



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

**TESINA: Estudio de dispersión inversa para
hoyos negros con método dependiente del tiempo**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

Gerardo Daniel Valencia Martínez

DIRECTOR DE LA TESINA: Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich

MÉXICO, D.F.

Agosto, 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Proyecto de investigación. Estudio de dispersión inversa para hoyos negros con método dependiente del tiempo

Gerardo Daniel Valencia Martínez

12 de agosto de 2008

Resumen

Se desea, por medio de dispersión inversa, calcular los parámetros principales de un hoyo negro: masa, carga y momento angular. El punto de partida en esta dirección lo dieron Thierry Daudé y François Nicoleau (2008) [9] para campos de Dirac sin masa que se propagan en el exterior de un hoyo negro de Reissner-Nordström. Se utilizará el método dependiente del tiempo introducido por Ricardo Weder y Volker Enss (1994) [16], (1995) [17]; este método ha tenido diversas aplicaciones dentro del marco de dispersión inversa en mecánica cuántica.

1. Introducción

Primero se discutirán brevemente los conceptos sobre problemas inversos primero en general y después en el contexto de la mecánica cuántica. Esta introducción está basada principalmente en el libro de Chadán y Sabatier [7] y en los contenidos del curso “Inverse scattering in Quantum Mechanics” impartido por el Dr. Ricardo Weder dentro de la escuela de primavera en mecánica clásica y cuántica realizada en el IIMAS-UNAM en el mes de marzo de 2008.

1.1. Problemas inversos en la física

El trabajo normal de los físicos puede pensarse esquemáticamente como una predicción del movimiento de las partículas sobre la base de fuerzas conocidas, o la propagación de radiación sobre la base de un conocimiento de la constitución de la materia. El problema inverso es el de concluir qué fuerzas o constituciones están sobre la base del movimiento observado. Una gran parte de nuestro contacto sensorial con el mundo que nos rodea depende de una solución intuitiva de

un problema inverso: Inferimos la forma, el tamaño y la textura de la superficie de objetos externos a partir de dispersión y absorción de luz, la cuál es detectada por nuestros ojos. Cuando se usan experimentos de dispersión para conocer el tamaño o la forma de las partículas, o las fuerzas que unas ejercen sobre las otros, la naturaleza del problema es similar, o más refinada. La cinemática, las ecuaciones de movimiento, usualmente se suponen conocidas. Se investiga como son las fuerzas, y cómo varían de punto a punto.

La expresión matemática de una ley física es una regla que define una transformación \mathcal{M} de un conjunto de funciones \mathcal{C} , llamados los parámetros, en un conjunto de funciones \mathcal{E} llamadas los resultados. Esta regla usualmente es un conjunto E de ecuaciones, en los cuáles los parámetros son elementos de \mathcal{C} , las soluciones son los correspondientes elementos de \mathcal{E} , por lo tanto, la definición de \mathcal{M} está dada implícitamente. Sin embargo, a partir de la sola definición de una transformación, la solución de E debe existir y ser única en \mathcal{E} para cualquier elemento de \mathcal{C} . Esta es la única restricción que se le tiene que pedir a E . Llamamos resultados calculados a los elementos de \mathcal{E} los cuales son así obtenidos a partir de aquellos de \mathcal{C} . Derivar los resultados calculados para un elemento dado de \mathcal{C} se llama resolver el problema directo. Recíprocamente, obtener el subconjunto de \mathcal{C} que corresponde a un elemento dado de \mathcal{E} se llama resolver el problema inverso.

Para dar significado físico a \mathcal{M} , \mathcal{E} debe ser tal que sus elementos pueden ser comparados con los resultados experimentales. En lo que resta, suponemos que el resultado de cualquier medición relevante es un elemento de un subconjunto, \mathcal{E}_e de \mathcal{E} , llamado el conjunto de resultados experimentales. \mathcal{E} por lo tanto contiene la unión de los resultados experimentales y los resultados calculados. También se supone que a \mathcal{E} se le puede dar la estructura de un espacio métrico. La comparación de un resultado computado dado e_i , y un resultado experimental, e_j , es medido entonces por la distancia $d(e_i, e_j)$.

El conjunto \mathcal{C} fue definido como el conjunto de funciones para las cuales E puede ser resuelta. Mayores limitaciones a menudo aparecen cuando las propiedades físicas se toman en cuenta. En otras palabras, \mathcal{C} podría ser el conjunto \mathcal{S} de todas las funciones para las cuales E puede resolverse y que son consistentes con toda la "información física" que proviene ya sea de los principios generales o a partir de medidas previas. Sin embargo, la definición de \mathcal{S} es, en la mayoría de los casos, indirecta y difícil para hacer precisa, y por eso, a uno se le deja la elección de \mathcal{C} como un subconjunto conveniente de \mathcal{S} , con una clara definición. Por otro lado, el intento de incrementar la definición de \mathcal{C} muchas veces da acceso a una nueva clase de parámetros para los cuales los problemas directo e inverso pueden resolverse.

Con estas definiciones, podría parecer que todos los problemas fisi-

cos son problemas inversos. Realmente, uno generalmente reserva este nombre para los problemas donde se buscan formas matemáticas precisas para las transformaciones inversas generalizadas de \mathcal{E} en \mathcal{C} . Esto excluye el llamado procedimiento de ajuste en la cuál los modelos que dependen de algunos parámetros y dan un buen ajuste de los resultados experimentales son obtenidos por ensayo error o por otra técnica.

La primera persona que estudió problemas inversos de la clase que nosotros consideramos fue Lord Rayleigh (1877)[27], quien discutió la posibilidad de inferir la densidad de una cuerda por medio de sus frecuencias de vibración. Más recientemente, una generalización fue expuesta por Marc Kac (1966) [25] en su famosa lección titulada: "Can one hear the shape of a drum?".

1.2. Dispersión inversa en mecánica cuántica

Con la invención de la ecuación de Schrödinger se incrementó enormemente la aplicabilidad de los problemas espectrales en ecuaciones diferenciales parciales a los problema de la física: el tipo de ecuaciones que anteriormente tenían solamente aplicaciones a problemas de vibraciones mecánicas, se utilizarían ahora para la descripción de átomos y moléculas.

Nuestro tema de estudio son los problemas inversos de la teoría de dispersión (principalmente en mecánica cuántica). Así, los resultados experimentales son cantidades medidas en experimentos de dispersión, e.g., secciones transversales o cantidades relacionadas. Debido a que estas cantidades están relacionadas a un comportamiento asintótico de las funciones de onda, siempre consideraremos problemas donde el conjunto \mathcal{E} consiste de "medidas teóricas" de este comportamiento asintótico, e.g., la amplitud de dispersión o el cambio de fase. Esto lleva, de manera natural, al problema particular de construir la amplitud de dispersión a partir de la sección transversal. Dejando esta discusión, las ecuaciones E que definen la transformación \mathcal{M} consisten de una ecuación de onda (e.g., la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Dirac junto con las condiciones apropiadas). Los conjuntos \mathcal{C} de "parámetros" son conjuntos de "potenciales" locales o no locales, a partir de los cuales es posible predecir los resultados de dispersión.

Los problemas de dispersión inversos en mecánica cuántica han sido extensivamente estudiados desde el trabajo inicial de W. Heisenberg en la teoría de la matriz de dispersión en 1943 y 1944. En términos precisos, existen tres problemas de dispersión inversa en mecánica cuántica:

- Unicidad. Demostrar que el operador de dispersión determina unívocamente los potenciales.

- Reconstrucción. Dar métodos para reconstruir los potenciales a partir del operador de dispersión.
- Caracterización. Dar condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea el operador de dispersión de potenciales entre partículas únicos en una clase dada.

Hay distintas maneras de proporcionar información de la dispersión. Por ejemplo, se puede dar el operador de dispersión para todas las energías, el límite de alta energía del operador de dispersión, o el operador de dispersión a energía fija.

Debido a que toda la información que se puede obtener sobre nucleos, partículas y subpartículas físicas se obtiene a partir de experimentos de dispersión, estos problemas son de importancia física obvia. Además, existe el problema muy relacionado de la dispersión inversa de ondas acústicas, electromagnéticas y elásticas, el cual tiene muchas aplicaciones tecnológicas, por ejemplo la tomografía.

Su interés intrínseco, como problemas matemáticos, aparece en su conexión con varias ramas del análisis: resultados avanzados en teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, análisis armónico, teoría espectral de operadores, funciones holomorfas, expansiones asintóticas, análisis numérico, todo lo necesario para estudiar estos problemas impropriadamente planteados.

La mayoría de las contribuciones a los problemas inversos en la física cuántica utilizan métodos estacionarios, es decir, la solución física es idealizada como periódica en el tiempo, con energía infinita. Haciendo ésto, las propiedades físicas de propagación en las soluciones se pierden (ya que la función de onda en realidad no evoluciona en el tiempo, sino permanece en un estado estacionario). Esta carencia de intuición física implica que la herramienta matemática que se utiliza para resolver los problemas dé poca información acerca de la física del problema. Además; en los métodos estacionarios se utiliza una transformada de Fourier generalizada que integra sobre espacios de medida infinita las funciones de onda, que son periódicas en el tiempo. Otro problema de los métodos estacionarios es que utilizan de manera fundamental la linealidad del problema directo, siendo difícil pensar en generalizar el método para resolver problemas no lineales.

En (1993 [15], 1994 [16], 1995 [17]) V. Enss y R. Weder introdujeron un nuevo método dependiente del tiempo, en donde se aplican fundamentalmente las propiedades físicas de propagación de las funciones de onda de energía finita para resolver los problemas inversos en mecánica cuántica, utilizando más clara y sencillamente la herramienta matemática, la cual está muy relacionada con la intuición física del problema. Además, a diferencia de los métodos estacionarios, este método puede aplicarse para la solución de problemas de dispersión inversa para ecuaciones no lineales [34, 40, 50]. En los últimos años,

el método dependiente del tiempo ha tenido varias aplicaciones: para estudiar hamiltonianos con campo eléctrico y magnético [2]; en la ecuación de Dirac [24]; en el caso de N cuerpos [16, 17]; en el efecto Aharonov-Bohm [47] [6]; en el efecto Stark [38]; en potenciales dependientes del tiempo para la ecuación de Schrödinger [39] y para la ecuación de Dirac [22, 23], entre otras.

2. Enfoque dependiente del tiempo a la dispersión inversa multidimensional

En la presente sección se resume el trabajo presentado por Enss y Weder (1995) [17].

