{Z}_{t-1} \bar{Z}_{t-p} + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} \bar{Z}_{t-p} + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} \bar{Z}_{t-p} + a_t \bar{Z}_{t-p}]$$

$$\gamma_p = \theta_1 \gamma_{p-1} + \theta_2 \gamma_{p-2} + \theta_3 \gamma_{p-3} + \theta_4 \gamma_{p-4} + \dots + \theta_p \gamma_0$$

- CASO MA(q)

Sea

$$\bar{Z}_t = a_t - \phi_1 a_{t-1} - \phi_2 a_{t-2} - \dots - \phi_q a_{t-q}$$

tenemos que

$$E(\bar{Z}_t) = E[a_t - \phi_1 a_{t-1} - \phi_2 a_{t-2} - \dots - \phi_q a_{t-q}]$$

pero sabemos que la esperanza es lineal y como a_t se distribuye como $N(0, \sigma^2)$ entonces

$$E(\bar{Z}_t) = E(a_t) - \phi_1 E(a_{t-1}) - \dots - \phi_q E(a_{t-q}) = 0$$

Para obtener la varianza tenemos

$$Var(\bar{Z}_t) = E[(\bar{Z}_t - \mu)^2] = E[\bar{Z}_t^2]$$

desarrollando obtenemos

$$\bar{Z}_t^2 = a_t^2 + \phi_1^2 a_{t-1}^2 + \phi_2^2 a_{t-2}^2 + \dots + \phi_q^2 a_{t-q}^2$$

y sacando esperanzas

$$E(\bar{Z}_t^2) = E(a_t^2 + \phi_1^2 a_{t-1}^2 + \phi_2^2 a_{t-2}^2 + \dots + \phi_q^2 a_{t-q}^2)$$

y como es lineal

$$E(\bar{Z}_t^2) = E(a_t^2) + \phi_1^2 E(a_{t-1}^2) + \phi_2^2 E(a_{t-2}^2) + \dots + \phi_q^2 E(a_{t-q}^2)$$

Resolviendo

$$E(\bar{Z}_t^2) = \gamma^2 + \phi_1^2 \gamma^2 + \dots + \phi_q^2 \gamma^2 = \gamma_e^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_q^2)$$

Ahora obtenemos las covarianzas

$$E[(\bar{Z}_t - \mu)(\bar{Z}_{t-k} - \mu)] = E[\bar{Z}_t \bar{Z}_{t-k}]$$

esto es

$$E \left[\begin{array}{l} (a_t - \phi_1 a_{t-1} - \phi_2 a_{t-2} - \dots - \phi_k a_{t-k} - \phi_{k+1} a_{t-k-1} - \dots - \phi_q a_{t-q}) \times \\ a_{t-k} - \phi_1 a_{t-k-1} - \phi_2 a_{t-k-2} - \dots - \phi_{q-1} a_{t-k-q-1} - \phi_q a_{t-k-q} \end{array} \right]$$

que es igual a

$$= -\phi_k a_{t-k}^2 + \phi_1 \phi_{k+1} a_{t-k-1}^2 + \phi_2 \phi_{k+2} a_{t-k-2}^2 + \dots + \phi_q \phi_{q-k} a_{t-q}^2 \text{ para } k=1, \dots, q$$

y 0 para $k \geq q+1$

- CASO ARMA(p,q)

Sea

$$\bar{Z}_t = \theta_1 \bar{Z}_{t-1} + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} + a_t - \phi_1 a_{t-1} - \dots - \phi_q a_{t-q}$$

despejando tenemos

$$\bar{Z}_t - \theta_1 \bar{Z}_{t-1} - \theta_2 \bar{Z}_{t-2} - \dots - \theta_p \bar{Z}_{t-p} = a_t - \phi_1 a_{t-1} - \phi_2 a_{t-2} - \dots - \phi_q a_{t-q}$$

usando el operador rezago

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p) \bar{Z}_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q) a_t$$

despejando

$$\bar{Z}_t = \frac{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q)}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p)} a_t$$

sacando esperanzas

$$E(\bar{Z}_t) = \frac{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q)}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p)} E(a_t) = 0$$

para sacar la varianza

$$Var(\bar{Z}_t) = E[\bar{Z}_t \bar{Z}_t] = E[\theta_1 \bar{Z}_{t-1} \bar{Z}_t + \theta_2 \bar{Z}_{t-2} \bar{Z}_t + \dots + \theta_p \bar{Z}_{t-p} \bar{Z}_t + a_t \bar{Z}_t - \phi_1 a_{t-1} \bar{Z}_t - \dots - \phi_q a_{t-q} \bar{Z}_t]$$

resolviendo

$$\gamma_0 = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \dots + \theta_p \gamma_p + \gamma_e^2 - \phi_1 \gamma_e^2 - \dots - \phi_q \gamma_e^2$$

- CASO ARIMA(p,d,q)

Este caso se resuelve de la misma manera que un ARMA(p,q).

Una vez que hemos demostrado el primer y segundo momentos y las autocorrelaciones para cada uno de los modelos es importante demostrar dos propiedades de los modelos ARMA. Tapia y otros autores nos dicen que estas condiciones nos permite trabajar de manera indiferente en la práctica con procesos autorregresivos o de promedios móviles, porque bajo ciertas restricciones son transformables unos en otros.

1.6) DEMOSTRACIÓN DE CONDICIONES DE ESTACIONARIEDAD E INVERTIBILIDAD

1.6.1) ESTACIONARIEDAD

Según determina Tapia en "Pronósticos para series de tiempo con modelos ARIMA" para determinar en qué condiciones un AR(p) es estacionario, es necesario considerar lo siguiente. Si \bar{Z}_t es un AR(p) tiene la siguiente representación

$$\bar{Z}_t - \theta_1 \bar{Z}_{t-1} - \theta_2 \bar{Z}_{t-2} - \dots - \theta_p \bar{Z}_{t-p} = a_t$$

que es equivalente a

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p) \bar{Z}_t = a_t$$

$$\theta(B) = a_t$$

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, el polinomio de retraso $\theta(B)$, puede descomponerse en el

$$(1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B) = \theta(B)$$

producto

donde las soluciones para $\theta(B) = 0$ son $B = g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots$ con esto la ecuación se puede escribir como

$$(1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B) \bar{Z}_t = a_t$$

y en consecuencia

$$\bar{Z}_t = (1 - g_1 B)^{-1} (1 - g_2 B)^{-1} \dots (1 - g_p B)^{-1} a_t$$

es decir \bar{Z}_t tiene la forma de un MA. Si

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_i^k B^k = (1 - g_i B)^{-1}$$

converge, para lo cual es necesario que $|g_i| \leq 1$, $i=1,2,\dots,p$ y las raíces de $\theta(B)$ se encuentran fuera del círculo unitario, se concluye que el AR(p) es estacionario. En lo que se refiere a un MA, éste siempre será estacionario mientras que para el caso de los procesos ARMA(p,q) y ARIMA(p,d,q) su estacionariedad dependerá del polinomio autorregresivo $\theta(B)$. Dichos procesos serán estacionarios si las raíces de $\theta(B)$ se encuentran fuera del círculo unitario.

1.6.2) INVERTIBILIDAD

Ahora pasemos a las condiciones de invertibilidad. Pulido en "Modelos Econométricos" (1993)

$$(1 - \theta B) \bar{Z}_t = a_t$$

sugiere comenzar con el caso más sencillo de un proceso autorregresivo de primer orden que se puede expresar invirtiendo el operador autorregresivo como

$$\bar{Z}_t = (1 - \theta B)^{-1} a_t = \frac{1}{1 - \theta B} a_t$$

y debido a que la suma de progresión geométrica de razón θB es

el proceso autorregresivo original resulta equivalente a un proceso infinito de medias móviles

$$1 + \theta B + (\theta B)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i B^i = \frac{1}{1 - \theta B},$$

$$\bar{Z}_t = a_t + \theta a_{t-1} + \theta^2 a_{t-2} + \dots$$

Intentando generalizar lo visto anteriormente, veamos el caso de un AR(2)

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0 \quad (19)$$

siendo $u_{1,2}$ las raíces de la ecuación homogénea del proceso

$$\bar{Z}_t - \theta_1 \bar{Z}_{t-1} - \theta_2 \bar{Z}_{t-2} = 0.$$

Por otro lado $\theta(B)$ puede ser expresado como

$$\theta(B) = -\theta_2 \left(B - \frac{1}{u_1} \right) \left(B - \frac{1}{u_2} \right) = -\theta_2 B^2 + \theta_2 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) B - \theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} \quad (20)$$

donde por ser unitario el coeficiente de \bar{Z}_t entonces⁵

$$-\theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} = 1$$

De otra manera, podemos desarrollar a $\theta(B)$ como

$$\theta(B) = -\theta_2 \frac{1}{u_1} \frac{1}{u_2} (u_1 B - 1)(u_2 B - 1) = (1 - u_1 B)(1 - u_2 B) \quad (21)$$

con lo que el inverso del operador autorregresivo⁶ es

$$\theta(B)^{-1} = \frac{1}{\theta(B)} = \frac{1}{(1 - u_1 B)(1 - u_2 B)} = [1 + u_1 B + (u_1 B)^2 + \dots] [1 + u_2 B + (u_2 B)^2 + \dots]$$

y como⁷ $|u_i| < 1$ es una condición de estacionariedad, el resultado será una serie convergente. Por lo que podemos decir que el proceso autorregresivo siempre es invertible. Para generalizar para un proceso AR(p), tenemos que

$$\theta(B)^{-1} = \prod_{r=1}^p \frac{1}{1 - u_r B} = \prod_{r=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} (u_r B)^k$$

que será un polinomio infinito con coeficientes deducidos de las ecuaciones anteriores y que

$$\theta(B)^{-1} = 1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots = \pi(B)$$

denotaremos como π y que resulta en

En resumidas cuentas, poniendo subíndice a los operadores definidos para indicar su orden, el proceso AR(p)

$$\theta_p(B) \bar{Z}_t = a_t$$

se transformará en un MA(∞)

$$\bar{Z}_t = \theta_p(B)^{-1} a_t = \pi_{\infty}(B) a_t$$

Pasar de AR(p) a un MA(∞) tiene su transformación simétrica de una MA(q) a un AR(∞) pero con condiciones particulares de invertibilidad. Sea $\phi(B)$ el operador de medias móviles tal que

$$\bar{Z}_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \dots + \phi_q a_{t-q} = (1 + \phi_1 B + \dots + \phi_q B^q) a_t = \Phi(B) a_t$$

veremos que todo proceso de medias móviles es estacionario porque si tomamos varianzas

$$\sigma_Z^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2$$

⁵ Con $\theta_2 = -u_1 u_2$

⁶ Se trata de dos series geométricas

⁷ Sabemos que $s_n = \frac{1 + u^{n+1}}{1 - u}$ al tomar el límite cuando n tiende a infinito entonces resultaría

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + u^{n+1}}{1 - u} = \frac{1}{1 - u}$ y $u < 1$ para que sea válida la expresión.

su valor será siempre finito para q finito. Si invertimos el operador de medias móviles

$$\phi_q(B)^{-1} \bar{Z}_t = a_t$$

podremos por similitud con la deducción hecha para el operador autorregresivo, tenemos

$$\phi_q(B)^{-1} = 1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2 - \dots = \lambda_\infty(B)$$

Para ello, se exige además que los λ_i formen una serie convergente, lo que implica que los ceros o raíces de $\phi(B)$ queden fuera del círculo unitario. Sin embargo, si esto se cumple, podremos transformar un MA(q) en un AR(∞) de la siguiente manera

$$a_t = \phi_q(B)^{-1} \bar{Z}_t = \lambda_\infty(B) \bar{Z}_t$$

Todo lo anterior, nos lleva a concluir que es indiferente trabajar en la práctica con procesos autorregresivos o medias móviles, ya que son transformables unos en otros cumpliendo ciertas restricciones.

A continuación se plantean las pruebas utilizadas para llegar a saber si las condiciones de estacionariedad e invertibilidad se cumplen.

1.7) PRUEBAS DE RAÍCES UNITARIAS (DF, ADF, PHILLIPS-PERRON, KPSS)

Las pruebas llamadas de raíces unitarias, forman un complemento formal de la inspección de:

- la gráfica de la serie contra el tiempo
- la función de autocorrelación muestral

1.7.1) Prueba de Dickey-Fuller

Esta prueba se hace necesaria ya que muchas veces se tiene la duda en si se debe diferenciar una vez más una serie o no. A continuación presentaremos esta prueba basados en Dickey y Fuller "Distribución de los Estimadores para Series de Tiempo Autorregresivas con Raíz Unitaria" (1979) y Guerrero "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003). Por ejemplo, supóngase que el verdadero valor del orden de integración es d y que hasta ahora la serie se ha diferenciado $d^* \geq 0$ veces, la duda es si $d = d^*$ o si $d = d^* + 1$.

Tomando en cuenta las siguientes hipótesis⁸

$$H_0 = \theta(B) \nabla W_t^* = \phi(B) a_t \quad (22)$$

vs

$$H_A = \theta(B)(1 - \rho B)(W_t^* - \mu) = \phi(B) a_t, \quad |\rho| < 1 \quad (23)$$

donde $W_t^* = \nabla^{d^*} T(Z_t)$

Cuando se transforma la serie original en $T(Z_t)$, $\mu = E(W_t^*)$ y donde $\theta(B)$ y $\phi(B)$ se suponen con raíces fuera del círculo unitario. Considérese que la hipótesis nula presupone que $\{W_t^*\}$ es integrada con orden 1 con media cero, en tanto que la alternativa presupone que la media de $\{W_t^*\}$ por suponer la serie estacionaria.

También podemos reescribir a las hipótesis (22) y (23) como

⁸ Lo que nos dicen las hipótesis es por un lado si es estacionario bajo la primera diferencia y por otro si es necesario aplicar otra diferencia.

$$H_0 = \lambda(B)\nabla W_t^* = a_t \quad (24)$$

vs

$$H_A = \lambda(B)(1-\rho B)(W_t^* - \mu) = a_t$$

$$\text{con } \lambda(B) = \theta(B)\phi^{-1}(B).$$

Esta nueva manera de plantear las hipótesis permite que se aproxime $\lambda(B)$ mediante un polinomio autorregresivo de orden finito, p , el cual podrá ser determinado a partir de los datos. En sí lo que se busca es si en realidad $\rho = 1$ contra la alternativa que es $|\rho| < 1$.

Básicamente existen tres ecuaciones que se usan para la Prueba de DickeyFuller.

$$\Delta W_t^* = c_0 W_{t-1}^* + a_t$$

$$\Delta W_t^* = c + c_0 W_{t-1}^* + a_t$$

$$\Delta W_t^* = \alpha + \beta t + c_0 W_{t-1}^* + a_t$$

De aquí partiremos para explicar la Prueba de Dickey Fuller Aumentada. Tomemos por el momento la segunda ecuación.

Para encontrar un estadístico de prueba útil para (24), se utiliza de la siguiente descomposición de un polinomio $A(B) = 1 - a_1 B - \dots - a_n B^n$ de orden finito

$$A(B) = A(1)B + C(B)(1-B) \quad (25)$$

en donde $A(1) = 1 - a_1 - \dots - a_n$ y $C(B)$ es un polinomio de orden $n-1$.

Los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n se pueden obtener de los valores de c_1, c_2, \dots, c_{n-1} de $C(B)$ al igualar los coeficientes de las potencias de B en ambos lados de la igualdad. Es decir, si $A(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 - a_3 B^3$ entonces $C(B) = 1 - c_1 B - c_2 B^2$ y los valores de c_1 y c_2 se obtienen de

$$1 - a_1 B - a_2 B^2 - a_3 B^3 = (1 - a_1 - a_2 - a_3)B + (1 - c_1 B - c_2 B^2)(1 - B) \quad (26)$$

de tal forma que $c_1 = -a_2 - a_3$ y $c_2 = -a_3$.

En general, los coeficientes c_1, \dots, c_{n-1} del polinomio $C(B)$ que aparecen en (25), están dados por

$$c_j = - \sum_{i=j+1}^n a_i \text{ para } j=1, \dots, n-1$$

Entonces aplicando la descomposición (25) al polinomio $\lambda(B)(1-\rho B)$ con $\lambda(B)$ de orden p se obtiene⁹

$$\lambda(B)(1-\rho B) = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(1-\rho)B + (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1})(1-B)$$

por lo cual, el modelo correspondiente a

$$\theta(B)(1-\rho B)(W_t^* - \mu) = a_t$$

puede expresarse como¹⁰

$$(1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(1-\rho)B(W_t^* - \mu) + (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1})\nabla(W_t^* - \mu) = a_t$$

que produce la ecuación

$$\begin{aligned} \nabla W_t^* &= c + c_0 W_{t-1}^* + c_1 \nabla W_{t-1}^* + \dots + c_{p-1} \nabla W_{t-p+1}^* + a_t \\ \text{con } c_0 &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(\rho - 1) \text{ y } c = -c_0 \mu \end{aligned} \quad (27)$$

⁹ Esto se logra con $B=1$

¹⁰ Hay que multiplicar por $(W_t^* - \mu)$ y eso es igual a a_t . Además, $(1-B) = \nabla$.

Es decir, la prueba de significancia de¹¹ $c_0 = 0$ equivale a probar la significancia de $\rho = 1$. Esa prueba se podría realizar mediante una estadística t usada en regresión, o sea con $\tau_\mu = \frac{\hat{c}_0}{ee(\hat{c}_0)}$ en donde \hat{c}_0 es el estimador mínimo cuadrático de c_0 y $ee(\hat{c}_0)$ es su error estándar muestral. Es importante señalar que mientras mayor sea el valor del estadístico τ_μ en valor absoluto, mayor evidencia habrá para rechazar la hipótesis de raíz unitaria. Sin embargo, la distribución de τ_μ no es una t, sino otra distribución para la cual se requieren sus puntos porcentuales, según mostraron Dickey y Fuller en 1979. A la ecuación (27) se le conoce como la regresión aumentada de Dickey-Fuller o ADF, porque incluye $p-1 \geq 1$ retrasos de las diferencias de W_t^* en contraste con una regresión en la cual no se incluyen retrasos, o sea, en la cual $p=1$. Es importante señalar que la distribución límite del estadístico de prueba no depende del número de retrasos p , que se haya elegido. Esto último permite decidir el valor de p , de manera que se obtenga un modelo adecuado a los datos del estudio.

1.7.2) Prueba Phillips-Perron

Ahora veamos la segunda prueba de raíces unitarias más utilizada de acuerdo con Perron en "El Gran Colapso, el shock del precio del petróleo y la hipótesis de raíz unitaria" (1989) y Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003). En varios momentos, las series de tiempo se ven afectadas por la ocurrencia de fenómenos con carácter permanente y que hacen que las pruebas de raíces unitarias se vuelvan ineficaces. En 1989, Perron estudió el problema de las raíces unitarias en presencia de cambios en la estructura de comportamiento de la serie. Además encontró que si una serie de tiempo estacionaria se ve influenciada por un cambio de nivel, entonces al aplicar la prueba de Dickey-Fuller, la conclusión a la que se llegaría sería que se trata de una serie integrada de orden 1.

Tomemos una serie estacionaria con cambio de nivel, a partir de $t = \tau + 1$ (28) junto con una recta que se obtiene del ajuste por mínimos cuadrados a los datos observados. Si el proceso rigiera la serie

$$W_t^* = \begin{cases} \mu + \rho W_{t-1}^* + \varepsilon_t & \text{si } t \leq \tau + 1 \\ \mu + \rho W_{t-1}^* + \delta + \varepsilon_t & \text{si } t > \tau + 1 \end{cases}$$

pero no hacemos caso del cambio de nivel y estimamos la regresión

$$W_t^* = \mu + \rho W_{t-1}^* + \varepsilon_t$$

entonces el valor estimado de ρ estará sesgado hacia la unidad, por lo que se podrá confundir con una caminata aleatoria con desplazamiento, o sea con

$$\nabla W_t^* = \mu + \varepsilon_t$$

La razón se debe a que la solución de la ecuación en diferencia¹²

$$\nabla W_t^* = \mu$$

es un polinomio de grado uno o mejor dicho una línea recta.

Por otra parte, es importante observar que un efecto aditivo momentáneo sobre una serie no estacionaria en nivel se refleja como un cambio permanente en el nivel de la serie en diferencias. En otras palabras, si $\{W_t^*\}$ sigue una caminata aleatoria con un efecto aditivo momentáneo en el momento $\tau + 1$ esto es,

¹¹ Esto es porque $(1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(\rho - 1) = 0$; $(\rho - 1) = 0$; $\rho = 1$

¹² Las ecuaciones en diferencia no consideran errores.

$$W_t^* = \begin{cases} W_{t-1}^* + \varepsilon_t & \text{si } t \neq \tau+1 \\ W_{t-1}^* + \gamma + \varepsilon_t & \text{si } t = \tau+1 \end{cases} \quad (29)$$

entonces la serie en diferencias tendrá un brinco en el momento $\tau+1$ puesto que hasta $t = \tau$ habrá un mismo nivel para $\{ \nabla W_t^* \}$ pero desde $\tau+1$ el nivel será mayor en un monto igual a γ .

El método desarrollado por Perron entre los años 1989 y 1990 consiste en postular una cierta forma de cambio de comportamiento de la serie a partir de un cierto momento conocido, en concreto cuando se presenta el cambio estructural. Para ello resulta útil introducir la variable indicadora de cambio de nivel, conocida como función escalonada,

$$S_{\tau+1,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \tau+1 \\ 0 & \text{si } t < \tau+1 \end{cases}$$

a partir de la cual se obtiene la función de pulso

$$P_{\tau+1,t} = \nabla S_{\tau+1,t}$$

que toma el valor 1 cuando $t = \tau+1$ y es cero en otro caso, por lo que de alguna manera sirve para indicar la presencia de un efecto momentáneo. En base a estas variables indicadoras, se puede reescribir el modelo (29) de forma compacta como

$$W_t^* = W_{t-1}^* + \gamma P_{\tau+1,t} + \varepsilon_t$$

que implica la hipótesis nula de raíz unitaria y para la cual también se plantea como hipótesis alternativa el modelo

$$W_t^* = \mu + \gamma S_{\tau+1,t} + \varepsilon_t$$

Debe considerarse la hipótesis nula que incluye un efecto momentáneo en la serie no estacionaria y la alternativa que es que se presenta un cambio de nivel sobre un proceso estacionario. Resumiendo tenemos¹³

$$H_0 : W_t^* = \mu + W_{t-1}^* + \gamma P_{\tau+1,t} + \varepsilon_t$$

vs

$$H_A : W_t^* = \mu + \alpha t + \gamma S_{\tau+1,t} + \varepsilon_t$$

Tales hipótesis fueron nombradas por Perron como Modelo (A). En ambos casos se cumple que

$$\nabla W_t^* = \mu + \gamma P_{\tau+1,t} + \eta_t$$

con $\eta_t = \varepsilon_t$ bajo H_0 y

$$\eta_t = \nabla \varepsilon_t \text{ bajo } H_A$$

La ecuación en forma equivalente a la regresión de Dickey-Fuller que toma en consideración la posible autocorrelación residual y que permite probar la hipótesis nula es

$$W_t^* = \mu + \alpha t + \gamma P_{\tau+1,t} + \delta S_{\tau+1,t} + \rho W_{t-1}^* + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \nabla W_{t-i}^* + a_t$$

de tal forma que al tener $\alpha = \delta = 0$ y $\rho = 1$ se obtiene la especificación dada por la hipótesis nula.

El estadístico de prueba para la hipótesis nula de raíz unitaria, en particular cuando $\rho = 1$ es de tipo t , que se obtiene al dividir el valor de $\hat{\rho} - 1$ entre su correspondiente desviación estándar. Sin embargo, la distribución que sigue dicho estadístico no es del tipo t de Student, sino una distribución que depende de la proporción de observaciones anteriores al cambio estructural y que se denota por $\lambda = \tau / N$.

¹³ Es decir, se toma la serie como no estacionario cuando sí lo es.

De esta forma, Perron proporcionó valores críticos para valores de λ que van desde 0.1 a 0.9 ya que cuando $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ no existe cambio estructural dentro del período muestral. Otra hipótesis considera un cambio en la pendiente de la tendencia lineal que se prueba con

$$H_0 : W_t^* = \mu + W_{t-1}^* + \gamma S_{\tau+1,t} + \varepsilon_t$$

vs

$$H_A : W_t^* = \mu + \alpha t + \delta(t - \tau - 1) + \varepsilon_t \text{ con } \delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Estas hipótesis fueron llamadas Modelo (B) por Perron. La ecuación de regresión respectiva aumentada se transforma en

$$W_t^* = \mu + \alpha t + \gamma S_{\tau+1,t} + \delta(t - \tau - 1) + \rho W_{t-1}^* + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \nabla W_{t-i}^* + a_t$$

Una vez más se requiere de los puntos críticos dados por Perron para la distribución que sigue el estadístico t del coeficiente estimado $\hat{\rho}$. Otro par de hipótesis establecidas por Perron se denominan el Modelo (C) y combinan los casos de los modelos (A) y (B). Estas son

$$H_0 : W_t^* = \mu + W_{t-1}^* + \gamma_1 P_{\tau+1,t} + \gamma_2 S_{\tau+1,t} + \varepsilon_t$$

vs

$$H_A : W_t^* = \mu + \alpha t + \delta_1 S_{\tau+1,t} + \delta_2(t - \tau - 1) + \varepsilon_t \text{ con } \delta_1 = \mu_2 - \mu_1 \text{ y } \delta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

Es necesario mencionar que el cambio estructural se supone conocido, de lo contrario lo anteriormente señalado no sería válido.

1.7.3) Prueba de Dickey-Fuller Aumentada o ADF

Ahora veamos la tercera prueba unitaria en base a lo planteado por Gujarati en "Econometría Básica" (2003). Cuando se desarrolló la Prueba de Dickey-Fuller se asumió que el término del error a_t no estaba correlacionado. Pero para el caso en el que estaba correlacionado, Dickey-Fuller desarrollaron una prueba conocida como la Prueba de Dickey-Fuller Aumentada o ADF. Esta prueba se conduce aumentando a las tres ecuaciones de Dickey Fuller valores rezago de la variable dependiente. Para ser más claros tomemos el caso en que se incluye una tendencia lineal. Lo que correspondería a plantear las hipótesis

$$H_0 : \pi(B) \nabla (W_t^* - \beta_0 - \beta_1 t) = a_t$$

vs

$$H_A : \pi(B)(1 - \rho B)(W_t^* - \beta_0 - \beta_1 t) = a_t$$

Lo esencial en esto último no es preguntar si W_t^* sigue una tendencia lineal, porque en los dos casos la tiene, sino lo que cabe preguntar aquí es si las desviaciones de W_t^* respecto a la tendencia lineal requieren o no de la diferencia. En el primer caso, los choques aleatorios que sufra la serie serán absorbidos a la larga y se continuará esencialmente con la misma tendencia determinista. En cuanto al segundo caso los efectos de los choques aleatorios serán de carácter permanente y tenderán a alejar la serie de la tendencia original.

