



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA COMPLEJA: LA CONEXIDAD
DEL CONJUNTO DE MANDELBROT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RODRIGO ROBLES MONTERO

DR. GUILLERMO SIENRA LOERA

2008



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Robles
Montero
Rodrigo
56 79 78 03
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
097118691

2. Datos del tutor

Dr
Guillermo Javier Francisco
Sierra
Loera

3. Datos del sinodal 1

Dr
Santiago
López de Medrano
Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Dr
Jefferson Edwin
King
Dávalos

5. Datos del sinodal 3

Dra
Ana Margarita
Guzmán Gómez

6. Datos del sinodal 4

Dra
Patricia
Domínguez
Soto

7. Datos del trabajo escrito.

Dinámica compleja: La conexidad del Conjunto de Mandelbrot
97p
2008



A mi familia

A mi pueblo

A todos los pueblos que en realidad son uno solo

*A todos aquellos que lucharon, luchan y lucharán por hacer de este mundo un lugar mejor
para todos.*

Gracias a ellos estoy aquí.

Índice

Capítulo 1	Introducción a la Dinámica Compleja	2
1.1	Un vistazo a la historia	2
1.1.1	El Conjunto de Mandelbrot	6
1.2	Definiciones elementales sobre Dinámica Discreta	10
1.3	La Conjugación	12
Capítulo 2	Elementos de Variable Compleja	15
2.1	El Plano Complejo Extendido y la Esfera de Riemann	15
2.2	Algunos teoremas y definiciones de Análisis Complejo	18
Capítulo 3	Los Conjuntos de Julia y de Fatou	24
Capítulo 4	El Conjunto de Mandelbrot	57
4.1	El conjunto	57
4.2	Su conexidad	64
Bibliografía		97

Chapter 1

Introducción a la Dinámica Compleja

1.1 Un vistazo a la historia

El campo de la Dinámica Compleja ha vivido dos períodos relativamente cortos de vigoroso crecimiento. El primer período comenzó a finales del siglo XIX y floreció en los principios del siglo XX. Uno de los temas principales en el siglo XIX fue el estudio de ecuaciones funcionales relacionadas á distintas funciones. En 1815, Charles Babbage con su artículo "*An essay on the calculus of functions*", estableció el escenario con su intento de entender estas ecuaciones funcionales. En particular, él describió implícitamente lo que ahora llamamos una conjugación φ entre dos funciones diferentes f y g , es decir φ cumple $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Por lo que se sigue que cualquier órbita $x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots$, donde la órbita del punto x_0 bajo f son las iteraciones $f^i(x_0) = x_i$, se mapea a una órbita $\varphi(x_0) \longrightarrow \varphi(x_1) \longrightarrow \dots$ bajo g . En el caso especial donde $g(y) = y + 1$, esta conjugación se reduce a la ecuación funcional de Abel

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$$

descrita por Niels Abel en 1824 en un artículo póstumo, donde una ecuación funcional es aquella que expresa una relación entre el valor de una función o funciones en un punto con sus valores en otros puntos, lo cual puede ser estudiado bajo la iteración de esa función o funciones. En el caso especial $g(y) = \lambda y$, se reduce a la ecuación funcional de Schröder

$$\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x)$$

introducido en el artículo de Ernst Schröder de 1871 "*Über iterirte Functiones*". Aunque Schröder no lo pensó en términos dinámicos, su artículo fue más allá de su tiempo, pues contenía muchas ideas. En particular, él usó la teoría de las funciones elípticas para construir una familia de funciones que ahora es conocida como la de mapeos de Lattès en la esfera de Riemann, la cual tiene una dinámica caótica.

En 1884, Gabriel Koenings probó que esta ecuación de Schröder tenía esencialmente una única solución, es decir encontrar la relación que define a una ecuación funcional, en la vecindad de un punto fijo $z_0 = f(z_0)$, con la condición de que la derivada (o el multiplicador) $\lambda = f'(z_0)$ satisfaga $|\lambda| \neq 0, 1$. En tal caso, la dinámica en una vecindad de tal punto fijo puede ser completamente entendida en términos de la dinámica de funciones lineales $w \rightarrow \lambda w$. En 1897, Leau estudió el caso más complicado cuando el multiplicador λ es una raíz de la unidad, y en 1904 Böttcher estudió el caso $\lambda = 0$. Quizás Böttcher fue el primero en intentar entender la dinámica global de la iteración de funciones holomorfas y en intentar distinguir entre el comportamiento predeciblemente ordenado y el comportamiento "caótico".

El caso donde $|\lambda| = 1$ y λ no es una raíz de la unidad es mucho más complejo y no fue parcialmente entendido hasta los trabajos de Hubert Cremer en 1927 y los de Carl Ludwig Siegel en 1942.

Mientras tanto, el estudio global de la iteración de funciones holomorfas floreció dramáticamente. En 1906, el matemático francés, Pierre Fatou describió un ejemplo sobresaliente: para la función $z \rightarrow z^2/(z^2 + 2)$, mostró que casi toda órbita bajo iteración converge a cero, excepto en un conjunto de Cantor de puntos excepcionales cuya órbita se mantiene acotada y lejos del cero. Después de una interrupción debida a la Primera Guerra Mundial, en el período de 1918-1920, hubo un cambio dramático en el énfasis de la investigación debida principalmente a Pierre



Figure 1-1:

Fatou y Gaston Julia, también francés. En vez de considerar únicamente el comportamiento de la dinámica local, Julia y Fatou tomaron un punto de vista más global. Lejos de los puntos fijos, encontraron un comportamiento dinámico bastante distinto. Algunas veces los resultados de la iteración fueron totalmente estables y otras veces estas iteraciones se comportaban de una forma dramáticamente distintas—lo que ahora llamamos un comportamiento caótico. En honor a las contribuciones de estos dos hombres, ahora llamamos a la región estable de un sistema dinámico complejo el conjunto de Fatou, mientras que a la región caótica la llamamos el conjunto de Julia. En una serie de artículos sobresalientes en los 1920's, Fatou y Julia lograron describir muchas de las propiedades de ambos conjuntos para funciones racionales. Sin embargo, al intentar clasificar todas las posibles dinámicas en el conjunto de Fatou, se toparon con una barrera. No pudieron excluir la posibilidad de que la dinámica incluyera dominios errantes U , es decir, si U es una componente fija del conjunto de Fatou y los elementos de $\{f^m(U)\}$ son distintos entre sí, de los cuales ellos pensaban que no existían, ni pudieron probar la existencia de los que ahora son conocidos como discos de Siegel, los cuales ellos pensaban que sí existían. Con estas dos barreras en el camino, la investigación en la dinámica compleja disminuyó, y no hubo mucha actividad en el campo por cincuenta años. Ver Figura 1-1 y 1-2, Pierre Fatou y Gaston Julia respectivamente.

Hubo dos eventos notables durante este período de inactividad. En los 1940's, C. L. Siegel mostró que los discos de Siegel podían existir. Esto ayudó al desarrollo de la clasificación



Figure 1-2:

de las regiones estables. Después, I.N. Baker extendió gran parte del trabajo de Fatou y Julia a funciones enteras y meromorfas, mostrando a la vez que podía ocurrir otro tipo de comportamientos estables.

El segundo gran período de actividad comenzó en 1980 después de que, por primera vez, Benoît Mandelbrot usara gráficas hechas por computadora para explorar la dinámica compleja. Las gráficas que obtuvo del ahora llamado Conjunto de Mandelbrot incitaron a muchos matemáticos a reinvestigar en este campo. En rápida sucesión, Dennis Sullivan introdujo el uso de mapeos cuasi-conformes en el tema. Esto le permitió probar su teorema de Dominios No Errantes, el cual esencialmente completó la clasificación de la dinámica estable para funciones racionales comenzada por Fatou y Julia. Al mismo tiempo, Douady y Hubbard abrieron nuevos panoramas en el campo al considerar el espacio de parámetros para los polinomios cuadráticos. Ellos desarrollaron una técnica que les permitía clasificar en cierto nivel todos los tipos posibles de dinámica cuadrática. En este momento, solo queda un obstáculo, la cuestión de la conectividad local del Conjunto de Mandelbrot, la cual, de ser cierta, implicaría que todos los rayos externos, es decir, las imágenes inversas de los rayos radiales de la función de Riemann que va de un conjunto K compacto, completo y conexo en un círculo, aterrizan en el conjunto de Mandelbrot, lo cual le daría cierta "estabilidad" al conjunto pues los rayos no se perderían

en quien sabe que lugar.

1.1.1 El Conjunto de Mandelbrot

A manera de introducción consideremos la familia de todos los polinomios cuadráticos en \mathbb{C} . En principio, un polinomio cuadrático $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ esta determinado por los tres parámetros complejos α, β y γ ; sin embargo, como se verá más adelante en el capítulo 4, cualquiera de estos polinomios puede ser conjugado con la siguiente forma que tiene solamente un parámetro complejo c :

$$f(z) = z^2 + c \quad (1)$$

Usando esta forma, podemos obtener una gráfica por computadora del espacio paramétrico, en este caso es el plano complejo donde se coloca a c de la siguiente forma: a cada pixel de la gráfica, le corresponde un pequeño cuadrado de c del espacio paramétrico, y se le asigna un color negro si el conjunto de Julia es conexo o blanco si es desconexo en el polinomio cuadrático $z^2 + c$.

Las primer imagen tosca de este tipo fue hecha por Brooks y Matelski en su artículo de 1981, "*The dynamics of 2-generator subgroups of $PSL(2, \mathbb{C})$* " como parte de su estudio en grupos Kleinianos, esta imagen es la Figura 1-1. Ellos usaron (1) e introdujeron el conjunto abierto compuesto de todos los punto del $c - plano$ para el cual el polinomio cuadrático correspondiente tiene una órbita periódica atractora en el plano complejo extendido. A este conjunto lo llamaremos H , pues sus puntos representan funciones hiperbólicas (funciones racionales complejas que contienen funciones exponenciales). Casi al mismo tiempo, Hubbard elaboró unas imágenes mucho mejores de un espacio paramétrico totalmente distinto, proveniente del método de Newton para ecuaciones cúbicas. Después, Mandelbrot, en su artículo "*Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ, z .*", quizás inspirado por Hubbard, hizo las imágenes correspondientes para los polinomios cuadráticos usando $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$, y tambien usando una variante de (1). La definición del Conjunto de Mandelbrot nace de (1). Mandelbrot introdujo dos conjuntos distintos, que llamaremos M y M' , él no les dió nombres diferentes porque creía que eran idénticos. Por definición, un valor paramétrico c pertenece a M' si el conjunto de Julia relleno de una familia de funciones f^n , es decir, el conjunto de puntos del dominio de f tal que su órbita bajo f está acotada, contiene un punto interior, y pertenece a M

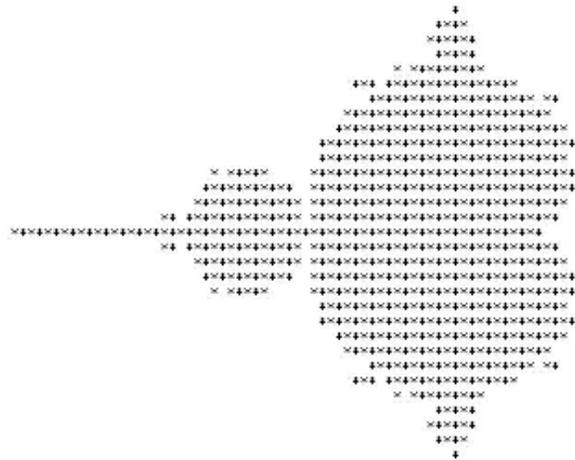


Figure 1-3:

si su conjunto de Julia relleno contiene al punto crítico $z = 0$. Lo cual equivale a que el conjunto de Julia sea conexo. El conjunto de Brooks-Matelski H satisface $H \subset M' \subset M$. Mandelbrot elaboró unas imágenes por computadora un poco mejores, las cuales parecían mostrar cierto número de "islas" aisladas. Por lo que el conjeturó que M' (o M) tiene distintos componentes conexos. De hecho, los editores de la revista pensaron que sus islas eran motas de polvo y las removieron cuidadosamente de las imágenes. Mandelbrot también describió un conjunto más pequeño $M^* \subset M'$, del cual pensaba que era el componente conexo más grande de M' . Este conjunto continental M^* consiste de una cardioide central con algunos puntos frontera incluidos, junto con varios discos pequeños alrededor (satélites) que pueden contarse, los cuales están pegados inductivamente mediante un patrón que se puede describir explícitamente.

Aunque las afirmaciones de Mandelbrot en este artículo no estaban totalmente en lo correcto, se merece una gran parte del crédito por ser el primero en señalar la geometría extremadamente complicada asociada con el espacio paramétrico para funciones cuadráticas. Su mayor logro ha sido demostrar a una audiencia bastante amplia que estos complicados objetos "fractales" juegan un papel importante en varias ramas matemáticas.

Pero la primera ruptura matemática real llegó con el resultado descubierto por Douady y Hubbard publicado en Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris el 18 de enero de

1982 en el artículo "*Itération des polynômes quadratiques complexes*". Ver a Douady en Figura 1-4. Ellos introdujeron el nombre de Conjunto de Mandelbrot para el conjunto compacto M descrito arriba, y proporcionaron una fundamentación sólida para su estudio matemático, probando, por ejemplo, que M es un conjunto conexo con complemento simplemente conexo. (Mientras tanto, Mandelbrot había resuelto de manera empírica que sus islas aisladas estaban conectadas en realidad al continente por filamentos muy delgados.) Desde su primer artículo, Douady y Hubbard mostraron que cada componente hiperbólico del interior de M puede ser parametrizado canónicamente, y mostraron que la frontera de M puede ser estudiada provechosamente utilizando el concepto de los rayos externos. Respecto a esto tenemos el siguiente testimonio escrito por Hubbard (ver [Tan]):

"Mandelbrot nos había mandado una copia de su artículo, en el cual anunciaba la aparición de islas en el exterior del continente del conjunto de Mandelbrot M . Por cierto, estas islas no estaban en el artículo publicado: aparentemente el impresor las había confundido con polvo en las originales y las borro. (En ese entonces, el impresor era un ser humano, no una máquina.) En la copia que teníamos, Mandelbrot las había dibujado más o menos al azar con un lápiz."

"Una tarde, Douady y yo habíamos estado mirando esta imagen, y preguntándonos que le sucedería a la imagen de un punto crítico para iteraciones muy grandes del polinomio $z^2 + c$ cuando c toma una caminata alrededor de una isla. Esto era difícil de imaginar, y habíamos empezado a sospechar que debían de haber filamentos de M que conectaban las islas con el continente. Durante la noche, Douady pensó que tales filamentos podían ser revelados como barreras: algo tenía que suceder a lo largo de ellos, y encontró que debían de ser los argumentos de los rayos que aterrizaban en el 0."

"En todo caso, Douady llamó a la mañana siguiente, invitando a reunirme con él en el café Le Dauphin en la Rue de Buci. Él se había dado cuenta que lo que habíamos descubierto era que el Conjunto de Mandelbrot era conexo: sobre un croissant, el escribió el enunciado $c \rightarrow \phi_c(P_c(0))$ es un isomorfismo de $\mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}$."

"Sullivan voló de los Estados Unidos para oír hablar a Douady sobre nuestra prueba en el seminario de dinámica analítica en Orsay de esa semana. Sibony también estaba en el público, al igual que Kahane y muchos otros. La siguiente semana, Sibony anunció que tenía una prueba independiente de que la función propuesta por Douady era una biyección."



Figure 1-4:

"No mucho tiempo después, hice una lista de todos los polinomios cuadráticos cuyos puntos críticos son periódicos de período 5. Entonces le pedí a una computadora (una Apple II, integrada con un plotter de pluma) dibujar todos los conjuntos de Julia. Hoy esto sería virtualmente instantáneo; en ese entonces tomó varias horas. Entonces miré cuidadosamente los dibujos, intentando ver que los hacía distintos los unos de los otros. Después marqué la órbita del punto crítico, en cada caso un árbol estaba viéndome a la cara. Pronto, un poco de reflexión me llevó a algunas condiciones necesarias que un árbol marcado con ciertos puntos debía satisfacer para ser un posible árbol de un polinomio."

"En un día o algo así había dibujado todos los árboles que podían ser dibujados correspondientes al punto crítico periódico de período 6. El hecho de que estos árboles correspondían en realidad a los polinomios apropiados era una fuerte evidencia de que la descripción era correcta. No mucho tiempo después Douady obtuvo el algoritmo para los ángulos externos en términos de los árboles. La compleja sucesión aglutinante había nacido. Estos árboles (ahora llamados árboles de Hubbard) junto con los rayos externos han llegado a convertirse en una herramienta

central de combinatorias y clasificaciones."

...

"Esa primavera (1982), fuí a los Estados Unidos por un par de semanas y dí una serie de conferencias sobre estos resultados (la binarización de los ángulos externos de los puntos del Conjunto de Mandelbrot) en Columbia, Cornell y la escuela para graduados SUNY. Yo nunca había conocido a John Milnor, aunque prácticamente había crecido con sus libros. Pero él vino a la conferencia de Columbia, y casi una semana después, de regreso en Francia, recibí una carta de él señalando que la prueba de la conexidad del Conjunto de Mandelbrot también probaba que el argumento externo de los polinomios reales en la frontera de M es una función monótona del parámetro, y que esto resolvía la conjetura entrópica de Metropolis, Stein y Stein de los 1950's."

1.2 Definiciones elementales sobre Dinámica Discreta

La meta principal de la teoría de los sistemas dinámicos es entender el comportamiento final o asintótico de un proceso iterativo. En un proceso discreto como la iteración de una función esperamos comprender el comportamiento de los puntos $z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z)$ conforme n se hace muy grande. Es decir, los sistemas dinámicos se preguntan: ¿A dónde van los puntos cuando los iteramos y que es lo que hacen una vez que llegan allí?

Pero este proceso matemático puede ser llevado al ámbito de la naturaleza y viceversa. Por ejemplo, uno podría preguntarse que pasará con la órbita de la Luna con el paso del tiempo ¿siempre estará dando vueltas alrededor de la Tierra? ¿Llegará un momento en que la Luna sea atraída hacia la Tierra por su campo gravitatorio y haya una colisión? ¿O sucederá la posibilidad de que la fuerza centrífuga de la órbita lunar sea más fuerte que la fuerza de atracción ejercida por la Tierra y la Luna se separe de la Tierra? Cuando uno ve el sistema solar de muy muy lejos, como de afuera de la galaxia, parece ser que la Tierra y la Luna están muy cercanas entre sí y que ambas giran alrededor del Sol. Ver Figura 1-5. Las tres preguntas de arriba formuladas de manera física pueden ser formuladas de manera matemática: dados dos puntos relativamente cercanos entre sí ¿a donde van sus órbitas? ¿Siempre quedan a la misma distancia entre sí? ¿Sus órbitas se separan a tal punto que ya no se pueda establecer una relación entre

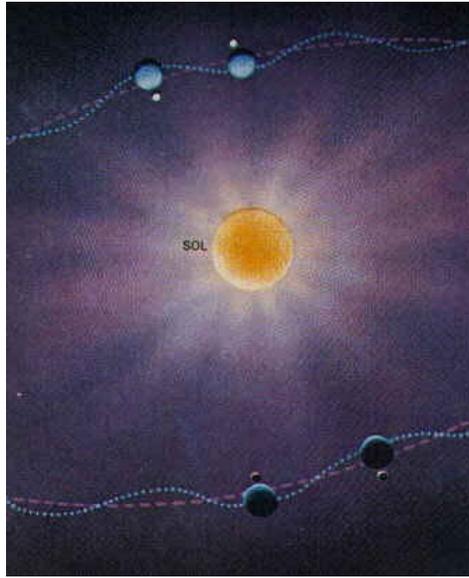


Figure 1-5:

ellas? ¿Sus órbitas se atraen entre sí a tal punto de convertirse en la misma órbita? ¿O existe otra posibilidad en el comportamiento de las órbitas? Esta podría ser una forma de motivación de la siguiente definición:

Definición 1.2.1 *La órbita hacia adelante de z bajo una función f consiste en el conjunto de puntos*

$$\{z, f(z), f^2(z), \dots\} = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}.$$

Y será denotada como $Orb_f^+(z)$. Si f es homeomorfa, podemos definir la órbita de z , $Orb_f(z)$, como el conjunto de puntos $\{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}\}$, y la órbita hacia atrás de z , $Orb_f^-(z)$, como el conjunto de puntos $\{z, f^{-1}(z), f^{-2}(z), \dots\}$.

Entonces nuestra meta principal es entender todas las órbitas de una función. Las órbitas pueden ser conjuntos muy complicados, incluso para funciones no lineales muy simples como veremos a lo largo de la tesis. Sin embargo, hay algunas órbitas que son especialmente simples y jugarán un rol central en el estudio de los sistemas dinámicos.

Definición 1.2.2 *El punto z es un punto fijo de f si $f(z) = z$. El punto z es un punto periódico de período n si $f^n(z) = z$. El menor positivo n para el cual $f^n(z) = z$ es el período*

primo de z . Denotamos al conjunto de puntos periódicos de f de período n como $Per_n(f)$, y al conjunto de puntos fijos de f como $Fix(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forman una órbita periódica.

