



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

“VIGILANCIA EN SEGMENTOS DE LÍNEAS  
CON GUARDIAS QUE ATRAVIESAN  
A LO MÁS  $k$  SEGMENTOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)

P R E S E N T A:

ARMANDO RONQUILLO JORGE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE URRUTIA GALICIA

MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Vigilancia en segmentos de líneas con guardias que atraviesan a  
lo más  $k$  segmentos

Ronquillo Jorge, Armando

2008

A mamá y papá

# Agradecimientos

A Bernardo Ábrego, Silvia Fernández y Jorge Urrutia: por la oportunidad que me brindaron para trabajar con ellos.

A Hernán González: por sus puntuales y muy precisas observaciones para afinar esta obra.

A CONACYT, DGEP-UNAM y al Programa de Posgrado de Ciencia e Ingeniería de la Computación: por las subvenciones recibidas.

...me digo alegre y humilde:  
saber que uno no sabe  
es comenzar a saber.

- *Carlos Pellicer* -

# Índice general

Índice de figuras	VII
Introducción	x
<b>1. Conceptos básicos de Matemáticas y Ciencias de la Computación</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción	1
1.2. Teoría de Gráficas	2
1.3. Polígonos simples y ortogonales	6
1.4. Sucesiones permisibles	10
1.5. Complejidad computacional	14
1.5.1. ¿Qué es un algoritmo?	14
1.5.2. La notación $O$	15
1.5.3. Algoritmos polinomiales	15
1.5.4. Problemas $NP$ -completos	15
<b>2. Vigilancia de objetos geométricos</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción	17
2.2. Visibilidad en polígonos	18
2.2.1. Una galería de arte y un polígono simple	20
2.3. Visibilidad en segmentos de líneas	22
<b>3. Una breve revisión del problema de la Galería de Arte</b>	<b>25</b>
3.1. Introducción	25
3.2. Teorema de la Galería de Arte	25
3.2.1. Teorema de la Galería de Arte en polígonos simples	26
3.2.2. Teorema de la Galería de Arte en polígonos ortogonales	31
3.3. Vigilancia de Galerías de Arte rectangulares	33

3.4. Iluminación con reflectores . . . . .	35
3.5. Vigilancia de familias de segmentos de líneas . . . . .	39
3.5.1. Vigilancia del plano . . . . .	39
<b>4. Un nuevo enfoque en el problema de la Galería de Arte</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Vigilancia en segmentos de líneas . . . . .	46
4.3. Vigilancia en polígonos . . . . .	60
4.3.1. Vigilancia en polígonos simples . . . . .	60
4.4. Conclusiones: problemas abiertos y conjeturas . . . . .	75
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>

# Índice de figuras

1.1. La línea y el segmento de línea. . . . .	2
1.2. Representación de una gráfica $G$ . . . . .	3
1.3. Representaciones de una gráfica $K_4$ . . . . .	3
1.4. Un camino $P^3$ de la gráfica $G$ . . . . .	4
1.5. Un ciclo $C^4$ . . . . .	4
1.6. Una gráfica $G$ con tres componentes conexas. . . . .	5
1.7. Representación de una 3-coloración en una gráfica $G$ . . . . .	5
1.8. Un emparejamiento perfecto en una gráfica. . . . .	6
1.9. Un polígono simple. . . . .	7
1.10. Un polígono ortogonal. . . . .	7
1.11. Un polígono convexo. . . . .	8
1.12. Un polígono simple $P'$ con 2 hoyos. . . . .	8
1.13. Dos triangulaciones distintas de un polígono simple. . . . .	9
1.14. La gráfica dual de una triangulación de un polígono simple $P$ . . . . .	10
1.15. El conjunto de puntos $Q$ , el círculo $C$ y la línea $\ell$ . . . . .	11
1.16. La proyección de los puntos de $Q$ en la línea $\ell$ . . . . .	11
1.17. Dos puntos de $Q$ con la misma proyección en $\ell$ . . . . .	12
1.18. El orden invertido de la proyección de $Q$ en $L$ . . . . .	13
2.1. Dos puntos visibles en el interior de $P$ . . . . .	18
2.2. El polígono de visibilidad $V(u)$ del punto $u$ . . . . .	19
2.3. El núcleo de un polígono simple $P$ . . . . .	19
2.4. Van Gogh, Los girasoles, 1888, óleo sobre lienzo. . . . .	20
2.5. El punto $b$ es visible desde $a$ , pero $c$ no es visible desde $a$ . . . . .	22
2.6. Ilustración de la posición de guardias. . . . .	23
2.7. Ilustración de la posición de guardias. . . . .	23

2.8. Posición general y posición ortogonal. . . . .	24
3.1. Una diagonal $\overline{uw}$ en un polígono simple $P$ . . . . .	27
3.2. Una diagonal $\overline{vv'}$ en un polígono simple $P$ . . . . .	27
3.3. Dos subpolígonos de un polígono simple $P$ . . . . .	28
3.4. Triangulación de un polígono $P$ con vértices coloreados. . . . .	30
3.5. Un polígono peineta. . . . .	30
3.6. Una cuadrilaterización de un polígono ortogonal y su 4-coloración. . . . .	32
3.7. Un polígono peineta ortogonal. . . . .	32
3.8. Una galería de arte rectangular $T$ . . . . .	33
3.9. La gráfica dual $G(T)$ de la galería mostrada en la Figura 3.8. . . . .	34
3.10. Retiro y devolución de un rectángulo en la galería $T$ . . . . .	35
3.11. Un polígono convexo $P$ y un triángulo $T$ . . . . .	36
3.12. Un polígono convexo $P$ , un triángulo $T$ y el círculo $C$ . . . . .	37
3.13. Ilustración de la prueba del problema de los reflectores (caso $u \neq w$ ). . . . .	38
3.14. Ilustración de la prueba del problema de los reflectores (caso $u = w$ ). . . . .	38
3.15. El segmento $s_i$ y su extensión. . . . .	40
3.16. La familia de segmentos, sus extensiones y la partición $R$ . . . . .	40
3.17. La gráfica dual $D$ de la partición del plano obtenida por extensiones de una familia de segmentos. . . . .	41
3.18. La gráfica dual $D$ y el vértice auxiliar $x$ . . . . .	42
3.19. Una familia de $n$ segmentos de líneas en la que son necesarios $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardias. . . . .	44
4.1. En una familia de dos segmentos de línea los puntos $q$ y $s$ son 1-visibles desde $p$ , pero $r$ no lo es. Sin embargo, $r$ es 2-visible desde $p$ . . . . .	46
4.2. En un polígono simple los puntos $q$ y $s$ son 1-visibles desde $p$ , pero $r$ no lo es. Sin embargo, $r$ es 2-visible desde $p$ . . . . .	47
4.3. Representación de $n$ segmentos de líneas paralelas en el plano $\mathbb{R}^2$ . . . . .	47
4.4. El punto $q$ no es 1-visible desde el punto $p$ . . . . .	48
4.5. Los puntos $p$ y $q$ son 1-visibles desde el punto $r$ . . . . .	49
4.6. Los puntos $p$ y $q$ son 1-visibles desde el punto $r$ , pero el punto $q'$ no es 1-visible desde $r$ . . . . .	49
4.7. Los puntos $p, q, r$ y $q'$ son 1-visibles desde el punto $r'$ . . . . .	50
4.8. Los segmentos de líneas $s_1$ y $s_2$ . . . . .	51
4.9. Los puntos $p, q, r$ y $q'$ son 1-visibles desde el punto $r'$ . . . . .	52
4.10. Tres segmentos de líneas paralelas en el plano. . . . .	53

---

4.11. Los segmentos de líneas paralelas $s_1$ y $s_2$ . . . . .	54
4.12. Los segmentos de líneas paralelas $s_2$ y $s_3$ . . . . .	55
4.13. Tres segmentos de líneas paralelas en el plano, sus correspondientes líneas auxiliares y las regiones determinadas por ellas (zona sombreada). . . . .	56
4.14. Representación de las regiones comunes (en gris) en una familia de 3 segmentos de líneas. . . . .	57
4.15. Dos poligonales que acotan a cada región común. . . . .	58
4.16. Un polígono simple $P$ . . . . .	61
4.17. Vigilancia del polígono $P$ con un 1-guardia colocado en el punto $q$ . . . . .	61
4.18. Vigilancia del polígono $P$ con un guardia convencional colocado en el punto $q$ . . . . .	62
4.19. Vigilancia del polígono $P$ con un 2-guardia colocado en el punto $q$ . . . . .	62
4.20. El polígono $P$ con 10 vértices. . . . .	63
4.21. La línea $\ell$ y sus paralelas. . . . .	64
4.22. Una banda de la partición $R$ . . . . .	65
4.23. Ilustración de la prueba del Lema 4.2. . . . .	66
4.24. Una banda $F$ y su representación en un arreglo $A$ . . . . .	67
4.25. Una poligonal $w$ y una línea $\ell$ . . . . .	68
4.26. Un polígono $P$ con un número par de vértices. . . . .	69
4.27. Un polígono $P$ con un número impar de vértices. . . . .	70
4.28. Un polígono $P$ con un número impar de vértices. . . . .	70
4.29. La sublínea $\ell_1$ se detiene en un vértice distinto al de los vértice de $e$ . . . . .	71
4.30. La sublínea $\ell_1$ se detiene en un vértice de la arista $e$ . . . . .	71
4.31. Cuatro 1-guardias vigilan el plano con esta familia de segmentos de líneas como obstáculos. . . . .	76
4.32. Cinco 1-guardias vigilan el plano con esta familia de segmentos de líneas ortogonales como obstáculos. . . . .	77

# Introducción

Los problemas de vigilancia de polígonos, o como se les conoce en la Geometría Computacional, Problemas de Vigilancia de Galerías de Arte, son un tema clásico dentro de esta área de investigación. El problema es el siguiente: supongamos que queremos vigilar el interior de una galería arte, modelada por un polígono simple  $P$  con  $n$  vértices. ¿Cuántos guardias serán suficientes para vigilar el interior de  $P$ ?

Existen numerosas variaciones al problema original de vigilancia de galerías de arte: problemas en donde se utilizan guardias con cierto ángulo de vigilancia o en donde los guardias vigilan los  $360^\circ$  dentro de los polígonos, etc.

En este proyecto de tesis estudiamos una variante del problema anterior de vigilancia de galerías de arte que surge a partir de cobertura de módems inalámbricos. Es bien conocido, que al intentar conectarse a una red a través de un módem inalámbrico, el problema principal es de la presencia de obstáculos, como las paredes de un edificio. En general, si la distancia de una computadora a un módem no es muy grande y no hay obstáculos entre una computadora y un módem, la conexión módem-computadora se da sin ningún problema.

Más detalladamente, es este trabajo tratamos con problemas que involucraban a guardias con una potencia extra en la vigilancia, es decir, cuya vigilancia pudiera atravesar un número  $k$  de paredes (tal como la señal de los módems), donde el parámetro  $k$  dependió de la potencia que le asignamos a nuestros guardias.

El único antecedente parecido que conocemos, es el llamado *Problema de Superman* [20]. En términos generales, este problema puede explicarse de la siguiente forma: supongamos que tenemos un objeto preciado dentro de un edificio, y queremos asegurarnos que nadie lo vea. Nuestro problema es que *Superman* tiene visión de rayos- $x$  y puede ver a través de las paredes de nuestro edificio. ¿Cuántas paredes tendremos que cubrir con placas de plomo para que *Superman* no pueda ver lo que guardamos?

Las posibles aplicaciones de estos tipos de problemas son variados, desde la transmisión de señales inalámbricas hasta en el *motion planning* de mecanismos móviles autónomos. Pero por

si sólo estos problemas de vigilancia son interesantísimos, ya que representan todo un reto al tratar de desentrañar sus propiedades matemáticas intrínsecas, sin dejar de mencionar que se continuó con la serie de estudios iniciada en décadas previas, pero esta vez bajo un enfoque distinto a los problemas clásicos.

Espero que esta obra sea de su agrado y la disfrute tanto como lo fue para mí hacerla, y también lo anime a tratar de averiguar, proponer y resolver variantes de estos problemas.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos de Matemáticas y Ciencias de la Computación

### 1.1. Introducción

Para iniciar, es preciso definir a la mayor parte de los términos tanto matemáticos como computacionales que se mencionarán en el transcurso de esta obra. Tal vez algunas definiciones se ubiquen dentro de la trivialidad para el lector familiarizado en estos temas, quien sin vacilación alguna podrá pasar al siguiente capítulo, sin embargo este proyecto se rige por una idea muy sencilla: comenzar con conceptos simples y eventualmente utilizar conceptos cada vez más complejos.

En los problemas de geometría computacional [2], los datos de entrada de un problema a resolver, son típicamente la descripción de una colección de objetos geométricos como pueden ser: un conjunto de puntos, un conjunto de segmentos de líneas, o un determinado orden en los vértices de un polígono. El dato de salida de los problemas a menudo es la respuesta a una consulta sobre los objetos geométricos, por ejemplo: si una línea interseca a otra línea o tal vez la respuesta sea sobre algún nuevo objeto geométrico generado de los datos de entrada, como la envolvente convexa de un conjunto de puntos.

En esta tesis mostraremos algunos algoritmos que resuelven problemas de geometría computacional en un espacio de dos dimensiones, es decir, en el plano. Algunos datos de entrada de los algoritmos serán conjuntos finitos de puntos, donde cada punto del conjunto tendrá asociado unas coordenadas del plano cartesiano. Al espacio de dos dimensiones lo denotaremos por  $\mathbb{R}^2$ , y denotaremos a un punto de este espacio por una letra minúscula de nuestro alfabeto.

Dado un par de puntos  $p$  y  $q$ , denotaremos por  $\ell(pq)$  a la línea que pasa por los puntos  $p$  y

$q$ , y por  $\overline{pq}$  denotaremos al segmento de línea que une a los puntos  $p$  y  $q$ . Ver Figura 1.1.

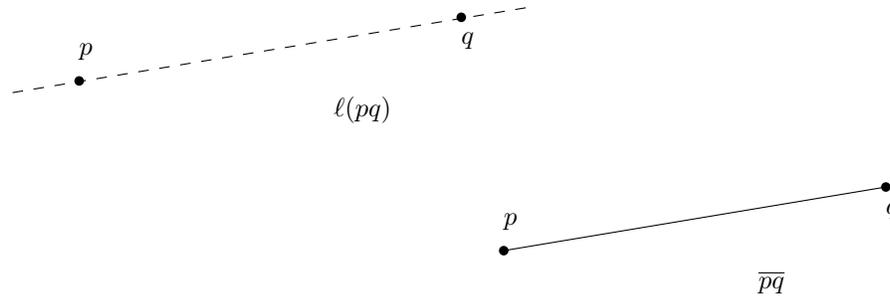


Figura 1.1: La línea y el segmento de línea.

**Definición 1.1** Sea  $Q$  un conjunto de  $n$  puntos dibujados en el plano, diremos que los puntos de  $Q$  están en *posición general* si no existen tres puntos alineados.

A partir de estas definiciones elementales pueden construirse otras estructuras de mayor complejidad con interesantes propiedades.

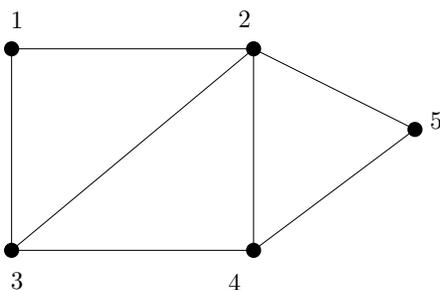
## 1.2. Teoría de Gráficas

Dentro del fundamento teórico que consideramos en esta obra, existen problemas que requieren en sus pruebas e ideas, principios sobre las gráficas. En esta sección definiremos algunos conceptos importantes de la Teoría de Gráficas.

### Definición de una gráfica

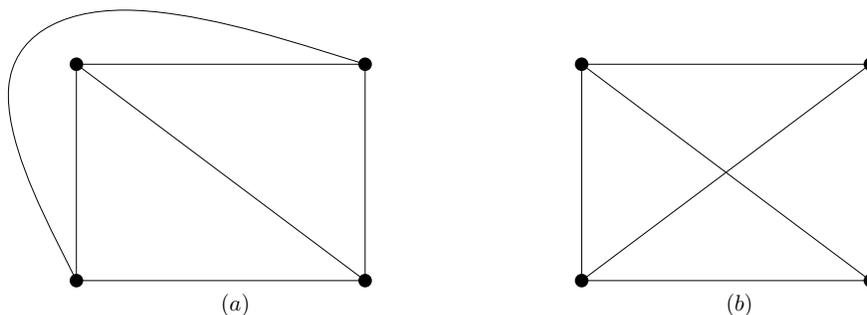
Una *gráfica* es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito de *vértices* y  $E$  es un conjunto finito de *aristas* que conectan a parejas de vértices de  $V$ . Denotaremos por  $(u, v)$  a la arista que une a los vértices  $u$  y  $v$ . En la Figura 1.2 podemos observar la representación de una gráfica con el conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y el conjunto de aristas  $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$ .

En una gráfica  $G = (V, E)$ , denotaremos por *orden*  $|G|$  al número de vértices de  $G$  o dado un subconjunto de vértices  $S$  de  $G$ , denotaremos el orden de  $S$  por  $|S|$ . Si un vértice es el extremo de una arista, entonces el vértice y la arista son *incidentes*. Al par de vértices que inciden en una arista se les denomina *extremos* o *terminales*. Un par de vértices  $u, v$  de una gráfica  $G$  son *adyacentes* o *vecinos* si  $(u, v) \in E$  y dos aristas distintas de  $G$  son *adyacentes* si tienen un vértice en común.

Figura 1.2: Representación de una gráfica  $G$ .

En una gráfica  $G$ , el grado  $d(v)$  de un vértice  $v \in V$  es el número de aristas que inciden en  $v$ . Un vértice de grado 0 (cero) es un vértice que no pertenece a ninguna arista y si en una gráfica  $G$  todos los vértices poseen el mismo grado  $k$ , entonces decimos que  $G$  es  $k$ -regular o simplemente *regular*. Una *gráfica completa* es una gráfica  $G$  en donde cada par de vértices son adyacentes, si una gráfica  $G$  es completa y tiene  $n$  vértices la denotaremos por  $K_n$ .

Una gráfica que pueda dibujarse en el plano de tal manera que las aristas no se crucen, es una *gráfica plana*. En la Figura 1.3(a) podemos ver una representación sin cruces de la gráfica completa  $K_4$ , sin embargo también puede dibujarse con segmentos cruzados como en la Figura 1.3(b). Con estas figuras es fácil ver que dada una gráfica  $G$ , su representación puede no ser única.

Figura 1.3: Representaciones de una gráfica  $K_4$ 

### Conexidad de una gráfica

Un *camino* (Figura 1.4) en una gráfica  $G = (V, E)$ , es una gráfica no vacía  $P = (V', E')$  de la forma:

$$V' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V \quad E' = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\} \subset E$$

donde cada vértice  $v_i$  es distinto. El número de aristas en un camino  $P$  es su longitud, y al camino de longitud  $k$  lo denotaremos por  $P^k$ . A menudo se denota a un camino como la secuencia natural de sus vértices:  $P = \{v_1 v_2 \dots v_k\}$ .

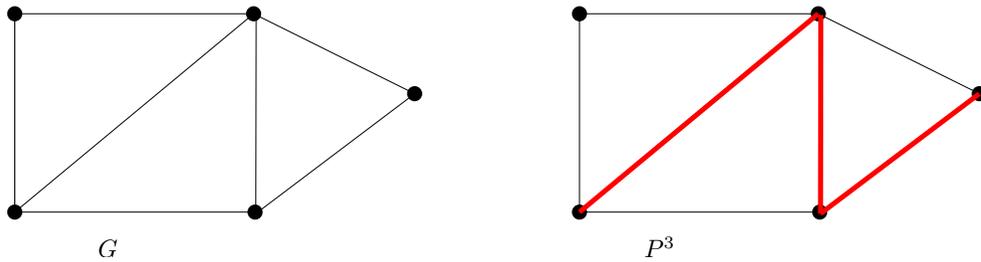


Figura 1.4: Un camino  $P^3$  de la gráfica  $G$

Ahora bien, un camino  $P = \{v_1 v_2 \dots v_k\}$  es un *ciclo* si  $v_1 = v_k$ . La longitud de un ciclo  $C$  es el número de sus aristas, y la notación para representar a un ciclo de longitud  $k$  es  $C^k$ . Ver Figura 1.5.

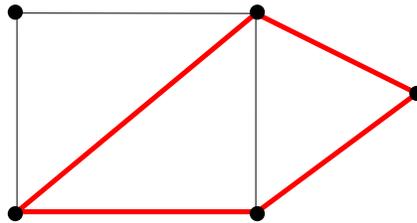
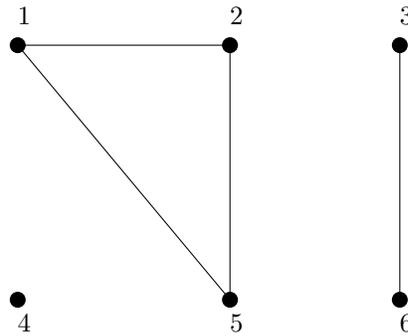


Figura 1.5: Un ciclo  $C^4$ .

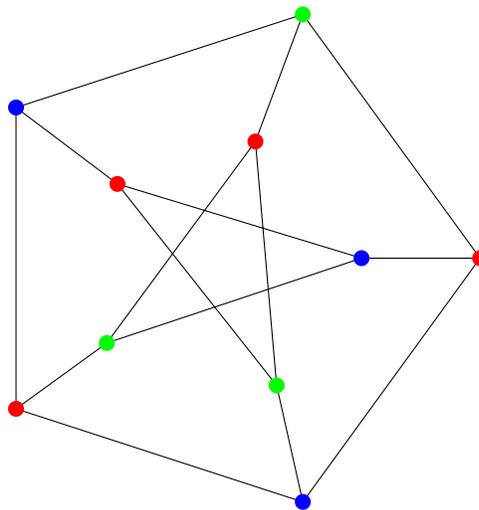
Una gráfica  $G = (V, E)$  es *conexa* si cada par de vértices de  $G$  es conectado por un camino. Las componentes conexas de una gráfica  $G$ , son las clases de equivalencia de vértices  $u$  y  $v$  bajo la relación:  $v$  es alcanzable con un camino desde  $u$ . La gráfica de la Figura 1.6 tiene 3 componente conexas:  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{3, 6\}$  y  $\{4\}$ . Cada vértice en  $\{1, 2, 5\}$  es alcanzable desde otro vértice en  $\{1, 2, 5\}$ .

Figura 1.6: Una gráfica  $G$  con tres componentes conexas.

### Coloración en una gráfica

Una *coloración* en los vértices de una gráfica  $G = (V, E)$ , es una asignación de colores en cada vértice de  $G = (V, E)$ , de forma que cada par de vértices unidos por una arista no reciban colores idénticos. El número cromático  $\chi(G)$  de una gráfica  $G$  es el entero  $j$  más pequeño tal que exista una coloración de  $G$ , en este caso diremos que la gráfica  $G$  tiene número cromático  $j$ .

Diremos que una gráfica  $G$  es  $k$ -coloreable o que tiene una  $k$ -coloración, si es posible asignar  $k$  colores distintos en sus vértices de forma que cada par de vértices unidos por una arista no reciban colores idénticos (Figura 1.7).

Figura 1.7: Representación de una 3-coloración en una gráfica  $G$ .

### Emparejamiento de una gráfica

Dada una gráfica  $G = (V, E)$ , un *emparejamiento* es un subconjunto de aristas  $M \subseteq E$  tal que para todos los vértices  $u \in V$ , a lo más una arista de  $M$  es incidente en  $u$ . Diremos que un vértice  $u \in V$  es *emparejado* por un emparejamiento  $M$  si alguna arista de  $M$  es incidente en  $u$ ; en caso contrario,  $u$  no es emparejado. Un *emparejamiento máximo* es un emparejamiento de máxima cardinalidad, es decir, dado un emparejamiento  $M$  y otro emparejamiento  $M'$  tenemos que  $|M| \geq |M'|$ . Dada una gráfica  $G = (V, E)$  y un emparejamiento  $M$ , si cada vértice de  $u \in V$  es emparejado por  $M$ , entonces  $M$  es un *emparejamiento perfecto*. En la Figura 1.8, podemos ver un emparejamiento perfecto (aristas en rojo) en una gráfica de 10 vértices.

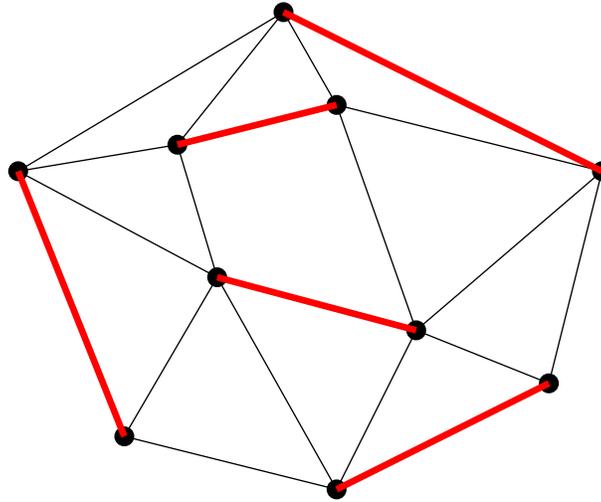


Figura 1.8: Un emparejamiento perfecto en una gráfica.