2.1. Introducción

Se considera un sistema mecánico cuántico de N cuerpos en un espacio de $n \geq 2$ dimensiones con interacciones por pares de potenciales de corto alcance local (operadores de multiplicación). S denota el operador de dispersión entre los canales libres, donde no hay subsistemas asintóticamente acotados. En el teorema 2.1 se prueba que S determina los pares de potenciales unívocamente. De hecho es suficiente conocer S sobre los estados donde la velocidad relativa entre cualesquiera dos partículas tiende a infinito. Más aún, se da una fórmula con un término de error para la reconstrucción de los pares de potenciales a partir el límite de alta velocidad de $(S-I)$.

Si, además, las partículas interactúan con fuerzas de largo alcance es necesario saber el potencial de largo alcance para definir el operador de dispersión, por ejemplo, el operador de dispersión de Dollard S^D . En este caso se prueba (teorema 2.2) que S^D determina unívocamente la parte de corto alcance del potencial. También se prueba que uno de los S^D 's determinan unívocamente el potencial total. Como en el caso del corto alcance se da, en el teorema 2.12, una fórmula con un término de error para la reconstrucción del potencial a partir del límite de alta velocidad de $(S^D - I)$.

También se estudia el canal donde una partícula se dispersa por medio de un blanco que consiste de estados ligados de $N - 1$ partículas. En este caso se prueba (en la sección V de [17]) que el límite de alta velocidad del operador de dispersión apropiado determina unívocamente potencial multipartícula efectivo que da la interacción entre la partícula incidente y el estado ligado, y se da una fórmula para su reconstrucción. La demostración, la cuál en su momento fue novedosa, es simple, usa métodos geométricos dependientes del tiempo.

Se supone que el potencial es una suma de pares de potenciales

que son operadores de multiplicación:

$$V = \sum_{j < k} V_{jk}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \quad (2.1)$$

Cada par de potencial se divide en la parte de largo y corto alcance, dependiendo de su derivabilidad y tasa de decrecimiento hacia el infinito.

$$V_{jk}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) = V_{jk}^s(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) + V_{jk}^l(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \quad (2.2)$$

Decimos que un operador es Kato-Reducido en $L^2(\mathbb{R}^n)$ si es acotado con respecto al laplaciano con cota relativa cero. Las definiciones se encuentran en [26]. Entonces se define

$$\nu_{SR} = \left\{ V^s = \sum_{j < k} V_{jk}^s(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \mid V_{jk}^s \text{ es Kato-reducido en } L^2(\mathbb{R}^n), \int_0^\infty dR \|V_{jk}^s(y) (-\Delta + I)^{-1} F(|y| \geq R)\| < \infty \right\} \quad (2.3)$$

donde para cada conjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ se denota por $F(x \in O)$ el operador de multiplicación con la función característica de O . La propiedad de decaimiento en la definición de ν_{SR} es para operadores de multiplicación equivalentes a la condición más intuitiva que

$$\|F(|y| \geq R) V_{jk}^s(y) (-\Delta + I)^{-1}\|$$

decae integrablemente. El conjunto de potenciales de largo alcance admisibles es

$$\nu_{LR} = \left\{ V^l = \sum_{j < k} V_{jk}^l(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j) \mid V_{jk}^l \in C_\infty^1(\mathbb{R}^n), |\nabla V_{jk}^l(y)| \leq C(1 + |y|)^{-\gamma}, \gamma > 3/2 \right\} \quad (2.4)$$

C_∞^1 es el conjunto de todas las funciones continuamente diferenciables que tienden a cero hacia el infinito. La división en partes de corto y largo alcance no es única. Sin pérdida de generalidad [21], por ejemplo, se puede hacer de tal manera, que adicionalmente se tenga

$$V_{jk}^l \in C_\infty^4(\mathbb{R}^n), |D^\alpha V_{jk}^l(y)| \leq C(1 + |y|)^{-1 - |\alpha|(\epsilon + 1/2)} \quad (2.5)$$

para $1 \leq |\alpha| \leq 4, 0 < \epsilon < 1/2$, donde D^α denota las derivadas con la notación multi-índice habitual. Se define el Hamiltoniano de interacción como

$$H = H_0 + V = H_0 + V^s + V^l$$

es un operador autoadjunto en $D(H) = D(H_0)$. La evolución en el tiempo del sistema en interacción está dada por e^{-itH} .

Primero se considera el caso en el que no hay potenciales de largo alcance: $V_{ij}^l = 0$ para toda $i < j$. Los operadores de onda para el canal libre (i.e. no hay subsistemas asintóticamente acotados) son:

$$\Omega_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

es un hecho conocido que el límite fuerte existe. También se sigue como una consecuencia de las estimaciones dadas (2.43) (ver 4.18 en [17]). Además, $(\Omega_{\pm})^* \Omega_{\pm} = I$, $e^{-itH} \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} e^{-itH_0}$, y

$$(\Omega_+ - \Omega_-)\Phi = i \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{itH} (H - H_0) e^{-itH_0} \Phi$$

para cualquier estado $\Phi \in D(H_0)$ para los cuales la integral está bien definida. El operador de dispersión S del canal libre al canal libre está definido como

$$S = (\Omega_+)^* \Omega_- \quad (2.6)$$

y tenemos que $S - I = (\Omega_+ - \Omega_-)^* \Omega_-$. Llamamos a S una transformación de ν_{SR} en el conjunto de los operadores acotados $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $S = S(V^s)$, la transformación de dispersión.

TEOREMA 2.1. *La función de dispersión $S(\cdot) : \mathcal{V}_{SR} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es inyectiva.*

En el caso general cuando el potencial de largo alcance está de acuerdo a (2.2), (2.5) se ha establecido y se deja fijo. En el canal libre la evolución temporal de Dollard modificada ha sido generada por el Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H^D(t) := H_0 + \sum_{j < k} V_{jk}^l(t \mathbf{p}_{jk} / \mu_{jk}),$$

donde $(\mathbf{p}_{jk} / \mu_{jk}) = (\tilde{\mathbf{p}}_k / m_k) - (\tilde{\mathbf{p}}_j / m_j)$ es la velocidad relativa de las partículas j y k , y $\mu_{jk} = m_j m_k / (m_j + m_k)$ es la masa reducida. El propagador de Dollard es un operador de multiplicación unitario en el espacio de momentos que para tiempo inicial 0 está dado por

$$U^D(t) := e^{-itH_0} \exp \left[-i \sum_{j < k} \int_0^t ds V_{jk}^l(s \mathbf{p}_{jk} / \mu_{jk}) \right]$$

Los operadores de onda de Dollard modificados para el canal libre están definidos como

$$\Omega_{\pm}^D = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} U^D(t) \quad (2.7)$$

Es un hecho conocido que los límites fuertes existen, y de hecho, también se sigue de las estimaciones (2.43 y 2.44). Además, $(\Omega_{\pm}^D)^* \Omega_{\pm}^D =$

I . Se define el operador de dispersión de Dollard entre los canales libres como sigue

$$S^D = (\Omega_+^D)^* \Omega_-^D = S^D(V^l; V^s), \quad (2.8)$$

y como antes $S^D - I = (\Omega_+^D - \Omega_-^D)^* \Omega_-^D$.

El único potencial de largo alcance en la física es el potencial de Coulomb (o gravitacional). Si conocemos las cargas q_j de las partículas podemos describir la parte de largo alcance por $V_{jk}(y)^l = q_j q_k (1 + y^2)^{-1/2}$ y todos los demás efectos son de corto alcance. En el caso general sea $V = \bar{V}^s + \bar{V}^l$ dado. Si es necesario se adapta la división de tal manera que $V = V^s + V^l$ donde V^l además satisface (2.5). Entonces se mantiene fijo este V^l que se usa en la definición de H^D , U^D , Ω_{\pm}^D , y S^D . En el siguiente teorema se prueba en particular que para una cola de potencial de largo alcance, la parte de corto alcance está unívocamente determinada por la transformación de dispersión.

TEOREMA 2.2. *Sea $V^l \in \nu_{LR}$ dado (satisfaciendo, sin pérdida de generalidad, también (2.5)). Entonces la transformación de dispersión $S^D(V^l; \bullet) : \nu_{SR} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es inyectiva. Más aún, cualquier operador de dispersión de Dollard S^D determina unívocamente el potencial $V(x)$.*

En el artículo [17] se prueban los teoremas 2.1 y 2.2 con un método geométrico dependiente del tiempo simple y se dan fórmulas de reconstrucción.

Los puntos importantes del artículo [17], cuyos resultados están enunciados en este trabajo, son los siguientes: Se obtiene una fórmula de reconstrucción (teorema 2.6) y se prueba el teorema 2.1 en el caso de rango corto, dos cuerpos. Estos resultados se generalizan para el caso de dos cuerpos, rango largo. Más aún, se obtiene una fórmula de reconstrucción para el caso de N cuerpos (teorema 2.12) y, a continuación, se prueban los teoremas 2.1 y 2.2.

2.2. Dos cuerpos con potenciales de rango corto

En esta sección se considera el caso de dos cuerpos cuando la parte de largo alcance del potencial $V^l(x)$, es cero. Se denota por B_η la bola abierta de centro cero y radio η en \mathbb{R}^n y por m la masa reducida de las dos partículas.

PROPOSICIÓN 2.3. *Para cualquier $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sop } f \subset B_{m\eta}$, para alguna $\eta > 0$, y cualquier $\ell = 1, 2, 3, \dots$, existe una constante C_ℓ tal que la siguiente estimación es cierta*

$$\left\| F(\mathbf{x} \in \mathcal{M}') e^{-itH_0} f(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) F(\mathbf{x} \in \mathcal{M}) \right\| \leq C_\ell (1 + r + |t|)^{-\ell} \quad (2.9)$$

para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y todo conjunto medible $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ con la propiedad

$$r := \text{dist}(\mathcal{M}', \mathcal{M} + \mathbf{v}t) - \eta|t| \geq 0.$$

Bajo traslaciones en el espacio de momentos o de configuración generados por \mathbf{x} o \mathbf{p} , obtenemos, respectivamente,

$$e^{-im\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) e^{im\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}} = f(\mathbf{p} + m\mathbf{v}), \quad (2.10)$$

en particular

$$e^{-im\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} e^{im\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}t} e^{-iH_0 t} e^{-imv^2 t/2}, \quad (2.11)$$

donde $v := |\mathbf{v}|$, y

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}t} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}t} = f(\mathbf{x} + \mathbf{v}t). \quad (2.12)$$

la condición de decaimiento (2.3) implica el decaimiento integrable de

$$\|V^S(\mathbf{x}) g(\mathbf{p}) F(|\mathbf{x}| \geq R)\|$$

para toda $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e.g. ver Corolario 2.4 in [14]. Así la condición (2.13) en líneas posteriores se satisface con $\rho = 0$ para cualquier potencial en \mathcal{V}_{SR} . Valores mayores de ρ implican un decaimiento mayor.