Definición 1.2.3 Un punto z es eventualmente periódico de período n si z no es periódico pero existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(z) = f^i(z)$ para toda $i \geq m$. Es decir, $f^i(z)$ es periódico para todo $i \geq m$.

Definición 1.2.4 Sea p un punto, z es asintótico hacia adelante a p si sucede que el $\lim_{i \rightarrow \infty} d(f^i(z), f^i(p)) = 0$. Si f es invertible podemos definir los puntos asintóticos hacia atrás tomando los límites anteriores cuando $i \rightarrow -\infty$.

Definición 1.2.5 Un punto z es un punto crítico de f si $f'(z) = 0$.

1.3 La Conjugación

Una herramienta clave en el estudio de los Sistemas Dinámicos Discretos es la conjugación. En algunas situaciones queremos analizar la dinámica de alguna función, pero esta función puede ser difícil de entender. Sin embargo tal vez podamos encontrar una función que dinámicamente tenga el mismo comportamiento y que también sea más fácil de estudiar, es decir, que sean equivalentes dinámicamente. Para esto introduciremos el concepto de conjugación topológica.

Definición 1.3.1 Sean $f : A \rightarrow A$ y $g : B \rightarrow B$ dos funciones, A y B espacios topológicos. Se dice que f y g son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que, $h \circ f = g \circ h$, lo que también es común escribir como $g = h \circ f \circ h^{-1}$. El homeomorfismo h es denominado una conjugación topológica.

Bajo esta definición podemos hacer las siguientes observaciones para dos funciones que son topológicamente conjugadas:

La conjugación preserva puntos fijos, es decir, g fija $h(z)$ si y sólo si f fija a z . Pues si $g(h(z)) = h(z)$ y por definición $h(f(z)) = g(h(z))$, entonces $h(f(z)) = h(z)$ y por tanto $f(z) = z$. Por otro lado, si $f(z) = z$ entonces $h(z) = h(f(z))$ y por definición $h(f(z)) = g(h(z))$ lo que implica que $g(h(z)) = h(z)$.

La conjugación se mantiene bajo iteración, es decir, $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$. Pues por definición se cumple para $n = 1$. Supongamos que es válido para n , entonces

$$g \circ g^n = h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ f^n \circ h^{-1} = h \circ f \circ f^n \circ h^{-1} = h \circ f^{n+1} \circ h^{-1}$$

lo cual implica que $g^{n+1} = h \circ f^{n+1} \circ h^{-1}$.

Análogamente, h da una correspondencia biyectiva entre $Per_n(f)$ y $Per_n(g)$ pues h es un homeomorfismo. Por ejemplo sea z un punto periódico de f de período n cuya órbita es $\{z, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ entonces $h(z)$ es un punto periódico de g de período n cuya órbita es $\{h(z), h(z_1), \dots, h(z_{p-1})\}$, y aplicamos este procedimiento en todo $Per_n(f)$. Análogamente, órbitas eventualmente periódicas y asintóticas para f van bajo h a órbitas similares en g debido a que h es un homeomorfismo.

El siguiente teorema no será probado aquí debido a las herramientas que se necesitan para poder hacerlo. Pero su implicación es importante en las conjugaciones que van de la esfera de Riemann a ella misma. Ver [Milnor].

Teorema 1.3.2 *El grupo $G(\widehat{\mathbb{C}})$ de todos los automorfismos conformes de la esfera de Riemann es igual al grupo de todas las transformaciones de Möbius*

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde } ad - bc \neq 0.$$

Este teorema implica que las únicas funciones que funcionan como conjugaciones topológicas en la esfera de Riemann son las transformaciones de Möbius.

Como estas transformaciones son funciones racionales de grado 1, si f y g son funciones racionales complejas topológicamente conjugadas, entonces el grado de f no será afectado por h y por tanto

$$\deg(f) = \deg(g)$$

Como una simple ilustración del uso de la conjugación vamos a caracterizar a los polinomios dentro de la clase de funciones racionales. Usaremos el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el cual se discute en el siguiente capítulo. Una función racional no constante f es un polinomio si y solo si f tiene un polo en el ∞ y ningún polo en \mathbb{C} . Es decir si y solo si $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. Y de una forma más general tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.3 *Una función racional no constante f es conjugada a un polinomio si y solo si existe un único z_0 en $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f^{-1}(z_0) = \{z_0\}$.*

Demostración

Supongamos que f se puede conjugar con un polinomio P . Como $P^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. El ∞ lo podemos llevar a cualquier z_0 en $\widehat{\mathbb{C}}$ mediante la conjugación $m(z) = \frac{(z_0)(z) + a}{z + b}$. Entonces

$$f(z_0) = f \circ m(\infty) = m \circ P(\infty) = m(\infty) = z_0.$$

Y como f y P son conjugadas, entonces $f^{-1}(z_0) = \{z_0\}$.

Ahora supongamos que $f^{-1}(z_0) = \{z_0\}$, sea $m(z) = \frac{1}{z - z_0}$ entonces

$$P(\infty) = (P \circ m)(z_0) = (m \circ f)(z_0) = m(z_0) = \infty.$$

Y como $f^{-1}(z_0) = \{z_0\}$ entonces $P^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, y P es un polinomio, entonces f se puede conjugar con un polinomio.

■

Chapter 2

Elementos de Variable Compleja

2.1 El Plano Complejo Extendido y la Esfera de Riemann

En Variable Compleja nos será útil ampliar el conjunto de los números complejos \mathbb{C} mediante la introducción de un nuevo elemento denotado con el símbolo de ∞ que represente al infinito para llevar a cabo distintos propósitos. Uno de estos propósitos recae en el estudio de la Dinámica Compleja, pues para muchas funciones la órbita de algunos puntos se "fuga" hacia el infinito. Por ejemplo, sea $f(z) = z^2$, si $|z| > 1$, entonces $|f^n(z)| = z^{2n} \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por esta razón es útil introducir el punto al infinito pues se puede continuar el análisis ahí.

En el plano no hay lugar para un punto correspondiente a ∞ , pero podemos, naturalmente, introducir un punto "ideal", que llamaremos punto del infinito.

Definición 2.1.1 *Los puntos del plano complejo junto con el punto del infinito constituyen el plano complejo extendido*

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Pero a este plano complejo extendido podemos darle una interpretación geométrica para poder ver de manera concreta cada uno de los puntos de este conjunto. Sea S la esfera en \mathbb{R}^3 con radio unitario y centro en el origen, y denotemos al punto $(0, 0, 1)$, la parte más alta de S , el polo norte, como ζ . Suponiendo que \mathbb{C} es el plano $\{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$, proyectamos cada $z \in \mathbb{C}$

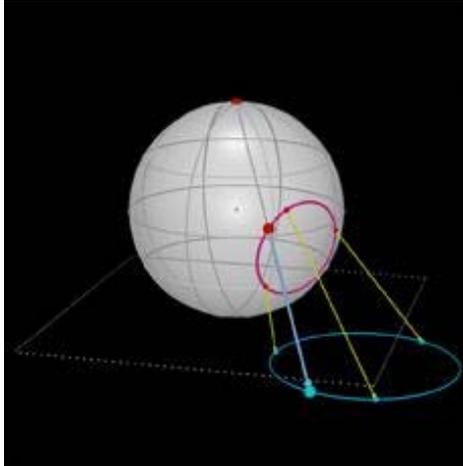


Figure 2-1:

linealmente hacia ζ , y tomamos la intersección de esa recta con S denotándola por z^* distinta de ζ : la función $\pi : z \rightarrow z^*$ es llamada la proyección estereográfica de \mathbb{C} en S . Claramente si $|z|$ es muy grande, entonces z^* esta cerca de ζ , y con esto en mente, podemos definir $\pi(\infty) = \zeta$. Con está definición, π es una función biyectiva de $\widehat{\mathbb{C}}$ en S , y por esta equivalencia $\widehat{\mathbb{C}}$ es llamada también la Esfera de Riemann (o compleja). Ver Figura 2-1.

La fórmula de π se puede ver en [Ahlfors] y es:

$$\pi(z) = \left(\frac{2\operatorname{re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Como la convergencia uniforme es una de las herramientas que usaremos para definir los conjuntos de Julia y de Fatou necesitaremos definir una métrica que podamos usar en la esfera de Riemann. Veremos dos, la métrica cordal y la métrica esférica, que representan la longitud de una cuerda y un arco de el círculo máximo que pasa entre dos puntos.

Para la primera usamos la biyección π de $\widehat{\mathbb{C}}$ en S para transferir la métrica Euclideana en \mathbb{R}^3 de S a $\widehat{\mathbb{C}}$ por medio de la métrica σ que definimos como

$$\sigma(z, w) = |\pi(z) - \pi(w)| = |z^* - w^*|$$

Donde podemos observar que si $z = x + iy$, y $w = u + iv$, equivale a

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{2x}{1+|z|^2} - \frac{2u}{1+|w|^2} \right)^2 + \left(\frac{2y}{1+|z|^2} - \frac{2v}{1+|w|^2} \right)^2 + \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \left\{ \left[\frac{(x-u) + (x|w|^2 - u|z|^2)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} \right]^2 + \left[\frac{(y-v) + (y|w|^2 - v|z|^2)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} \right]^2 + \left[\frac{|z|^2 - |w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \left\{ \frac{|z|^2 + |w|^2 - 2(xu + yv) + 2|z|^2|w|^2 - 2(xu + yv)(|z|^2 + |w|^2) + 2|z|^2|w|^2 + |z|^2|w|^4 - 2(xu + yv)|z|^2|w|^2 + |z|^4|w|^2 + |z|^4 - 2|z|^2|w|^2 + |w|^4}{[(1+|z|^2)(1+|w|^2)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \left\{ \frac{[|z|^2 + |w|^2 - 2(xu + yv)][1 + |z|^2 + |w|^2 + |z|^2|w|^2]}{[(1+|z|^2)(1+|w|^2)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Y como $(1+|z|^2)(1+|w|^2) = 1+|z|^2+|w|^2+|z|^2|w|^2$, y $|z-w|^2 = [|z|^2 + |w|^2 - 2(xu + yv)]$ entonces

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}}$$

donde z y w pertenecen a \mathbb{C} . Además podemos observar para $z \in \mathbb{C}$ que

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \sigma(z, w) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}$$

Por lo que todo esto nos da la base para dar la siguiente

Definición 2.1.2 Sean $z, w, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos la métrica cordal $\sigma : \widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como la longitud euclídeana de la cuerda que une a z^* con w^* , dada por la siguiente fórmula

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} \quad y \quad \sigma(z, \infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}.$$

La métrica euclídeana en \mathbb{C} no es lo suficientemente versátil para hacer frente a los problemas que tienen que ver con el ∞ , pero la métrica cordal σ maneja todos los puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ con la misma facilidad, y cuando usamos σ , el ∞ pierde, de cierto modo, cualquier significado especial. Esto es fácil de ver intuitivamente, pues en la esfera de Riemann el ∞ es un punto en ella como cualquiera de los puntos del plano complejo. Por ejemplo, $\frac{1}{z}$ es realmente una σ -isometría, es decir que preserva las σ -distancias, pues se puede ver que $\sigma(z, w) = \sigma(z^{-1}, w^{-1})$.

La segunda métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ que introduciremos tiene por nombre la métrica esférica σ_0 , y es equivalente a la métrica cordal σ .

Definición 2.1.3 *La métrica esférica $\sigma_0(z, w)$ entre z y w en $\widehat{\mathbb{C}}$ es definida como la longitud Euclídeana de la geodésica (el camino más corto) en S , es decir el arco más corto del círculo máximo que une a z^* con w^* . Si el arco es subtendido un ángulo θ por el origen, entonces*

$$\sigma_0(z, w) = \theta$$

Si, en la definición anterior, la cuerda que une a z^* con w^* es subtendida por el ángulo θ podemos ver que

$$\begin{aligned} \sigma(z, w) &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \implies \sigma(z, w) &= 2 \sin\left(\frac{\sigma_0(z, w)}{2}\right) \end{aligned}$$

En muchos casos, podemos usar σ y σ_0 intercambiabilmente después de modificar algunas constantes.

2.2 Algunos teoremas y definiciones de Análisis Complejo

Para poder llevar a cabo la demostración de la conexidad del Conjunto de Mandelbrot necesitaremos algunas definiciones básicas y teoremas de análisis complejo.

Definición 2.2.1 *Si $V \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa o analítica si la primera derivada*

$$z \rightarrow f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

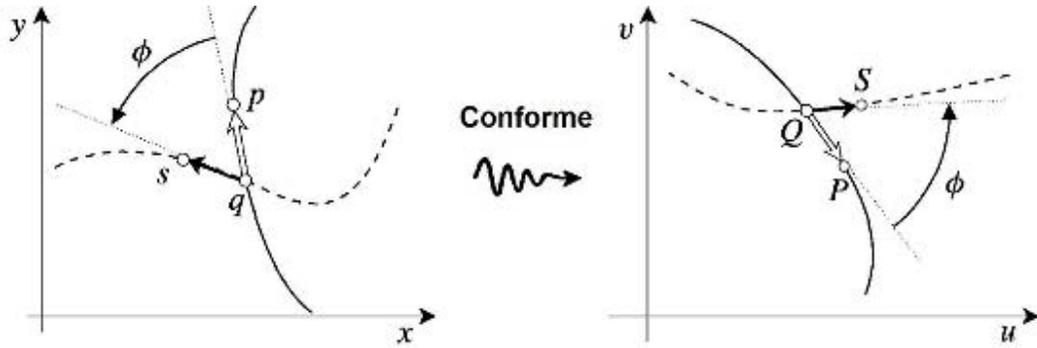


Figure 2-2:

esta bien definida para todo $z \in V$. Si $f'(z) \neq 0$ la función es conforme. Y es univalente si es conforme e inyectiva. Ver Figura 2-2

Definición 2.2.2 Decimos que una función analítica $\phi : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ es un isomorfismo analítico o conforme si es un homeomorfismo entre U y V . Entonces diremos que U y V son isomorfas analíticamente entre sí.

Definición 2.2.3 Decimos que la familia de funciones $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente hacia $f(x)$ en un conjunto E si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_0$ y para toda $x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Y decimos que converge local y uniformemente en un conjunto F si para cada $x \in F$ existe una vecindad o un compacto en la que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f (es equivalente usar vecindades o compactos).

Teorema 2.2.4 Teorema de Weierstrass. Si una sucesión de funciones holomorfas $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ en U abierto, converge uniformemente a la función límite f , entonces f también es holomorfa. Además, la sucesión de derivadas $\{f_n'\}$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto contenido en U a la función derivada f' .

Definición 2.2.5 Una familia de funciones F de un espacio métrico (X_1, d_1) a un espacio métrico (X_2, d_2) se dice que es normal si toda sucesión infinita de funciones de F contiene una subsucesión que converge local y uniformemente, ó una subsucesión que diverge local y uniformemente a infinito en X_2 .

Nótese que la función f a la que converge la subsucesión no pertenece necesariamente a F . La razón de incluir al ∞ entre las posibles funciones límite es debido a que se quiere evitar la

dispersión de los valores lo cual se evita incluyendo al ∞ . De hecho al trabajar en la esfera de Riemann, y dado que aquí el ∞ puede ser visto como un punto cualquiera, la definición en este dominio podría haber prescindido de la divergencia al ∞ , pues aquí tiene un sentido muy claro que la subsucesión de F converja local y uniformemente al ∞ .

Teorema 2.2.6 *Teorema de Montel.* Sea F una familia de funciones holomorfas $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la cual omite tres valores distintos. Es decir, existen tres puntos distintos $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f(\widehat{\mathbb{C}}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ para toda $f \in F$. Entonces F es una familia normal.

Teorema 2.2.7 Sea

$$f(z) = az + b_1 z^{r+1} + \dots$$

cerca del origen, donde $a \neq 0$, $b_1 \neq 0$ y $r \geq 1$. Entonces

$$f^n(z) = a^n z + b_n z^{r+1} + \dots$$

donde $b_n = a^{n-1} b_1 (1 + a^r + a^{2r} + \dots + a^{(n-1)r})$.

Demostración

Probándolo por inducción, vemos que es claro para $n = 1$. Suponiendo que es válido para n :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(z) &= f(f^n(z)) \\ &= a(a^n z + b_n z^{r+1} + \dots) + b_1 (a^n z + b_n z^{r+1} + \dots)^{r+1} + \dots \\ &= a^{n+1} z + a b_n z^{r+1} + \dots + b_1 a^{n(r+1)} z^{r+1} + \dots \\ &= a^{n+1} z + \{a [a^{n-1} b_1 (1 + a^r + a^{2r} + \dots + a^{(n-1)r})] + b_1 a^{n(r+1)}\} z^{r+1} + \dots \\ &= a^{n+1} z + [a^n b_1 (1 + a^r + a^{2r} + \dots + a^{nr})] z^{r+1} + \dots \\ &= a^{n+1} z + b_{n+1} z^{r+1} + \dots \end{aligned}$$

■

Corolario 2.2.8 Si $a = 1$, entonces $b_n = n b_1$.

Teorema 2.2.9 *Teorema de Rouché.* Sea Ω simplemente conexo, f y g analíticas en Ω tal que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en una curva de Jordan simple $\gamma \subseteq \Omega$, entonces f y g tienen el mismo número de ceros que f en el interior de la curva γ .

Teorema 2.2.10 *Si una sucesión de funciones racionales $\{f_n\}$ convergen uniformemente en $\widehat{\mathbb{C}}$ a la función f , entonces f es racional y para una n suficientemente grande, $\deg(f_n) = \deg(f)$.*

Demostración

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f , por el Teorema de Weierstrass 2.2.4, f es analítica en la esfera y por tanto racional. Si f es una función constante, es claro que $\deg(f_n) = \deg(f)$. Sea $\deg(f) \geq 1$. Asumamos que $f(\infty) \neq 0$, pues si $f(\infty) = 0$ haríamos el análisis con $1/f$ y $1/f_n$. Ahora, sean $z_1, \dots, z_t \in \mathbb{C}$ los ceros de la función f . Y ahora construimos discos pequeños y ajenos entre sí D_j en torno a z_j de tal forma que no haya ningún polo de f en D_j . Sea K el complemento de la unión de los D_j . Para una n suficientemente grande, f_n esta uniformemente cerca de f , y por tanto tampoco tiene polos en D_j .

Como f_n se acerca uniformemente a f en los D_j , para toda $\varepsilon > 0$ y toda z en D_j , $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ y como $0 < |f(z)|$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < |f(z)|$, entonces $|f(z) - f_n(z)| < |f(z)|$ en ∂D_j y el Teorema de Rouché 2.2.9 muestra que f_n tienen el mismo número de ceros que f en cada uno de los D_j . Por último, f no tiene ceros en el compacto K , del mismo modo las f_n para todas las n suficientemente grandes, por lo que f_n y f tienen el mismo número de ceros y por lo tanto tienen el mismo grado.



Teorema 2.2.11 *Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, D un conjunto abierto y conexo, $z_0 \in D$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ (z_0 es un cero de orden k de f)
- ii) $f(z) = (z - z_0)^k (f_k(z))$ con $f_k(z)$ función holomorfa en Ω . Donde

$$f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Teorema 2.2.12 *Teorema de Vitali. Supongamos que la familia $\{f_1, f_2, \dots\}$ de funciones analíticas es normal en un dominio D , conjunto abierto y conexo, y que f_n converge puntualmente a alguna función f en algún subconjunto abierto no vacío W de D . Entonces f se puede extender a una función F que es analítica en D , y $f_n \rightarrow F$ local y uniformemente en D .*

Demostración

Como $\{f_n\}$ es normal en D , existe una subsucesión de $\{f_n\}$ la cual converge local y uniformemente en D a alguna función F . Por el Teorema 2.2.4 de Weierstrass, F es analítica en D , y $F = f$ en W , pues la convergencia uniforme de la subsucesión de $\{f_n\}$ implica la convergencia puntual de $\{f_n\}$ en W .

Ahora supongamos que $\{f_n\}$ no converge local y uniformemente en D a F . Entonces hay un subconjunto compacto K de D , una ε positiva, y una subsucesión, digamos $\{g_n\}$ de $\{f_n\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_K \sigma [g_n(z), F(z)] \geq \varepsilon.$$

Sin embargo, por normalidad, pues $\{g_n\}$ es una sucesión de la familia de funciones $\{f_n\}$, existe una subsucesión $\{h_n\}$ de $\{g_n\}$ la cual converge local y uniformemente a alguna función h en D . Claramente, $h = f = F$ en W , por la convergencia puntual de $\{f_n\}$ en W , y como h es analítica en D , tenemos que $h = F$ en D . Se sigue que

$$\sup_K \sigma [h_n(z), F(z)] \longrightarrow 0$$

y como $\{h_n\}$ es una subsucesión de $\{g_n\}$, esto es una contradicción con la desigualdad de arriba. Por tanto $\{f_n\} \rightarrow F$ local y uniformemente a D , y por el Teorema 2.2.4 de Weierstrass es analítica en D .

■

Definición 2.2.13 Decimos que una función real $u(z)$ o $u(x, y)$ definida en un conjunto abierto y conexo Ω , es armónica en Ω , si es continua a la vez que sus derivadas parciales de los dos primeros órdenes y satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Definición 2.2.14 Sea Ω una región, es decir un conjunto abierto y conexo en \mathbb{C} y sea $a \in \Omega$. Definimos a la función de Green en Ω con singularidad en a como la función $g^{[a]} : \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con las siguientes propiedades:

i) $g^{[a]}$ es armónica en $\Omega \setminus \{a\}$

ii) $G(z) = g^{[a]}(z) + \log |z - a|$ es armónica y está acotada en una vecindad en torno a a .

iii) $\lim_{z \rightarrow w} g^{[a]} = 0$ para toda $w \in \partial\Omega$.