### 1.3. Polígonos simples y ortogonales

**Definición 1.2** Un polígono  $P$  es una secuencia ordenada de puntos  $p_1, \dots, p_n, n \geq 3$ , llamados los vértices de  $P$  junto con los segmentos de líneas  $\overline{p_i p_{i+1}}, i = 1, \dots, n - 1$  y  $\overline{p_n p_1}$  llamados las aristas de  $P$ . Un polígono  $P$  es simple si cualesquiera dos de sus aristas no consecutivas no se intersecan (Figura 1.9).

Un polígono simple  $P$  divide el plano en dos regiones, una región no acotada llamada el *exterior* de  $P$  y otra región acotada llamada el *interior* de  $P$ . Generalmente, el término polígono considera al polígono  $P$  junto con su interior.

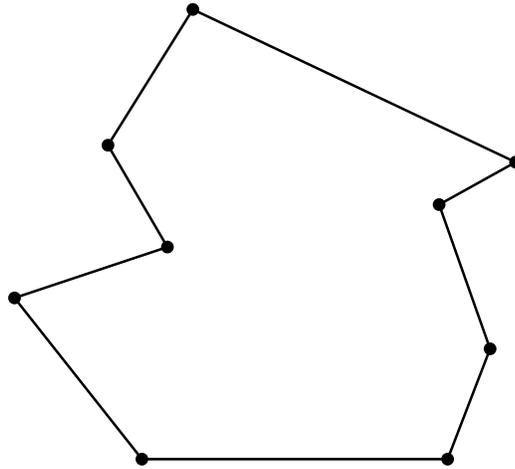


Figura 1.9: Un polígono simple.

**Definición 1.3** Un polígono simple es ortogonal si todas sus aristas son paralelas al eje  $x$  o al eje  $y$ . Ver Figura 1.10.

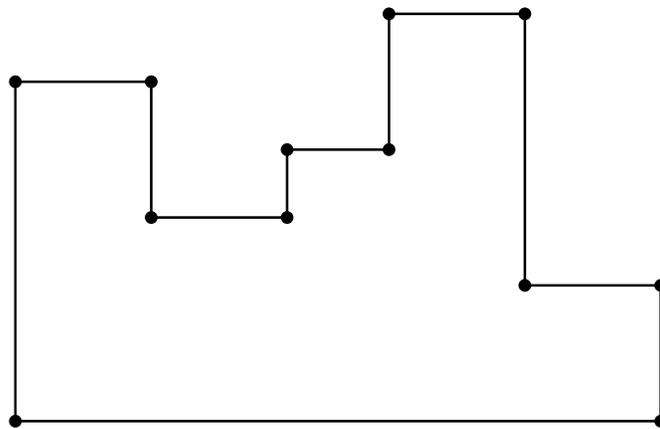


Figura 1.10: Un polígono ortogonal.

Con respecto a los ángulos de un polígono  $P$ , un vértice de  $P$  es *convexo* si el ángulo interior formado por sus dos aristas incidentes es estrictamente menor a  $\pi = 180^\circ$ , en caso contrario el vértice es *cóncavo*. Un polígono simple  $P$  es *convexo* si para cualquier par de puntos  $a$  y  $b$  en el interior de  $P$ , el segmento de línea  $\overline{ab}$  está totalmente contenido en el interior de  $P$ . Ver Figura 1.11.

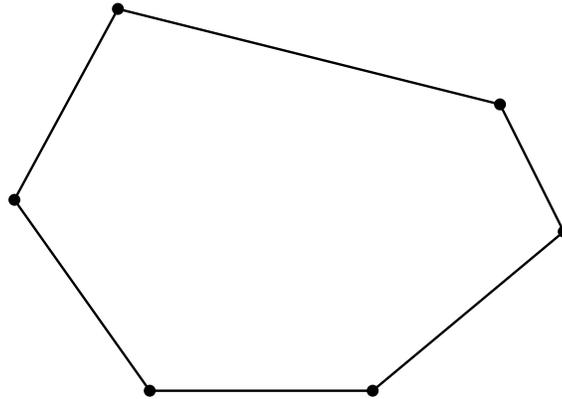
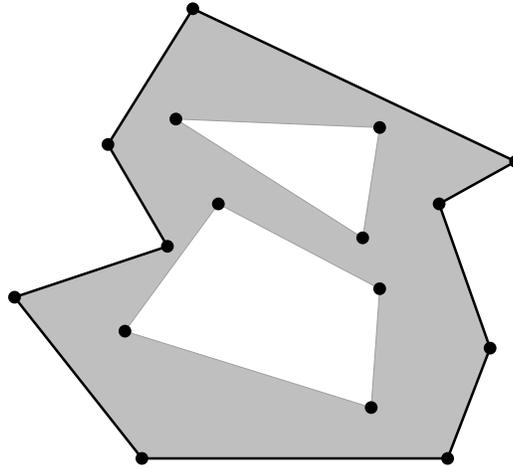


Figura 1.11: Un polígono convexo.

**Definición 1.4** Sea  $P$  un polígono simple y sean  $m$  polígonos disjuntos (convexos o no convexos)  $P_1, \dots, P_m$  totalmente contenidos en el interior de  $P$ , llamaremos al conjunto  $P' = P - \{P_1 \cup \dots \cup P_m\}$  un polígono con hoyos. En este caso, diremos que el polígono  $P'$  tiene  $m$  hoyos. Ver Figura 1.12.

Figura 1.12: Un polígono simple  $P'$  con 2 hoyos.

**Definición 1.5** Una *diagonal* de un polígono  $P$ , es un segmento de línea que conecta dos vértices de  $P$  y está totalmente contenido en el interior de  $P$ .

**Definición 1.6** Una *triangulación* de un polígono simple  $P$ , es una partición de  $P$  en un

conjunto de triángulos con interiores disjuntos, de modo que las aristas de los triángulos son aristas de  $P$  o diagonales que unen a pares de vértices de  $P$ .

La triangulación de un polígono simple  $P$  de  $n$  vértices se obtiene agregando  $n-3$  diagonales, que producen  $n-2$  triángulos. Observemos que la triangulación de un polígono simple no siempre es única y que dada una triangulación de un polígono simple  $P$ , el conjunto de vértices de  $P$  puede ser 3-coloreado (si vemos a la triangulación como una gráfica). Ver Figura 1.13.

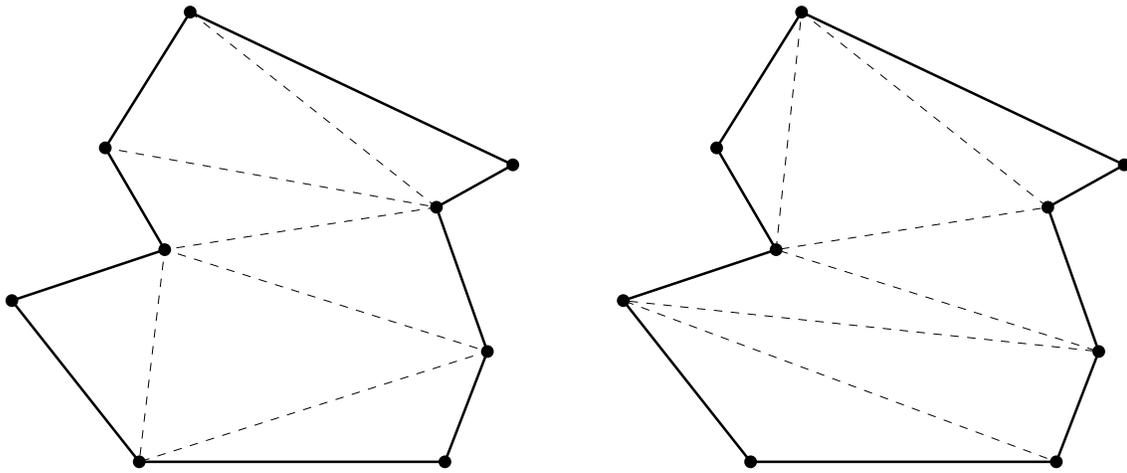


Figura 1.13: Dos triangulaciones distintas de un polígono simple.

Sea  $T$  una triangulación de un polígono simple  $P$ , la *gráfica dual* de  $T$  se obtiene colocando un vértice en el interior de cada triángulo de  $T$  y conectar dos vértices si sus correspondientes triángulos comparten una diagonal. En la Figura 1.14 mostramos un polígono simple  $P$ , junto con una triangulación  $T$  de  $P$  y la gráfica dual de la triangulación  $T$ .

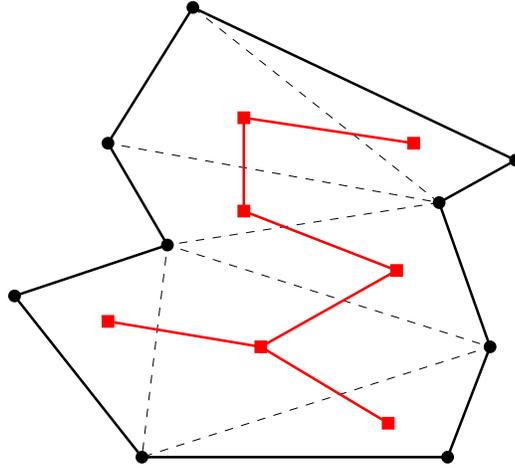


Figura 1.14: La gráfica dual de una triangulación de un polígono simple  $P$ .

## 1.4. Sucesiones permisibles

Sea  $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$  una colección de  $n$  puntos en el plano en posición general, donde dados dos pares de puntos de  $Q$ , las líneas que determinan a cada par de puntos no tengan la misma pendiente; y donde dos puntos cualesquiera de  $Q$  no compartan la misma coordenada  $x$ . Sea  $C$  un círculo que en su interior contenga a los elementos de  $Q$  y sea  $\ell$  una línea paralela al eje  $y$ , orientada hacia arriba, y que sea tangente por la derecha al círculo  $C$ . Ver Figura 1.15.

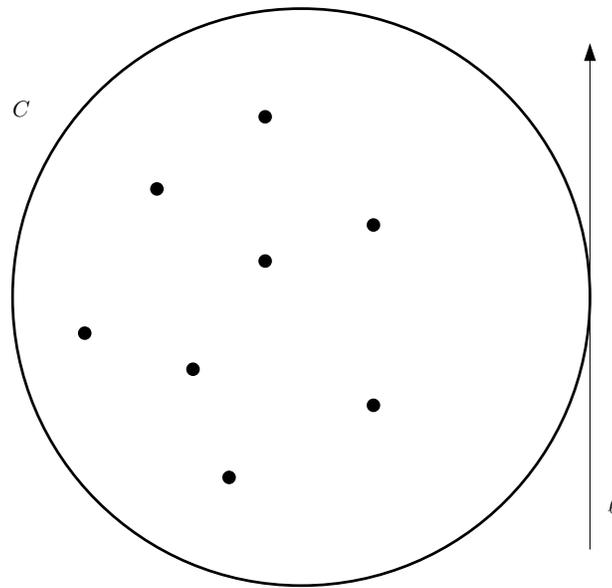
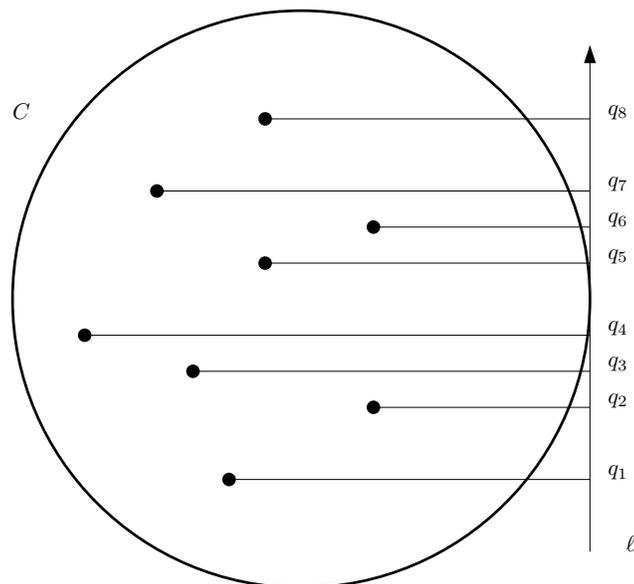
Consideremos la proyección de los puntos de  $Q$  en la línea  $\ell$ , dada la orientación de la línea  $\ell$  podemos definir un orden  $\prec$  en los puntos de  $Q$  de acuerdo a sus proyecciones en  $\ell$ . Nombraremos a los puntos proyectados en  $\ell$ :  $q_1, \dots, q_n$  y utilizando el orden  $\prec$  tendremos la siguiente secuencia de puntos (Figura 1.16):

$$q_1 \prec q_2 \prec \dots \prec q_{n-1} \prec q_n$$

Realizaremos una *rotación* de  $\ell$  sobre el círculo  $C$ , en sentido contrario a las manecillas del reloj, de forma tal, que  $\ell$  permanezca tangente a  $C$ . Al inicio de la rotación de  $\ell$ , los puntos proyectados en  $\ell$  conservarán el orden  $\prec$ , pero en algún momento de la rotación un par de puntos  $q_i$  y  $q_j$  de  $Q$  se proyectarán sobre un mismo punto en la línea  $\ell$ . Ver Figura 1.17.

Observemos que tres puntos de  $Q$  nunca se proyectarán en un mismo punto de la línea  $\ell$ , dado que los elementos de  $Q$  están en posición general y que nunca se proyectarán al mismo tiempo dos pares de puntos de  $Q$  en dos puntos distintos de  $\ell$ , por la restricción de que las líneas que determinan a cada par de puntos de  $Q$  no tienen la misma pendiente.

Si continuamos la rotación de la línea  $\ell$  sobre el círculo  $C$  inmediatamente después de que

Figura 1.15: El conjunto de puntos  $Q$ , el círculo  $C$  y la línea  $l$ .Figura 1.16: La proyección de los puntos de  $Q$  en la línea  $l$ .

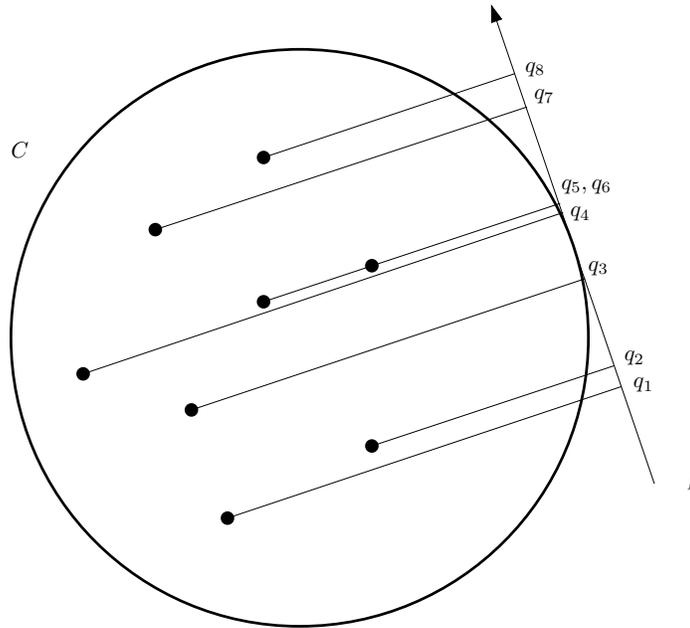


Figura 1.17: Dos puntos de  $Q$  con la misma proyección en  $\ell$ .

$q_i$  y  $q_j$  se proyectan en un mismo punto de  $\ell$ , ocurre que los puntos  $q_i$  y  $q_j$  intercambian de posición en el orden  $\prec$ , es decir, si antes de proyectarse en un mismo punto de  $\ell$  teníamos que  $q_i \prec q_j$ , al seguir rotando a  $\ell$  va a pasar que  $q_j \prec q_i$ .

Si la rotación de  $\ell$  sobre el círculo  $C$  logra completar media revolución ( $180^\circ$ ) desde el punto de partida, entonces tenemos que el orden de la proyección de los puntos de  $Q$ , en  $\ell$ , se invierte (Figura 1.18):

$$q_n \prec q_{n-1} \prec \dots \prec q_2 \prec q_1$$

Observemos que la rotación de la línea  $\ell$  sobre el círculo  $C$ , durante los primeros  $180^\circ$ , cada pareja de puntos de  $Q$  se intercambia exactamente una vez. Tomando todas las consideraciones anteriores podemos ver que si  $\ell$  completa el recorrido de  $360^\circ$  sobre el círculo  $C$ , las proyecciones de los puntos  $Q$  en la línea  $\ell$  vuelve a tener el orden inicial.

Sea  $Q$  un conjunto de puntos en el plano en posición general, donde dados dos pares de puntos de  $Q$ , las líneas que determinan a cada par de puntos no tengan la misma pendiente, una *sucesión circular* de  $Q$  es la sucesión de permutaciones de los puntos de  $Q$  *doblemente infinita* que obtenemos al rotar una línea  $\ell$  sobre un círculo  $C$  y proyectar en  $\ell$  los puntos de  $Q$  (procedimiento que llamaremos *secuencialización*). Es circular y doblemente infinita porque cada vez que secuencializamos al conjunto  $Q$ , la sucesión comienza a repetirse en cada rotación de  $360^\circ$ , y esto ocurre en ambas direcciones (a favor o en contra de las manecillas del reloj).

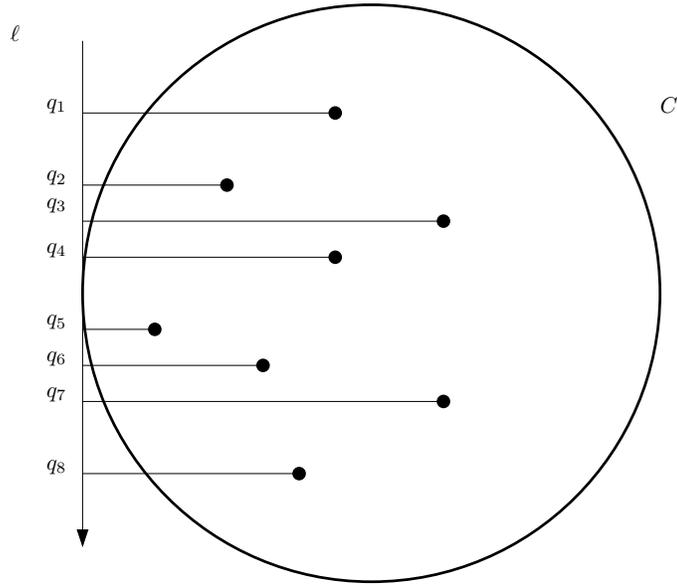


Figura 1.18: El orden invertido de la proyección de  $Q$  en  $L$ .

Si lleváramos un registro de los cambios en las proyecciones en la línea  $\ell$ , dada una *secuencialización* de  $360^\circ$  de los puntos de  $Q$ , podemos construir una matriz  $T$  de dimensión  $(2\binom{n}{2} + 1 \times n)$ . En la primera fila de  $T$  almacenaremos la proyección ordenada de puntos de  $Q$  en la línea  $\ell$  al iniciar la secuencialización, y por cada  $k$ -ésimo intercambio en la proyección de los puntos de  $Q$  en la línea  $\ell$ , almacenaremos la nueva secuencia en la fila  $k + 1$  de la matriz  $T$ . Ver Tabla 1.1.

$$T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_i & q_j & \dots & q_{n-1} & q_n \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ & & & q_i & q_j & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ q_n & q_{n-1} & \dots & q_j & q_i & \dots & q_2 & q_1 \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ & & & q_j & q_i & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ q_1 & q_2 & \dots & q_i & q_j & \dots & q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

Tabla 1.1: Permutaciones de los puntos de  $Q$ .

Observemos que la mitad de las filas de  $T$  son redundantes (la segunda mitad es igual a la primera, sólo que invertida). Sea  $\Pi$  la matriz con las primeras  $\binom{n}{2} + 1$  filas de  $T$ , es decir  $\Pi$  contiene la mitad de las filas consecutivas distintas de la sucesión circular. A esta matriz  $\Pi$  de orden  $(\binom{n}{2} + 1 \times n)$  la llamaremos *semiperiodo*.

Una *sucesión permisible* es una sucesión de permutaciones doblemente infinita de elementos de algún conjunto. Si una sucesión permisible  $K$  se obtiene a partir de una colección de  $n$  puntos en el plano, entonces  $K$  es una sucesión circular. Lo realmente interesante es que para cualquier conjunto  $Q$  de  $n$  puntos en el plano en posición general existe una sucesión permisible  $K$ , que la podemos obtener por secuencialización; pero lo contrario no es cierto, es decir, dada una sucesión permisible  $K$  no siempre existe un conjunto  $Q$  de  $n$  puntos en el plano tal que al secuencializar  $Q$  obtengamos  $K$  [1, 24].

## 1.5. Complejidad computacional

### 1.5.1. ¿Qué es un algoritmo?

Consideremos un problema computacional en gráficas como el siguiente: dada una gráfica  $G$ , ¿es  $G$  una gráfica plana? Si la gráfica  $G$  es pequeña podemos resolver el problema “a mano”, sin embargo seríamos incapaces de resolver el problema sin la ayuda de computadoras si la gráfica  $G$  tuviese cientos de miles de vértices. En tal caso necesitamos un *algoritmo*: un método preciso que pueda usar una computadora para resolver un problema. Un algoritmo debe resolver cualquier instancia de un problema y terminar después de un número finito de operaciones.

Las medidas de complejidad más usuales para un algoritmo son el *tiempo de ejecución* y el *espacio de memoria*. El *tiempo de ejecución* es el número de operaciones efectuadas por un algoritmo antes de dar la respuesta final de un problema, mientras que el *espacio de memoria* es la cantidad de celdas de memoria utilizadas por un algoritmo para resolver un problema. El número de operaciones o celdas de memoria requeridos por un algoritmo no es el mismo para todas las instancias de un mismo problema.

Por ejemplo, regresando al problema de planaridad de una gráfica, el número de operaciones necesarios para averiguar si una gráfica con  $n$  vértices y  $m$  aristas es plana o no, puede variar considerablemente de acuerdo con la gráfica en que se esté trabajando (una gráfica puede ser más fácil de examinar que otra), aún si  $m$  y  $n$  permanecen constantes. Como consecuencia, debemos considerar en conjunto todas las entradas posibles de un tamaño determinado y definir la complejidad del algoritmo en el peor caso en cualquiera de esas entradas. Por lo tanto el tiempo de ejecución (o espacio de memoria) es una función sobre  $n$ , el tamaño de la entrada del algoritmo.

### 1.5.2. La notación $O$

En el análisis de la complejidad de un algoritmo, a menudo únicamente estamos interesados en el “comportamiento asintótico del algoritmo”, es decir, el comportamiento del algoritmo cuando recibe grandes entradas. Para tratar con tales propiedades de las funciones, debemos utilizar las siguientes notaciones para medir el tiempo de ejecución asintótico. Sean  $f(n)$  y  $g(n)$  funciones de un conjunto de enteros positivos a los números reales positivos, entonces escribimos  $f(n) = O(g(n))$  si existen constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tal que  $f(n) \leq c_1g(n) + c_2$  para todo número  $n$ . Entonces el tiempo de ejecución de un algoritmo puede ser detallado por sentencias como “el algoritmo toma tiempo  $O(n^2)$ .”

### 1.5.3. Algoritmos polinomiales

Decimos que un algoritmo es *acotado polinomialmente* (o simplemente *polinomial*) si su complejidad está acotada por un polinomio de  $n$  (el tamaño de entrada del problema) en una instancia del problema. Ejemplo de estas complejidades son:  $O(n)$ ,  $O(n \log n)$ ,  $O(n^{100})$ , etc. El resto de las complejidades son usualmente referidas como *exponenciales* o *no polinomiales*. Ejemplo de estos últimos son:  $O(2^n)$ ,  $O(n!)$ , etc.

Cuando el tiempo de ejecución de un algoritmo está acotado por  $O(n)$ , lo llamaremos algoritmo de *tiempo lineal* o simplemente algoritmo *lineal*.

### 1.5.4. Problemas $NP$ -completos

Existen ciertos problemas computacionales para los cuales no se ha probado, si hay o no un algoritmo de tiempo polinomial que los resuelve. La mayoría de estos problemas son “ $NP$ -completos”, cuyo significado explicaremos brevemente a continuación.

El estado de un algoritmo consiste del valor actual de las variables que utiliza y la ubicación de la instrucción que está siendo ejecutada. Un *algoritmo determinístico* es aquel que para cada estado, la ejecución de una instrucción únicamente determina *a lo más* un estado siguiente. Todas las computadoras que existen operan determinísticamente. Un problema  $Q$  está en la clase  $P$ , si existe un algoritmo polinomial determinista que resuelve a  $Q$ .