La ecuación de regresión equivalente a (27), en este caso está dada por

$$\nabla W_t^* = \alpha + \beta t + c_0 W_{t-1}^* + c_1 \nabla W_{t-1}^* + \dots + c_{p-1} \nabla W_{t-p+1}^* + a_t$$

y el estadístico de prueba correspondiente es τ_ρ . Es de subrayar que τ_μ sirve para probar si c_0 es igual a cero, lo cual equivale a que ρ sea igual a 1. Mac Kinnon en 1991 presenta una extensa tabla con los puntos porcentuales de las distribuciones correspondientes, calculadas previamente por Dickey-Fuller para unos cuantos valores de tamaños muestrales. Se hace necesario señalar que

este tipo de prueba sigue la misma distribución asintótica que la estadística de Dickey-Fuller, así que se usan los mismos valores críticos.

1.7.4) Prueba Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin

De acuerdo con el artículo de KPSS "Probando la hipótesis nula de estacionariedad versus la alternativa de raíz unitaria" (1992) sean

$$\{x_t\} \quad t=1,2,\dots,N$$

las series observados para las cuales queremos probar estacionariedad. Asumamos que descomponemos las series en una suma de una tendencia determinista, una caminata aleatoria y un error estacionario con el siguiente modelo de regresión lineal

$$x_t = r_t + \beta t + \varepsilon_t$$

donde r_t es una caminata aleatoria

$$r_t = r_{t-1} + u_t \quad \text{y } u_t \text{ es iid } N(0, \sigma_u^2)$$

y βt es una tendencia determinista y finalmente ε_t es un error estacionario.

Para probar el modelo si

$$\{x_t\} \quad t=1,2,\dots,N$$

es un proceso es un proceso estacionario en tendencia, es decir, la serie es estacionario alrededor de una tendencia determinista, la hipótesis nula será $\sigma_u^2 = 0$ lo que significa que la intersección es un elemento fijo, contra la alternativa que es $\sigma_u^2 > 0$.

En otro caso de estacionariedad, la estacionariedad en nivel, la serie es estacionaria alrededor de un nivel fijo, donde la hipótesis nula es $\beta = 0$. También diremos que bajo la hipótesis nula en el caso de estacionariedad por tendencia los residuos e_t , $t=1,2,\dots,N$ serán $e_t = \varepsilon_t$ mientras que para el caso de estacionariedad por niveles los residuos son $e_t = x_t - \bar{x}$.

Por otra parte, sea el proceso de sumas parciales de las e_t como

$$S_t = \sum_{j=1}^t e_j, \quad t=1,2,\dots,N$$

y σ^2 sea la varianza de e_t definida como

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} N^{-1} E[S_n^2]$$

El estimador consistente de σ^2 puede construirse a partir de los residuos e_t como

$$\hat{\sigma}^2(p) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2 + \frac{2}{N} \sum_{j=1}^p w_j(p) \sum_{t=j+1}^N e_t e_{t-j}$$

donde p es el rezago trunco $w_j(p)$ se define como

$$w_j(p) = 1 - \frac{j}{p+1}$$

Así que el estadístico de la prueba KPSS está dado por

$$KPSS = N^{-2} \sum_{t=1}^N \frac{S_t^2}{\hat{\sigma}^2(p)}$$

Bajo la hipótesis nula de estacionariedad por niveles se tiene

$$KPSS \rightarrow \int_0^1 V_1(r)^2 dr$$

donde $V_1(r)$ se define como

$$V_1(r) = B(r) - rB(1)$$

y $B(r)$ es un proceso Wiener sobre $r \in [0, 1]$. Bajo la hipótesis nula de estacionariedad por tendencia

$$KPSS \rightarrow \int_0^1 V_2(r)^2 dr$$

donde $V_2(r)$ se define como

$$V_2(r) = B(r) + (2r - 3r^2)B(1) + (-6r + 6r^2) \int_0^1 B(s) ds.$$

Los valores críticos para KPSS son

Distribución	0.1	0.05	0.025	0.01
$\int_0^1 V_1(r)^2 dr$	0.347	0.463	0.574	0.739
$\int_0^1 V_2(r)^2 dr$	0.119	0.146	0.176	0.216

Una vez realizado estas pruebas y ya que se ha identificado un modelo, de ser éste apropiado, lo que resta es estimar los parámetros.

1.8) ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

De acuerdo con Box y Jenkins en "Análisis de Series de Tiempo" (1970) y Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003) una vez conocidos los órdenes de los polinomios autorregresivo y de promedios móviles p y q , así como

el grado de diferenciación d , se propone el siguiente modelo

$$\theta(B)\nabla^d T(\bar{Z}_t) = \phi_0 + \phi(B)a_t$$

resultando adecuado para representar la serie $\{T(\bar{Z}_t)\}$ y se necesita entonces estimar los valores de $\theta_1, \dots, \theta_p, \phi_0, \dots, \phi_q$ por Máxima Verosimilitud. Este consiste en partir del supuesto de que $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco con distribución normal, media cero y varianza σ_a^2 . Se obtiene la función de densidad conjunta de los errores aleatorios

$$f(a_{d+p+1}, a_{d+p+2}, \dots, a_N) = (2\pi)^{-(N-d-p)/2} \sigma_a^{-N+d+p} \exp\left\{-\sum_{t=d+p+1}^N a_t^2 / 2\sigma_a^2\right\} \quad (31)$$

por lo que si se considera la variable

$$W_t = \nabla^d T(\bar{Z}_t)$$

la expresión (30) implica que

$$a_t = W_t - \theta_1 W_{t-1} - \dots - \theta_p W_{t-p} - \phi_0 + \phi_1 a_{t-1} + \dots + \phi_q a_{t-q}$$

esto nos ayuda a obtener la función de densidad conjunta de $W_{d+p+1}, W_{d+p+2}, \dots, W_N$ a partir de (31) como¹⁴

Esta función de densidad nos permite calcular probabilidades de la distribución normal multivariada una vez que se conocen los parámetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ y $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q)$ y σ_a^2 . Aunque lo que se conoce en realidad es $\underline{W} = (W_{d+p+1}, W_{d+p+2}, \dots, W_N)$ y lo que se desconoce es $\underline{\theta}, \underline{\phi}$ y σ_a^2 por ello se

$$= (2\pi)^{-(N-d-p)/2} \sigma_a^{-N+d+p} \exp\left\{-\sum_{t=d+p+1}^N (W_t - \theta_1 W_{t-1} - \dots - \theta_p W_{t-p} - \phi_0 + \phi_1 a_{t-1} + \dots + \phi_q a_{t-q})^2 / 2\sigma_a^2\right\}$$

$$L(\underline{\theta}, \underline{\phi}, \sigma_a^2 | \underline{W}) = (2\pi)^{-(N-d-p)/2} \sigma_a^{-N+d+p} \exp\left\{-S(\underline{\theta}, \underline{\phi}, \sigma_a^2) / 2\sigma_a^2\right\}$$

considera que 23 es una función de verosimilitud de los parámetros, que depende del vector de observaciones W esto es con

$$S(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi}) = \sum_{t=d+p+1}^N a_t^2 = \sum_{t=d+p+1}^N (W_t - \theta_1 W_{t-1} - \dots - \theta_p W_{t-p} - \phi_0 + \phi_1 a_{t-1} + \dots + \phi_q a_{t-q})^2$$

dicha función de verosimilitud $L(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi}, \sigma_a^2 | W)$ debe maximizarse con respecto a los parámetros, para obtener la representación 21 más adecuada de la serie $\{W_t\}$ en consideración.

Para maximizar $L(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi}, \sigma_a^2 | W)$ se deben en primer lugar elegir los valores $(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi})$ que minimicen $S(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi})$ y posteriormente se determina el estimador de σ_a^2 . Supóngase que ya se encontró el valor mínimo $S(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi})$ entonces se procede a maximizar la función de verosimilitud con respecto a σ_a^2 o de la misma manera se maximiza al logaritmo de la función de verosimilitud

$$\begin{aligned} l(\sigma_a^2 | W, \hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}}) &= \log \left[L(\sigma_a^2 | W, \hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}}) \right] \\ &= -(N-d-p)/2 \left[\log(2\pi) - \log(\sigma_a^2) \right] - S(\hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}}) / 2\sigma_a^2 \end{aligned}$$

Derivando con respecto a σ_a^2

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_a^2} \Big|_{\sigma_a^2 = \hat{\sigma}_a^2} = \frac{-N+d+p}{2\hat{\sigma}_a^2} + \frac{S(\hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}})}{2\hat{\sigma}_a^4} = 0$$

y despejando σ_a^2 se tiene que

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}})}{N-d-p} \quad (33)$$

y que puede verificarse que produce un máximo de $l(\sigma_a^2 | W, \hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}})$. De esta manera, podría usarse (33) como estimador de σ_a^2 . Pero en la práctica prefiere usarse al estimador insesgado (34) que se denotará igualmente por $\hat{\sigma}_a^2$ y que considera la corrección por grados de libertad usados para estimar los parámetros del modelo

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\underline{\theta}}, \hat{\phi}_0, \hat{\underline{\phi}})}{N-d-p-q-1}$$

El problema de maximizar $L(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi}, \sigma_a^2 | W)$ se reduce a minimizar $S(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi})$. Para ver las dificultades que se presentan al minimizar $S(\underline{\theta}, \phi_0, \underline{\phi})$ tómesese el caso más simple de un proceso MA(1), es decir,

$$W_t = a_t - \phi a_{t-1}$$

con $W_t = T(\bar{Z}_t)$ y $E[T(\bar{Z}_t)]$. Por otro lado a_t se puede escribir como

$$a_t = W_t + \phi a_{t-1} \quad (35)$$

¹⁴ Sustituyendo en la expresión (31).

$$\begin{aligned}
 &= W_t + \phi W_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} \\
 &\dots \\
 &= W_t + \phi W_{t-1} + \phi^2 W_{t-2} + \dots + \phi^{t-1} W_1 + \phi^t a_0
 \end{aligned}$$

pero a_t se desconoce, así que suponiendo que su distribución es $N(0, \sigma_a^2)$ tomamos como $a_0 = 0$ para obtener

$$S(\phi) = \sum_{t=1}^N (W_t + \phi W_{t-1} + \phi^2 W_{t-2} + \dots + \phi^{t-1} W_1)^2$$

Con esto podría minimizarse $S(\phi)$ al encontrar el valor $\hat{\phi}$ que fuese solución de

$$\left. \frac{dS(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\hat{\phi}} = 0$$

pero dicha ecuación resulta ser no lineal en $\hat{\phi}$ y por lo tanto no hay solución analítica.

Una vez obtenido lo anterior, podemos tratar de encontrar una solución a través del cálculo de los valores iniciales. Es decir, si se tiene un programa de estimación no lineal para modelos ARIMA, lo único que se necesita es dar valores iniciales para los parámetros. Cuando el modelo identificado es AR(p), dichos valores se obtienen solucionando el sistema de ecuaciones de Yule-Walker

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 \alpha_1 + \dots + \bar{\theta}_p \alpha_{p-1} \\
 \alpha_2 &= \bar{\theta}_1 \alpha_1 + \bar{\theta}_2 + \dots + \bar{\theta}_p \alpha_{p-2} \\
 &\dots \\
 \alpha_p &= \bar{\theta}_1 \alpha_{p-1} + \bar{\theta}_2 \alpha_{p-2} + \dots + \bar{\theta}_p
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, para un modelo AR(1) se tiene

$$\bar{\theta}_1 = \alpha_1$$

y para los modelos AR(2)

$$\bar{\theta}_1 = \alpha_1(1 - \alpha_2)/(1 - \alpha_1^2) \text{ y } \bar{\theta}_2 = \alpha_2(1 - \alpha_1^2)/(1 - \alpha_1^2) \quad (36)$$

En el caso de que se trate de un modelo MA(q), las relaciones entre los parámetros ϕ_1, \dots, ϕ_q y las autocorrelaciones ρ_1, ρ_2, \dots no son lineales, así que deberá resolverse el sistema de ecuaciones no lineal¹⁵

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= (-\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + \dots + \bar{\phi}_{q-1} \bar{\phi}_q) / (1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 + \dots + \bar{\phi}_q^2) \\
 \alpha_2 &= (-\bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_3 + \dots + \bar{\phi}_{q-2} \bar{\phi}_q) / (1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 + \dots + \bar{\phi}_q^2) \\
 &\dots \\
 \alpha_q &= -\bar{\phi}_q / (1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 + \dots + \bar{\phi}_q^2)
 \end{aligned} \quad (37)$$

para obtener las estimaciones iniciales $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_q$.

Es importante señalar que en este caso el sistema tendrá varias soluciones, pero únicamente una de ellas satisfará las condiciones de invertibilidad, por la cual ésa será la que se escoja. Por ejemplo, para un modelo MA(1) se tendría

$$\alpha_1 = -\bar{\phi} / (1 + \bar{\phi}^2) \quad (38)$$

cuyas soluciones serían

¹⁵ Ver Capítulo 1.5

$$\bar{\phi}_1 = -(2\alpha_1)^{-1} + \sqrt{(2\alpha_1)^{-2} - 1} \text{ y } \bar{\phi}_2 = -(2\alpha_1)^{-1} - \sqrt{(2\alpha_1)^{-2} - 1}$$

que cumplen con la condición de $\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 = 1$ y que por esto sólo una de ellas satisface la condición de invertibilidad $|\phi| < 1$.

Por lo tanto, ésta será la solución a elegir. Pero pongamos el ejemplo de un MA(2). En dicho caso, el sistema (37) con $q=2$ se convierte en

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2)/(1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2) \\ \alpha_2 &= -\bar{\phi}_2/(1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2) \end{aligned} \quad (39)$$

que para cumplir con el criterio de invertibilidad se requiere que

$$\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1 < 1 \text{ y } \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1 < 1 \quad (40)$$

lo que implica que

$$\bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 = [(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 + (\bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1)^2]/2 < 1$$

por lo que el término

$$(1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2)$$

debe tomar algún valor dentro del intervalo (1,2). De esta manera, las ecuaciones anteriores podrían simplificarse mediante la aproximación

$$(1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2) = 1.5$$

que da como resultado

$$\bar{\phi}_1 = -\alpha_1/(0.667 + \alpha_2) \text{ y } \bar{\phi}_2 = -1.5\alpha_2 \quad (41)$$

Para el caso de los modelos ARMA(p,q) se presentan tanto ecuaciones lineales como no lineales que se deben resolver para obtener los valores iniciales de los parámetros. En un proceso ARMA(p,q) se tiene $\theta(B)\rho_k = 0$ para $k > q$ entonces el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_{q+1} &= \bar{\theta}_1\alpha_q + \bar{\theta}_2\alpha_{q-1} + \dots + \bar{\theta}_p\alpha_{q-p+1} \\ \alpha_{q+2} &= \bar{\theta}_1\alpha_{q+1} + \bar{\theta}_2\alpha_q + \dots + \bar{\theta}_p\alpha_{q-p+2} \\ &\dots \\ \alpha_{q+p} &= \bar{\theta}_1\alpha_{q+p-1} + \bar{\theta}_2\alpha_{q+p-2} + \dots + \bar{\theta}_p\alpha_q \end{aligned}$$

da las estimaciones iniciales $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_p$ las cuales deberán sustituirse posteriormente en las ecuaciones de las primeras q autocorrelaciones muestrales para determinar los valores iniciales $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_q$.

Veamos entonces el caso de un ARMA(1,1). La expresión (42) da como resultado

$$\bar{\theta}_1 = \alpha_2 / \alpha_1$$

Mientras que $\bar{\phi}$ se obtiene de la ecuación

$$\alpha_1 = (1 - \bar{\phi}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\theta}_1 - \bar{\phi}_1)/(1 + \bar{\phi}_1^2 - 2\bar{\phi}_1\bar{\theta}_1) \quad (43)$$

es decir de la ecuación cuadrática

$$(\alpha_1 - \bar{\theta}_1)\bar{\phi}_1^2 + (1 + \bar{\theta}_1^2 - 2\bar{\theta}_1\alpha_1)\bar{\phi}_1 + (\alpha_1 - \bar{\theta}_1) = 0$$

en la cual se debe elegir la solución que satisfaga $|\phi| < 1$. Con respecto al término ϕ_0 una estimación inicial de este parámetro se obtiene de la relación¹⁶ $E[\theta(B)W_t] = \phi_0$ de tal manera que¹⁷

$$\bar{\phi}_0 = (1 - \bar{\theta}_1 - \dots - \bar{\theta}_p)\bar{E}(W_t) = (1 - \bar{\theta}_1 - \dots - \bar{\theta}_p)\bar{W}$$

$$\text{con } \bar{W} = \sum_{t=d+p+1}^N W_t / (N - d - p)$$

¹⁶ Es estacionario alrededor de ϕ_0

¹⁷ Es la esperanza muestral.

Finalmente, veremos la etapa en donde se pone en práctica la teoría antes descrita será de utilidad en la búsqueda de valores futuros.

1.9) FUNCIÓN PRONÓSTICO

A continuación se presenta la teoría que sustenta la obtención de pronósticos en base a Guerrero en "Análisis Estadístico de Series de Tiempo" (2003). En esta sección veremos la teoría de pronósticos para el caso de series no estacionarias y para las estacionarias. Es necesario hacer hincapié que los resultados obtenidos para series no estacionarias, son aplicables de manera prácticamente directa al caso de series estacionarias.

1.9.1) PRONÓSTICO DE SERIES ESTACIONARIAS

Supóngase que $\{W_t\}$ es una serie de tiempo estacionaria con media cero obtenida a partir de una serie original con n observaciones Z_t como

$$W_t = \nabla^d T(\bar{Z}_t)$$

para algún valor de d y para una cierta transformación T, con $\{W_t\}$ medida como desviación respecto a su media. Por otra parte, supóngase que $\{W_t\}$ admite la representación

$$W_t = \pi(B)a_t$$

para la cual hay un modelo ARMA equivalente, modelo que se quiere utilizar en la obtención de pronósticos de la serie.

Si a partir del origen t, se desea pronosticar la observación W_{t+h} que es un pronóstico cualquiera de esta observación, que se obtenga como combinación lineal de los valores de la serie $\{W_t\}$ y por lo tanto de los errores $\{a_t\}$ será denotado por $\bar{W}_t(h)$ mientras que el pronóstico óptimo se escribirá como $\hat{W}_t(h)$. El criterio que se empleará para determinar la optimalidad del pronóstico será el del error cuadrático medio mínimo, es decir, $\hat{W}_t(h)$ que deberá satisfacer la condición

$$E_t [W_{t+h} - \hat{W}_t(h)]^2 = \min_{\bar{W}_t(h)} E_t [W_{t+h} - \bar{W}_t(h)]^2 \quad (44)$$

en la cual E_t denota la esperanza condicional, dada toda la información hasta el momento t, o sea

$$E_t [W_{t+h} - \bar{W}_t(h)]^2 = E \left\{ [W_{t+h} - \bar{W}_t(h)]^2 \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots \right\}$$

Como $\bar{W}_t(h)$ y por consiguiente también $W_t(h)$ debe ser de la forma

$$\bar{W}_t(h) = C_h a_t + C_{h+1} a_{t-1} + \dots = \sum_{j=h}^{\infty} C_j a_{t+h-j} \quad (45)$$

el problema de obtener $\bar{W}_t(h)$ se traduce en la especificación de los valores C_h, C_{h+1}, \dots de forma que se cumpla la relación (44). Con este propósito, la observación W_{t+h} se escribirá como

$$W_{t+h} = -\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j a_{t+h-j} = -\sum_{j=0}^{h-1} \pi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=h}^{\infty} \pi_j a_{t+h-j} \quad \text{con } \pi_0 \equiv -1 \quad (46)$$

en donde la primera suma corresponde a información desconocida al tiempo t ya que incluye observaciones desde t+1 hasta t+h. Mientras que la segunda suma consiste de información conocida al tiempo t desde $-\infty$ hasta t.

De (45) y (46) se obtiene

$$W_{t+h} - \bar{W}_t(h) = -\sum_{j=0}^{h-1} \pi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=h}^{\infty} (\pi_j + C_j) a_{t+h-j}$$

y debido a que $E(a_{t+i}a_{t+j}) = 0$ para $i \neq j$ se sabe que

$$E_t[W_{t+h} - \bar{W}_t(h)]^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j^2 \sigma_a^2 + \sum_{j=h}^{\infty} (\pi_j + C_j)^2 \sigma_a^2$$

el mínimo de esta expresión se obtiene haciendo $C_j = -\pi_j$ para $j=h, h+1, \dots$ y esta selección de valores C_j conduce a tener

$$E_t[W_{t+h} - \hat{W}_t(h)]^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j^2 \sigma_a^2$$

con $\hat{W}_t(h)$ dado, según (45) por

$$\hat{W}_t(h) = -\pi_h a_t - \pi_{h+1} a_{t-1} - \dots = -\sum_{j=h}^{\infty} \pi_j a_{t+h-j} \quad (47)$$

Por otro lado, sabemos que por definición de la esperanza condicional, se tiene

$$E_t(a_{t+h-j}) = \begin{cases} a_{t+h-j} & \text{si } j \geq h \\ 0 & \text{si } j < h \end{cases} \quad (48)$$

de donde¹⁸

$$E_t(W_{t+h}) = -E_t\left(\sum_{j=0}^{h-1} \pi_j a_{t+h-j}\right) - E_t\left(\sum_{j=h}^{\infty} \pi_j a_{t+h-j}\right) = -\sum_{j=h}^{\infty} \pi_j a_{t+h-j} \quad (49)$$

y, en consecuencia, al comparar esto último con (47), se ve que $E_t(W_{t+h})$ proporciona el pronóstico

con error cuadrático medio mínimo, es decir

$$\hat{W}_t(h) = E_t(W_{t+h}) \quad (50)$$

Es importante aclarar también que el error del pronóstico (50) con origen en t , viene dado por¹⁹

$$e_t(h) = W_{t+h} - \hat{W}_t(h) = -\sum_{j=0}^{h-1} \pi_j a_{t+h-j} \quad (51)$$

por lo cual es inmediato que $E_t[e_t(h)] = 0$ y $Var_t[e_t(h)] = \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j^2 \sigma_a^2$ con $Var_t[e_t(h)] = Var[e_t(h)|Z_t, Z_{t-1}, \dots]$.

Es de hacer notar que aquí se aprecia en particular que los pronósticos $\hat{W}_t(h)$ son insesgados.

Además, se tiene

$$Var_t[e_t(h)] - Var_t[e_t(h-1)] = \pi_{h-1}^2 \sigma_a^2 \geq 0 \text{ para } h \geq 1$$

de donde se deduce que al emplear los pronósticos óptimos, mientras más lejano se desee el pronóstico, es decir, entre mayor sea h mayor será la varianza y menor la precisión del mismo.

Si se toma $h=1$ en (51) se obtiene²⁰

$$e_t(1) = W_{t+1} - \hat{W}_t(1) = a_{t+1} \quad (52)$$

lo cual se vale para $t=d, d+1, \dots, N$ y que por tanto muestra que los errores del pronóstico un período hacia delante no están correlacionados. En general, los errores de pronóstico $e_d(h), e_{d+1}(h), \dots, e_N(h)$ se encuentran correlacionados para $h \geq 2$ porque, como lo muestra

la expresión (51), la serie $\{e_t(h)\}$ con h fijo, sigue un proceso MA($h-1$). Por otra parte, si el origen queda fijo, los errores de pronóstico para diversos períodos hacia adelante, $e_t(1), e_t(2), \dots, e_t(H)$ con $H \geq 2$ también están correlacionados. Debido a que se desea obtener pronósticos de la serie $\{W_t\}$ tómesese como conocido el modelo

¹⁸ Este resultado proviene de la ecuación (47) y de la (49).

¹⁹ Este resultado proviene de la ecuación (47) y de la (46).

²⁰ De la ecuación (51) tenemos que $-\pi_0 a_{t-1}$ pero $\pi_0 = -1$.

$$\theta(B)W_t = \phi(B)a_t$$

entonces

$$\begin{aligned}\hat{W}_t(h) &= E_t(W_{t+h}) = E_t(\theta_1 W_{t+h-1} + \dots + \theta_p W_{t+h-p} + a_{t+h} - \phi_1 a_{t+h-1} - \dots - \phi_q W_{t+h-q}) \\ &= \theta_1 E_t(W_{t+h-1}) + \dots + \theta_p E_t(W_{t+h-p}) + E_t(a_{t+h}) - \phi_1 E_t(a_{t+h-1}) - \dots - \phi_q E_t(W_{t+h-q})\end{aligned}$$

donde

$$E_t(W_{t+h-j}) = \begin{cases} W_{t+h-j} & \text{si } j \geq h \\ \hat{W}_t(h-j) & \text{si } j < h \end{cases} \quad (53)$$

y usando (52) y (48) también se obtiene

$$E_t(a_{t+h-j}) = \begin{cases} W_{t+h-j} - \hat{W}_t(h-j-1) & \text{si } j \geq h \\ 0 & \text{si } j < h \end{cases} \quad (54)$$

Esta última expresión es importante ya que, en contraste con (48), en donde aparecen los errores aleatorios a_{t+h-j} no observables, aquí aparecen los valores de la serie y sus pronósticos, que sí son observables.

1.9.2) PRONÓSTICO DE SERIES NO ESTACIONARIAS

Como en la práctica la mayoría de las series son no estacionarias se necesita de una generalización de lo expuesto anteriormente. Esta generalización se obtiene de manera inmediata si se supone que la no estacionariedad de la serie original $\{\bar{Z}_t\}$ se cancela aproximadamente al determinar alguna transformación $T(\bar{Z}_t)$ y aplicarle un número apropiado de diferencias, o sea, al considerar a

$$W_t = \nabla^d T(\bar{Z}_t)$$

Ahora supóngase que el grado de diferenciación para cancelar la no estacionariedad homogénea es $d=1$.