LEMA 2.4. *Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$ y que para alguna $0 \leq \rho \leq 1$ y toda $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$(1 + R)^\rho \left\| V^S(\mathbf{x}) g(\mathbf{p}) F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1((0, \infty), dR). \quad (2.13)$$

Entonces para cualquier función $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ existe una función h con $(1 + \tau)^\rho h(\tau) \in L^1((0, \infty))$ tal que para toda $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $v \geq 4\eta$ tenemos

$$\begin{aligned} \left\| V^S(\mathbf{x}) e^{-itH_0} f(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) (1 + \mathbf{x}^2)^{-3/2} \right\| &= \\ \left\| V^S(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) e^{-itH_0} f(\mathbf{p}) (1 + \mathbf{x}^2)^{-3/2} \right\| &\leq h(|vt|). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sea $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ una configuración asintótica normalizada con el momento soportado en $B_{m\eta}$ y función de onda en el espacio de momentos

$$\hat{\phi}_0 \in C_0^\infty(B_{m\eta}).$$

La configuración impulsada

$$\Phi_{\mathbf{v}} = e^{im\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}} \Phi_0 \Leftrightarrow \hat{\phi}_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \hat{\phi}_0(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) \quad (2.15)$$

tiene velocidad de soporte compacto contenida en la bola abierta centrada en \mathbf{v} con radio η y satisface $\|(1 + \mathbf{x}^2)^{3/2} \Phi_{\mathbf{v}}\| \leq \text{const}$ uniformemente \mathbf{v} . Usaremos el límite de alta velocidad en una dirección fija arbitraria $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $v = |\mathbf{v}| \rightarrow \infty$.

COROLARIO 2.5. *Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$ entonces uniformemente para $t \in \mathbb{R}$*

$$\left\| (\Omega_{\pm} - I) e^{-itH_0} \Phi_{\mathbf{v}} \right\| = O(v^{-1}). \quad (2.16)$$

TEOREMA 2.6. (Fórmula de reconstrucción)

Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$ y que (2.13) se satisface. Entonces para toda $\Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}}$, como en (2.15)

$$v \left(i(S - I) \Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}} \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V^S(\mathbf{x} + \tau \hat{\mathbf{v}}) \Phi_0, \Psi_0 \right) \quad (2.17)$$

$$+ \begin{cases} o(v^{-\rho}) & 0 \leq \rho < 1, \\ O(v^{-1}) & \rho = 1. \end{cases}$$

La demostración del teorema 2.1 muestra que para la reconstrucción del potencial es suficiente considerar en el lado izquierdo de (2.17) sólo \mathbf{v} en un espacio de dos dimensiones. El problema se reduce a la inversión de la transformada de Radon de una función, acotada, continua y cuadrado integrable en \mathbb{R}^2

2.3. Dos cuerpos con potenciales de rango largo

La corrección del propagador de Dollard $U^D(t)$ es

$$\tilde{U}(t) := \exp \left[-i \int_0^t V^\ell(s \mathbf{p}/m) ds \right]. \quad (2.18)$$

Esta corrección junto con las estimaciones dadas en la proposición 2.7 sirven para demostrar los lemas 2.8 y 2.9, el corolario 2.10 y el teorema 2.11.

PROPOSICIÓN 2.7. *Para cada $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $v \geq 2\eta$*

$$\left\| \mathbf{x} \tilde{U}(t) f(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) (1 + \mathbf{x}^2)^{-1/2} \right\| \leq C(1 + v^{-2} |vt|^{2-\gamma}) \leq C(1 + |vt|^{2-\gamma}) \quad (2.19)$$

y para toda $\kappa > 0$

$$\left\| F(|\mathbf{x}| \geq \kappa |vt|) \tilde{U}(t) f(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) (1 + \mathbf{x}^2)^{-2} \right\| \leq C(1 + |vt|)^{-2-\varepsilon}, \quad (2.20)$$

para alguna $\varepsilon > 0$.

LEMA 2.8. *Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$, $V^\ell \in \mathcal{V}_{LR}$, y que (2.13) se cumple. Entonces para $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$ existe una función h con $(1 + \tau)^\rho h(\tau) \in L^1((0, \infty))$ tal que para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $v \geq 4\eta$ tenemos que*

$$\left\| V^S(\mathbf{x}) U^D(t) f(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) (1 + \mathbf{x}^2)^{-2} \right\| \leq h(|vt|). \quad (2.21)$$

LEMA 2.9. *Suponga que $V^\ell \in \mathcal{V}_{LR}$. Entonces para $f \in C_0^\infty(B_{m\eta})$*

$$\left\| \left(V^\ell(\mathbf{x}) - V^\ell(t\mathbf{p}/m) \right) U^D(t) f(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) (1 + \mathbf{x}^2)^{-2} \right\| \leq C (1 + |vt|)^{-1-\varepsilon} \quad (2.22)$$

para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $v \geq 4\eta$ y alguna $\varepsilon > 0$.

COROLARIO 2.10. *Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$, $V^\ell \in \mathcal{V}_{LR}$, entonces para $\Phi_{\mathbf{v}}$ como en (2.15)*

$$\left\| (e^{-itH} \Omega_{\pm}^D - U^D(t)) \Phi_{\mathbf{v}} \right\| = O(v^{-1}), \quad (2.23)$$

uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 2.11. (Fórmula de reconstrucción)

Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$, $V^\ell \in \mathcal{V}_{LR}$, y (2.13) se satisface. Entonces para toda $\Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}}$ como en (2.15)

$$\begin{aligned} & v \left[\left(i(S^D - I) \Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}} \right) - \right. \\ & \left. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(V^\ell(\mathbf{x}) - V^\ell(t\mathbf{p}/m) \right) U^D(t) \Phi_{\mathbf{v}}, U^D(t) \Psi_{\mathbf{v}} \right) \right] = \\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V^S(\mathbf{x} + \tau\hat{\mathbf{v}}) \Phi_0, \Psi_0 \right) + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 1, \\ O(v^{-1}), & \rho = 1, \end{cases} \quad (2.24) \end{aligned}$$

y en particular

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \infty} v \left(i(S^D - I) \Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}} \right) = \\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[V^S(\mathbf{x} + \tau\hat{\mathbf{v}}) + V^\ell(\mathbf{x} + \tau\hat{\mathbf{v}}) - V^\ell(\tau\hat{\mathbf{v}}) \right] \Phi_0, \Psi_0 \right). \quad (2.25) \end{aligned}$$

2.4. El caso de N cuerpos

Para cualquier par tomado de N partículas construimos una sucesión de estados donde todas las partículas tienen una alta velocidad relativa a las demás. La diferencia del operador de dispersión menos el operador de identidad, apropiadamente re-escalada proporciona la transformada de Radon o la transformada de rayos X del correspondiente par de potenciales o de su parte de corto alcance. Esto implica los teoremas de unicidad dadas en la sección 2.1. Se elige la familia de estados por conveniencia matemática. Tenemos que introducir alguna notación cinemática antes de definir los estados. Para determinar el potencial para un par dado se usa una numeración de las partículas tales que las parejas de interés consistan de las partículas 1 y 2. Una vez que hemos separado el movimiento del centro de masa usamos varias coordenadas que describen las posiciones relativas y los

momentos de las partículas. Como es usual para los sistemas de dos cuerpos una de las variables n-dimensionales es la posición relativa \mathbf{x} del par distinguido con su momento conjugado \mathbf{p} .

$$\mathbf{x} := \tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{p} = -i\nabla_{\mathbf{x}} = m[(-i\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_2}/m_2) - (-i\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_1}/m_1)],$$

donde $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ es la masa reducida del par (1.2).

En suma, usamos la posición \mathbf{x}_j y el momento \mathbf{p}_j de la j -ésima partícula $j = 1, \dots, N$, relativas al centro de masa del par distinguido

$$\mathbf{x}_j := \tilde{\mathbf{x}}_j - (m_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{x}}_2) / (m_1 + m_2), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{p}_j = \mu_j (\tilde{\mathbf{p}}_j / m_j - (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2) / (m_1 + m_2)), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.27)$$

donde μ_j es la masa reducida de la j -ésima partícula con respecto al centro de masa del par distinguido,

$$\mu_j = \frac{m_j (m_1 + m_2)}{(m_j + m_1 + m_2)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.28)$$

y $\tilde{\mathbf{p}}_j = -i\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_j}$, $j = 1, \dots, N$ es el momento relativo a algún origen. \mathbf{p}_j / μ_j , $j = 1, \dots, N$ son las velocidades relativas respecto al centro de masa del par. $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N\}$ y $\{\mathbf{p}, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N\}$ son conjuntos de $N - 1$ coordenadas de momentos y configuración n-dimensionales independientes en el marco de referencia del centro de masa total. El momento relativo de las partículas j y k es

$$\mathbf{p}_{jk} = -i\nabla_{(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.29)$$

donde las derivadas de las posiciones de todas las otras partículas así como también del centro de masa se mantienen fijas. Su velocidad relativa es

$$\frac{\mathbf{p}_{jk}}{\mu_{jk}} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_k}{m_k} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}_j}{m_j} = \frac{\mathbf{p}_k}{\mu_k} - \frac{\mathbf{p}_j}{\mu_j}, \quad j, k = 1, \dots, N, \quad (2.30)$$

donde μ_{jk} es la masa reducida del par j, k

$$\mu_{jk} = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.31)$$

Note que las coordenadas $(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j)$ y \mathbf{p}_{jk} son conjugadas entre sí.