En contraste, un *algoritmo no determinístico* es aquel en el cual, el estado actual puede determinar simultáneamente varios estados siguientes. Mientras un algoritmo determinístico explora uno por uno un conjunto de alternativas (estados siguientes), un algoritmo no determinístico examina todas las alternativas al mismo tiempo. Un problema  $Q$  está en la clase  $NP$ , si existe un algoritmo polinomial no determinístico que resuelve a  $Q$ .

Para una fuente más completa sobre geometría computacional, teoría de gráficas y algoritmos, remitimos al lector interesado a consultar las obras especializadas sobre éstos temas: [4, 9, 21, 25].

# Capítulo 1

## Vigilancia de objetos geométricos

### 1.1. Introducción

El reconocimiento sobre la ubicación y posición de objetos en el entorno físico es un proceso que ocurre de manera extraordinaria desde la perspectiva humana. Podemos identificar los objetos (sus formas, tamaños, texturas, etc) y coordinar nuestros movimientos de acuerdo a ellos, obteniendo en milésimas de segundo las porciones de objetos visibles desde nuestra posición de observador, aún a pesar de que algunos de los objetos puedan estar en movimiento. El cálculo en cada momento de nuestro *mapa* de observación, es una “tarea” que se ejecuta muy eficientemente en los humanos.

En el mundo de las computadoras, las aplicaciones orientadas al reconocimiento del espacio no son fáciles de desarrollar e implementar, aún si contamos con los equipos más sofisticados del momento. Por ejemplo, poner en funcionamiento un robot que tenga una navegación autónoma para ir de una posición a otra, no sólo requiere de *hardware* especializado; pues el determinar la posición del robot en un espacio físico y que interactúe con objetos (estáticos o móviles) que le rodean, puede ser una tarea que consuma gran parte de sus recursos de cómputo disponibles. Por lo que el diseño de algoritmos eficientes para calcular y ejecutar tales movimientos del robot en un período razonable de tiempo, es uno de los objetivos del tópico de esta obra.

Para comenzar a mostrar la temática central y los problemas que ataca esta tesis, daremos un breve recuento sobre algunos conceptos relacionados con la visibilidad en polígonos y segmentos de líneas [17].

## 1.2. Visibilidad en polígonos

El problema de la navegación de un robot sobre una superficie determinada, puede ser tratado como un problema de dos dimensiones en el plano, generando así una representación cómoda de manejar, pero que de ningún modo se convierte en un problema trivial a resolver.

**Definición 1.1** Sean  $u$  y  $v$  dos puntos en el interior de un polígono  $P$ . Diremos que  $v$  es visible desde  $u$  (y viceversa), si el segmento de línea que los une  $\overline{uv}$  está totalmente contenido en  $P$  (Figura 1.1).

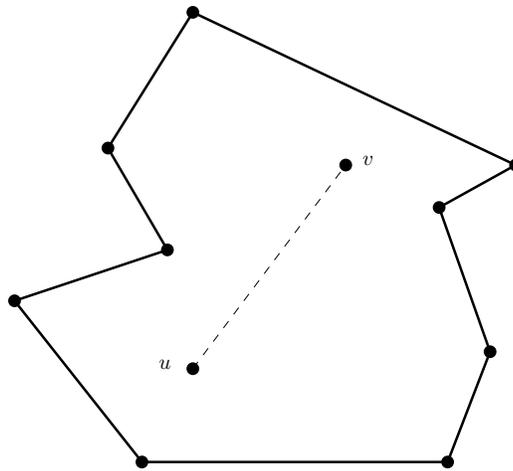


Figura 1.1: Dos puntos visibles en el interior de  $P$ .

Dado un punto  $u$  en un polígono  $P$ , su polígono de visibilidad  $V(u)$  es el conjunto de los puntos de  $P$  visibles desde  $u$ . Observemos que los polígonos  $V(u)$  y  $P$  pueden tener aristas y vértices en común (Figura 1.2).

**Definición 1.2** El *núcleo* de un polígono simple  $P$ , es el conjunto de puntos de  $P$  desde el cual cada punto de  $P$  es visible (Figura 1.3).

Un polígono simple  $P$  es *estrellado* si existe conjunto  $Q$  de puntos de  $P$ , tal que cada punto de  $P$  sea visible desde  $Q$  (observemos que este conjunto de puntos  $Q$  es el núcleo de  $P$ ). Si el núcleo de un polígono simple  $P$  es no vacío entonces  $P$  es un polígono estrellado y un polígono convexo es también un polígono estrellado. Dado un polígono convexo  $P$  es fácil ver que el núcleo de  $P$  coincide con los puntos de  $P$ .

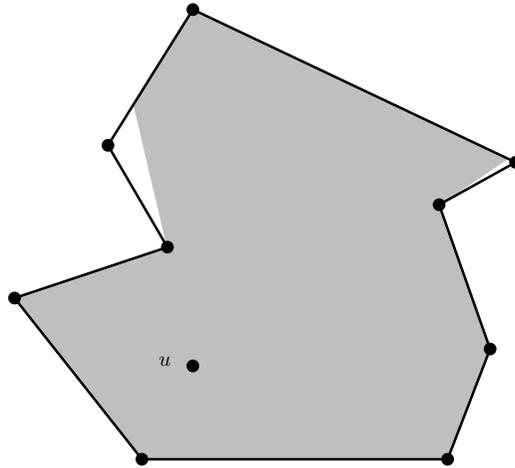


Figura 1.2: El polígono de visibilidad  $V(u)$  del punto  $u$ .

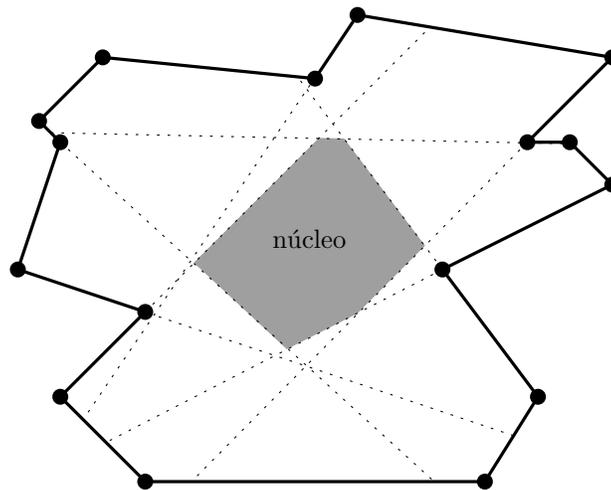


Figura 1.3: El núcleo de un polígono simple  $P$ .

### 1.2.1. Una galería de arte y un polígono simple

Imaginemos por un momento que somos los propietarios de una colección integrada por las más valiosas obras pictóricas del planeta, realizadas por grandes maestros como Picasso, Monet, Da Vinci, Botticelli, Rembrandt, etc.

Supongamos que deseamos montar una exposición de nuestra colección en un edificio de una sola planta con un número  $n$  de paredes. Pero debido a lo invaluable de nuestra colección necesitamos contratar guardias para proteger las obras de un posible acto de vandalismo por parte de los visitantes o de un robo. El número de guardias que debemos contratar debe ser el menor posible para que el costo del sistema de seguridad no nos resulte muy caro, pero por otro lado no debemos contratar pocos guardias, pues dejarían sin vigilancia algún rincón de la galería. Esta indecisión origina lo que usualmente se conoce como el *problema de la galería de arte*: ¿Cuántos guardias son siempre suficientes para vigilar una galería de  $n$  paredes?



Figura 1.4: Van Gogh, Los girasoles, 1888, óleo sobre lienzo.

Si quisiéramos definir más detalladamente el problema de la galería de arte, primero debemos formalizar el concepto de *galería*. Una galería real es un espacio de tres dimensiones, pero un plano arquitectónico de una galería nos da la información suficiente para colocar a los guardias, de este modo podemos modelar una galería como un polígono simple en el plano y un guardia

de la galería corresponde a un punto en el polígono.

El problema de la galería de arte en dos dimensiones puede plantearse como sigue: ¿Cuántos guardias se necesitan para vigilar un polígono simple de  $n$  lados? Esta respuesta depende del polígono que utilicemos, pues entre más compleja sea la forma del polígono simple, posiblemente necesitemos más guardias. Para la solución de este problema debemos expresar la *cota* del número de guardias necesarios en los términos de  $n$ , el número de lados del polígono. Pero aún si dos polígonos simples tienen el mismo número de lados, uno de los polígonos puede ser más fácil de vigilar que el otro polígono; por ejemplo, un polígono convexo puede ser vigilado siempre con un sólo guardia.

Para estar completamente seguros de que la vigilancia en un polígono simple sea total, debemos considerar el *peor caso* posible, es decir, debemos dar una cota que sea buena para cualquier polígono simple de  $n$  vértices. Aunque sería bastante agradable si pudiéramos encontrar el mínimo número de guardias para cualquier polígono de  $n$  vértices y no sólo una cota de peor caso, desafortunadamente, el problema de encontrar el mínimo número de guardias para vigilar un polígono determinado es NP-duro [18].

Existen varios tipos de restricciones que pueden imponerse a los guardias utilizados para vigilar a un polígono simple  $P$ . En algunos problemas podemos permitir que los guardias se coloquen en los vértices de  $P$ , en otros problemas podemos colocar los guardias en cualquier punto en el interior de  $P$  o incluso moverse (patrullar) sobre diagonales o aristas de  $P$ . Los diferentes tipos de guardias estudiados en la literatura son los siguientes:

**Guardia-punto** Estos guardias pueden ser colocados en cualquier punto del interior del polígono.

**Guardia-vértice** En este caso, los guardias se limitan a ocupar los vértices de un polígono.

La distinción entre *guardia-punto* y *guardia-vértice* es importante, ya que en la mayoría de los problemas estudiados, las cotas obtenidas para estos dos tipos de guardias son distintas.

**Guardia-móvil** En esta variante los guardias se mueven sobre una arista, diagonal o segmento de línea totalmente contenido en el interior de un polígono  $P$ .

**Guardia-arista** En este caso se permite que los guardias se muevan por las aristas de un polígono  $P$ . Un punto  $q$  del polígono  $P$  se considera vigilado si es visible desde algún punto de la trayectoria de un guardia  $p$ .

### 1.3. Visibilidad en segmentos de líneas

**Definición 1.3** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntas en el plano, dos puntos  $p$  y  $q$  del plano son visibles si el segmento de línea que los une  $\overline{pq}$  no interseca a los elementos de  $S$ . Ver Figura (Figura 1.5).

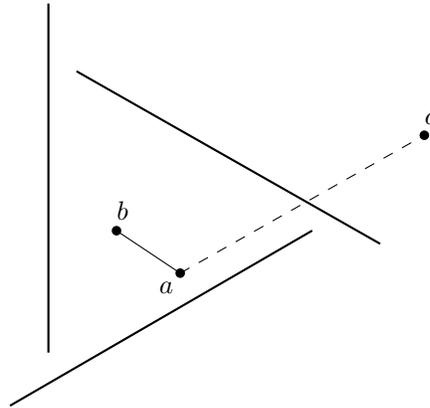


Figura 1.5: El punto  $b$  es visible desde  $a$ , pero  $c$  no es visible desde  $a$ .

Dentro del universo de los problemas de visibilidad, figuran los que han considerado a las familias de segmentos de líneas, que dependiendo de las condiciones del problema dan lugar a varios enfoques de estudio. Las diferencias residen particularmente en el sentido en que va orientada la vigilancia, la posición de los guardias y la posición de los segmentos de líneas:

#### Vigilancia del plano vs. vigilancia de segmentos de líneas

- Vigilar el plano  $\mathbb{R}^2$  en presencia de una familia de segmentos de líneas

**Problema 1.1** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntos en el plano  $\mathbb{R}^2$ , ¿cuántos guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el plano  $\mathbb{R}^2$  en presencia de los segmentos de  $S$  como obstáculos?

- Vigilar cada punto de una familia de segmentos

**Problema 1.2** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntos en el plano  $\mathbb{R}^2$ , ¿cuántos guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar a la familia  $S$  de segmentos de líneas?

En ambos problemas se requieren que los guardias sean colocados en el espacio disponible de  $\mathbb{R}^2 \setminus S$ .

### Posición de los guardias

- La colocación del guardia se permite en cualquier punto del plano  $\mathbb{R}^2$ , incluso sobre algún segmento de línea. Ver Figura 1.6.

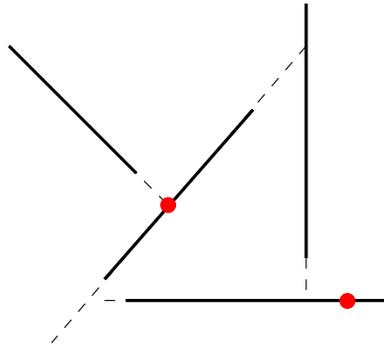


Figura 1.6: Ilustración de la posición de guardias.

- Con respecto al caso anterior, los guardias se limitan a ocupar el espacio disponible de  $\mathbb{R}^2 \setminus S$ . Ver Figura 1.7.

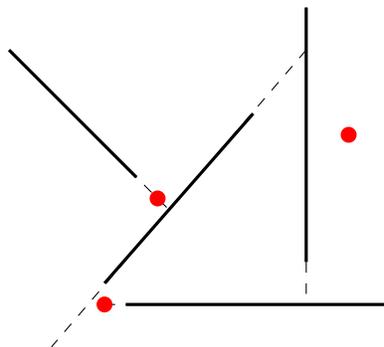


Figura 1.7: Ilustración de la posición de guardias.

La Figura 1.6 muestra un ejemplo de cuatro segmentos de líneas, donde dos guardias son suficientes para vigilar el plano bajo las condiciones del primer caso, pero tres guardias guardias son requeridos para vigilar el plano bajo las condiciones del segundo caso, ver Figura 1.7.

Sorprendentemente, casi el mismo número de guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios en el peor caso para ambos problemas [6, 13, 23, 27].

### Posición de los segmentos de línea en el plano $\mathbb{R}^2$

En *posición general* los segmentos de líneas están ubicados de modo que cualquier par de segmentos no sean paralelos ni alineados entre sí, mientras que en la *posición ortogonal*, los segmentos son paralelos a cualquiera de los ejes cartesianos  $x$  o  $y$  (Figura 1.8).

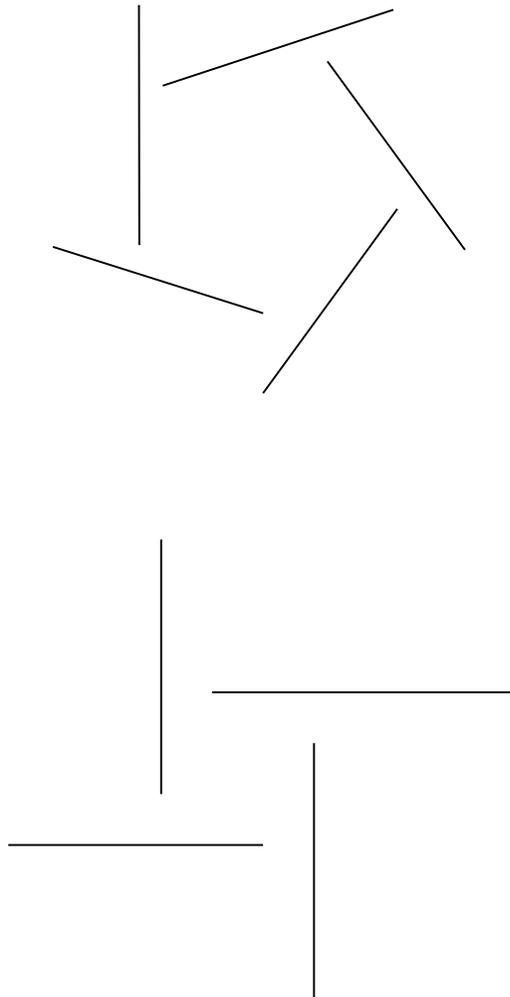


Figura 1.8: Posición general y posición ortogonal.

Los resultados que existen para los problemas de vigilancia en polígonos y segmentos de líneas, serán abordados en el siguiente capítulo.

# Capítulo 1

## Una breve revisión del problema de la Galería de Arte

### 1.1. Introducción

En los últimos 30 años, los problemas de visibilidad y de galerías de arte han sido ampliamente estudiados por matemáticos y computólogos, tanto por su belleza como por las aplicaciones que el estudio de la *visibilidad* tiene en la computación, por ejemplo en: la robótica, visión computacional, graficación, diseño asistido por computadora, reconocimiento de patrones y navegadores quirúrgicos [8, 11, 14, 19].

En los capítulos anteriores definimos y comentamos los conceptos primordiales sobre la temática que aborda esta tesis, a partir de aquí enfocaremos nuestra atención a resultados importantes obtenidos durante el estudio de los problemas de visibilidad.

### 1.2. Teorema de la Galería de Arte

En 1976, el matemático Victor Klee, durante una charla en la Universidad de Stanford formuló esta pregunta: ¿cuántos guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono de  $n$  vértices? Es decir, si habláramos en términos de galerías de arte, encontrar el mínimo número de guardias necesarios para vigilar cualquier galería de arte con  $n$  paredes. Poco después, Vasek Chvátal presentó el primer resultado [3], Chvátal mostró que para vigilar un polígono simple de  $n$  vértices,  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios. Este resultado es mejor conocido como el *Teorema de la Galería de Arte de Chvátal*.

Chvátal obtuvo el resultado para el problema exhibiendo una clase de polígonos que necesita

$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias, pero también estableció que  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son suficientes, a través de un complicado argumento inductivo basado en gráficas y triangulaciones de polígonos. Posteriormente Steve Fisk presentó una prueba más corta y sencilla del resultado de Chvátal [12].

### 1.2.1. Teorema de la Galería de Arte en polígonos simples

Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  vértices, ya que la forma de  $P$  puede ser muy compleja, es difícil afirmar el número de guardias que necesitamos para vigilar a  $P$ . Lo primero que se nos pudiera ocurrir para vigilar al polígono  $P$ , es que necesitemos descomponer a  $P$  en piezas que sean fáciles de vigilar. Esta descomposición la podemos efectuar con una triangulación  $T$  de  $P$ .

Observemos que podemos vigilar a  $P$  colocando un guardia en cada triángulo de la triangulación  $T$  de  $P$ . De aquí surgen dos preguntas: ¿siempre existe una triangulación de un polígono simple? y ¿cuántos triángulos puede tener una triangulación de un polígono simple? El siguiente teorema responde estas preguntas.

**Teorema 1.1** Cada polígono simple admite una triangulación, y cualquier triangulación de un polígono simple con  $n$  vértices consiste de exactamente  $n - 2$  triángulos.

**Prueba.** Probaremos este teorema por inducción sobre  $n$ , el número de vértices del polígono simple. Cuando  $n = 3$  el polígono es por si mismo un triángulo y el Teorema es verdadero. Sea  $n > 3$  y supongamos que el Teorema es verdadero para todo número  $m < n$ .

Primero probaremos la existencia de una diagonal en un polígono simple, sea  $P$  un polígono con  $n$  vértices y sea  $v$  el vértice más a la izquierda de  $P$  (en caso de que dos vértices lo sean, tomaremos el vértice más a la izquierda pero que también sea el más inferior del conjunto). Sean  $u$  y  $w$  dos vértices vecinos de  $v$  en la frontera de  $P$ . Dos casos pueden ocurrir:

1. Si el segmento de línea  $\overline{uw}$  está totalmente contenido en el interior de  $P$ , hemos encontrado una diagonal (Figura 1.1).
2. Hay uno o más vértices de  $P$  dentro del triángulo determinado por  $u, v$  y  $w$ , o en el segmento de línea  $\overline{uw}$  (Figura 1.2).

Tomando el segundo caso, de los vértices que están dentro del triángulo determinado por  $u, v$  y  $w$  o sobre el segmento de línea  $\overline{uw}$ , sea  $v'$  el vértice más alejado del segmento de línea  $\overline{uw}$ . Observemos que el segmento de línea que conecta a  $v'$  con  $v$  no puede intersectar con una arista  $e$  de  $P$ , pues tal arista  $e$  tendría al menos uno de sus vértices dentro del triángulo determinado por  $u, v$  y  $w$ , y uno de los vértices de la arista  $e$  sería el vértice más alejado del segmento de

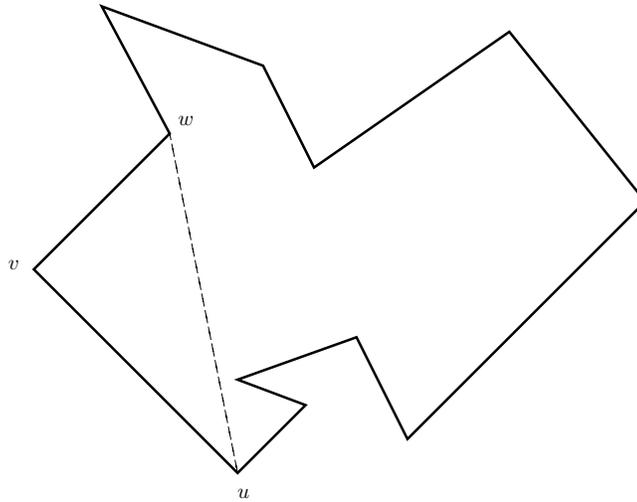


Figura 1.1: Una diagonal  $\overline{uw}$  en un polígono simple  $P$ .

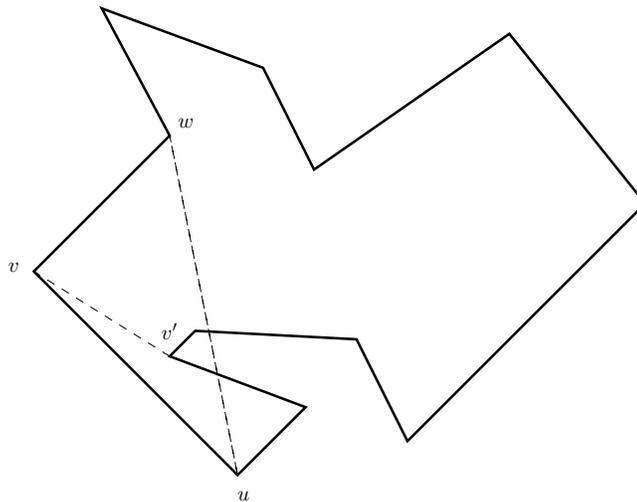


Figura 1.2: Una diagonal  $\overline{vv'}$  en un polígono simple  $P$ .

línea  $\overline{uw}$ , lo que contradice la elección de  $v'$  como el vértice más lejano de  $\overline{uw}$ . Por lo tanto  $\overline{vw'}$  es una diagonal.

Ya que siempre existe una diagonal en un polígono simple, cualquier diagonal divide a un polígono simple  $P$  de  $n$  vértices en dos subpolígonos simples  $P_1$  y  $P_2$ . Sea  $m_1$  el número de vértices de  $P_1$  y  $m_2$  el número de vértices de  $P_2$ . Cada número  $m_1$  y  $m_2$  es menor que  $n$ , así que por inducción, los subpolígonos  $P_1$  y  $P_2$  puede ser triangulados. Por lo tanto el polígono simple  $P$  también puede ser triangulado.

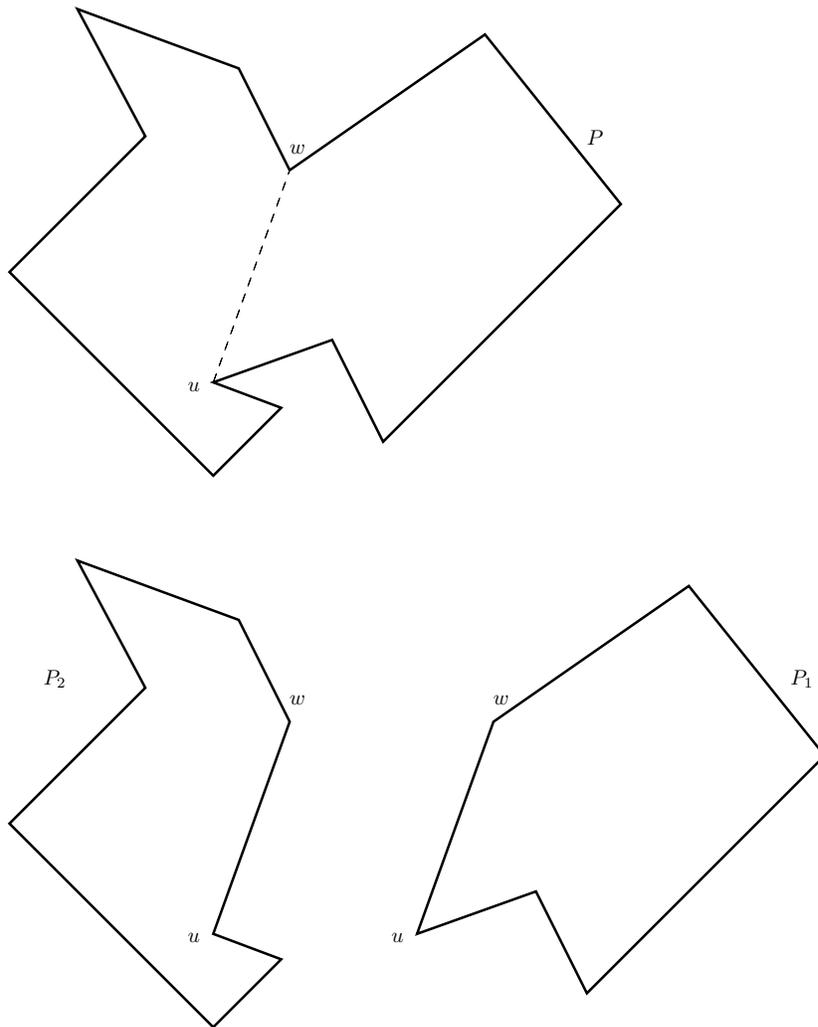


Figura 1.3: Dos subpolígonos de un polígono simple  $P$ .