Los pronósticos óptimos $\hat{W}_t(h)$ podrían obtenerse de acuerdo con la teoría de la sección anterior y así los pronósticos óptimos de la serie $\{T(\bar{Z}_t)\}$ se obtienen simplemente de la relación²¹

$$E_t(W_{t+h}) = E_t[T(\bar{Z}_{t+h})] - E_t[T(\bar{Z}_{t+h-1})]$$

así que²²

$$\hat{T}(\bar{Z}_t)(h) = E_t[T(\bar{Z}_{t+h})]$$

resulta de

$$\hat{T}(Z_t)(h) = \begin{cases} T(Z_t) + \hat{W}_t(1) & \text{si } h = 1 \\ \hat{T}(Z_t)(h-1) + \hat{W}_t(h) & \text{si } h \geq 2 \end{cases} \quad (55)$$

en caso, repetimos de que el grado de diferenciación sea mayor que $d=1$, los cambios requeridos en (55) podrían deducirse fácilmente. Una manera más clara y directa para obtener los pronósticos $\hat{T}(\bar{Z}_t)(h)$ nace del hecho mismo de que el pronóstico óptimo de $T(\bar{Z}_{t+h})$ sea su esperanza condicional al tiempo t . En otras palabras, si el modelo para $T(\bar{Z}_t)$ puede escribirse como

$$\varphi(B)T(Z_t) = \phi(B)a_t \quad \text{con } \varphi(B) = \nabla^d \theta(B)$$

entonces

²¹ Es la primera diferencia

²² Por la ecuación (50).

$$\begin{aligned}\hat{T}(\bar{Z}_t)(h) &= E_t[T(\bar{Z}_{t+h})] = E_t[\varphi_1 T(\bar{Z}_{t+h-1}) + \dots + \varphi_{p+d} T(\bar{Z}_{t+h-p-d}) + a_{t+h} - \phi_1 a_{t+h-1} - \dots - \phi_q a_{t+h-q}] \\ &= \varphi_1 E_t[T(\bar{Z}_{t+h-1})] + \dots + \varphi_{p+d} E_t[T(\bar{Z}_{t+h-p-d})] + E_t(a_{t+h}) - \phi_1 E_t(a_{t+h-1}) - \dots - \phi_q E_t(a_{t+h-q})\end{aligned}\quad (56)$$

donde

$$E_t[T(\bar{Z}_{t+h-j})] = \begin{cases} T(\bar{Z}_{t+h-j}) & \text{si } j \geq h \\ \hat{T}(\bar{Z}_t)(h-j) & \text{si } j < h \end{cases}$$

que es equivalente a (53), mientras que la equivalente a (54) será

$$E_t(a_{t+h-j}) = \begin{cases} T(\bar{Z}_{t+h-j}) - \hat{T}(\bar{Z}_{t+h-j-1})(1) & \text{si } j \geq h \\ 0 & \text{si } j < h. \end{cases}$$

Por último podemos resaltar que los pronósticos están determinados por el esquema autorregresivo generalizado del proceso ARIMA respectivo, mientras que la parte de promedios móviles sirve nada más para fijar los valores iniciales que especifican la solución particular de la ecuación en diferencia. Esto se generaliza de la siguiente manera. Considérese la ecuación (56) que da como resultado

$$\hat{T}(Z_t)(1) = \varphi_1 T(Z_t) + \dots + \varphi_{p+d} T(Z_{t+1-p-d}) - \theta_1 [T(Z_t) - \hat{T}(Z_{t-1})(1)] - \dots - \theta_q [T(Z_{t-q}) - \hat{T}(Z_{t-q-1})(1)] \quad (57)$$

$$\hat{T}(Z_t)(2) = \varphi_1 \hat{T}(Z_t)(1) + \dots + \varphi_{p+d} T(Z_{t-p-d+2}) - \theta_2 [T(Z_t) - \hat{T}(Z_{t-1})(1)] - \dots - \theta_q [T(Z_{t-q+1}) - \hat{T}(Z_{t-q})(1)]$$

...

$$\hat{T}(Z_t)(q) = \varphi_1 \hat{T}(Z_t)(q-1) + \dots + \varphi_{p+d} \hat{T}(Z_t)(q-p-d-1) - \theta_q [T(Z_t) - \hat{T}(Z_{t-1})(1)]$$

$$\hat{T}(Z_t)(h) = \varphi_1 \hat{T}(Z_t)(h-1) + \dots + \varphi_{p+d} \hat{T}(Z_t)(h-p-d-1) \text{ para } h \geq q+1$$

con

$$\hat{T}(Z_t)(h-j) = T(Z_{t+h-j}) \text{ si } j \geq h.$$

Es decir, se tiene la ecuación en diferencia

$$\varphi(B)\hat{T}(Z_t)(h) = 0 \text{ para } h \geq q+1$$

en cuya solución particular intervienen como condiciones iniciales los valores $\hat{T}(Z_t)(1), \dots, \hat{T}(Z_t)(q)$ los cuales dependen de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_q$.

1.10) METODOLOGÍA BOX-JENKINS

El análisis econométrico del tipo de cambio peso/dólar utiliza la metodología de Box-Jenkins (1976). Las etapas de esta metodología se pueden resumir en las siguientes.

Los pasos más importantes de la metodología Box-Jenkins son:

- Obtener una serie estacionaria en diferencia
- Identificación de un modelo tentativo
- Estimación del modelo
- Diagnóstico del modelo estimado. Si el modelo no está correctamente especificado, se comienza nuevamente en la etapa de identificación.
- Uso del modelo para pronosticar y control.

A continuación describiremos cada una de las etapas una por una.

DIFERENCIACIÓN

Makridakis, Wheelwright y Mc Gee en "Métodos de Pronóstico y Aplicaciones" (1983) comentan que una manera muy útil de denotar el operador de cambio hacia atrás B al ser utilizado en series

$$BX_t = X_{t-1}$$

estacionarias es el siguiente:

En otras palabras, B que opera sobre X_t tiene el efecto de cambiar los datos hacia atrás un período.

K aplicaciones de B sobre X_t cambia los datos k períodos hacia atrás de la siguiente forma

Este operador rezago es conveniente para describir el proceso de diferenciación. Por ejemplo, si una serie es no estacionaria, la podemos convertir a estacionaria tomando la primera diferencia de

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

las series. A continuación se ve la ecuación que define lo que se quiere decir por primera diferencia.

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

Usando el operador rezago la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\Delta X_t = X_t - BX_t = (1-B)X_t$$

Nótese que la primera diferencia se representa por (1-B). Similarmente, la diferencia de segundo orden, esto es la diferencia de la diferencia, se calculará como

$$\begin{aligned}\Delta^2 X_t &= \Delta X_t - \Delta X_{t-1} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ &= (1 - 2B + B^2)X_t \\ &= (1-B)^2 X_t.\end{aligned}$$

La importancia de diferenciar una serie no estacionaria radica en volverla estacionaria. Esto sucede principalmente porque la mayor parte de la teoría desarrollada fue entorno al tema de estacionariedad.

Es útil recordar que las consecuencias de sobrediferenciar una serie de tiempo se mostrarán al tratar de identificar un modelo, puesto que la FAC muestral de la serie sobrediferenciada tendrá una estructura más compleja, se perderá eficiencia en la estimación de parámetros según lo indicaron Dickey, Bell y Miller en 1986. En lo relativo a los pronósticos implicará una sobreestimación de la varianza del error. Parte importante de sobrediferenciarla es que la varianza va a ser mayor.

Por otro lado, el subdiferenciar es mucho más delicado. Esto se debe a que los resultados teóricos en las series de tiempo son únicamente válidos para series estacionarias, así que si no se logra la estacionariedad, no serán válidos para la serie en consideración. Por el lado del pronóstico, considerar a una serie como estacionaria cuando no lo es, acarrea errores crecientes con el horizonte de pronóstico, puesto que la serie estacionaria tiene un nivel medio constante al que tienden los pronósticos, mientras que la no estacionaria tendrá como referencia un polinomio de grado mayor o igual que la unidad.

IDENTIFICACIÓN

Obtenida una serie estacionaria en diferencia, la segunda etapa de la metodología Box-Jenkins es la de identificar un Mecanismo Generador de los Datos de DTCR y DTCN, es decir un proceso ARIMA(p,d,q) del tipo expuesto en el capítulo 1. Con este fin se utilizan la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). A continuación se exponen esos criterios. Para describir las etapas siguientes se utilizó Maddala "Introducción a la

Econometría" (1992) y Wooldridge con "Introducción a la Econometría" (2002). Las características generales de las ACF y PACF para los distintos procesos a identificar se resumen enseguida.

- PROCESO: Ruido blanco

ACF: Todas las autocorrelaciones

$$\rho_s = 0 \quad (s \neq 0)$$

PACF: Todos los

$$\phi_s = 0$$

- PROCESO: AR(1) con

$$a_1 > 0 \text{ y } |a_1| < 1$$

ACF: Disminución exponencial directa

$$\rho_s = a_1^s$$

PACF:

$$\phi_{11} = \rho_1; \phi_{ss} = 0, s \geq 2$$

- PROCESO: AR(1) con

$$a_1 < 0 \text{ y } |a_1| < 1$$

ACF: Disminución oscilante

$$\rho_s = a_1^s$$

PACF:

$$\phi_{11} = \rho_1; \phi_{ss} = 0, s \geq 2$$

- PROCESO: AR(p)

ACF: Disminución hacia cero. Los coeficientes pueden oscilar.

PACF: Picos desde el rezago p. Todos los

$$\phi_{ss} = 0 \text{ para } s > p$$

- PROCESO: MA(1) con

$$\beta_1 > 0$$

ACF: Pico positivo en rezago 1.

$$\rho_s = 0 \text{ para } s \geq 2$$

PACF: Disminución oscilante

$$\phi_{11} > 0$$

- PROCESO: MA(1) con

$$\beta_1 > 0$$

ACF: Pico negativo en rezago 1.

$$\rho_s = 0 \text{ para } s \geq 2$$

PACF: Disminución geométrica

$$\phi_{11} < 0$$

- PROCESO: ARMA(1,1) con

$$a_1 > 0$$

ACF: Disminución exponencial en rezago 1.

$$\text{sign } \rho_1 = \text{sign}(\alpha_1 + \beta)$$

PACF: Oscilaciones que disminuyen comenzando en rezago 1.

$$\phi_{11} = \rho_1$$

- PROCESO: ARMA(1,1) con

$$a_1 < 0$$

ACF: Disminución oscilante iniciando en rezago 1.

$$\text{sign } \rho_1 = \text{sign}(a_1 + \beta)$$

PACF: Disminución exponencial iniciando en rezago 1.

$$\phi_{11} = \rho_1 \text{ y } \text{sign}(\phi_{ss}) = \text{sign}(\phi_{11})$$

- PROCESO: ARMA(p,q)

ACF: Disminución directa u oscilatoria iniciando en rezago q

PACF: Disminución directa u oscilatoria después del rezago p

Es así como en base a las ACF y PACF se puede identificar el modelo. En general, esto dependerá de la persona que esté modelando.

ESTIMACIÓN

Como lo expusimos en secciones anteriores la estimación no es tan simple ya que muchas veces el criterio de máxima verosimilitud origina estimadores no lineales que corresponden a sus funciones o ecuaciones. El método numérico que se propone en este trabajo es el de asignación de valores iniciales.

DIAGNÓSTICO.

Identificado y estimado un modelo ARMA para una serie de tiempo estacionaria, la etapa siguiente es la de diagnóstico del modelo. Se refiere a que el modelo deberá contener residuos no autocorrelacionados, parámetros estadísticamente significativos, ser estacionario e invertible y parsimonioso.

PRONÓSTICO

Una vez que el modelo identificado y estimado cumple con las pruebas de diagnóstico, la etapa siguiente consiste en usar el modelo. Un uso de particular importancia es el pronóstico que se expuso en el capítulo uno.

Es conveniente abordar de manera general algunos conceptos fundamentales de pronósticos. Supongamos que en el tiempo t se quiere pronosticar el resultado de \bar{Z}_t en el tiempo t+1 o dicho de otro modo \bar{Z}_{t+1} . Sea I_t la información que podemos observar en el tiempo t que abarca los valores anteriores de \bar{Z}_t . Sea f_t el pronóstico de \bar{Z}_{t+1} realizado en t. f_t significa el pronóstico un paso hacia delante.

El error de pronóstico es

$$e_{t+1} = \bar{Z}_{t+1} - f_t$$

que se obtiene una vez que el resultado de \bar{Z}_{t+1} es observado. Es natural escoger el pronóstico para minimizar el error cuadrático esperado del pronóstico dado I_t :

$$E(e_{t+1}^2 | I_t) = E\left[\left(\bar{Z}_{t+1} - f_t\right)^2 | I_t\right]$$

Si queremos minimizar el error cuadrático esperado del pronóstico dada la información en el tiempo t , nuestro pronóstico debe ser el valor esperado de \bar{Z}_{t+1} dadas las variables que conocemos en el tiempo t .

CAPÍTULO 2. ANÁLISIS ECONOMÉTRICO DE LAS SERIES TIPO DE CAMBIO REAL Y NOMINAL 1980-2008

2.1) APLICACIÓN DE BOX JENKINS A LAS SERIE TIPO DE CAMBIO REAL Y NOMINAL

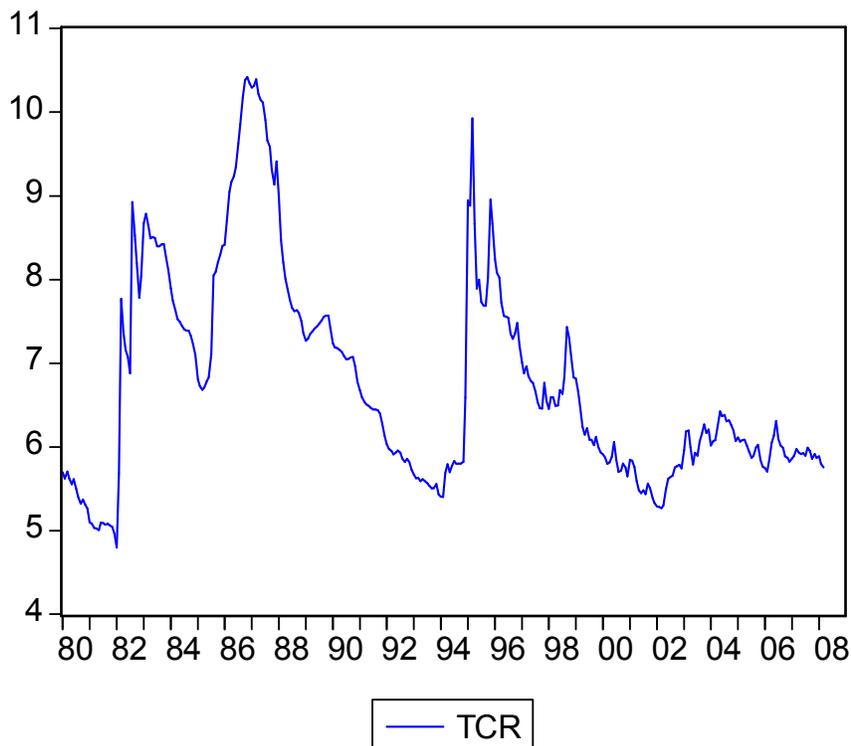
En esta sección se aplica la metodología de Box-Jenkins reseñada en la sección anterior a la serie de tipo de cambio real y tipo de cambio nominal peso-dólar para el período del primer mes del año 1980 al tercer mes del año 2008. Para ello se utilizó el paquete informático E-Views versión 5.0.

En el tercer anexo de esta tesis se presenta un comentario acerca del concepto de eficiencia de mercado. Para ello, el estudio de eficiencia se subdividirá en cuatro periodos distintos. El primero de ellos comprende desde enero de 1980 hasta febrero de 1988. El segundo abarca desde marzo de 1988 hasta diciembre de 1994. El tercero va desde marzo de 1988 hasta diciembre de 1993 y finalmente, el último comprende enero de 1995 hasta marzo de 2008. Esto se realizó con el fin de observar el comportamiento de la serie en los distintos periodos con el fin de hacer comparaciones entre ellos y poder ver si son eficientes o no. Es importante señalar que el criterio que se usó para hacer dicha subdivisión fue que en cada uno de los periodos nuestro país adoptó regímenes cambiarios distintos. Dicho de otro modo, hubo cambios estructurales. Dichos cambios tuvieron una incidencia en la eficiencia de mercado de la serie.

TIPO CAMBIO REAL

Enero 1980 a marzo de 2008

En la siguiente gráfica observamos el comportamiento de dicha serie.



Gráfica 1. Comportamiento de la serie del tipo de cambio real en el período enero 1980 a marzo 2008.

En esta gráfica se puede ver que esperanza y varianza cambian con el tiempo de modo que la serie TCR parece ser una serie no estacionaria. En efecto, la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentada (ADF) con valor

crítico de McKinnon de 5% indica que no es posible rechazar la hipótesis nula de que el tipo de tiene una raíz unitaria., como se observa en la tabla 1.

Al realizar esta prueba si resulta que $ABS(ADF) > ABS(McKinnon)$ entonces se rechaza la hipótesis nula y no hay raíz unitaria lo que nos estaría diciendo que se trata de una serie estacionaria. Si sucede que $ABS(ADF) < ABS(McKinnon)$ entonces se dice que sí hay raíz unitaria, que se trata de un proceso estocástico y de una serie no estacionaria. Se puede ir más allá y concluir que su comportamiento es aquel correspondiente al de una caminata aleatoria y el mercado para ese período es eficiente.

Los resultados que nos muestra la Tabla 1 son que $2.518993 = ABS(ADF) < ABS(McKinnon) = 2.870004$. Es decir no es estacionaria. Además lo que nos muestra es que el mercado del tipo de cambio real para este período es eficiente.

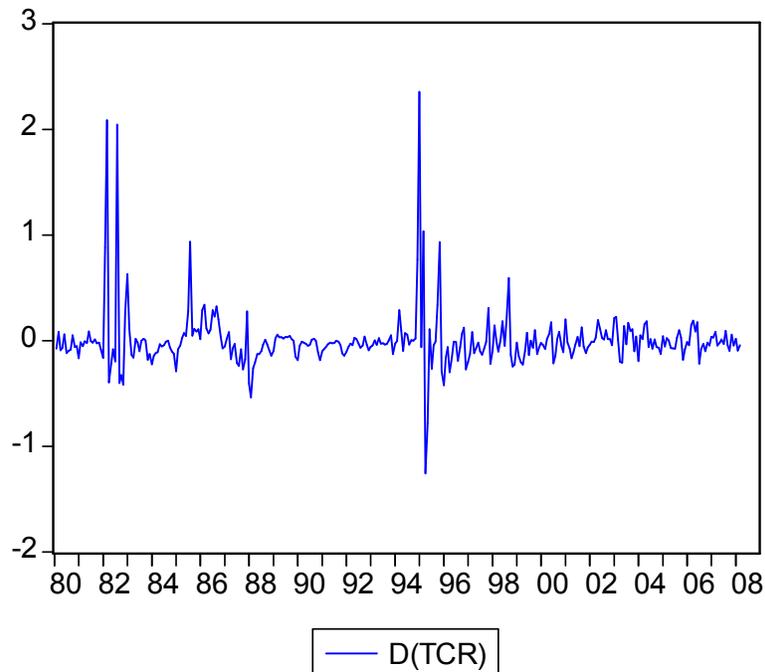
Null Hypothesis: TCR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 5 (Automatic based on SIC, MAXLAG=16)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.518993	0.1118
Test critical values:		
1% level	-3.449797	
5% level	-2.870004	
10% level	-2.571349	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 1. Resultados de la Prueba de Dickey Fuller Aumentada a la serie de tiempo tipo de cambio real para el período enero 1980 a marzo 2008

Ahora bien, dado que la serie TCR tiene raíz unitaria, su tendencia es aleatoria. En este caso, hay que diferenciar la serie d veces hasta tener una seire estacionaria en diferencia. La gráfica de la primera diferencia del TCR (DTCR) es la siguiente.



Gráfica 2. Muestra el comportamiento de la primera diferencia de la serie tipo de cambio real para el período enero 1980 a marzo 2008

La gráfica muestra que esperanza de la serie DTCR oscila alrededor de su media cero y su varianza es por lo cual se podría decir que la serie es estacionaria en covarianza. Se confirma la estacionariedad de la serie con la prueba ADF y valor crítico de McKinnon de 5%, como se observa en la tabla 2. Dicha prueba nos muestra que $7.034118 = \text{ABS}(\text{ADF}) > \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.870004$ por lo que concluimos que se trata de una serie integrada de orden uno. La relación sí se cumple por lo que podemos decir que se rechaza la hipótesis nula y no existe raíz unitaria. La serie pasó de ser no estacionaria a ser estacionaria.

Null Hypothesis: D(TCR) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 4 (Automatic based on SIC, MAXLAG=16)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-7.034118	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.449797	
5% level	-2.870004	
10% level	-2.571349	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 2. Muestra los resultados de la Prueba Dickey Fuller Aumentada para la primera diferencia de la serie tipo de cambio real para el período enero 1980 a marzo 2008

Al aplicar la primera etapa de la metodología de Box-Jenkins, se obtuvo que el DTCR es una serie estacionaria en primera diferencia o integrada de orden 1. Siguiendo esta metodología, la segunda etapa es la identificar un Mecanismo Generador de los Datos de DTCR, es decir la identificación de un proceso ARIMA para la serie DTCR. La herramienta utilizada con este fin es el correlograma descrito en el capítulo uno, para DTCR.

El correlograma muestral de DTCR está en el cuadro siguiente.

Date: 05/13/08 Time: 14:22
Sample: 1980M01 2008M12
Included observations: 338

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.137	0.137	6.3878	0.011
		2	0.001	-0.018	6.3880	0.041
		3	-0.114	-0.114	10.861	0.013
		4	-0.106	-0.077	14.709	0.005
		5	0.205	0.238	29.275	0.000
		6	0.013	-0.065	29.337	0.000
		7	-0.058	-0.087	30.524	0.000
		8	0.031	0.103	30.858	0.000
		9	0.088	0.131	33.579	0.000
		10	0.162	0.058	42.816	0.000
		11	0.054	0.017	43.846	0.000
		12	-0.014	0.048	43.915	0.000
		13	-0.084	-0.073	46.396	0.000
		14	-0.042	-0.047	47.031	0.000
		15	-0.046	-0.067	47.777	0.000
		16	-0.028	-0.026	48.061	0.000
		17	-0.053	-0.079	49.084	0.000
		18	-0.070	-0.072	50.861	0.000
		19	-0.056	-0.074	51.984	0.000
		20	-0.032	-0.042	52.343	0.000
		21	-0.043	-0.065	53.011	0.000
		22	-0.047	-0.039	53.809	0.000
		23	-0.080	-0.043	56.163	0.000
		24	-0.033	0.012	56.560	0.000
		25	-0.080	-0.071	58.934	0.000
		26	-0.029	0.005	59.251	0.000
		27	-0.023	0.019	59.451	0.000
		28	-0.033	-0.003	59.866	0.000
		29	-0.058	-0.061	61.112	0.000
		30	-0.059	-0.008	62.428	0.000
		31	-0.000	0.037	62.428	0.001
		32	0.010	-0.013	62.468	0.001
		33	-0.034	-0.056	62.901	0.001
		34	0.002	0.039	62.903	0.002
		35	-0.007	0.016	62.923	0.003
		36	0.056	0.011	64.124	0.003

Gráfica 3. Correlograma de autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales

A partir de la información que proporcionan la ACF y la PACF en este correlograma y aplicando los criterios de identificación señalados anteriormente, se procede a identificar el modelo ARIMA que describirá el comportamiento de la serie DTCR. Se observarán los puntos de corte que es cuando hay un cambio de en el comportamiento de los cuadros. Es decir, cuando un rectángulo sale del intervalo e inmediatamente otro se encuentra dentro del intervalo. Y

auxiliándonos de dicho correlograma usamos un método de rejilla que consiste en proponer un modelo y partir de ahí para encontrar todos los posibles modelos que cumplan los supuestos necesarios. Basados en el Gráfico 3 partimos del modelo ARIMA(6,6). Las corridas correspondientes a cada uno de los modelos podrán ser consultados en el Anexo IV. Los resultados obtenidos son:

Modelo	Criterio de Akaike	Criterio de Schwarz
ARIMA(6,6)	0.234000	0.302768
ARIMA(4,3)	0.237761	0.317636
ARIMA(2,3)	0.250068	0.284149
ARIMA(2,2)	0.236706	0.270787
AR(1)	0.294558	0.305893
MA(1)	0.291950	0.303261

Cuadro 1. Muestra todos los modelos obtenidos junto con su respectivo valor del criterio de Akaike y de Schwarz

Con respecto al Akaike info criterion el modelo a escoger sería al ARIMA(6,1,6) y con respecto al criterio de Schwarz el modelo a escoger sería el ARIMA(2,1,2) por ser los valores mínimos según lo indica Tsay (2005) en "Análisis de Series de Tiempo Financieras". El ARIMA(6,1,6) resulta ser un modelo adecuado debido a que prácticamente todos sus residuos están no correlacionados con excepción de uno sólo. Sin embargo, el correlograma residual del modelo ARMA(2,1,2) muestra que varios de los residuos con excepción están correlacionados. Lo mismo sucede con el ARIMA(2,1,3). El siguiente modelo sería nuevamente el ARIMA(6,1,6) que como ya hemos mencionado es un modelo bondadoso.

Después de identificar y reparametrizar posibles modelos ARIMA para la serie DTCR, el modelo identificado que cumple con el diagnóstico es el modelo ARIMA(6,1,6):

$$D(TCR) = -0.000179 + 0.607926 TCR_{t-1} + 0.090440 TCR_{t-2} + 0.186177 TCR_{t-3} - 0.158554 TCR_{t-4} + 0.081838 TCR_{t-5} - 0.337396 TCR_{t-6} - 0.494664 e_{t-1} - 0.132761 e_{t-2} - 0.379844 e_{t-3} + 0.040495 e_{t-4} + 0.293810 e_{t-5} + 0.330390 e_{t-6}$$

En efecto, este modelo es estacionario e invertible, sus coeficientes estadísticamente significativos al nivel de significancia de 5% y los residuos no autocorrelacionados (Ver el cuadro y correlograma siguientes).

Test Equation:
Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 09/29/08 Time: 16:42
Sample (adjusted): 1980M08 2008M03
Included observations: 332 after adjustments
Convergence achieved after 10 iterations
Backcast: 1979M07 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.176797	0.050292	3.515450	0.0005
AR(3)	-0.146092	0.049316	-2.962383	0.0033
AR(4)	-0.159525	0.049851	-3.200052	0.0015
AR(6)	-0.448680	0.118511	-3.785963	0.0002
MA(5)	0.239520	0.051650	4.637334	0.0000
MA(6)	0.423265	0.123261	3.433900	0.0007
R-squared	0.115964	Mean dependent var		0.000769
Adjusted R-squared	0.102405	S.D. dependent var		0.284542

S.E. of regression	0.269579	Akaike info criterion	0.234000	
Sum squared resid	23.69143	Schwarz criterion	0.302768	
Log likelihood	-32.84401	Durbin-Watson stat	2.048600	
Inverted AR Roots	.78+.51i	.78-.51i	.06-.83i	.06+.83i
	-.75+.45i	-.75-.45i		
Inverted MA Roots	.79+.49i	.79-.49i	-.07-.88i	-.07+.88i
	-.72+.36i	-.72-.36i		

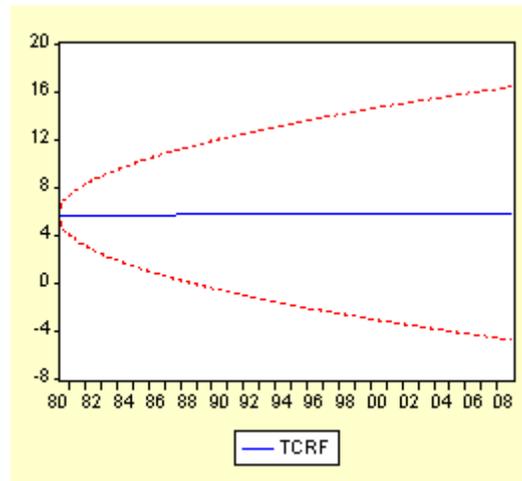
Tabla 3. Muestra los valores de cada uno de los coeficientes del modelo escogido. Asimismo muestra el valor del criterio de Schwarz y el del criterio de Akaike. A su vez indica si el modelo es invertible.