Teorema 2.2.15 *Una función f analítica es armónica.*

Para un estudio muy completo y muy intuitivo de la teoría de la función de Green ver [Needham].

Chapter 3

Los Conjuntos de Julia y de Fatou

En este capítulo hablaremos sobre dos conjuntos de vital importancia en el estudio de la dinámica compleja. Nos colocaremos en el marco de las funciones racionales y más en específico en las funciones de la forma $P_c = z^2 + c$ que van de la esfera de Riemann en sí misma, estas definiciones pueden ser extendidas al conjunto de las funciones holomorfas y a las superficies de Riemann, es decir, una variedad compleja conexa analítica de dimensión compleja uno. Dividiremos la esfera en dos conjuntos disjuntos e invariantes, uno es "bien comportado", el conjunto de Fatou, y el otro tiene un comportamiento "caótico", el conjunto de Julia. Los siguientes resultados sobre dichos conjuntos son presentados para tener una noción de lo que son estos conjuntos, pues al fin y al cabo hay una relación directa entre la topología de los conjuntos de Julia, de manera específica su conexidad, y el conjunto de Mandelbrot.

Definición 3.1 *Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa no constante y sea $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ su n -ésima iterada. El dominio de normalidad para el conjunto de iteraciones $\{f^n\}$ es definido como el conjunto de Fatou $F(f)$, y su complemento $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ es definido como el conjunto de Julia $J(f)$.*

Esto nos lleva a la siguiente dicotomía básica en todo $p_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Si existe alguna vecindad U de p_0 tal que la sucesión de iteraciones $\{f^n\}$ restringida a U forma una familia normal de funciones que van de U a $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces decimos que p_0 pertenece al conjunto de Fatou de f . De otra forma, si no existe tal vecindad, decimos que p_0 pertenece al conjunto de Julia.

Entonces, por definición, el conjunto de Julia J es un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathbb{C}}$, mientras

Chapter 3

Los Conjuntos de Julia y de Fatou

En este capítulo hablaremos sobre dos conjuntos de vital importancia en el estudio de la dinámica compleja. Nos colocaremos en el marco de las funciones racionales y más en específico en las funciones de la forma $P_c = z^2 + c$ que van de la esfera de Riemann en sí misma, estas definiciones pueden ser extendidas al conjunto de las funciones holomorfas y a las superficies de Riemann, es decir, una variedad compleja conexa analítica de dimensión compleja uno. Dividiremos la esfera en dos conjuntos disjuntos e invariantes, uno es "bien comportado", el conjunto de Fatou, y el otro tiene un comportamiento "caótico", el conjunto de Julia. Los siguientes resultados sobre dichos conjuntos son presentados para tener una noción de lo que son estos conjuntos, pues al fin y al cabo hay una relación directa entre la topología de los conjuntos de Julia, de manera específica su conexidad, y el conjunto de Mandelbrot.

Definición 3.1 *Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa no constante y sea $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ su n -ésima iterada. El dominio de normalidad para el conjunto de iteraciones $\{f^n\}$ es definido como el conjunto de Fatou $F(f)$, y su complemento $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ es definido como el conjunto de Julia $J(f)$.*

Esto nos lleva a la siguiente dicotomía básica en todo $p_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Si existe alguna vecindad U de p_0 tal que la sucesión de iteraciones $\{f^n\}$ restringida a U forma una familia normal de funciones que van de U a $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces decimos que p_0 pertenece al conjunto de Fatou de f . De otra forma, si no existe tal vecindad, decimos que p_0 pertenece al conjunto de Julia.

Entonces, por definición, el conjunto de Julia J es un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathbb{C}}$, mientras

que el conjunto de Fatou $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J$ es el subconjunto abierto complementario.

Ejemplo 3.2 Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^2$. El disco abierto unitario D esta contenido en el conjunto de Fatou, pues cualquier sucesión de iteraciones en cualquier conjunto compacto en D converge uniformemente a cero. De manera análoga el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ esta contenido en el conjunto de Fatou, pues las iteraciones de f divergen uniformemente a ∞ en cualquier compacto U de dicho conjunto. Por otro lado, si z_0 pertenece al círculo unitario, entonces, en cualquier compacto U que contenga a z_0 no existe la convergencia uniforme pues para cualquier subsucesión de $\{f^n\}$ una parte de la vecindad tiende a cero, otra al círculo unitario y la otra al ∞ .

Estos dos conjuntos juegan un papel principal en la Dinámica Compleja y parte de ello se debe a que dividen a $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos conjuntos complementarios y que al aplicar la función sobre ellos una y otra vez, estos permanecen "invariantes".

Definición 3.3 Sea $g : X \rightarrow X$, donde X es un conjunto, un subconjunto E de X es:

- i) Invariante hacia adelante si $g(E) = E$
- ii) Invariante hacia atrás si $g^{-1}(E) = E$
- iii) Completamente invariante si $g(E) = E = g^{-1}(E)$

Vemos que si g es sobreyectiva los conceptos de Invariante hacia atrás y Completamente invariante son iguales.

Pues como g es sobreyectiva existe un conjunto A en el dominio tal que $g(A) = E$. Sea $a \in A$ entonces $g(a) \in E$ por lo que $a \in g^{-1}(E)$ lo que implica que $A \subseteq g^{-1}(E)$. Y sea $e \in g^{-1}(E)$ entonces $g(e) \in E$ por tanto $e \in A$ y se sigue que $g^{-1}(E) \subseteq A$. Entonces $A = g^{-1}(E)$ y $g(g^{-1}(E)) = g(A) = E$ y como $g^{-1}(E) = E$ entonces $g(E) = E$ y g es invariante hacia adelante por lo que es completamente invariante.

Teorema 3.4 El conjunto de Julia J y el conjunto de Fatou F son completamente invariantes.

Demostración

Como f es sobreyectiva sólo hay que probar que $f^{-1}(F) = F$. Donde F es el conjunto de Fatou.

Sea $z \in f^{-1}(F)$ entonces $f(z) \in F$. Por lo que $\exists U$ vecindad abierta que contiene a $f(z)$

tal que la subsucesión $\{f^{n_j}\}$ de una sucesión de $\{f^n\}$ converge o diverge a ∞ uniformemente en U . Pero como f es continua, $\exists V$ vecindad abierta que contiene a z tal que $f(V) \subseteq U$. Y como f es una función abierta, $f(V)$ es abierto. Por lo que $\{f^{n_j+1}\}$ converge o diverge a ∞ uniformemente en V . Entonces $z \in F$. Por lo que $f^{-1}(F) \subseteq F$.

Ahora, sea $z \in F$ por lo que $\{f^{n_j+1} = f^{n_j} \circ f\}$ converge o diverge a ∞ uniformemente en una U vecindad abierta alrededor de z . Como f es abierta $f(U)$ es abierto, $\{f^{n_j}\}$ converge o diverge a ∞ uniformemente en $f(U)$ alrededor de $f(z)$. Entonces $f(z) \in F$, y $f(F) \subseteq F$, y como $F \subseteq f^{-1}(f(F))$, se tiene que $F \subseteq f^{-1}(F)$.

Por lo tanto $F = f^{-1}(F)$ y F es completamente invariante, al igual que su complemento J .

■

Ahora probaremos una serie de resultados sobre los conjuntos de Julia y de Fatou que nos darán una idea de como son y como se comportan.

Teorema 3.5 *Para toda $N \geq 1$, el conjunto de Julia y de Fatou de f son los mismos que los de f^N .*

Demostración

Sea $\{f^{nN}\}$ normal en U , y por otro lado vemos que $\{f^{nN}\} \subseteq \{f^n\}$, entonces para toda sucesión de $\{f^{nN}\}$ existe una subsucesión $\{f^{nN_j}\}$ que converge o diverge a ∞ local y uniformemente, pero estas sucesiones también se encuentran en $\{f^n\}$ por lo que $\{f^n\}$ es normal en U .

Por otro lado si $\{f^n\}$ es normal en U para toda sucesión de $\{f^n\}$, en particular tomemos el conjunto de todas las sucesiones de $\{f^{nN}\}$, existe una subsucesión $\{f^{nN_j}\}$ que converge o diverge a ∞ local y uniformemente, entonces $\{f^{nN}\}$ es normal en U .

Esto implica que $\{f^n\}$ es normal en U si y sólo si $\{f^{nN}\}$ es normal en U . Y como los conjuntos de Fatou y de Julia son completamente invariantes, si F y J son los conjuntos de Fatou y de Julia de f , entonces $f^n(F) = F$ y $f^n(J) = J$. Por lo que F y J también son los conjuntos de Fatou y de Julia de f^n .

■

Si tenemos una vecindad U alrededor de un punto z_0 que pertenece a una órbita periódica de período n , la derivada de una función holomorfa f en z_0 , rotará la vecindad y también

la ampliará o contraerá en un factor $|f'(z_0)|$ pues como la derivada es un límite, de manera aproximada sucede que

$$|f(z) - z_0| = |f(z) - f^n(z_0)| = |f'(z_0)| |z - z_0|.$$

Esto permite ver el comportamiento de las órbitas de puntos que estén próximos a z_0 según vayamos iterando a f . Si $|f'(z_0)| < 1$, estas órbitas serán atraídos. Si $|f'(z_0)| > 1$ estas órbitas serán repelidos. Mientras que si $|f'(z_0)| = 1$, habrá que estudiar si es posible determinar algún tipo de conducta. En base a esta discusión parece ser útil crear las siguientes definiciones:

Definición 3.6 Consideremos a una órbita periódica de período m , $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, de una función holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. La primera derivada de la m -ésima iteración f^m en un punto de la órbita es un número complejo bien definido llamado el multiplicador de la órbita y es denotado como λ .

La regla de la cadena nos permite deducir la siguiente fórmula

$$\lambda = (f^m)'(z_i) = f'(z_1) \cdot f'(z_2) \cdot \dots \cdot f'(z_m).$$

De aquí podemos observar que $\lambda = 0$ si y solo si algún punto z_j de la órbita es un punto crítico de f .

Definición 3.7 Una órbita periódica es:

- i) Atractora si $0 < |\lambda| < 1$
- ii) Repulsora si $|\lambda| > 1$
- iii) Indiferente o neutral si $|\lambda| = 1$
- iv) Superatractora si $\lambda = 0$

Observación En el caso especial donde el punto al infinito es periódico bajo una función racional, $f^m(\infty) = \infty$, esta definición puede ser confusa. El multiplicador λ no es igual al límite cuando $z \rightarrow \infty$ de la derivada de $f^m(z)$, pero sí es el recíproco de este número. Es decir $\lambda(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(f^m(z))'}$. Esto puede deducirse por la forma en la que suele analizarse el ∞ en variable compleja, esto es, mediante la siguiente conjugación:

$$\begin{array}{ccc} \infty & \xrightarrow{f} & \infty \\ \frac{1}{z} \uparrow & & \downarrow \frac{1}{z} \\ 0 & \xrightarrow{g} & 0 \end{array}$$

Como ejemplos tenemos que si $f(z) = 2z$ entonces el ∞ es un punto fijo atractor con multiplicador $\lambda = \frac{1}{2}$, mientras que si f es un polinomio de grado $d \geq 2$ entonces ∞ es un punto fijo superatractor con multiplicador $\lambda = 0$, pues $f'(z)$ es un polinomio sin constante por lo que $\lambda(\infty) = \frac{1}{\infty}$.

Definición 3.8 Si $Orb_f(z_0)$ es una órbita periódica atractor de período m , definimos la cuenca de atracción como el conjunto $A(z_0) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que consta de todos los puntos $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que las iteraciones sucesivas $f^m(z)$, $f^{2m}(z)$, ... convergen hacia un punto de $Orb_f(z_0)$, es decir, el conjunto de puntos que son asintóticos hacia adelante a $Orb_f(z_0)$. Y definimos a la componente conexa de $A(z_0)$ que contiene a z_0 como la cuenca inmediata de atracción $A^*(z_0)$.

Esta cuenca de atracción es un conjunto abierto pues $\forall \varepsilon > 0$, $A(z_0)$ coincide con las imágenes inversas $f^{-n}(V(z_0))$ donde $V(z_0)$ es una vecindad de radio ε . Esta cuenca de atracción determina la naturaleza dinámica alrededor de una órbita periódica atractor, pues localiza todo el conjunto o el "espacio" en el que ejerce esta "fuerza" de atracción.

Teorema 3.9 Toda órbita periódica atractor o superatractor esta contenida en el conjunto de Fatou de f . De hecho, toda la cuenca de atracción A para una órbita periódica atractor esta contenida en el conjunto de Fatou. Sin embargo, toda órbita periódica repulsora esta contenida en el conjunto de Julia.

Demostración

Consideremos un punto fijo $z_0 = f(z_0)$ con multiplicador λ .

Sea $|\lambda| > 1$ y supongamos que $\{f^n\}$ converge local y uniformemente a una función F , como $\{f^n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas por el Teorema 2.2.4 de Weierstrass F es holomorfa y $\{(f^n)'\}$ converge local y uniformemente a F' . Pero vemos que:

$$\begin{aligned} (f^n)'(z_0) &= (f)'(f^{n-1}(z_0)) \cdot (f^{n-1}(z_0))' = (f)'(z_0) \cdot (f^{n-1}(z_0))' \\ &= (f)'(z_0) \cdot (f)'(f^{n-2}(z_0)) \cdot (f^{n-2}(z_0))' = (f)'(z_0) \cdot (f)'(z_0) \cdot (f^{n-2}(z_0))' \\ &\dots \\ &= [(f)'(z_0)]^n \\ &= \lambda^n \end{aligned}$$

Entonces la derivada de f^n en z_0 diverge al ∞ cuando $n \rightarrow \infty$. Lo cual implica que no existe F' lo que implica una contradicción. Por lo tanto $\{f^n\}$ no converge uniformemente en ninguna vecindad de z_0 . Por lo que no existe una familia normal en z_0 , y se sigue que z_0 esta

en el conjunto de Julia $J(f)$.

Por otro lado, si $|\lambda| < 1$ y $\varepsilon > 0$, escogemos $|\lambda| < c < 1$, y por lo discutido en la Definición 3.7 tenemos que $|f(z) - z_0| = \lambda|z - z_0| \leq c|z - z_0| < \varepsilon$ para z suficientemente cerca a z_0 , por lo tanto las iteraciones sucesivas de f , restringidas a una vecindad pequeña, convergen uniformemente a la función constante z_0 , por lo que z_0 está en el conjunto de Fatou $F(f)$. Y como la cuenca de atracción A está formada por puntos asintóticos hacia adelante a z_0 se sigue que para todo subconjunto compacto de A , f^m también converge local y uniformemente hacia la constante z_0 , y toda la cuenca de atracción A está en $F(f)$. Estas afirmaciones para puntos fijos se pueden generalizar para puntos periódicos por el Teorema 3.5, pues un punto periódico de f es punto fijo de alguna iteración f^m .

■

¿Qué pasa si el multiplicador $|\lambda| = 1$?, es decir, ¿qué pasa con los puntos indiferentes? A continuación veremos un caso especial de esto.

Definición 3.10 *Un punto periódico $z_0 = f^m(z_0)$ se llama parabólico si el multiplicador λ en z_0 es igual a 1, pero f^m no es la función identidad, o de forma más general, si λ es una raíz de la unidad, pero ninguna iteración de f es la función identidad.*

Teorema 3.11 *Todo punto periódico parabólico pertenece al conjunto de Julia.*

Demostración

Por conjugación podemos asumir que $z_0 = 0$, entonces

$$f(z) = az + bz^r + \dots,$$

donde $b \neq 0$, $r \geq 2$, y $a^k = 1$ para alguna k , pues $f'(0) = a$. Entonces por el Teorema 2.2.7

$$f(z) = z + a_p z^p + \dots$$

para algún $p \geq 2$, donde $a_p \neq 0$. Donde f^k no es la función identidad por definición de punto parabólico. Por Teorema 2.2.8,

$$f^n(z) = z + na_p z^p + \dots,$$

Entonces la p -ésima derivada de f^n en 0 es igual a $p!na_p$ el cual diverge al infinito según como $n \rightarrow \infty$. Ahora, supongamos que $\{f^n\}$ converge local y uniformemente a una función F , como $\{f^n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas por el Teorema 2.2.4 de Weierstrass F es holomorfa y $\{(f^n)'\}$ converge local y uniformemente a F' . Derivando f y aplicando el Teorema 2.2.4 p veces se sigue que $\{(f^n)^{(p)}\}$ converge local y uniformemente a $F^{(p)}$. Pero $F^{(p)}$ no existe en 0 porque $p!na_p \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, por el teorema 2.2.4 $F^{(p-1)}$ tampoco, ni $F^{(p-2)}$ y así sucesivamente. Entonces F no es holomorfa lo que implica una contradicción. Por lo que $\{f^n\}$ no converge local y uniformemente entonces $\{f^n\}$ no es normal cerca de 0, por tanto $z_0 \in J(f)$.

■

Teorema 3.12 *Si f es una función racional de grado $d \geq 2$, entonces el conjunto de Julia $J(f)$ es distinto del vacío.*

Demostración

Supongamos que $J(f) = \emptyset$. Si J es vacío, entonces alguna sucesión $\{f^{n_j}\}$ convergería uniformemente sobre toda la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ a una función holomorfa $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, y por el Teorema 2.2.10. g es una función racional de grado n_j para alguna n_j suficientemente grande. Pero el grado de f^{n_j} no puede igualar el grado de g , pues $\deg(f^{n_j}) = [\deg(f)]^{n_j} = d^{n_j}$ el cuál diverge al infinito según como $n_j \rightarrow \infty$. Lo cual es una contradicción a menos que $\deg(f) = 1$, lo cual también es una contradicción.

■

Definición 3.13 *Definimos a la gran órbita de un punto z bajo $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ como el conjunto $[z, f]$ o $[z]$ de todos los puntos $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ cuyas orbitas intersectan la órbita de z eventualmente. Entonces z y z' tienen la misma gran órbita si y solo si $f^m(z) = f^n(z')$ para alguna elección de $m \geq 0, n \geq 0$.*

Definición 3.14 *Un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ lo llamaremos gran órbita finita o excepcional (usando la terminología clásica) bajo f si su gran orbita $[z, f] \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un conjunto finito. El conjunto de tales puntos será denotado por $E(f)$ o $E(z, f)$.*

Teorema 3.15 *Una función racional f de grado d mayor o igual a 2 tiene a lo más dos puntos excepcionales que se encuentran en el conjunto de Fatou $F(f)$. Si $E(f) = \{\zeta\}$, entonces*

f puede ser conjugada a un polinomio donde a ζ le corresponde el ∞ . Si $E(f) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, donde $\zeta_1 \neq \zeta_2$, entonces f puede ser conjugada a alguna función $z \rightarrow az^d$, donde a ζ_1 y a ζ_2 le corresponden el 0 y el ∞ .

Demostración

Sea $E(\widehat{z}, f)$ un punto excepcional de f , entonces $[\widehat{z}] = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ y \widehat{z} es un punto periódico o preperiódico de período m donde para alguna i , $\widehat{z} = a_i$. Denotamos a la órbita periódica contenida en $[\widehat{z}]$ como $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. Entonces $f^m(z_i) = z_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y son parte del conjunto de puntos fijos de $f^m(z)$. Por otro lado $f^m(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ y $\deg(f^m) = d^m$. Las raíces de $p(z) - z(q(z))$ determinan los puntos fijos de $f^m(z)$ y las raíces de $P(z) = p(z) - z_i(q(z))$ son los elementos de $\{z_i\}$ además $\deg(P(z)) = d^m > m$, esto implica que al menos un z_i tiene multiplicidad mayor que 1, supongamos que es z_m . Entonces $P(z) = (z - z_m)^k(P_k(z))$ donde $P_k(z)$ es un polinomio de grado $d^m - k$, por tanto holomorfo, y $k > 1$ se sigue el teorema 2.2.11 que $f'(z_m) = 0$. Entonces z_m es un punto fijo superatractor de f^m y pertenece a su conjunto de Fatou F . Así, por el teorema 3.5 pertenece al conjunto de Fatou de f . Como el teorema 3.4 garantiza que el conjunto de Fatou F es completamente invariante y $z_m \in [\widehat{z}]$ entonces $[\widehat{z}] \in F(f)$.

Ahora supongamos que hay tres puntos excepcionales y digamos que U es el complemento de tales puntos. Entonces $f(U) = U$. Y por el teorema de Montel el conjunto de iteraciones de f restringidas a U forman una familia normal. Entonces U y los tres puntos excepcionales, por lo argumentado arriba, están en el conjunto de Fatou. Lo que implica que el conjunto de Julia es vacío, lo cual contradice el teorema 3.12. Por tanto, f tiene a lo más dos puntos excepcionales. Veamos que les pasa.