Para construir nuestros estados de alta velocidad escogemos configuraciones asintóticas $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ con productos de funciones de onda de la siguiente forma en el espacio de momentos.

$$\Phi_0 \sim \hat{\phi}_{12}(\mathbf{p}) \hat{\phi}_3(\mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) \quad (2.32)$$

donde $\hat{\phi}_{12} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ varía mientras que $\hat{\phi}_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n(N-2)})$ es una función normalizada fija con soporte en $\{(\mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) : |\mathbf{p}_j| < \mu_j\}$ i.e.

las partículas 3 a la N tienen velocidad menor que uno relativa al par (1 2). Tome η tal que el soporte de la velocidad de $\hat{\phi}_{12}$ está contenida en $B_{m\eta}$, i.e. $\hat{\phi} \in C_0^\infty(B_{m\eta})$. Definimos nuestros estados de alta velocidad como

$$\Phi_{\mathbf{v}} \sim \hat{\phi}_{12}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) \hat{\phi}_3(\mathbf{p}_3 - \mu_3\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{p}_N - \mu_N\mathbf{v}_N), \quad (2.33)$$

con $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}$, $|\hat{\mathbf{v}}| = 1$, $\mathbf{v}_j = v^2\mathbf{e}_j$, con $\mathbf{e}_j \neq 0$ para $j = 3, \dots, N$, y donde suponemos que $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k \neq 0$ para $j, k = 3, \dots, N$. También definimos $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}m/m_1$, y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}m/m_2$. Entonces denotando por

$$\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j, \quad v_{jk} = |\mathbf{v}_{jk}|, \quad j, k = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

las velocidades aproximadas de las partículas j y k tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1j} &= v^2 \left(\mathbf{e}_j + \frac{m}{m_1} \frac{\hat{\mathbf{v}}}{v} \right) \neq 0 \text{ if } v > \frac{m}{m_1} (e_j)^{-1} \\ \mathbf{v}_{2j} &= v^2 \left(\mathbf{e}_j - \frac{m}{m_2} \frac{\hat{\mathbf{v}}}{v} \right) \neq 0 \text{ if } v > \frac{m}{m_2} (e_j)^{-1} \\ \mathbf{v}_{jk} &= v^2 (\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j) \neq 0, \quad j, k = 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en nuestros estados de alta velocidad la velocidad relativa promedio del par distinguido es v mientras que las otras partículas viajan con velocidad mínima proporcional a v^2 con respecto a las partículas en el par distinguido así como también relativas a las otras. Note que $\Phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n(N-1)})$ y que

$$\Phi_{\mathbf{v}} = e^{im\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} \prod_{j=3}^N e^{i\mu_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{x}_j} \Phi_0. \quad (2.35)$$

Más aún, por (2.26)

$$|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j| = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j| \leq |\mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_j|, \quad j, k = 1, \dots, N$$

y $|\mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_2| \leq |\mathbf{x}|$, así tenemos una buena uniformidad de localización inicial en \mathbf{v}

$$\left\| (1 + |\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j|^2)^2 \Psi_{\mathbf{v}} \right\| \leq C, \quad j, k = 1 \dots, N. \quad (2.36)$$

Se sigue de (2.30) que existen funciones $f_{jk} \in C_0^\infty(B_{\mu_{jk}\eta_{jk}})$ tales que

$$\Phi_{\mathbf{v}} = f_{jk}(\mathbf{p}_{jk} - \mu_{jk}\mathbf{v}_{jk}) \Phi_{\mathbf{v}}, \quad (2.37)$$

donde $\eta_{12} = \eta$, $\eta_{1j} = 2(1 + \eta m/m_1)$, $\eta_{2j} = 2(1 + \eta m/m_2)$, $j = 3, \dots, N$, y $\eta_{jk} = 4$ para $j, k = 3, \dots, N$. (2.36) y (2.37) nos permiten reducir en una manera efectiva las demostraciones en el caso de N

cuerpos al de sólo dos partículas. De nuevo, sea \tilde{U} la corrección de Dollard

$$\tilde{U}(t) := \exp \left[-i \int_0^t ds \sum_{j < k} V_{jk}^\ell(s \mathbf{p}_{jk} / \mu_{jk}) \right]. \quad (2.38)$$

Note que por (2.26)

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_1 = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} - i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}, \quad j, k = 3, \dots, N, \quad (2.39)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_1 = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} + \frac{m}{m_1} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_2 = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} - \frac{m}{m_2} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad j = 3, \dots, N. \quad (2.40)$$

Tome v_0 tan grande por $|\mathbf{p}_{jk}| \geq v_{jk} \mu_{jk} / 2$ en el soporte de $f_{jk}(\mathbf{p}_{jk} - \mu_{jk} \mathbf{v}_{jk})$ para $v \geq v_0$. Entonces como en la proposición 2.7 demostramos que para $v \geq v_0, j < k$

$$\begin{aligned} & \left\| (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j) \tilde{U}(t) \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\mathbf{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \mathbf{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j|^2)^{-1/2} \right\| \\ & \leq C \begin{cases} (1 + v^{-2} |vt|^{2-\gamma}), & \text{si } j = 1, 2, \\ (1 + v_{jk}^{-2} |v_{jk} t|^{2-\gamma}), & j = 3, 4, \dots, N, \end{cases} \\ & \leq C (1 + |v_{jk} t|^{2-\gamma}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

y para $\kappa > 0$

$$\left\| F(|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j| \geq \kappa |v_{jk} t|) \tilde{U}(t) \right\| \quad (2.42)$$

$$\left\| \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\mathbf{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \mathbf{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j|^2)^{-2} \right\| \leq C (1 + |v_{jk} t|)^{-2-\varepsilon}$$

Entonces como en el lema 2.8 demostramos que si V_{jk}^S satisface (2.13) como un operador en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| V_{jk}^S(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j) U^D(t) \right\| \quad (2.43)$$

$$\left\| \prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\mathbf{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \mathbf{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j|^2)^{-2} \right\| \leq h_{jk}(|v_{jk} t|)$$

donde $(1 + \tau)^\rho h_{jk}(\tau) \in L^1((0, \infty))$. Para este propósito note que para cualquier par (jk) , $H_0 = \mathbf{p}_{jk}^2 / 2\mu_{jk} + \tilde{H}_{jk}$, donde \tilde{H}_{jk} conmuta con $\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j$. Esto se sigue, por ejemplo, tomando coordenadas de Jacobi con $\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j$ como primera coordenada. Además, como en el lema 2.9 demostramos que

$$\left\| \left(V_{jk}^\ell(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j) - V_{jk}^\ell(t \mathbf{p}_{jk}/\mu_{jk}) \right) U^D(t) \right\| \quad (2.44)$$

$$\prod_{j' < k'} f_{j'k'}(\mathbf{p}_{j'k'} - \mu_{j'k'} \mathbf{v}_{j'k'}) (1 + |\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_j|^2)^{-2} \left\| \leq C(1 + |v_{jk} t|)^{-1-\varepsilon}$$

Entonces usando (2.26) y (2.37) se demuestra como en el corolario 2.10 que

$$\left\| (e^{-itH} \Omega_\pm^D - U^D(t)) \Phi_{\mathbf{v}} \right\| = O(v^{-1}), \quad (2.45)$$

uniformemente en t . Note que $v_{12} = v$ y $v_{jk} = O(v^2)$ para $j < k = 3, \dots, N$.

TEOREMA 2.12. *Suponga que $V^S \in \mathcal{V}_{SR}$, $V^\ell \in \mathcal{V}_{LR}$ y que V_{12}^S satisface (2.13). Entonces para toda $\Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}}$ como en (2.33) con alguna $\hat{\phi}_3$ fija y normalizada*

$$\begin{aligned} & v \left[\left(i(S^D - I) \Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}} \right) \right. \\ & \left. - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(V_{12}^\ell(\mathbf{x}) - V_{12}^\ell(t \mathbf{p}/m) \right) U^D(t) \Phi_{\mathbf{v}}, U^D(t) \Psi_{\mathbf{v}} \right) \right] \\ & = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V_{12}^S(\mathbf{x} + \tau \hat{\mathbf{v}}) \Phi_{12}, \Psi_{12} \right) + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 1, \\ O(v^{-1}), & \rho = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.46)$$

y en particular para toda $0 \leq \rho \leq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} v \left(i(S^D - I) \Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}} \right) & = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(V_{12}^S(\mathbf{x} + \tau \hat{\mathbf{v}}) \right. \right. \\ & \left. \left. + V_{12}^\ell(\mathbf{x} + \tau \hat{\mathbf{v}}) - V_{12}^\ell(\tau \hat{\mathbf{v}}) \right) \Phi_{12}, \Psi_{12} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Note que en el caso especial cuando no existen fuerzas de largo alcance, *i.e.* $V_{ij}^\ell \equiv 0$, la fórmula de reconstrucción (2.46) se simplifica como

$$\begin{aligned} v \left(i(S - I) \Phi_{\mathbf{v}}, \Psi_{\mathbf{v}} \right) & = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V_{12}^S(\mathbf{x} + \tau \hat{\mathbf{v}}) \Phi_{12}, \Psi_{12} \right) \\ & + \begin{cases} o(v^{-\rho}), & 0 \leq \rho < 1, \\ O(v^{-1}), & \rho = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Si, además de los pares de potenciales, uno tiene fuerzas de tres cuerpos o multipartícula entonces determinamos sólo los potenciales de dos cuerpos con la sucesión aproximante usada hasta este momento, el enfoque análogo usando estados con tres partículas que tiene velocidades relativas de orden v y todas las otras de orden v^2 determinan entonces todos los potenciales de tres cuerpos, y así sucesivamente. Ver Wang(1994) [37] para un enfoque relacionado.

2.5. Aplicaciones

En el artículo de Weder (2003) [48] se mencionan brevemente dos aplicaciones del método dependiente del tiempo para el efecto Aharonov-Bohm y la ecuación de Schrödinger no lineal. Este artículo también trata la dispersión por un potencial, pero este tema ya se trató en las secciones anteriores y, por lo tanto, no se repetirá aquí.

2.5.1. Efecto Aharonov-Bohm

El caso del efecto Aharonov-Bohm, i.e. operadores de Schrödinger con campos magnéticos singulares y dominios exteriores. Este es un problema de dispersión inversa particularmente interesante que muestra, que en la mecánica cuántica, un campo magnético actúa sobre una partícula cargada (por medio del potencial magnético) en regiones donde es idénticamente cero (el campo magnético). El punto clave en este problema es que a altas energías, la traslación del paquete de ondas domina sobre su expansión durante el tiempo de interacción. De hecho, en este límite, para calcular el operador de dispersión basta considerar la traslación del paquete de ondas en lugar de su correcta evolución libre. Ver [47] y [6].