Date: 11/03/08 Time: 22:53
Sample: 1980M08 2008M03
Included observations: 332
Q-statistic probabilities adjusted for 12 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.001	0.001	0.0002	
		2	0.008	0.008	0.0239	
		3	0.016	0.016	0.1108	
		4	0.015	0.015	0.1878	
		5	0.005	0.004	0.1956	
		6	-0.014	-0.015	0.2663	
		7	-0.032	-0.033	0.6162	
		8	0.004	0.004	0.6219	
		9	0.029	0.030	0.9129	
		10	0.061	0.063	2.1994	
		11	0.037	0.038	2.6729	
		12	0.010	0.008	2.7041	
		13	-0.076	-0.081	4.7092	0.030
		14	0.000	-0.005	4.7092	0.095
		15	-0.039	-0.039	5.2498	0.154
		16	0.005	0.011	5.2584	0.262
		17	-0.022	-0.013	5.4267	0.366
		18	-0.036	-0.033	5.8879	0.436
		19	-0.040	-0.046	6.4647	0.487
		20	0.017	0.006	6.5643	0.584
		21	-0.043	-0.047	7.2236	0.614
		22	-0.050	-0.048	8.1169	0.617
		23	-0.081	-0.072	10.483	0.488
		24	-0.011	-0.004	10.525	0.570
		25	-0.079	-0.075	12.755	0.467
		26	-0.073	-0.077	14.686	0.400
		27	-0.032	-0.029	15.053	0.448
		28	-0.005	-0.006	15.062	0.520
		29	-0.086	-0.083	17.742	0.405
		30	-0.051	-0.059	18.696	0.411
		31	0.015	0.012	18.776	0.471
		32	0.035	0.034	19.224	0.507
		33	-0.051	-0.044	20.199	0.509
		34	0.025	0.023	20.426	0.556
		35	0.022	0.026	20.608	0.605
		36	0.054	0.048	21.715	0.596

Gráfica 4. Correlograma de los residuales para el modelo escogido ARMA(6,1,6)

Ya se ha identificado un modelo ARIMA para la serie TCR. La siguiente etapa es la de su uso. Consiste en este caso en realizar un pronóstico de la serie. Este pronóstico se basa en la teoría expuesta en el capítulo uno.



Gráfica 5. Gráfica del pronóstico de enero de 1980 a diciembre de 2008

Cuyos valores serían los siguientes:

	ENERO JULIO	FEBRERO AGOSTO	MARZO SEPTIEMBRE	ABRIL OCTUBRE	MAYO NOVIEMBRE	JUNIO DICIEMBRE
1980	5.698869	5.623243	5.708767	5.620992	5.555215	5.616336
1980	5.49984	5.499526	5.499212	5.498898	5.498584	5.49827
1981	5.497955	5.497641	5.497327	5.497013	5.496699	5.496385
1981	5.496071	5.495757	5.495443	5.495129	5.494815	5.4945
1982	5.494186	5.493872	5.493558	5.493244	5.49293	5.492616
1982	5.492302	5.491988	5.491674	5.49136	5.491045	5.490731
1983	5.490417	5.490103	5.489789	5.489475	5.489161	5.488847
1983	5.488533	5.488219	5.487905	5.48759	5.487276	5.486962
1984	5.486648	5.486334	5.48602	5.485706	5.485392	5.485078
1984	5.484764	5.48445	5.484135	5.483821	5.483507	5.483193
1985	5.482879	5.482565	5.482251	5.481937	5.481623	5.481309
1985	5.480995	5.48068	5.480366	5.480052	5.479738	5.479424
1986	5.47911	5.478796	5.478482	5.478168	5.477854	5.477539
1986	5.477225	5.476911	5.476597	5.476283	5.475969	5.475655
1987	5.475341	5.475027	5.474713	5.474399	5.474084	5.47377
1987	5.473456	5.473142	5.472828	5.472514	5.4722	5.471886
1988	5.471572	5.471258	5.470944	5.470629	5.470315	5.470001
1988	5.469687	5.469373	5.469059	5.468745	5.468431	5.468117
1989	5.467803	5.467489	5.467174	5.46686	5.466546	5.466232
1989	5.465918	5.465604	5.46529	5.464976	5.464662	5.464348
1990	5.464034	5.463719	5.463405	5.463091	5.462777	5.462463
1990	5.462149	5.461835	5.461521	5.461207	5.460893	5.460579
1991	5.460264	5.45995	5.459636	5.459322	5.459008	5.458694
1991	5.45838	5.458066	5.457752	5.457438	5.457124	5.456809
1992	5.456495	5.456181	5.455867	5.455553	5.455239	5.454925
1992	5.454611	5.454297	5.453983	5.453669	5.453354	5.45304

1993	5.452726	5.452412	5.452098	5.451784	5.45147	5.451156
1993	5.450842	5.450528	5.450214	5.449899	5.449585	5.449271
1994	5.448957	5.448643	5.448329	5.448015	5.447701	5.447387
1994	5.447073	5.446759	5.446444	5.44613	5.445816	5.445502
1995	5.445188	5.444874	5.44456	5.444246	5.443932	5.443618
1995	5.443304	5.442989	5.442675	5.442361	5.442047	5.441733
1996	5.441419	5.441105	5.440791	5.440477	5.440163	5.439848
1996	5.439534	5.43922	5.438906	5.438592	5.438278	5.437964
1997	5.43765	5.437336	5.437022	5.436708	5.436393	5.436079
1997	5.435765	5.435451	5.435137	5.434823	5.434509	5.434195
1998	5.433881	5.433567	5.433253	5.432938	5.432624	5.43231
1998	5.431996	5.431682	5.431368	5.431054	5.43074	5.430426
1999	5.430112	5.429798	5.429483	5.429169	5.428855	5.428541
1999	5.428227	5.427913	5.427599	5.427285	5.426971	5.426657
2000	5.426343	5.426028	5.425714	5.4254	5.425086	5.424772
2000	5.424458	5.424144	5.42383	5.423516	5.423202	5.422888
2001	5.422573	5.422259	5.421945	5.421631	5.421317	5.421003
2001	5.420689	5.420375	5.420061	5.419747	5.419433	5.419118
2002	5.418804	5.41849	5.418176	5.417862	5.417548	5.417234
2002	5.41692	5.416606	5.416292	5.415978	5.415663	5.415349
2003	5.415035	5.414721	5.414407	5.414093	5.413779	5.413465
2003	5.413151	5.412837	5.412523	5.412208	5.411894	5.41158
2004	5.411266	5.410952	5.410638	5.410324	5.41001	5.409696
2004	5.409382	5.409068	5.408753	5.408439	5.408125	5.407811
2005	5.407497	5.407183	5.406869	5.406555	5.406241	5.405927
2005	5.405613	5.405298	5.404984	5.40467	5.404356	5.404042
2006	5.403728	5.403414	5.4031	5.402786	5.402472	5.402157
2006	5.401843	5.401529	5.401215	5.400901	5.400587	5.400273
2007	5.399959	5.399645	5.399331	5.399017	5.398702	5.398388
2007	5.398074	5.39776	5.397446	5.397132	5.396818	5.396504
2008	5.39619	5.395876	5.395562	5.395247	5.394933	5.394619
2008	5.394305	5.393991	5.393677	5.393363	5.393049	5.392735

Tabla 4. Tabla que muestra los valores del pronóstico para el período enero 1980 a diciembre 2008.

Vemos que el error cuadrático medio es igual a 1.837432. Para ver que tan eficiente es nuestro pronóstico a continuación vamos a comparar los valores de nuestro pronóstico con lo valores reales del tipo de cambio real de enero de 2008 a diciembre de 2008. Los cuales son:

Mes	Valor pronóstico	Valor real
Enero 2008	5.396190	5.89
Febrero 2008	5.395876	5.80
Marzo 2008	5.395562	5.76
Abril 2008	5.395247	5.64
Mayo 2008	5.394933	5.64
Junio 2008	5.394619	5.62
Julio 2008	5.394305	5.57
Agosto 2008	5.393991	5.47
Septiembre 2008	5.393677	No disponible
Octubre 2008	5.393363	No disponible
Noviembre 2008	5.393049	No disponible
Diciembre 2008	5.392735	No disponible

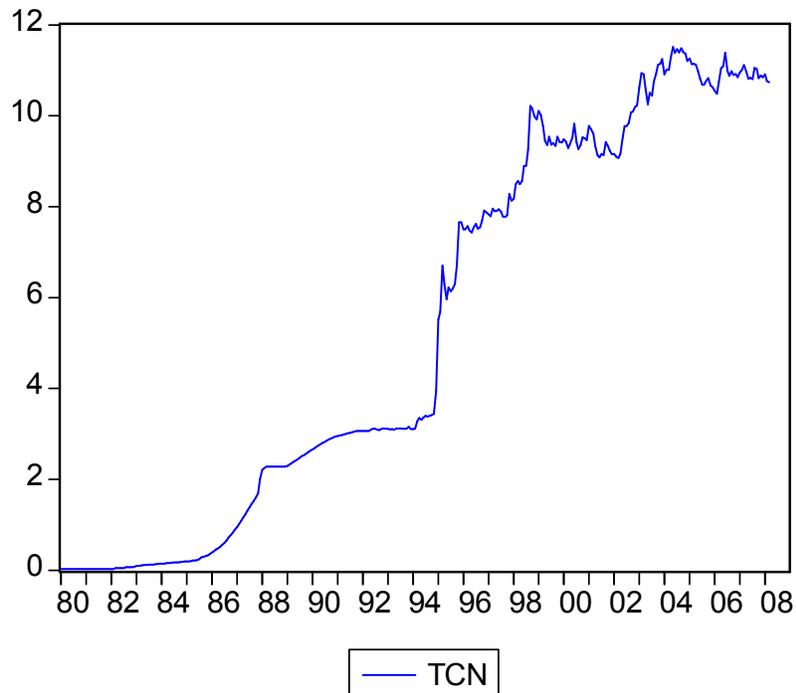
Cuadro 2. Cuadro de comparación de los valores reales y pronosticados.

Al comparar las dos columnas podemos hablar que se trata de un pronóstico adecuado ya que ambos valores son muy "ceranos" unos con otros en especial para los meses de julio y agosto.

TIPO CAMBIO NOMINAL

Enero de 1980 a marzo de 2008

En este apartado se aplica la misma metodología Box-Jenkins al tipo de cambio nominal (TCN) peso/dólar para el periodo enero 1980 a marzo 2008. El comportamiento gráfico del TCN se puede ver en figura siguiente.



Gráfica 6. Esta gráfica muestra el comportamiento de la serie tipo de cambio nominal para el período enero de 1980 a marzo de 2008.

La prueba de raíz unitaria ADF al valor crítico de 5% de McKinnon indica que esta serie tiene raíz unitaria, es decir que es una serie no estacionaria. Como se puede observar en la Tabla 5 $0.404987 = \text{ABS}(\text{ADF}) < \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.869901$. Esto nos indica además el mercado del tipo de cambio nominal para el periodo enero 1980 a marzo de 2008 es eficiente.

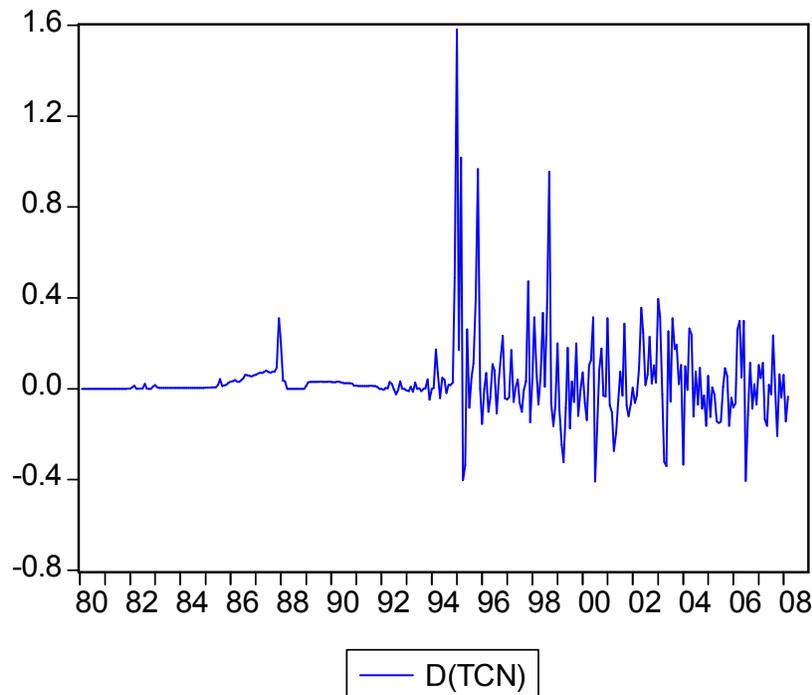
Null Hypothesis: TCN has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=16)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.404987	0.9052
Test critical values:		
1% level	-3.449562	
5% level	-2.869901	
10% level	-2.571293	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 5. Prueba de Dickey Fuller Aumentada para la serie tipo de cambio nominal para el período que va desde enero de 1980 a marzo de 2008

La serie TCN tiene raíz unitaria y es estacionaria en primera diferencia, según la prueba ADF y el valor crítico de McKinnon de 5% (gráfica y cuadro siguientes). La gráfica 7 muestra que la serie ya es estacionaria. Y la Tabla 6 nos indica que $15.29671 = \text{ABS}(\text{ADF}) > \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.0869901$ por lo que concluimos que se trata de una serie integrada de orden uno. Se rechaza la hipótesis nula y no existe raíz unitaria. Pasó de ser no estacionaria a ser una serie estacionaria.



Gráfica 7. Gráfica que muestra la primera diferencia de la serie tipo de cambio nominal para el período enero 1980 a marzo 2008.

Null Hypothesis: D(TCN) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=16)

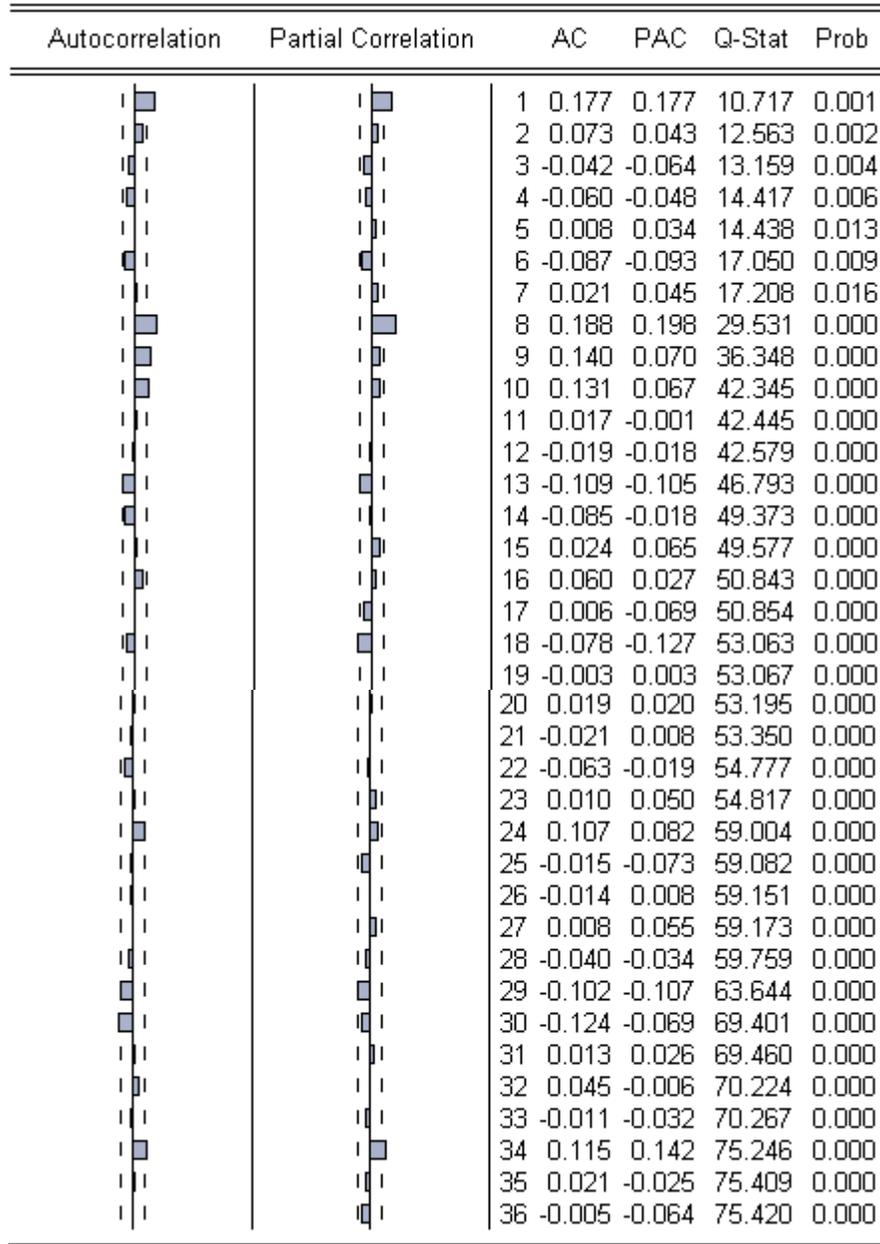
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-15.29671	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.449562	
5% level	-2.869901	
10% level	-2.571293	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 6. Muestra los resultados de la Prueba ADF de la primera diferencia de la serie tipo de cambio nominal para el período enero 1980 a diciembre 2008

El correlograma de DTCN es el siguiente.

Date: 09/22/08 Time: 15:20
Sample: 1980M01 2008M12
Included observations: 338



Gráfica 8. Correlograma de las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales

A partir de la información que proporcionan la ACF y la PACF en este correlograma y aplicando los criterios de identificación señalados anteriormente, se procede a identificar el modelo ARIMA que describirá el comportamiento de la serie DTCN. El correlograma nos ayuda a darnos una idea del modelo que sería más apropiado. La manera en que se procedió fue observar los rectángulos y encontrar los cortes. Una manera de hacerlo de es ver cuando un rectángulo

sale del intervalo e inmediatamente otro se encuentra dentro del intervalo. Una vez hecho lo anterior se utiliza el método de la rejilla para ir probando cada uno de uno de los posibles modelos ARIMA para la serie DTCN.

Los resultados de todos los posibles modelos son:

Modelo	Criterio de Akaike	Criterio de Schwarz
ARIMA(2,1,3)	-0.665451	-0.608649
AR(1)	-0.687497	-0.664826
MA(1)	-0.686685	-0.664063
ARIMA(7,1,2)	-0.7000606	-0.608712

Cuadro 4. Muestra los valores con respecto a los criterios de Akaike y Schwarz para todos los posibles modelos

Se debe escoger aquel modelo que tenga el valor mínimo correspondiente al criterio de Akaike y de Schwarz. Con respecto a Akaike el modelo a escoger es el ARIMA(7,1,2). Ese modelo se acepta debido a que todos los p-valores de sus residuos no están correlacionados, es decir, son mayores a 0.05. Con respecto a Schwarz el primer modelo a escoger sería el AR(1) y posteriormente el MA(1) pero ambos se desechan porque varios de sus residuos están correlacionados. El siguiente modelo sería el ARIMA(7,1,2) que como ya se dijo es el adecuado. Todas las corridas podrán ser consultadas en el Anexo IV.

Después de identificar y reparametrizar éstos, el modelo identificado que cumple con el diagnóstico es el modelo ARIMA(7,1,2):

$$D(TCN) = 0.0322 + 1.2265 TCN_{t-1} - 0.7983 TCN_{t-2} + 0.9418 TCN_{t-4} - 0.1679 TCN_{t-6} + 0.184318 TCN_{t-7} - 1.0705e_{t-1} + 0.6889 e_{t-2}$$

En efecto, este modelo es estacionario e invertible, sus coeficientes estadísticamente significativos al nivel de significancia de 5% y los residuos no autocorrelacionados. La tabla 7 muestra el valor de cada uno de sus coeficientes.

Test Equation:

Dependent Variable: D(TCN)

Method: Least Squares

Date: 09/27/08 Time: 12:25

Sample (adjusted): 1980M09 2008M03

Included observations: 331 after adjustments

Convergence achieved after 18 iterations

Backcast: 1979M11 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.032279	0.012375	2.608417	0.0095
AR(1)	1.226562	0.123964	9.894512	0.0000
AR(2)	-0.798344	0.125135	-6.379859	0.0000
AR(4)	0.094183	0.045562	2.067127	0.0395
AR(6)	-0.167933	0.054123	-3.102790	0.0021
AR(7)	0.184318	0.052596	3.504383	0.0005
MA(1)	-1.070588	0.124634	-8.589856	0.0000
MA(2)	0.688993	0.122827	5.609452	0.0000

R-squared	0.094151	Mean dependent var	0.032351
Adjusted R-squared	0.074520	S.D. dependent var	0.175090
S.E. of regression	0.168440	Akaike info criterion	-0.700606
Sum squared resid	9.164128	Schwarz criterion	-0.608712
Log likelihood	123.9503	F-statistic	4.795957
Durbin-Watson stat	2.026261	Prob(F-statistic)	0.000038
<hr/>			
Inverted AR Roots	.74	.67+.64i	.67-.64i
	.15+.77i	-.58+.36i	-.58-.36i
Inverted MA Roots	.54+.63i	.54-.63i	

Tabla 7. Muestra los valores de los coeficientes y del criterio de Akaike y Schwarz para el modelo ARMA(7,1,2)

Date: 10/07/08 Time: 15:40

Sample: 1980M09 2008M03

Included observations: 331

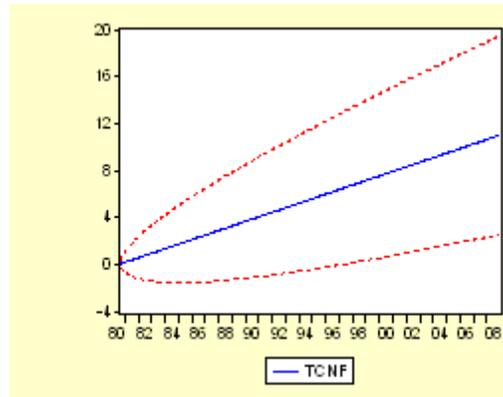
Q-statistic probabilities adjusted for 9 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.007	-0.007	0.0149	
		2	0.001	0.001	0.0151	
		3	-0.014	-0.014	0.0811	
		4	0.004	0.004	0.0867	
		5	-0.001	-0.001	0.0868	
		6	0.014	0.014	0.1576	
		7	-0.034	-0.034	0.5619	
		8	0.075	0.075	2.5070	
		9	-0.011	-0.009	2.5454	
		10	0.044	0.043	3.2168	0.073
		11	0.034	0.037	3.6228	0.163
		12	0.049	0.049	4.4675	0.215
		13	-0.042	-0.039	5.0735	0.280
		14	-0.043	-0.046	5.7144	0.335
		15	0.013	0.019	5.7773	0.449
		16	0.019	0.010	5.9043	0.551
		17	-0.051	-0.050	6.8311	0.555
		18	-0.129	-0.137	12.718	0.176
		19	-0.011	-0.013	12.759	0.237
		20	0.068	0.059	14.399	0.212
		21	0.045	0.045	15.110	0.235
		22	-0.037	-0.038	15.592	0.272
		23	0.011	0.011	15.635	0.336
		24	0.086	0.097	18.267	0.249
		25	-0.066	-0.061	19.856	0.227
		26	-0.035	-0.023	20.290	0.260
		27	0.037	0.042	20.796	0.290
		28	0.006	0.018	20.810	0.347
		29	-0.113	-0.114	25.484	0.184
		30	-0.104	-0.108	29.459	0.103
		31	0.047	0.036	30.261	0.112
		32	0.053	0.027	31.291	0.116
		33	-0.045	-0.043	32.035	0.126
		34	0.099	0.112	35.657	0.077
		35	0.002	0.001	35.659	0.098
		36	-0.021	-0.057	35.819	0.119

Gráfica 9. Correlograma de los residuos del modelo ARIMA(7,1,2)

Identificado un modelo ARIMA para la serie TCN, se hace un pronóstico de la serie. El pronóstico como se puede ver en la Gráfica 10 tiene un error cuadrático medio de 1.432071.