Sólo resta por demostrar que cualquier triangulación de un polígono simple  $P$  consiste de  $n - 2$  triángulos. Consideremos una diagonal  $\overline{uw}$  de una triangulación de  $P$ , esta diagonal  $d$

divide a  $P$  en dos subpolígonos  $P_1$  y  $P_2$  con  $m_1$  y  $m_2$  vértices, respectivamente. Cada vértice del polígono simple  $P$  aparece solamente en uno de los subpolígonos  $P_1$  y  $P_2$ , excepto los vértices que definen a la diagonal  $\overline{uw}$ , pues estos vértices aparecen tanto en  $P_1$  y  $P_2$ . Ver Figura 1.3.

Ya que  $m_1 + m_2 = n + 2$ , cualquier triangulación de  $P_1$  consiste de  $m_1 - 2$  triángulos ( $m_2 - 2$  triángulos en  $P_2$ , respectivamente), lo que implica que una triangulación de un polígono simple de  $n$  vértices consiste de  $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n - 2$  triángulos. ■

El Teorema 1.1 implica que cualquier polígono simple de  $n$  vértices puede ser vigilado con  $n - 2$  guardias, esto último resulta si colocamos un guardia en cada triángulo de una triangulación  $T$  de un polígono simple  $P$ . Pero colocar un guardia en cada triángulo de  $T$  puede resultar excesivo, pues un guardia colocado en una diagonal vigilará dos triángulos de  $T$ , lo que requiere de, aproximadamente,  $\frac{n}{2}$  guardias. En cambio, si colocamos a los guardias en los vértices de  $P$  puede dar mejores resultados, pues un vértice  $u$  de  $P$  puede pertenecer a varios triángulos de  $T$ , por lo que un guardia colocado en un vértice  $u$  vigilará a los triángulos que tengan al vértice  $u$ .

Sea  $T$  una triangulación de un polígono simple  $P$ . Seleccionemos un subconjunto de los vértices de  $P$ , tal que cada triángulo de  $T$  tenga al menos a uno de los vértices seleccionados y en cada uno de los vértices seleccionados coloquemos un guardia. Para hallar tal subconjunto, asignaremos a cada vértice de un polígono simple  $P$  un color, por ejemplo: verde, rojo o azul. La coloración será tal que para cualquier par de vértices conectados por una arista o diagonal reciban colores distintos. Esto resulta en una 3-coloración de un polígono simple triangulado (si vemos a la triangulación como una gráfica). En una 3-coloración de un polígono simple triangulado, cada triángulo tiene un vértice verde, un vértice rojo y un vértice azul. Por ejemplo, si colocamos guardias en todos los vértices azules, vigilamos todo el polígono. Si elegimos a los vértices con el color que menos aparece, podemos vigilar a  $P$  usando a lo más  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias. Ver Figura 1.4.

¿Pero siempre existe una 3-coloración en una gráfica? La respuesta es sí. Con este resultado, cualquier polígono simple puede ser vigilado con  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias. Tal vez este número de guardias podría ser mejorado, después de todo, un guardia colocado en un vértice  $v$  de un polígono simple puede vigilar no sólo a los triángulos que tengan al vértice  $v$ . Desafortunadamente, para cualquier número  $n$ , hay polígonos simples que necesitan exactamente  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias. Un ejemplo de esto último, es un polígono simple en forma de *peineta*, que consiste de una larga arista horizontal como base y  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  “dientes”. Ver Figura 1.5.

En este polígono *peineta* es fácil ver que no hay un vértice desde el cual un guardia pueda



vigilar dos “dientes” simultáneamente, por lo que no podemos esperar que una nueva estrategia produzca menos de  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias. En otras palabras, la estrategia de la 3-coloración es óptima.

Con todo lo anterior hemos probado el *Teorema de la Galería de Arte*, un resultado clásico de la geometría combinatoria, el cual dice:

**Teorema 1.2**  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono simple de  $n$  vértices.

### 1.2.2. Teorema de la Galería de Arte en polígonos ortogonales

El resultado del problema de la galería de arte en polígonos ortogonales se debe a J. Khan, M. Klawe y D. Kleitman [15], quienes probaron el siguiente teorema:

**Teorema 1.3** Cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices puede ser vigilado con a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias.

La prueba de este Teorema se basa en el siguiente resultado, cuya demostración será omitida en este trabajo.

**Teorema 1.4** Todo polígono ortogonal puede descomponerse en cuadriláteros convexos.

Considerando este resultado, ahora podemos probar el Teorema 1.3.

**Prueba.** Sea  $P$  un polígono ortogonal con  $n$  vértices, para demostrar que  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias son siempre suficientes para vigilar a  $P$ , primero obtenemos una descomposición de  $P$  en cuadriláteros convexos, que llamaremos *cuadrilaterización*  $Q$  de  $P$ . A continuación, en cada cuadrilátero de  $Q$ , agregaremos las diagonales que conectan vértices opuestos. Si a la cuadrilaterización  $Q$  la interpretamos como una gráfica  $H$ , es fácil ver que  $H$  es 4-coloreable en vértices. Ver Figura 1.6.

Como en la prueba del Teorema 1.2, si elegimos los vértices con el color que menos aparece en la 4-coloración y en ellos colocamos a los guardias, podemos vigilar a  $P$  usando a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias.

Para demostrar que esta misma cantidad de guardias son necesarios, existe una familia de polígonos ortogonales que requieren exactamente  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias para ser vigilados. Ver Figura 1.7.

■

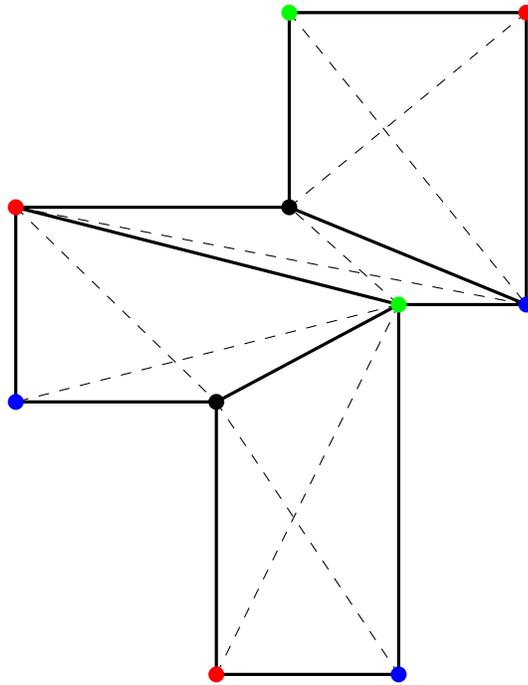


Figura 1.6: Una cuadrilaterización de un polígono ortogonal y su 4-coloración.

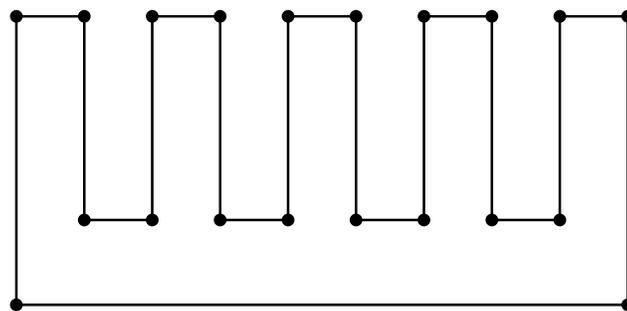


Figura 1.7: Un polígono peineta ortogonal.

### 1.3. Vigilancia de Galerías de Arte rectangulares

En el problema de la galería de arte, una galería es un polígono simple de  $n$  vértices en el plano. En una configuración más realista, una galería de arte es un edificio rectangular subdividido en cuartos rectangulares donde cada dos cuartos adyacentes tienen una puerta en común. Ver Figura 1.8.

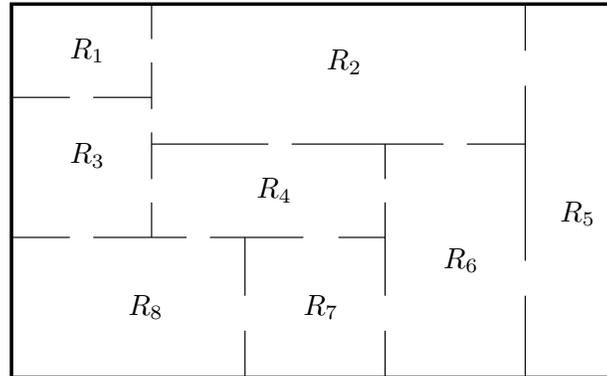


Figura 1.8: Una galería de arte rectangular  $T$ .

El problema de la galería de arte rectangular se plantea como sigue: ¿Cuántos guardias necesitan ser colocados en la galería de manera que todos los cuartos sean vigilados?

Observemos que si colocamos un guardia en una puerta se vigilan dos cuartos pero no tres, de esto se desprende que si la galería de arte tiene  $n$  cuartos necesitamos al menos  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias.

**Teorema 1.5** Cualquier galería de arte rectangular con  $n$  cuartos puede vigilarse con exactamente  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias.

La prueba de este Teorema se basa en el siguiente resultado de W. Tutte [28], cuya demostración será omitida en este trabajo.

**Teorema 1.6** Una gráfica  $G = (V, E)$  tiene un emparejamiento perfecto si, y sólo si, para cada subconjunto  $S$  de  $V$ ,  $impar(G - S) \leq |S|$ .

Donde dado un subconjunto  $S$  de vértices de  $G$ ,  $impar(G - S)$  denota al número de componentes con un número impar de vértices al retirar de una gráfica  $G$  el subconjunto de vértices  $S$ .

Considerando al Teorema 1.6, ahora podemos probar el Teorema 1.5.

**Prueba.** (Del Teorema 1.5) Dada una galería de arte rectangular  $T$  con  $n$  cuartos:  $R_1, \dots, R_n$ , podemos asociar a  $T$  una gráfica dual  $G(T)$  representando cada cuarto  $R_i$ , de  $T$ , por un vértice  $v_i$  en  $G(T)$ , dos vértices son adyacentes en  $G(T)$  si sus correspondientes cuartos, en  $T$ , comparten una puerta. Ver Figura 1.9.

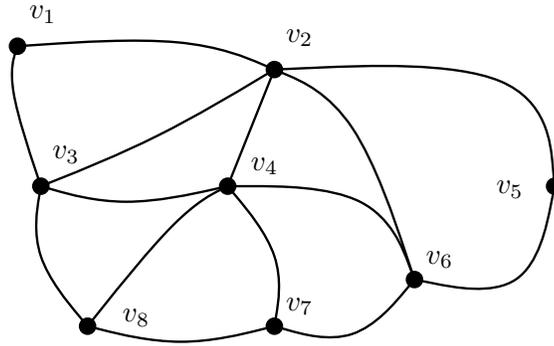


Figura 1.9: La gráfica dual  $G(T)$  de la galería mostrada en la Figura 1.8.

Ahora veremos que si  $G(T)$  tiene un número par de vértices,  $G(T)$  tiene un emparejamiento perfecto. Esto servirá para probar este resultado, ya que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias son necesarios utilizando el emparejamiento perfecto como sigue: por cada arista  $(v_i, v_j)$  del emparejamiento colocaremos un guardia en la puerta que une a los cuartos  $R_i$  y  $R_j$ . Es fácil ver que con estos  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias se vigilan todos los cuartos de la galería rectangular  $T$ .

En caso de que  $G(T)$  tenga un número impar de vértices, es decir la galería  $T$  tiene un número impar de cuartos, puede ser resuelto del modo anterior si tomamos cualquier cuarto de  $T$  y lo dividimos en dos subcuartos.

Supongamos que  $G(T)$  tiene un número par de vértices. Para probar que  $G(T)$  tiene un emparejamiento perfecto, mostraremos que  $G(T)$  satisface las condiciones del Teorema 1.6 para la existencia de un emparejamiento perfecto. El Teorema 1.6 exige que para cualquier subconjunto  $S$  de vértices de  $G(T)$ , el número de componentes impares de  $G(T) - S$  no exceda a  $|S|$ .

Sea  $k$  el número de componentes conexas de  $G(T) - S$  y veamos nuestra galería de la siguiente manera: cada cuarto de  $T$  lo representaremos por un rectángulo y cada componente conexo de  $G(T) - S$  lo representaremos por un subpolígono ortogonal (que a su vez representa a uno o más rectángulos). Una manera más fácil de comprender esto último, es visualizar cada cuarto de  $T$  como una pequeña caja, y todas estas cajas estarán contenidas en una caja más grande.

Cada subpolígono ortogonal tiene al menos cuatro esquinas, y el número total de las esquinas determinadas por los  $k$  componentes de  $G(T) - S$  es de al menos  $4k$ .

Cuando retiramos de  $T$  (la caja grande) los rectángulos (las cajas pequeñas) que representan

los vértices de  $S$ , obtendremos una familia de  $k$  subpolígonos ortogonales disjuntos con un número de esquinas de al menos  $4k$ .

La siguiente observación es esencial para la prueba de este teorema: cuando un rectángulo es devuelto, a lo más 4 esquinas desaparecerán. Una vez que todos los rectángulos son devueltos, todas las esquinas generadas por los componentes de  $G(T) - S$  también desaparecen, excepto las cuatro esquinas de  $T$  (la caja grande). Ver Figura 1.10.

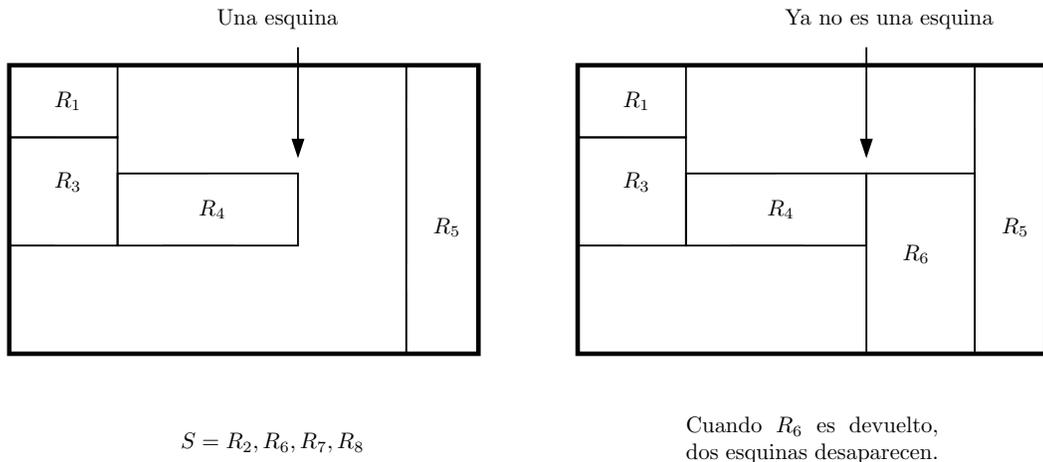


Figura 1.10: Retiro y devolución de un rectángulo en la galería  $T$ .

Entonces se tiene que  $k \leq |S| + 1$ . Podemos verificar que si  $k = |S| + 1$  entonces al menos uno de los componentes de  $G(T) - S$  es par, en caso contrario, el número de vértices de  $G(T)$  sería impar, lo que contradice nuestra suposición de que el número de vértices de  $G(T)$  es par. ■

### 1.4. Iluminación con reflectores

En los problemas anteriores se ha asumido que los guardias vigilan en todas direcciones. Ahora presentaremos un problema de vigilancia en donde los guardias tienen un ángulo restringido de vigilancia. Dada la gran variedad de problemas de galerías de arte, el siguiente problema fue planteado con fuentes de luz (reflectores) que *iluminan* en lugar de guardias que *vigilan* [29].

**Definición 1.1** Un reflector  $f_i$  es una fuente de luz localizada en un punto  $p$ , del plano, que ilumina sólo dentro de un ángulo no nulo  $\alpha_i$ .

**Problema 1.1** Sean los ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , tales que,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$  y  $P$  un polígono convexo de  $n$  vértices. ¿Podemos colocar tres reflectores con ángulo de lo más  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , con a lo más un reflector por vértice de  $P$ , de tal forma que  $P$  sea completamente iluminado?

**Teorema 1.7** Este problema siempre tienen una respuesta afirmativa como veremos a continuación. El resultado es cierto cuando  $P$  sólo tiene tres vértices, pues basta con colocar los reflectores en cada vértice de  $P$  y ajustar cada reflector para que tenga el mismo ángulo que su respectivo vértice.

Consideremos cualquier polígono convexo  $P$  con al menos cuatro vértices y supongamos que los ángulos tienen el siguiente orden:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$$

Observemos que  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$  y como  $P$  tiene al menos cuatro vértices, el ángulo interior de cada vértice de  $P$  es de al menos  $\frac{\pi}{2}$ .

Sea  $T$  un triángulo con ángulos interiores  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ , donde el vértice de  $T$  con ángulo  $\alpha_2$  coincida con un vértice  $v$  del polígono  $P$  y los otros vértices de  $T$ , con ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ , coincidan con dos puntos  $x$  y  $y$  de la frontera de  $P$ . Supongamos que los puntos  $x$  y  $y$  pertenecen respectivamente a dos aristas distintas  $e_1$  y  $e_3$  de  $P$ . Ver Figura 1.11.

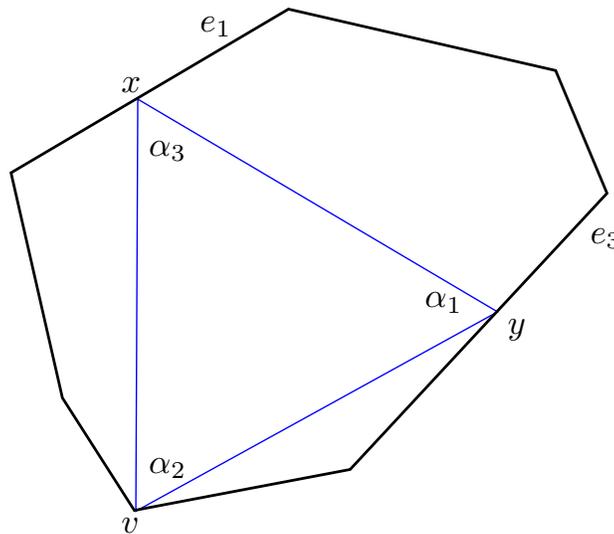
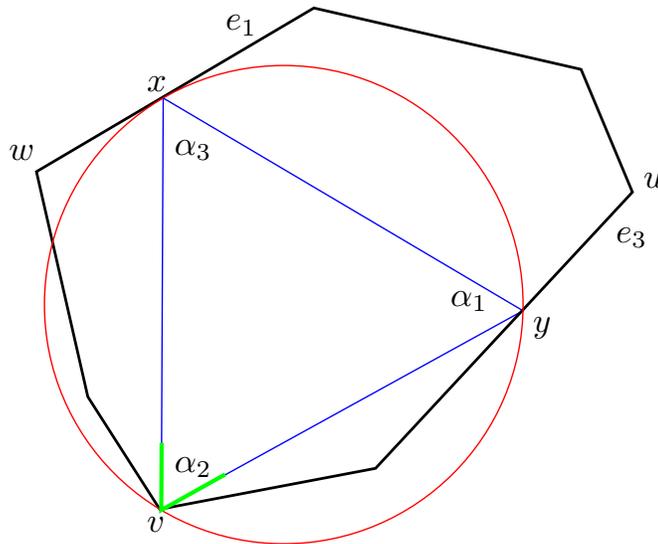


Figura 1.11: Un polígono convexo  $P$  y un triángulo  $T$ .

Coloquemos un reflector  $f_2$  (con ángulo  $\alpha_2$ ) en el vértice  $v$  del triángulo  $T$  y consideremos el círculo  $C$  que pasa por los vértices  $x$ ,  $v$  y  $y$ . Observemos que al menos uno de los vértices

por cada arista  $e_1$  y  $e_3$  no están contenidos en el interior del círculo  $C$ , sean  $u$  y  $w$  los vértices respectivos de  $e_1$  y  $e_3$  que no están contenidos en  $C$ . Ver Figura 1.12.



∠ Reflector

Figura 1.12: Un polígono convexo  $P$ , un triángulo  $T$  y el círculo  $C$ .

Dos casos se presentan:

1.  $u \neq w$ . Colocaremos un par de reflectores  $f_1$  y  $f_3$  en los vértices  $u$  y  $w$  de  $P$ , iluminando de esta manera la región determinada por  $v, u, x$  y  $v, w, y$ , respectivamente. Como  $u$  y  $w$  son vértices que no están contenidos en el círculo  $C$ , los ángulos de iluminación de  $f_1$  y  $f_3$  son respectivamente  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ . Ver Figura 1.13
2.  $u = w$ . Considerando los puntos  $x$  y  $y$  que tocan al círculo  $C$ , es posible verificar que el ángulo  $\alpha$  del vértice  $u$  de  $P$  es a lo más  $\pi - 2\alpha_2$ , cantidad que es menor o igual a  $\alpha_3 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$ . Si colocamos un vértice con tamaño  $\alpha$  en el vértice  $u$  de  $P$ , logramos iluminar a  $P$ . Ver Figura 1.14.

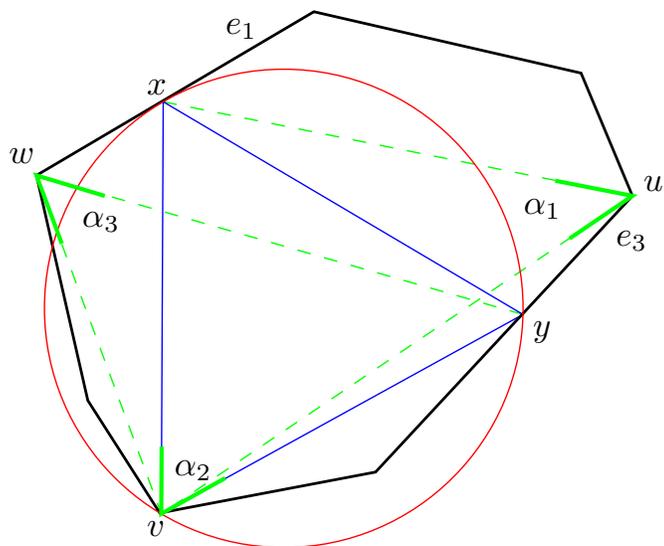


Figura 1.13: Ilustración de la prueba del problema de los reflectores (caso  $u \neq w$ ).

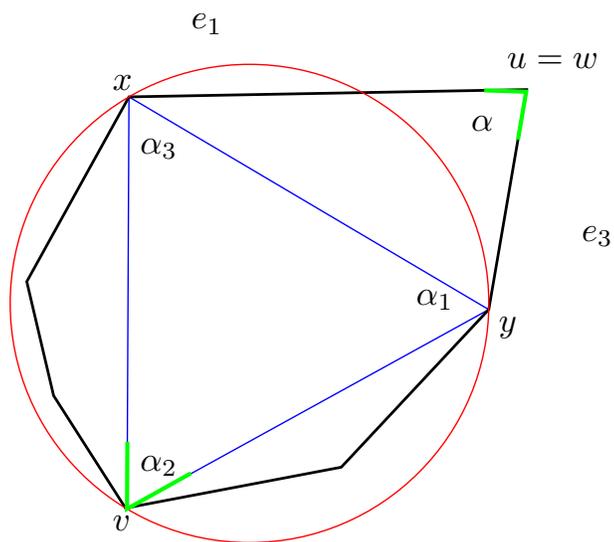


Figura 1.14: Ilustración de la prueba del problema de los reflectores (caso  $u = w$ ).

## 1.5. Vigilancia de familias de segmentos de líneas

En páginas anteriores, hemos expuesto algunas de las definiciones sobre visibilidad que involucran a los segmentos de líneas y a sus dos posibilidades: el problema de vigilar a los segmentos de líneas o vigilar al plano, donde los segmentos de líneas figuran como obstáculos. En esta sección solo abordaremos el problema en el que se tiene que vigilar al plano.

### 1.5.1. Vigilancia del plano

El primer resultado acerca del problema de la vigilancia del plano  $\mathfrak{R}^2$ , en presencia de una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntas, fue obtenido por J. O'Rourke [23], quien mostró que  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$  guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios.

Para comprender mejor la prueba de O'Rourke, consideremos el siguiente resultado en gráficas planas obtenido por T. Nishizeki [21], cuya demostración omitimos en este trabajo.

