UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPLETACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS Y ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MIGUEL ANGEL SÁNCHEZ BARQUÍN

DIRECTOR(A) DE LA TESINA: DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE, 2008

Introducción

Comencemos con un ejemplo clásico y bien conocido para motivar el concepto de completación de espacios. Sabemos que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$ no es completo. Es decir, no toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{Q}$ converje en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, si consideramos a los números reales $\mathbb{R}$, es bien conocido que $\mathbb{R}$ sí es completo con la métrica usual; más aún, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la métrica euclideana o usual. En este sentido podemos decir que el espacio $\mathbb{R}$ es la completación de $\mathbb{Q}$ donde $\widetilde{d}$ es la extensión de la métrica d y preservamos las mismas propiedades de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Entonces, la idea general de la completación de un espacio X es construir un espacio $\widetilde{X}$ que tenga al menos las mismas características que X, pero donde principalmente $\widetilde{X}$ sea completo. No siempre es posible, como en nuestro ejemplo previo, tener que $X \subset \widetilde{X}$, pero en esencia esto será posible mediante un isomorfismo o isometría, de tal modo que bajo dicho isomorfismo (o isometría, según sea el caso), X sea un espacio denso en $\widetilde{X}$. Es así que la completación del espacio X tiene ahora ventajas evidentes respecto al espacio original.

Un espacio métrico (X, d) tiene por completación un espacio métrico completo $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ tal que X es isométrico a un subespacio denso X_0 de $\widetilde{X}$. Las ventajas y aplicaciones que tiene un espacio métrico completo son numerosos. Por ejemplo, una aplicación de la completación es el principio de funciones contractivas, el cual es una técnica muy útil para demostrar la existencia y unicidad de varios teoremas referentes a soluciones de algunos tipos de ecuaciones diferenciales e integrales. Una consecuencia muy importante es el conocido Teorema de Barie, el cual afirma que para un espacio métrico completo X y una sucesión $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de subconjuntos abiertos y densos en X, se tiene que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ es denso en X. Una aplicación del Teorema de Baire es la existencia de funciones continuas en todas partes, pero que no es diferenciable en ningún punto.

Para el caso de un espacio normado $(X, \|\ \|)$, la respectiva completación resulta ser un espacio de Banach y un espacio con producto interno $(X, \langle\ \rangle)$ tiene por completación a un espacio de Hilbert. Los espacios de Banach y los de Hilbert tienen propiedades muy bondadosas y los resultados alrededor de ellos no sólo son numerosos sino importantes.

Un ejmeplo de espacios que no son completos de dimensión infinita es el álgebra de polinomios, siendo deseable su completación. Además para el caso de un álgebra topológica X con multiplicación continua, veremos que su completación $\widetilde{X}$ es un álgebra topológica con multiplicación continua, sin importar si el álgebra topológica es conmutativa o no. Con la completación del álgebra topológica, nos referimos a la completación del epacio vectorial topológico subyacente del álgebra X.

Así, en este trabajo abordaremos la completación de espacios métricos, normados y espacios con producto interno, para después considerar completaciones de espacios vectoriales topológicos. En este sentido, veremos que la completación de álgebras topológicas (conmutativas o no conmutativas), nuevamente son álgebras topológicas con multiplicación continua, siempre y cuando el álgebra topológica original tenga multiplicación continua. Finalmente, discutiremos algunas situaciones alrededor del Teorema de Gelfand de álgebras conmutativas; particularmente si tienen o no unidad y cómo definir una norma adecuada equivalente a la norma obtenida por la unitización.

Sabemos que no todo espacio métrico (X,d) es completo. Sin embargo, lo podemos completar en el sentido que describimos en la Introducción y que construiremos a continuación.

Definición 1. Sea (X,d) un espacio métrico. Definimos el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en (X,d) por $\mathfrak{C}(X,d)$. Decimos que dos sucesiones de Cauchy $x=(x_n)_{n\geqslant 1}$ y $y=(y_n)_{n\geqslant 1}$ son *equivalentes* si $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$; en ese caso escribimos $x\sim y$. Notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto:

1. Sea $x\in\mathfrak{C}(X,d)$ y $x=(x_n)_{n\geqslant 1}$. Como $d(x_n,x_n)=0,\ \forall\ n\geqslant 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_n)=0$, es decir $x\sim x$.
2. Sean $x,y\in\mathfrak{C}(X,d)$, donde $x=(x_n)_{n\geqslant 1}$, $y=(y_n)_{n\geqslant 1}$. Supóngase que $x\sim y$. Dado que $d(x_n,y_n)=d(y_n,x_n),\ \forall\ n\geqslant 1$, entonces,
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0=\lim_{n\to\infty} d(y_n,x_n),$$
es decir, $y\sim x$.
3. Sean $x,y,z\in\mathfrak{C}(X,d)$ y supóngase que $x\sim y$ y $y\sim z$. Notemos que
$$d(x_n,z_n)\leqslant d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n),\ \forall\ n\geqslant 1,$$
de donde
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n)&\leqslant \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n)\\&=0+0\\&=0,\end{aligned}$$
por lo que $x\sim z$.

Definimos el espacio cociente
$$\widetilde{X}=\mathfrak{C}(X,d)/\sim .$$

Para un elemento $x\in\mathfrak{C}(X,d)$, denotamos su clase de equivalencia por $\widetilde{x}$ y para $x\in X$, definimos a $\langle x\rangle\in\widetilde{X}$ como la clase de equivalencia de la sucesión constante x, la cual obviamente es de Cauchy.

Observación 2. Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x,y\in\mathfrak{C}(X,d)$, donde $x=(x_n)_{n\geqslant 1}$ y $y=(y_n)_{n\geqslant 1}$, entonces la sucesión de reales $\big(d(x_n,y_n)\big)_{n\geqslant 1}$ es convergente. En efecto, para cualquier m,n, tenemos que
$$\begin{aligned}\Big|d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)\Big|&\leqslant\Big|d(x_m,y_m)-d(x_n,y_m)\Big|+\Big|d(x_n,y_m)-d(x_n,y_n)\Big|\\&\leqslant d(x_m,x_n)+d(y_m,y_n).\end{aligned}$$

Para un espacio métrico (X,d) y $x,y\in\mathfrak{C}(X,d)$, podemos definir
$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n).$$

Proposición 3. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces,

1. La función $\delta : \mathfrak{C}(X,d) \times \mathfrak{C}(X,d) \to [0,\infty)$, tiene las siguientes propiedades:

    a) $\delta(x,y) = \delta(y,x), \ \forall \ x,y \in \mathfrak{C}(X,d)$

    b) $\delta(x,y) \leqslant \delta(x,z) + \delta(z,y), \ \forall \ x,y,z \in \mathfrak{C}(X,d)$

    c) Si $\delta(x,y) = 0$, entonces $x \sim y$

    d) Si $x, x', y, y' \in \mathfrak{C}(X,d)$ tales que $x \sim x'$ y $y \sim y'$, entonces

    $$\delta(x,y) = \delta(x',y').$$

2. La función $\widetilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to [0,\infty)$, definida por

    $$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \delta(x,y), \ \forall \ x,y \in \mathfrak{C}(X,d),$$

    es una métrica en $\widetilde{X}$.

3. La función $\varphi : X \to \widetilde{X}$, definida por $x \mapsto \langle x \rangle$ es una isometría en el sentido de

    $$\widetilde{d}\big(\langle x \rangle, \langle y \rangle\big) = d(x,y), \ \forall \ x,y \in X.$$

Demostración:

1. Sean $x,y \in \mathfrak{C}(X,d)$ y $\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$

    a) Se sigue del hecho de que $d(x_n,y_n) = d(y_n,x_n), \ \forall \ n \geqslant 1$.

    b) Por la desigualdad del tríangulo de d, se tiene lo pedido.

    c) Directamente de la definición.

    d) Como

    $$d(x_n,y_n) \leqslant d(x_n,x'_n) + d(x'_n,y'_n) + d(y'_n,y_n), \ \forall \ n \geqslant 1,$$

    entonces $\delta(x,y) \leqslant \delta(x',y')$. Análogamente tenemos que $\delta(x',y') \leqslant \delta(x,y)$.