De la misma manera como lo hicimos con el Tipo de Cambio Real graficamos nuestro pronóstico hasta diciembre de 2008. La gráfica se vería así:



Gráfica 10. Gráfico que muestra el pronóstico para el tipo de cambio nominal para el periodo enero 1980 a diciembre 2008

Cuyos valores serían:

	ENERO JULIO	FEBRERO AGOSTO	MARZO SEPTIEMBRE	ABRIL OCTUBRE	MAYO NOVIEMBRE	JUNIO DICIEMBRE
1980	0.0228	0.0228	0.0228	0.0228	0.0229	0.0229
1980	0.023	0.023	0.055251	0.087502	0.119753	0.152005
1981	0.184256	0.216507	0.248758	0.281009	0.31326	0.345512
1981	0.377763	0.410014	0.442265	0.474516	0.506767	0.539018
1982	0.57127	0.603521	0.635772	0.668023	0.700274	0.732525
1982	0.764777	0.797028	0.829279	0.86153	0.893781	0.926032
1983	0.958283	0.990535	1.022786	1.055037	1.087288	1.119539
1983	1.15179	1.184042	1.216293	1.248544	1.280795	1.313046
1984	1.345297	1.377548	1.4098	1.442051	1.474302	1.506553
1984	1.538804	1.571055	1.603307	1.635558	1.667809	1.70006
1985	1.732311	1.764562	1.796813	1.829065	1.861316	1.893567
1985	1.925818	1.958069	1.99032	2.022572	2.054823	2.087074
1986	2.119325	2.151576	2.183827	2.216078	2.24833	2.280581
1986	2.312832	2.345083	2.377334	2.409585	2.441837	2.474088
1987	2.506339	2.53859	2.570841	2.603092	2.635343	2.667595
1987	2.699846	2.732097	2.764348	2.796599	2.82885	2.861102
1988	2.893353	2.925604	2.957855	2.990106	3.022357	3.054608
1988	3.08686	3.119111	3.151362	3.183613	3.215864	3.248115
1989	3.280367	3.312618	3.344869	3.37712	3.409371	3.441622
1989	3.473873	3.506125	3.538376	3.570627	3.602878	3.635129
1990	3.66738	3.699632	3.731883	3.764134	3.796385	3.828636
1990	3.860887	3.893139	3.92539	3.957641	3.989892	4.022143
1991	4.054394	4.086645	4.118897	4.151148	4.183399	4.21565

1991	4.247901	4.280152	4.312404	4.344655	4.376906	4.409157
1992	4.441408	4.473659	4.50591	4.538162	4.570413	4.602664
1992	4.634915	4.667166	4.699417	4.731669	4.76392	4.796171
1993	4.828422	4.860673	4.892924	4.925175	4.957427	4.989678
1993	5.021929	5.05418	5.086431	5.118682	5.150934	5.183185
1994	5.215436	5.247687	5.279938	5.312189	5.34444	5.376692
1994	5.408943	5.441194	5.473445	5.505696	5.537947	5.570199
1995	5.60245	5.634701	5.666952	5.699203	5.731454	5.763705
1995	5.795957	5.828208	5.860459	5.89271	5.924961	5.957212
1996	5.989464	6.021715	6.053966	6.086217	6.118468	6.150719
1996	6.18297	6.215222	6.247473	6.279724	6.311975	6.344226
1997	6.376477	6.408729	6.44098	6.473231	6.505482	6.537733
1997	6.569984	6.602235	6.634487	6.666738	6.698989	6.73124
1998	6.763491	6.795742	6.827994	6.860245	6.892496	6.924747
1998	6.956998	6.989249	7.0215	7.053752	7.086003	7.118254
1999	7.150505	7.182756	7.215007	7.247259	7.27951	7.311761
1999	7.344012	7.376263	7.408514	7.440765	7.473017	7.505268
2000	7.537519	7.56977	7.602021	7.634272	7.666524	7.698775
2000	7.731026	7.763277	7.795528	7.827779	7.86003	7.892282
2001	7.924533	7.956784	7.989035	8.021286	8.053537	8.085789
2001	8.11804	8.150291	8.182542	8.214793	8.247044	8.279295
2002	8.311547	8.343798	8.376049	8.4083	8.440551	8.472802
2002	8.505054	8.537305	8.569556	8.601807	8.634058	8.666309
2003	8.69856	8.730812	8.763063	8.795314	8.827565	8.859816
2003	8.892067	8.924319	8.95657	8.988821	9.021072	9.053323
2004	9.085574	9.117825	9.150077	9.182328	9.214579	9.24683
2004	9.279081	9.311332	9.343584	9.375835	9.408086	9.440337
2005	9.472588	9.504839	9.53709	9.569342	9.601593	9.633844
2005	9.666095	9.698346	9.730597	9.762849	9.7951	9.827351
2006	9.859602	9.891853	9.924104	9.956355	9.988607	10.02086
2006	10.05311	10.08536	10.11761	10.14986	10.18211	10.21436
2007	10.24662	10.27887	10.31112	10.34337	10.37562	10.40787
2007	10.44012	10.47237	10.50463	10.53688	10.56913	10.60138
2008	10.63363	10.66588	10.69813	10.73038	10.76263	10.79489
2008	10.82714	10.85939	10.89164	10.92389	10.95614	10.98839

Tabla 8. Muestra los valores del pronóstico para el tipo de cambio nominal para el período enero 1980 a diciembre de 2008

A continuación tomamos un período en específico que en este caso será enero 2008 a diciembre de 2008 para comparar los valores de nuestro pronóstico y los valores reales para ver que tan bueno fue.

Mes	Valor pronóstico	Valor real
Enero 2008	10.63363	10.9100
Febrero 2008	10.66588	10.7665
Marzo 2008	10.69813	10.7313
Abril 2008	10.73038	10.5154
Mayo 2008	10.76263	10.4352
Junio 2008	10.79489	10.3292
Julio 2008	10.82714	10.2155
Agosto 2008	10.85939	10.1095
Septiembre 2008	10.89164	10.6437
Octubre 2008	10.92389	No disponible
Noviembre 2008	10.95614	No disponible
Diciembre 2008	10.98839	No disponible

Cuadro 4. Comparación entre los valores pronosticados y los observados

Al igual que el caso del Tipo de Cambio Real podemos ver que nuestro pronóstico para este período es relativamente eficiente debido a que los valores de ambas columnas son “cercaños” en magnitud. El error cuadrático medio fue de 1.434490.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

La realización de este trabajo nos permitió la elaboración de un estudio basado en la Metodología Box Jenkins. Es común que la serie inicial que se desea analizar sea una serie evolutiva, el lector puede recordar las gráficas del PIB, las manufacturas, el nivel general de precios, la masa monetaria, etc. Estas son series evolutivas, ya que la variable va creciendo conforme pasa el tiempo. La utilización de una metodología como la ya mencionado permite y facilita su estudio. Las series que se obtienen al seguir dicho procedimiento se caracterizan por:

- Oscilar alrededor de un nivel constante
- Estas oscilaciones presentan regularidad en su comportamiento ya que no hay explosiones de volatilidad dada por la desviación estándar
- Los patrones de las autocorrelaciones de la serie con su pasado no dependen del momento donde se le analice

Este último punto resulta ser fundamental ya que al analizar la tendencia a moverse ayer y obtener una ecuación que la reproduzca, esta fórmula nos permitió generar los pronósticos. Podemos concluir que funciona porque el co-movimiento revelado en la muestra es el mismo que presentará a futuro. Para ello la teoría establece una relación entre las funciones de autocorrelación y los modelos ARIMA. El modelo adecuado que encontramos que describe y pronostica los datos empleados es un ARMA(6,1,6) para el tipo de cambio real y un ARMA(7,1,2) para el nominal. Debe ser capaz de anticipar, puesto que captura la estructura del proceso que genera a los datos. Estos modelos además nos dejan ver que para el TCR, entiéndase el tipo de cambio real los “shocks” de la economía tardan en absorberse seis meses. Para el caso del TCN o tipo de cambio nominal los “shocks” son absorbidos en un periodo de siete meses. Podríamos concluir que la diferencia entre ambas variables se deba a la diferencia que existe entre ellas y que está dada por la inflación.

Con respecto al pronóstico hay quien pueda afirmar que el modelo es útil solo en la medida que anticipa la evolución de la variable. En este sentido se está aceptando que uno espere a que vengan las futuras observaciones para después analizar la calidad del modelo. En nuestro caso nosotros decidimos hacer lo mismo. Podemos concluir que para ambos casos, el Tipo de Cambio Real y el Tipo de Cambio Nominal nuestro pronóstico es útil ya que el valor de lo que obtuvimos y el valor real de dichas series es muy cercana. Así pues determinamos que nuestros pronósticos son eficientes.

Por otro lado sabemos que el objetivo final del análisis de series de tiempo es predecir los resultados futuros de la variable en estudio, en nuestro caso la evolución del tipo de cambio real y nominal. Una vez que hemos extrapolados los resultados de la metodología a nuevos periodos (abril 2008-diciembre 2008) podemos concluir lo siguiente. Toda predicción que hagamos con cualquier modelo econométrico se basa en una hipótesis sustancial que podemos resumir como: no se producen cambios estructurales. Esto quiere decir que el modelo que ha explicado en el pasado el comportamiento del TCR y TCN sigue siendo válido con los mismos valores de los parámetros en el futuro. Sin embargo, existe un problema. Si por alguna razón cambiasen de manera significativa las condiciones del mercado u otro factor importante del mismo, esto podría suponer una alteración significativa del modelo que explica la evolución del tipo de cambio en sus dos versiones.

Entonces el modelo observado en el pasado no serviría para predecir el futuro. La condición de que no existan cambios estructurales en la serie que analizamos tiene estrecha relación con la hipótesis de estacionariedad que plantea Box Jenkins. Al exigir que la estructura de las autocorrelaciones sea constante estamos pidiendo que el modelo ARIMA que explica el comportamiento de la serie sea único en todo el horizonte que estamos considerando. El problema de los cambios estructurales consiste en que resulta difícil saber cuándo se producirán y por lo tanto, determinar cuándo el modelo pasado deja de ser válido. Concluimos que para que la metodología Box-Jenkins sirva para predecir la evolución futura de una acción, no basta con encontrar y estimar un modelo ARIMA que sea adecuado para explicar el pasado más reciente del tipo de cambio nominal y real. Es necesario asegurarse que ese modelo de comportamiento no ha cambiado a lo largo del tiempo.

Después de analizar los tres modelos podemos observar que algunos escenarios el tipo de cambio real y nominal peso/dólar resulta ser un mercado eficiente y en otros no. Para algunos casos en los que preveíamos que el mercado fuera ineficiente resultó que los datos nos arrojaron lo contrario. Es decir, resultaban eficientes aunque

debemos recalcar que en la realidad no existen mercados que sean totalmente eficientes como lo resultan serlo algunos en la teoría.

Es válido hacer notar como se hizo en la Introducción que en este período México tuvo a bien en incrementar el comercio internacional con otros países y a lo largo de estas tres décadas dicho incremento ha sido cada vez más claro hasta el momento de sufrir una apertura total. Además, México como lo veremos en los siguientes párrafos ha adoptado tres principales regímenes cambiarios durante este tiempo por distintas razones. Mismo que nos obliga a analizar los efectos que éstos han tenido sobre la eficiencia del tipo de cambio real y nominal peso-dólar.

Podemos apreciar que para el caso del TCR, entiéndase como el tipo de cambio real en la serie completa que va de 1980 al 2008 el polinomio asociado al modelo resulta tener raíz unitaria por lo que la serie se comporta como una caminata aleatoria, es no estacionaria y por lo tanto se le cataloga como un mercado eficiente. Lo mismo resulta para el TCN, entiéndase el tipo de cambio nominal. Casos similares resultan los subperíodos analizados que van de 1980 a 1988, el de 1988 a 1994 y el de 1988 a 1993 para el TCR. Para el TCN resultan serlo los períodos 1988 a 1994 y enero de 1995 a marzo de 2008. El único que no resulta ser eficiente es el período comprendido entre 1995 y 2008 para el TCR y los comprendidos entre 1980 y 1988 y marzo de 1988 y diciembre de 1993. Lo que nos sorprende. Primero, porque los períodos que cubren el año 1994 deberían resultar ser no eficientes ya que ese año fue un momento muy agitado en cuestiones políticas y económicas por lo que se esperaría que hubiera problemas de eficiencia. Esto indicaría que la economía no tardó mucho tiempo en recuperarse de shocks o crisis económicas, posibilitando la eficiencia del mercado e impactando positivamente en el crecimiento de la economía. Por ello, decidimos suprimir el año de 1994 y hacer un análisis que llegara únicamente hasta 1993 para ver que tanto influía ese año en nuestro análisis. Para el TCR siguió siendo eficiente aunque no así para el caso de TCN. Segundo, el último período para el TCR, o sea el que llega hasta este año 2008 esperaríamos que fuera eficiente debido a que durante este lapso de tiempo se decidió adoptar el régimen cambiario libre de flotación por lo que debería tener un comportamiento similar al de una caminata aleatoria.

Existen diversos argumentos que nos harían pensar en la ineficiencia en el mercado para algunos períodos que resultaron no serlo. Los años setenta marcaron para México el inicio de un período de crecimiento económico irregular caracterizado principalmente por grandes crisis económicas recurrentes. Por lo que la economía mexicana se volvió frágil y vulnerable a cualquier shock económico local o internacional. Asimismo, presentaba una falta de preparación para cumplir con los retos de la globalización económica. Políticas gubernamentales pobres caracterizadas por un control débil de la inflación, ajustes del tipo de cambio rezagados, déficits gubernamentales y obligaciones internacionales excesivos debido igualmente a niveles de deuda externa muy altos son los principales factores que contribuyeron para esos patrones de crecimiento limitados.

En México se han presentado tres grandes crisis: en 1976, 1982 y 1995. La crisis de 1976 fue el resultado de problemas acumulados en décadas anteriores combinadas con adquisiciones de deuda externa y un shock mundial del petróleo en 1973. La crisis de 1982 se caracterizó por la falta de habilidad de México para cumplir con sus obligaciones internacionales resultado de un exceso de contratos de deuda externa de corto plazo y una dramática caída del precio del petróleo y una subida de las tasas de interés internacionales. Por último, la crisis de 1995 siguió una macro devaluación del peso, déficits fiscales recurrentes y salidas masivas de capital debido a pagos de la deuda externa y retiros de dinero y capital de inversionistas por falta de confianza en la economía mexicana.

Para ahondar más al respecto entre 1976 y 1981 el gobierno patrocinó grandes planes de desarrollo extremadamente ambiciosos y no tomó en cuenta la tendencia mundial de una caída en los precios del petróleo y un incremento en las tasas de interés. Por lo que el gobierno endeudó al país por arriba de su capacidad para pagar. Altas tasas de inflación y un mal manejo del sector exterior caracterizaron el crecimiento limitado de México.

También podemos señalar que entre 1976 y 1987 la deuda externa era más grande que el PIB. Sin embargo, desde 1990 el comercio tenía una tendencia positiva debido a políticas de comercio e inversión extranjera liberalizadora y la implementación del Tratado de Libre Comercio de América del Norte. Aunque desde 1988-1994 existía un déficit enorme de la cuenta corriente. Con respecto a la inflación ésta permaneció sin control desde la década de los 80 hasta alcanzar un dramático 159.2 en 1986. En los siguientes años la inflación disminuyó a cantidades de un dígito.

Pero la eficiencia o ineficiencia del mercado podría ser explicada por los distintos regímenes cambiarios que hemos tenido. De 1980 a 1982 prevalecía en México un régimen de libre flotación aunque el gobierno intervenía cuando lo consideraba necesario. Desde octubre de ese año el peso fue devaluado paulatinamente pero para diciembre la

sobrevaluación del peso era insostenible considerando el gran déficit fiscal y de la cuenta corriente por lo que se dejó que el peso flotara libremente.

Posteriormente desde agosto de 1982 hasta febrero de 1988 se impuso un régimen cambiario dual. Consistía en una tasa preferencial aplicable a importaciones prioritarias, conversión de los revenues por exportación de petróleo y el pago de la deuda externa y por otro lado de un tasa de mercado oficial que se ajustaba con un sistema denominado "passive crawling peg". A partir de septiembre de 1983, el peso fue devaluado diariamente trece centavos y para marzo hasta veintiún centavos. Desde 1985 se prefirió establecer un sistema de flotación con fijaciones diarias. Pero en febrero de 1988, se adoptó un tipo de cambio "pegged" fijando el precio del peso con respecto al dólar en \$2,281. En 1989 se decidió hacer devaluaciones diarias de un peso hasta de cuarenta centavos para octubre de 1992.

No obstante ello, dicho sistema era insuficiente para mantener un tipo de cambio realista dada el desequilibrio en sector externo, las elevadas tasas de interés y la baja productividad. Sin embargo, una inversión extranjera directa considerable incrementaron los niveles de las reservas internacionales ayudaron a crear una ilusión de que el peso y la economía mexicana se encontraban fuertes. Pero como ya lo mencionamos el déficit fiscal y la inflación eran altas, el PIB disminuyó significativamente. Así que se mantuvo un peso sobrevaluado. Posteriormente viene el año de 1994 que hemos decidido no incluirlo en nuestro análisis debido a los sobresaltos que existieron. Es útil recordar que se pospusieron los ajustes necesarios del tipo de cambio principalmente por todos los eventos políticos que sucedieron en México.

En diciembre de ese año se abandonó el régimen de bandas y se adoptó el régimen que actualmente se usa que es el de libre flotación. Actualmente se cuentan con altos niveles de reservas internacionales y el gobierno interviene ocasionalmente vendiendo o comprando dólares en el mercado cuando es necesario. Por lo común se cree que un sistema de este tipo da mayor flexibilidad y permite alcanzar el equilibrio a largo plazo.

Al mismo tiempo podemos agregar que el hecho que el mercado sea eficiente nos dice que concretamente para el caso de México para los períodos en cuestión, a pesar de las políticas implementadas durante los diferentes regímenes de tipo de cambio que han fracasado y no han permitido alcanzar el equilibrio a largo plazo principalmente por ajustes a destiempo el mercado de todas maneras muestra ser eficiente.

LoS resultados apoyan la hipótesis de mercado eficiente para el caso del tipo de cambio real peso/dólar excepto por un período. El continuo cambio de regímenes de tipo de cambio y las crisis económicas no han afectado la eficiencia. Los cambios en el pasado en el tipo de cambio parecen no tener información útil acerca del precio actual. Y si ello sucede significaría que los inversionistas no podrían calcular y tener ganancias extraordinarias en el futuro especulando sobre el tipo de cambio. Es más, la volatilidad en el tipo de cambio no puede ser vinculado con la especulación y el abuso de información interna.

También podemos mencionar que el hecho de que para el caso de enero de 1995 hasta diciembre de 2008 para TCR el mercado sea ineficiente significa que el régimen cambiario de libre flotación está muy lejos de ser el régimen ideal y el instrumento adecuado. Los resultados también sostienen que la aplicación inestable de regímenes cambiarios sin el adecuado control de la inflación, la falta de implementación de políticas macroeconómicas consistentes y de cambios estructurales no han afectado el desempeño del país considerablemente.

ANEXO 1. DATOS

DATOS DEL TIPO DE CAMBIO REAL Y NOMINAL
FUENTE: PÁGINA WEB DE LA CÁMARA DE DIPUTADOS

Datos Tipo de Cambio Real 1980-2008

AÑO	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
1980	5,70	5,62	5,71	5,62	5,56	5,62
1981	5,10	5,08	5,03	5,03	5,01	5,09
1982	4,80	5,68	7,77	7,38	7,16	7,08
1983	8,67	8,78	8,65	8,49	8,51	8,49
1984	7,89	7,75	7,64	7,53	7,50	7,44
1985	6,81	6,73	6,68	6,71	6,78	6,83
1986	8,42	8,71	9,05	9,16	9,23	9,34
1987	10,29	10,31	10,39	10,22	10,14	10,11
1988	9,00	8,47	8,21	8,01	7,88	7,76
1989	7,27	7,29	7,35	7,38	7,42	7,44
1990	7,24	7,19	7,18	7,16	7,13	7,09
1991	6,68	6,60	6,54	6,51	6,49	6,47
1992	6,03	5,98	5,95	5,91	5,94	5,96
1993	5,67	5,63	5,63	5,59	5,62	5,59
1994	5,41	5,40	5,69	5,79	5,70	5,77
1995	8,95	8,88	9,92	8,67	7,89	8,00
1996	8,24	8,08	8,02	7,72	7,56	7,56
1997	7,01	6,88	6,96	6,85	6,78	6,77
1998	6,45	6,60	6,59	6,49	6,50	6,68
1999	6,81	6,67	6,46	6,24	6,15	6,22
2000	5,91	5,87	5,80	5,82	5,88	6,06
2001	5,85	5,83	5,76	5,59	5,48	5,45
2002	5,29	5,28	5,27	5,30	5,50	5,62
2003	5,96	6,18	6,19	6,00	5,79	5,93
2004	6,02	6,07	6,08	6,24	6,43	6,37
2005	6,11	6,06	6,08	6,09	6,02	5,95
2006	5,75	5,71	5,86	6,05	6,14	6,31
2007	5,86	5,89	5,98	5,93	5,91	5,93
2008	5,89	5,80	5,76	5,64	5,64	5,62

AÑO	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
1980	5,50	5,40	5,32	5,37	5,31	5,26
1981	5,09	5,07	5,08	5,06	5,04	4,96
1982	6,88	8,92	8,52	8,20	7,78	8,04
1983	8,40	8,40	8,42	8,42	8,24	8,12
1984	7,40	7,39	7,39	7,32	7,22	7,10
1985	7,11	8,04	8,09	8,21	8,29	8,40
1986	9,63	9,85	10,18	10,38	10,42	10,35
1987	9,90	9,66	9,58	9,31	9,13	9,41
1988	7,66	7,62	7,63	7,60	7,50	7,36
1989	7,47	7,51	7,55	7,57	7,57	7,42
1990	7,05	7,05	7,07	7,07	6,96	6,78
1991	6,45	6,45	6,44	6,40	6,28	6,14

1992	5,93	5,86	5,82	5,86	5,82	5,73
1993	5,57	5,53	5,50	5,51	5,56	5,43
1994	5,83	5,80	5,80	5,80	5,82	6,59
1995	7,73	7,69	7,68	8,02	8,95	8,67
1996	7,54	7,35	7,29	7,36	7,48	7,21
1997	6,66	6,53	6,46	6,46	6,77	6,55
1998	6,63	6,84	7,43	7,30	7,06	6,83
1999	6,09	6,09	6,02	6,12	6,00	5,93
2000	5,85	5,70	5,72	5,80	5,76	5,65
2001	5,48	5,43	5,56	5,51	5,39	5,33
2002	5,64	5,66	5,76	5,77	5,78	5,74
2003	5,90	6,07	6,16	6,27	6,17	6,21
2004	6,38	6,31	6,32	6,26	6,19	6,07
2005	5,87	5,90	6,00	6,02	5,84	5,76
2006	6,09	6,02	5,99	5,89	5,87	5,82
2007	5,90	5,99	5,95	5,86	5,92	5,87
2008	5,57	5,47				

Datos Tipo de Cambio Nominal 1980-2008

AÑO	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
1976	0,0125	0,0125	0,0125	0,0125	0,0125	0,0125
1977	0,0209	0,0225	0,0226	0,0226	0,0227	0,0228
1978	0,0227	0,0227	0,0227	0,0227	0,0227	0,0227
1979	0,0227	0,0227	0,0227	0,0228	0,0228	0,0228
1980	0,0228	0,0228	0,0228	0,0228	0,0229	0,0229
1981	0,0233	0,0235	0,0236	0,0239	0,0241	0,0243
1982	0,0264	0,0322	0,0455	0,0457	0,0465	0,0473
1983	0,0966	0,1024	0,1062	0,1102	0,1142	0,1181
1984	0,1460	0,1499	0,1538	0,1578	0,1617	0,1657
1985	0,1953	0,2003	0,2058	0,2122	0,2186	0,2250
1986	0,3858	0,4180	0,4565	0,4873	0,5175	0,5537
1987	0,9508	1,0170	1,0877	1,1569	1,2306	1,3113
1988	2,2124	2,2479	2,2809	2,2810	2,2810	2,2810
1989	2,2954	2,3249	2,3547	2,3851	2,4155	2,4459
1990	2,6604	2,6900	2,7195	2,7502	2,7804	2,8074
1991	2,9532	2,9650	2,9769	2,9890	3,0012	3,0134
1992	3,0685	3,0636	3,0664	3,0680	3,0980	3,1185
1993	3,1100	3,0989	3,1083	3,0955	3,1227	3,1213
1994	3,1075	3,1115	3,2841	3,3536	3,3120	3,3607
1995	5,5133	5,6854	6,7019	6,2996	5,9627	6,2232
1996	7,5048	7,5042	7,5736	7,4713	7,4345	7,5425
1997	7,8299	7,7926	7,9628	7,9037	7,9057	7,9465
1998	8,1798	8,4932	8,5689	8,4996	8,5612	8,8948
1999	10,1104	10,0150	9,7694	9,4461	9,3623	9,5418
2000	9,4878	9,4252	9,2876	9,3903	9,5158	9,8295
2001	9,7766	9,7045	9,6006	9,3268	9,1340	9,0868
2002	9,1616	9,0998	9,0707	9,1629	9,5192	9,7652
2003	10,6203	10,9372	10,9124	10,5917	10,2512	10,5047
2004	10,9151	11,0142	11,0094	11,2751	11,5124	11,3894
2005	11,2607	11,1367	11,1427	11,1163	10,9733	10,8228

2006	10,5470	10,4833	10,7434	11,0421	11,0923	11,3913
2007	10,9529	10,9998	11,1134	10,9795	10,8167	10,8350
2008	10,9100	10,7665	10,7313	10,5154	10,4352	10,3292

AÑO	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
1976	0,0125	0,0125	0,0194	0,0208	0,0243	0,0203
1977	0,0229	0,0228	0,0228	0,0228	0,0227	0,0227
1978	0,0227	0,0227	0,0227	0,0227	0,0227	0,0227
1979	0,0228	0,0228	0,0228	0,0228	0,0227	0,0228
1980	0,0230	0,0230	0,0230	0,0230	0,0231	0,0232
1981	0,0245	0,0247	0,0250	0,0253	0,0256	0,0260
1982	0,0482	0,0695	0,0700	0,0700	0,0700	0,0805
1983	0,1221	0,1261	0,1301	0,1341	0,1380	0,1420
1984	0,1697	0,1737	0,1777	0,1816	0,1856	0,1900
1985	0,2418	0,2853	0,2972	0,3120	0,3289	0,3549
1986	0,5989	0,6608	0,7202	0,7761	0,8306	0,8898
1987	1,3844	1,4542	1,5291	1,6053	1,6979	2,0074
1988	2,2810	2,2810	2,2810	2,2810	2,2810	2,2810
1989	2,4765	2,5074	2,5380	2,5685	2,5991	2,6298
1990	2,8317	2,8565	2,8810	2,9054	2,9278	2,9409
1991	3,0256	3,0380	3,0502	3,0624	3,0698	3,0700
1992	3,1165	3,0913	3,0862	3,1185	3,1198	3,1182
1993	3,1236	3,1126	3,1127	3,1142	3,1553	3,1077
1994	3,4009	3,3821	3,3998	3,4158	3,4426	3,9308
1995	6,1394	6,1909	6,3025	6,6911	7,6584	7,6597
1996	7,6229	7,5141	7,5447	7,6851	7,9189	7,8767
1997	7,8857	7,7843	7,7792	7,8114	8,2837	8,1360
1998	8,9040	9,2596	10,2154	10,1523	9,9874	9,9117
1999	9,3671	9,3981	9,3403	9,5403	9,4205	9,4151
2000	9,4212	9,2709	9,3540	9,5314	9,5004	9,4662
2001	9,1618	9,1326	9,4189	9,3450	9,2236	9,1561
2002	9,7808	9,8432	10,0714	10,0950	10,1975	10,2249
2003	10,4477	10,7567	10,9306	11,1247	11,1450	11,2486
2004	11,4636	11,3942	11,4864	11,3983	11,3681	11,2041
2005	10,6781	10,6882	10,7775	10,8324	10,6685	10,6295
2006	10,9858	10,8720	10,9853	10,8971	10,9177	10,8479
2007	10,8109	11,0456	11,0315	10,8231	10,8866	10,8484
2008	10,2155	10,1095	10,6437			

ANEXO II. EFICIENCIA DE MERCADOS

En este anexo se presenta un comentario acerca del concepto de eficiencia de mercado basados en el artículo de Fama "Mercados de Capital Eficientes: una Revisión de la Teoría y Trabajo Empírico" (1970). Para ello, el estudio de eficiencia se subdividirá en cuatro períodos distintos. El primero de ellos comprende desde enero de 1980 hasta febrero de 1988. El segundo abarca desde marzo de 1988 hasta diciembre de 1994. El tercero va desde marzo de 1988 hasta diciembre de 1993 y finalmente, el último comprende enero de 1995 hasta marzo de 2008. Esto se realizó con el fin de observar el comportamiento de la serie en los distintos períodos con el fin de hacer comparaciones entre ellos y poder ver qué tan eficientes son. Es importante señalar que el criterio que se usó para hacer dicha subdivisión fue que en cada uno de los períodos nuestro país adoptó regímenes cambiarios distintos. Dicho de otro modo hubo cambios estructurales. Dichos cambios tuvieron una incidencia en la eficiencia de mercado de la serie.