Supongamos que hay a lo más dos puntos excepcionales. Hay cuatro posibilidades a considerar:

- i) $E(f) = \emptyset$
- ii) $E(f) = \{z_1\} = [z_1]$
- iii) $E(f) = \{z_1, z_2\}$, $\{z_1\} = [z_1]$, $\{z_2\} = [z_2]$.
- iv) $E(f) = \{z_1, z_2\} = [z_1] = [z_2]$

Estos casos podemos conjugarlos con 0 e ∞ para facilitar su estudio:

- ii) Sea la conjugación topológica $m(z) = \frac{1}{z - z_1}$ donde $m^{-1}(z) = \frac{z_1 z + 1}{z}$. Como $E(f) =$

$\{z_1\}$ entonces $f(z_1) = z_1$. Esto implica que $g(z) = m \circ f \circ m^{-1}(z)$. Vemos que

$$g(\infty) = m \circ f(z_1) = m(z_1) = \infty$$

entonces, en este caso, $E(g) = \{\infty\} = [\infty]$.

iii) Sea la conjugación topológica $m(z) = \frac{z_1 - z}{z - z_2}$ donde $m^{-1}(z) = \frac{z_2 z + z_1}{z + 1}$. Como $E(f) = \{z_1\}$ entonces $f(z_1) = z_1$ y $E(f) = \{z_2\}$ pasa que $f(z_2) = z_2$. Lo que implica que $g(z) = m \circ f \circ m^{-1}(z)$. Vemos que

$$\begin{aligned} g(0) &= m \circ f(z_1) = m(z_1) = 0 \\ g(\infty) &= m \circ f(z_2) = m(z_2) = \infty \end{aligned}$$

entonces, para este caso, $E(g) = \{0, \infty\}$, $\{0\} = [0]$, $\{\infty\} = [\infty]$.

iv) Sea la conjugación topológica $m(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z}$ donde $m^{-1}(z) = \frac{z_1 z + z_2}{z + 1}$. Como $E(f) = \{z_1, z_2\}$ entonces $f(z_1) = z_2$ y $f(z_2) = z_1$. Lo que implica que $g(z) = m \circ f \circ m^{-1}(z)$. Vemos que

$$\begin{aligned} g(0) &= m \circ f(z_2) = m(z_1) = \infty \\ g(\infty) &= m \circ f(z_1) = m(z_2) = 0 \end{aligned}$$

entonces, para este caso, $E(g) = \{0, \infty\} = [0] = [\infty]$.

Por lo que los cuatro casos descritos arriba se pueden ver como:

- i) $E(g) = \emptyset$
- ii) $E(g) = \{\infty\} = [\infty]$
- iii) $E(g) = \{0, \infty\}$, $\{0\} = [0]$, $\{\infty\} = [\infty]$.
- iv) $E(g) = \{0, \infty\} = [0] = [\infty]$

El primer caso es trivial. En el segundo caso, por el teorema 1.3.3, g es un polinomio. En el tercer caso también se trata de un polinomio, pero es de la forma $z \rightarrow az^d$ para algún entero positivo d . Y en el cuarto caso sucede que $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$, y f tiene todos sus ceros y polos en $\{0, \infty\}$ así que es de la forma $z \rightarrow az^{-d}$ para algún entero positivo d .

■

Teorema 3.16 *Si el grado de una función racional f es mayor o igual a 2, entonces su conjunto de Julia es infinito.*

Demostración

Supongamos que $\xi \in J(f)$. Supongamos que J es finito, como es completamente invariante, entonces ξ es un punto excepcional. Pero esto es una contradicción pues si ξ es excepcional entonces está en el conjunto de Fatou por el teorema 3.15. Por tanto, J es infinito.

■

Teorema 3.17 *Sea z_1 un punto arbitrario del conjunto de Julia $J(f) \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ y sea N una vecindad arbitraria de z_1 . Entonces, la unión U de las imágenes $f^n(N)$ contiene a todo el conjunto de Julia, y contiene a todo $\widehat{\mathbb{C}}$ excepto a lo más dos puntos. De manera más precisa, si N es suficientemente pequeña, entonces U es el complemento $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E(f)$ del conjunto de los puntos excepcionales.*

Demostración

Primero notemos que el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ solo puede contener a lo más dos puntos. Pues de otro modo, como $f(U) \subseteq U$, se seguiría por el teorema de Montel que U esta en el conjunto de Fatou, lo cual no puede pasar pues $z_1 \in U \cap J$. Y volviendo a usar que $f(U) \subseteq U$, vemos que la imagen inversa de un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ debe pertenecer al conjunto finito $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Entonces $f^{-1}(z) = z$ ó $f^{-2}(z) = z$, y por tanto z es periódico y excepcional. Como el conjunto $E(f)$ de los puntos excepcionales es ajeno al conjunto de Julia $J(f)$, entonces $J \subseteq U$. Finalmente, si N es lo suficientemente pequeña tal que $N \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \setminus E(f)$, claramente $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E(f)$.

■

Corolario 3.18 *Si el conjunto de Julia contiene un punto interior, entonces es igual a la esfera de Riemann. Es decir $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración

Supongamos que J tiene un punto interior z , entonces existe una vecindad $N \subset J$ que contiene a z . Sea $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(N)$ por el teorema 3.17 contiene a todo el conjunto de Julia, es decir $J \subseteq U$ y como J es completamente invariante $f^n(N) \subseteq J$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $U \subseteq J$ y por tanto $J = U$. Pero U es un conjunto abierto y J es un conjunto cerrado, el único conjunto abierto y cerrado al mismo tiempo en $\widehat{\mathbb{C}}$ es $\widehat{\mathbb{C}}$ por lo que $J = \widehat{\mathbb{C}}$.

■

Corolario 3.19 *Si $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ es la cuenca de atracción para alguna órbita periódica atractora, entonces la frontera ∂A es igual a todo el conjunto de Julia. Además toda componente conexa del conjunto de Fatou $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J$ coincide con alguna componente conexa de esta cuenca A o es ajena a A , es decir a A^* .*

Demostración

Si N es cualquier vecindad de un punto del conjunto de Julia, entonces el teorema 3.17 implica que alguna $f^n(N)$ intersecta a A , entonces N tiene que intersectar a A , por invariancia de A . Como es para toda vecindad N , esto prueba que $J \subseteq \overline{A}$. Pero $J \cap A = \emptyset$, pues $A \subseteq F(f)$, entonces $J \subseteq \partial A$. Por otro lado, si M es una vecindad de algún punto de ∂A , entonces cualquier subsucesión de f^n restringida a M debe tener una discontinuidad de brinco entre A y ∂A , de lo contrario $J \subseteq \partial A \subseteq F$, por lo tanto $\partial A \subseteq J$. Esto implica que $J = \partial A$. Finalmente, notemos que cualquier componente conexo de Fatou que intersecte a A , como no puede intersectar a la frontera de A , debe coincidir con algun componente de A .

■

Este resultado denota una relación entre las órbitas periódicas atractoras y el conjunto de Julia. Los puntos de esta órbita que se encuentran "lejos" del conjunto de Julia pueden determinarlo completamente mediante su cuenca de atracción. Es decir conociendo el comportamiento en un subconjunto finito, el de la órbita periódica atractora, puede conocerse un conjunto infinito, el conjunto de Julia, el cual, como se verá en el Corolario 3.22, es no numerable.

Corolario 3.20 *Sea P un polinomio de grado mayor o igual a dos. Entonces ∞ esta en el conjunto de Fatou $F(P)$, y la componente F_∞ de F que contiene al infinito es completamente invariante bajo P .*

Demostración

Como P es un polinomio $P(\infty) = \infty$ y por lo discutido en la definición 3.7, $\lambda(\infty) = 0$, entonces ∞ es un punto fijo super atractor y esta en el conjunto de Fatou. Por el teorema 3.9 su cuenca de atracción esta en el conjunto de Fatou y por el corolario 3.19 es una componente conexa del conjunto de Fatou completamente invariante dado que contiene un punto fijo.

■

Esto implica que el conjunto de Julia $J(f)$ es un conjunto acotado, y como es cerrado, entonces es compacto.

Corolario 3.21 *Si z_0 es cualquier punto del conjunto de Julia $J(f)$, entonces el conjunto de la imagen inversa de z_0 bajo f^n*

$$\left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}}; f^n(z) = z_0, n \geq 0 \right\}$$

es denso en $J(f)$.

Demostración

Dado que $z_0 \notin E(f)$ y el conjunto de Julia $J(f)$ es infinito, el teorema 3.17 muestra que todo punto $z_1 \in J(f)$ puede ser aproximado arbitrariamente cerca por puntos z tal que $z_0 \in Orb^+(z)$, pues para cualquier vecindad U de z_1 existe n tal que $J \subseteq f^n(U)$ por lo que existe $z \in U$ tal que $f^n(z) = z_0$.



Este corolario sugiere un algoritmo para graficar al conjunto de Julia con la ayuda de una computadora. Empezando con cualquier $z_0 \in J(f)$, primero graficamos todos los z_1 tal que $f(z_1) = z_0$, después para cada z_1 graficamos todos los z_2 tal que $f(z_2) = z_1$, y así reiteradamente, por lo que eventualmente se aproximará arbitrariamente cerca a cada punto de $J(f)$. Este método es usado de manera más frecuente en el caso cuadrático, pues la ecuaciones cuadráticas son muy sencillas de resolver, y puesto que el número d^n de la n -ésima iteración de la imagen inversa es más pequeña cuando el grado es 2. El método es muy sensible a los errores, pues como f tiende a ser expansible en su conjunto de Julia, f^{-1} tiende a ser contraíble en su conjunto de Julia. Sin embargo también tiene desventajas: el número d^n crece muy rápidamente con n , por lo que puede tomar un gran número de iteraciones en las preimágenes para poder acercarse a ciertos puntos de $J(f)$.

Corolario 3.22 *Si f es de grado mayor o igual a 2, entonces $J(f)$ no tiene puntos aislados y es un conjunto perfecto, es decir cada punto de J es punto de acumulación de J .*

Demostración

Como $J(f)$ es infinito, entonces contiene al menos un punto límite z_0 . Y por el corolario 3.21 las iteraciones de la imágenes inversas de z_0 forman un conjunto denso en J por lo que

cualquier punto z de J es punto de acumulación por tanto J es perfecto. Además, si J tuviera un punto aislado no sería de acumulación lo cual es una contradicción y por tanto J no tiene puntos aislados.

■

Corolario 3.23 *Para cualquier función racional de grado mayor o igual 2, el conjunto de Julia es conexo o es totalmente desconexo, es decir, tiene una infinidad innumerable de componentes conexas. Lo cual implica que J es no numerable.*

Demostración

Supongamos que $J(f)$ puede ser expresado como la unión $J_0 \cup J_1$ de dos subconjuntos compactos no vacíos ajenos entre si. Estos dos subconjuntos tienen que ser infinitos, pues J no tiene puntos aislados. Primero veremos que ninguno de estos conjuntos puede ser conexo. Escogamos un conjunto abierto U que intersekte a J_0 pero no J_1 . Decimos que para alguna $n \geq 0$ la imagen $f^n(U)$ debe intersektar a J_0 y a J_1 . Si no fuera así, dada cualquier sucesión de iteraciones f^n , podríamos escoger una subsucesión infinita de iteraciones de f^{n_j} que mapee U a un conjunto que no toque a J_0 o a J_1 , entonces omite al menos tres valores distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$ y por el teorema 2.2.6 es una familia normal en U por lo que pertenece al conjunto de Fatou F . Lo cual contradice la hipótesis que U intersekte al conjunto de Julia. Ahora escogemos una n tal que $f^n(U)$ intersekte a J_0 y a J_1 , como el conjunto de Julia es totalmente invariante $f^n(J_0)$ intersekte a J_0 y a J_1 . Por lo tanto J_0 puede ser expresado como la unión ajena de subconjuntos compactos no vacíos $J_{00} = J_0 \cap f^{-n}(J_0)$ y $J_{01} = J_0 \cap f^{-n}(J_1)$. Análogamente J_1 puede expresarse como la unión ajena de subconjuntos compactos no vacíos $J_{10} = J_1 \cap f^{-n}(J_0)$ y $J_{11} = J_1 \cap f^{-n}(J_1)$.

Siguiendo el mismo razonamiento existe $m \geq 0$ tal que $f^m(J_{ij})$ con $i, j \in \{0, 1\}$ intersekte a J_{00} , J_{01} , J_{10} y J_{11} . Y por tanto J_{00} se puede expresar como la unión ajena de J_{000} y J_{001} , J_{01} se puede expresar como la unión ajena de J_{010} y J_{011} , y J_{10} se puede expresar como la unión ajena de J_{100} y J_{101} , J_{11} se puede expresar como la unión ajena de J_{110} y J_{111} donde:

$$J_{000} = J_{00} \cap f^{-m}(J_{00})$$

$$J_{001} = J_{00} \cap f^{-m}(J_{01})$$

$$J_{010} = J_{01} \cap f^{-m}(J_{00})$$

$$\begin{aligned}
J_{011} &= J_{01} \cap f^{-m}(J_{01}) \\
J_{100} &= J_{10} \cap f^{-m}(J_{10}) \\
J_{101} &= J_{10} \cap f^{-m}(J_{11}) \\
J_{110} &= J_{11} \cap f^{-m}(J_{10}) \\
J_{111} &= J_{11} \cap f^{-m}(J_{11})
\end{aligned}$$

De ese modo, se sigue por inducción en k , que para cualquier sucesión $\{a_1, \dots, a_k\}$ de ceros y unos podemos construir un conjunto compacto no vacío $J_{a_1 \dots a_k}$ tal que sea la unión de los subconjuntos ajenos $J_{a_1 \dots a_k 0}$ y $J_{a_1 \dots a_k 1}$. Las correspondientes intersecciones infinitas

$$J_{a_1 a_2 a_3 \dots} = \bigcap_k J_{a_1 \dots a_k}$$

son ajenas y no vacías, y cada una contiene al menos un componente conexo de J .

■

Para el siguiente corolario necesitaremos una definición y un resultado de topología.

Definición 3.24 *Un espacio topológico X es llamado un espacio de Baire si toda intersección numerable de subconjuntos densos de X también es densa.*

Teorema 3.25 *Teorema de Baire. Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire, y todo espacio localmente compacto X (si $x \in X$, $x \in U$ abierto, $\exists V$ abierto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ y \bar{V} es compacto) es un espacio de Baire.*

Será conveniente decir que una propiedad en puntos que estén en el espacio de Baire X es verdad para una $x \in X$, x que cumple ciertas condiciones, si es verdad para todos los puntos en alguna intersección numerable subconjuntos abiertos densos en X . Aplicaremos este concepto al espacio topológico $J(f)$.

Corolario 3.26 *Para una elección de un punto $z \in J(f)$ que cumpla ciertas condiciones, $Orb_f(z)$ es densa en J .*

Demostración

Para cada entero $i > 0$, podemos cubrir al conjunto de Julia $J(f)$ con un número finito de conjuntos abiertos N_{ij} de diámetro menor a $1/i$, pues la suma de estos diámetros diverge, usando la métrica esférica. Para cada N_{ij} , sea U_{ij} la unión de las iteraciones de la imágenes

inversas $f^{-n}(N_{ij})$ con $n \in \mathbb{N}$. Por el corolario 3.21 $U_{ij} \cap J$ es un subconjunto abierto y denso del conjunto de Julia. Ahora, si z pertenece a la intersección de estos conjuntos abiertos, entonces $Orb_f(z)$ interseca a cada uno de los N_{ij} , y por tanto, es denso en todas partes en J .

■

Por ejemplo, sea $f(z) = z^2$. Su conjunto de Julia $J(f) = \{z : |z| = 1\}$. Si tomamos un z' tal que $\arg(z') = \frac{p}{q}\pi$ entonces existirá n tal que $\arg f^n(z') = \arg(z')$ por lo que z' es un punto periódico repulsor. Pero si $\arg(z') \neq \frac{p}{q}\pi$ entonces la órbita de z' será un conjunto denso en $J(f)$.

Con una que otra excepción, cualquier forma observada alrededor de un punto del conjunto de Julia será observada infinitamente en todo el conjunto de Julia. Esto nos dice mucho acerca de la imagen visual del conjunto de Julia y sus características geométricas. Para establecer esto de manera más precisa damos la siguiente

Definición 3.27 Sean z y z' dos puntos en el conjunto de Julia $J(f)$, decimos que (J, z) es local y conformemente isomorfo a (J, z') si existe un isomorfismo conforme de una vecindad N de z en una vecindad N' de z' el cual lleva z a z' y $J \cap N$ a $J \cap N'$.

Teorema 3.28 El conjunto de puntos $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ para los cuales (J, z) es local y conformemente isomorfo a (J, z') es denso en todas partes en J . Excepto en un número finito de puntos z_0 donde para toda órbita hacia atrás

$$z_0 \longleftarrow z_1 \longleftarrow z_2 \longleftarrow \dots$$

bajo f que termine en z_0 , algún z_j con $j > 0$ es un punto crítico.

Demostración

Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional. Sea z un punto en el conjunto de Julia $J(f)$ y N una vecindad alrededor de él. Sea $z' = f(z)$ y $N' = f(N)$ el cual es una vecindad pues f es una función abierta y es holomorfa. Esta función es inyectiva en N cuando $(f)'(z) \neq 0$ para todo $z \in N$, esto es cuando no hay puntos críticos en N . Como esta función es holomorfa y biyectiva, entonces es un isomorfismo conforme entre N y N' . Definimos esta función para todas las órbitas hacia atrás de z donde no hay puntos críticos, entonces, por el corolario 3.21, el conjunto de puntos z donde pueden ser definidos estos isomorfismos conformes es denso en todas partes.

Por otro lado las raíces de la ecuación $(f)'(z) = \frac{p'(z)q(z) - q'(z)p(z)}{[q(z)]^2} = 0$ son los puntos críticos de f . Y como el grado d de f es finito, entonces el número de raíces de dicha ecuación también es finito.



Con todos los resultados expuestos hasta ahora ya tenemos los recursos básicos para empezar a imaginarnos como son los conjuntos de Julia y de Fatou en las funciones racionales, aunque de hecho muchos de los resultados expuestos hasta ahora pueden llevarse a funciones más generales, como funciones enteras y meromorfas.

Así como se discutió en el Capítulo 1 sección 1.1 y a principios de este capítulo, ahora ya podemos comenzar a observar porque el conjunto de Fatou es el conjunto estable y porque el conjunto de Julia es el conjunto "caótico". ¿Pero qué es que un conjunto en el dominio de una función sea caótico?

De hecho el conjunto de Julia $J(f)$ presenta las tres características que definen a una función caótica f en un conjunto, en este caso $J(f)$: ·) Una dependencia sensible a las condiciones iniciales, es decir, dos puntos del conjunto que estén en una vecindad V mostraran comportamientos dinámicos muy distintos (Teorema 3.28). ··) Es topológicamente transitivo, i.e., dados $U, V \subseteq J(f)$ abiertos, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ (Teorema 3.17). ···) Sus puntos periódicos son densos en $J(f)$ (Teorema 3.9, Teorema 3.21). Por lo tanto $f(z)$ racional es caótica en $J(f)$.

Dentro de estos resultados empezamos a ver algunas cosas que empiezan a llamar la atención como que J no tiene punto interior a menos que sea todo $\widehat{\mathbb{C}}$, que J es perfecto, no numerable, es conexo o totalmente desconexo, prácticamente al observar la imagen inversa de un solo punto puede crearse un imagen aproximada de todo el conjunto.

Pero es el resultado del teorema 3.27 el que define de una manera contundente la naturaleza geométrica de estos conjuntos, pues con el que se puede observar esta naturaleza tan singular, es decir, sin importar cuanto me acerque a observar al conjunto de Julia J este será prácticamente el "mismo" en todas sus partes. Esto es denominado, de manera intuitiva, como fractal en la matemática. Así que para ilustrar un poco esto observemos detenidamente los conjuntos de Julia y de Fatou de distintos polinomios en las figuras 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6 y 3-7, los conjuntos de Julia son los pintados con tinta y los de Fatou son los blancos.