2. Se sigue directamente del inciso anterior:

    a) $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \delta(x,y) = \delta(y,x) = \widetilde{d}(\widetilde{y},\widetilde{x}), \ \forall \ \widetilde{x},\widetilde{y} \in \widetilde{X}$.

    b) Sean $\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z} \in \widetilde{X}$, entonces

    $$\begin{aligned}\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{z}) &= \delta(x,z)\\ &\leqslant \delta(x,y) + \delta(y,z)\\ &= \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) + \widetilde{d}(\widetilde{y},\widetilde{z}).\end{aligned}$$

    c) Si $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0 = \delta(x,y)$, entonces $x \sim y$, de donde $\widetilde{x} = \widetilde{y}$. Inversamente, si $\widetilde{x} = \widetilde{y}$, entonces $x \sim y$, y por definición $\delta(x,y) = 0 = \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})$.

    Por lo tanto $\widetilde{d}$ es una métrica en $\widetilde{X}$.

3. Para toda $x \in X$, la sucesión $(x_n)_{n\geqslant 1}$, donde $x_n = x,\ \forall\ n \geqslant 1$, es claramente de Cauchy, la cual podemos escribir como $(x)_{n\geqslant 1}$. Entonces por notación tenemos que $\widetilde{(x)}_{n\geqslant 1} = \langle x \rangle$. Por lo tanto

$$d(x,y) = \delta(\langle x \rangle, \langle y \rangle) = \widetilde{d}(\langle x \rangle, \langle y \rangle).$$

■

Proposición 4. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces,

1. Para cualquier sucesión de Cauchy $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \subset X$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n \rangle = \widetilde{x},\ \text{ en } \widetilde{X}.$$

2. El espacio métrico $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es completo.

Demostración:

1. Para cada $n \geqslant 1$, tenemos que

$$\widetilde{d}(\langle x_n \rangle, \widetilde{x}) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m).$$

Tomando un $\epsilon > 0$, y escojemos un N_ϵ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,\ \forall\ m,n \geqslant N_\epsilon,$$

entonces,

$$\widetilde{d}(\langle x_n \rangle, \widetilde{x}) \leqslant \epsilon,\ \forall\ n \geqslant N_\epsilon,$$

de donde tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\langle x_n \rangle, \widetilde{x}) = 0.$$

2. Sea $(p_k)_{k\geqslant 1}$ una sucesión de Cauchy en $\widetilde{X}$. Por el inciso 1), podemos escoger para cada $k \geqslant 1$, un elemento $x_k \in X$ tal que

$$\widetilde{d}(\langle x_k \rangle, p_k) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Entonces afirmamos que la sucesión

$$(x_k)_{k\geqslant 1} \text{ es de Cauchy en } X. \tag{1}$$

En efecto, para $k \geqslant \ell \geqslant 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_k, x_\ell) &= \widetilde{d}(\langle x_k \rangle, \langle x_\ell \rangle) \\ &\leqslant \widetilde{d}(\langle x_k \rangle, p_k) + \widetilde{d}(p_k, p_\ell) + \widetilde{d}(p_\ell, \langle x_\ell \rangle) \\ &\leqslant \widetilde{d}(p_k, p_\ell) + \frac{2}{2^\ell}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sup_{k,\ell\geqslant N} d(x_k, x_\ell) \Big) \leqslant \lim_{N\to\infty} \Big(\sup_{k,\ell\geqslant N} \widetilde{d}(p_k, p_\ell) \Big) = 0,$$

por lo que $x = (x_k)_{k\geqslant 1}$ es de Cauchy y se demuestra la Afirmación 1.

Además, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} p_k = \widetilde{x}, \text{ en } \widetilde{X}. \tag{2}$$

Para ver esto, observemos que para $\ell \geqslant k \geqslant 1$, tenemos la desigualdad

$$\widetilde{d}(p_k, \langle x_\ell \rangle) \leqslant \widetilde{d}(p_k, \langle x_k \rangle) + \widetilde{d}(\langle x_k \rangle, \langle x_\ell \rangle) \leqslant \frac{1}{2^k} + d(x_k, x_\ell).$$

Tomando un $\epsilon > 0$, y escogemos un N_ϵ tal que

$$d(x_k, x_\ell) < \epsilon, \ \forall\ k, \ell \geqslant N_\epsilon,$$

entonces la desigualdad anterior implica que

$$\widetilde{d}(p_k, \langle x_\ell \rangle) \leqslant \frac{1}{2^k} + \epsilon, \ \forall\ \ell \geqslant k \geqslant N_\epsilon.$$

Si mantenemos $k \geqslant N_\epsilon$ fijo y usando el inciso 1), tenemos que:

$$\widetilde{d}(p_k, \widetilde{x}) = \lim_{\ell\to\infty} \widetilde{d}(p_k, \langle x_\ell \rangle) \leqslant \frac{1}{2^k} + \epsilon, \ \forall\ k \geqslant N_\epsilon.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{d}(p_k, \widetilde{x}) = 0,$$

lo que demuestra la Afirmación 2 y que $(p_k)_{k\geqslant 1}$ converge a $\widetilde{x}$.

■

Definición 5. El espacio métrico $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$, se llama la *completación* de (X, d).

Esta completación tiene propiedades universales que veremos a continuación.

Definición 6. Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es una *función de Lipschitz*, si existe una constante $C \geqslant 0$, tal que

$$\rho\big(f(x), f(x')\big) \leqslant C \cdot d(x, x'), \ \forall\ x, x' \in X.$$

A la constante C, se le llama *constante de Lipschitz* para f.

Proposición 7. Sea (X, d) un espacio métrico y $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ su completación. Si (Y, ρ) es un espacio métrico completo y $f : X \to Y$ es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $C \geqslant 0$ para f, entonces existe una única función continua $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$, tal que

$$\widetilde{f}(\langle x \rangle) = f(x), \ \forall\ x \in X.$$

Más aún, $\widetilde{f}$ es de Lipschitz con constante de Lipschitz C.

Demostración: Sea $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Como

$$\rho\big(f(x_m), f(x_n)\big) \leqslant C \cdot d(x_m, x_n), \ \forall\ m, n \geqslant 1,$$

es obvio que $\big(f(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y; al ser Y completo, esta sucesión converge en Y. Definamos entonces,

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

De este modo hemos construido una función $\varphi : \mathfrak{C}(X,d) \to Y$.

Tenemos entonces que:

$$x \sim x' \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x'). \tag{3}$$

En efecto, si $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ y $x' = (x'_n)_{n\geqslant 1}$ en $\mathfrak{C}(X,d)$, entonces la propiedad de Lipschitz implica que

$$\rho\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \leqslant C \cdot d(x_n, x'_n), \ \forall\ n \geqslant 1,$$

por lo que usando el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \rho\big(f(x_n), f(x'_n)\big) = 0.$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Habiendo demostrado la Afirmación 3, definamos a $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$, por

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = \varphi(x), \ \forall\ x \in \mathfrak{C}(X,d).$$

Claramente,

$$\widetilde{f}(\langle x\rangle) = f(x), \ \forall\ x \in X.$$

Verifiquemos que $\widetilde{f}$ es de Lipschitz con constante de Lipschitz C. Sean $p, p' \in \widetilde{X}$, representados por $p = \widetilde{x}$ y $p' = \widetilde{x}'$, para dos sucesiones de Cauchy $x = (x_n)_{n\geqslant 1}, x' = (x'_n)_{n\geqslant 1} \subset X$. Usando la definición, tenemos:

$$\widetilde{f}(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad \widetilde{f}(p') = \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Esto implica que

$$\rho\big(f(p), f(p')\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(f(x_n), f(x'_n)\big).$$