2.5.2. Ecuación de Schrödinger no lineal

A partir de operador de dispersión se reconstruye unívocamente el potencial y la no linealidad. Para este propósito, se observa que en el límite de pequeña amplitud los efectos no lineales se vuelven despreciables y la dispersión está dominada por el término lineal. Usando esta idea se prueba que la derivada en cero del operador de dispersión no lineal es la del operador lineal. Con la ayuda de este hecho, primero se reconstruye unívocamente el potencial a partir del problema inverso de dispersión lineal asociado y en un segundo paso se reconstruye unívocamente la no linealidad. Existen otros artículos adicionales del Dr. Weder que tratan este caso: [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [49], [49], [50], [51],

3. Hoyos negros

3.1. Introducción

Los hoyos negros en el espacio-tiempo son probablemente uno de los más fascinantes objetos predichos por la teoría general de la relatividad de Einstein. En los últimos años, varios estudios matemáticos se han realizado para obtener un mejor entendimiento de sus propiedades. A pesar de la riqueza del problema original, una característica

notable de los hoyos negros en el espacio-tiempo es su simplicidad. Aquí nos referimos al hecho de que, cualquiera que sea la configuración de un cuerpo estelar colapsante, el hoyo negro en el espacio-tiempo resultante, eventualmente, puede ser descrito por “casi” tres parámetros: Su masa, su carga eléctrica y su momento angular, resultado conocido como el teorema de la calvicie. En las siguientes subsecciones se describirán los tipos de hoyos negros permitidos por el teorema de la calvicie. El contenido entero de esta sección está basado en los libros de Hacyan [35], Misner [29] y Wald [36].

3.2. Hoyo negro de Schwarzschild

Schwarzschild tuvo la idea de considerar un problema simple, aunque realista: ¿Cómo deforma al espacio-tiempo una distribución perfectamente esférica de masa? Evidentemente, el espacio-tiempo resultante debe tener propiedades simétricas alrededor de la masa considerada; esto simplifica notablemente las ecuaciones, a tal grado que encontró una solución exacta: el espacio-tiempo de Schwarzschild, un espacio riemanniano que describe la región externa de un cuerpo esférico con masa M y radio arbitrario.

La solución matemática de la ecuación de Einstein, encontrada por Schwarzschild, es válida aún si se supone que el radio de la esfera masiva ha sido cero en todo tiempo o, en otras palabras, si toda la masa ha estado concentrada eternamente en una singularidad. En este caso, la estructura del espacio-tiempo es relativamente simple: un horizonte dentro del cual está una singularidad y fuera de él, a lo lejos, el espacio que tiende a ser plano.

La métrica que define la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild está dada por la ecuación (3.1)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

En este caso el único parámetro del hoyo negro es su masa M . G es la constante de gravitación y c es la velocidad de la luz.

Si la esfera considerada de masa M tiene un radio menor que el radio de Schwarzschild

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

entonces algo extraño sucede: la luz emitida de su superficie, o de cualquier punto dentro de la esfera con radio r , no puede llegar al radio crítico y queda atrapada para siempre.

La superficie esférica cuyo radio es justamente el de Schwarzschild se llama horizonte del hoyo negro; la luz puede cruzar el horizonte sólo en un sentido: de afuera hacia adentro y nunca al revés. Lo que ocurre

dentro del horizonte está eternamente desconectado del exterior, no puede ser visto ni puede influir sobre el resto del Universo.

3.3. Hoyo negro de Reissner-Nordström

Apenas unos meses después de que Schwarzschild descubrió la solución que lleva su nombre, los físicos H. Reissner y G. Nordström encontraron, en forma independiente, otra solución de las ecuaciones de Einstein que representa el espacio-tiempo afuera de una esfera que, además de masa, posee una carga eléctrica.

$$ds^2 = -(F(r)) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.2)$$

donde

$$F(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2GQ^2}{c^4 r^2} \quad (3.3)$$

La solución de Reissner-Nordström (3.2) generaliza la de Schwarzschild. Posee dos parámetros, la masa M y la carga Q de la esfera que deforma al espacio-tiempo. En el caso particular en que la carga es cero, la solución se reduce a la de Schwarzschild con masa M .

Al igual que el espacio-tiempo de Schwarzschild, el de Reissner-Nordström posee un horizonte que sólo puede ser cruzado en un sentido; es, por lo tanto, un hoyo negro eléctricamente cargado.

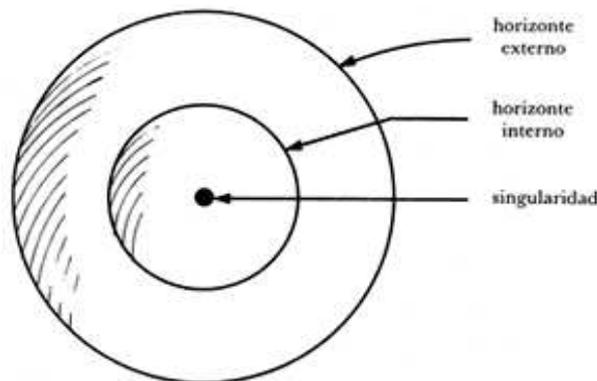


Figura 1: Estructura de un hoyo negro cargado.

La principal peculiaridad de un hoyo negro cargado es que, a diferencia de uno neutro, posee dos horizontes concéntricos, centrados alrededor de la singularidad figura 1.

Los radios de los horizontes externos e internos, que denotaremos r_+ y r_- respectivamente, son:

$$r_+ = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{GQ^2}{c^4}} \quad (3.4)$$

$$r_- = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{GQ^2}{c^4}} \quad (3.5)$$

Por supuesto, un observador externo sólo puede ver lo que sucede afuera del horizonte externo.

Si la carga Q del hoyo es igual a su masa M multiplicada por raíz cuadrada de G (es decir $Q = M\sqrt{G}$) los dos horizontes se funden en uno solo. Si la carga Q es mayor que raíz cuadrada de GM , simplemente no hay horizonte; en este caso no existe un hoyo negro sino una singularidad desnuda.

3.4. Hoyo negro de Kerr

Tanto la solución de Schwarzschild como la de Reissner-Nordström describen un espacio-tiempo con una perfecta simetría esférica. Éste, evidentemente, no puede ser el espacio-tiempo de un hoyo negro rotante, ya que la rotación define una dirección particular, el eje de rotación, que rompe la simetría esférica.

La solución de Kerr describe el espacio-tiempo de un hoyo negro rotante. Como tal, posee dos parámetros: la masa M y el momento angular S del hoyo. En el caso particular en que S es cero, la solución de Kerr se reduce exactamente a la de Schwarzschild. En (3.6) se muestra la forma explícita de la solución escrita en las coordenadas t, r, θ, ϕ de Boyer y Lindquist (1967), las cuales generalizan las coordenadas de Schwarzschild.

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left[cdt - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\phi \right]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[\left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) d\phi - a dt \right]^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.6)$$

donde:

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

y

$$\rho^2 = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \quad a = S/M$$

Cualquier esfera masiva genera en su exterior un espacio-tiempo de Schwarzschild, pero no cualquier cuerpo rotante produce un espacio-tiempo de Kerr. Durante varios años, los físicos y matemáticos trataron infructuosamente de encontrar una configuración de materia que pudiera originar el espacio-tiempo de Kerr; finalmente, se convencieron de que esta solución de las ecuaciones de Einstein sólo puede corresponder a un hoyo negro.

La estructura espacio-temporal de un hoyo negro rotante es similar, en varios aspectos, a la de un hoyo negro cargado. Como este último, también posee dos horizontes concéntricos, si el momento angular entre la masa, a , no excede del valor GM/c . El radio de cada horizonte, r_+ y r_- está dado por las fórmulas

$$r_+ = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \quad (3.7)$$

$$r_- = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \quad (3.8)$$

La singularidad se encuentra dentro del horizonte interno, pero, a diferencia del caso sin rotación, la singularidad del espacio-tiempo de Kerr no es un punto sino un anillo (figura 2).

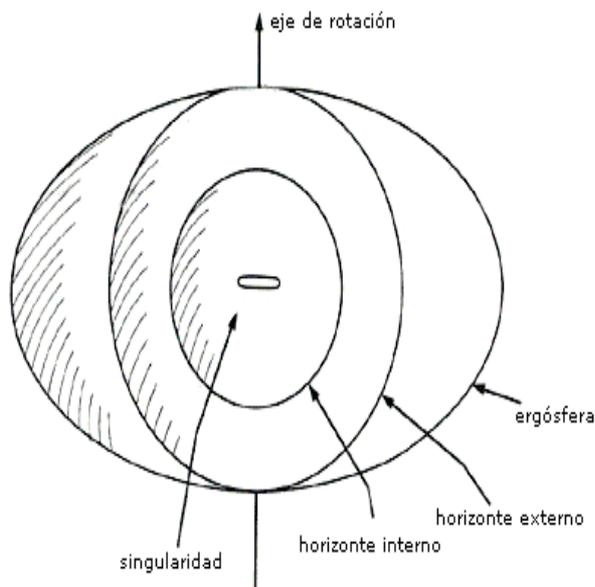


Figura 2: Estructura de un hoyo negro rotante.

Si el parámetro de momento angular a es igual al valor crítico GM/c , los dos horizontes se fusionan en uno solo. Si a es mayor que GM/c , no hay horizontes: la singularidad queda desnuda y se puede observar desde una distancia prudente. Sin embargo, es imposible destruir el horizonte de un hoyo negro arrojándole partículas para hacerlo girar más rápidamente y aumentar de este modo, su momento angular.

Una de las peculiaridades más interesantes de un hoyo negro rotante es la existencia de una zona llamada ergósfera, situada precisamente afuera del horizonte interno, en donde ningún cuerpo puede mantenerse inmóvil, por mucha energía que invierta para aferrarse a una misma

posición. La causa de este fenómeno es el efecto de Lense-Thirring llevado al extremo: el arrastre producido por la rotación del hoyo negro es tan intenso cerca del horizonte que todos los cuerpos sin excepción se ven forzados a girar junto con él.

3.5. Hoyo negro de Kerr-Newman

Así como la solución de Schwarzschild se puede extender al caso con carga eléctrica, también se puede generalizar la solución de Kerr para describir un hoyo negro que, además de rotar, posee carga. Tal solución fue obtenida por E. T. Newman y sus colaboradores después del descubrimiento de Kerr.

El espacio-tiempo de Kerr-Newman está determinado por tres parámetros: la masa M , el momento angular S y la carga Q . La forma de la solución es parecida a la de Kerr. Si la carga Q se hace cero, la solución se reduce a la de Kerr. Si el momento angular S se anula, la solución se reduce a la de Reissner-Nordström, como se podría esperar.