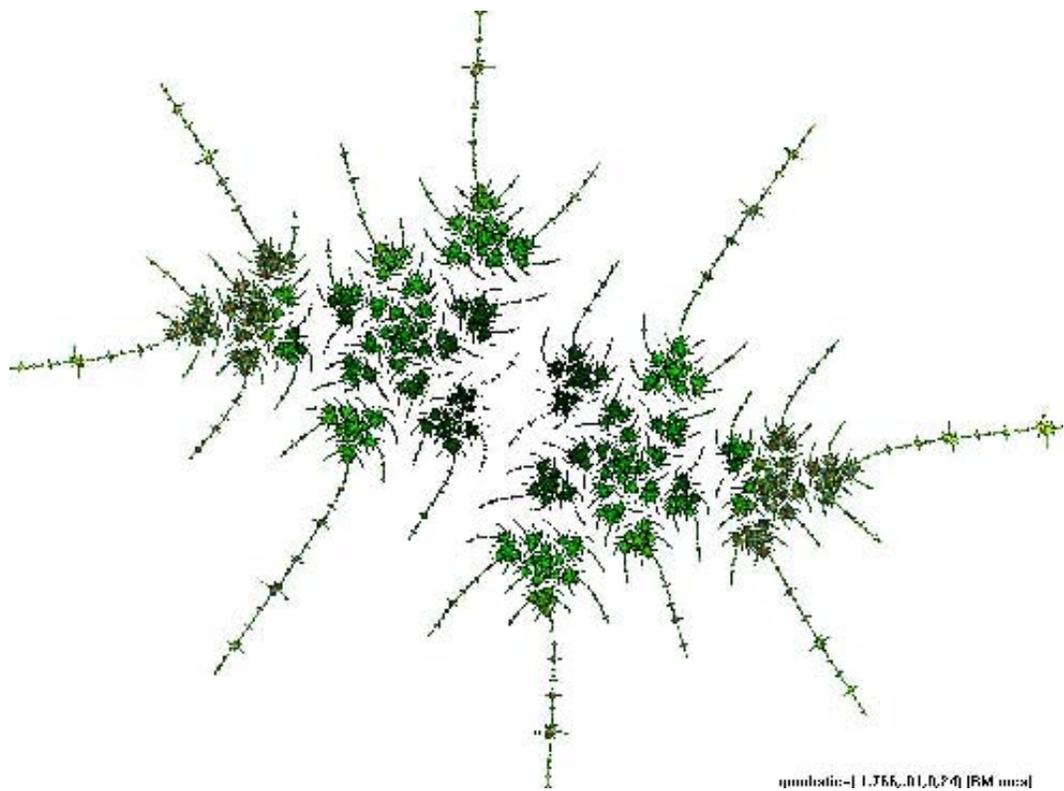


Figure 3-1:

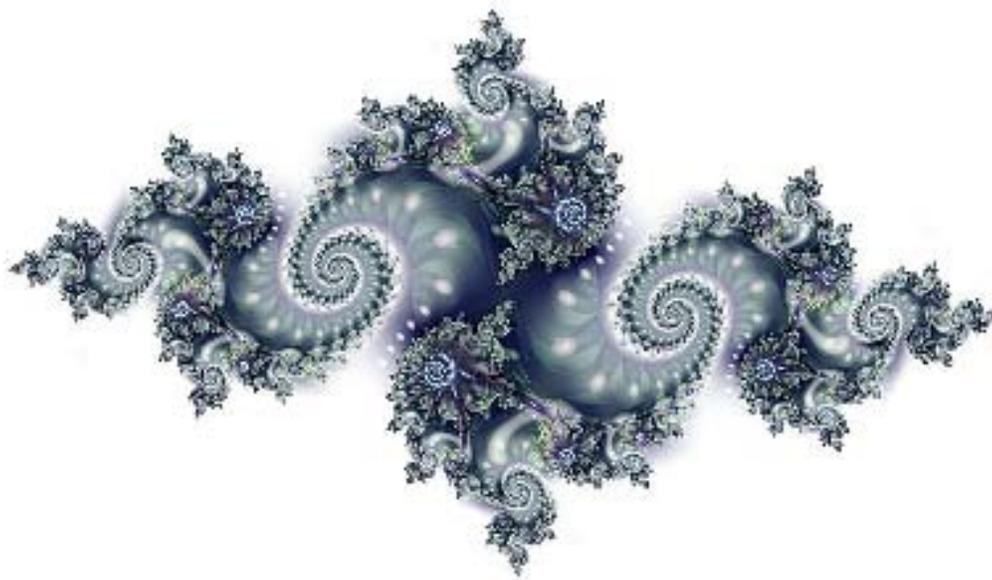


Figure 3-2:

El siguiente teorema pertenece a la Teoría Local del Punto fijo, pero nos es indispensable aquí para dos cosas. La primera es para probar una relación que existe entre la acotabilidad de las órbitas de los puntos críticos de una función y la conexidad de los conjuntos de Julia correspondientes. La segunda es para poder encontrar el isomorfismo que nos permitirá probar la conexidad del conjunto de Mandelbrot en el siguiente capítulo.

Teorema 3.29 *Teorema de Boettcher.* Si f tiene un punto fijo superatractor en z_0 ,

$$f(z) = z_0 + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad a_n \neq 0, n \geq 2.$$

Entonces existe una función conforme $\zeta = \varphi(z)$ que va de una vecindad en torno a z_0 a una vecindad en torno a 0 la cual conjuga $f(z)$ con ζ^n . La función ζ es única, excepto por multiplicación por una raíz $(n - 1)$ -ésima de la unidad.

Demostración

Dado que podemos dar una conjugación apropiada de $f(z)$ que lleve a z_0 en 0, podemos suponer que $z_0 = 0$. Si cambiamos de variables al colocar $w = cz$ donde $c^{p-1} = 1/a_p$ entonces habremos conjugado f a la forma $f(w) = w^p + \dots$. Por lo tanto podemos suponer que $a_p = 1$. Entonces podemos escribir a $f(z)$ como

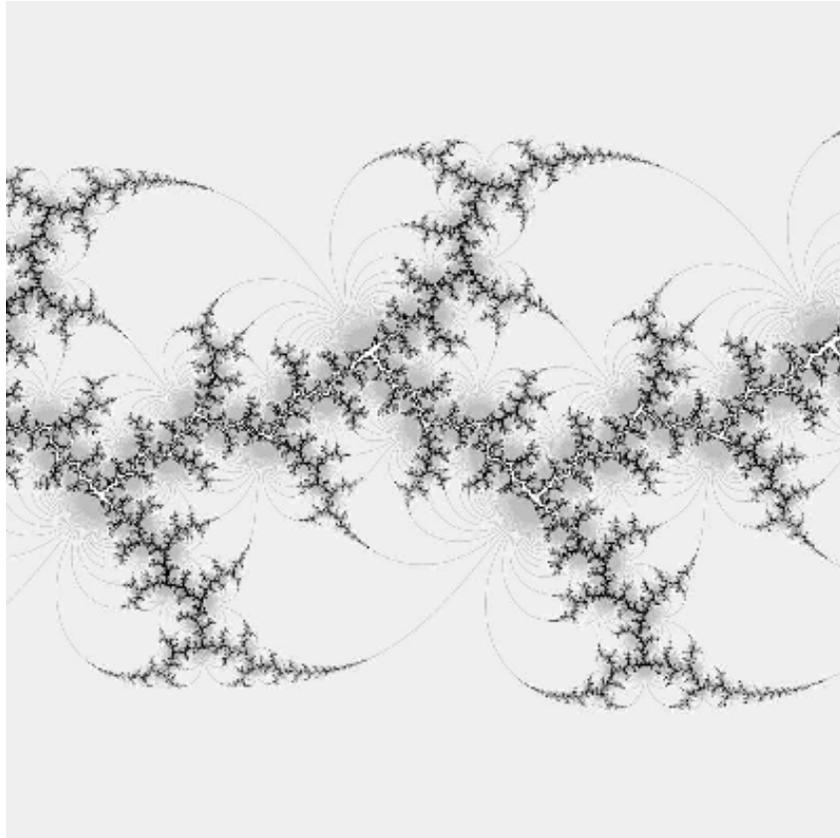


Figure 3-3:



Figure 3-4:

cubic-[0.9,2.007,0.50]

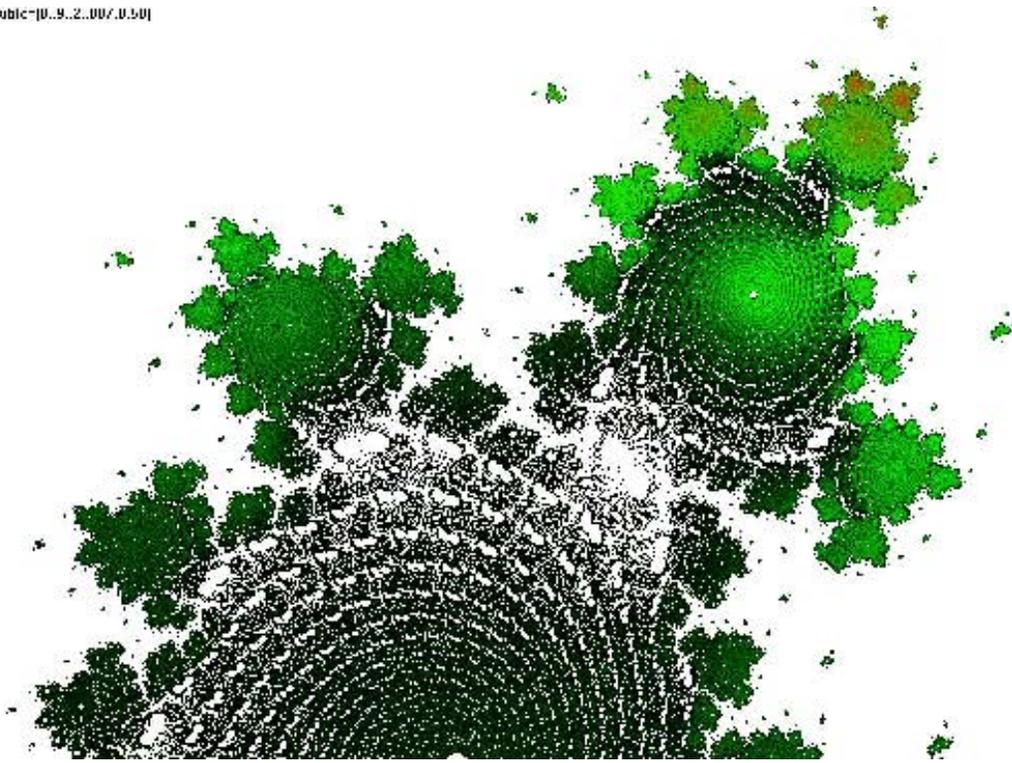


Figure 3-5:

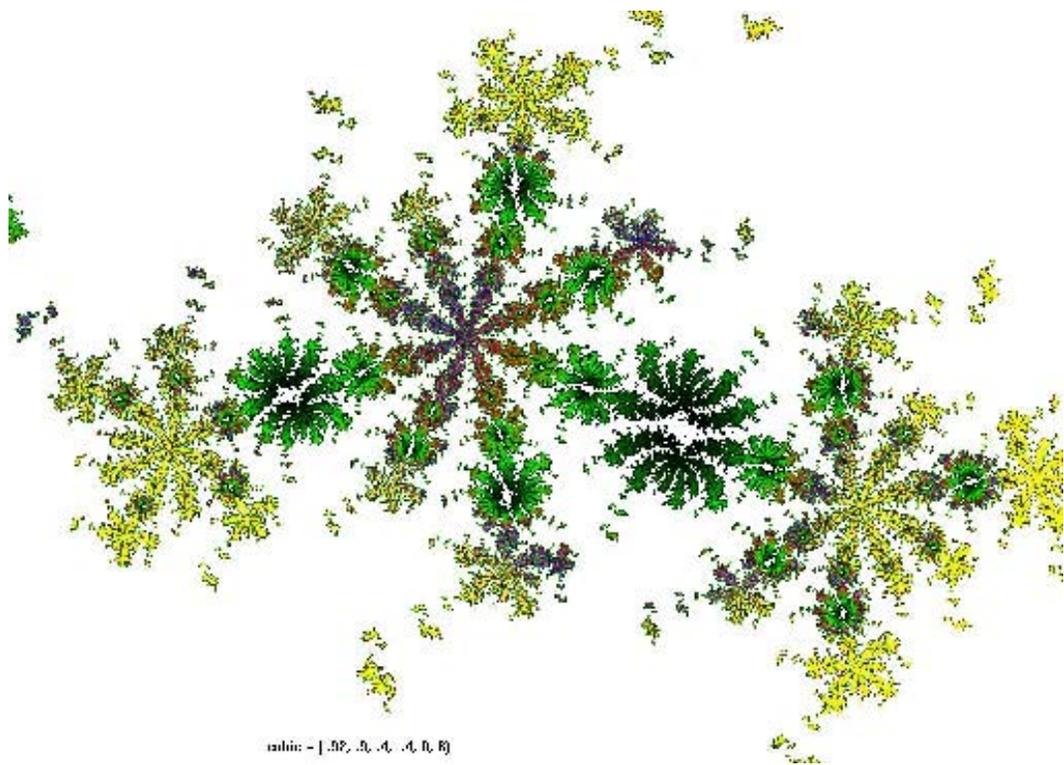


Figure 3-6:

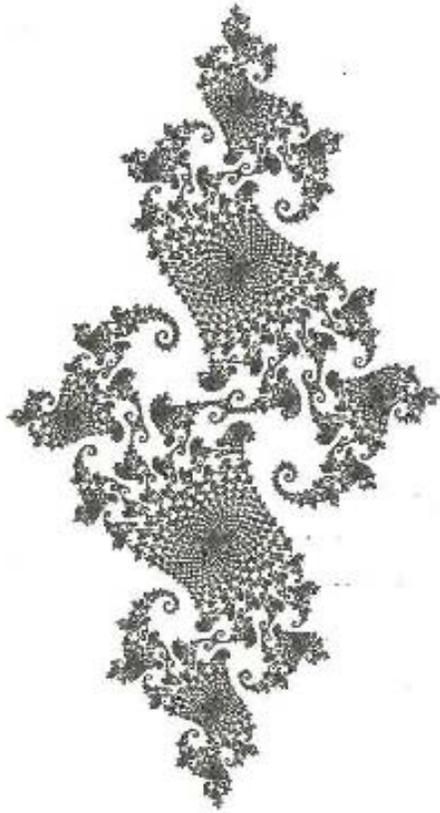


Figure 3-7:

$$f(z) = z^n(1 + b_1z + b_2z^2 + \dots)$$

lo cual puede ser escrito de la siguiente manera

$$f(z) = z^n(1 + \eta(z)) \quad \text{donde} \quad \eta(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots \quad (1)$$

Ahora escogamos un radio $0 < r < \frac{1}{2}$ el cual sea lo suficientemente pequeño para que cumpla que $|\eta(z)| < \frac{1}{2}$ en el disco D_r de radio r y que no contenga otro punto crítico de $f(z)$. Por lo que $f(z)$ mapea este disco en sí mismo pues $|z| < \frac{1}{2}$ y cumple que $|f(z)| < |z|^n(1 + \frac{1}{2}) < \frac{|z|}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}|z|$ con $f(z) \neq 0$ si $z \in D_r \setminus \{0\}$.

La k -ésima iterada $f^k(z)$ también mapea a D_r en sí mismo y por el teorema 2.7 y el corolario 2.8

$$f^k(z) = z^{n^k}(1 + n^kz + \dots)$$

Definiremos las funciones

$$\varphi_k(z) = [f^k(z)]^{\frac{1}{n^k}} = z(1 + n^k b_1 z + \dots)^{\frac{1}{n^k}} = z(1 + b_1 z + \dots),$$

esta última igualdad obtenida mediante el binomio de Newton, la cual tiene derivada 1 en el origen. Esta función está bien definida puesto que no hay puntos críticos en su dominio excepto el 0 el cual tiene multiplicidad n^k y por tanto no es punto de ramificación de la raíz. Vemos que

$$\varphi_k(f(z)) = [f^k(f(z))]^{\frac{1}{n^k}} = [f^{k+1}(z)]^{\frac{1}{n^{k+1}}} = [\varphi_{k+1}(z)]^n$$

así que si probamos que $\varphi_n \rightarrow \phi$ local y uniformemente entonces esta función $\varphi : D_r \rightarrow D$, siendo D el disco unitario, satisface $\varphi \circ f(z) = \varphi^n(z)$ por lo cual sería solución.

Para hacer esto definiremos $z = e^Z$, donde Z se mueve en el plano izquierdo $L = \text{Re}(Z) < \log r$ por las características de la función exponencial compleja, pues $e^Z < r$. Esto implica que el mapeo de $f(z)$ en el disco D_r corresponde al mapeo $F(Z) = \log f(e^Z)$ en L , mediante la conjugación

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{f} & z \\ e^Z \uparrow & & \downarrow \log z \\ Z & \xrightarrow{F} & Z \end{array}$$

Por (1) esto puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
F(Z) &= \log(e^{nZ}(1 + \eta)) \\
&= nZ + \log(1 + \eta)
\end{aligned}$$

donde $\eta = \eta(e^Z)$ y también ya hemos hecho una selección explícita de una rama para aplicar la función logaritmo. Por esto $F(Z)$ es una función bien definida y holomorfa, la cual mapea L en sí mismo.

Como $|\eta(e^Z)| < \frac{1}{2}$ vemos que

$$|F(Z) - \eta Z| = |\log(1 + \eta)| < \log 2 < 1 \quad (2)$$

para todo $Z \in L$.

Análogamente, la función $\varphi_k(z) = [f^k(z)]^{\frac{1}{n^k}}$ en D_r corresponde mediante la misma conjugación de arriba a la función

$$\begin{aligned}
\Phi_k(Z) &= \log \varphi_k(e^Z) \\
&= \log [f^k(e^Z)]^{\frac{1}{n^k}} \\
&= \frac{1}{n^k} \log f^k(e^Z) \\
&= \frac{F^k(Z)}{n^k}
\end{aligned}$$

la cual es una función bien definida y holomorfa en L .

Por (2) tenemos que

$$|\Phi_{k+1}(Z) - \Phi_k(Z)| = \frac{|F^{k+1}(Z) - \eta F^k(Z)|}{n^{k+1}} < \frac{1}{n^{k+1}}$$

en L . Por lo que $\Phi_k(Z)$ converge uniformemente a una función límite $\Phi(Z)$ Además

$$\begin{aligned}
\Phi_k(F(Z)) &= \frac{F^k(F(Z))}{n^k} \\
&= \frac{F^{k+1}(Z)}{n^k} \\
&= \frac{n F^{k+1}(Z)}{n^{k+1}} \\
&= n \Phi_{k+1}(Z)
\end{aligned}$$

Por lo que $\Phi(Z)$ cumple que

$$\Phi(F(Z)) = n\Phi(Z)$$

Y como la exponencial cuando mapea L en D reduce distancias, se sigue que

$$|\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z)| < \frac{1}{n^{k+1}}$$

para $|z| < r$. Por consiguiente $\varphi_k(z)$ converge uniformemente a una función holomorfa $\varphi(z)$ en el disco $|z| < r$. Y como ya vimos arriba

$$\varphi \circ f = \varphi^p.$$

Para probar la unicidad es suficiente estudiar el caso especial $f(z) = z^n$. Si una función de la forma $\varphi(z) = c_1z + c_kz^k + c_{k+h}z^{k+h} + \dots$ conjugaba a $z \mapsto z^n$ consigo misma, entonces, por el teorema 2.2.7

$$\varphi(z^n) = c_1z^n + c_kz^{nk} + \dots$$

debe ser igual a

$$\varphi(z)^n = c_1^n z^n + nc_1^{n-1}c_k z^{n+k-1} + \dots,$$

con $nk > n + k - 1$. Comparando coeficientes, encontramos que $c_1^{n-1} = 1$ y todos los demás coeficientes más grandes son cero.

■

Ahora comentemos algunas implicaciones de este teorema. Sea

$$\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$$

y sea $\varphi(z)$ definida en una vecindad G en torno a z_0 . Por esta igualdad, φ también está definida en $f^{-1}(G)$ y como G está en la cuenca de atracción de z_0 , $f^{-1}(G)$ es más "grande" y además cada uno de sus puntos tiene p imágenes inversas. Entonces φ está definida en $f^{-1}(G)$ y por el mismo argumento también está definida en $f^{-2}(G)$, este argumento se puede prolongar hasta encontrar un punto crítico, pues si se incluirá dicho punto crítico en el nuevo dominio habría una ruptura en la continuidad y conformidad de φ , pues en una vecindad en torno al punto crítico un subconjunto iría a dar en torno al cero y otro cerca de la frontera de la imagen del dominio anterior.

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(f^2(z)) &= [\varphi(f(z))]^p = \varphi(z)^{p^2} \\
\varphi(f^3(z)) &= [\varphi(f^2(z))]^p = \varphi(z)^{p^3} \\
&\dots \\
\varphi(f^n(z)) &= [\varphi(f^{n-1}(z))]^p = \varphi(z)^{p^n} \\
\implies \varphi(z) &= [\varphi(f^n(z))]^{1/p^n}
\end{aligned}$$

Entonces al ir buscando las imágenes inversas de G y por el corolario 3.19 encontramos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^{-n}(G)) = A^*(z_0)$$

lo cual implica que la función $\varphi(z)$ puede ser definida en toda la cuenca de atracción $A^*(z_0)$ de $f(z)$.

Normalicemos la ecuación $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$ y apliquemos la función logaritmo:

$$\log |\varphi(f(z))| = p \log |\varphi(z)|,$$

como esta función es analítica, por el teorema 2.2.15, f es una función armónica, excepto en sus polos. Y por el teorema de Boettcher 3.29, $\varphi(z)$ cae en D , que es el disco abierto unitario, por lo que la función definida en toda la cuenca de atracción $A^*(z_0)$ es negativa.

Además como se vió en la demostración del teorema de Boettcher 3.29, llevando z_0 a 0 mediante su respectiva conjugación

$$\begin{aligned}
\varphi_k(z) &= z(1 + b_1 z + \dots) \\
\implies \varphi'_k(z) &= (1 + b_1 z + \dots) + z(b_1 + \dots) \\
\implies \varphi'_k(0) &= 0
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\varphi'(0) = 0$ por el teorema de Weierstrass 2.2.4. Lo que implica que cerca del punto crítico z_0 , $\varphi(z) \sim (z - z_0)$, es decir estas funciones son muy parecidas entre sí en $A^*(z_0)$, entonces $\log |\varphi(z)| \approx \log |z - z_0|$. Por tanto $\log |\varphi(z)| - \log |z - z_0|$ es una función armónica y acotada en $A^*(z_0)$.