Notemos además que

$$\rho\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \leqslant C \cdot d(x_n, x'_n), \ \forall\ n \geqslant 1,$$

de donde tomando límites, obtenemos:

$$\rho\big(f(p), f(p')\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \leqslant C \cdot \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = C \cdot \widetilde{d}(p, p').$$

Finalmente, veamos que $\widetilde{f}$ es única. Supongamos entonces que $F : \widetilde{X} \to Y$ es otra función continua tal que $F(\langle x\rangle) = f(x), \ \forall\ x \in X$. Sea $p \in \widetilde{X}$, representada por $p = \widetilde{x}$, para alguna sucesión de Cauchy $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \subset X$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n\rangle = p \ \text{ en } \widetilde{X},$$

por continuidad tenemos que,

$$F(p) = \lim_{n\to\infty} F\big(\langle x_n\rangle\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \varphi(x) = \widetilde{f}(p).$$

∎

Corolario 8. Sean (X, d) un espacio métrico, (Y, ρ) un espacio métrico completo y $f : X \to Y$ una función isométrica, es decir,

$$\rho\big(f(x), f(x')\big) = d(x, x'), \ \forall \ x, x' \in X.$$

Entonces la función $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$, dada en la Proposición 7 es isométrica y $\widetilde{f}(\widetilde{X}) = \overline{f(X)}$.

Demostración: Veamos primero que $\widetilde{f}(\widetilde{X}) = \overline{f(X)}$. Sea $y \in \overline{f(X)}$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Como $\big(f(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$ es de Cauchy en Y, y

$$d(x_m, x_n) = \rho\big(f(x_m), f(x_n)\big), \ \forall \ m, n \geqslant 1,$$

la sucesión $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ es de Cauchy en X. Entonces,

$$y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \widetilde{f}(\widetilde{x}).$$

Finalmente, demostremos que $\widetilde{f}$ es isométrica. Sean $p, q \in \widetilde{X}$ representados por $p = \widetilde{x}$ y $q = \widetilde{z}$, para sucesiones de Cauchy $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ y $z = (z_n)_{n\geqslant 1}$ en X. Por construcción, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\rho\big(\widetilde{f}(p), \widetilde{f}(q)\big) &= \lim_{n\to\infty} \rho\Big(\widetilde{f}\big(\langle x_n \rangle\big), \widetilde{f}\big(\langle z_n \rangle\big)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \rho\big(f(x_n), f(z_n)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \\
&= \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \\
&= \widetilde{d}(p, q).
\end{aligned}$$

■

Corolario 9. Si (X, d) es un espacio métrico completo y $\widetilde{X}$ es su completación, entonces la función $i : X \to \widetilde{X}$ definida por $x \mapsto \langle x \rangle$ es biyectiva.

Demostración: Consideremos la función $id_X : X \to X$ y usando el Corolario 8, obtenemos la función $\widetilde{id}_X : \widetilde{X} \to X$ que es isométrica y biyectiva. Como claramente, la función $\widetilde{id}_X$ es inversa izquierda de i, entonces i es también biyectiva. ■

Si el espacio en cuestión es un espacio normado o con producto interno, entonces de forma similar a lo descrito anteriormente para espacios métricos, podemos completarlos y sus completaciones serán espacios de Banach y de Hilbert repectivamente.

Teorema 10 (Completación de espacios normados)**.** Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widetilde{X}$ y una isometría φ de X sobre X_0, donde X_0 es un subespacio denso de $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isometrías.

Demostración: Sabemos que toda norma induce una métrica en X :

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Por la Proposición 4 y el Corolario 8, existe un espacio métrico completo $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ y una isometría $\varphi : X \to \varphi(X) = X_0$, donde $X_0 = \varphi(X) \subset \widetilde{X}$ es denso en $\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}$ es único salvo isometrías. En este caso faltaría hacer a $\widetilde{X}$ en un espacio vectorial y luego introducir una norma adecuada.

Para definir en $\widetilde{X}$ las dos operaciones algebráicas de un espacio vectorial, consideremos $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ arbitrarios y cualesquiera representantes $(x_n)_{n\geqslant 1} \in \widetilde{x}$ y $(y_n)_{n\geqslant 1} \in \widetilde{y}$. Recordemos que $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$ son las clases de equivalencia de las sucesiones de Cauchy en X. Sea $z_n = x_n + y_n$. Entonces $(z_n)_{n\geqslant 1}$ es de Cauchy en X ya que

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n + y_n - (x_m + y_m)\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

Definamos la suma $\widetilde{z} = \widetilde{x} + \widetilde{y}$ de $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$ como la clase de equivalencia tal que $(z_n)_{n\geqslant 1}$ es representante; por lo tanto $(z_n)_{n\geqslant 1} \in \widetilde{z}$. Esta definición es independiente de la elección de la sucesión de Cauchy que está en $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$. De hecho, la Definición 1 demuestra que si $(x_n)_{n\geqslant 1} \sim (x'_n)_{n\geqslant 1}$ y $(y_n)_{n\geqslant 1} \sim (y'_n)_{n\geqslant 1}$, implica que $(x_n + y_n)_{n\geqslant 1} \sim (x'_n + y'_n)_{n\geqslant 1}$, ya que

$$\left\|x_n + y_n - (x'_n + y'_n)\right\| \leqslant \left\|x_n - x'_n\right\| + \left\|y_n - y'_n\right\|.$$

Similarmente definimos el producto $\alpha\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ del escalar α y $\widetilde{x}$ como la clase de equivalencia que tiene por representante a $(\alpha x_n)_{n\geqslant 1}$. Nuevamente, esta definición es independiente de la elección del representante de $\widetilde{x}$. El elemento cero de $\widetilde{X}$ es la clase de equivalencia que contiene a todas las sucesiones de Cauchy que convergen a cero. Con estas dos operaciones definidas tenemos que $\widetilde{X}$ es un espacio vectorial. Se sigue directamente de la definición que en $X_0 = \varphi(X)$, las operaciones de espacio vectorial inducidas por $\widetilde{X}$, coinciden con aquellas inducidas por X a través de φ.

Más aún, φ induce en $X_0 = \varphi(X)$ una norma $\| \ \|_1$ cuyo valor en cada $\widetilde{y} = \varphi(x) \in X_0$ es $\|\widetilde{y}\|_1 = \|x\|$. La métrica correspondiente en X_0 es la restricción de $\widetilde{d}$ en X_0 ya que φ es isometría. Entonces podemos extender la norma $\| \ \|_1$ a $\widetilde{X}$ haciendo $\|\widetilde{x}\|_2 = \widetilde{d}(\widetilde{0}, \widetilde{x}), \ \forall \ \widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Es claro entonces que $\| \ \|_2$ es una norma en $\widetilde{X}$. ■

Lema 11 (Continuidad del producto interno)**.** Si en un espacio con producto interno se tiene que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Demostración: Usando la desigualdad del tríangulo para números reales y la desigualdad de Schwarz, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= \left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle\right| \\
&\leqslant \left|\langle x_n, y_n - y\rangle\right| + \left|\langle x_n - x, y\rangle\right| \\
&\leqslant \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0,
\end{aligned}$$

ya que $y_n - y \to 0$ y $x_n - x \to 0$. ■

Definición 12. Un isomorfismo $\phi : X \to Y$, donde X y Y son espacios con producto interno sobre el msimo campo es un operador lineal biyectivo que preserva el producto interno, es decir, para todo $x, y \in X$,

$$\langle \phi x, \phi y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Teorema 13 (Completación de espacios con producto interno)**.** Para todo espacio con producto interno $(X, \langle\ \rangle)$ existe un espacio de Hilbert $\widetilde{X}$ y un isomorfismo $\varphi : X \to X_0 = \varphi(X)$, donde X_0 es un subespacio denso de $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo isomorfismos.