El rol principal del mercado de capitales es la asignación de propiedad de los valores de capital de la economía. En general, podemos decir que el mercado ideal es aquel en que los precios proveen de signos precisos y claros acerca de la asignación de recursos. Esto es, un mercado en el que las compañías puedan tomar decisiones de producción e inversión, y a su vez los inversionistas puedan escoger valores o títulos bajo el supuesto de que sus precios reflejan completamente y en cualquier momento toda la información disponible. Un mercado en donde los precios siempre reflejan completamente dicha información se le denomina eficiente.

En los siguientes párrafos se discutirán los tres subconjuntos referentes al ajuste que sufren los precios de los valores con respecto a la información relevante. El primero de ellos, la forma débil, en donde el conjunto de información es sólo el de los precios históricos. El segundo, la forma semi-fuerte en donde se quiere ver mediante pruebas si los precios se ajustan eficientemente a otra información disponible que es pública (como son los reportes de ingresos anuales, entre otros). Y finalmente, la forma fuerte que se utiliza para ver si los inversionistas o un grupo de ellos tienen acceso monopólico a cualquier información relevante para la formación de precios. Con respecto a todo esto veremos que existen autores como Fama que apoyan la idea de un modelo de mercados eficientes y otros que después de cierta evidencia rechazan dicha hipótesis.

El primer problema surge cuando queremos definir de una manera más exacta el término "reflejan completamente" la información cuando nos referimos a los precios en un mercado eficiente. Muchas teorías se basan en el supuesto que las condiciones de equilibrio de mercado pueden ser expresadas en términos de rendimientos esperados. Dichas teorías proponen que condicionado a un conjunto de información relevante, el rendimiento esperado en equilibrio es una función de su riesgo. Sin embargo, muchas teorías difieren en la manera como el riesgo es definido. En general, las teorías de rendimientos esperados pueden ser descritas de la siguiente manera:

$$E(\bar{p}_{j,t+1} | \Phi_t) = [1 + E(\bar{r}_{j,t+1} | \Phi_t)] p_{jt} \quad (58)$$

donde E es el valor esperado, p_{jt} es el precio del título o valor j al tiempo t, $p_{j,t+1}$ es el precio en t+1, $r_{j,t+1}$ es el

rendimiento de un período en porcentaje $\frac{(p_{j,t+1} - p_{jt})}{p_{jt}}$, Φ_t es el conjunto de información que se asume está reflejada

completamente en el precio en t y los tildes líneas horizontales indican que $p_{j,t+1}$ y $r_{j,t+1}$ son variables aleatorias en t.

El valor del rendimiento esperado de equilibrio

$$E(\bar{r}_{j,t+1} | \Phi_t)$$

proyectado sobre la base de la información Φ_t será determinado por la teoría de rendimiento esperado que se esté usando. La esperanza condicional de 41 implica que para cualquier modelo de rendimientos esperados que se utilice, la información en Φ_t será completamente usada para determinar los rendimientos esperados de equilibrio. Y esto es en cierto sentido lo que significa que Φ_t esté reflejado completamente en la formación de precios p_{jt} .

Así que sea

$$x_{j,t+1} = p_{j,t+1} - E(p_{j,t+1} | \Phi_t)$$

Entonces

$$E(\bar{x}_{j,t+1} | \Phi_t) = 0 \quad (59)$$

que por definición, dice que la secuencia x_{jt} es un "juego justo" con respecto a la secuencia de la información $\{\Phi_t\}$. O equivalentemente sea

$$z_{j,t+1} = r_{j,t+1} - E(\bar{r}_{j,t+1} | \Phi_t)$$

entonces

$$E(\bar{z}_{j,t+1} | \Phi_t) = 0$$

así que la secuencia $\{z_{jt}\}$ es también un juego justo con respecto a la secuencia de información $\{\Phi\}$. En términos económicos $x_{j,t+1}$ es el valor de mercado en exceso del título o valor j en el tiempo $t+1$. Dicho de otro modo es la diferencia entre el precio observado y el valor esperado del precio que fue proyectado en el tiempo t en base a la información Φ_t . Y similarmente, $z_{j,t+1}$ es el rendimiento en el tiempo $t+1$ en exceso del rendimiento esperado de equilibrio proyectado en t .

Sea

$$\alpha(\Phi_t) = [\alpha_1(\Phi_t), \alpha_2(\Phi_t), \dots, \alpha_n(\Phi_t)]$$

un sistema de intercambio basado en Φ_t que le dice al inversionista el monto $\alpha_j(\Phi_t)$ de fondos disponibles en t que deben ser invertidos en cada una de los n valores o títulos disponibles. El valor del portafolio total en exceso en $t+1$ que será generado por dicho sistema es

$$V_{t+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j(\Phi_t) [r_{j,t+1} - E(\bar{r}_{j,t+1} | \Phi_t)]$$

que por la propiedad de juego justo en (59) tiene la esperanza

$$E(\bar{V}_{t+1} | \Phi_t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j E(\bar{z}_{j,t+1} | \Phi_t) = 0$$

Ahora veamos un caso del modelo, la caminata aleatoria. Cuando hablamos del modelo de mercados eficientes, la aseveración de que el precio actual de un título o valor refleja completamente la información disponible fue asumida para suponer que los cambios en los precios sucesivos (o más usualmente, rendimientos sucesivos de un período) son independientes. Además, usualmente se asumía que los cambios sucesivos o rendimientos eran idénticamente distribuidos. Juntas las dos hipótesis constituyen el modelo de caminata aleatoria. Formalmente, el modelo dice

$$f(r_{j,t+1} | \Phi_t) = f(r_{j,t+1}) \quad (60)$$

que es la aseveración usual de que las distribuciones de probabilidad condicional y marginal de una variable aleatoria independiente son idénticas. Y podemos agregar que la función de densidad f tendrá que ser igual para todas las t . Las expresiones por supuesto dicen mucho más que el modelo general de rendimientos esperados de (58). Por ejemplo, si restringimos (58) asumiendo que el rendimiento esperado del título o valor j es constante en el tiempo, entonces tendremos

$$E(\bar{r}_{j,t+1} | \Phi_t) = E(\bar{r}_{j,t+1})$$

Esto dice que la media de la distribución de $r_{j,t+1}$ es independiente de la información disponible en t , Φ_t , mientras que el modelo de caminata aleatoria (60) dice además que toda la distribución es independiente de Φ_t . Por ello es mejor ver el modelo de caminata aleatoria como una extensión del modelo general de rendimientos esperados o de mercados eficientes de juego justo en el sentido de hacer una afirmación más detallada acerca del ambiente económico. El modelo de juego justo sólo dice que las condiciones de mercado en equilibrio pueden ser expresadas en términos de rendimientos esperados y por lo tanto dice poco de los detalles de los rendimientos generadores estocásticos.

CONDICIONES DEL MERCADO CONSISTENTE CON LA EFICIENCIA

Primero, es fácil determinar condiciones suficientes para la eficiencia de mercados de capital. Por ejemplo, considérese un mercado en el que no hay costos de transacción al momento de intercambiar títulos o valores. Además,

toda la información disponible no tiene costo para todos los participantes del mercado y por último, todos están de acuerdo en las implicaciones que tiene la información actual en determinar el precio actual y las distribuciones de precios futuros para cada título o valor. En un mercado así, el precio actual de un título o valor obviamente reflejaría completamente toda la información disponible.

Pero un mercado en el que la información está disponible gratuitamente y los inversionistas están de acuerdo con las implicaciones, no es un reflejo de un mercado real. Afortunadamente, estas condiciones son suficientes para alcanzar eficiencia en el mercado, pero no son necesarias.

EVIDENCIA EN BASE A LAS TRES FORMAS

Debemos aceptar que al contemplar la hipótesis que los precios de los títulos o valores reflejan completamente toda la información disponible en cualquier momento es una hipótesis nula muy extremista. Pero dicha hipótesis nos servirá para ver el nivel de información en el cual la hipótesis pierde su validez. En esta sección se incluyen conceptos de Dimson y Mussavian en "Historia Breve de la Eficiencia de Mercado" (1998).

Primero comencemos a hablar de las pruebas de forma débil del modelo de mercados eficientes. En la literatura reciente, la mayoría de las discusiones sobre el modelo fueron entorno al modelo de caminata aleatoria aunque también debemos mencionar que muchos autores estaban ocupados en versiones más generales de un modelo de juego justo. Todo empezó en los años 1950 y 1960 cuando había evidencia que el comportamiento de las acciones y otros precios especulativos podían ser aproximados por una caminata aleatoria. Por lo que los economistas estaban forzados a dar una explicación racional. Lo que resultó en una teoría de mercados eficientes en términos de caminatas aleatorias pero que usualmente implicaba un modelo más general de juego justo. No fue hasta que en 1965 y 1966, Samuelson y Mandelbrot decidieron estudiar rigurosamente el papel de los modelos de rendimiento esperado de juego justo en la teoría de mercados eficientes y la relación entre los modelos y la teoría de caminatas aleatorias. Hasta ese momento, sólo había una gran lista de resultados empíricos en busca de una explicación teórica.

A pesar de que sus contribuciones fueron ignoradas por sesenta años, la primera afirmación y prueba del modelo de caminata aleatoria fue la de Bachelier¹ en 1900. Pero el principio fundamental de sus explicaciones para el comportamiento de los precios era que la especulación debía ser un juego justo, en particular, que las ganancias esperadas para el especulador debían ser cero. Posterior a esto, la investigación acerca del tema tuvo demoras hasta que apareció la computadora. En 1954, Kendall examinó el comportamiento de cambios semanales en los índices de precios de las acciones de la industria británica y en precios spot de algodón en Nueva York y de trigo en Chicago. Al respecto, escribió que las series deambulaban al grado de que parecía que una vez por semana el "Demonio de la Casualidad" sacaba un número aleatorio de una población simétrica y la agregaba al precio actual para determinar el precio de la siguiente semana. Estos mismos resultados fueron obtenidos por Roberts y Working.

Pero la sugerencia de los tres autores de que las series de precios especulativos eran caminatas aleatorias que estaban basados en observaciones. Osborne por su parte sugirió condiciones de mercado similares a las de Bachelier. Pero en este modelo, la independencia de los cambios en los precios sucesivos provenía del supuesto de que las decisiones de los inversionistas en un valor o título individual eran independientes de transacción a transacción, que representaba poco para ser un modelo económico. Cuando los economistas anteriores a Mandelbrot y Samuelson trataban de dar una justificación acerca de la caminata aleatoria, sus argumentos incluían un juego justo. Alexander decía, por ejemplo, que si uno empezaba con el supuesto de que una acción o un "commodity speculation" es un juego justo con la misma esperanza de ganar o perder o dicho de otro modo, con una esperanza de cero de ganar, uno estaría describiendo el comportamiento de los precios especulativos como una caminata aleatoria.

Cootner² (1964) dice al respecto en "El Carácter Aleatorio de los Precios del Mercado Accionario" que si un grupo de compradores pensaran que los precios son muy bajos, su compra incrementaría los precios. Lo opuesto sucede con los vendedores. Pero además la esperanza condicional de los precios de mañana dado los precios de hoy

¹ (11 de marzo de 1870-28 de abril de 1946). Fue un matemático francés de comienzos del siglo XX. Se le da crédito por ser la primera persona en modelar el movimiento browniano como parte de su tesis doctoral "La Teoría de la Especulación" publicada en 1900.

² Autor de *The Random Characteristics of Stock Market Prices*.

serán los precios de hoy. En un mundo tal, los únicos cambios de precio que podrían ocurrir son los que resultan de la nueva información. Debido a que no hay razón para esperar que la información sea no aleatoria en apariencia, los cambios de precio de período a período de una acción tendría movimientos aleatorios y estadísticamente independientes uno de otro.

Esto nos lleva a pensar que el autor se refiere a un modelo de juego justo más que al de una caminata aleatoria. Y las últimas líneas pueden ser un intento por describir las condiciones ambientales que reducirían un juego justo a una caminata aleatoria. Sin embargo, para ello es necesario decir algo más sobre las preferencias de los inversionistas. Pero agrega que el modelo de caminata aleatoria es válido siempre y cuando el conocimiento del comportamiento pasado de las series de cambios en los precios no sea usado para incrementar las ganancias esperadas.

FORMA DÉBIL

La forma débil de mercados eficientes supone que los precios son independientes en el tiempo. Y hay que agregar que no hay relación entre los precios pasados y futuros de los títulos. Dicha hipótesis sugiere que los precios actuales reflejan toda la información disponible y la información se mueve aleatoriamente por lo que nada o poco se gana del estudio y el análisis de los precios pasados del título.

FORMA SEMI-FUERTE

La forma semi-fuerte mantiene que toda la información pública está ya integrada en el valor de un título. Además podemos agregar que es inútil realizar un análisis fundamental para determinar si un título está sub o sobrevalorado. Esto se debe a que si los valores se basan ya en toda la información disponible, que además es pública, poco se ganará de un análisis adicional. En otras palabras el análisis ayuda a ignorar la eficiencia ya que en el momento en el que todo el mundo hace dicho análisis queda poco para la información no absorbida. Es decir, alguien que realice un análisis adicional logrará poco introspección superior.

FORMA FUERTE

La forma fuerte va más allá de la forma semi-fuerte y afirma que los precios reflejan no sólo toda la información pública sino toda la información. La hipótesis parte de la idea de que la información privilegiada se incorpora inmediatamente en el valor de un título. En corto se pasa de un mercado eficiente a un mercado perfecto. Por otra parte como se mencionó antes ningún grupo de participantes del mercado tienen bajo esta hipótesis acceso monopolístico a la información y además nadie puede mostrar rendimientos superiores.

En la práctica lo que se hizo fue plantear la hipótesis de que el mercado del tipo de cambio real y nominal eran eficientes en el sentido débil de Fama. Para lograr esto se utilizó la Prueba Dickey Fuller Aumentada. Si $ABS(ADF) < ABS(McKinnon)$ entonces se dice que existe raíz unitaria, que se trata de un proceso estocástico y de una serie no estacionaria. Al serlo podremos concluir que su comportamiento es aquel correspondiente al de una caminata aleatoria y el mercado para determinado período será eficiente.

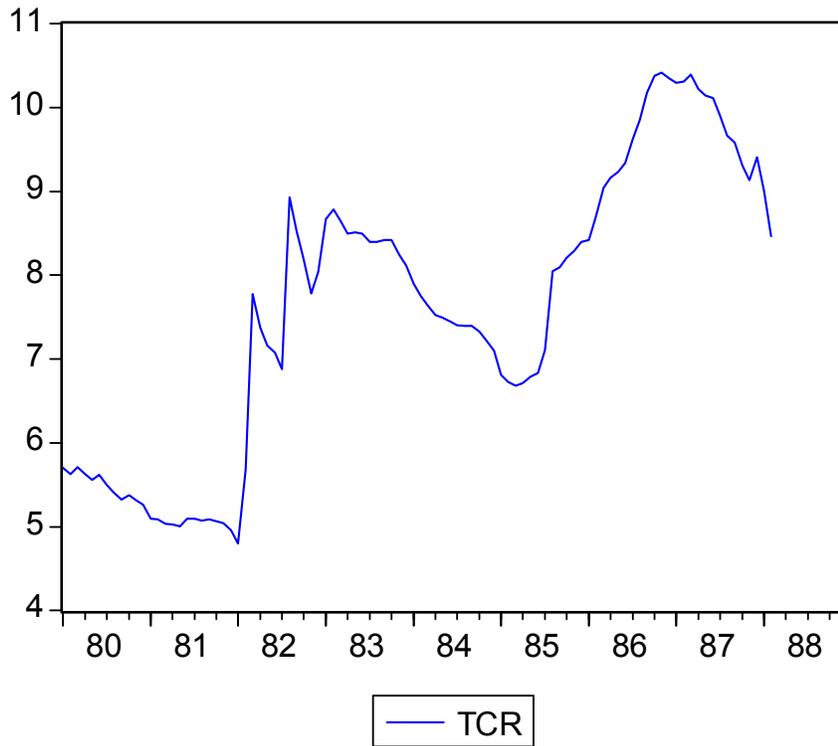
ANÁLISIS ECONOMÉTRICO DE LA EFICIENCIA DE MERCADO

TIPO DE CAMBIO REAL

Enero 1980 a febrero de 1988

En la siguiente gráfica observamos el comportamiento de dicha serie. Se puede percibir que la media y varianza de esta serie cambian con el tiempo de modo que la serie TCR parece comportarse como una caminata aleatoria.

Gráfica del TCR (ene1980-feb1988)



Gráfica 11. Comportamiento gráfica de la variable tipo de cambio real durante el período enero de 1980 a febrero de 1988

Esto lo se confirma por la prueba ADF con valor crítico de McKinnon de 5%, como se puede ver en el cuadro siguiente. Dicha prueba como se muestra en la tabla 9 $1.923150 = \text{ABS}(\text{ADF}) < \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.893230$. Si hay raíces unitaria y al serlo se habla de que se trata de una caminata aleatoria. En el sentido definido anteriormente, durante este período de análisis el mercado es débilmente eficiente en el sentido de Fama.

Null Hypothesis: TCR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 5 (Automatic based on SIC, MAXLAG=11)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.923150	0.3205
Test critical values:		
1% level	-3.503049	
5% level	-2.893230	
10% level	-2.583740	

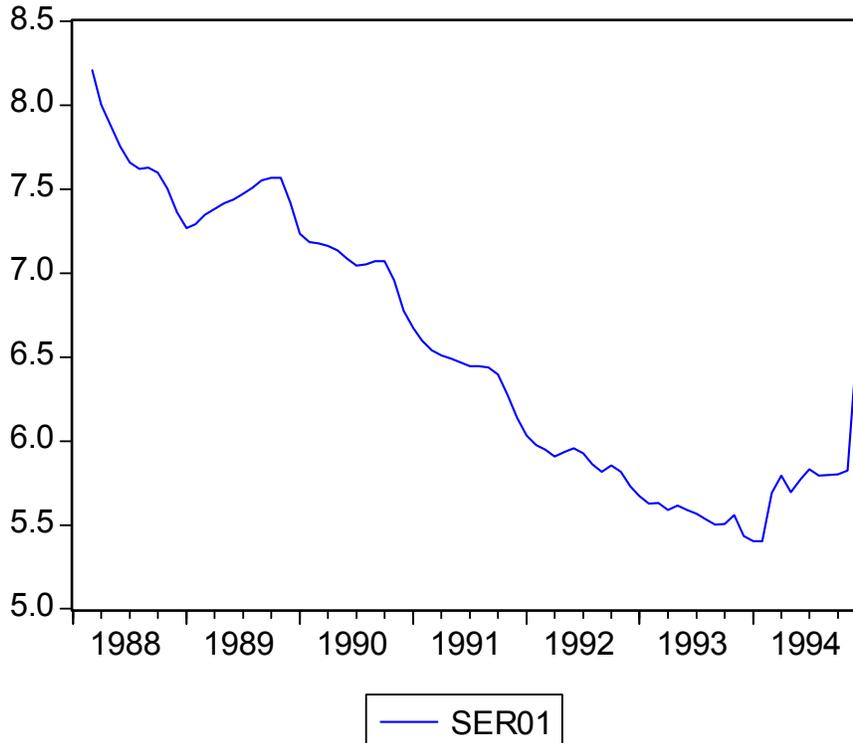
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 9. Resultado de la Prueba Dickey Fuller Aumentada para el período señalado

Marzo de 1988 a diciembre de 1994

También para el periodo de marzo de 1988 a diciembre de 1994 el mercado del TCR es eficiente en el sentido de Fama, como se ve en la gráfica y la tabla siguientes. En la tabla la Prueba ADF confirma los resultados ya que $1.500782 = \text{ABS}(\text{ADF}) < \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.898145$. Se trata pues de una caminata aleatoria.

Gráfica del TCR (mar88-dic94)



Gráfica 12. Esta gráfica muestra el comportamiento de la variable tipo de cambio real para el período comprendido entre marzo de 1988 a diciembre de 1994

Null Hypothesis: TCR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=11)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.500782	0.5282
Test critical values:		
1% level	-3.514426	
5% level	-2.898145	
10% level	-2.586351	

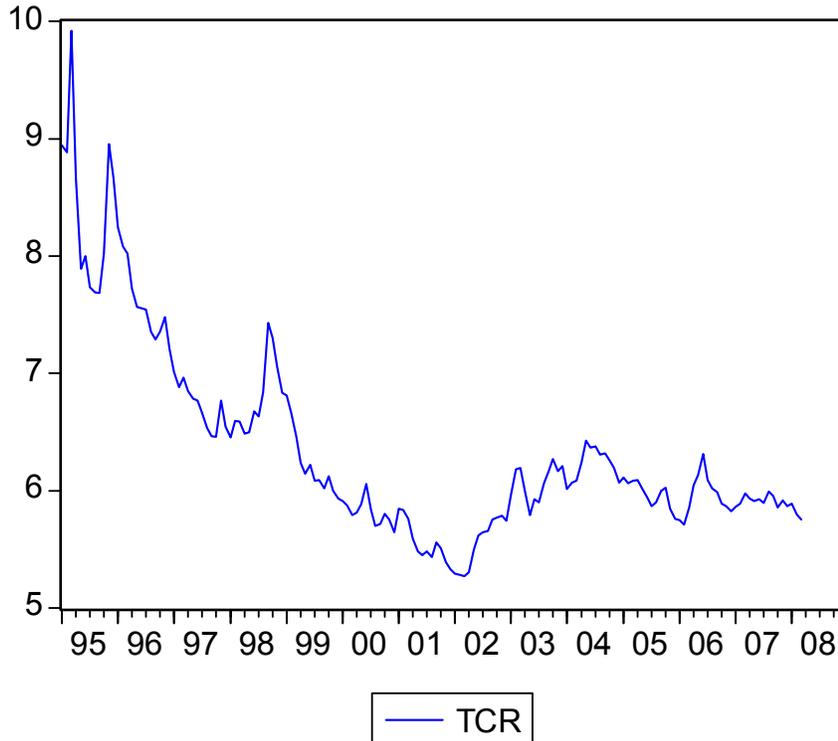
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 10. Muestra los resultados de la Prueba ADF para probar si existe raíz unitaria.

Enero de 1995 a marzo de 2008

Durante el período de enero de 1995 a marzo de 2008, el mercado cambiario peso/dólar no es eficiente en el sentido de Fama ya que durante este periodo esta serie no tiene raíz unitaria según la prueba ADF al valor crítico de 5% de McKinnon. Como se aprecia en la tabla 11, $3.066449 = \text{ABS}(\text{ADF}) > \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.879727$.

Gráfica del TCR (ene95-mar08)



Gráfica 13. Muestra los movimientos de la variable entre enero de 1995 y marzo de 2008

Null Hypothesis: TCR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

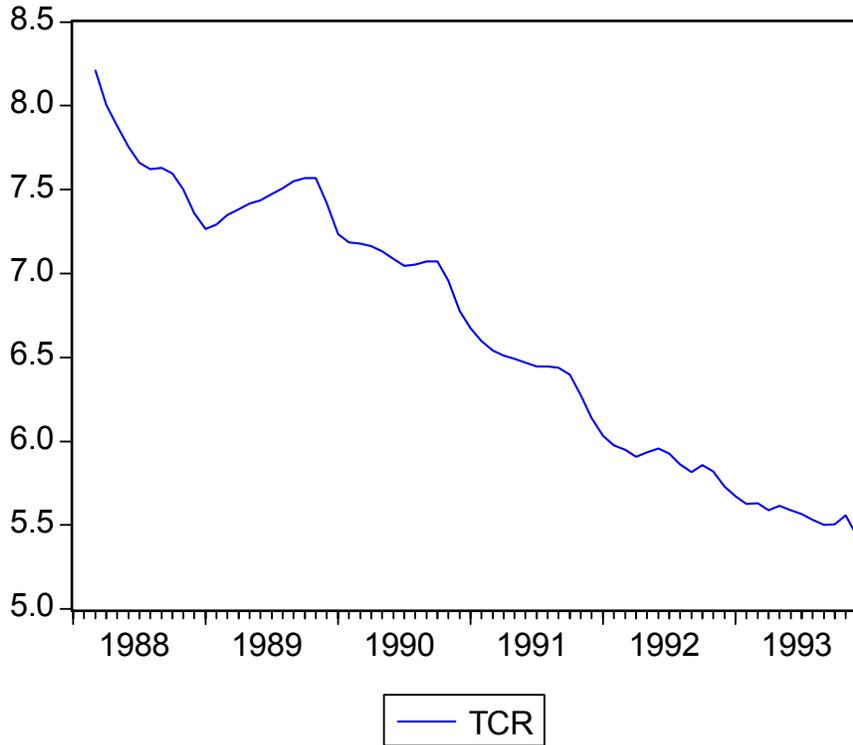
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.066449	0.0312
Test critical values:		
1% level	-3.471987	
5% level	-2.879727	
10% level	-2.576546	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 11. Resultados de la Prueba ADF

Marzo de 1988 a diciembre de 1993

El mercado cambiario es eficiente en el sentido de Fama durante el periodo de marzo de 1988 a diciembre de 1993. Se puede observar en la tabla 12 que $0.370064 = \text{ABS}(\text{ADF}) < \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.905519$. No se cumple la condición de estacionariedad por lo que sería necesario diferenciar la serie una vez más. Su comportamiento es el de una caminata aleatoria.



Gráfica 14. El tipo de cambio real desde marzo de 1988 a diciembre de 1993.

Null Hypothesis: TCR has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.370064	0.9076
Test critical values:		
1% level	-3.531592	
5% level	-2.905519	
10% level	-2.590262	

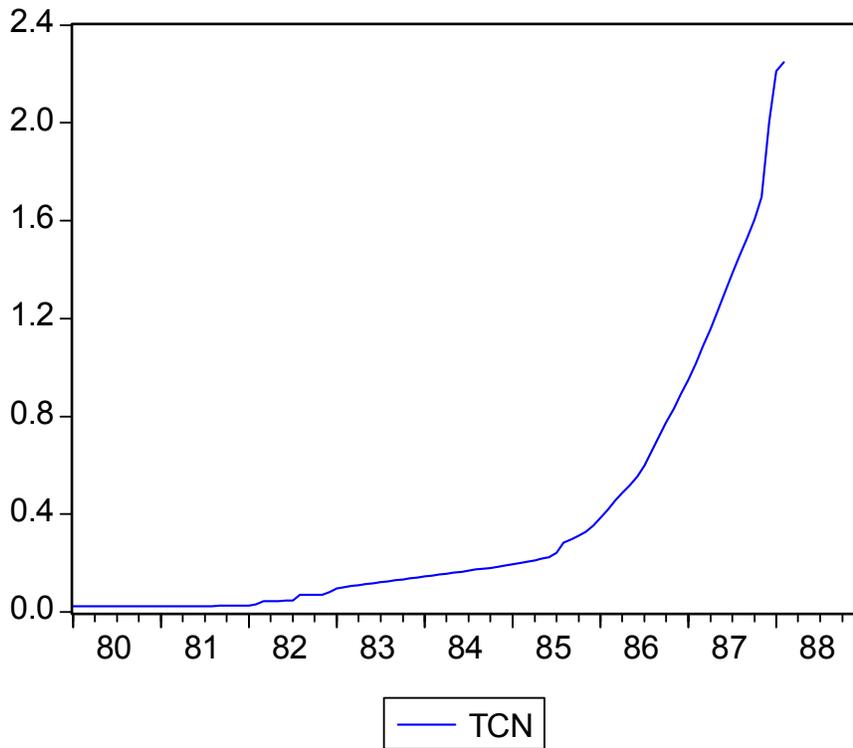
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 12. Resultados de la Prueba Dickey Fuller Aumentada

TIPO DE CAMBIO NOMINAL

Enero 1980 a febrero 1988

Durante el periodo de enero 1980 a febrero 1988 el mercado de cambio nominal peso-dólar no es eficiente en el sentido de Fama porque este mercado no es una caminata aleatoria según la prueba de raíz unitaria ADF con valor crítico de 5%. (Note el signo positivo del estadístico ADF). Como se observa en la tabla 13 $9.230949 = ABS(ADF) > ABS(McKinnon) = 2.892200$.