Además por la discusión de arriba de la expansión de $\varphi(z)$ a la cuenca de atracción y por la demostración del teorema de Boettcher 3.29 $\varphi : D_r \rightarrow D$, se sigue que

$$\log |\varphi(z)| \rightarrow 0 \text{ cuando } z \rightarrow \partial A^*(z_0).$$

Excepto su signo, estas tres propiedades de $\varphi(z)$ cumplen con la definición 2.2.14 pues caracterizan a la función de Green $g^{[z_0]}(z)$ en $A^*(z_0)$ con polo en z_0 y entonces:

$$\log |\varphi(z)| = -g^{[z_0]}(z), \quad z \in A^*(z_0).$$

Por ejemplo, un polinomio $P(z) = az^d + \dots$ con $d \geq 2$ y $a \neq 0$ tiene un punto fijo superatractor en el ∞ . Reemplazando a 0 por ∞ en el Teorema de Boettcher 3.29, vemos que $P(z)$ se puede conjugar con ζ^d cerca del ∞ .

Por todo lo discutido arriba, la conjugación tiene la forma $\varphi(z) \approx cz$, con un polo simple en el ∞ . De nuevo, la ecuación funcional

$$\log |\varphi(P(z))| = d \log |\varphi(z)|, \quad |z| > r,$$

nos permite extender $\log |\varphi(z)|$ a toda la cuenca de atracción $A(\infty)$ que es igual a la componente del conjunto de Fatou $F_\infty(f)$ por el teorema 3.19 y 3.20. La cuenca de atracción no tiene componentes acotados, y entonces por el Principio del Módulo Máximo, $A(\infty) = A^*(\infty)$ es conexo. La función extendida $\log |\varphi|$ es armónica en $A(\infty)$, y $|\log \varphi(z)| \rightarrow 0$ cuando z tiende a la frontera $\partial A(\infty)$. Donde

$$\log |\varphi(z)| \approx \log |z| \quad |z| \rightarrow \infty$$

por lo que la diferencia de estas funciones es una función armónica acotada.

De nuevo estas tres características cumplen con la definición 2.2.14 de función de Green por lo que

$$\log |\varphi(z)| = g^{[\infty]}(z), \quad z \in F_\infty$$

Como $\varphi \circ f(z) = \varphi^d(z)$ vemos que

$$\begin{aligned} g^{[\infty]}(P(z)) &= \log |\varphi(P(z))| \\ &= \log |\varphi^d(z)| \\ &= d \log |\varphi(z)| \\ &= d \cdot g^{[\infty]}(z) \end{aligned}$$

con z en $A(\infty)$. Entonces P mapea curvas de nivel de $g^{[\infty]}$ a curvas de nivel, incrementando d veces el valor de la función de Green.

La función de Green nos da una medida precisa de la velocidad de escape al ∞ . Toda la discusión vertida arriba en torno al cero se lleva ahora en torno al ∞ . El exterior $\{g^{[\infty]}(z) > r\}$ de la curva de nivel es invariante bajo P , y P lo mapea en forma d a uno en $\{g^{[\infty]}(z) > rd\}$. Para una r muy grande, $\varphi(z)$ está definida en $\{g^{[\infty]}(z) > r\}$ y lo mapea conformemente en $\{|\varphi(z)| > e^r\}$, pues $g^{[\infty]}(z) = \log \varphi(z)$. La ecuación $\varphi(z) = (\varphi(P(z)))^{1/d}$ nos permite extender $\varphi(z)$ a $\{g^{[\infty]} > r/d\}$ con tal de que ningún punto crítico de P pertenezca a este dominio.

Teorema 3.30 *El conjunto de Julia $J(P)$ para un polinomio P de grado $d \geq 2$ es conexo si y sólo si no existe un punto crítico finito de P en $A(\infty)$, es decir, si y sólo si la órbita hacia adelante de cada punto crítico finito esta acotado.*

Demostración

\Leftarrow)

Si no hay punto crítico de P en $A(\infty)$, podemos expandir $\varphi(z)$ indefinidamente a toda la cuenca de atracción $A(\infty)$, por lo discutido en el teorema 3.29 de Boettcher $\varphi(z)$ mapea $A(\infty)$ conformemente en el complemento $\{|\varphi(z)| > 1\}$ del disco cerrado unitario en el plano $\zeta = \varphi(z)$. En particular, $A(\infty)$ es simplemente conexo por los corolarios 3.19 y 3.20, por lo que el conjunto de Julia $J = \partial A(\infty)$ es conexo.

\Rightarrow)

Supongamos que $P(z) = a_0 + a_d(z - z_0)^d + \dots, a_d \neq 0$ tiene un punto crítico en z_0 . en $A(\infty)$.

Por la discusión del teorema 3.29 de Boettcher tenemos que

$$\begin{aligned} g^{[\infty]}(z) &= \log |\varphi(z)| \\ &= \log \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) \right| \\ &= \log \left| \lim_{n \rightarrow \infty} [P^n(z)]^{\frac{1}{d^n}} \right| \\ &= \frac{1}{d^n} \log \left| \lim_{n \rightarrow \infty} [P^n(z)] \right|. \end{aligned}$$

Y por el teorema 2.2.4 de Weierstrass vemos que

$$\varphi'_n(z) \longrightarrow \varphi'(z) \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty,$$

donde

$$\varphi'_n(z) = \left[[P^n(z)]^{\frac{1}{d^n}} \right]' = \left[\frac{1}{d^n} [P^n(z)]^{\frac{1}{d^n} - 1} \right] \cdot P'(P^{n-1}(z)) \cdot \dots \cdot P'(P(z)) \cdot P'(z).$$

Lo cual implica que como z_0 es punto crítico de $P(z)$ entonces sus imágenes inversas $P^{-n}(z_0)$ con $n \in \mathbb{N}$ también son puntos críticos de $\varphi(z)$. Y como

$$(\log f^n(z))' = \frac{[P^n(z)]'}{[P^n(z)]}$$

por lo que los puntos críticos de $g^{[\infty]}(z)$ son los mismos que los de $f^n(z_0)$ con $n \in \mathbb{N}$ y por tanto son infinitos.

Por todo esto, extendamos $\varphi(z)$ hasta que alcancemos una curva de nivel $\{g^{[\infty]}(z) = r\}$ de la función de Green que contiene al punto crítico z_0 de $P(z)$. Esta curva de nivel forma una intersección en z_0 pues es la imagen inversa de $\{z : |z| = |a_0| = r\}$. Como los polinomios tienen d imágenes inversas esta curva es como una flor con d pétalos, si $d = 2$ se pueden ver como ochos. Ver figura 3-8. Y el dominio $\{g^{[\infty]}(z) > r\}$ es simplemente conexo y mapeado por $\varphi(z)$ conformemente en $\{|\zeta| > e^r\}$.

La curva de nivel $P^{-1}(\{g^{[\infty]}(z) = r\})$ forma d intersecciones en $f^{-1}(z_0)$ donde se forman flores con d pétalos. La curva de nivel $P^{-2}(\{g^{[\infty]}(z) = r\})$ formará d^2 intersecciones en $f^{-2}(z_0)$ en donde se formarán flores con d^2 pétalos. Siguiendo este procedimiento infinitamente la curva de nivel $P^{-n}(\{g^{[\infty]}(z) = r\})$ formará d^n intersecciones en $f^{-n}(z_0)$ en donde se formarán flores con d^n pétalos. Ver figura 3-8. Vemos $\varphi(z)$ se aproxima a diferentes valores según como z se aproxima a los puntos críticos a través de distintas intersecciones. Dentro de cada una de estas curvas hay puntos de J , o de otra forma $g^{[\infty]}$ sería armónica y positiva, y por tanto constante dentro de la curva. Por lo que J es disconexo. Lo cual es una contradicción con la hipótesis y por tanto la ida esta probada. De hecho aunque la demostración fue por reducción al absurdo, deja ver como se va formando J si es disconexo, como se había visto en parte en el teorema 3.23. De hecho este conjunto totalmente disconexo es un conjunto de Cantor.

■

Por otro lado tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.31 *Si $P^n(q) \rightarrow \infty$ para cada punto crítico q , entonces el conjunto de Julia $J(P)$ es totalmente disconexo.*

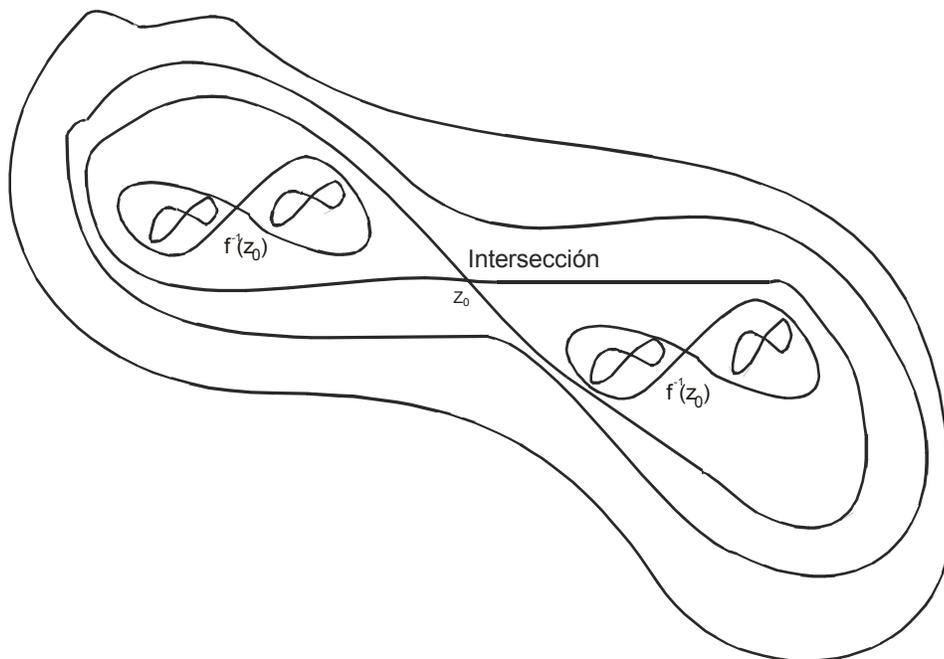


Figure 3-8:

Demostración

Supongamos que el conjunto de Julia $J(P)$ no es totalmente desconexo, entonces, por el teorema 3.23 es conexo y por el regreso del teorema 3.31, $P^n(q)$ no tiende a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción. Por tanto el conjunto de Julia $J(P)$ es totalmente desconexo.

■

El teorema 3.23 da una clasificación de los conjuntos de Julia $J(f)$ para funciones racionales en su naturaleza conectiva, y los teoremas 3.30 y 3.31 proporcionan una herramienta muy útil para poder saber que naturaleza tiene cada conjunto de Julia $J(P)$ de un polinomio con grado mayor o igual a 2. La figura 3-9 presenta un bosquejo de como son estos conjuntos de Julia $J(P)$ de los polinomios cuadráticos $f(z) = z^2 + c$, los cuales son equivalentes, mediante conjugación, como se verá en el siguiente capítulo, a todos los polinomios cuadráticos $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ con $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. La figura 3-10 presentará un bosquejo similar que colocará directamente un conjunto de Julia en la coordenada c del plano complejo y formará un conjunto que se parecerá, hasta cierto nivel, al conjunto de Mandelbrot que estudiaremos en el siguiente capítulo.

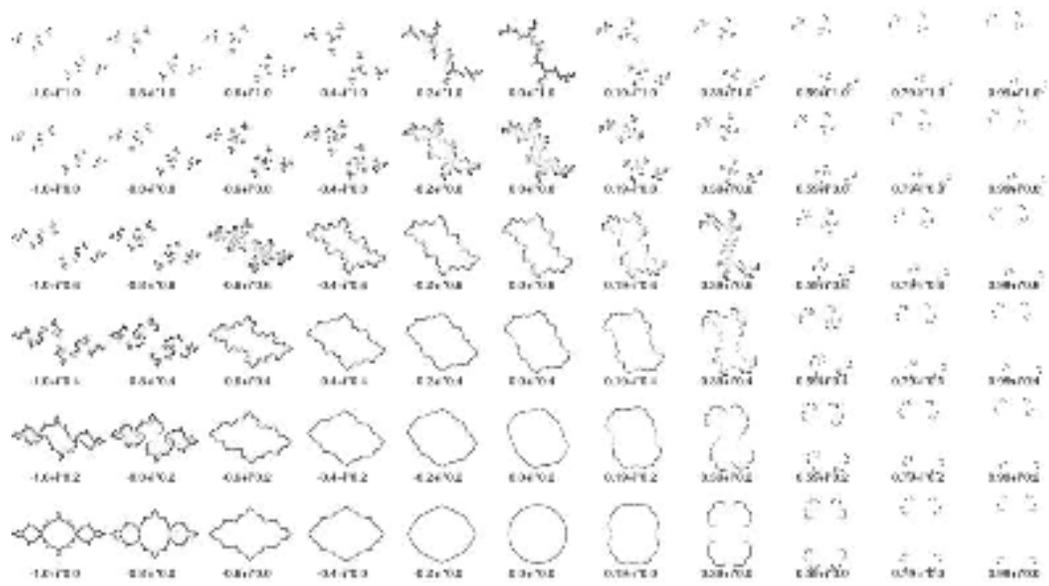


Figure 3-9:

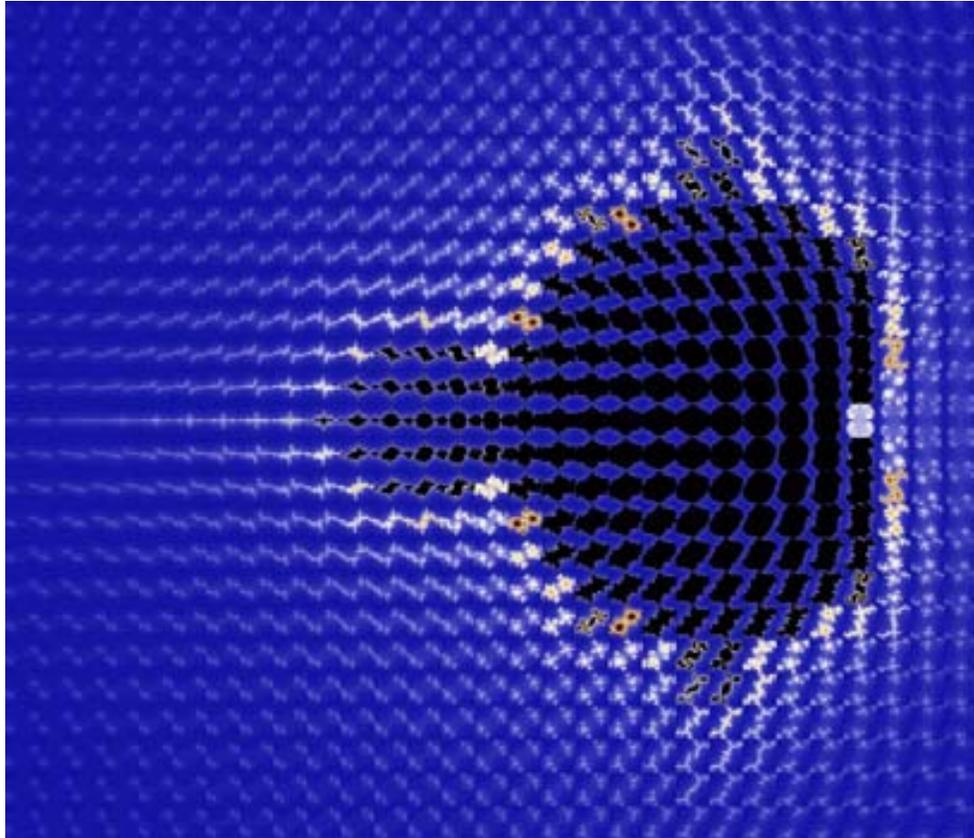


Figure 3-10:

Chapter 4

El conjunto de Mandelbrot

4.1 El conjunto

Consideremos ahora una clase particular de funciones racionales: $P_c(z) = z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$.

¿Pero por qué fijarnos solamente en esta clase y no en todos los polinomios cuadráticos $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ con $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$? La respuesta es que esta clase de funciones es equivalente dinámicamente a todos ellos por que son topológicamente conjugables mediante la conjugación topológica

$$h(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$$

donde

$$c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}.$$

Podemos ver que todas las funciones de esta clase $P_c(z)$ comparten un único punto crítico, el cero. Al ver los teoremas 3.30 y 3.31 y aplicarlo en esta clase de funciones, una pregunta natural que surge sería ¿cuál es el conjunto de puntos c para el cual el conjunto de Julia de $z^2 + c$ es un conjunto conexo y cuál donde es un conjunto totalmente desconexo?, lo cual equivale a preguntarse ¿cuál es el conjunto en el que la órbita del punto crítico, el cero, está acotada y cuál es el conjunto para el cual la órbita no está acotada?. De aquí podemos establecer la siguiente definición.

Definición 4.1.1 EL CONJUNTO DE MANDELBROT

Definimos al Conjunto de Mandelbrot M como el siguiente

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{c_n\} \text{ esta acotada donde } c_n = P_c^n(0).\}$$

¿Pero que es este conjunto? ¿Cómo se ve? Las respuestas a estas preguntas no son sencillas ni mucho menos y estamos lejos de poder contestarlas en su totalidad. Pero si podemos hacer algunas cosas para tratar de ver que esta pasando con este conjunto. Para hacer esto en una primera aproximación veamos que pasa con las órbitas del punto crítico de P_0 , P_{-1} , P_{-2} y P_{-3} . Donde:

$$\begin{aligned} Orb_{P_0}(0) &= \{0, 0, 0, 0, \dots\} \\ Orb_{P_{-1}}(0) &= \{0, -1, 0, -1, \dots\} \\ Orb_{P_{-2}}(0) &= \{0, -2, 2, 2, \dots\} \\ Orb_{P_{-3}}(0) &= \{0, -3, 6, 33, \dots\} \end{aligned}$$

Como podemos ver, estas órbitas muestran comportamientos muy distintos entre sí. La primera es la órbita de un punto fijo, la segunda la de un punto periódico de período dos, la tercera la de un punto eventualmente fijo y la última es una órbita que se va a infinito. Sabemos que en las funciones de las tres primeras órbitas sus Conjuntos de Julia son conexos y la última es disconexo, por los Teoremas 3.30 y 3.31. Pero ¿hay alguna relación entre ellas? ¿Qué les pasa a los Conjuntos de Julia cuando movemos a c continuamente por estos puntos? ¿Y qué pasa si los movemos por todo el Conjunto de Mandelbrot? La respuesta se puede encontrar al encontrar distintas regiones de valores de c en cada uno de los cuales las iteraciones bajo P_c tienen cosas en común y después intentar de analizar que es lo que sucede en la transición de un estado al otro según como c se mueve de una región a otra.

¿Pero cuáles son esas cosas en común?. Veremos dos de los teoremas más importantes en la teoría de la Dinámica Compleja, el Teorema de Sullivan y el Teorema de Clasificación, junto con otros dos teoremas debidos a Douady y Shishikura y algunas definiciones:

Definición 4.1.2 *Sea U una componente fija del conjunto de Fatou F . Entonces existen varias posibilidades para la órbita de U bajo f :*

- i) Si $f(U) = U$, entonces U es una componente fija de F .*

ii) Si $f^n(U) = U$ para alguna $n \geq 1$, entonces U es una componente periódica de F . El mínimo n es el período de la componente. Si $n = 1$, se trata de una componente fija.

iii) Si $f^m(U)$ es periódica para alguna $m \geq 1$, entonces U es una componente preperiódica de F .

iv) De otra manera, todos los $\{f^n(U)\}$ son distintos y U es un dominio errante.

Teorema 4.1.3 *Teorema de Sullivan.* Una función racional f no tiene dominios errantes.

Definición 4.1.4 Una componente periódica U de período n del conjunto de Fatou F es parabólica si en su frontera hay un punto fijo neutral ζ de f^n con multiplicador 1, tal que todos los puntos en U convergen a ζ bajo la iteración de f^n . Los dominios $U, f(U), \dots, f^{n-1}(U)$ forman un ciclo parabólico.

Definición 4.1.5 Una componente simplemente conexa U del conjunto de Fatou F en la cual f es conjugable a una rotación irracional es denominada disco de Siegel.

Definición 4.1.6 Una componente periódica U de período n del conjunto de Fatou F es un anillo de Herman (o anillo de Arnold) si es doblemente conexa y f^n es conjugable a una rotación en un anillo.

Teorema 4.1.7 *Teorema de Clasificación.* Sea U un componente periódico del conjunto de Fatou F . Entonces sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple:

- i) U contiene un punto periódico atractor o superatractor.
- ii) U es parabólico.
- iii) U es un disco de Siegel.
- iv) U es un anillo de Herman.

Teorema 4.1.8 *Teorema de Douady.* Un polinomio P de grado d tiene a lo más $d - 1$ ciclos no repelentes en el plano finito.

Teorema 4.1.9 *Teorema de Shishikura.* El número de ciclos de anillos de Herman de una función racional de grado d es a lo más $d - 2$. Además los polinomios no tienen anillos de Herman.