Demostración: Sabemos que un producto interno induce una norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Por el Teorema 10, existe un espacio de Banach $\widetilde{X}$ y una isometría φ de X sobre $\varphi(X) \subset \widetilde{X}$ donde $\varphi(X)$ es denso en $\widetilde{X}$. Por continuidad, bajo dicha isometría, hay una correspondencia en las sumas y multiplicación escalar entre los espacios X y $\varphi(X)$, de tal forma que φ es también un isomorfismo tomando a X y $\varphi(X)$ como espacios normados. El Lema 11 demuestra que podemos definir un producto interno en $\widetilde{X}$ dado por:

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle\,,$$

donde $(x_n)_{n\geqslant 1}$ y $(y_n)_{n\geqslant 1}$ son representantes de $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ respectivamete. Haciendo uso de las identidades de polarización[1] observamos que φ es un isomorfismo de X sobre $\varphi(X)$, ambos considerados como espacios con producto interno.

El Teorema 10 también garantiza que $\widetilde{X}$ es único salvo isometrías, es decir, dos completaciones de X, $\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}'$ están relacionadas por una isometría $\psi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$. Usando el mismo argumento cuando consideramos φ, concluimos que ψ debe ser un isomorfismo del espacio de Hilbert $\widetilde{X}$ sobre el espacio de Hilbert $\widetilde{X}'$. ■

Pensemos ahora en un espacio vectorial topológico X. Si quisiéramos completar este espacio, necesitaríamos pensar de forma análoga a como lo hicimos con los espacios métricos, sin embargo, en lugar de considerar sucesiones de Cauchy necesitaríamos filtros de Cauchy, los cuales definiremos más adelante. Antes de ello recordemos algunas definiciones y resultados importantes respecto a los espacios vectoriales topológicos para de ese modo exhibir la completación $\widetilde{X}$ de un espacio vectorial topológico.

Teorema 14. En un espacio vectorial topológico X, existe un sistema fundamental de vecindades del cero, $\mathfrak{R}$ tal que:

1. Todo $V \in \mathfrak{R}$ es absorbente
2. Todo $V \in \mathfrak{R}$ es balanceado
3. Para cada $V \in \mathfrak{R}$, existe $U \in \mathfrak{R}$, tal que $U + U \subset V$.

[1]Si X es un espacio con producto interno sobre $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\,\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\,\big),$$

y para un espacio con producto interno X sobre $\mathbb{C}$, se tiene:

$$\Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\,\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\,\big)$$

y

$$\Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\,\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\,\big).$$

Inversamente, sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $\mathfrak{R}$ una base de filtro en X que satisface las condiciones 1) a 3). Entonces existe un única topología en X para la cual X es un espacio vectorial topológico y para el cual $\mathfrak{R}$ es un sistema fundamental de vecindades del cero.

Proposición 15. Un espacio vectorial topológico es Hausdorff si para todo $a \neq 0$, existe una vecindad V del cero tal que $a \notin V$.

Definición 16. Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Un filtro $\mathscr{F}$ en A se dice que es un filtro de Cauchy si para toda vecindad U de $0 \in X$, existe un $M \in \mathscr{F}$, tal que $M - M \subset U$.

Definición 17. Sea X un espacio vectorial topológico. Dos filtros de Cauchy $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ en X se dice que son equivalentes, $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$, si y sólo si para toda vecindad U de $0 \in X$, existen $A \in \mathscr{F}$ y $B \in \mathscr{G}$ tales que $A - B \subset U$.

Proposición 18. Sea X un espacio vectorial topológico. La relación dada en la Definición 17 es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los filtros de Cauchy en X.

Demostración: Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ filtros de Cauchy en X.

1. Si $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy, entonces para toda vecindad U del $0 \in X$, existe un $A \in \mathscr{F}$ tal que $A - A \subset U$, es decir, $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}$.

2. Si $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$, entonces para toda vecindad U de $0 \in X$, existen $A \in \mathscr{F}$ y $B \in \mathscr{G}$ tales que $A - B \subset U$, de donde $B - A \subset -U$. Como $-U$ y U son ambas vecindades de $0 \in X$, entonces claramente $\mathscr{G} \sim \mathscr{F}$.

3. Sean U, V dos vecindades de $0 \in X$, tales que $V + V \subset U$. Sean $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$ y $\mathscr{G} \sim \mathscr{H}$, entonces existen $A \in \mathscr{F}$, $B, B' \in \mathscr{G}$ y $C \in \mathscr{H}$ tales que $A - B \subset V$ y $B - C \subset V$. Claramente tenemos que $A - (B \cap B') \subset V$ y $(B \cap B') - C \subset V$, de donde,

$$A - C \subset \big(A - (B \cap B')\big) + \big((B \cap B') - C\big) \subset V + V \subset U.$$

   Por lo tanto, $\mathscr{F} \sim \mathscr{H}$.

■

Lema 19. Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces:

1. Si dos filtros en X, $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, convergen a un único punto y $\mathscr{F} \to x$ y $\mathscr{G} \to x$, entonces $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$.

2. Si el filtro $\mathscr{F}$ es tal que $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$, donde $\mathscr{G} \to x$, entonces $\mathscr{F} \to x$.

Demostración:

1. Sean U y V, vecindadades del $0 \in X$, tales que $V - V \subset U$. Como $\mathscr{F}$ converje a x, entonces $V + x \in \mathscr{F}$, pues $V + x$ es vecindad de x, de donde $(V + x) - (V + x) \subset U$, es decir, $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en X, y análogamente con $\mathscr{G}$; más aún, como $V + x$ es vecindad de x y $V + x \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$, ya que $\mathscr{F} \to x$ y $\mathscr{G} \to x$, entonces lo anterior también implica que $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$.

2. Supóngase que $\mathscr{F} \nrightarrow x$, entonces existe un $F' \in \mathscr{F}(x)$ tal que para todo $F \in \mathscr{F}$, $F \not\subset F'$. Como $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$, entonces para $F' - x$ vecindad del $0 \in X$, existen $A \in \mathscr{F}$ y $B \in \mathscr{G}$ tales que $A - B \subset F' - x$, generando una contradicción, pues $A \in \mathscr{F}$.

■

Proposición 20. Si el punto x se adhiere al filtro de Cauchy $\mathscr{F}$ en un subconjunto A de un espacio vectorial topológico X, entonces $\mathscr{F} \to x$.

Demostración: Sean V y W vecindades del cero tales que $W + W \subset V$. Entonces existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A - A \subset W$. Por otro lado, $A \cap (x + W) \neq \varnothing$. Sea $y \in A \cap (x + W)$. Si $z \in A$, entonces $z - y \in W$ y

$$z \in y + W \subset x + W + W \subset x + V.$$

Por lo tanto $A \subset x + V$ y $\mathscr{F} \to x$. ■

Lema 21. Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$ denso. Si todo filtro de Cauchy en A converge a un punto en X, entonces X es completo

Demostración: Sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en X. La colección de todos los conjuntos $V + V'$, donde $V \in \mathscr{F}$ y V' es una vecindad balanceada del cero en X, es una base de un filtro $\mathscr{G}$ en X, ya que si $U, U' \in \mathscr{F}$ y V y V' vecindades balanceadas del cero en X, entonces $(U \cap U') + (V \cap V') \subset (U + V) \cap (U' + V')$. Más aún, $\mathscr{G}$ es un filtro de Cauchy en X, ya que para cada vecindad balanceada V del cero en X, existe $U \in \mathscr{F}$ tal que $U - U \subset V$ y por lo tanto

$$(U + V) - (U + V) \subset V + V + V.$$

Los conjuntos $(U + V) \cap A \neq \varnothing$, pues A es denso en X. Entonces $\mathscr{G}$ induce un filtro de Cauchy $\mathscr{G}_A$ en A y por hipótesis $\mathscr{G}_A \to x \in X$. x se adhiere a $\mathscr{G}$ y como $\mathscr{G}$ es un filtro de Cauchy, por la Proposición 20, $\mathscr{G} \to x$. Por ende $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, y por lo tanto $\mathscr{F} \to x$. ■

Teorema 22 (Completación de espacios vectoriales topológicos)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. Si X es Hausdorff, entonces existe un espacio vectorial topológico Hausdorff completo $\widetilde{X}$ y una función $\varphi : X \to \widetilde{X}$ tal que

1. $\varphi : X \to \widetilde{X}$ es un isomorfismo para la estructura del espacio vectorial topológico.