Gráfica 15. Gráfica del tipo de cambio nominal para el período enero 1980 a febrero de 1988.

Null Hypothesis: TCN has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=11)

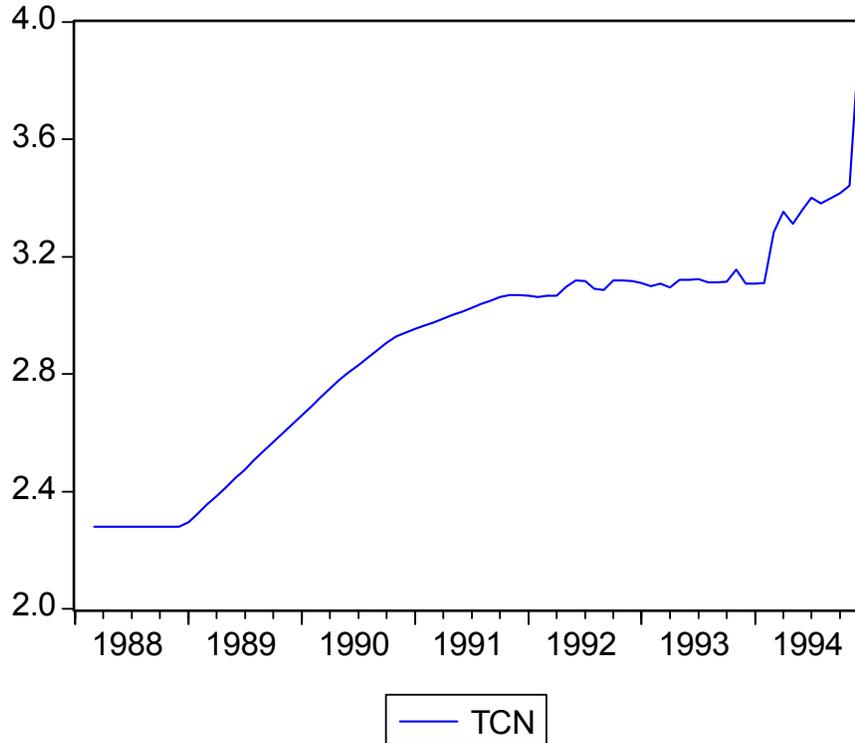
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	9.230949	1.0000
Test critical values:		
1% level	-3.500669	
5% level	-2.892200	
10% level	-2.583192	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 13. En esta tabla se muestran los resultados una vez que se realizó la Prueba ADF

Marzo de 1988 a diciembre de 1994

También durante el período de marzo de 1988 a diciembre de 1994 el mercado cambiario nominal peso-dólar es eficiente en el sentido de Fama. Como se muestra en la tabla 14, $0.365885 = \text{ABS}(\text{ADF}) < \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.902953$.



Gráfica 16. Tipo de Cambio Nominal para el período marzo de 1988 a diciembre de 1994

Null Hypothesis: TCN has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 10 (Automatic based on SIC, MAXLAG=11)

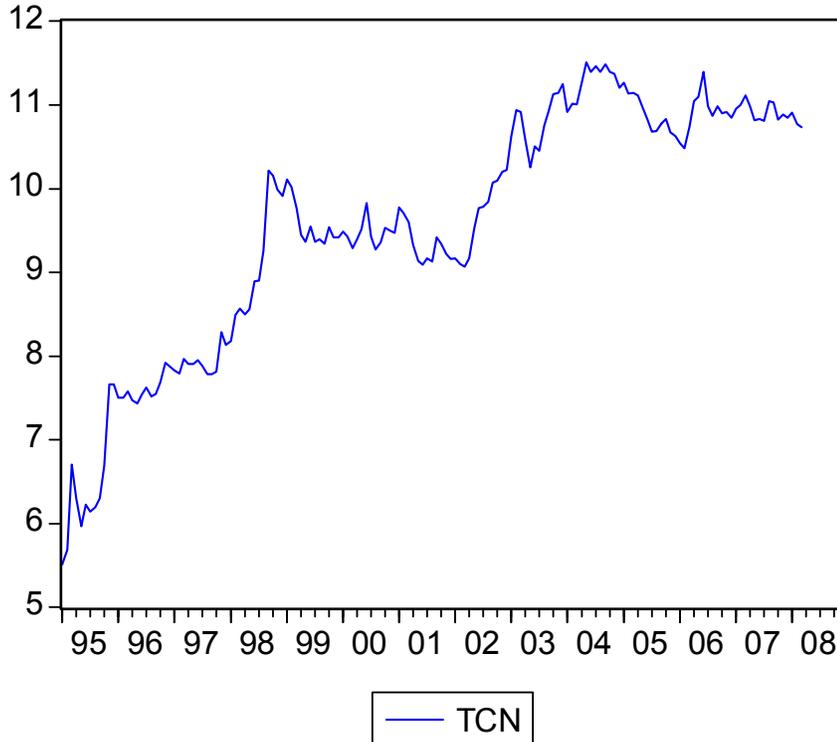
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.365885	0.9086
Test critical values:		
1% level	-3.525618	
5% level	-2.902953	
10% level	-2.588902	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 14. Resultados obtenidos después de correr la Prueba Dickey Fuller aumentada.

Enero de 1995 a marzo de 2008

Para el período de enero de 1995 a marzo de 2008 el mercado cambiario nominal peso-dólar también es una caminata aleatoria de modo que es eficiente en el sentido de Fama. La tabla 15 indica que $2.874595 = \text{ABS}(\text{ADF}) < \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.879727$.



Gráfica 17. Comportamiento del TCN desde enero de 1995 a marzo de 2008

Null Hypothesis: TCN has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

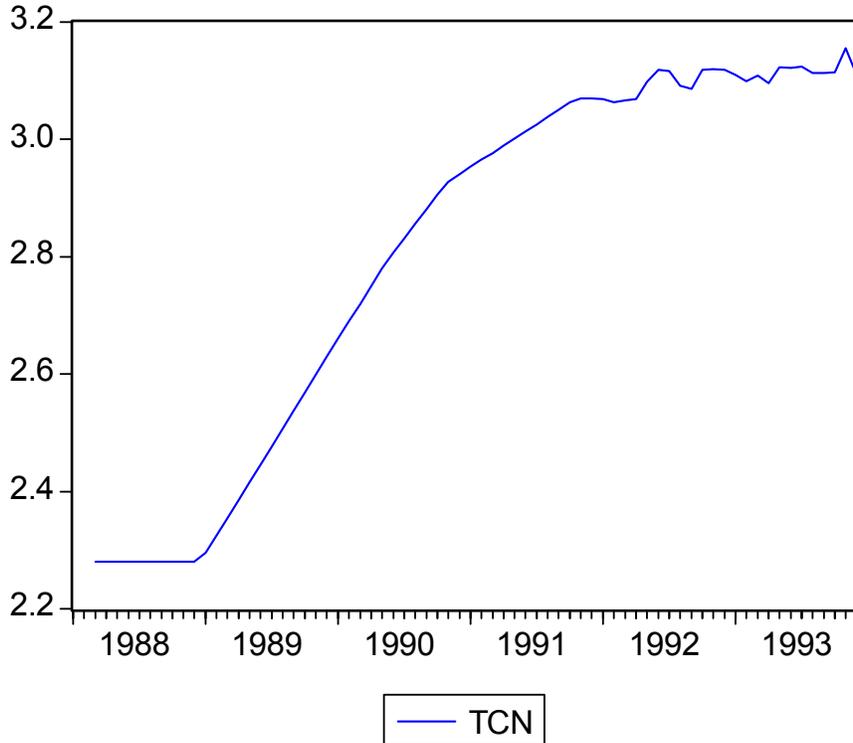
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.874595	0.0506
Test critical values:		
1% level	-3.471987	
5% level	-2.879727	
10% level	-2.576546	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 15. Resultados correspondientes a la Prueba ADF de enero de 1995 a marzo de 2008

Marzo de 1988 a diciembre de 1993

En este período el mercado no es eficiente puesdto que es una serie estacionaria. La tabla 16 muestra que $5.536219 = \text{ABS}(\text{ADF}) > \text{ABS}(\text{McKinnon}) = 2.911730$.



Gráfica 18. Gráfica que muestra el comportamiento del tipo de cambio nominal desde marzo de 1988 a diciembre de 1993.

Null Hypothesis: TCN has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 10 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-5.536219	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.546099	
5% level	-2.911730	
10% level	-2.593551	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tabla 16. Datos después de realizar la Prueba ADF

ANEXO III. APÉNDICE DEMOSTRACIONES

Demostración Ecuación #2

Por un lado sabemos que

$$a_0 = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B) \bar{Z}_t$$

despejando

$$\bar{Z}_t = \frac{a_0}{(1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B)}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= a_0 + a_1 \bar{Z}_{t-1} \\ \bar{Z}_{t-1} &= a_0 + a_1 \bar{Z}_{t-2} \\ &\dots \end{aligned}$$

que es

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= a_0 + a_1 (a_0 + a_1 \bar{Z}_{t-2}) \\ \bar{Z}_t &= a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 (a_0 + a_1 \bar{Z}_{t-3}) \\ \bar{Z}_t &= a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 \bar{Z}_{t-3} \\ \bar{Z}_t &= a_0 (1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + \dots) \end{aligned}$$

que a su vez es igual a

$$\bar{Z}_t = a_0 \frac{1}{1 - a_1}$$

Ahora para una ecuación de primer orden tenemos

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= a_0 + a_1 \bar{Z}_{t-1} \\ \bar{Z}_t - a_1 \bar{Z}_{t-1} &= a_0 \\ (1 - a_1 B) \bar{Z}_t &= a_0 \end{aligned}$$

por lo que tendremos que

$$(1 - g_1 B) \bar{Z}_t = (1 - a_1 B) \bar{Z}_t = \frac{1}{1 + a_1 + a_1^2 + \dots} \bar{Z}_t = a_0 \text{ y } (1 - a_1) \bar{Z}_t = a_0$$

por el desarrollo anterior. La primera igualdad se obtiene de hacer la sustitución $g_1 = a_1$ que se realiza al final.

Ahora para una ecuación de segundo orden tenemos

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= a_0 (1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)^2 + \dots) \\ \bar{Z}_t &= a_0 \frac{1}{1 - (a_1 + a_2)} \\ \bar{Z}_t &= \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2} \\ a_0 &= (1 - a_1 - a_2) \bar{Z}_t \end{aligned}$$

y tenemos que

$$(1 - a_1 B - a_2 B^2) \bar{Z}_t = a_0$$

que son iguales a

$$(1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \bar{Z}_t = a_0$$

por lo que

$$\bar{Z}_t = \frac{a_0}{(1-g_1)(1-g_2)}$$

Ahora quedaba pendiente probar que $g_1 = a_1$. Esta relación sale de tomar

$$\begin{aligned}\bar{Z}_t &= a_0 + a_1 \bar{Z}_{t-1} \\ a_0 &= (\bar{Z}_t - a_1 \bar{Z}_{t-1}) \\ a_0 &= (1 - a_1 B) \bar{Z}_t\end{aligned}$$

y si

$$\begin{aligned}(1 - a_1 x) &= 0 \\ -a_1 x &= -1 \\ a_1 &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

pero sabíamos que $g = \frac{1}{x}$ así que $g_1 = a_1$ por lo que

$$(1 - a_1 B) = (1 - g_1 B) \text{ y } (1 - a_1 B) \bar{Z}_t = a_0 \text{ y } \bar{Z}_t = \frac{a_0}{1 - g_1}$$

Ahora proponemos la siguiente solución

$$\begin{aligned}(1 - a_1 B) \bar{Z}_t &= a_0 + c_1 g_1^t - c_1 g_1^t \\ (1 - a_1 B) \bar{Z}_t &= a_0 + c_1 g_1^t - c_1 g_1 g_1^{t-1} \\ (1 - a_1 B) \bar{Z}_t &= a_0 + c_1 g_1^t (1 - g_1 B) \\ \bar{Z}_t &= \frac{a_0}{1 - g_1} + c_1 g_1^t \frac{(1 - g_1 B)}{(1 - a_1 B)} \text{ pero } \frac{(1 - g_1 B)}{(1 - a_1 B)} = 1\end{aligned}$$

por lo anteriormente expuesto el resultado será

$$\bar{Z}_t = \frac{a_0}{1 - g_1} + c_1 g_1^t$$

y este último término se irá a cero conforme se tome el límite a infinito.

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #4

Esto se obtiene de

$$\bar{Z}_t = \frac{1}{\theta(B)} a_t \text{ y } \pi(B) = \frac{\bar{Z}_t}{a_t}$$

y al sustituir \bar{Z}_t en $\pi(B)$ resulta en

$$\frac{1}{\theta(B)} a_t = \pi(B)$$

y de aquí se despeja para así obtener $1 = \pi(B)\theta(B)$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #6

Por una parte sabemos que

$$s_n = 1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \dots$$

$$\theta s_n = \theta - \theta^2 + \theta^3 - \dots$$

si se suma

$$s_n + \theta s_n = 1 - \theta^t$$

$$(1 + \theta)s_n = 1 - \theta^t$$

$$s_n = \frac{1 - \theta^t}{1 + \theta}$$

y si se toma el límite cuando t tiende a infinito se obtendrá

$$s_n = \frac{1}{1 + \theta}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #14

El término $(1 - B)^{-n}$ sale del siguiente desarrollo

$$\theta(B)\nabla^d \bar{Z}_t = \phi(B)a_t$$

$$\theta(B)(\bar{Z}_t - \bar{Z}_{t-d}) = \phi(B)a_t$$

$$\theta(B)(1 - B)^d \bar{Z}_t = \phi(B)a_t$$

$$\bar{Z}_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)(1 - B)^d} a_t$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #18

Podemos expresar a un ARIMA como

$$\varphi(B)\bar{Z}_t = \phi(B)a_t$$

$$a_t = \varphi^{-1}(B)\phi(B)\bar{Z}_t = \lambda(B)\bar{Z}_t$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #19

Más adelante se verá que

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = -\theta_2 \left(B - \frac{1}{u_1} \right) \left(B - \frac{1}{u_2} \right)$$

y esto se logra multiplicando el segundo y tercer factor

$$B^2 - \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) B - \left(-\frac{1}{u_1 u_2} \right)$$

después multiplicano por -1

$$= -B^2 + \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) B + \left(-\frac{1}{u_1 u_2} \right)$$

después multiplicando por θ_2

$$= -(-u_1 u_2) B^2 + \frac{(-u_1 u_2)}{u_1 u_2} (u_1 + u_2) B + \frac{(-u_1 u_2)}{-u_1 u_2}$$

con

$$\begin{aligned}\theta_2 &= -u_1 u_2 \text{ y } \theta_1 = u_1 + u_2 \\ &= -\theta_2 B^2 - \theta_1 B + 1\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #20

La última expresión da como resultado

$$-\theta_2 \left(B^2 - \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) B + \frac{1}{u_1 u_2} \right) = -\theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} (u_1 u_2 B^2 - (u_1 + u_2) B + 1) = -\theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} (u_1 B - 1)(u_2 B - 1)$$

que se usará más adelante.

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #21

Esta igualdad se da porque

$$\begin{aligned}\left(-\theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} u_1 B + \theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} \right) (u_2 B - 1) &= -\theta_2 B^2 + \theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} u_1 B + \theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} u_2 B - \theta_2 \frac{1}{u_1 u_2} \\ &= -\theta_2 B^2 + \frac{\theta_2}{u_2} B + \theta_2 \frac{B}{u_1} - \frac{\theta_2}{u_1 u_2} = -B^2 + \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) B - \frac{1}{u_1 u_2} = B^2 - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_1} \right) B + \frac{1}{u_1 u_2} \\ &= B^2 u_1 u_2 - u_1 u_2 \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_1} \right) B + 1 = B^2 u_1 u_2 - u_1 B - u_2 B + 1 = (1 - u_1 B)(1 - u_2 B)\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #26

Los valores de las c se obtienen de

$$1 - a_1 B - a_2 B^2 - a_3 B^3 = B - a_1 B - a_2 B - a_3 B + 1 - c_1 B - c_2 B^2 - B + c_1 B^2 + c_2 B^3$$

y pasando todos los términos a la izquierda y queda

$$-a_2 B - a_3 B - c_1 B - c_2 B^2 + c_1 B^2 + c_2 B^3 + a_2 B^2 + a_3 B^3 = 0$$

$$(-a_2 - a_3 - c_1) B + (-c_2 + c_1 + a_2) B^2 + (c_2 + a_3) B^3 = 0$$

y resolviendo se encuentran los valores de c_1 y c_2

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #27

Esta ecuación sale del siguiente desarrollo. Nosotros tenemos que

$$(1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(1 - \rho) B (W_t^* - \mu) + (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1}) \nabla (W_t^* - \mu) = a_t$$

$$c_0 = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(\rho - 1)$$

$$-c_0 = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_p)(1 - \rho)$$

$$-c_0 B (W_t^* - \mu) + (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1}) \nabla (W_t^* - \mu) = a_t$$

$$-c_0 B W_t^* + c_0 B \mu + (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1}) \nabla (W_t^* - \mu) = a_t$$

$$-c_0 W_{t-1}^* + c_0 \mu + (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1}) \nabla (W_t^* - \mu) = a_t$$

Ahora

$$c = -c_0 \mu$$

$$-c = c_0 \mu$$

Ahora la segunda parte de esta expresión es igual a

$$\begin{aligned} & (1 - c_1 B - \dots - c_{p-1} B^{p-1}) \nabla (W_t^* - \mu) \\ &= \nabla W_t^* - c_1 \nabla W_t^* B - \dots - c_{p-1} \nabla W_t^* B^{p-1} \\ &= \nabla W_t^* - c_1 \nabla W_{t-1}^* - \dots - c_{p-1} \nabla W_{t-(p-1)}^* \end{aligned}$$

por lo que la expresión queda

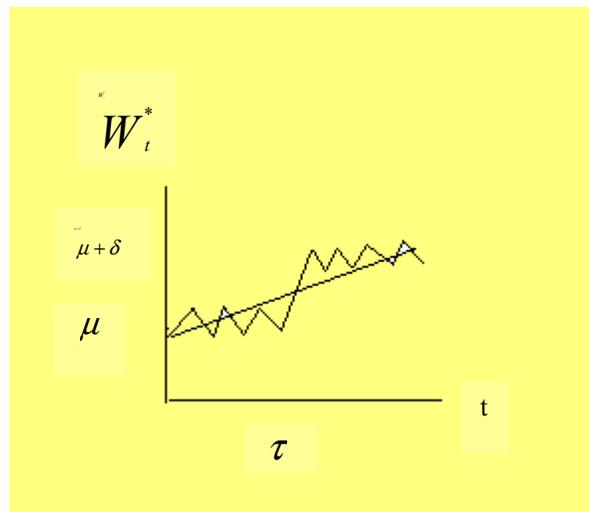
$$-c_0 W_{t-1}^* + c_0 \mu + \nabla W_t^* - c_1 \nabla W_{t-1}^* - \dots - c_{p-1} \nabla W_{t-(p-1)}^* = a_t$$

y pasando todo del otro lado queda

$$\begin{aligned} \nabla W_t^* &= -c_0 \mu + c_0 W_{t-1}^* + c_1 \nabla W_{t-1}^* + \dots + c_{p-1} \nabla W_{t-(p-1)}^* + a_t \\ &= c + c_0 W_{t-1}^* + c_1 \nabla W_{t-1}^* + \dots + c_{p-1} \nabla W_{t-(p-1)}^* + a_t \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #28

La gráfica correspondiente sería



Gráfica 19. Gráfica explicativa de la Prueba Phillips-Perron

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #35

Esto se logra despejando a_{t-1} de

$$\begin{aligned} W_{t-1} &= a_{t-1} - \phi a_{t-2} \\ a_{t-1} &= W_{t-1} + \phi a_{t-2} \end{aligned}$$

y sustituyéndolo.

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #36

Estas soluciones se obtienen de la siguiente forma. Para un AR(2) tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta_1 + \theta_2 \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \end{aligned}$$

y de aquí se despeja

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_1 - \theta_2 \alpha_1 \\ \theta_2 &= \alpha_2 - \theta_1 \alpha_1 \end{aligned}$$

y substituyendo se tiene

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \alpha_1 - (\alpha_2 - \theta_1 \alpha_1) \theta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_1 + \theta_1 \alpha_1^2 \\ \theta_1 - \theta_1 \alpha_1^2 &= \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_1 \\ \theta_1 (1 - \alpha_1^2) &= \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_1 \\ \theta_1 &= \frac{\alpha_1 (1 - \alpha_2)}{1 - \alpha_1^2}\end{aligned}$$

Y para el segundo valor se tiene

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \alpha_2 - \frac{\alpha_1 (1 - \alpha_2)}{1 - \alpha_1^2} = \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1^2) - \alpha_1^2 (1 - \alpha_2)}{1 - \alpha_1^2} \\ &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2 \alpha_2 - \alpha_1^2 + \alpha_1^2 \alpha_2}{1 - \alpha_1^2} = \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1^2)}{1 - \alpha_1^2}\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #38

Las soluciones de esa ecuación cuadrática vienen dadas por

$$\begin{aligned}\alpha \bar{\phi}^2 + \bar{\phi} + \alpha &= 0 \\ \bar{\phi}_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha} \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1 - 4\alpha^2}{4\alpha^2}} \\ &= -(2\alpha)^{-1} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} - 1} \\ &= -(2\alpha)^{-1} \pm \sqrt{\frac{1}{(2\alpha)^2} - 1} \\ &= -(2\alpha)^{-1} \pm \sqrt{(2\alpha)^{-2} - 1}\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #40

Estas condiciones salen de los determinantes del Teorema de Schur para el caso de un MA(2). Es decir,

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \phi_2 \\ \phi_2 & -1 \end{vmatrix}$$

Cuyo determinantes es igual a

$$\begin{aligned}1 - \phi_2^2 &> 0 \\ -\phi_2^2 &> -1 \\ \phi_2^2 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1\end{aligned}$$

Para el segundo determinante se tiene

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \phi_2 & \phi_1 \\ \phi_1 & -1 & 0 & \phi_2 \\ \phi_2 & 0 & -1 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

que es igual a

$$\begin{aligned}
 & -1[-1(1-0) + \phi_2(\phi_2)] + \phi_2[\phi_1(-\phi_1\phi_2) + 1(-\phi_2 - \phi_1^2) + \phi_2(\phi_2^2)] - \phi_1[\phi_1\phi_2 + 1(\phi_1)] \\
 & = 1 - \phi_2^2 - \phi_1^2\phi_2^2 - \phi_2^2 - \phi_1^2\phi_2 + \phi_2^4 - \phi_1^2\phi_2 - \phi_1^2 \\
 & = 1 - 2\phi_2^2 - 2\phi_1^2\phi_2 - \phi_1^2\phi_2^2 + \phi_2^4 - \phi_1^2 \\
 & = (1 - \phi_2^2)^2 - \phi_1^2(2\phi_2 + \phi_2^2 + 1) \\
 & = (1 + \phi_2)^2(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2(1 + \phi_2)^2 \\
 & = (1 + \phi_2)^2[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]
 \end{aligned}$$

De aquí se desprenden las dos condiciones

$$\begin{aligned}
 (1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2 &> 0 \\
 (1 - \phi_2) > \phi_1 \text{ y } (1 - \phi_2) > -\phi_1 \\
 1 > \phi_1 + \phi_2 \text{ y } 1 > \phi_2 - \phi_1
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #41

Esto se soluciona de la siguiente forma. Sabemos por la ecuación 26a que

$$(1 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2)\alpha_1 = (-\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2)$$

sabemos que el primer factor es igual a 1.5 por lo que

$$1.5\alpha_1 = -\phi_1 + \phi_1(-1.5\alpha_2\alpha_2)$$

$$1.5\alpha_1 = -\phi_1(1 + 1.5\alpha_2)$$

$$-\phi_1 = \frac{1.5\alpha_1}{1 + 1.5\alpha_2}$$

$$\phi_1 = -\frac{1.5\alpha_1}{1 + 1.5\alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\frac{1}{1.5} + \alpha_2}$$

$$\text{y } \frac{1}{1.5} = 0.667$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #43

Las covarianzas de un ARMA(1,1) son

$$\gamma_0 = \theta_1\gamma_1 + \sigma_a^2 - \phi_1\gamma_{za}$$

$$\gamma_1 = \theta_1\gamma_0 - \phi_1\sigma_a^2$$

$$\gamma_k = \theta_1\gamma_{k-1}$$

para $k \geq 2$

Si se multiplica

$$\bar{z}_t - \theta_1\bar{z}_{t-1} = a_t - \phi_1a_{t-1}$$

por a_{t-1} y si se sacan esperanzas se tiene

$$\gamma_{za} = (\theta_1 - \phi_1)\sigma_a^2$$

y desarrollando

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \theta_1 (\theta_1 \gamma_0 - \phi_1 \sigma_a^2) + \sigma_a^2 - \phi_1 \gamma_{za} \\
 &= \theta_1 (\theta_1 \gamma_0 - \phi_1 \sigma_a^2) + \sigma_a^2 - \phi_1 (\theta_1 - \phi_1) \sigma_a^2 \\
 &= \theta_1^2 \gamma_0 - \theta_1 \phi_1 \sigma_a^2 + \sigma_a^2 - \phi_1 \theta_1 \sigma_a^2 + \phi_1^2 \sigma_a^2 \\
 &= \theta_1^2 \gamma_0 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma_a^2 + \sigma_a^2 + \phi_1^2 \sigma_a^2 \\
 \gamma_0 - \theta_1^2 \gamma_0 &= (1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2 \\
 \gamma_0 &= \frac{(1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2}{1 - \theta_1^2}
 \end{aligned}$$