**Teorema 1.8** Cualquier gráfica plana de  $n \geq 14$  vértices, 2-conexa y con vértices de grado al menos 3; tiene un emparejamiento de al menos  $\lfloor \frac{n+4}{3} \rfloor$  aristas. Cuando  $n < 14$  vértices el emparejamiento es de al menos  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  aristas.

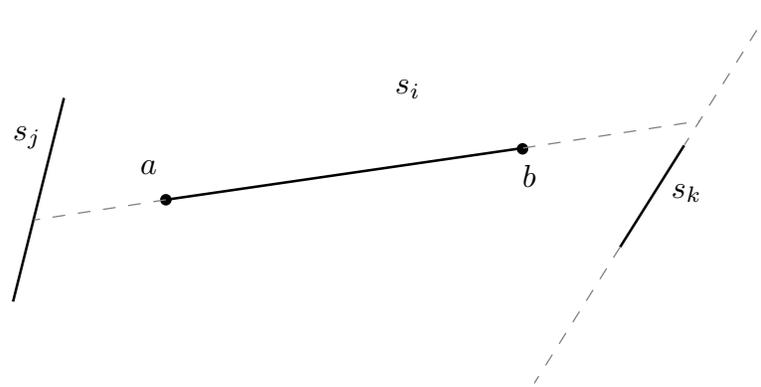
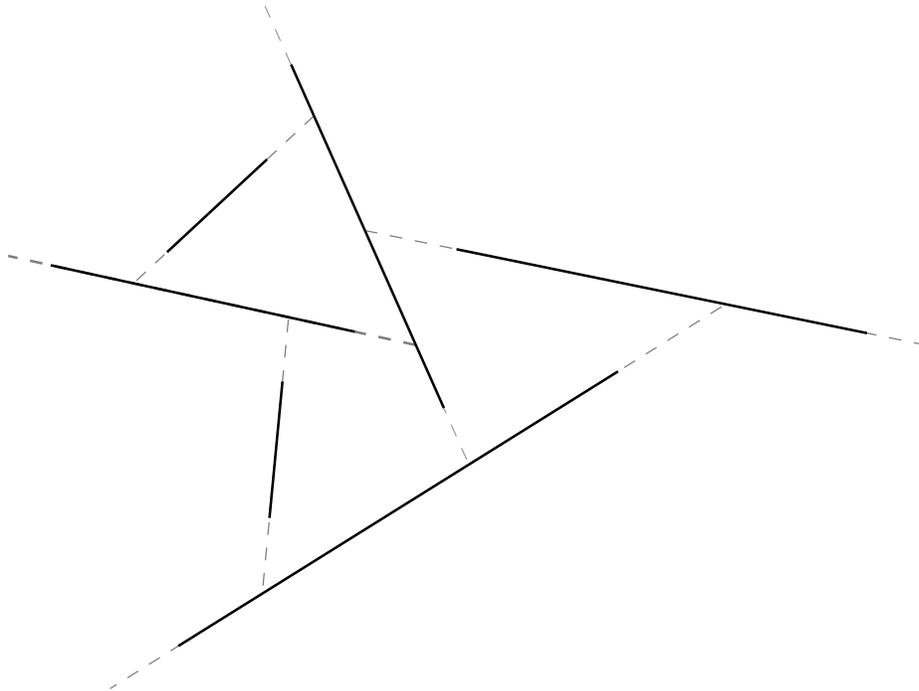
Haciendo uso del Teorema anterior, se puede demostrar lo siguiente:

**Teorema 1.9** Sea  $S$  una familia de  $n \geq 5$  segmentos de líneas disjuntas,  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el plano con la presencia de  $S$  como obstáculos.

**Prueba.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  segmentos de líneas disjuntas en el plano. Por cada segmento  $s_i$  en  $S$ ,  $1 \leq i \leq n$ , hacemos lo siguiente: si  $a$  y  $b$  son los puntos terminales de  $s_i$ , prolongamos el segmento del lado de  $a$  (siguiendo la línea  $\ell(ab)$ ) hasta que toquemos otro segmento en  $S$  o la extensión de algún otro segmento, y hacemos lo mismo con el extremo  $b$ . Es importante que al extender un segmento distingamos entre el segmento original y sus extensiones. Ver Figura 1.15.

Al finalizar las extensiones de los  $n$  segmentos, se induce una partición  $R$ , del plano, en  $n+1$  regiones disjuntas. Observemos que en la partición  $R$  existen regiones acotadas y no acotadas. Ver Figura 1.16.

También podemos notar que en la partición  $R$ , el número de segmentos de líneas (o extensiones) que comparten las regiones acotadas y las no acotadas son distintos: las regiones acotadas comparten segmentos de líneas (o extensiones) con al menos *tres* regiones, mientras

Figura 1.15: El segmento  $s_i$  y su extensión.Figura 1.16: La familia de segmentos, sus extensiones y la partición  $R$ .

que las regiones no acotadas comparten segmentos de líneas (o extensiones) con al menos *dos* regiones.

Considerando a la partición  $R$ , construiremos su gráfica dual  $D$  como sigue: por cada región en  $R$  colocaremos un vértice y uniremos dos vértices si las regiones a las que representan comparten un segmento o extensión. Ver Figura 1.17.

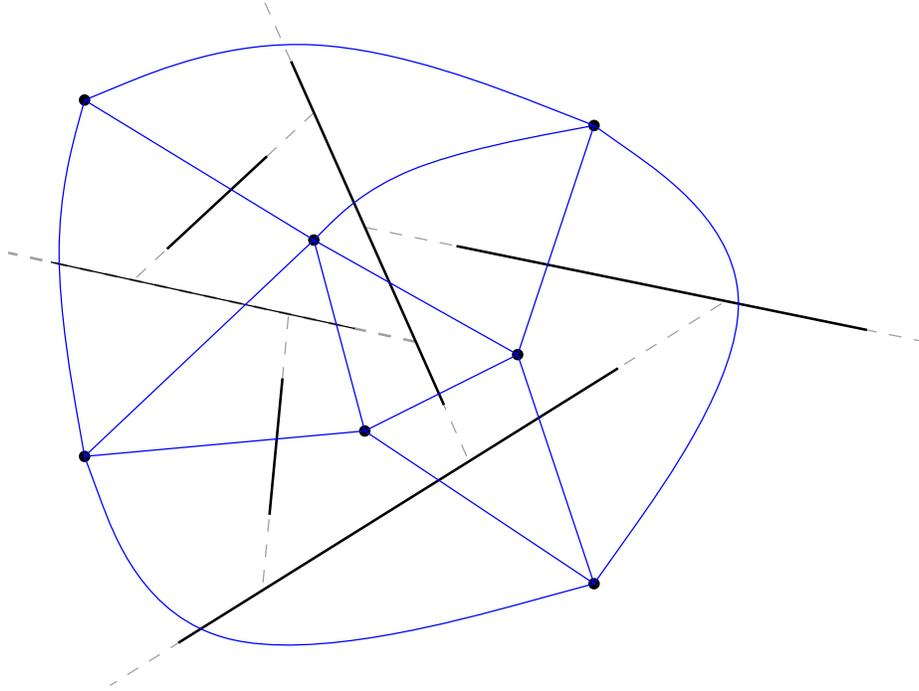


Figura 1.17: La gráfica dual  $D$  de la partición del plano obtenida por extensiones de una familia de segmentos.

La gráfica  $D$  puede tener vértices de grado dos, esto ocurre exactamente en los vértices que representan las regiones no acotadas de la partición  $R$ , y para que la gráfica  $D$  cumpla con los grados en vértices que exige el Teorema 1.8, agregaremos en  $D$  un *vértice auxiliar*  $x$  que sea vecino a los vértices que representan a las regiones no acotadas, llamaremos a esta nueva gráfica  $D'$ . Ver Figura 1.18.

Obteniendo un emparejamiento  $M$  en la gráfica  $D'$ , es fácil ver que el número de aristas de  $M$  (que cumple con la hipótesis del Teorema 1.8) es de al menos:

$$\left\lceil \frac{((n+1)+1)+4}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+6}{3} \right\rceil$$

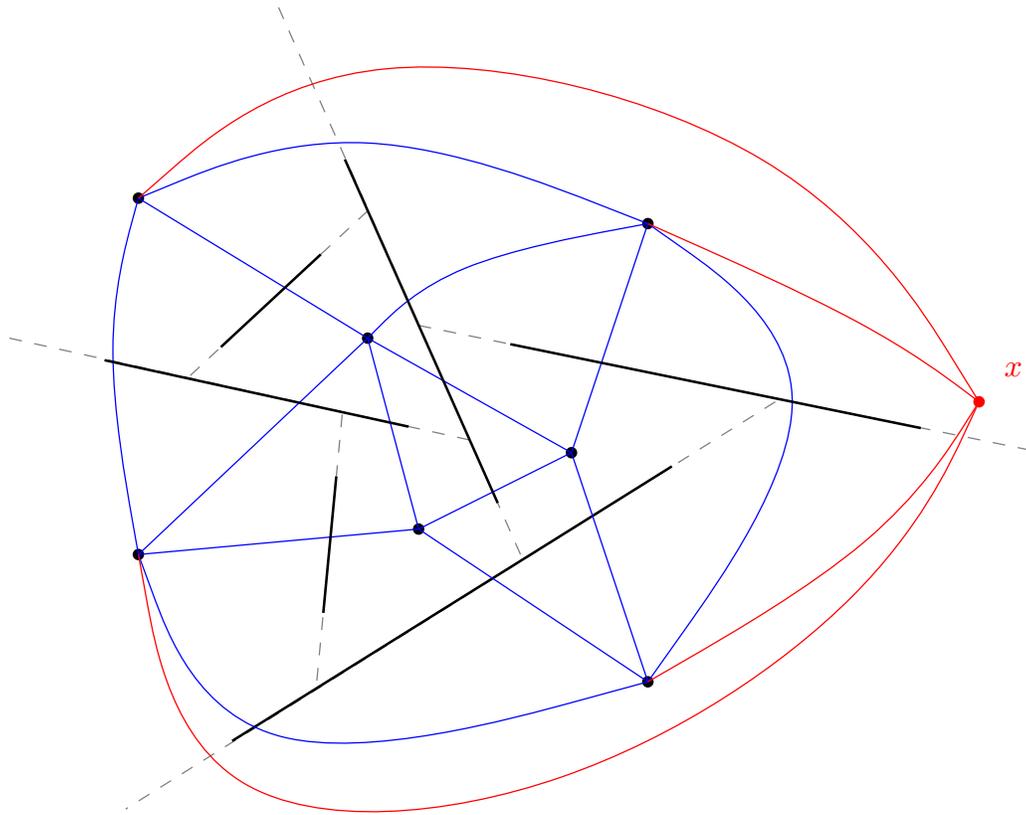


Figura 1.18: La gráfica dual  $D$  y el vértice auxiliar  $x$ .

Regresando a la Figura 1.16, podemos notar que dos regiones que comparten un segmento de línea (o una extensión) pueden ser vigilados con un guardia colocado *posiblemente* en un punto del segmento de línea compartido; por lo que si usamos  $\lceil \frac{n+6}{3} \rceil$  guardias podemos vigilar  $2\lceil \frac{n+6}{3} \rceil - 1$  regiones. El  $-1$  en la ecuación anterior es para considerar el caso en que el vértice auxiliar  $x$  forma parte del emparejamiento  $M$ .

Observemos que en los vértices que no participan en el emparejamiento  $M$ , sus respectivas regiones, en  $R$ , permanecen sin vigilancia, siendo el número de estas regiones sin vigilancia igual a  $(n+1) - 2\lceil \frac{n+6}{3} \rceil - 1$ , por lo que cada una de estas regiones sin vigilancia necesitan un guardia.

El número de guardias que son siempre suficientes para vigilar el plano  $\mathfrak{R}^2$  teniendo como obstáculos a  $n$  segmentos de líneas, es de:

$$(n+1) - 2\left\lceil \frac{n+6}{3} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+6}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$$

A continuación mostraremos una familia de segmentos de líneas en las que  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias son necesarios. Consideremos una familia de  $n$  segmentos de líneas y una colección  $Q$  de  $m$  puntos distribuidos como se observa en la Figura 1.19.

Notemos que  $n = \frac{3m}{2}$ . En esta familia de segmentos de líneas, es fácil ver que no hay un punto del plano desde el cual un guardia pueda vigilar dos puntos de  $Q$  simultáneamente, por lo que  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias son necesarios para vigilar a  $Q$ . ■

Para el lector interesado en los problemas de galería de arte, recomendaremos el texto de J. O'Rourke [23] junto con las recopilaciones de T. Shermer [26] y J. Urrutia [29].

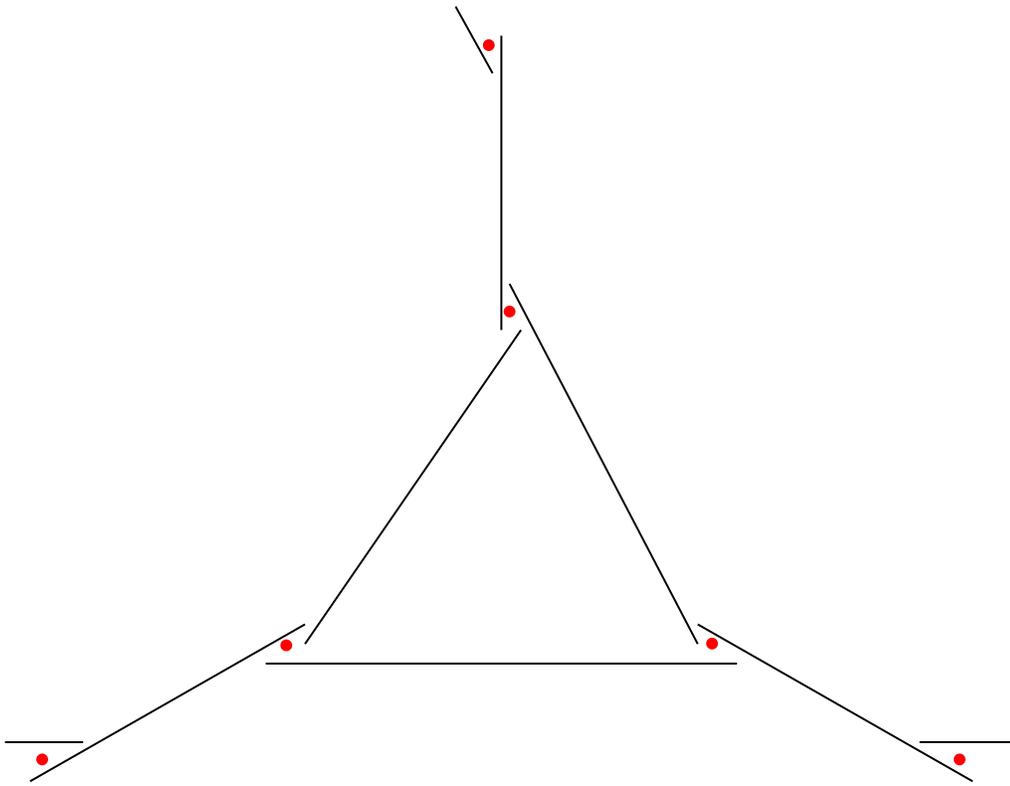


Figura 1.19: Una familia de  $n$  segmentos de líneas en la que son necesarios  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias.

# Capítulo 1

## Un nuevo enfoque en el problema de la Galería de Arte

### 1.1. Introducción

Ahora que tenemos un panorama más claro sobre los problemas de Galerías de Arte, es turno de presentar a los nuevos problemas.

Hoy en día, uno de los dispositivos más utilizados para proporcionar conexión a Internet y compartir recursos computacionales a terminales de tipo móvil como laptops, celulares, agendas electrónicas y otros dispositivos, es el módem inalámbrico. A pesar de la gran versatilidad de estos dispositivos, existen varios factores que ponen en jaque la conexión entre el módem y las terminales móviles; algunos de esos factores son los siguientes: la petición de servicio de un número masivo de usuarios, las interferencias de alguna frecuencia ajena y los obstáculos físicos entre el módem y las terminales móviles.

Es precisamente en este último factor, donde encontramos la inspiración para realizar esta tesis. A partir de esta idea, hemos propuesto un problema para analizarlo bajo un marco teórico y presentarlo como una variante, no documentada en la literatura, del problema de la Galería de Arte. Hemos planteado nuestro problema de la siguiente manera:

**Problema 1.1** Investigar la relación que existe entre una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntas en el plano  $\mathbb{R}^2$  y guardias encargados de vigilar el plano, tal que la vigilancia de los guardias pueda atravesar un número  $k$  de segmentos de líneas.

Para trabajar en la solución de este problema, utilizaremos las siguientes definiciones:

**Definición 1.1** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntas en el plano  $\mathbb{R}^2$ , dos puntos

$p$  y  $q$  son  $k$ -visibles si el segmento de línea  $\overline{pq}$  interseca a lo más  $k$ -segmentos de líneas de  $S$ . Ver Figura 1.1.

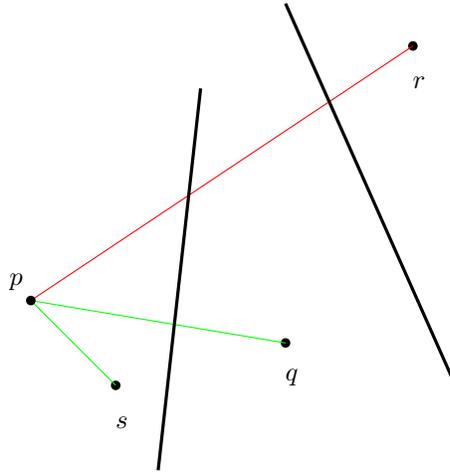


Figura 1.1: En una familia de dos segmentos de línea los puntos  $q$  y  $s$  son 1-visibles desde  $p$ , pero  $r$  no lo es. Sin embargo,  $r$  es 2-visible desde  $p$ .

**Definición 1.2** Llamaremos  $k$ -guardia, al guardia que vigila un punto del plano  $\mathbb{R}^2$  atravesando a lo más  $k$  segmentos de líneas.

También tenemos la definición de  $k$ -visibilidad cuando los  $k$ -guardias se usan en polígonos:

**Definición 1.3** Sean  $p$  y  $q$  dos puntos en el interior de un polígono  $P$ , diremos que  $q$  es  $k$ -visible desde  $p$  si el segmento de línea  $\overline{pq}$  interseca a lo más  $k$  aristas de  $P$ . Ver Figura 1.2.

## 1.2. Vigilancia en segmentos de líneas

El primer problema que estudiamos fue en familias de segmentos de líneas paralelas. Ver Figura 1.3.

En este problema, los segmentos de líneas son paralelos al eje  $y$  y cada segmento de línea está separado uno del otro por una distancia (posiblemente constante)  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Observemos que la proyección de cada segmento de línea ocurre en puntos distintos en el eje  $x$ , es decir, la proyección de dos segmentos de líneas no comparten un mismo punto en la *abscisa*.

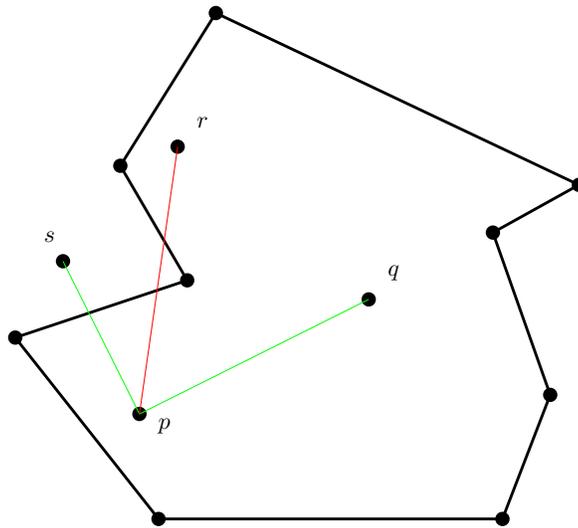


Figura 1.2: En un polígono simple los puntos  $q$  y  $s$  son 1-visibility desde  $p$ , pero  $r$  no lo es. Sin embargo,  $r$  es 2-visible desde  $p$ .

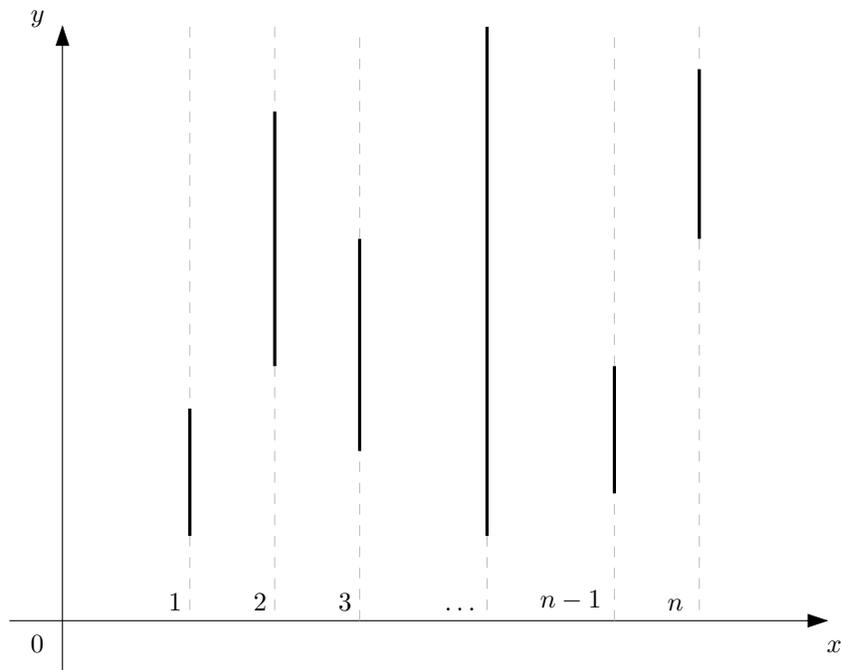


Figura 1.3: Representación de  $n$  segmentos de líneas paralelas en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Problema 1.2** Sea  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  una familia de  $n$  segmentos de líneas paralelas en el plano  $\mathbb{R}^2$ , ¿cuántos 1-guardias son siempre suficientes para vigilar el plano con la presencia de los  $n$  segmentos de  $S$  como obstáculos?

Antes de resolver el problema, es conveniente tomar en cuenta lo siguiente:

Consideremos dos segmentos paralelos  $s_1$  y  $s_2$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  y sean  $p$  y  $q$  dos puntos en el plano. Ahora supongamos que el punto  $q$  no es 1-visible desde el punto  $p$ , es decir, el segmento de línea  $\overline{pq}$  interseca a los segmentos de líneas  $s_1$  y  $s_2$ . Observemos que si un 1-guardia estuviera en el punto  $p$ , el punto  $q$  sería al menos un punto del plano no 1-vigilado. Ver Figura 1.4.

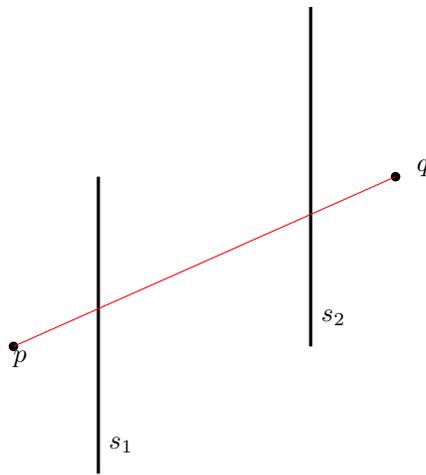


Figura 1.4: El punto  $q$  no es 1-visible desde el punto  $p$ .

Sea  $r$  un punto del plano, de modo que los puntos  $p$  y  $q$  sean 1-visibility desde  $r$ . Nuevamente observemos que si un 1-guardia estuviera en el punto  $r$ , el punto  $q$  es 1-vigilado (al igual que  $p$ ). Ver Figura 1.5

Sea  $q'$  un punto del plano  $\mathbb{R}^2$  tal que los puntos  $p$  y  $q$  sean 1-visibility desde el punto  $r$ , pero el punto  $q'$  no sea 1-visible desde  $r$ . Figura 1.6.

Sea  $r'$  un punto en el plano, de tal modo que los puntos  $p, q$  y  $q'$  sean 1-visibility desde  $r'$ . Ver Figura 1.7.

Tomando en cuenta todo lo anterior, nos preguntamos lo siguiente: ¿existirá una colección de puntos, desde el cual un 1-guardia vigile cada punto del plano  $\mathbb{R}^2$ ?

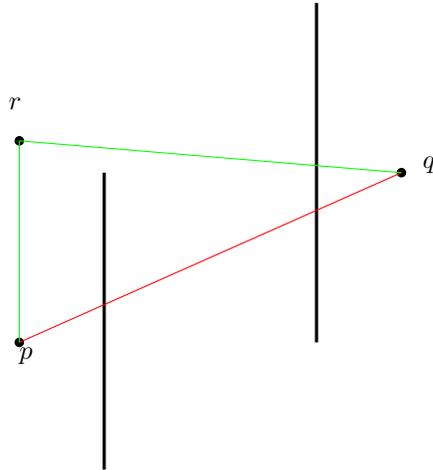


Figura 1.5: Los puntos  $p$  y  $q$  son 1-visibles desde el punto  $r$ .