2. La imagen de X bajo φ es densa en $\widetilde{X}$.

Demostración: Sea $\mathfrak{C}(X)$ el conjunto de todos los filtros de Cauchy en X. Por la Proposición 18, la relación $\sim$ dada en la Definición 17, es de equivalencia en $\mathfrak{C}(X)$, de donde definimos el conjunto cociente $\widetilde{X} = \mathfrak{C}(X)/\sim$.
Ahora definamos la suma y multiplicación escalar en $\widetilde{X}$:
Si $\lambda \neq 0$ es un escalar y $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, entonces el elemento

$$\lambda\tilde{x} \in \widetilde{X} \;\text{ es la clase de equivalencia del filtro } \lambda\mathscr{F} = \{\lambda A : A \in \mathscr{F}\}, \qquad (4)$$

donde $\mathscr{F}$ es un representante de $\widetilde{x}$. El hecho de que esta definición no dependa del representante se sigue de lo siguiente: Si $\mathscr{F}'$ es otro representante de $\widetilde{x}$ y U es una vecindad del $0 \in X$, existen $A \in \mathscr{F}$ y $A' \in \mathscr{F}'$ tales que $A - A' \subset \lambda^{-1}U$, lo que implica que $\lambda A - \lambda A' \subset U$, es decir, $\lambda\mathscr{F} \sim \lambda\mathscr{F}'$. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda\widetilde{x} = \widetilde{0}$, donde $\widetilde{0}$ es la clase de equivalencia del filtro de vecindades del origen.
Sean $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ y $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos representantes de estas clases de equivalencia respectivamente. Denotemos por $\mathscr{F} + \mathscr{G}$ el filtro generado por la base de filtro

$$(\mathscr{F} + \mathscr{G})_0 = \{A + B : A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{G}\}.$$

En efecto $(\mathscr{F} + \mathscr{G})_0$ es base de filtro, ya que ninguno de sus elementos es vacío y si $A, A' \in \mathscr{F}$ y $B, B' \in \mathscr{G}$, entonces

$$(A \cap A') + (B \cap B') \subset (A + B) \cap (A' + B').$$

Además, si $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}'$ y $\mathscr{G} \sim \mathscr{G}'$, y si U, V son vecindades de $0 \in X$, tales que $V + V \subset U$, entonces existen $A \in \mathscr{F}$, $A' \in \mathscr{F}'$, $B \in \mathscr{G}$ y $B' \in \mathscr{G}'$, tales que $A - A' \subset V$ y $B - B' \subset V$, por lo que $(A + B) - (A' + B') \subset V + V \subset U$. Por lo tanto,

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} \text{ es la clase de equivalencia de } \mathscr{F} + \mathscr{G}. \tag{5}$$

Claramente si $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z} \in \widetilde{X}$ y λ, μ son escalares, entonces

1. $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{y} + \widetilde{x}$
2. $\widetilde{x} + (\widetilde{y} + \widetilde{z}) = (\widetilde{x} + \widetilde{y}) + \widetilde{z}$
3. $\widetilde{0} \in \widetilde{X}$ es la clase de equivalencia de los filtros que converjen al cero, y es tal que $\widetilde{x} + \widetilde{0} = \widetilde{x}$, para cada $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$
4. Si $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, entonces $-\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, es tal que $\widetilde{x} + (-\widetilde{x}) = \widetilde{0}$.
5. $\lambda(\widetilde{x} + \widetilde{y}) = \lambda\widetilde{x} + \lambda\widetilde{y}$
6. $(\lambda + \mu)\widetilde{x} = \lambda\widetilde{x} + \mu\widetilde{x}$
7. $(\lambda\mu)\widetilde{x} = \lambda(\mu\widetilde{x})$
8. $1 \cdot \widetilde{x} = \widetilde{x}$

Con lo anterior tenemos que $\widetilde{X}$ es un espacio vectorial en donde hemos definido la suma y multiplicación escalar. Falta demostrar que $\widetilde{X}$ es un espacio vectorial topológico, para lo cual basta encontrar una base de filtro en $\widetilde{X}$ que satisfaga los incisos 1) a 3) en el Teorema 14.

Para ello, sea V una vecindad cerrada y balanceada de $0 \in X$. Definamos el conjunto $\widetilde{U}_V \subset \widetilde{X}$ como la colección de todos los $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ tales que tomando un representante $\mathscr{F} \in \widetilde{x}$, para toda vecindad W del cero en X, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \subset V + W$. La definición de $\widetilde{U}_V$ es independiente del representante de $\mathscr{F} \in \widetilde{x}$. En efecto, sea $\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$ y W una vecindad del cero en X. Escojamos además una vecindad del cero W_1, tal que $W_1 + W_1 \subset W$. Entonces existen $A \in \mathscr{F}$ y $B \in \mathscr{G}$ tales que $A \subset V + W_1$ y $B - A \subset W_1$, de donde

$$B \subset W_1 + A \subset V + W_1 + W_1 \subset V + W.$$

Además tenemos las siguientes propiedades:

$$\text{Si } V \subset W, \text{ entonces } \widetilde{U}_V \subset \widetilde{U}_W \tag{6}$$

$$\widetilde{U}_{V\cap W} \subset \widetilde{U}_V \cap \widetilde{U}_W \tag{7}$$

$$\lambda \widetilde{U}_V = \widetilde{U}_{\lambda V} \tag{8}$$

$$\text{Si } W + W \subset V, \text{ entonces } \widetilde{U}_W + \widetilde{U}_W \subset \widetilde{U}_V \tag{9}$$

La ecuación 7 demuestra que los conjuntos $\widetilde{U}_V$ forman una base de filtro, las ecuaciones 6 y 8 implican que los $\widetilde{U}_V$ son balanceados y la ecuación 9, que satisfacen la condición 3) del Teorema 14. Más aún, cada $\widetilde{U}_V$ es absorbente. En efecto, sea W una vecindad balanceada del $0 \in X$, tal que $W + W \subset V$ y sea $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Tomemos $\mathscr{F} \in \widetilde{x}$ un representante. Como $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A - A \subset W$. Sea $x \in A$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda W$. Podemos suponer que $\lambda \geqslant 1$, entonces

$$A \subset W + x \subset W + \lambda W \subset \lambda V,$$

es decir, $\widetilde{x} \in \lambda \widetilde{U}_V$. Por lo tanto según el Teorema 14, el espacio $\widetilde{X}$ es un espacio vectorial topológico donde la colección de los $\widetilde{U}_V$ es un sistema fundamental de vecindades del cero en $\widetilde{X}$.

Veamos ahora que $\widetilde{X}$ es Hausdorff. Sea $\widetilde{x} \neq \widetilde{0}$ y $\mathscr{F}$ un representante de $\widetilde{x}$. Entonces $\mathscr{F} \nrightarrow 0$, por lo que existe una vecindad V del cero en X tal que $A \not\subset V$, para toda $\mathscr{F} \in \widetilde{x}$. Tomemos una vecindad cerrada y balanceada W del cero tal que $W + W \subset V$. Entonces $\widetilde{x} \notin \widetilde{U}_W$ por lo que la Proposición 15, $\widetilde{X}$ es de Hausdorff.