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left[cdt - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\phi \right]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[\left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) d\phi - adt \right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.9)$$

donde:

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{GQ^2}{c^4}$$

y

$$\rho^2 = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \quad a = S/M$$

El espacio-tiempo de Kerr-Newman posee dos horizontes concéntricos, cuyos radios r_+ y r_- son

$$r_+ = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} - \frac{GQ^2}{c^4}} \quad (3.10)$$

$$r_- = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} - \frac{GQ^2}{c^4}} \quad (3.11)$$

Si la carga y el momento angular son tales que la cantidad $c^2 a^2 + GQ^2$ es mayor que $G^2 M^2$, los dos horizontes desaparecen y la singularidad queda al descubierto.

Por lo demás, el espacio-tiempo de Kerr-Newman posee cualitativamente la misma estructura que el de Kerr, por lo que la descripción de la sección anterior se aplica idénticamente.

4. Recuperación de la masa y la carga de un hoyo negro de Reissner-Norström por medio de un experimento de dispersión inversa

Supongamos que somos observadores que viven en el exterior de un hoyo negro, en reposo respecto a él y localizado muy lejos de él (a tales observadores se les dice que están estáticos en el infinito) y típicamente pueden ser pensados como un telescopio en la tierra dirigido al hoyo negro, ¿Podemos, en esas condiciones, medir los parámetros que definen al hoyo negro por medio de un experimento de dispersión?

El primer paso en esta dirección ha sido dado por Thierry Daudé y François Nicoleau en 2008 [9] para campos de Dirac sin masa que se propagan en la región exterior de un hoyo negro de Reissner-Nordström. Teniendo la matriz de dispersión se obtiene mediante la técnica descubierta por Enss y Weder (1996) [17] una expansión asintótica de alta energía del operador de dispersión S . Mediante el cálculo de una integral se encuentra el primer término de la expansión y para estimar la masa y la carga del hoyo negro se necesita el segundo término de la expansión, este se determina mediante un método estacionario. La siguiente sección está basada en el artículo de Daudé y Nicoleau [9].

4.1. Geometría de los hoyos negros de Reissner-Norström

En las coordenadas de Schwarzschild un hoyo negro de Reissner-Nordström se describe por una variedad suave de cuatro dimensiones

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r^+ \times S_\omega^2,$$

equipado con la métrica (3.2). Por simplicidad se tomará $G = 1$ y $c = 1$.

A lo largo del artículo se utilizan las coordenadas de Schwarzschild como las coordenadas del análisis. Esto tiene dos razones: Primero, en este sistema de coordenadas los coeficientes de la métrica no dependen de t y ω , reflejando la simetría del hoyo negro. En la siguiente sección se muestra que la ecuación de Dirac toma una forma conveniente, a saber, una ecuación de evolución (con respecto a t) con el Hamiltoniano independiente del tiempo actuando en la hipersuperficie espacial $\Sigma = \mathbb{R}_r^+ \times S_\omega^2$, un bello formalismo cuando se trabaja con la teoría de dispersión. Segundo, corresponde implícitamente a la noción natural de observadores estáticos en el infinito. Tales observadores se encuentran muy alejados del horizonte exterior del hoyo negro y viven

en curvas integrales de su 4-vector de velocidad

$$U = \frac{1}{F(r)} \frac{\partial}{\partial t}.$$

En particular, la coordenada temporal t es el tiempo propio de tales observadores y así corresponden a su verdadera experiencia temporal. Esta elección de coordenadas resulta ser bastante natural para los experimentos de dispersión que se tienen en mente.

Se quiere enfatizar una propiedad del horizonte exterior bastante remarcable, que se tiene cuando éste se describe en las coordenadas de Schwarzschild, la cual tiene consecuencias importantes en la teoría de dispersión: Desde el punto de vista de los observadores estáticos en el infinito, el horizonte exterior se percibe como una región asintótica del espacio tiempo. Precisamente, esto significa que el horizonte exterior nunca es alcanzado en tiempo finito a lo largo de geodésicas radiales entrantes y salientes, i.e. las trayectorias seguidas por las curvas integrales de

$$F(r)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}$$

A lo largo de las geodésicas salientes, podemos expresar el tiempo t como una función de r por la fórmula

$$t(r) = \int_{r_0}^r F(\tau)^{-1} d\tau, \quad (4.1)$$

donde $r_0 > r_+$ está fijo. De (3.3) y (4.1), se ve inmediatamente que $t(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow r_+$. Una fórmula análoga se prueba para las geodésicas entrantes.

En consecuencia podemos restringir nuestra atención a la región exterior $r > r_+$ de un hoyo negro de Reissner-Nordström y estudiar allí el problema inverso para campos de Dirac sin masa. Solamente debemos tener en cuenta que no se necesitarán condiciones a la frontera en el exterior del horizonte de eventos $r = r_+$ debido a que este horizonte es una región asintótica en el espacio-tiempo. Para hacer más claro este punto, introduzcamos una nueva coordenada radial x , llamada la coordenada Regge-Wheeler, la cuál tiene la propiedad de rectificar las geodésicas radialmente nulas y simplicará de manera importante el análisis posterior. Está definida implícitamente por la relación

$$\frac{dr}{dx} = F(r) \quad (4.2)$$

y explícitamente por

$$x = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log(r - r_+) + \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log(r - r_-). \quad (4.3)$$

En el sistema de coordenadas (t, x, ω) , el horizonte $r = r_+$ es llevado hasta $x = +\infty$ y gracias a (4.2), la métrica toma la forma:

$$g = F(r)(dt^2 - dx^2) - r^2 d\omega^2. \quad (4.4)$$

]

Observe que las geodésicas radialmente nulas entrantes y salientes están ahora generadas por los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}$ y toman la forma simple

$$\gamma^\pm(t) = (t, x_0 \pm t, \omega_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

donde $(x_0, \omega_0) \in \mathbb{R} \times S^2$ están fijos. Estas líneas son simplemente líneas rectas con velocidad ± 1 , al menos en el plano t-x, la situación de un espacio-tiempo de Minkowski de dimensión 1. Por lo tanto, trabajaremos en la variedad $\mathcal{B} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times S_\omega^2$ equipada con la métrica (4.4).

4.2. Ecuación de Dirac y resultados de dispersión directa

La teoría de dispersión para las ecuaciones de Dirac en el espacio-tiempo \mathcal{B} ha sido objeto de los siguientes artículos Daudé (2007) [8], Melnyk (2003) [28] y Nicolas (1995) [30]. Se usa la forma conveniente de la ecuación de Dirac sin masa obtenida en estos artículos. Bajo la forma Hamiltoniana la ecuación eventualmente se lee como:

$$i\partial_t \psi = H\psi, \quad (4.6)$$

donde ψ es un espinor de dos componentes que pertenece al espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times S^2; \mathbb{C}^2)$ y el Hamiltoniano está dado por

$$H = \Gamma^1 D_x + a(x) D_{S^2}, \quad (4.7)$$

donde $a(x) = \frac{\sqrt{F(r)}}{r}$, $D_x = -i\partial_x$, D_{S^2} denota el operador de Dirac en S^2 , i.e.

$$D_{S^2} = -i\Gamma^2 \left(\partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} \right) - \frac{i}{\sin \theta} \Gamma^3 \partial_\phi \quad (4.8)$$

y $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ que aparecen en (4.6) y (4.8) son las matrices de Dirac usuales que satisfacen las relaciones anticonmutativas $\Gamma^i \Gamma^j + \Gamma^j \Gamma^i = 2\delta_{ij} Id$.

Podemos simplificar más la ecuación del Hamiltoniano al usar la simetría esférica de la ecuación. El operador D_{S^2} tiene resolvente compacto y puede ser diagonalizado en una suma infinita de operadores de multiplicación con matrices como sus valores. Las funciones propias asociadas con D_{S^2} son una generalización de los armónicos esféricos

usuales llamados armónicos esféricos con peso de espin. Ver Gel'Fand y Sapiro (1956) [18] para una presentación detallada de estos armónicos esféricos generalizados.

Existe así una familia de funciones $F_{nl} = (F_{nl}^1, F_{nl}^2)$ con los índices (l, n) variando en el conjunto $\mathcal{I} = \{(l, n) : l - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}, l - |n| \in \mathbb{N}\}$ que forma una base de Hilbert de $L^2(S^2; \mathbb{C}^2)$ y tal que $\forall (l, n) \in \mathcal{I}, \forall \psi \in L^2(S^2; \mathbb{C}^2)$,

$$D_{S^2}(\psi(x) \otimes F_{nl}) = -(l + \frac{1}{2})\Gamma^2\psi(x) \otimes F_{nl} \quad (4.9)$$

El espacio de Hilbert puede descomponerse en una suma directa infinita:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(l,n) \in \mathcal{I}} [L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{C}^2)] := \bigoplus_{(l,n) \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_{ln},$$

donde $\mathcal{H}_{ln} = L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{C}^2)$ se identifica con $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$. Obtenemos la descomposición ortogonal para el hamiltoniano H

$$H = \bigoplus_{(l,n) \in \mathcal{I}} H^{ln},$$

con

$$H^{ln} := H|_{\mathcal{H}_{ln}} = \Gamma^1 D_x + a_l(x)\Gamma^2, \quad (4.10)$$

y $a_l(x) = -a(x)(l + \frac{1}{2})$. El operador H^{ln} es autoadjunto en \mathcal{H}_{ln} con dominio $D(H^{ln}) = H^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$. Nótese que también usamos las siguientes representaciones para las matrices de Dirac Γ^1 y Γ^2 :

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Será suficiente restringir nuestro estudio a un armónico fijo. Para simplificar la notación escribiremos \mathcal{H}, H y $a(x)$ en lugar de \mathcal{H}_{ln}, H^{ln} y $a_l(x)$, respectivamente.

Ahora se resumirán los resultados obtenidos en los artículos ya mencionados [8], [28] y [30]. Definimos $H_0 = \Gamma^1 D_x$ como el Hamiltoniano libre. Claramente es un operador autoadjunto con dominio $D(H_0) = H^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$. Los resultados principales concernientes al par (H, H_0) son los siguientes: El Hamiltoniano H no tiene valor propio y espectro continuo no singular, i.e.

$$\sigma_{pp}(H) = \emptyset, \sigma_{sc}(H) = \emptyset, \quad (4.12)$$

y los operadores de onda estándar

$$W^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}, \quad (4.13)$$

existen y son completos en \mathcal{H} . Que los operadores de onda sean completos significa que el rango de los operadores sea igual al subespacio

absolutamente continuo para H . i.e. $Rango(W^\pm) = \mathcal{H}_{ac}(H)$. El subespacio absolutamente continuo del operador H es el conjunto de todos los vectores en \mathcal{H} los cuales son absolutamente continuos con respecto a H . Un vector f se dice absolutamente continuo con respecto a H si m_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , i.e. si $|\Delta| = 0$ implica que $\|E_\Delta f\|^2 = 0$. Si $\Delta = (\lambda', \lambda'']$ entonces $E_\Delta = E_{\lambda''} - E_{\lambda'}$. La familia E_λ es la descomposición espectral del operador H .