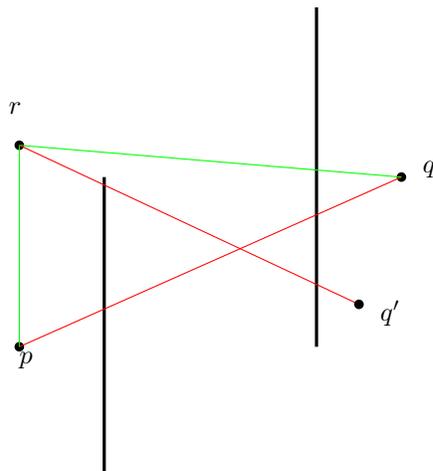


Figura 1.6: Los puntos  $p$  y  $q$  son 1-visibles desde el punto  $r$ , pero el punto  $q'$  no es 1-visible desde  $r$ .

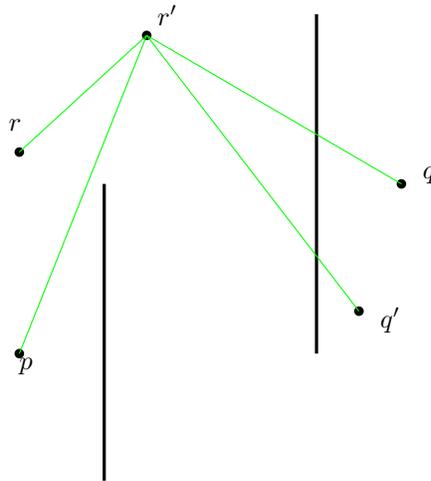


Figura 1.7: Los puntos  $p, q, r$  y  $q'$  son 1-visibles desde el punto  $r'$ .

**Lema 1.1** Sean  $s_1$  y  $s_2$  dos segmentos de líneas paralelas en el plano  $\mathbb{R}^2$ , un 1-guardia es siempre suficiente para vigilar el plano con la presencia de  $s_1$  y  $s_2$  como obstáculos.

**Prueba.** Sean  $s_1$  y  $s_2$  dos segmentos de líneas paralelas en el plano y sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos *líneas auxiliares* determinadas de la siguiente manera:

- $\ell_1$  : La línea que pasa por el extremo inferior del segmento de línea  $s_1$  y por el extremo superior del segmento de línea  $s_2$ .
- $\ell_2$  : La línea que pasa por el extremo superior del segmento de línea  $s_1$  y por el extremo inferior del segmento de línea  $s_2$ . Ver Figura 1.8.

Observemos la Figura 1.9, sea  $R$  la región sombreada determinada por el par de líneas  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . Para que un 1-guardia vigile todo el plano, debe estar en cualquier punto de la región  $R$ , ya que es fácil ver que el segmento de línea que une a un punto de  $R$  y cualquier punto del plano no atraviesa a los dos segmentos de líneas simultáneamente, siendo que a lo más atraviesa a uno de esos segmentos. ■

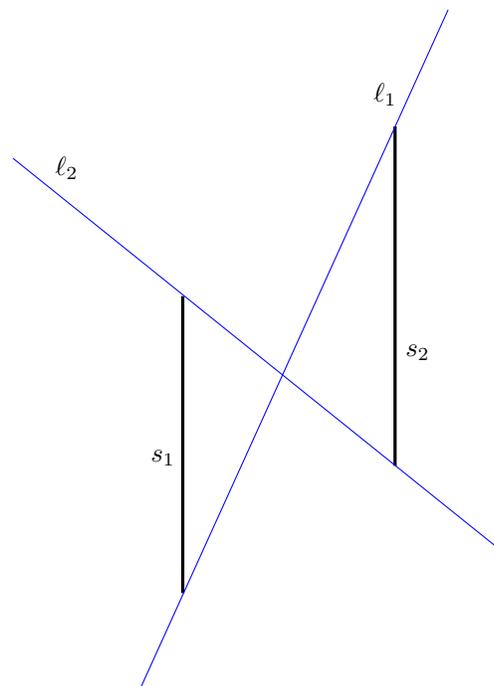


Figura 1.8: Los segmentos de líneas  $s_1$  y  $s_2$ .

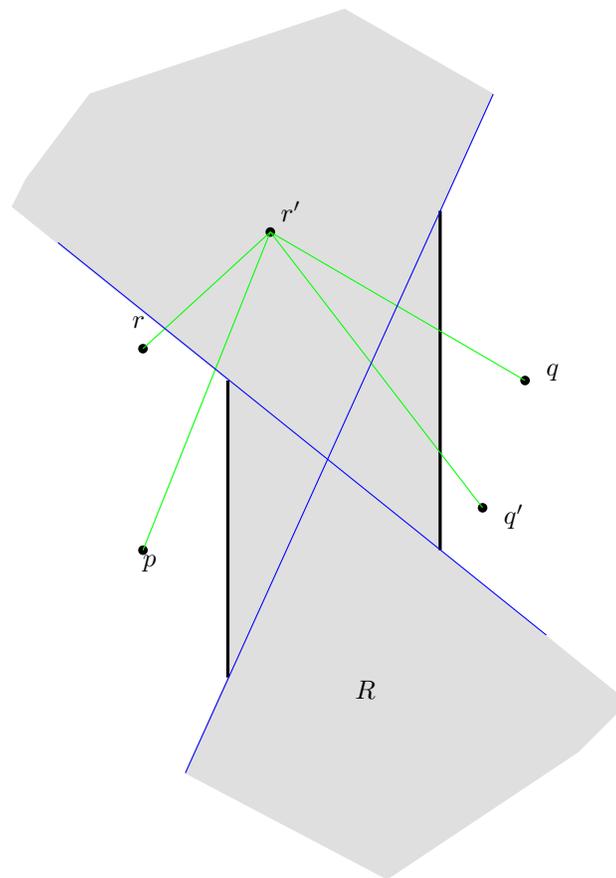


Figura 1.9: Los puntos  $p, q, r$  y  $q'$  son 1-visibles desde el punto  $r'$ .

**Teorema 1.1** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas paralelas en el plano, un 1-guardia es siempre suficiente para vigilar el plano con la presencia de los  $n$  segmentos de  $S$  como obstáculos.

**Prueba.** Sea  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  una familia de  $n$  segmentos de líneas paralelas en el plano. Cuando  $n = 2$  este Teorema es cierto, pues es el mismo caso del Lema 1.1.

Sea  $n \geq 3$ . Tomando cada par de segmentos consecutivos  $s_i$  y  $s_{i+1}$  dibujaremos un par de líneas auxiliares  $\ell_i$  y  $\ell_{i+1}$ , como las que fueron descritas en la demostración del Lema 1.1.

A manera de ejemplificar lo anterior, consideremos 3 segmentos de líneas paralelas. Por cada par de segmentos de líneas paralelas consecutivas, trazaremos un par de líneas auxiliares. Ver Figura 1.10.

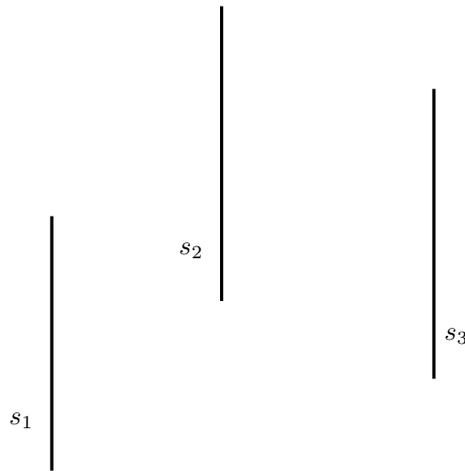


Figura 1.10: Tres segmentos de líneas paralelas en el plano.

En las Figuras 1.11 y 1.12 podemos observar por separado las líneas auxiliares y regiones que corresponden a cada par de segmentos de líneas paralelas consecutivas, aunque realmente las observaríamos como se muestran en la Figura 1.13.

Por cada par de segmentos de líneas paralelas consecutivas existe una región definida para colocar un 1-guardia (la región  $R$ , detallada previamente en la prueba del lema anterior), que vigilaría el plano si sólo hubiese un par de segmentos de líneas paralelas en el plano. Pero si la región que corresponde a un par consecutivo de los  $n$  segmentos de líneas, se traslapa con las otras regiones que pertenecen a otro par de segmentos de líneas, entonces tenemos un par de *regiones comunes* (por arriba y abajo). Denotaremos por  $Q$  a la unión de estas regiones comunes. En la Figura 1.14 podemos ver una representación de  $Q$  para 3 segmentos de líneas.

Observemos que la existencia de las *regiones comunes* es siempre posible, pues las *líneas*

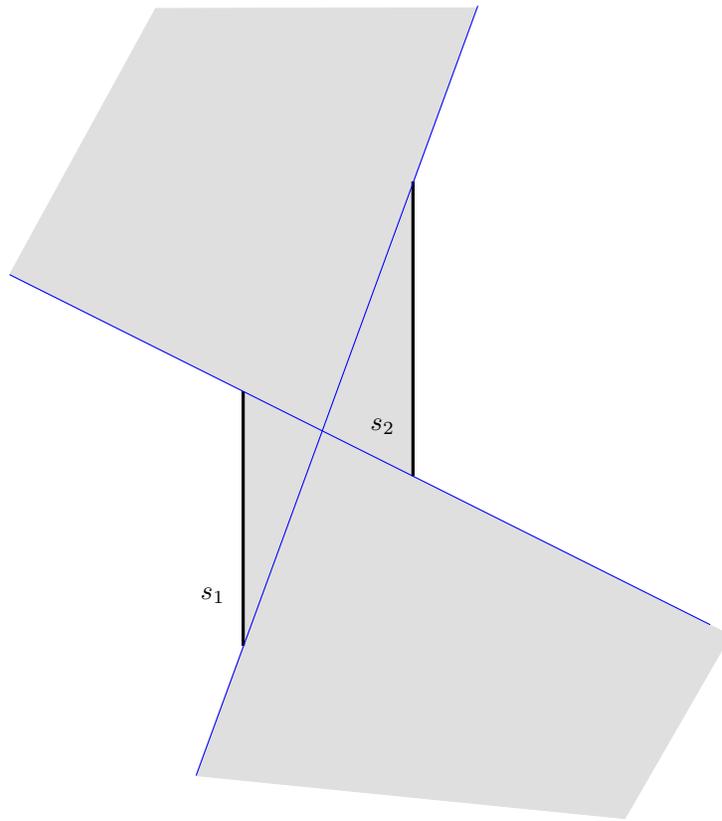


Figura 1.11: Los segmentos de líneas paralelas  $s_1$  y  $s_2$ .

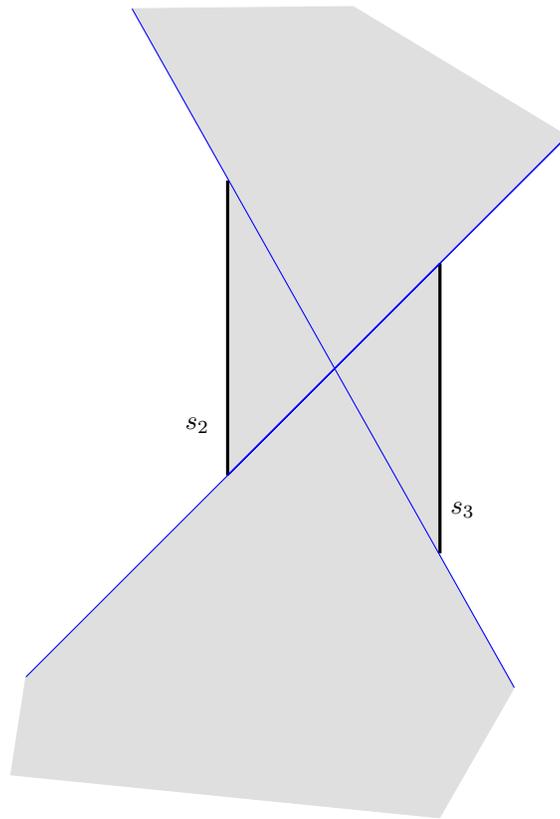


Figura 1.12: Los segmentos de líneas paralelas  $s_2$  y  $s_3$ .

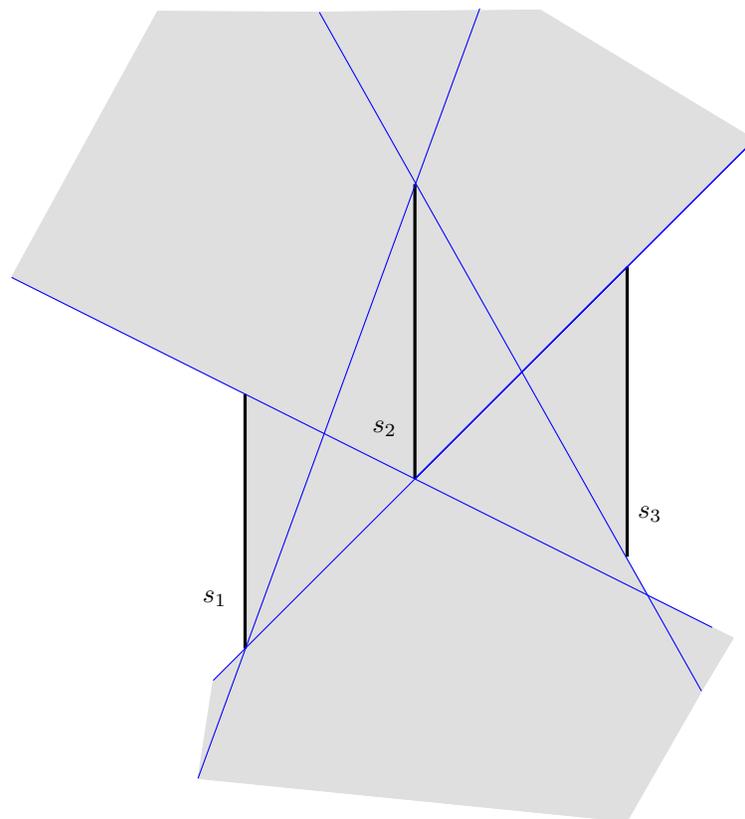


Figura 1.13: Tres segmentos de líneas paralelas en el plano, sus correspondientes líneas auxiliares y las regiones determinadas por ellas (zona sombreada).

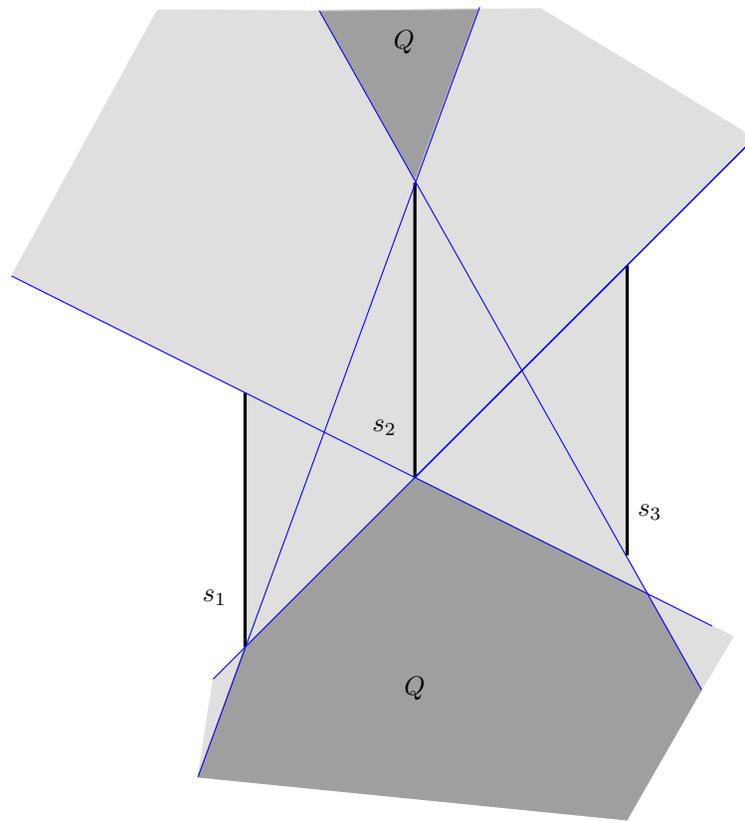


Figura 1.14: Representación de las regiones comunes (en gris) en una familia de 3 segmentos de líneas.

*auxiliares* que corresponden a cada par consecutivo de segmentos de líneas *no son paralelas*, por lo que cualquier par de estas líneas auxiliares intersecarán en algún punto.

Con un argumento similar al que utilizamos en la demostración del Lema 1.1 podemos verificar que siempre existen regiones comunes, donde todos los puntos del plano son 1-visibility desde cualquier punto de cualquiera de estas regiones comunes.

Por tanto, un 1-guardia en un punto de  $Q$  es siempre suficiente para vigilar el plano con la presencia de una familia de  $n$  segmentos de líneas paralelas. ■

Profundizando un poco más en el problema podemos observar que cada región común de  $Q$ , es acotada por una *poligonal* que es *convexa* y *monótona* (con respecto al eje  $x$ ). Ver Figura 1.15.

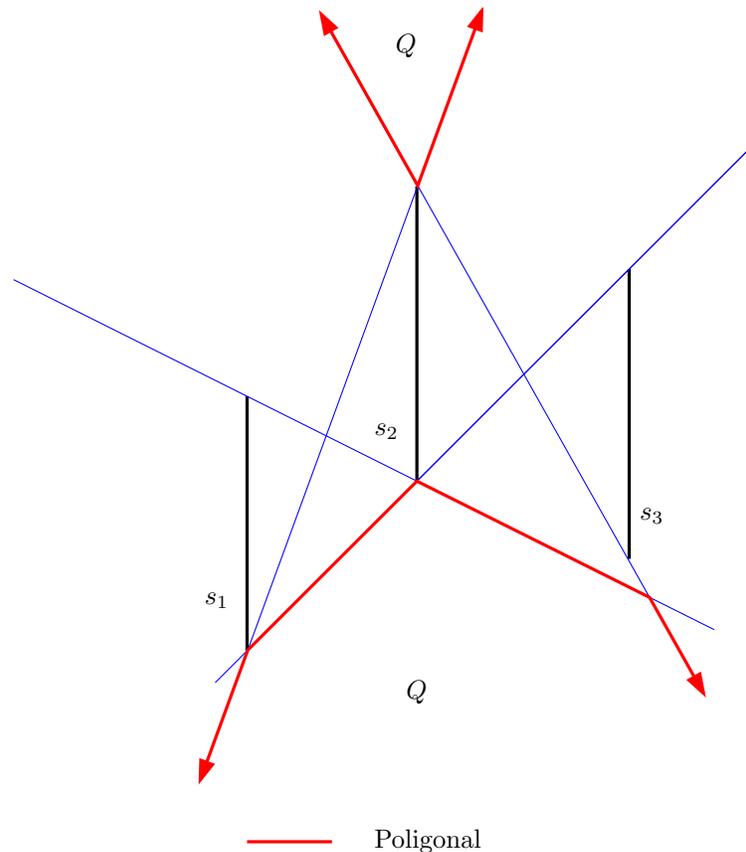


Figura 1.15: Dos poligonales que acotan a cada región común.

Dada una región común y su poligonal, es fácil ver que la poligonal es *convexa*, ya que si cada segmento de la línea de la familia  $S$  fuese una *recta* perteneciente al plano, esta recta

separaría al plano en dos porciones, cada una de ellas conocida con el nombre de *semiplano*. Ya que todo semiplano es un conjunto convexo y la intersección de dos o más conjuntos convexos resulta en un nuevo elemento convexo, se obtiene que una *región común* es un conjunto convexo. Para cerciorarnos de que una región común es convexa tomaremos cualquier par de puntos  $a$  y  $b$  de la región común y veremos que el segmento de línea  $\overline{ab}$  está totalmente contenido en dicha región común. La poligonal de una región común es *monótona* con respecto al eje  $x$ , ya que dada una línea  $\ell$  paralela al eje  $y$ ,  $\ell$  interseca en un sólo punto a la poligonal. Sobre estas poligonales tenemos un sencillo resultado:

**Teorema 1.2** Dada una familia de  $n$  segmentos de líneas paralelas y determinadas sus correspondientes regiones comunes, una de las poligonales de una región común tiene a lo más  $2n - 2$  lados.

**Prueba.** Por cada familia de  $n$  segmentos de líneas paralelas necesitamos  $2n - 2$  *líneas auxiliares* (ver Lema 1.1). Ahora bien, si cada una de estas líneas auxiliares aporta un lado para una poligonal de las regiones comunes, el resultado se obtiene. Ver la poligonal inferior de la Figura 1.15. ■

### 1.3. Vigilancia en polígonos

Supongamos que tenemos solamente un 2-guardia y con él deseamos vigilar un polígono simple  $P$  de  $n$  lados. Si elegimos un punto  $q$  en el interior de  $P$  y colocamos en  $q$  un 2-guardia, no será difícil notar que el 2-guardia posiblemente no logre vigilar totalmente al polígono  $P$ . De esta observación surge la siguiente pregunta:

**Problema 1.3** Dado un polígono simple  $P$  de  $n$  vértices, ¿existirá un 2-guardia de vigilancia máxima de  $P$ , es decir, dado un 2-guardia  $\alpha$  y otro 2-guardia  $\beta$  tenemos que  $\alpha$  vigila una superficie de  $P$  mayor o igual que la región que vigila  $\beta$ ?

Como veremos más adelante, el Problema 1.3 presenta una leve analogía con un problema antes mencionado, el de determinar el *núcleo* de un polígono simple. Pero como podemos apreciar, la diferencia (y de ahí lo interesante de nuestro problema) radica en la utilización de dos distintos tipos de vigilancia: la de guardias y  $k$ -guardias.

**Definición 1.4** El 2-núcleo de un polígono simple  $P$ , es el conjunto de puntos del interior de  $P$  desde el cual se vigila la mayor superficie de  $P$  con 2-guardias de vigilancia máxima.

El principal justificante para que en este nuevo problema usemos un 2-guardia en vez de un 1-guardia, es la siguiente: tomando como ejemplo el polígono simple  $P$  de la Figura 1.16, un 1-guardia en el punto  $q$  vigila una determinada superficie de  $P$  tanto en el interior como en el exterior del polígono  $P$  (región sombreada de la Figura 1.17).

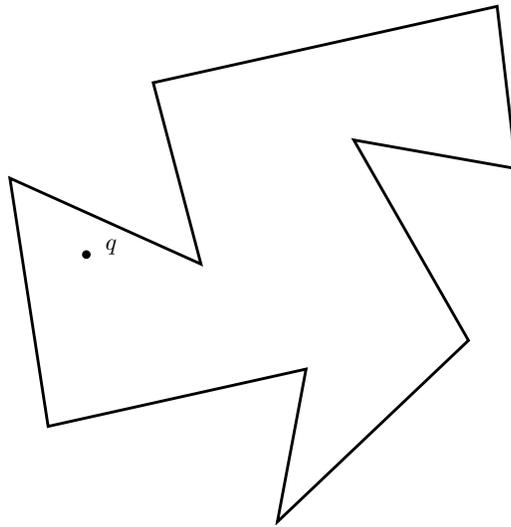
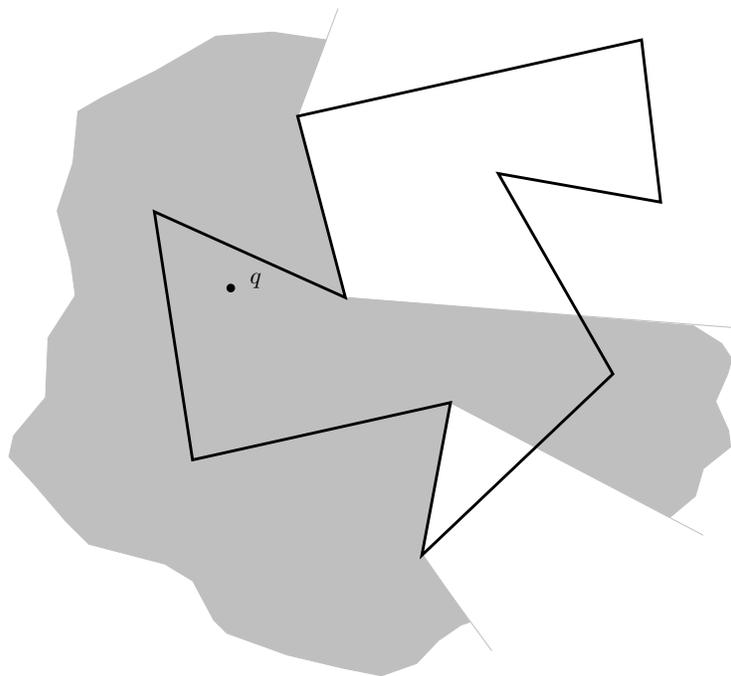
Observemos que la superficie vigilada en el interior del polígono simple de la Figura 1.17, es la misma si en lugar de un 1-guardia en el punto  $q$ , hubiésemos utilizado un guardia convencional (es decir, cuya vigilancia no atraviesa a las aristas del polígono). Ver Figura 1.18.