Para cada $x \in X$, sea $\langle x \rangle$ la colección de todos los filtros que tienden a x. Por el Lema 19, $\langle x \rangle$ es exactamente una clase de equivalencia de $\mathfrak{C}(X)/\sim$, es decir, $\langle x \rangle \in \widetilde{X}$. La función $\varphi : X \to \widetilde{X}$, dada por $x \mapsto \langle x \rangle$ es lineal claramente. También es inyectiva pues X es de Hausdorff. Sea $X_0 = \varphi(X)$. Si para una vecindad cerrada balanceada V de $0 \in X$, definimos $V_0 = \varphi(V) \subset X_0$, entonces

$$V_0 = \widetilde{U}_V \cap X_0 \tag{10}$$

En efecto, si $\langle x \rangle \in V_0$, entonces $\langle x \rangle \in X_0$. Más aún, si $x \in V$ y $\mathscr{F} \in \langle x \rangle$, entonces para toda W vecindad de $0 \in X$, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que

$$A \subset x + W;$$

pero entonces $A \subset V + W$, es decir, $\langle x \rangle \in \widetilde{U}_V$. Inversamente, sea $\langle x \rangle \in \widetilde{U}_V \cap X_0$. Debemos demostrar que $x \in V$. Supóngase que $x \notin V$, entonces como V es cerrado existe una vecindad W de $0 \in X$, tal que

$$V \cap (x + W) = \varnothing. \tag{11}$$

Sea W_1 una vecindad balanceada de $0 \in X$ tal que $W_1 + W_1 \subset W$. Si ahora, $\mathscr{F} \in \langle x \rangle$, entonces existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \subset x + W_1$ y como $\langle x \rangle \in \widetilde{U}_V$, existe $B \in \mathscr{F}$ tal que $B \subset V + W_1$, pero esto es imposible ya que

$$(x + W_1) \cap (V + W_1) = \varnothing.$$

En efecto, si $x + w_1 = v + w_1'$, donde $v \in V, w_1, w_1' \in W_1$, entonces

$$v = x + w_1 - w_1' \in x + W_1 + W_1 \subset x + W,$$

contradiciendo la ecuación 11. Por lo tanto $x \in V$, y por lo tanto la ecuación 10 queda demostrada. Entonces de dicha ecuación, $x \mapsto \langle x \rangle$ es un isomorfismo de X sobre $X_0 \subset \widetilde{X}$.

El subespacio X_0 es denso en $\widetilde{X}$. En efecto, sea $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ y sea $\widetilde{U}_V$ una vecindad del cero en $\widetilde{X}$. Si $\mathscr{F} \in \widetilde{x}$, entonces existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A - A \subset V$. Tomemos un $x \in A$; entonces tenemos que $x - A \subset V$. Pero el conjunto $\{x\}$ pertenece al filtro formado por todos los conjuntos que contienen a x, y este filtro pertenece a la clase $\langle x \rangle \in X_0$. Por lo tanto $\langle x \rangle - \widetilde{x} \in \widetilde{U}_V$, es decir, $\langle x \rangle \in \widetilde{x} + \widetilde{U}_V$.

Finalmente veamos que $\widetilde{X}$ es completo. Basta usar el Lema 21. Sea $\mathscr{F}_0$ es un filtro de Cauchy en X_0, entonces $\mathscr{F}_0 = \varphi(\mathscr{F})$ donde $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en X bajo el isomorfismo $\varphi : X \to X_0$. Sea $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ la clase de equivalencia de $\mathscr{F}$. Demostremos que $\mathscr{F}_0 \to \widetilde{x}$. Sea V una vecindad cerrada y balanceada de $0 \in X$; entonces existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A - A \subset V$. Sea $A_0 \in \mathscr{F}_0$ la imagen de A en X_0. Entonces afirmamos que $A_0 \subset \widetilde{x} + \widetilde{U}_V$, lo que demostraría lo deseado. Sea $\langle x \rangle \in A_0$ arbitrario y $x \in A$; tenemos que $\{x\} - A \subset V$. Como $\{x\}$ es elemento del filtro formado por todos los subconjuntos de X que contienen a x, la última relación implica que $\langle x \rangle - \widetilde{x} \in \widetilde{U}_V$. Como $\langle x \rangle$ es arbitrario en A_0, entonces $A_0 \subset \widetilde{x} + \widetilde{U}_V$. ■

Definición 23. Sea X un álgebra topológica. Se dice que X es un álgebra topológica completa siempre que el espacio vectorial topológico de X sea completo, es decir, que todo filtro de Cauchy converja.

Lema 24. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \in \tau$ y $B \subset X$, entonces

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

Demostración: Si $x \in A \cap \overline{B}$ entonces para toda vecindad V_x de x, el conjunto $V_x \cap A$ es una vecindad de x. Por lo que $(V_x \cap A) \cap B \neq \varnothing$, es decir, $x \in \overline{A \cap B}$. ■

Si X es un espacio vectorial topológico Hausdorff, hemos visto que existe una completación $\widetilde{X}$ Hausdorff de X, la cual está dotada de una estructura de espacio vectorial topológico con operaciones vectoriales continuas. Más aún, podemos identificar a X con el subespacio $X_0 \subset \widetilde{X}$ mediante el isomorfismo $\varphi : X \to \widetilde{X}$ donde, $x \mapsto \langle x \rangle$, donde $\langle x \rangle \in \widetilde{X}$ es la clase de equivalencia de todos los filtros de Cauchy que convergen a x; es decir, $\varphi(X) = X_0 \subset \widetilde{X}$ y vemos a X encajado en $\widetilde{X}$.

Con esta identificación podemos decir que las cerraduras en $\widetilde{X}$ de vecindades que pertenecen a un sistema fundamental $\mathfrak{R}$ de vecindades del $0 \in X$, forman un sistema fundamental de vecindades del cero en $\widetilde{X}$. En efecto, sea $\widetilde{U}$ una vecindad cerrada de $\widetilde{0} \in \widetilde{X}$ y sea $U = \widetilde{U} \cap X$. Entonces U es una vecindad de $0 \in X$, por lo que existe $V \in \mathfrak{R}$, tal que $V \subset U$, y consecuentemente $\overline{V}_{\widetilde{X}} \subset \overline{U}_{\widetilde{X}}$[2]. Sea W una vecindad abierta de $0 \in X$, tal que $W \subset V$. Existe una vecindad abierta $\widetilde{W}$ de $\widetilde{0} \in \widetilde{X}$, tal que $W = \widetilde{W} \cap X$, pero por el Lema 24, y dado que X es denso en $\widetilde{X}$, tenemos que

$$\widetilde{W} = \widetilde{W} \cap \overline{X}_{\widetilde{X}} \subset \overline{W \cap X}_{\widetilde{X}} = \overline{W}_{\widetilde{X}} \subset \overline{V}_{\widetilde{X}},$$

es decir, $\overline{V}_{\widetilde{X}}$ es una vecindad de $\widetilde{0} \in \widetilde{X}$.

Recordemos algunos resultados importantes relacionados con grupos y anillos topológicos, así como uniformidades.

[2] La expresión $\overline{F}_{\widetilde{X}}$, se refiere a la cerradura de F en $\widetilde{X}$.

Teorema 25. Sea G un grupo topológico conmutativo. Entonces las funciones x^{-1} y xy son uniformemente continuas en G y $G \times G$, respectivamente. Más aún, G admite una completación de Hausdorff $\widetilde{G}$, y $\widetilde{G}$ es conmutativa.

Proposición 26. Sea $A \subset X$ denso en el espacio topológico X, y $f : A \to X'$ una función donde X' es un espacio uniforme de Hausdorff completo. Entonces f se puede extender por continuidad a X si y sólo si, para cada $x \in X$, la imagen bajo f de la traza[3] en A del filtro vecindad de $x \in X$ es una base de filtro de Cauchy en X'.

Definición 27. Cuando hablamos de la uniformidad de un anillo topológico, nos referimos a la uniformidad de su grupo aditivo; en particular decimos que X es un anillo completo si el grupo aditivo de X es completo.