Ahora se tiene

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{\theta_1 (1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2}{1 - \theta_1^2} - \phi_1 \sigma_a^2 \\
 &= \frac{\theta_1 (1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2 - \phi_1 \sigma_a^2 (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^2} \\
 &= \frac{\theta_1 \sigma_a^2 + \theta_1 \phi_1^2 \sigma_a^2 - 2\theta_1^2 \phi_1 \sigma_a^2 - \phi_1 \sigma_a^2 + \phi_1 \theta_1^2 \sigma_a^2}{1 - \theta_1^2} \\
 &= \frac{\theta_1 \sigma_a^2 - \phi_1 \sigma_a^2 - \theta_1^2 \phi_1 \sigma_a^2 + \theta_1 \phi_1^2 \sigma_a^2}{1 - \theta_1^2} \\
 &= \frac{(\theta_1 - \phi_1 - \theta_1^2 \phi_1 + \theta_1 \phi_1^2) \sigma_a^2}{1 - \theta_1^2}
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \bar{\theta}_1 \bar{\phi}_1)(\bar{\theta}_1 - \bar{\phi}_1)}{1 + \bar{\phi}_1^2 - 2\bar{\theta}_1 \bar{\phi}_1} \\
 \alpha_2 &= \bar{\theta}_1 \alpha_1
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN ECUACIÓN #57

Por ejemplo

$$a_{t+h-1} = T(\bar{Z}_{t+h-1}) - \hat{T}(\bar{Z}_{t+h-1})(1)$$

Si h=1 entonces

$$\begin{aligned}
 a_{t+h-1} &= T(\bar{Z}_{t+1-1}) - \hat{T}(\bar{Z}_{t+1-1})(1) \\
 &= T(\bar{Z}_t) - \hat{T}(\bar{Z}_{t-1})(1) y \\
 a_{t+h} &= T(\bar{Z}_{t+1}) - \hat{T}(\bar{Z}_{t+1-1})(1) = 0 \text{ porque } j < h
 \end{aligned}$$

ANEXO IV. MODELOS CORRESPONDIENTES A LA APLICACIÓN

TIPO DE CAMBIO REAL

- Caso AR(6) MA(6)

Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 09/29/08 Time: 16:32
Sample (adjusted): 1980M08 2008M03
Included observations: 332 after adjustments
Convergence achieved after 26 iterations
Backcast: 1979M07 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000179	0.017661	-0.010157	0.9919
AR(1)	0.607926	0.397907	1.527807	0.1276
AR(2)	0.090440	0.344833	0.262273	0.7933
AR(3)	0.186177	0.203384	0.915394	0.3607
AR(4)	-0.158554	0.181944	-0.871440	0.3842
AR(5)	0.081838	0.175019	0.467593	0.6404
AR(6)	-0.337396	0.154923	-2.177825	0.0302
MA(1)	-0.494664	0.405311	-1.220455	0.2232
MA(2)	-0.132761	0.300412	-0.441929	0.6588
MA(3)	-0.379844	0.200709	-1.892514	0.0593
MA(4)	0.040495	0.196915	0.205650	0.8372
MA(5)	0.293810	0.174868	1.680180	0.0939
MA(6)	0.330390	0.273419	1.208367	0.2278

R-squared	0.158237	Mean dependent var	0.000769
Adjusted R-squared	0.126572	S.D. dependent var	0.284542
S.E. of regression	0.265926	Akaike info criterion	0.227168
Sum squared resid	22.55852	Schwarz criterion	0.376165
Log likelihood	-24.70995	F-statistic	4.997229
Durbin-Watson stat	1.997057	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots	.88-.33i	.88+.33i	.07-.76i	.07+.76i
	-.64+.49i	-.64-.49i		
Inverted MA Roots	.93+.35i	.93-.35i	-.11+.83i	-.11-.83i
	-.58-.37i	-.58+.37i		

Redundant Variables: C AR(2) AR(5) MA(1) MA(2) MA(3) MA(4)

F-statistic	2.288630	Probability	0.027473
Log likelihood ratio	16.26811	Probability	0.022777

Test Equation:
 Dependent Variable: D(TCR)
 Method: Least Squares
 Date: 09/29/08 Time: 16:42
 Sample (adjusted): 1980M08 2008M03
 Included observations: 332 after adjustments
 Convergence achieved after 10 iterations
 Backcast: 1979M07 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.176797	0.050292	3.515450	0.0005
AR(3)	-0.146092	0.049316	-2.962383	0.0033
AR(4)	-0.159525	0.049851	-3.200052	0.0015
AR(6)	-0.448680	0.118511	-3.785963	0.0002
MA(5)	0.239520	0.051650	4.637334	0.0000
MA(6)	0.423265	0.123261	3.433900	0.0007
R-squared	0.115964	Mean dependent var		0.000769
Adjusted R-squared	0.102405	S.D. dependent var		0.284542
S.E. of regression	0.269579	Akaike info criterion		0.234000
Sum squared resid	23.69143	Schwarz criterion		0.302768
Log likelihood	-32.84401	Durbin-Watson stat		2.048600
Inverted AR Roots	.78+.51i -.75+.45i	.78-.51i -.75-.45i	.06-.83i	.06+.83i
Inverted MA Roots	.79+.49i -.72+.36i	.79-.49i -.72-.36i	-.07-.88i	-.07+.88i

- Caso AR(4) MA(3)

Dependent Variable: D(TCR)
 Method: Least Squares
 Date: 05/13/08 Time: 14:38
 Sample (adjusted): 1980M06 2008M03
 Included observations: 334 after adjustments
 Convergence achieved after 43 iterations
 Backcast: 1979M10 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000472	0.015612	0.030245	0.9759
AR(1)	-0.752347	0.199402	-3.773011	0.0002
AR(2)	-0.679002	0.125466	-5.411826	0.0000
AR(3)	-0.401696	0.157646	-2.548094	0.0113
AR(4)	-0.192005	0.066360	-2.893369	0.0041
MA(1)	0.908860	0.200568	4.531435	0.0000

MA(2)	0.865667	0.142341	6.081653	0.0000
MA(3)	0.420377	0.186113	2.258718	0.0246
R-squared	0.113002	Mean dependent var		0.000598
Adjusted R-squared	0.093956	S.D. dependent var		0.283778
S.E. of regression	0.270118	Akaike info criterion		0.243747
Sum squared resid	23.78622	Schwarz criterion		0.335031
Log likelihood	-32.70568	F-statistic		5.933118
Durbin-Watson stat	1.988897	Prob(F-statistic)		0.000002
Inverted AR Roots	.11-.70i	.11+.70i	-.48-.39i	-.48+.39i
Inverted MA Roots	-.15+.81i	-.15-.81i	-.61	

Redundant Variables: C

F-statistic	0.000915	Probability	0.975890
Log likelihood ratio	0.000937	Probability	0.975578

Test Equation:

Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 15:14
Sample (adjusted): 1980M06 2008M03
Included observations: 334 after adjustments
Convergence achieved after 43 iterations
Backcast: 1979M10 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.752349	0.199089	-3.778951	0.0002
AR(2)	-0.678989	0.125272	-5.420110	0.0000
AR(3)	-0.401682	0.157400	-2.551991	0.0112
AR(4)	-0.192005	0.066257	-2.897864	0.0040
MA(1)	0.908865	0.200252	4.538604	0.0000
MA(2)	0.865660	0.142118	6.091152	0.0000
MA(3)	0.420367	0.185819	2.262240	0.0243

R-squared	0.112999	Mean dependent var		0.000598
Adjusted R-squared	0.096724	S.D. dependent var		0.283778
S.E. of regression	0.269705	Akaike info criterion		0.237761
Sum squared resid	23.78628	Schwarz criterion		0.317636
Log likelihood	-32.70615	Durbin-Watson stat		1.988897
Inverted AR Roots	.11-.70i	.11+.70i	-.48-.39i	-.48+.39i
Inverted MA Roots	-.15+.81i	-.15-.81i	-.61	

▪ Caso AR(2) MA(3)

Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 14:59
Sample (adjusted): 1980M04 2008M03
Included observations: 336 after adjustments
Convergence achieved after 15 iterations
Backcast: 1979M10 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000209	0.016444	0.012711	0.9899
AR(1)	0.020088	0.118342	0.169747	0.8653
AR(2)	-0.655858	0.092849	-7.063722	0.0000
MA(1)	0.116107	0.128892	0.900810	0.3683
MA(2)	0.784741	0.087173	9.002121	0.0000
MA(3)	-0.085338	0.077655	-1.098946	0.2726
R-squared	0.091356	Mean dependent var		0.000138
Adjusted R-squared	0.077589	S.D. dependent var		0.282994
S.E. of regression	0.271794	Akaike info criterion		0.250150
Sum squared resid	24.37772	Schwarz criterion		0.318312
Log likelihood	-36.02517	F-statistic		6.635715
Durbin-Watson stat	1.991817	Prob(F-statistic)		0.000007
Inverted AR Roots	.01+.81i	.01-.81i		
Inverted MA Roots	.11	-.11+.89i	-.11-.89i	

Redundant Variables: C AR(1) MA(1)

F-statistic	1.972757	Probability	0.117869
Log likelihood ratio	5.972478	Probability	0.112957

Test Equation:
Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 15:00
Sample (adjusted): 1980M04 2008M03
Included observations: 336 after adjustments
Convergence achieved after 12 iterations
Backcast: 1979M10 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
----------	-------------	------------	-------------	-------

AR(2)	-0.631230	0.096101	-6.568407	0.0000
MA(2)	0.753542	0.075229	10.01668	0.0000
MA(3)	-0.192437	0.037508	-5.130572	0.0000
R-squared	0.075060	Mean dependent var		0.000138
Adjusted R-squared	0.069505	S.D. dependent var		0.282994
S.E. of regression	0.272982	Akaike info criterion		0.250068
Sum squared resid	24.81491	Schwarz criterion		0.284149
Log likelihood	-39.01141	Durbin-Watson stat		1.730156
Inverted MA Roots	.24	-.12-.89i	-.12+.89i	

▪ Caso AR(2) MA(2)

Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 15:02
Sample (adjusted): 1980M04 2008M03
Included observations: 336 after adjustments
Convergence achieved after 13 iterations
Backcast: 1979M11 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000141	0.017512	0.008061	0.9936
AR(1)	-0.068842	0.081378	-0.845951	0.3982
AR(2)	-0.701833	0.076331	-9.194553	0.0000
MA(1)	0.236984	0.060273	3.931822	0.0001
MA(2)	0.855034	0.053230	16.06310	0.0000
R-squared	0.089066	Mean dependent var		0.000138
Adjusted R-squared	0.078058	S.D. dependent var		0.282994
S.E. of regression	0.271725	Akaike info criterion		0.246714
Sum squared resid	24.43915	Schwarz criterion		0.303516
Log likelihood	-36.44797	F-statistic		8.090874
Durbin-Watson stat	2.046448	Prob(F-statistic)		0.000003
Inverted AR Roots	-.03-.84i	-.03+.84i		
Inverted MA Roots	-.12+.92i	-.12-.92i		

Redundant Variables: C AR(1)

F-statistic	0.314194	Probability	0.730595
Log likelihood ratio	0.637275	Probability	0.727139

Test Equation:

Dependent Variable: D(TCR)
 Method: Least Squares
 Date: 05/13/08 Time: 15:02
 Sample (adjusted): 1980M04 2008M03
 Included observations: 336 after adjustments
 Convergence achieved after 12 iterations
 Backcast: 1979M11 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(2)	-0.703646	0.078066	-9.013461	0.0000
MA(1)	0.190894	0.035515	5.374967	0.0000
MA(2)	0.835807	0.055156	15.15352	0.0000
R-squared	0.087337	Mean dependent var		0.000138
Adjusted R-squared	0.081856	S.D. dependent var		0.282994
S.E. of regression	0.271164	Akaike info criterion		0.236706
Sum squared resid	24.48554	Schwarz criterion		0.270787
Log likelihood	-36.76660	Durbin-Watson stat		2.093782
Inverted MA Roots	-.10-.91i	-.10+.91i		

▪ Caso AR(1)

Dependent Variable: D(TCR)
 Method: Least Squares
 Date: 05/13/08 Time: 15:04
 Sample (adjusted): 1980M03 2008M03
 Included observations: 337 after adjustments
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000408	0.017695	0.023030	0.9816
AR(1)	0.136874	0.054117	2.529197	0.0119
R-squared	0.018737	Mean dependent var		0.000391
Adjusted R-squared	0.015808	S.D. dependent var		0.282611
S.E. of regression	0.280368	Akaike info criterion		0.300491
Sum squared resid	26.33312	Schwarz criterion		0.323162
Log likelihood	-48.63274	F-statistic		6.396840
Durbin-Watson stat	1.994037	Prob(F-statistic)		0.011891
Inverted AR Roots	.14			

Redundant Variables: C

F-statistic	0.000530	Probability	0.981640
Log likelihood ratio	0.000534	Probability	0.981571

Test Equation:

Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 15:05
Sample (adjusted): 1980M03 2008M03
Included observations: 337 after adjustments
Convergence achieved after 2 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.136875	0.054037	2.532992	0.0118

R-squared	0.018736	Mean dependent var	0.000391
Adjusted R-squared	0.018736	S.D. dependent var	0.282611
S.E. of regression	0.279951	Akaike info criterion	0.294558
Sum squared resid	26.33316	Schwarz criterion	0.305893
Log likelihood	-48.63301	Durbin-Watson stat	1.994037

Inverted AR Roots .14

- Caso MA(1)

Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 15:06
Sample (adjusted): 1980M02 2008M03
Included observations: 338 after adjustments
Convergence achieved after 5 iterations
Backcast: 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000125	0.017272	0.007252	0.9942
MA(1)	0.134440	0.054059	2.486924	0.0134

R-squared	0.018581	Mean dependent var	0.000166
Adjusted R-squared	0.015660	S.D. dependent var	0.282222
S.E. of regression	0.280003	Akaike info criterion	0.297867
Sum squared resid	26.34298	Schwarz criterion	0.320489
Log likelihood	-48.33955	F-statistic	6.361325
Durbin-Watson stat	1.993440	Prob(F-statistic)	0.012125

Inverted MA Roots -.13

Redundant Variables: C

F-statistic	5.26E-05	Probability	0.994218
Log likelihood ratio	5.29E-05	Probability	0.994197

Test Equation:
Dependent Variable: D(TCR)
Method: Least Squares
Date: 05/13/08 Time: 15:06
Sample (adjusted): 1980M02 2008M03
Included observations: 338 after adjustments
Convergence achieved after 5 iterations
Backcast: 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	0.134440	0.053978	2.490630	0.0132
R-squared	0.018581	Mean dependent var		0.000166
Adjusted R-squared	0.018581	S.D. dependent var		0.282222
S.E. of regression	0.279587	Akaike info criterion		0.291950
Sum squared resid	26.34298	Schwarz criterion		0.303261
Log likelihood	-48.33957	Durbin-Watson stat		1.993441

Inverted MA Roots -.13

TIPO DE CAMBIO NOMINAL

- Caso AR(2) MA(3)

Dependent Variable: D(TCN)
Method: Least Squares
Date: 09/22/08 Time: 18:08
Sample (adjusted): 1980M04 2008M03
Included observations: 336 after adjustments
Convergence achieved after 22 iterations
Backcast: 1979M10 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.806381	0.256163	-3.147915	0.0018
AR(2)	-0.637467	0.174439	-3.654385	0.0003
MA(1)	1.009731	0.259544	3.890406	0.0001

MA(2)	0.924639	0.176049	5.252176	0.0000
MA(3)	0.185265	0.082531	2.244785	0.0254
R-squared	0.030201	Mean dependent var		0.031871
Adjusted R-squared	0.018482	S.D. dependent var		0.173822
S.E. of regression	0.172209	Akaike info criterion		-0.665451
Sum squared resid	9.816072	Schwarz criterion		-0.608649
Log likelihood	116.7958	Durbin-Watson stat		2.003584
Inverted AR Roots	-.40+.69i	-.40-.69i		
Inverted MA Roots	-.25	-.38+.77i	-.38-.77i	

- Caso AR(1)

Dependent Variable: D(TCN)
Method: Least Squares
Date: 09/22/08 Time: 18:12
Sample (adjusted): 1980M03 2008M03
Included observations: 337 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.031753	0.011328	2.803038	0.0054
AR(1)	0.177354	0.053779	3.297818	0.0011
R-squared	0.031444	Mean dependent var		0.031776
Adjusted R-squared	0.028552	S.D. dependent var		0.173572
S.E. of regression	0.171076	Akaike info criterion		-0.687497
Sum squared resid	9.804479	Schwarz criterion		-0.664826
Log likelihood	117.8433	F-statistic		10.87560
Durbin-Watson stat	2.015434	Prob(F-statistic)		0.001079
Inverted AR Roots	.18			

- Caso MA(1)

Dependent Variable: D(TCN)
Method: Least Squares
Date: 09/22/08 Time: 18:13
Sample (adjusted): 1980M02 2008M03
Included observations: 338 after adjustments
Convergence achieved after 7 iterations
Backcast: 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
----------	-------------	------------	-------------	-------

C	0.031654	0.010763	2.941003	0.0035
MA(1)	0.156586	0.053882	2.906123	0.0039
R-squared	0.027843	Mean dependent var		0.031682
Adjusted R-squared	0.024949	S.D. dependent var		0.173323
S.E. of regression	0.171147	Akaike info criterion		-0.686685
Sum squared resid	9.841911	Schwarz criterion		-0.664063
Log likelihood	118.0497	F-statistic		9.623029
Durbin-Watson stat	1.973441	Prob(F-statistic)		0.002084
Inverted MA Roots	-.16			

- Caso ARMA(7,2)

Dependent Variable: D(TCN)
 Method: Least Squares
 Date: 09/27/08 Time: 12:24
 Sample (adjusted): 1980M09 2008M03
 Included observations: 331 after adjustments
 Convergence achieved after 15 iterations
 Backcast: 1979M11 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.032296	0.012586	2.566126	0.0107
AR(1)	1.215838	0.133177	9.129514	0.0000
AR(2)	-0.768668	0.160146	-4.799796	0.0000
AR(3)	-0.006461	0.097798	-0.066063	0.9474
AR(4)	0.060645	0.097005	0.625167	0.5323
AR(5)	0.062923	0.096662	0.650958	0.5155
AR(6)	-0.216414	0.089104	-2.428770	0.0157
AR(7)	0.204369	0.059125	3.456577	0.0006
MA(1)	-1.066332	0.129738	-8.219138	0.0000
MA(2)	0.675316	0.129905	5.198554	0.0000
R-squared	0.095467	Mean dependent var		0.032351
Adjusted R-squared	0.070106	S.D. dependent var		0.175090
S.E. of regression	0.168841	Akaike info criterion		-0.689975
Sum squared resid	9.150819	Schwarz criterion		-0.575107
Log likelihood	124.1909	F-statistic		3.764355
Durbin-Watson stat	2.013232	Prob(F-statistic)		0.000160
Inverted AR Roots	.75	.68-.64i	.68+.64i	.16-.77i
	.16+.77i	-.60+.39i	-.60-.39i	
Inverted MA Roots	.53+.63i	.53-.63i		

Redundant Variables: AR(3) AR(5)

F-statistic	0.233424	Probability	0.791952
Log likelihood ratio	0.481042	Probability	0.786218

Test Equation:

Dependent Variable: D(TCN)

Method: Least Squares

Date: 09/27/08 Time: 12:25

Sample (adjusted): 1980M09 2008M03

Included observations: 331 after adjustments

Convergence achieved after 18 iterations

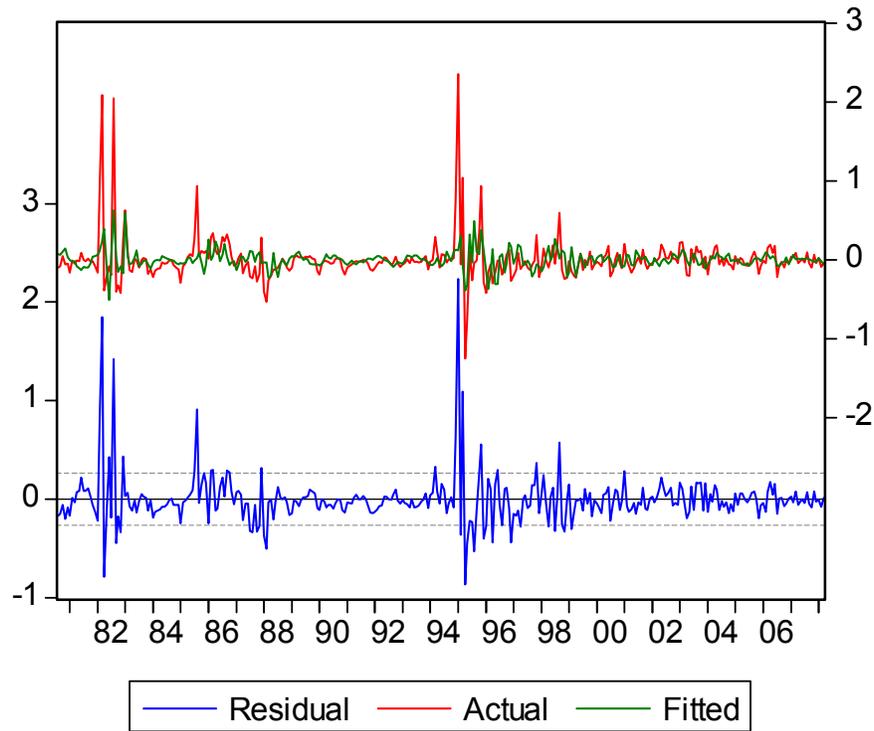
Backcast: 1979M11 1979M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.032279	0.012375	2.608417	0.0095
AR(1)	1.226562	0.123964	9.894512	0.0000
AR(2)	-0.798344	0.125135	-6.379859	0.0000
AR(4)	0.094183	0.045562	2.067127	0.0395
AR(6)	-0.167933	0.054123	-3.102790	0.0021
AR(7)	0.184318	0.052596	3.504383	0.0005
MA(1)	-1.070588	0.124634	-8.589856	0.0000
MA(2)	0.688993	0.122827	5.609452	0.0000

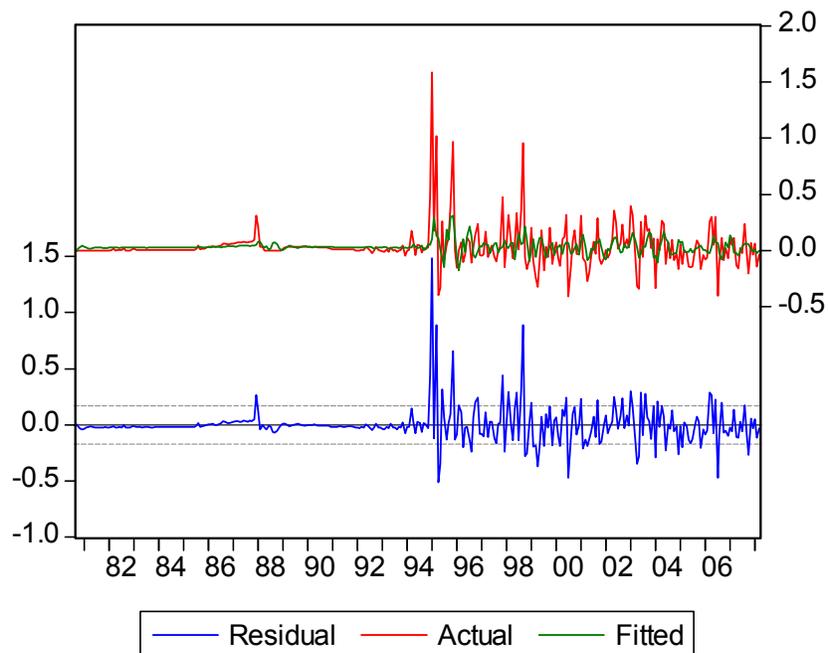
R-squared	0.094151	Mean dependent var	0.032351
Adjusted R-squared	0.074520	S.D. dependent var	0.175090
S.E. of regression	0.168440	Akaike info criterion	-0.700606
Sum squared resid	9.164128	Schwarz criterion	-0.608712
Log likelihood	123.9503	F-statistic	4.795957
Durbin-Watson stat	2.026261	Prob(F-statistic)	0.000038

Inverted AR Roots	.74	.67+.64i	.67-.64i	.15-.77i
	.15+.77i	-.58+.36i	-.58-.36i	
Inverted MA Roots	.54+.63i	.54-.63i		

ANEXO IV. MODELOS CORRESPONDIENTES A LA APLICACIÓN



Gráfica 20. Gráfica de x_t contra \hat{x}_t correspondiente al TCR



Gráfica 21. Gráfica de x_t contra \hat{x}_t correspondiente al TCN

BIBLIOGRAFÍA.

- Box, George y Gwilym, Jenkins (1970). "Time Series Analysis". Holden Day
- Charemza, Wojciech y Deadman, Derek F. (1997). "New Direction in Econometric Practice: general to specific modelling, cointegration and vector autoregression". 2ª Ed.
- Dickey, David A. y Fuller, Wayne A. (1979). "Distribution of the Estimators for Autorregresive Time Series with a Unit Root". Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, No. 366. p. 427-431
- Dimson, Elroy y Mussavian, Massoud (1998). "A brief history of market efficiency". European Financial Management, Vol. 4, No.1
- Fama, Eugene F (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". The Journal of Finance Vol. 25, No. 2.
- Grier, Kevin B. y Hernández-Trillo, Fausto (2004). "The Real Exchange Rate Process and its Real Effects: the Cases of Mexico and the USA". Journal of Applied Economics Vol. 7
- Guerrero Guzmán, Víctor (2003). "Análisis Estadístico de Series de Tiempo". 2ª Ed. Thomson
- Gujarati, Damodar N. (2003) "Basic Econometrics". 4ª Ed. Internacional
- Kwiatkowski, Denis; C.B. Phillips, Peter; Schmidt, Peter; Shin, Yongcheol (1992). Testing the Null Hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root". Journal of Econometrics Vol. 54 No. 1-3 Oct-Dec. p. 152-178
- Maddala, GS (1992). "Introduction to Econometrics". 2ª Ed. Macmillan
- Makridakis, Spyros, Wheelwright, Steven C. y Mc Gee, Victor E. (1983). "Forecasting Methods and Applications". 2ª Ed. John Wiley and Sons
- Perron, Pierre (1989). "The Great Crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis". Econometrica, Vol. 57, No. 6. p. 1361-1401.
- Pulido, Antonio (1993). "Modelos Económicos". Pirámide
- Tapia Rangel, Claudia (1995). "Pronósticos para series de tiempo con modelos ARIMA". Tesis. Facultad de Ciencias, UNAM
- Tsay, Ruey (2005). "Análisis of Financial Time Series". 2a Ed.
- Woolridge, Jeffrey (2002). "Introducción a la econometría". Thomson Learning.
- Página web de la Cámara de Diputados <http://www3.diputados.gob.mx/>

OTRA BIBLIOGRAFÍA

- Cronwell, Jeff B., Labys, Walter C. y Terraza Michel (1992). "Univariate Test for Time Series Model". Sage Publications, California, Ansbury Park
- Enders, Walter (2004). "Applied Econometric Time Series". John Wiley and Sons, New York
- Hamilton, J. D. (1994). "Time Series Analysis". Princeton University Press.
- Mills, T. C. (1999). "Econometric Modelling of Financial Time Series". 2a Ed. Cambidge University Press

Spanos, Aris (1986). "Statistical Foundations of Econometric Modelling". Cambridge University Press.

Verbeek, Marno (2000). "A Guide to Modern Econometric". John Wiley and Sons, New York