En cambio si colocamos un 2-guardia en el punto  $q$  del polígono  $P$ , logramos una mayor superficie vigilada en el interior del polígono  $P$ . Ver región sombreada de la Figura 1.19.

#### 1.3.1. Vigilancia en polígonos simples

Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  vértices donde los segmentos que unen a cualesquiera dos de sus vértices no tengan la misma pendiente y sea  $Q$  el conjunto de los vértices de  $P$ . Consideremos la secuencialización de  $Q$  y el semiperiodo  $\Pi$  de las permutaciones de los puntos de  $Q$ . Para mayor referencia ver el Capítulo ??.

Tomaremos de  $\Pi$  cualquier par de filas consecutivas  $i$  y  $i+1$ , y en las filas  $i$  y  $i+1$  localicemos el par de vértices involucrados en el intercambio. Para ilustrar mejor esta estrategia utilizare-

Figura 1.16: Un polígono simple  $P$ .Figura 1.17: Vigilancia del polígono  $P$  con un 1-guardia colocado en el punto  $q$ .

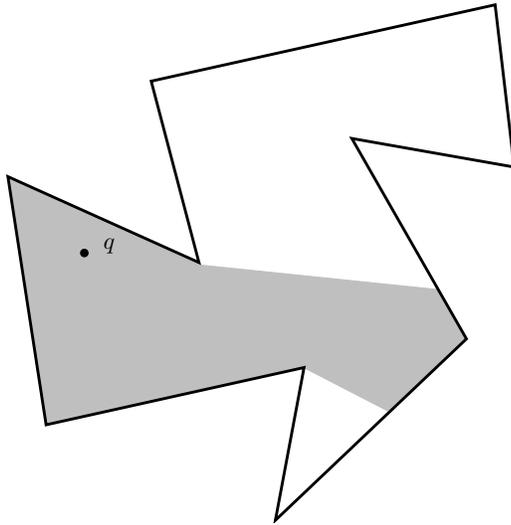


Figura 1.18: Vigilancia del polígono  $P$  con un guardia convencional colocado en el punto  $q$ .

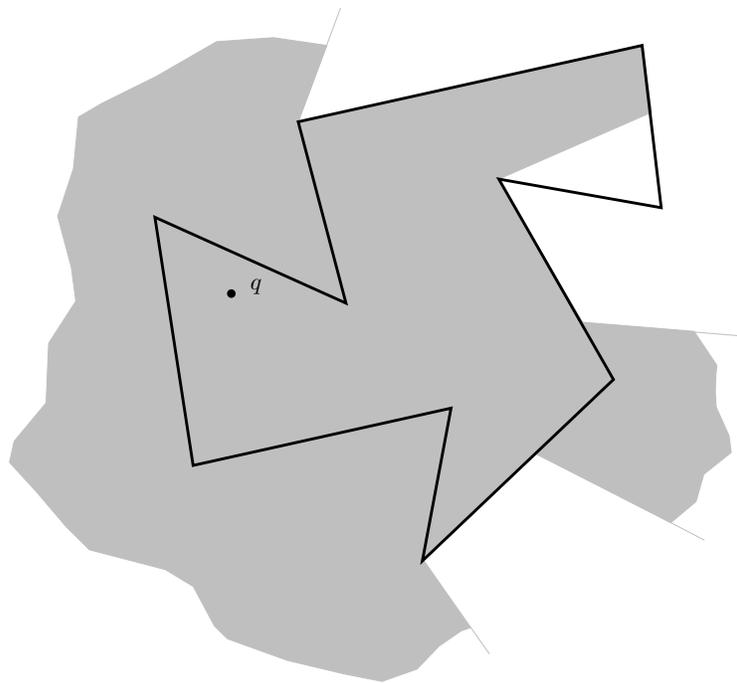


Figura 1.19: Vigilancia del polígono  $P$  con un 2-guardia colocado en el punto  $q$ .

mos como ejemplo el polígono simple con 10 vértices de la Figura 1.20 y su correspondiente semiperiodo  $\Pi$  representado en la Tabla 1.1.

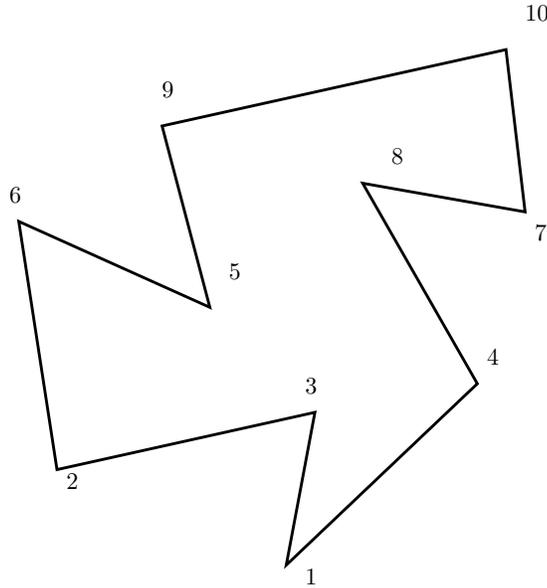


Figura 1.20: El polígono  $P$  con 10 vértices.

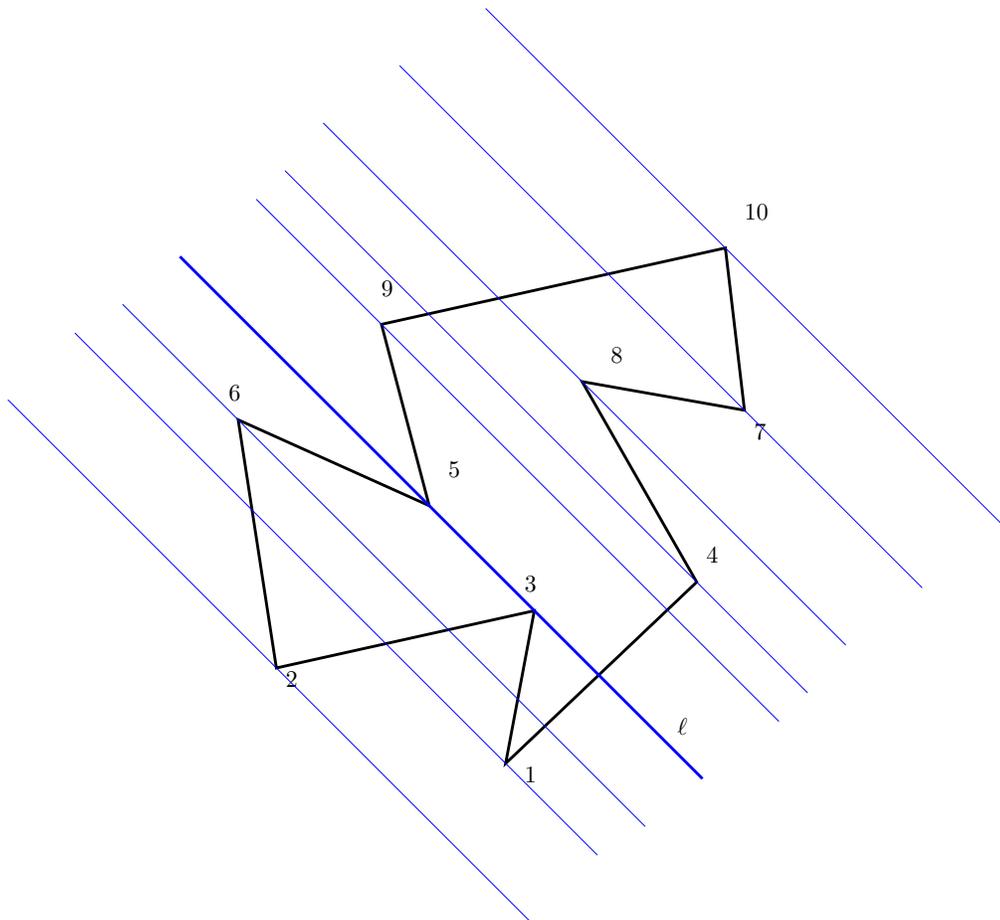
	1	2	...				...				$n-1$	$n$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
$\vdots$	$\vdots$									$\vdots$		
$\Pi =$ $i$	8	<b>3</b>	<b>5</b>	2	9	10	7	4	1	6		
$i+1$	8	<b>5</b>	<b>3</b>	2	9	10	7	4	1	6		
$\vdots$	$\vdots$									$\vdots$		
$\binom{n}{2} + 1$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		

Tabla 1.1: El par de vértices que se intercambian en las filas  $i$  y  $i+1$ .

En la Tabla 1.1, los vértices que participan en un intercambio son el 3 y el 5. Ahora en el polígono  $P$  trazaremos una línea  $\ell$  que pase por los vértices 3 y 5. En cada uno de los  $n-2$  vértices restantes dibujaremos una línea paralela a  $\ell$ . Ver Figura 1.21.

Observemos que una de las nuevas líneas ( $\ell$  misma o una de las que la acompañan) puede coincidir o no con una arista de  $P$ .

Estas líneas paralelas ( $\ell$  y las demás) generan una partición  $R$  de  $n-2$  regiones en un

Figura 1.21: La línea  $\ell$  y sus paralelas.

polígono simple  $P$  de  $n$  vértices, donde una *región* de la partición es el interior y exterior de  $P$  comprendido entre un par de líneas paralelas consecutivas. Llamaremos *banda* de una partición a cada una de estas regiones tomadas individualmente.

Notemos que si se toma cada par de renglones consecutivos,  $i$  y  $i + 1$ , de un semiperíodo  $\Pi$  se generan  $\binom{n}{2}$  particiones distintas.

Consideremos una banda de una partición  $R$  del polígono  $P$  y observemos que la banda elegida contiene *piezas* de  $P$ , ya sean disjuntas o unidas por a lo más un vértice de  $P$ . En la Figura 1.22, una de las bandas de la partición  $R$  tiene dos piezas del polígono simple  $P$ .

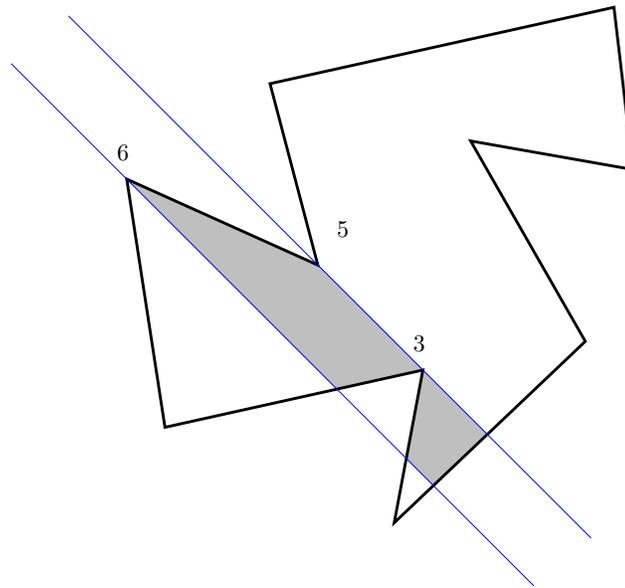


Figura 1.22: Una banda de la partición  $R$ .

**Lema 1.2** Sea  $F$  una banda de una partición  $R$  de un polígono simple  $P$  y  $m$  el número de piezas de  $P$  en  $F$ , un 2-guardia en el interior de  $P$  vigila a lo más 3 piezas consecutivas de  $P$  en la banda  $F$ .

**Prueba.** Consideremos 3 piezas consecutivas en una banda  $F$  de un polígono simple  $P$ :

$$f_{i-1}, f_i, f_{i+1} \quad \text{tal que} \quad 1 < i \leq m$$

Si colocamos un 2-guardia en un punto  $q$  en el interior de la pieza  $f_i$ , es fácil ver que se vigilan: la misma pieza a la que pertenece  $q$ , es decir  $f_i$ , ya que la vigilancia no atraviesa ninguna

arista; y las piezas  $f_{i-1}$  y  $f_{i+1}$ , ya que para vigilar cualquier punto de estas piezas la vigilancia atraviesa dos paredes. Ver Figura 1.23.

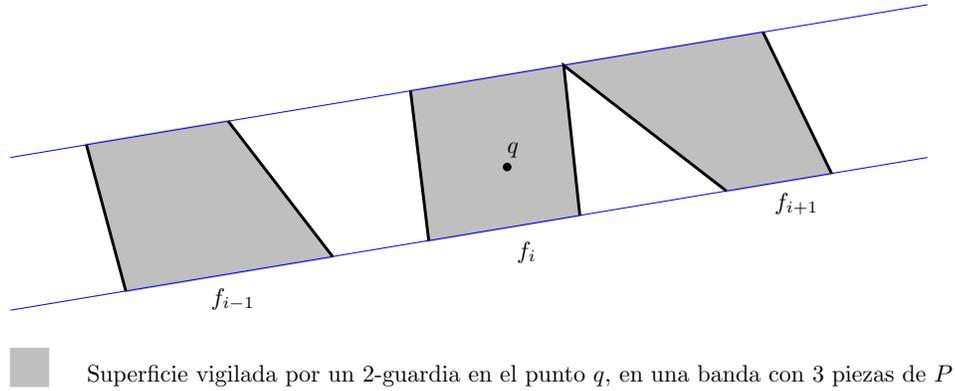


Figura 1.23: Ilustración de la prueba del Lema 1.2.

Debemos recordar que el Problema 1.3 exige hallar a los 2-guardias de vigilancia máxima, por lo que si en una *banda* hay  $m > 3$  piezas del polígono simple  $P$ , será la de nuestro interés la colección de 3 piezas consecutivas que colectivamente sumen la mayor superficie:

$$\max\{\text{área}(f_{i-1}, f_i, f_{i+1}) \text{ tal que } 1 < i \leq m\}$$

Cuando el número de elementos es  $m < 3$ , dos subcasos se presentan:

- $m = 2$  Tenemos dos piezas,  $f_i$  y  $f_{i+1}$ , en este caso elegiremos la pieza de menor superficie. Tomando un punto  $q$  de la pieza elegida, vigilamos a las piezas  $f_i$  y  $f_{i+1}$ .
- $m = 1$  Elegiremos la única pieza  $f_i$ . Un punto  $q$  en la pieza  $f_i$  vigila el resto de puntos de  $f_i$ .

■

Podemos representar una banda  $F$  de un polígono simple  $P$  como un arreglo  $A$  de longitud  $m$ , donde  $m$  es el número de piezas de la banda  $F$ , tal que cada elemento de  $A$  almacenará el área  $\alpha$  de su correspondiente pieza en la banda  $F$ . Ver Figura 1.24.

**Definición 1.5** Una etiquetación de las piezas de un polígono simple  $P$  en una banda  $F$ , es la asignación de un valor numérico creciente a los puntos de la pieza de  $P$  que por el Lema 1.2 vigilan una colección de a lo más 3 elementos.

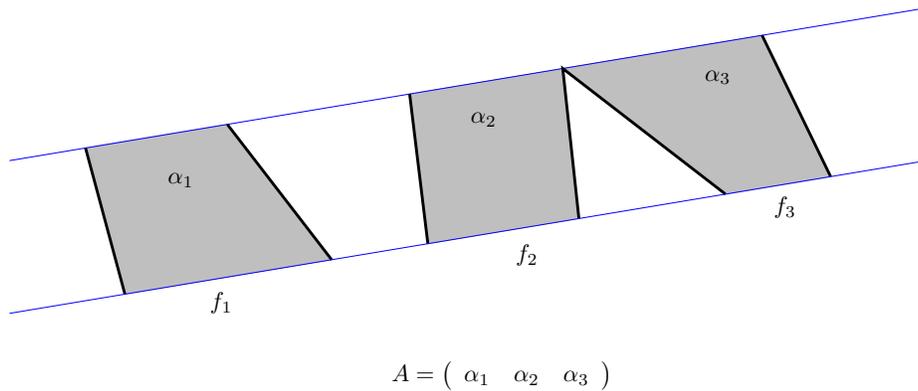


Figura 1.24: Una banda  $F$  y su representación en un arreglo  $A$ .

A partir de todo lo anterior anterior, ya es posible construir el algoritmo que encuentra el 2-núcleo de un polígono simple.

1. Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  vértices en posición general y donde cualesquiera dos de sus aristas no tengan la mismas pendiente. Supongamos que todo punto del interior de  $P$ , está etiquetado con el valor 0.
2. Sea  $Q$  el conjunto de vértices de  $P$ . Calcularemos la sucesión circular de  $Q$  y el semiperíodo  $\Pi$ .
3. Siguiendo el orden secuencial de las filas de  $\Pi$ , calculemos la primera partición  $R$  en  $P$ .
4. Por cada banda  $F$  de la partición  $R$ , hallar la pieza  $f_i$  que por el Lema 1.2 vigile el conjunto de 3 piezas que tenga el mayor área (o los otros subcasos). Incrementar en uno la etiquetación de los puntos de la pieza  $f_i$ .
5. Retirar las líneas de la partición  $R$  y considerar la etiquetación de la partición anterior.
6. Calcular la siguiente partición  $R$  (si no hay más particiones, ir al paso 8).
7. Repetir pasos 4, 5, y 6.
8. Fin.

Al terminar el algoritmo tendremos en los puntos de un polígono simple  $P$ , una etiquetación en el que los valores fluctúan de 1 a  $\binom{n}{2}$ . Sea  $\delta$  el número de mayor valor en la etiquetación de los puntos de  $P$ , sea  $S$  el conjunto de puntos de  $P$  cuyas etiquetas tengan el valor  $\delta$ , y sea  $q$  un punto de  $S$ .

Observemos que al tener el punto  $q$  en su etiqueta el valor más alto de la etiquetación de los puntos de  $P$ , nos revela que  $q$  pertenece a esa misma cantidad de bandas en distintas particiones, en otras palabras, la colección de bandas a la que pertenece  $q$  es la mayor colección de puntos de  $P$  visibles desde un punto de  $P$ .

Por lo tanto, para vigilar la mayor superficie de un polígono simple  $P$ , colocaremos a un 2-guardia en cualquiera de los puntos de  $P$  en cuyas etiquetas tengan el mismo valor del punto  $q$ .

**Lema 1.3** Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  vértices, el máximo número de piezas de  $P$  que puede tener una banda es de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

**Prueba.** Sea  $\ell$  una línea horizontal. ¿Cómo logramos que cada arista de una poligonal  $w$  sea intersecada por  $\ell$ ? Ver Figura 1.25.

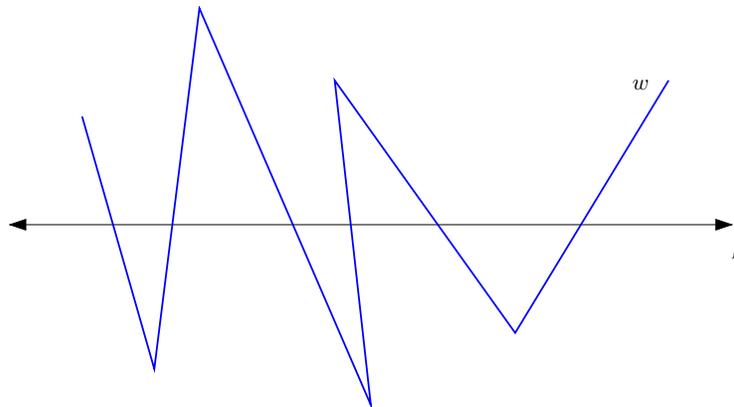


Figura 1.25: Una poligonal  $w$  y una línea  $\ell$ .

La poligonal  $w$  debe ser alternante, es decir, que vaya de un lado a otro de tal modo que cada arista de  $w$  interseca en  $\ell$ . Usando una idea similar, construiremos un polígono simple  $P$  como el de la Figura 1.26.

En el caso de que un polígono simple  $P$  tenga un número par de vértices, es fácil ver que cada arista de  $P$  es intersecada por la línea  $\ell$ . Observemos que hay  $\frac{n}{2}$  fragmentos de la línea  $\ell$  en el interior de  $P$ .

Ya que  $\ell$  divide al polígono  $P$  en dos partes, superior e inferior, marcaremos en cada una de estas partes, el vértice de  $P$  más cercano a la línea  $\ell$ . Ahora dividiremos la línea  $\ell$  en dos sublíneas  $\ell_1$  y  $\ell_2$  y desplazaremos hacia la parte superior a  $\ell_1$  desde la posición de la antigua

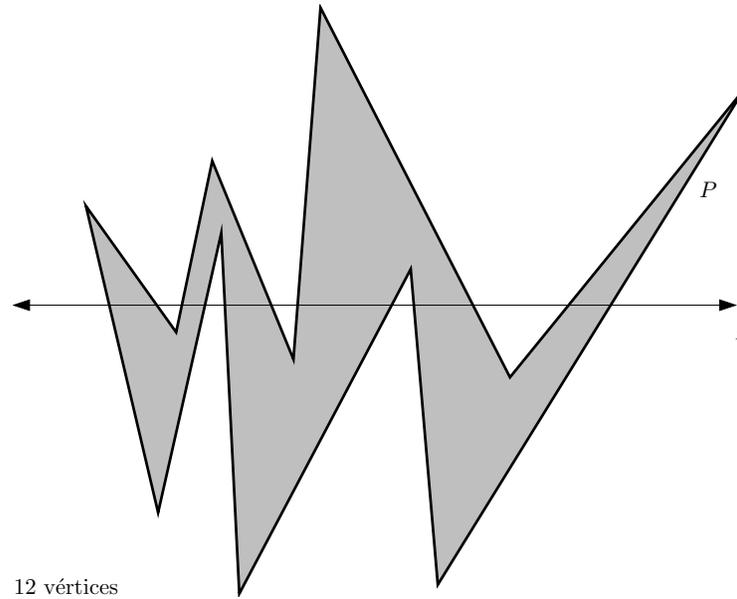


Figura 1.26: Un polígono  $P$  con un número par de vértices.

línea  $\ell$  hacia el vértice más cercano que marcamos previamente. Haremos lo mismo con  $\ell_2$  en la correspondiente parte inferior.

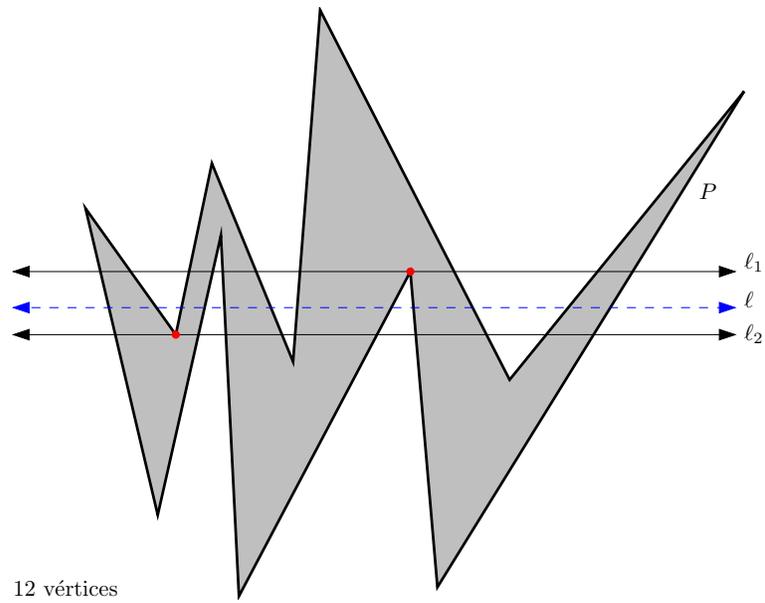
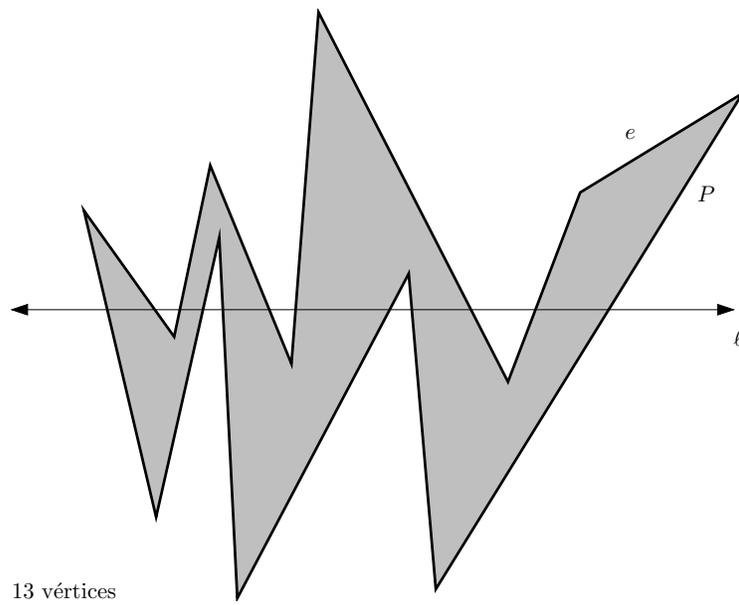
Al igual que el número de fragmentos de la línea  $\ell$  en el interior de  $P$ , hay  $\frac{n}{2}$  piezas del polígono simple  $P$  dentro de la región determinada por  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . Ver Figura 1.27.