Estos resultados implican lo siguiente para los $P_c(z)$. Por el Teorema 4.1.8 hay a lo más un ciclo periódico no repelente de componentes acotadas de $F(P_c)$. Por el Teorema de Sullivan 4.1.3, toda componente acotada de $F(P_c)$ es eventualmente iterada en un ciclo. Por el Teorema 4.1.9 no hay anillos de Herman para P_c . Y por el Teorema de clasificación 4.1.7 existen cuatro

posibilidades para las $c \in M$:

- i) Existe un ciclo atractor para P_c . Si hay un punto fijo atractor entonces sólo hay una componente acotada de $F(P_c)$. Si el ciclo tiene longitud mayor o igual a dos entonces hay una infinidad de componentes acotadas de $F(P_c)$. Y de hecho, el conjunto de Julia $J(P_c)$ es localmente conexo.
- ii) Existe un ciclo parabólico para P_c . Si hay un punto fijo parabólico con multiplicador 1 entonces sólo hay una componente acotada de $F(P_c)$. Si el ciclo de componentes parabólicas tiene longitud mayor o igual a dos entonces hay una infinidad de componentes acotadas de $F(P_c)$. Y de hecho el primer caso sólo ocurre cuando $c = 1/4$ y también el conjunto de Julia $J(P_c)$ es localmente conexo.
- iii) Existe un ciclo de discos de Siegel.
- iv) No existen componentes acotadas de $F(P_c)$.

El primer caso nos permite fijarnos en las regiones que tienen ciclos atractores.

Así que vamos a identificar el conjunto de valores c para el cual $P_c(z)$ tiene un punto fijo atractor en \mathbb{C} . Sabemos que $P_c(z)$ tiene dos puntos fijos, llamemoslos α y β , en \mathbb{C} , los cuales son soluciones de

$$P_{fix}(z) = z^2 - z + c = 0$$

entonces $\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$ y $\beta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$, los cuales cumplen las dos ecuaciones siguientes:

i) $\alpha + \beta = 1$

ii) $\alpha\beta = c$

Y entonces

$$P_c'(\alpha) + P_c'(\beta) = 2$$

lo cual muestra que α y β no pueden ser puntos fijos atractores al mismo tiempo, pues si lo fueran $|P_c'(\alpha)| < 1$ y $|P_c'(\beta)| < 1$ lo que contradice la ecuación de arriba. Se sigue que P puede tener a lo más un punto fijo atractor, supongamos α entonces

$$2|\alpha| = |P'(\alpha)| < 1$$

Y como $P_{fix}(\alpha) = 0$

$$c = \alpha - \alpha^2$$

el conjunto de c que estamos buscando es la imagen del disco $\{\alpha : |\alpha| < \frac{1}{2}\}$ bajo la función $z \rightarrow z - z^2$. Y esta función la podemos ver como la composición $f \circ g \circ h$ de las funciones

$$h(z) = z - \frac{1}{2}, \quad g(z) = z^2, \quad f(z) = \frac{1}{4} - z.$$

Y el conjunto que estamos buscando es la cardioide de la figura 4.1.

Ahora reconoceremos otra región, aquella donde $P_c(z)$ tiene un ciclo atractor de período dos, como es el caso de arriba con $P_{-1}(z)$. Vemos que los puntos fijos de la segunda iteración P_c^2 son las soluciones de

$$P_c^2(z) - z = 0$$

Dado que α y β son puntos fijos de P , también son puntos fijos de P_c^2 : entonces $P_c(z) - z$ divide a $P_c^2(z) - z$, donde $P_c^2(z) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c$ y podemos escribir:

$$\begin{aligned} P_c^2(z) - z &= (z^2 - z + c)(z^2 + z + 1 + c) \\ &= (z - \alpha)(z - \beta)(z - u)(z - v) \end{aligned}$$

Y como estamos buscando condiciones en c que impliquen que $\{u, v\}$ es un ciclo atractor de período dos tenemos que

$$P_c(u) = v, \quad P_c(v) = u, \quad u \neq v$$

y que

$$|(P_c^2)'(u)| < 1, \quad |(P_c^2)'(v)| < 1,$$

lo cual implica que u y v son puntos fijos atractores de P^2 . Y por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} (P_c^2)'(u) &= P_c'(P_c(u))P_c'(u) \\ &= P_c'(v)P_c'(u) \\ &= 4uv \\ &= 4(1 + c) \end{aligned}$$

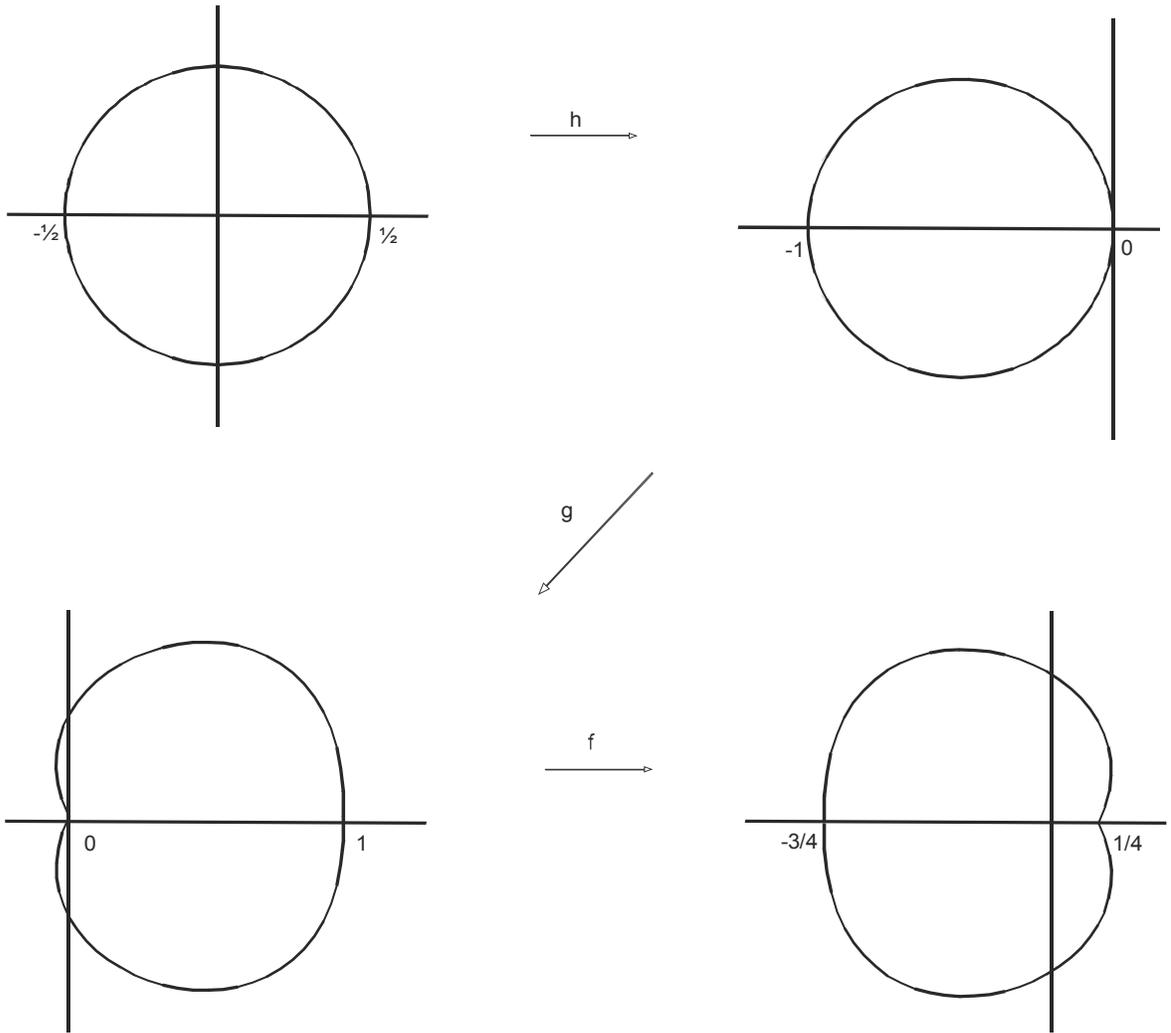


Figure 4-1:

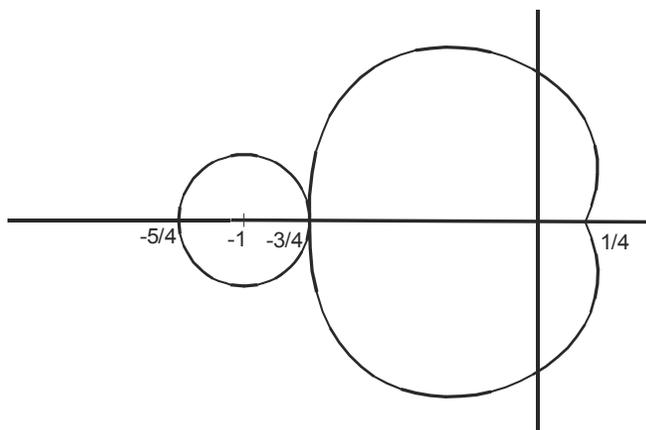


Figure 4-2:

pues $(z^2 + z + 1 + c) = (z - u)(z - v)$.

Por lo que el conjunto de c que estamos buscando es el disco $\{c : |1 + c| < \frac{1}{4}\}$. Este disco junto con la cardioide esta en la figura 4.2.

Vemos que el punto de tangencia entre el disco y la cardioide es $-\frac{3}{4}$ y ahora veremos cual es el cambio en la dinámica de $P_c(z)$ según como c se mueve de la cardioide al disco a través del valor $-\frac{3}{4}$. Cuando c esta en la cardioide, $P_c(z)$ tiene un punto fijo atractor α y un ciclo repulsor de período 2, $\{u, v\}$, donde u y v son puntos fijos repulsores de P_c^2 . Cuando c se acerca a $-\frac{3}{4}$, los puntos α , u y v convergen al valor común $-\frac{1}{2}$, y cuando $c = -\frac{3}{4}$, α , u y v coinciden (se rompe el ciclo de período dos de $\{u, v\}$ por un instante) en un punto fijo indiferente de $P_{-\frac{3}{4}}(z)$.

Como c se mueve en el disco, estos puntos se separan de nuevo, esta vez con α siendo un punto fijo repulsor y $\{u, v\}$ se convierte en un ciclo atractor de período dos, durante este proceso la naturaleza atractora de α ha sido transferida a la pareja $\{u, v\}$. Este proceso es repetido, $\{u, v\}$ pierde su naturaleza atractora cediéndola a un ciclo atractor de período 4, y este a uno de período 8, lo cual es conocido como doblaje de período.

Desafortunadamente, este análisis no nos lleva muy lejos, pues en busca de $N - \text{ciclos}$, podemos dividir $P_c^N(z) - z$ por $P_c(z) - z$ cuyo resultado es un polinomio de grado $2^N - 2$ (cuyo grado es al menos 6 para $N \geq 3$). Así que se vuelve muy difícil seguir el análisis de esta forma. Sin embargo hemos encontrado dos de las regiones principales del conjunto de Mandelbrot.

4.2 Su conexidad

La conexidad del conjunto de Mandelbrot tiene una importancia relevante dentro de la teoría de la dinámica compleja no solo por lo revelador que es el hecho, como se verá más adelante, y viendo las aproximaciones a la frontera del conjunto de Mandelbrot uno se da cuenta de la magnitud del resultado, sino por que la demostración misma da una herramienta muy útil para el estudio del mismo, los rayos, los cuales tambien son utilizados para el estudio de los conjuntos de Julia.

A continuación daremos una definición equivalente al conjunto de Mandelbrot.

Al introducir al conjunto de Mandelbrot en la sección pasada deducimos dos figuras geométricas de considerable tamaño que pertenecían a él, es decir la cardioide y el círculo. Vimos que si $c = -2$ entonces $c \in M$, además es un punto eventualmente fijo de $P_c(z)$. Al comparar este punto con la cardioide y el círculo, parece ser que esta bastante alejado del conjunto, por decirlo de alguna manera. Y entonces uno podría preguntarse si existen puntos del conjunto de Mandelbrot con una norma mayor a 2 o no. Haciendo un breve análisis local en la recta real en torno a $c = -2$ con el punto $c_{-\varepsilon} = -2 - \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, se ve fácilmente como tiende a escaparse al infinito la órbita del punto crítico. ¿Pero esto puede traducirse en un resultado más general? ¿Es el 2 algún número que podamos relacionar de una manera más sólida con el conjunto de Mandelbrot? La respuesta es sí y ese es nuestro siguiente resultado.

Teorema 4.2.1 $M = \{c \in \mathbb{C} : n \geq 1, |c_n| \leq 2\}$ donde $c_n = P_c^n(0)$

Demostración

Sea $M' = \{c \in \mathbb{C} : n \geq 1, |c_n| \leq 2\}$.

Probaremos que $M = M'$

\supseteq) Sea $c \in M'$, entonces por definición c_n esta acotada y por tanto $c \in M$.

\subseteq) Sea $c \in \mathbb{C}$ definimos a

$$W = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq |c|, |z| > 2\}$$

Vemos que para cada $z \in W$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|z| \geq 2 + \varepsilon$, y entonces

$$|P_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \geq |z|(1 + \varepsilon)$$

pues $|z| - 1 \geq 1 + \varepsilon$. Lo cual muestra que $P_c(W) \subseteq W$.

Sustituyendo repetidamente con $P_c(z)$ y usando la misma ε vemos que

$$|P_c^m(z)| \geq |z| (1 + \varepsilon)^m$$

por lo que $P_c^m(z) \rightarrow \infty$ en W cuando $m \rightarrow \infty$.

Ahora, sea $c \in M$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \notin W$ pues de otra forma $c_{n+m} \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$, así que

$$|c_n| < |c| \quad \text{o} \quad |c_n| \leq 2$$

Y como $c_1 = c$ entonces $|c| \leq 2$ pues se cumple la segunda. Y esto implica para toda n que $|c_n| \leq 2$.

■

Por otro lado podemos encontrar un polinomio $Q_n(z)$ tal que $Q_n(c) = c_n$ por la forma en que esta definido c_n .

Y como

$$c_{n+1} = P_c^{n+1}(0) = (c_n)^2 + c = P_c(c_n)$$

para cada c , estos polinomios pueden ser definidos inductivamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= z \\ Q_{n+1}(z) &= [Q_n(z)]^2 + z \end{aligned}$$

Entonces podemos ver al conjunto de Mandelbrot en términos de los polinomios Q_n al combinarlo con en el Teorema 4.2.1:

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n^{-1}(K)$$

donde $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

Como los polinomios Q_n son continuos, la imagen inversa de un conjunto cerrado es cerrada y la intersección infinita de conjuntos cerrados es cerrada, por lo tanto M es cerrado, y como M esta acotado por definición, M es un conjunto compacto.

Al tomar complementos obtenemos

$$C(M) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus M = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^{-1}(D)$$

donde $D = C(K)$.

Para cualquier polinomio no constante Q_i , $Q_i^{-1}(D)$, $i \in \mathbb{N}$, es un conjunto conexo. Pues si fuera disconexo, supongamos que con dos componentes distintas, por continuidad habrían dos puntos distintos que van a dar al ∞ , pero esto implicaría, por la discusión del Teorema 1.3.3 que Q no es un polinomio pues en estos la imagen inversa del ∞ es solamente el ∞ por tanto $Q^{-1}(D)$ es conexo.

Entonces $Q^{-1}(D)$ es abierto, conexo y contiene al ∞ , y como la unión de estos conjuntos también tiene estas propiedades, entonces $C(M)$ es abierto y conexo.

Teorema 4.2.2 LA CONEXIDAD DEL CONJUNTO DE MANDELBROT

Existe un isomorfismo conforme de $C(M)$ en $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$. Entonces $C(M)$ es simplemente conexo y el Conjunto de Mandelbrot es conexo.

Intuitivamente, la demostración puede motivarse al observar que

$$Q_1^{-1}(K) \supset Q_2^{-1}(K) \supset \dots \quad (1)$$

lo cual muestra que M es la intersección decreciente de conjuntos compactos $Q_n^{-1}(K)$. Y si podemos ver que estos conjuntos son conexos, entonces su intersección será conexa y por tanto M será un conjunto conexo.

Veamos que se cumple la afirmación (1).

Primero probaremos probaremos por inducción que si $|z| > 2$, entonces

$$2 < |z| = |Q_1(z)| < |Q_2(z)| < \dots \quad (2)$$

Suponiendo que es válido para n demostraremos el paso inductivo para $n + 1$:

$$\begin{aligned} |Q_{n+1}(z)| &= |[Q_n(z)]^2 + z| \\ &\geq |Q_n(z)|^2 - |z| \\ &\geq |Q_n(z)|^2 - |Q_n(z)| \\ &= |Q_n(z)| (|Q_n(z)| - 1) \\ &> |Q_n(z)| \end{aligned}$$

Pues como $|Q_n(z)| > 2$ entonces $|Q_n(z)| - 1 > 1$.

Ahora, sea $z \in Q_{n+1}^{-1}(K)$, entonces $Q_{n+1}(z) \in K$ y por tanto $|Q_{n+1}(z)| \leq 2$, si $|z| > 2$ entonces se cumpliría (2) lo cual implica una contradicción, por consiguiente $|z| \leq 2$ y como

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(z) &= [Q_n(z)]^2 + z \\
\Rightarrow |Q_n(z)|^2 &= |Q_{n+1}(z) - z| \\
&\leq |Q_{n+1}(z)| + |z| \\
&\leq 4 \\
\Rightarrow |Q_n(z)| &\leq 2 \\
\Rightarrow Q_n(z) &\in K \text{ por lo que } z \in Q_n^{-1}(K) \\
\Rightarrow Q_{n+1}^{-1}(K) &\subseteq Q_n^{-1}(K) \\
&\square
\end{aligned}$$

Demostración

La función de Green jugará un papel muy importante debido a las propiedades que posee, esta función $g_c^{[\infty]}(z)$, de ahora en adelante denotada como $g_c(z)$, la evaluaremos en la componente de Fatou no acotada F_c del conjunto de Fatou $F(P_c)$, veáse la discusión en torno al teorema 3.29 de Boettcher. Así que recordemos estas propiedades:

- i) $g_c : F_c \rightarrow (0, \infty]$ es positiva y armónica en F_c excepto en el ∞ .
- ii) $g_c(z) - \log |z|$ esta acotada en una vecindad del ∞ .
- iii) $g_c(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \partial F_c = J_c$

Por las consecuencias del teorema 3.29 de Boettcher

iv) Para una $|z|$ suficientemente grande $g_c(z) = \log |\varphi_c(z)|$ donde $\varphi_c(z)$ es la única función analítica que satisface:

- a) $\varphi_c(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow \infty$
- b) $\varphi_c(P_c(z)) = [\varphi_c(z)]^2$ cerca del ∞ .

Finalmente podemos observar que cerca del ∞ :

$$g_c(P_c(z)) = \ln |\varphi_c(P_c(z))| = \ln |\varphi_c(z)|^2 = 2 \ln |\varphi_c(z)| = 2g_c(z) \quad (3)$$

Lo cual nos permite ver que la igualdad se mantiene en todo F_c .

Para probar el teorema construiremos una continuación analítica en distintos dominios de $(z, c) \mapsto \varphi_c(z)$ y entonces mostraremos que la función conforme que uniformiza $C(M)$ es $c \mapsto \varphi_c(c)$. Para hacer esto utilizaremos un poco de teoría de funciones de dos variables complejas.

Para cualquier conjunto abierto D de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica si puede ser expresada como una serie de potencias (en dos variables) en alguna vecindad de cada punto de D , y esto es válido si f es analítica en cada variable mientras la otra variable se mantiene fija. La mayoría de nuestras funciones estarán definidas en subconjuntos de $\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, y la analiticidad en el ∞ de la primera variable la definimos de la manera usual con la aplicación $z \rightarrow 1/z$. Por ejemplo $(z, c) \mapsto P_c(z)$ es analítica en $\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$.

Debido a lo que pensamos hacer, parece claro que nuestra atención la enfocaremos en el conjunto

$$\Omega = \left\{ (z, c) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} : z \in F_c, c \in C(M) \right\}$$

el cual es un conjunto abierto por ser F_c y $C(M)$ abiertos.

Ahora introduciremos el siguiente conjunto

$$\Omega_0 = \left\{ (z, c) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} : |z| > 2, |z|^2 > 2|c|, c \in C(M) \right\}$$

el cual por construcción es abierto en $\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$. Y buscaremos una relación entre Ω y Ω_0 .

Sea $(z, c) \in \Omega_0$ entonces

$$|P_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| > |z|^2 - \frac{|z|^2}{2} = \frac{|z|^2}{2} > |c|$$

Y como $(z, z) \in \Omega_0$ si y solo si $|z| > 2$

$$\implies |P_c(z)| > |z| > 2$$

lo cual implica que

$$2 < |z| < |P_c(z)| < |P_c^2(z)| < \dots \tag{4}$$

Por otro lado podemos ver inductivamente que como $|P_c(z)| > \frac{|z|^2}{2}$

$$\begin{aligned} \implies |P_c^2(z)| &> \frac{|P_c(z)|^2}{2} > \frac{\left(\frac{|z|^2}{2}\right)^2}{2} \\ \implies |P_c^3(z)| &> \frac{|P_c^2(z)|^2}{2} > \frac{\left(\frac{\left(\frac{|z|^2}{2}\right)^2}{2}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \implies |P_c^m(z)| > 2 \left(\frac{|z|}{2} \right)^{2^m} \longrightarrow \infty \text{ cuando } m \longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

por lo que $P_c^n(z)$ converge a ∞ local y uniformemente en Ω_0 .