Ahora, si X es un álgebra topológica comnutativa *(es decir, X es conmutativa como álgebra)* con multiplicación continua, entonces la multiplicación *(de anillo)* en X considerada como un mapeo bilineal de $X \times X$ hacia X es uniformemente continua según el Teorema 25; por lo tanto, por el principio de extensión de identidades, se puede extender de manera única a la completación $\widetilde{X}$, de tal modo que $\widetilde{X}$ es un álgebra topológica con multiplicación continua. Sin embargo, el argumento anterior no es válido si el álgebra X no es conmutativa, aún cuando la multiplicación sea continua. Esto último se debe a que las correspondientes estructuras uniformes (derecha e izquierda) definidas por la continuidad de la multiplicación en el anillo, no son necesariamente iguales, por lo que la multiplicación no es una función bilineal uniformemente continua como antes.

No obstante, la continuidad de la multiplicación definida en un álgebra topológica X es suficiente para extender dicha operación a la completación $\widetilde{X}$ y preservar su continuidad. En efecto: Sea X un anillo topológico Hausdorff; como grupo aditivo, X puede considerarse como un subgrupo denso de un grupo conmutativo de Hausdorff y completo $\widetilde{X}$, el cual está determinado salvo isomorfismos por el Teorema 25. Para considerar a X como un subanillo del anillo completo, es necesario extender la función xy por continuidad al espacio $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$. La posibilidad de dicha extensión se sigue del siguiente Teorema de caracter general:

Teorema 28. Sean E, F y G tres grupos conmutativos de Hausdorff y completos. Sea $A \subset E$ y $B \subset F$ subgrupos densos. Si $f : A \times B \to G$ es una función continua $\mathbb{Z}-$bilineal[4], entonces f puede extenderse por continuidad a una función continua $\mathbb{Z}-$bilineal de $E \times F$ en G.

Demostración: Sea $(x_0, y_0) \in E \times F$ arbitrario y $\mathscr{U}, \mathscr{B}$ las trazas en A y B de los filtros vecindades de x_0 y y_0, respectivamente[5]. Para demostrar que f se puede extender por continuidad, es suficiente demostrar que $f(\mathscr{U} \times \mathscr{B})$ es una base de filtro

[3] Sea $B \subset Y$ y $\mathscr{F}$ un filtro en Y. La traza de $\mathscr{F}$ en B es la familia $\{F \cap B : F \in \mathscr{F}\}$.

[4] f se dice que es $\mathbb{Z}-$bilineal, si para todo $x, x' \in A$ y todo $y, y' \in B$, se cumple que

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$$

y

$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y').$$

[5] $\mathscr{U}$ y $\mathscr{B}$ son filtros por hipótesis.

de Cauchy en G, por la Proposición 26. Considérese la identidad

$$f(x', y') - f(x, y) = f(x - x_1, y' - y) + f(x' - x, y' - y_1) + \\ + f(x' - x, y_1) + f(x_1, y' - y).$$

Demostraremos que tomando (x, y) y (x', y') en un conjunto suficientemente pequeño de $\mathscr{U} \times \mathscr{B}$, y tomando x_1 y y_1 adecuadamente, podemos hacer cada término del lado derecho de la ecuación anterior muy pequeña. Sea W cualquier vecindad de 0 en G; como f es continua en $(0, 0) \in A \times B$, existe un conjunto $U \in \mathscr{U}$ y $V \in \mathscr{B}$ tal que $f(x' - x, y' - y) \in W$, siempre que $x, x' \in U$ y $y, y' \in V$. Sean $x_1 \in U$ y $y_1 \in V$; entonces para todo $x, x' \in U$ y $y, y' \in V$, tenemos que

$$f(x' - x, y' - y_1) + f(x - x_1, y' - y) \in W + W. \tag{12}$$

Por otro lado, la función $x \mapsto f(x, y_1)$ es continua en A; entonces existe un conjunto $U' \subset U$, tal que $U' \in \mathscr{U}$ y siempre que $x, x' \in U'$, tenemos que $f(x' - x, y_1) \in W$. Análogamente, existe $V' \subset V$ donde $V' \in \mathscr{B}$ tal que siempre que $y, y' \in V'$, entonces $f(x_1, y' - y) \in W$. Por lo tanto, si $(x, y), (x', y') \in U' \times V'$, entonces

$$f(x', y') - f(x, y) \in W + W + W + W,$$

lo que demuestra la existencia de la extensión $\widetilde{f}$ de f. El hecho de que $\widetilde{f}$ es $\mathbb{Z}-$bilineal es inmediato del principio de extensión de identidades. ■

Apliquemos el Teorema 28 a un anillo topológico de Hausdorff X, y tomando $E, F, G = \widetilde{X}$ y por $A, B = X$, donde f es la aplicación $\mathbb{Z}-$bilineal $(x, y) \mapsto xy$, la cual por hipótesis es continua. Denotamos entonces de nueva cuenta por xy al valor de la extensión en $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$; esta función tiene la ley de composición en $\widetilde{X}$ y decir que es $\mathbb{Z}-$bilineal significa que es distributiva en ambos lados respecto a la adición; además es asociativa por el principio de extensión de identidades. Por lo que tenemos el siguiente resultado:

Proposición 29. Un anillo topológico de Hausdorff X es isomorfo a un subanillo denso de un anillo completo de Hausdorff $\widetilde{X}$, el cual está determinado salvo isomorfismos.

Por lo tanto, concluimos que:

Teorema 30. Si X es un álgebra topológica con multipliación continua, entonces la completación $\widetilde{X}$ del espacio vectorial topológico subyacente X, es nuevamente un álgebra topológica con multiplicación continua.

Consideremos ahora anillos normados y demostremos el Teorema de Gelfand para el caso en que tenemos unidad en el anillo. Después haremos algunas observaciones cuando consideramos álgebras conmutativas sin unidad.

Definición 31. Una anillo normado es un espacio de Banach complejo en el que está definido la multiplicación asociativa que es intercambiable respecto a la multiplicación por un complejo, distributiva respecto a la suma y continua en cada factor. Por lo tanto supondremos que la multiplicación es conmutativa.

Teorema 32 (Gelfand)**.** Para todo anillo normado $\mathcal{R}$, existe un anillo $\mathcal{R}'$ el cual es topológica y algebráicamente isomorfo a $\mathcal{R}$ y satisface:

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \quad \text{y} \quad \|e\| = 1. \tag{13}$$

Demostración: Para todo $x \in \mathcal{R}$, definimos el operador T_x por

$$T_x y = xy.$$

Por definición, este operador es lineal.
En el anillo $\mathcal{Q}$ de todos los operadores lineales del espacio de Banach $\mathcal{R}$ a el mismo, los operadores T_x forman un subanillo $\mathcal{R}'$ con elemento unitario[6].

Demostremos que $\mathcal{R}'$ es un anillo normado bajo la norma

$$\|T_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\|.$$

Para ello basta probar que $\mathcal{R}'$ es completo, es decir, que $\mathcal{R}'$ es cerrado en $\mathcal{Q}$.

Por asociatividad de la multiplicación tenemos que

$$T_x yz = x(yz) = (xy)z = T_x y \cdot z.$$

Esta propiedad caracteriza a los operadores en $\mathcal{R}'$, ya que si T es un operador, $y, z \in \mathcal{R}$ arbitrarios y se cumple que $T(yz) = Ty \cdot z$, entonces si $Te = x$, tenemos que

$$Ty = T(ey) = Te \cdot y = xy,$$

es decir, T es T_x.

Supóngase ahora que los operadores $T_n \in \mathcal{R}'$ convergen fuertemente a un operador T, es decir, $T_n x$ converge a Tx en la norma del espacio $\mathcal{R}$, para todo $x \in \mathcal{R}$. Por la continuidad de la multiplicación respecto al primer factor, tenemos que

$$T(xy) = \lim T_n(xy) = \lim T_n x \cdot y = Tx \cdot y,$$

de donde $T \in \mathcal{R}'$. Por lo tanto, $\mathcal{R}'$ es cerrado en $\mathcal{Q}$, no sólo en el sentido de convergencia uniforme, sino de convergencia fuerte.