El operador de dispersión S está definido por

$$S = (W^+)^* W^-. \quad (4.14)$$

Se puede simplificar el operador S al considerar datos iniciales entrantes y salientes separadamente¹. Para definir estos subespacios de datos iniciales de manera precisa, introduzcamos los operadores de velocidad asintótica

$$P_0^\pm = s - C^\infty - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_0} \frac{x}{t} e^{-tH_0},$$

y

$$P^\pm = s - C^\infty - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} \frac{x}{t} e^{-tH},$$

Aquí la existencia de los límites $s - C^\infty - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_0} \frac{x}{t} e^{-tH_0}$ significa que para todas las funciones $f \in C_\infty(\mathbb{R})$, definidas como el conjunto de funciones suaves las cuales se anulan en el infinito, existen los límites fuertes $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_0} f(\frac{x}{t}) e^{-tH_0}$. Mediante un cálculo directo, fácilmente se ve que $P_0^\pm = \Gamma^1$ mientras que en [8] se muestra que los operadores P^\pm existen, tiene espectro igual a $\{-1, 1\}$ y satisfacen las relaciones de entrelazamiento

$$P^\pm W^\pm = W^\pm \Gamma^1. \quad (4.15)$$

Denotemos por $P_{in} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(\Gamma^1)$ y $P_{out} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\Gamma^1)$ las proyecciones sobre los subespacios espectrales negativos y positivos de la velocidad asintótica “libre” Γ^1 . A continuación definimos $\mathcal{H}_{in}^0 = P_{in} \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_{out}^0 = P_{out} \mathcal{H}$ y nos referimos a ellos a estos espacios como los datos iniciales entrantes y salientes para la dinámica libre. De una manera similar, definimos $\mathcal{H}_{in}^\pm = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(P^\pm) \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_{out}^\pm = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(P^\pm) \mathcal{H}$ los espacios de datos iniciales entrantes y salientes para la dinámica completa cuando $t \rightarrow \pm\infty$. En nuestro caso particular se da el caso de que tenemos igualdades entre estos espacios. Precisamente, tenemos:

¹Los términos: entrante y saliente tienen que entenderse aquí como relacionados al hoyo negro, i.e. como los datos cuyas soluciones asociadas se propagan, cuando t crece, en la dirección que se dirige hacia el hoyo negro (datos entrantes) o en aquella en la que escapa de él (datos salientes)

LEMA 4.1. *Con la notación anterior, tenemos*

$$\mathcal{H}_{in}^+ = \mathcal{H}_{in}^- =: \mathcal{H}_{in}, \quad \mathcal{H}_{out}^+ = \mathcal{H}_{out}^- =: \mathcal{H}_{out}.$$

Gracias a las relaciones de entrelazamiento (4.15) y el lema 4.1 se ve que los operadores de onda W^\pm son isometrías parciales de $\mathcal{H}_{in/out}^0$ a $\mathcal{H}_{in/out}$. Definimos

$$W_{out}^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} P_{out}, \quad W_{in}^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} P_{in},$$

los correspondientes operadores de onda entrantes y salientes. Observe aquí que por las relaciones $H_0 \mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\Gamma^1) = \pm D_x \mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\Gamma^1)$ el Hamiltoniano se convierte en 'escalar' cuando se proyecta sobre $\mathcal{H}_{in/out}^0$. En consecuencia podemos simplificar la expresión de los operadores de onda entrantes y salientes por

$$W_{out}^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itD_x} P_{out}, \quad W_{in}^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itD_x} P_{in}.$$

Por la definición (4.14) del operador de dispersión, deducimos que S deja invariante los subespacios entrante y saliente $\mathcal{H}_{in/out}^0$ y así descomponerse en la suma directa

$$S = S_{in} \otimes S_{out}, \quad (4.16)$$

donde

$$S_{in} = (W_{in}^+)^* W_{in}^-, \quad S_{out} = (W_{out}^+)^* W_{out}^-. \quad (4.17)$$

Claramente S_{in} y S_{out} son isometrías sobre \mathcal{H}_{in}^0 y \mathcal{H}_{out}^0 .

4.3. El problema inverso a alta energía

Ahora tenemos todo lo necesario para estudiar el problema inverso para los campos de Dirac sin masa que satisfacen (4.6). La pregunta que nos hacemos es: ¿Podemos determinar la masa M y la carga Q del hoyo negro a partir del conocimiento del operador de dispersión S ? El resultado principal del artículo ([9]) se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.2. *Suponga que el operador de dispersión S_{out} (o S_{in}) se conoce. Entonces el potencial correspondiente $a(x)$ puede determinarse enteramente. Más aún, la masa M y el cuadrado de la carga Q^2 del hoyo negro puede recuperarse por la fórmula*

$$M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3 a^2(x)}{2} \quad (4.18)$$

$$Q^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 a^2(x) - x^2 + 2Mx). \quad (4.19)$$

La estrategia de la demostración de este teorema se basa en la expansión asintótica de alta energía de S_{out} , una técnica bien conocida inicialmente desarrollada en el caso de operadores de Schrödinger multidimensionales por Enss y Weder [17]. Este método puede ser usado para estudiar Hamiltonianos con potenciales magnéticos y eléctricos.

Precisamente, consideramos $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_{out}^0$ tales que $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ y definimos la función:

$$F_{out}(\lambda) = \langle S_{out} e^{i\lambda x} \psi_1, e^{i\lambda x} \psi_2 \rangle, \quad (4.20)$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$. Siguiendo las ideas de Nicoleau (1997) [31] y (2000) [32], se obtiene una expansión asintótica de $F_{out}(\lambda)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ con la expresión exacta de los primeros tres miembros. Exactamente obtenemos la siguiente fórmula de reconstrucción en cada armónico esférico con peso de espín.

TEOREMA 4.3. *Sean $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_{out}^0$ tales que $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$. Entonces para λ grande, obtenemos*

$$F_{out}(\lambda) = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle \psi_1, L_1(x, D_x) \psi_2 \rangle + \frac{1}{\lambda^2} \langle \psi_1, L_2(x, D_x) \psi_2 \rangle + O(\lambda^{-3}), \quad (4.21)$$

donde $L_j(x, D_x)$ son operadores diferenciales dados por

$$\begin{aligned} L_1(x, D_x) &= L_1 = \frac{i(l + \frac{1}{2})^2}{2r_+}, \\ L_2(x, D_x) &= \frac{a_l^2(x)}{2} + \frac{(l + \frac{1}{2})^4}{8r_+^2} - \frac{i(l + \frac{1}{2})^2 D_x}{2r_+} \\ r_+ &= M + \sqrt{M^2 - Q^2}. \end{aligned}$$

Admitiendo el teorema 4.3 se demuestra el teorema principal 4.2. Si suponemos que la matriz de dispersión S_{out} es conocida, entonces podemos usar inductivamente la expansión de alta energía (4.21) para recuperar, primero el radio r_+ del horizonte de eventos exterior (término de orden λ^{-1}) y segundo, el potencial $a(x)$. Ciertamente, el término de orden λ^{-2} (debido r_+ ya está determinada) da la cantidad

$$\langle \frac{a^2(x)}{2} \psi_1, (D_{S^2})^2 \psi_2 \rangle. \quad (4.22)$$

Como (4.22) puede determinarse para cualquier ψ_1, ψ_2 es un subconjunto denso en \mathcal{H} , recuperamos completamente el potencial $a(x)$. Ahora las fórmulas para la masa (4.18) y para la carga (4.19) se sigue directamente de la definición de $a(x)$

$$a^2(x) = \frac{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}{r^2},$$

y del hecho de que

$$r(x) \sim x, \quad x \rightarrow +\infty$$

una consecuencia inmediata de (4.3). Esto finaliza la demostración del teorema principal 4.2 y demuestra que los observadores estáticos en el infinito que puede medir la matriz de dispersión somos capaces de recuperar la masa del hoyo negro y su carga, excepto por el signo.

5. Problemas de Investigación

De manera natural, se antoja hacer lo mismo que se hizo en [9], i.e. determinar la masa y la carga, para los hoyos negros de Kerr y de Kerr-Newman. Por otra parte, hacer lo mismo para otros tipos de propagación de campos (onda, Klein-Gordon, Dirac, Maxwell) y para todos los tipos de hoyo negro. Para tal efecto, primero se revisarán los casos en los que se ha abordado el problema directo de dispersión.

En 1985 Dimock [10] estudió el problema de dispersión para un campo escalar clásico sin masa que se propaga en el entorno de un hoyo negro, es decir, el problema directo de dispersión para la ecuación de onda en la métrica de Schwarzschild. En conjunción con Bernard Kay, J Dimock (1986) [11] (1986) [12] y (1987) [13] desarrolló la teoría de dispersión para campos escalares masivos relativistas clásicos que se propagan en la presencia de fuerzas de largo alcance. En particular para la ecuación de Klein-Gordon y la métrica de Schwarzschild. Obteniendo los operadores de onda que describen el comportamiento asintótico de las soluciones clásicas tanto para grandes distancias como cercano al radio de Schwarzschild para $t \rightarrow \pm\infty$.

El problema de Cauchy global para la ecuación no lineal de Klein-Gordon fuera de un hoyo negro esférico fue resuelto por Alain Bachelot y Jean-Philippe Nicolas en 1993 [5]. Bachelot (1994) [3] prueba la completez asintótica fuerte de los operadores de onda tanto clásicamente en el horizonte como los modificados de Dollard en el infinito (debido a que interacción gravitacional es de largo alcance); la completez asintótica fue una de las hipótesis usadas por Dimock y Kay en su enfoque dependiente del tiempo de la teoría de dispersión para campos escalares en el exterior de un hoyo negro.

En 1995, Nicolas [30] estudia los sistemas lineales de Dirac fuera de un hoyo negro esférico. En el caso de campos sin masa, demostró la existencia de los operadores de onda en el horizonte del hoyo negro y en el infinito.