En el caso de que el polígono simple  $P$  tenga un número impar de vértices, existe a lo más una arista de  $P$  que no es intersecada por  $\ell$ . Ver Figura 1.28

Sea  $e$  la arista del polígono  $P$  que no es intersecada por  $\ell$  y supongamos que se encuentra ubicada en la parte superior determinada por  $\ell$ . Marcaremos los vértices más cercanos a la línea  $\ell$  tanto en la parte superior como en la inferior. Dos casos se presentan al subdividir a  $\ell$  en  $\ell_1$  y  $\ell_2$ .

1. La sublínea  $\ell_1$  se detiene en un vértice distinto al de los vértice de  $e$ . Ver Figura 1.29.
2. La sublínea  $\ell_1$  se detiene en un vértice de la arista  $e$ . Ver Figura 1.30.

Como podemos ver en los dos casos, la arista  $e$  no interviene en la región delimitada por  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , lo que nos da un número de piezas de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . En cualquiera de los casos, dado un polígono simple con un número par o impar de vértices, el mayor número de piezas que puede existir en una banda es de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . ■

Figura 1.27: Un polígono  $P$  con un número impar de vértices.Figura 1.28: Un polígono  $P$  con un número impar de vértices.

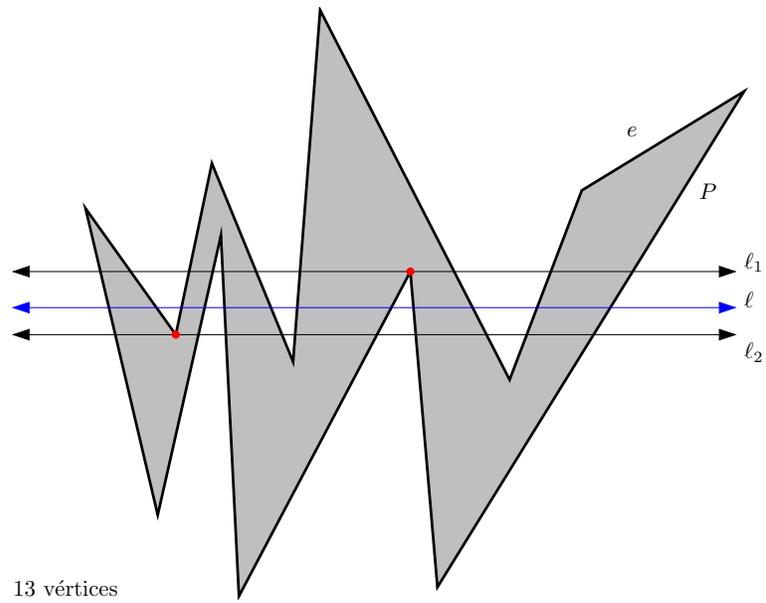


Figura 1.29: La sublínea  $\ell_1$  se detiene en un vértice distinto al de los vértice de  $e$ .

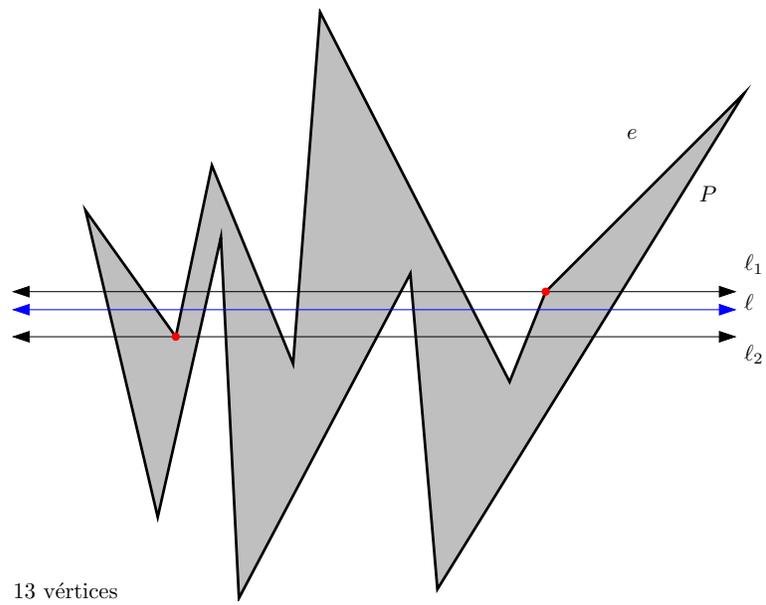


Figura 1.30: La sublínea  $\ell_1$  se detiene en un vértice de la arista  $e$ .

### Descripción y análisis del algoritmo

Con los datos anteriores, ya podemos definir un algoritmo más detallado y analizar su complejidad computacional.

---

**Algoritmo 1** Calcular el 2-núcleo de un polígono simple  $P$

---

**Requiere** Polígono simple  $P$  de  $n$  vértices

**Requiere** Semiperiodo  $\Pi$  de  $P$

**Requiere** Partición  $R$  de  $P$

**Requiere**  $\forall p \in P$  etiquetar a  $p \leftarrow 0$

- 1: **Hacer para**  $i = 1$  a  $\binom{n}{2}$
  - 2:   **Hacer para**  $j = 1$  a  $n - 2$
  - 3:     Leer NumPiezas( $i, j$ )
  - 4:     **Hacer para**  $k = 1$  a NumPiezas( $i, j$ )
  - 5:        $A(k) \leftarrow$  Leer Área de Pieza( $k$ )
  - 6:     **Fin-para**
  - 7:     PiezaVigilante( $j$ )  $\leftarrow$   $\max(A)$
  - 8:      $\forall p \in$  PiezaVigilante( $j$ ) etiquetar  $p \leftarrow p + 1$
  - 9:   **Fin-para**
  - 10: **Fin-para**
  - 11: **Regresar**  $P$
- 

Para analizar un algoritmo, los pasos a seguir son básicamente dos, el primer paso es asignar un costo computacional a cada línea del código, cada costo computacional está determinado por la velocidad de la máquina y la naturaleza de cada proceso, por ejemplo: una suma requiere menos tiempo que una multiplicación. Determinar los costos de un proceso no es sencillo, ya que varía de máquina a máquina y de arquitectura a arquitectura, por lo que muy rara vez se hará de manera exacta, sin embargo vale la pena tener presente que existe. El segundo paso es ver cuántas veces va a ser ejecutada cada línea de código, y esta es la parte que más nos interesa, por lo que la analizaremos paso a paso nuestro algoritmo.

**La línea 1** se ejecuta una vez por cada línea del semiperíodo  $\Pi$ , por lo que en total será ejecutada  $\binom{n}{2} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$  veces. Hay que recordar que el ciclo **Hacer para** hace una última revisión para el caso en el que ya no cumple con la condición, por eso agregamos el número 1 en la ejecución de la primera línea.

**La línea 2** se ejecuta una vez por cada banda de una partición  $R$ , ya que siempre existen  $n - 2$

bandas en una partición, esta línea será ejecutada  $n - 2 + 1$ . Por la comprobación final del ciclo **Hacer para** agregamos un 1.

**La línea 3** se ejecuta una vez por cada banda de una partición  $R$ , por lo que en total será ejecutada  $n - 2$  veces.

Para cada  $j = 1, \dots, m$ , donde  $m$  representa el número de piezas en una banda de una partición de  $P$ , sea  $t_j$  el número de veces que una línea del algoritmo se ejecuta para algún valor  $j$ .

**La línea 4** se ejecuta una vez por cada pieza que existe en una banda de una partición  $R$ , por lo que en total será ejecutada  $\sum_{j=1}^m t_j + 1$  veces. Por la comprobación final del ciclo **Hacer para** agregamos un 1.

**La línea 5** se ejecuta una vez por cada pieza que existe en una banda de una partición  $R$ , por lo que en total será ejecutada  $\sum_{j=1}^m t_j$  veces.

**La línea 7** se ejecuta una vez por cada banda de una partición  $R$ , por lo que en total será ejecutada  $n - 2$  veces.

**La línea 8** se ejecuta una vez por cada banda de una partición  $R$ , por lo que en total será ejecutada  $n - 2$  veces.

Como podemos ver, la cantidad de veces que se ejecutan las líneas 4 y 5 no es fijo, sino que depende de las  $m$  piezas del polígono  $P$  en una banda de una partición  $R$ . En la mayoría de los algoritmos, el tiempo de ejecución dependerá de la entrada, por lo que la mayoría de las veces se puede hacer un análisis de peor caso y análisis del caso promedio. En la teoría de la computación lo más importante es el análisis del peor caso, este análisis busca cual sería el tiempo de ejecución del algoritmo con la peor entrada posible. Al obtener este tiempo, nos damos una idea de a lo más que puede llegar a tardar nuestro algoritmo. Si asignáramos costos a cada línea significativa del Algoritmo 1:  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_7$  y  $c_8$ , el tiempo total de ejecución sería:

$$T(n) = c_1 \left( \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) + c_2(n-2+1) + c_3(n-2) + c_4 \sum_{j=1}^m t_j + 1 + c_5 \sum_{j=1}^m t_j + c_7(n-2) + c_8(n-2)$$

En el Algoritmo 1, puede verse que el peor caso posible es donde el número de piezas de un polígono  $P$  en una banda de una partición  $R$  sea la que se establece el Lema 1.3. Ya que  $\sum_{j=1}^m t_j + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  y  $\sum_{j=1}^m t_j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Por lo que si sustituimos tenemos que el tiempo total de ejecución, en el peor caso sería:

$$T(n) = c_1 \left( \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) + c_2(n-2+1) + c_3(n-2) + c_4 \left( \frac{n}{2} + 1 \right) + c_5 \left( \frac{n}{2} \right) + c_7(n-2) + c_8(n-2)$$

Haciendo el desarrollo tenemos:

$$T(n) = \left( \frac{c_1}{2} \right) n^2 + \left( \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{2} + c_7 + c_8 \right) n + (-c_2 - c_3 - c_7 - c_8)2 + (c_2 + c_4)$$

Donde se puede apreciar claramente que el tiempo de ejecución del Algoritmo 1 en el peor caso es una función cuadrática de  $n$ . Cuando se analizan algoritmos, en general sólo importa el término de la función que crece más rápido y se eliminan las constantes, por lo tanto, en el caso de nuestro algoritmo, el término que crece más rápido es el término cuadrático, por lo que diremos que nuestro algoritmo tiene una complejidad de  $O(n^2)$ . Entonces tenemos que:

**Teorema 1.3** Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  vértices en posición general y donde cualesquiera dos de sus aristas no tengan las mismas pendientes, existe un algoritmo que calcula el 2-núcleo de  $P$  en tiempo  $O(n^2)$ .

Observemos que la implementación del Algoritmo 1 puede extenderse a los polígonos simples con hoyos y a los polígonos ortogonales (con o sin hoyos).

Para terminar, solo resta mencionar que la serie de problemas que hemos propuesto en este capítulo son de la categoría NP-duro; ya que son generalizaciones directas del problema de la Galería de Arte de Chvátal.

## 1.4. Conclusiones: problemas abiertos y conjeturas

A lo largo de nuestra investigación formulamos otros problemas que también involucraban a  $k$ -guardias (con  $k = 1$  y  $k = 2$ ), pero desafortunadamente no pudimos darle una respuesta. Algunos de estos problemas fueron:

**Problema 1.4** Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  vértices, ¿cuántos 1-guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar a  $P$ , si colocamos a los 1-guardias en los vértices de  $P$ ?

**Problema 1.5** Sea  $P$  un polígono ortogonal de  $n$  vértices, ¿cuántos 1-guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar a  $P$ , si colocamos a los 1-guardias en los vértices de  $P$ ?

**Problema 1.6** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntas en el plano  $\mathbb{R}^2$ , ¿cuántos 1-guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el plano teniendo a los segmentos de  $S$  como obstáculos?

**Problema 1.7** Sea  $S$  una familia de  $n$  segmentos de líneas disjuntas en el plano  $\mathbb{R}^2$  en posición ortogonal ¿cuántos 1-guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el plano teniendo a los segmentos de  $S$  como obstáculos?

Para los Problemas 1.4 y 1.5, no pudimos obtener una cota (ni siquiera aproximada), pues en cada polígono que estudiamos nos arrojaba una cantidad de 1-guardias que difería considerablemente con los que se obtenían de otros polígonos, aún si los polígonos tuvieran el mismo número de vértices. Aunque, algunas de los recursos tecnológicos que pudiéramos utilizar para tratar de obtener una cota aproximada, sería a través del cómputo voluntario (*volunteer computing*); una modalidad de computación distribuida en el que usuarios locales y remotos, donan recursos de cómputo (poder de procesamiento y almacenamiento) para tratar de resolver una tarea. El ejemplo más conocido de este tipo de aplicación es el Proyecto SETI@home.

Para los Problemas 1.6 y 1.7, sólo tenemos ejemplos de que  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$  1-guardias podrían ser suficientes para vigilar el plano, donde  $n + 1$  indica el número de regiones determinadas por los  $n$  segmentos de líneas.

En las Figuras 1.31 y 1.32, podemos ver a familias de segmentos de líneas, tanto en posición general como en posición ortogonal, que requieren  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$  1-guardias. Observemos que un 1-guardia vigila satisfactoriamente al menos tres de las regiones determinadas por las extensiones de los segmentos de líneas.

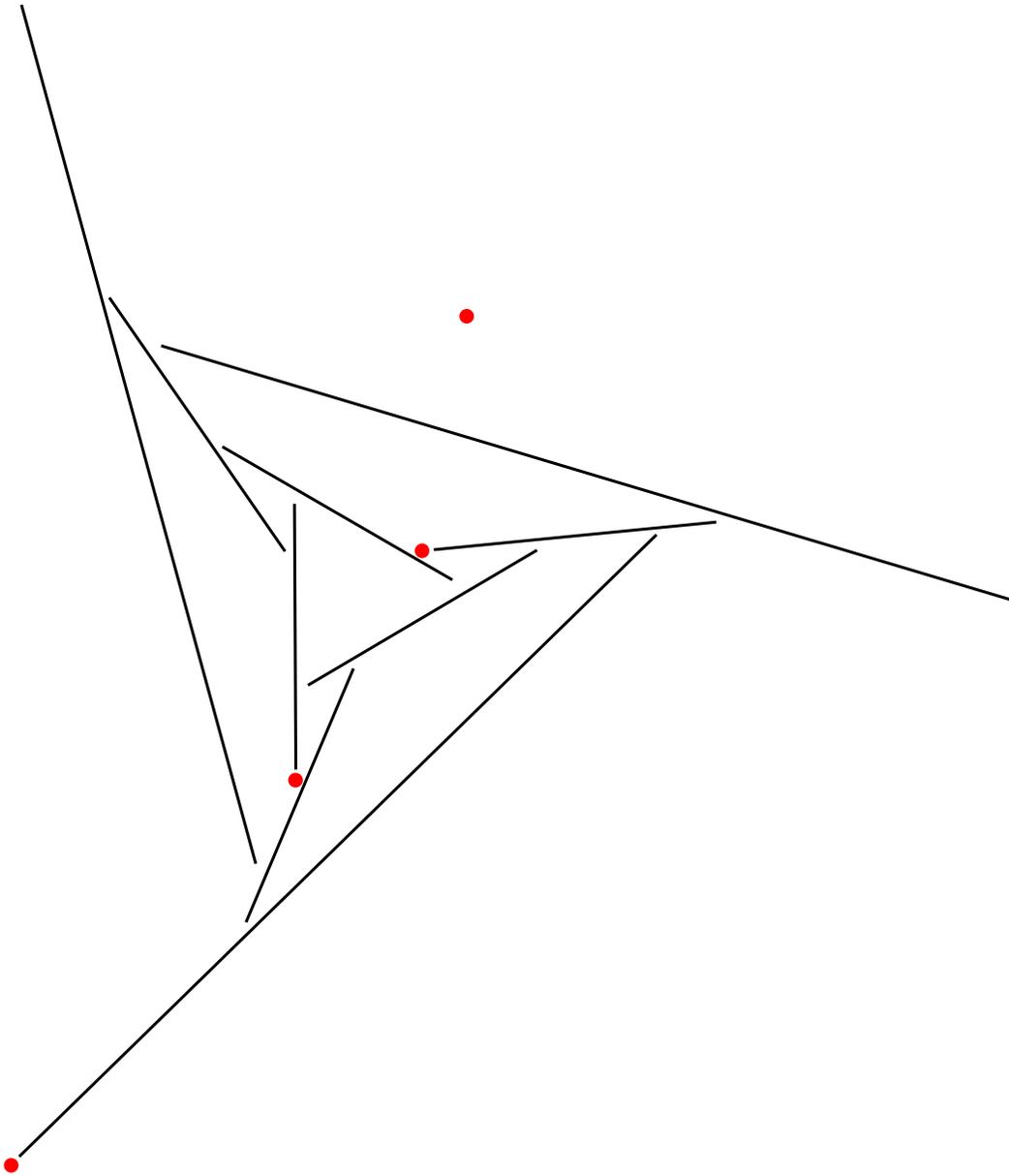


Figura 1.31: Cuatro 1-guardias vigilan el plano con esta familia de segmentos de líneas como obstáculos.

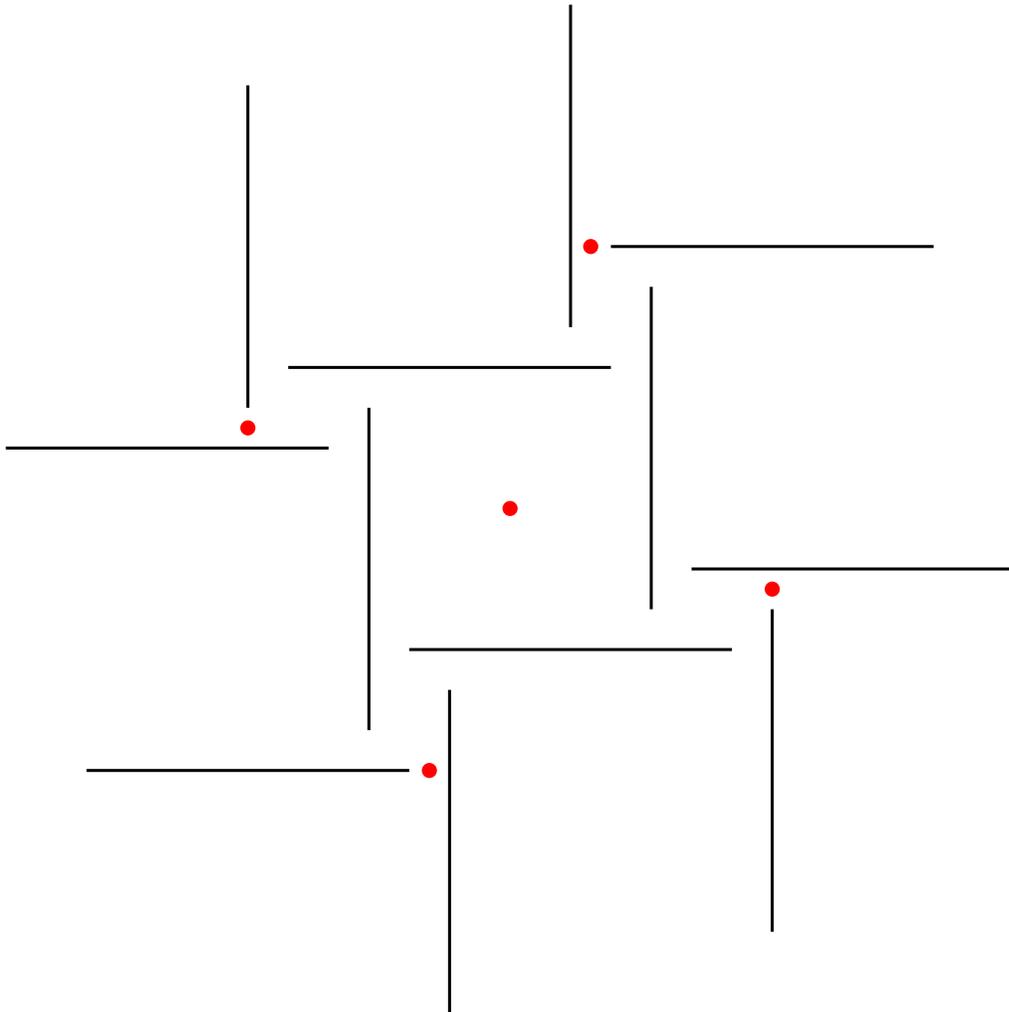


Figura 1.32: Cinco 1-guardias vigilan el plano con esta familia de segmentos de líneas ortogonales como obstáculos.

# Bibliografía

- [1] B. Ábrego, S. Fernández, J. Leaños and G. Salazar. *The Maximum Number Of Halving Lines And The Rectilinear Crossing Number Of  $K_n$  For  $n \leq 27$* . Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2007. To appear.
- [2] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld and M. Overmars. *Computational Geometry. Algorithms And Applications*. Springer Verlag, Third Edition, 2008.
- [3] V. Chvátal. *A Combinatorial Theorem In Plane Geometry*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 18, pp. 39-41, 1975.
- [4] T. Cormen, C. Leiserson and D. Rivest. *Introduction To Algorithms*. The MIT Press, 1990.
- [5] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia and J. Zaks. *Guarding Rectangular Art Galleries*. Discrete Applied Mathematics, Vol. 50, pp. 149-157, 1994.
- [6] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo and J. Urrutia. *Illuminating Rectangles And Triangles In The Plane*, J. Combin. Theory B 57, pp. 1-17, 1993.
- [7] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia and J. Zaks. *On Illuminating Line Segments On The Plane*. Discrete Mathematics, Vol. 137, pp. 147-153, 1995.
- [8] V. Danaen, J. Tonetti and Joceline Troccaz. *A Fully Automated Method For The Delineation Of Osseous Interface In Ultrasound Images*. MICCAI 2004, LNCS 3216, pp. 549-557, 2004.
- [9] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, Third Edition, 2005.
- [10] Y. Dinitz, M. Katz and Roi Krakovski. *Guarding Rectangular Partitions*. In Abstr. 23 European Workshop on Computational Geometry, pp. 30-33, 2007.

- 
- [11] A. Elnagar and L. Lulu. *An Art Gallery-based Approach To Autonomous Robot Motion Planning In Global Environments*. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Edmonton, Canadá, pp. 1367-1372, 2005.
- [12] S. Fisk. *A Short Proof Of Chvátal's Watchman Theorem*. Journal of Combinatorial Theory Ser B, Vol. 24, pp. 374, 1978.
- [13] L. Fejes Tóth. *Illumination On Convex Discs*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 29, pp. 355-260, 1977.
- [14] H. González-Banos and J. Latombe. *A Randomized Art-Gallery Algorithm For Sensor Placement*. Annual Symposium on Computational Geometry, Proceedings of the Seventeenth Annual Symposium on Computational Geometry, pp. 232-240, 2001.
- [15] J. Kahn, M. Klawe and D. Kleitman. *Traditional Galleries Require Fewer Watchmen*. SIAM J. Algebraic and Discrete Methods, Vol. 4, pp. 194-206, 1983.
- [16] M. A. Krasnoselskii. *Sur Un Critere Pour Qu'on Domain Soit Etoile*. Math. Sb., Vol. 61, Number 19, pp. 309-310, 1946.
- [17] S. Kumar Ghosh. *Visibility Algorithms In The Plane*. Cambridge University Press, 2007.
- [18] D. Lee and A. Lin. *Computational Complexity Of Art Galley Problems*. In IEEE Trans. Infom. Theory, pp. 287-282, 1986.
- [19] M. Marengoni, Bruce A. Draper, A. Hanson and R. Sitaraman. *A System To Place Observers On A Polyhedral Terrain In Polynomial Time*, IMAVIS: Image and Vision Computing, Vol. 18, pp. 77-80, 1996.
- [20] N. Mouawad and T. Shermer. *The Superman Problem*, The Visual Computer 10, pp. 459-473, 1994.
- [21] T. Nishizeki and I. Baybars. *Lower Bounds On Cardinality Of Maximum Matchings Of Planar Graphs*. Discrete Mathematics, Vol. 28, pp. 255-267, 1979.
- [22] T. Nishizeki and Md. Saidur Rahman. *Planar Graph Drawing*. Lecture Notes Series on Computing, Vol 12, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 48-51, 2004.
- [23] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems And Algorithms*. The Int. Series of Monographs on Comp. Sci., Oxford University Press, 1987.

- 
- [24] C. Peláez. *Sobre Pseudolíneas Medianas Y Configuraciones De Puntos*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, pp. 33-38, 2008.
- [25] F. Preparata and M. Shamos. *Computational Geometry. An Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [26] T. Shermer. *Recent Results In Art Galleries*. Proceedings of the IEEE, Vol. 80, pp. 1384-1399, 1992.
- [27] C. Tóth. *Illumination In The Presence Of Opaque Line Segments In The Plane*. Computational Geometry: Theory and Applications, Volume 21, Issue 3, pp. 193-204, 2002.
- [28] W. T. Tutte. *The Factorization Of Linear Graphs*. J. London Math. Soc. 22, pp. 107-111, 1947.
- [29] J. Urrutia. *Art Gallery And Illumination Problems*. Handbook on Computational Geometry, pp. 973-1027, 1998.