Obviamente, los anillos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son algebráicamente isomorfos. Demostremos que también son topológicamente isomorfos: Tenemos que[7]

$$\|T_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\| \geqslant \left\| x \frac{e}{\|e\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|e\|}, \tag{14}$$

o equivalentemente

$$\|x\| \leqslant \|e\| \, \|T_x\|.$$

Por lo tanto, el mapeo $T_x \mapsto x$ del espacio $\mathcal{R}'$ sobre el espacio $\mathcal{R}$, es continua; pero dado que ambos espacios son completos, por el Teorema de Banach, el mapeo inverso $x \mapsto T_x$, también es continuo, por lo que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son topológicamente isomorfos. Notemos además que la norma en $\mathcal{R}'$ tiene la propiedad 13 del Teorema 32. Notemos que además que hemos demostrado que *todo anillo normado es topologica y algebráicamente isomorfo a un anillo normado de operadores en un espacio de Banach.* ■

Observación 33. Si la condición 13 del Teorema 32 se satisface en el anillo $\mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son isométricos. En efecto,

[6] El elemento unitario es el operador unitario E generado por el elemento unitario $e \in \mathcal{R}$.
[7] Notemos que como $e \neq 0$, entonces $\|e\| > 0$.

de la ecuación 14, tenemos que $\|x\| \leqslant \|T_x\|$.
Por otro lado sabemos que $\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$, de donde

$$\|T_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\| \leqslant \|x\| \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|y\| = \|x\| .$$

Por lo tanto $\|T_x\| = \|x\|$.

Corolario 34. El producto xy es continuo respecto a ambos factores.

En el Teorema de Gelfand 32, podemos considerar de forma más generalizada, un álgebra conmutativa X y una norma completa $\| \ \|$ en X que haga la multiplicación continua por separado. Entonces existe una norma $| \ |$ en X, tal que $|xy| \leqslant |x| \, |y|$, $\forall \ x, y \in X$ donde además $| \ |$ es equivalente a $\| \ \|$. Más aun, si X tiene unidad e, la norma puede tomarse de tal forma que $|e| = 1$.

En este caso, la norma del operador definida por

$$\sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\|$$

en la demostración del Teorema de Gelfand 32, es la norma del operador y la denotaremos por $\|x\|_{op}$.

De hecho, como se vió en la demostración, cuando X tiene unidad e, podemos tomar $| \ | = \| \ \|_{op}$, donde además $|e| = 1$. Sin embargo, para álgebras sin unidad, se suele hacer uso de la unitización: Sea $X_e = A \times \mathbb{C}$ la unitización del álgebra X, y $\| \ \|_e$ una extensión[8] de la norma $\| \ \|$ sobre X_e definida por

$$\|(x, \alpha)\|_e = \|x\| + |\alpha| , \ (x, \alpha) \in X_e.$$

De este modo, X puede verse como una subálgebra de $B(X_e)$, donde $B(X_e)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $\| \ \|_e -$acotados en X_e, y la norma equivalente a $\| \ \|$ es la norma operador $\| \ \|_e$ en X_e restringida a X, es decir,

$$|x| = \big(\|(x, 0)\|_e \big)_{op(e)} = \sup_{\|y\| + |\beta| \leqslant 1} \|xy + \beta x\| .$$

Con $op(e)$ nos referimos a la norma operador en X_e. Notemos simplemente que esta norma incluye un componente escalar extra que proviene fuera del álgebra X.

Además observemos que la unitización para el caso de álgebras sin unidad es necesaria, ya que de otro modo la función $\varphi : X \to B(X)$, dada por $x \mapsto T_x$ no necesariamente es un isomorfismo algebráico[9], no habiendo relación entre $\|x\|$ y $\|x\|_{op}$. Por ejemplo, si hacemos $xy = 0, \ \forall \ x, y \in X$, donde X es un espacio de Banach con la multiplicación tirivial, entonces claramente $T_x = 0 \ \forall \ x \in X$.
De este modo, si X es un álgebra conmutativa con o sin unidad, el Teorema 32 es válido, tomando al álgebra como tal si tiene unidad y si carece de unidad se considera su respectiva unitización X_e.

No obstante, es cierto que la unitización suele, en algunos casos, complicar la situación. Es en este sentido, que si se pudiera encontrar una norma equivalente a $\big(\|(\cdot, 0)\|_e \big)_{op(e)}$, en la que sólo se consideren elementos del álgebra X, podríamos prescindir de la unitización y decir que la condición $|e| = 1$ en el Teorema de Gelfand 32 se cumple independientemente de si el álgebra tiene o no unidad.

[8] También conocida como extensión ℓ_1.

[9] Como antes, $B(X)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $\| \ \| -$acotados, el cual en la demostración del Teorema 32 denotamos por $\mathcal{Q}$.

Definición 35. Una norma $\| \ \|$ se dice que es absorbentemente convexa en X ó simplemente $A-$convexa, si para cada $x \in X$, existe una constante $M(x) \geqslant 0$ que depende de x tal que

$$\|xy\| \leqslant M(x)\,\|y\|\,,\ \forall\ y \in X.$$

Más aún, la norma $\| \ \|$ se dice que es submultiplicativa o $m-$convexa en X si

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|\,,\ \forall\ x, y \in X.$$

Notemos que toda norma $m-$convexa es $A-$convexa pero no en el otro sentido.

Proposición 36. Sea X un álgebra conmutativa con o sin unidad. Dada una norma $\| \ \|$ $A-$convexa en X completa o incompleta, definimos la norma $\| \ \|_M$ por:

$$\|x\|_M = \text{máx}\left\{\|x\|\,, \|x\|_{op}\right\},\ x \in X.$$

Obviamente, $\| \ \|_M$ es una norma en X $m-$convexa y $\| \ \|$ es $m-$convexa si y sólo si $\| \ \|_M = \| \ \|$. Notemos además que si $\| \ \|_{op}$ no es norma, entonces $\| \ \|_M$ sí lo es.
Además, la norma $\| \ \|_M$ puede utilizarse para demostrar el Teorema de Gelfand 32; en particular, la norma $\left(\|(\cdot, 0)\|_e\right)_{op(e)}$ proveniente de la unitización, es equivalente a $\| \ \|_M$. Esto último se sigue de las desigualdades:

$$\| \ \|_M \leqslant \left(\|(\cdot, 0)\|_e\right)_{op(e)} \leqslant \| \ \| + \| \ \|_{op} \leqslant 2\,\| \ \|_M\,.$$

De este modo, al hacer uso de la norma $\| \ \|_M$ en lugar de $\left(\|(\cdot, 0)\|_e\right)_{op(e)}$, podemos evitar el escalar extra que define esta norma.

Bibliografía

1. J. Arhippainen, J. Kauppi, *On A-convex Norms on Commutative Algebras.*
2. G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis,* Academic Press, New York, 1966.
3. N. Bourbaki, *General Topology: Chapters 1-4,* Springer-Verlag, New York, 1989.
4. I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov, *Commutative Normed Rings,* Chelsea Publ. Comp., Bronx New York, 1964.
5. H. G. Heuser, *Functional Analysis,* John Wiley and Sons, New York, 1982.
6. J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions Vol. I,* Addison-Wesley Publ. Comp., Reading Massachusetts, 1966.
7. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of functions and Functional Analysis,* Dover Publ. Inc., Mineola New York, 1999.
8. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis,* Prentice Hall, New York, 1970.
9. E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley and Sons, New York, 1989.
10. A. Mallios, *Topological Algebras Selected Topics,* Elsevier Science Publ., New York, 1986.
11. W. Rudin, *Functional Analysis,* McGraw-Hill Science, New York, 1991.
12. F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,* Academic Press, New York, 1967.
13. W. Zelazko, *Banach Algebras,* Elsevier Publ. Comp. and Polish Sc. Pub., Warsaw, 1973.