Hasta antes de Bachelot (1997) [4] los matemáticos no se habían ocupado de hoyos negros realistas, i.e. aquellos creados por un colapso gravitacional. El objetivo de este artículo fue el de estudiar la dispersión de campos escalares clásicos por un hoyo negro en formación.

Se contruyó un marco de trabajo funcional asociado con el fenómeno, probándose la existencia y completez asintótica fuerte de los operadores de onda que describen la dispersión del campo por la curvatura del espacio-tiempo. El principal punto de interés es el efecto Doppler infinito medido por un observador en reposo en las coordenadas de Schwarzschild.

Häfner (2001) [19] demuestra la completez asintótica para la ecuación de ondas en espacios de tiempo estacionarios y asintóticamente planos. El punto en común de los trabajos anteriores que se considera al espacio-tiempo como estático, i.e. la ecuación de ondas puede expresarse como $i\partial_t f = Lf$ donde L es diagonalizable. En cambio, en los espacios-tiempo estacionarios, en general, no podemos diagonalizar L .

Otro avance fue dado por Häfner y Nicolas (2002-2003) [20] al haber abordado el problema directo de dispersión para la ecuación de Dirac sin masa dentro de la métrica de Kerr. Debido a que los objetos cosmológicos están, en general, en rotación, es más realista considerar esta métrica en lugar de la de Schwarzschild. Sin embargo, el análisis de las propiedades de dispersión de campos dentro de esta geometría tiene tres dificultades que no aparecen en el caso de Schwarzschild: 1) falta de simetría; 2) la evolución puede estar comprendida como una evolución sobre una variedad Riemanniana con dos picos. Dentro de este contexto el generador de las dilataciones no es un buen operador conjugado para el Hamiltoniano; 3) y por último el fenómeno de la superradiancia: El exterior de una hoyo negro de Kerr no es estacionario.

Por último tenemos el siguiente resultado dado en 2003 por Melnyk [28] al considerar la campos de Dirac cargados con masa en la métrica de Reissner-Nordström, se prueba la existencia y la completez asintótica de los operadores de onda clásico en el horizonte y modificado en el infinito.

Referencias

- [1] Amrein, Werner O. ; Josef M. Jauch; Kalyan B. Sinha. Scattering Theory in Quantum Mechanics, Physical principles and Mathematical Methods. 1977 W. A. Benjamin, Inc. Advanced book program.
- [2] Arians, S. Geometric approach to inverse scattering for the Schrödinger equation with magnetic and electric potentials. J. Math. Phys. 38 (6), 2761-2773, (1997).
- [3] Bachelot, A. Asymptotic completeness for the Klein-Gordon equation on the Schwarzschild metric. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 61, n^o 4, 1994, p. 411-441.

- [4] Bachelot, A. Scattering of scalar fields by spherical gravitational collapse. *J. Math. Pures Appl.*, 76, 1997, p. 155-210.
- [5] Bachelot, A. Nicolas, J.P. Équation non linéaire de Klein-Gordon dans des métriques de type Schwarzschild. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 316, Série I, p. 1047-1050, 1993.
- [6] Ballesteros M.; Weder R., High-velocity estimates for the scattering operator and Ahanorov-Bohm effect in three dimensions. Preprint (2007).
- [7] Chadan, K.; Sabatier, P. C. Inverse problems in quantum scattering theory. Second edition. With a foreword by R. G. Newton. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, 1989. xxxii+499 pp. ISBN: 0-387-18731-6
- [8] Daudé, T; Time-dependent scattering theory for massive charged Dirac fields by a Reissner-Nordström black hole. Preprint Université Bordeaux 1, en impresión (Disponible en línea en <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011974/en/>). 2007.
- [9] Daudé, T; Nicoleau, F. Recovering the mass and the charge of a Reissner-Nordström black hole by an inverse scattering experiment, *Inverse Problems*, Vol. 24, n°2, (2008).
- [10] Dimock, J. Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 17, No 4, 1985.
- [11] Dimock, J. Kay, Bernard S. Scattering for massive scalar fields on Coulomb potentials and Schwarzschild metrics. *Class. Quantum Grav.* 3 (1986) 71-80.
- [12] Dimock, J. Kay, Bernard S. Classical and Quantum Scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild Metric II. *J. Math. Phys.* 27 (10), October 1986.
- [13] Dimock, J. Kay, Bernard S. Classical and Quantum Scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild Metric I. *Annals of Physics* 175, 366-426 (1987).
- [14] Enss, V. "Propagation properties of quantum scattering states", *J.Func. Anal.* **52**, 219-251 (1983).
- [15] Enss, V., Weder, R. Inverse potential scattering: a geometrical approach. *Mathematical quantum theory. II. Schrödinger operators* (Vancouver, BC, 1993), 151-162, CRM Proc. Lecture Notes, 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [16] Enss, V; Weder, R. Uniqueness and reconstruction formulae for inverse N-particle scattering, appeared in "Differential Equations and Mathematical Physics", Proceedings of the International Conference, Univ. of Alabama at Birmingham, March 1994, I. Knowles editor, International Press Boston (ca. 1995) 53-66.

- [17] Enss, V.; Weder, R. The geometric approach to multidimensional inverse scattering, *J. Math. Phys.*, Vol. 36 (8), 3902-3921, (1995).
- [18] Gel'Fand I M, Sapiro Z Y; Representations of the group of rotations of 3-dimensional space and their applications 1956 *Am. Math. Soc. Trans.* 11 207-306.
- [19] Häfner D. Complétude Asymptotique pour l'équation des ondes dans une classe d'espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 51, 3 (2001), 779-883.
- [20] Häfner D, Nicolas, J. Théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac sans masse dans la métrique de Kerr. Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (2002-2003), Art. No. 23, 15 p.
- [21] Hörmander, L. "The existence of wave operators in scattering theory", *Math. Z.* **146**, 69–91 (1976).
- [22] Ito, Hiroshi T. Inverse scattering problems for Dirac operator with time-dependent electromagnetic potentials. (Japanese) Spectral-scattering theory and related topics (Japanese) (Kyoto, 1997). *Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1047* (1998), 26–35
- [23] Ito, Hiroshi T. An inverse scattering problem for Dirac equations with time-dependent electromagnetic potentials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 34 (1998), no. 4, 355–381.
- [24] Jung, W. Geometrical approach to inverse scattering for the Dirac equation. *J. Math. Phys.* 38 (1997), no. 1, 39–48.
- [25] Kac, M. Can one hear the shape of a drum?. *Am. Math. Monthly* 73, no. 4, part II, 1-23 (section XVIII.4, Foreword)
- [26] Kato, T. Perturbation theory for linear operators. Second edition. Springer. Berlin.
- [27] Lord Rayleigh J. W. S. The theory sound, Dover Publications, New York, 1877.
- [28] Melnyk F. Scattering on Reissner-Nordstrøm metric for massive charged spin 1/2 fields. *Ann. Henri Poincaré* 4 (2003) 813-846.
- [29] Misner, C; Thorne, K; Wheeler, J. Gravitation. W. H. Freeman, 1973. San Francisco.
- [30] Nicolas, J.P. Scattering of linear Dirac Fields by a spherically symmetric Black-Hole. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* Vol. 62, *n° 2*, 1995, p. 145-179.
- [31] Nicoleau, F. A stationary approach to inverse scattering for Schrödinger operators with first order perturbations *Commun. Part. Diff. Eqns* 22 (1997) 527-53.
- [32] Nicoleau, F. An inverse scattering problem with the Aharonov-Bohm effect. *J. Math Phys.* 8 (2000) 5223-37

- [33] Reed M.; Simon B. Functional Analysis. Revised and Enlarged Edition. Academic Press 1980.
- [34] Sandoval Romero, M.; Weder, R. The Initial Value Problem, Scattering and Inverse Scattering, for Non-Linear Schrödinger Equations with a Potential and a Non-Local Non-Linearity. J. Phys. A 39 (2006), no. 37, 11461–11478.
- [35] Hacyan, S. Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo. Segunda edición. FCE. México.
- [36] Wald, R. General Relativity. University of Chicago Press, 1984.
- [37] Wang, X.P. “On the uniqueness of inverse scattering for N -body systems”, Inverse Problems **10**, 765–784 (1994).
- [38] Weder, R. Multidimensional inverse scattering in an electric field. J. Funct. Anal. 139 (1996), no. 2, 441–465.
- [39] Weder, R. Inverse scattering for N -body systems with time-dependent potentials. Inverse problems of wave propagation and diffraction (Aix-les-Bains, 1996), 27–46, Lecture Notes in Phys., 486, Springer, Berlin, 1997.
- [40] Weder, R. Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation and L^p - $L^{\dot{p}}$ estimates. Spectral and scattering theory and related topics (Japanese) (Kyoto, 1999). Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku No. 1156 (2000), 157–168.
- [41] Weder, R. L^p - $L^{\dot{p}}$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential. J. Funct. Anal. 170 (2000), no. 1, 37–68.
- [42] Weder, R., Uniqueness of inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation and reconstruction of the potential and the nonlinearity. Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000), 631–634, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [43] Weder, R. Center manifold for nonintegrable nonlinear Schrödinger equations on the line. Comm. Math. Phys. 215 (2000), no. 2, 343–356.
- [44] Weder, R., Inverse scattering for the non-linear Schrödinger equation: reconstruction of the potential and the non-linearity. Math. Methods Appl. Sci. 24 (2001), no. 4, 245–254.
- [45] Weder, R., Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation. II. Reconstruction of the potential and the nonlinearity in the multidimensional case. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 12, 3637–3645 (electronic).
- [46] Weder, R., Direct and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential. VI Seminar on Free Boundary Value Problems and their Applications, Part 1 (Spanish)

(Rosario, 1998), 13–20, MAT Ser. A Conf. Semin. Trab. Mat., 3, Univ. Austral, Rosario, 2001.

- [47] Weder, R. The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory. *Inverse Problems* 18 (2002), no. 4, 1041–1056.
- [48] Weder, R. The time-dependent approach to inverse scattering theory. *Contemporary Mathematics Volume 327*, 2003, 359–377.
- [49] Weder, R., The L^p - $L^{p'}$ estimate for the Schrödinger equation on the half-line. *J. Math. Anal. Appl.* 281 (2003), no. 1, 233–243.
- [50] Weder, R. The forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line. *Math. Methods Appl. Sci.* 28 (2005), no. 10, 1237–1255.
- [51] Weder, R., The forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line. *Math. Methods Appl. Sci.* 28 (2005), no. 10, 1237–1255.