Ahora definamos a F como

$$F : (z, c) \longmapsto (P_c(z), c)$$

Entonces $(z, c) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(\Omega_0)$ si y solo si para alguna $n \geq 0$, $|P_c^n(z)| > 2$, $|P_c^n(z)|^2 > 2|c|$, $c \in C(M)$, es decir si y solo si $(P_c^n(z), c) \in \Omega_0$.

Ahora, sea $(z, c) \in \Omega$

$\implies z \in F_c$ la cual es la componente del conjunto de Fatou no acotada

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|P_c^n(z)| > 2$ y $|P_c^n(z)| > |c|$

$\implies |P_c^n(z)|^2 > 2|c|$ y $c \in C(M)$

$\implies (P_c^n(z), c) \in \Omega_0$

$\implies (z, c) \in F^{-n}(\Omega_0)$

$\implies (z, c) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(\Omega_0)$.

Y sea $(z, c) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(\Omega_0)$

$\implies (P_c^n(z), c) \in \Omega_0$ para alguna n y por (5) $z \in F_c$ y además $c \in C(M)$.

$\implies (z, c) \in \Omega$

Lo cual demuestra que

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(\Omega_0)$$

y como F es continua en el abierto Ω_0 , entonces las imagenes inversas son abiertas y su unión es abierta, lo cual confirma que Ω es abierto.

Por otra parte, sea $(z, c) \in F^{-n}(\Omega_0)$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $(P_c^n(z), c) \in \Omega_0$ y por (5), $|P_c^{n+m}(z)| > 2 \left(\frac{|z|}{2} \right)^{2^{n+m}} \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$, lo cual implica que $P_c^n(z)$ converge al ∞ local y uniformemente en Ω .

Definamos para cualquier conjunto A en $\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$, la c -sección de A como

$$A(c) = \{z : (z, c) \in A\}$$

Dada esta definición, para cada $c \in C(M)$, $\Omega(c) = F_c$ el cual es un conjunto infinitamente conexo, pues es el complemento del conjunto de Cantor J_c por el Teorema 3.31. Será más fácil trabajar con un subconjunto abierto Ω_1 de Ω el cual tiene c -secciones simplemente conexas y también contiene al punto (c, c) para toda $c \in C(M)$, lo cual necesitaremos más adelante. Construyamos tal conjunto. Si $c \in C(M)$ entonces $0 \in F_c$ así que definamos a

$$\Omega_1 = \{(z, c) \in \Omega : g_c(z) > g_c(0)\}$$

Como ya se vió en la discusión del Teorema 3.30, este conjunto es el complemento de un ocho, en este caso por que $\deg(P_c(z)) = 2$ y este ocho contiene al conjunto de Julia y a los puntos críticos.

Lema 4.2.3 i) (∞, c) y $(c, c) \in \Omega_1$

ii) $\Omega_1(c)$ es simplemente conexo para toda $c \in C(M)$

iii) Ω_1 es abierto

Demostración

i) Vemos que $g_c(\infty) = \ln |\varphi_c(\infty)| = \ln |\infty| = \infty$

$$\implies (\infty, c) \in \Omega_1.$$

Y $g_c(c) = g_c(P_c(0)) = 2g_c(0) > g_c(0)$

$$\implies (c, c) \in \Omega_1.$$

ii) Sea c fija y sea $\Delta_n = \{z \in F_c : g_c(z) > 2^n g_c(0)\}$, es claro que

$$\Omega_1(c) = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \dots$$

Donde las Δ_n 's forman una sucesión de vecindades alrededor del ∞ que se reducen uniformemente hacia el ∞ . Entonces para una N suficientemente grande, $z \in \Delta_n$ si y solo si

$$\begin{aligned} \ln |\varphi_c(z)| &= g_c(z) > 2^N g_c(0) \\ \implies |\varphi_c(z)| &= \exp[g_c(z)] > \exp[2^N g_c(0)] \end{aligned}$$

y como φ_c es conformemente isomorfa a z cerca del ∞ , entonces

$$|z| = \exp[g_c(z)] > \exp[2^N g_c(0)]$$

lo que define un dominio simplemente conexo.

Y como $g_c(P_c(z)) = 2g_c(z)$

$$g_c(z) > 2^n g_c(0) \iff g_c(P_c(z)) > 2^{n+1} g_c(0)$$

entonces

$$z \in \Delta_n \iff P_c(z) \in \Delta_{n+1}$$

y $P_c(z)$ es una función cubriente de dos pliegues de Δ_n en Δ_{n+1} con punto de ramificación en ∞ (el otro punto de ramificación de P_c esta en 0 y $0 \notin \Delta_n$, por lo que no nos interesa).

Esto cumple con las hipótesis de la Fórmula de Riemann-Hurwitz para funciones cubrientes lo cual implica que

$$\chi(\Delta_n) + \delta_{P_c}(\Delta_n) = m\chi(\Delta_{n+1})$$

Donde δ_{P_c} es la deficiencia total de P_c sobre Δ_n y es igual $v_{P_c} - 1$, donde v_{P_c} es la valecia de P_c y es igual a dos. Y m es el número de veces que Δ_n cubre a Δ_{n+1} bajo $P_c(z)$. Por lo tanto la fórmula se puede escribir como

$$\chi(\Delta_n) + 1 = 2\chi(\Delta_{n+1})$$

lo que muestra que si uno de los Δ_n 's es simplemente conexo entonces todos los demás lo son, el cual sabemos que existe para N suficientemente grande. Lo cual implica que Δ_0 es simplemente conexo y por lo tanto $\Omega_1(c)$ es simplemente conexo.

iii) Aunque por el momento no probaremos que Ω_1 es abierto, daremos el esquema y mas adelante terminaremos la demostración.

Sabemos que Ω es abierto en $\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$. Y sea

$$g : (z, c) \longrightarrow g_c(z),$$

si esta función es continua en Ω entonces Ω_1 será un conjunto abierto por su definición.

Además, esto es cierto si g es continua en Ω_0 . Pues en Ω sucede que:

$$g(z, c) = g_c(z) = 2^{-n}g_c(P_c^n(z)) = 2^{-n}(g \circ F^n)(z, c)$$

y esta composición es continua en $F^{-n}(\Omega_0)$, cuya unión es Ω , si g es continua en Ω_0 .

Hasta aquí dejaremos el esquema, y hacemos notar que hasta que no este probado, no sabemos que Ω_1 es un conjunto abierto.

□

Ahora construiremos una familia de funciones que nos ayudaran a encontrar la función que estamos buscando, es decir, el isomorfismo conforme entre $C(M)$ y $\{z : |z| > 1\}$. Para esto fijaremos el valor n y definiremos una raíz 2^n -ésima univaluada de $P_c^n(z)$ a través de Ω_1 .

Como $[P_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}} = [A(z - a_1)^{\alpha_1} \dots (z - a_{2^n})^{\alpha_{2^n}}]^{\frac{1}{2^n}}$, donde $\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i = 2^n$, y dado que las raíces de $P_c^n(z)$ son los puntos críticos de $P_c^{n+1}(z)$ pues

$$\begin{aligned} P_c^{n+1}(z) &= [\dots[(z^2 + c)^2 + c]^2 + \dots + c]^2 + c \\ \implies [P_c^{n+1}(z)]' &= 2^{n+1}(P_c^n(z))(P_c^{n-1}(z))\dots(P_c(z))(z) \end{aligned}$$

los cuales se encuentran en $C(\Omega_1)$, entonces las raíces de $P_c^n(z)$ no están en Ω_1 lo cual implica que el infinito no es un punto de ramificación de $[P_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$.

Entonces $[P_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$ esta en una sola rama en $\Omega_1(c)$, y por lo tanto es una función univaluada bien definida, y por tanto definimos

$$\Phi_n : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{donde } \Phi_n(z, c) = [P_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$$

De hecho estas funciones son un caso particular de las φ_n discutidas en la demostración del teorema 3.29 de Boettcher.

Por composición de funciones analíticas, es claro que Φ_n es analítica en $Int(\Omega_1) \setminus \{(\infty, c)\}$. Ahora conjugaremos con $\frac{1}{z}$ para ver si es analítica en el ∞ en la primer variable :

$$\begin{aligned} P_c^n(z) &= z^{2^n} + \dots + c_n \\ \implies P_c^n(1/z) &= \frac{1}{z^{2^n}} + \dots + c_n = \frac{1 + \dots + c_n z^{2^n}}{z^{2^n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [P_c^n(1/z)]^{\frac{1}{2^n}} = \frac{[1 + \dots + c_n z^{2^n}]^{\frac{1}{2^n}}}{z} \\
&\Rightarrow 1/[P_c^n(1/z)]^{\frac{1}{2^n}} = \frac{z}{[1 + \dots + c_n z^{2^n}]^{\frac{1}{2^n}}} \\
&\Rightarrow \frac{\partial \left[1/[P_c^n(1/z)]^{\frac{1}{2^n}} \right]}{\partial z} = \frac{[1 + \dots + c_n z^{2^n}]^{\frac{1}{2^n}} - z \left\{ \frac{1}{2^n} [1 + \dots + c_n z^{2^n}]^{\frac{1}{2^n} - 1} \cdot \frac{d}{dz} [1 + \dots + c_n z^{2^n}] \right\}}{\left[[1 + \dots + c_n z^{2^n}]^{\frac{1}{2^n}} \right]^2} \tag{6}
\end{aligned}$$

La cual al evaluar en cero nos da uno, y por tanto es analítica en (∞, c) y esto tambien demuestra también que para cada $c \in C(M)$ fija

$$\Phi_n(z, c) \sim z \text{ cuando } z \longrightarrow \infty \tag{7}$$

es decir

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} \frac{\Phi_n(z, c)}{z} = 1$$

$$\text{Ademas } \Phi_n(P_c(z), c) = [P_c^n(P_c(z))]^{\frac{1}{2^n} \frac{2}{2}} = [P_c^{n+1}(z)]^{\frac{2}{2^{n+1}}} = [\Phi_{n+1}(z, c)]^2 \tag{8}$$

Ahora analizaremos las funciones Φ_n en Ω_0 y veremos que:

Lema 4.2.4 Φ_n converge uniformemente en $\Omega_0 \cap \Omega_1$ a alguna función Φ , donde:

- i) Φ es analítica en Ω_0 .
- ii) $\Phi(c, c) \sim c$ cuando $c \longrightarrow \infty$.
- iii) Para cada c , $\Phi(z, c) \sim z$ cuando $z \longrightarrow \infty$.
- iv) $|\Phi(z, c)| > 1$ en Ω_0 .
- v) $\Phi(P_c(z), c) = [\Phi(z, c)]^2$

Demostración

i) La demostración del teorema de Boettcher 3.29 sirve para este caso en particular. Pero daremos otra alternativa de demostración, para este caso.

Podemos escribir a las Φ_n de la siguiente forma:

$$\Phi_n(z, c) = \Phi_1(z, c) \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Phi_{k+1}(z, c)}{\Phi_k(z, c)} \right]$$

Y como $P_c^{k+1}(z) = [P_c^k(z)]^2 + c$ entonces

$$\frac{\Phi_{k+1}(z, c)}{\Phi_k(z, c)} = \frac{[P_c^{k+1}(z)]^{\frac{1}{2^{k+1}}}}{[P_c^k(z)]^{\frac{1}{2^k}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{[P_c^k(z)]^2 + c}{[P_c^k(z)]^2} \right]^{\frac{1}{2^{k+1}}} \\
&= \left[1 + \frac{c}{[P_c^k(z)]^2} \right]^{\frac{1}{2^{k+1}}} \\
&= 1 + \theta_k(z, c)
\end{aligned}$$

para alguna función θ_k .

Como $z \in \Omega_0$ entonces $|z|^2 > 2|c|$ y por (4) $|P_c^k(z)|^2 > |z|^2$ y por tanto

$$\frac{|c|}{|P_c^k(z)|^2} < \frac{1}{2}.$$

Ahora daremos una cota para $|\theta_k(z, c)|$, para hacer esto integramos la derivada de $(1+w)^{\frac{1}{d}} - 1$ a lo largo del segmento radial ω que va de 0 a w y considerando la desigualdad de arriba, $|w| < \frac{1}{2}$ para obtener:

$$\begin{aligned}
\left| (1+w)^{\frac{1}{d}} - 1 \right| &= \left| \int_{\omega} \frac{(1+w)^{\frac{1}{d}-1}}{d} dw \right| \\
&\leq \max \left| \frac{(1+w)^{\frac{1}{d}-1}}{d} \right| \cdot \text{longitud}(\omega) \\
&\leq \frac{[\frac{3}{2}]^{\frac{1}{d}-1}}{d} \cdot |w| \\
&\leq 2 \frac{|w|}{d}
\end{aligned}$$

Entonces, si $w = \frac{|c|}{|P_c^k(z)|^2}$, $d = 2^{k+1}$

$$\begin{aligned}
|\theta_k(z, c)| &= \left| \left[1 + \frac{c}{[P_c^k(z)]^2} \right]^{\frac{1}{2^{k+1}}} - 1 \right| \\
&\leq \frac{2|c|}{2^{k+1} |P_c^k(z)|^2} \quad \text{y por (4)} \\
&\leq \frac{|c|}{2^k |z|^2} \quad \text{y como } |z|^2 > 2|c| \\
&\leq \frac{1}{2^{k+1}} \tag{9}
\end{aligned}$$

Lo cual implica que las Φ_n convergen uniformemente en Ω_0 a alguna función Φ . Y por el teorema de la Convergencia Uniforme de Weierstrass Φ es una función analítica puesto que las Φ_n lo son.

ii) Sabemos que $M \subseteq \{z : |z| \leq 2\}$. Si $|c| > 2$, entonces $(c, c) \in \Omega_0$ y dado que

$$\begin{aligned} |\theta_k(z, c)| &\leq \frac{|c|}{2^k |z|^2} \quad \text{en } \Omega_0 \\ \implies |\theta_k(z, c)| &\leq \frac{1}{2^k |c|} \end{aligned}$$

Lo cual muestra que $\Phi_n \rightarrow \Phi$ uniformemente en $\{(c, c) : |c| > 2\}$ y como

$$\begin{aligned} \lim_{|c| \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} |1 + \theta_n(c, c)| &\leq \lim_{|c| \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2^n |c|} \right] \\ &\leq \lim_{|c| \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c|^n} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \right] \\ \text{donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c|^n} &= \frac{1}{|c|} \left[1 + \frac{1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2} + \dots \right] \leq \frac{1}{|c|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{|c|} \\ \implies \lim_{|c| \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} |1 + \theta_n(c, c)| &\leq \lim_{|c| \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2}{|c|} \right] = 1 \end{aligned}$$

Análogamente se puede ver que este límite es mayor o igual a uno y por lo tanto

$$\lim_{|c| \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} |1 + \theta_n(c, c)| = 1.$$

Por otro lado, como $\frac{\Phi_{k+1}(c, c)}{\Phi_k(c, c)} = \frac{[P_c^{k+1}(c)]^{\frac{1}{2^{k+1}}}}{[P_c^k(c)]^{\frac{1}{2^k}}} = \frac{(c_{k+2})^{\frac{1}{2^{k+1}}}}{(c_{k+1})^{\frac{1}{2^k}}}$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \frac{\Phi_{k+1}(c, c)}{\Phi_k(c, c)} = 0$$

lo que implica que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \theta_n(c, c)] = 1$$

Además

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{(c^2 + c)^{\frac{1}{2}}}{c} \right]^2 &= \lim_{c \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{c} = 1 \\ \implies \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(c^2 + c)^{\frac{1}{2}}}{c} &= 1 \end{aligned}$$

Y como consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\Phi(c, c)}{c} &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{(c^2 + c)^{\frac{1}{2}}}{c} \right] \cdot \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \theta_n(c, c)] = 1 \\ \implies \Phi(c, c) &\sim c \text{ cuando } c \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

iii) Ahora tomamos una c fija en $C(M)$. Las funciones $z \mapsto \Phi_n(z, c)$ convergen uniformemente a $z \mapsto \Phi(z, c)$ en $\Omega_0(c)$ y analizamos la derivada parcial respecto a z de $\Phi_n(z, c)$ en el ∞ , para lo cual ya la hemos calculado en (6) y al evaluar en cero vemos que es uno para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el Teorema de Weierstrass $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(\infty, c) = 1$, lo cual demuestra que $\Phi(z, c) \rightarrow z$ cuando $z \rightarrow \infty$.

iv) Por (4)

$$\begin{aligned} 2 < |z| < |P_c(z)| < |P_c^2(z)| < \dots \\ \implies 1 < 2^{\frac{1}{2^n}} < |P_c^n(z)|^{\frac{1}{2^n}} = |\Phi_n(z, c)| \end{aligned}$$

Lo cual implica que $|\Phi(z, c)| \geq 1$ en Ω_0 . Dado que $\Phi(z, c)$ es analítica en el disco $\Omega_0(c)$ para cada $c \in C(M)$ y por iii) la función Φ no es constante entonces por el Principio del Módulo Mínimo $|\Phi(z, c)| > 1$ en $\Omega_0(c)$ y como es para cada $c \in C(M)$ entonces se cumple en todo Ω_0 .

v) Por (8):

$$\begin{aligned} \Phi_n(P_c(z), c) &= [\Phi_{n+1}(z, c)]^2 \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(P_c(z), c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi_{n+1}(z, c)]^2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n+1}(z, c) \right]^2 \\ \implies \Phi(P_c(z), c) &= [\Phi(z, c)]^2 \end{aligned}$$

□

Ahora podemos completar la prueba de que Ω_1 es un conjunto abierto viendo que g es una función continua en Ω_0 . Para cada c en $C(M)$ las funciones:

$$g_c(z) \qquad \log |\varphi_c| \qquad \log |\Phi(z, c)|$$

de z están definidas en alguna vecindad del ∞ . Las dos primeras son iguales en esa vecindad. Y por el Lema 4, v), y la unicidad de φ_c las dos últimas son iguales en dicha vecindad. Y por (3) se sigue que para cada $c \in C(M)$

$$g(z, c) = g_c(z) = \log |\Phi(z, c)|$$

como funciones de z en $\Omega_0(c)$, entonces la igualdad se cumple en Ω_0 y como Φ es una función analítica en Ω_0 , se sigue que g es continua ahí y por tanto Ω_1 es un conjunto abierto y las Φ_n son analíticas en Ω_1 .

Ahora estableceremos una continuación analítica de Φ en Ω_1 . Sabemos que las funciones Φ_n convergen uniformemente a Φ en $\Omega_1 \cap \Omega_0 \subseteq \Omega_1$ y por la demostración de la conexidad simple de $\Omega_1(c)$ para cada $c \in C(M)$ en el Lema 4.2.3 ii), $P_c^n(z)$ converge uniformemente al ∞ en Ω_1 . Entonces para cualquier compacto $K \subseteq \Omega_1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $P_c^n(K) \subseteq \Omega_0$ y por (4), $|\Phi_n(K)| > 1$, pero esto es válido en todo Ω_1 y por el Teorema de Montel 2.2.6 Φ_n , $n > n_0$, es una familia normal en $\Omega_1(c)$ con $c \in C(M)$. Se sigue por el Teorema de Vitali 2.2.12 que Φ se puede extender a una función analítica en $\Omega_1(c)$ para cada $c \in C(M)$, y por tanto Φ se puede extender analíticamente a todo Ω_1 .

Como $(c, c) \in \Omega_1$ para toda $c \in C(M)$, definimos la siguiente función analítica en $C(M)$:

$$c \mapsto \varphi(c) = \Phi(c, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P_c^n(c)]^{\frac{1}{2^n}}$$

Por Lema 4.2.4 v), $\Phi(P_c(z), c) = [\Phi(z, c)]^2$ en Ω_0 , y por la unicidad de la función φ_c que cumple que $\varphi_c(P_c(z)) = [\varphi_c(z)]^2$

$$\begin{aligned} g_c(z) &= \log |\Phi(z, c)| \\ \implies g_c(c) &= \log |\varphi(c)| \end{aligned}$$

y dado que $g_c(z) > 0$, $|\varphi(c)| > 1$ en $C(M)$.

Ya sabemos que $C(M)$ es un conjunto conexo y como φ es continua entonces $\varphi(C(M))$ es un conjunto conexo. Además una vecindad $D \subseteq C(M)$ en torno al ∞ es mapeada uno a uno a una vecindad $\varphi(D)$ en torno al ∞ , pues $\varphi(z) \sim z$ por el Lema 4.2.4 ii).

Supongamos que $D \neq C(M)$, es decir $E = C(M) \setminus D \neq \emptyset$. Como φ no es uno a uno en E , entonces existen e_1 y e_2 distintos entre sí en E tal que $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$. Esta imagen no puede estar en $\partial(\varphi(D))$ pues esto implicaría que e_1 y e_2 pertenecen a ∂D , y la continuidad e inyectividad de φ en D implicaría que sus imágenes son distintas. Ahora, $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$ no pueden estar en $\varphi(D)$ pues φ es inyectiva ahí. Por último, si $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) \notin \varphi(\overline{D})$, entonces la imagen inversa de la curva α que va de esta imagen a alguna $d \in \partial(\varphi(D))$ son dos curvas

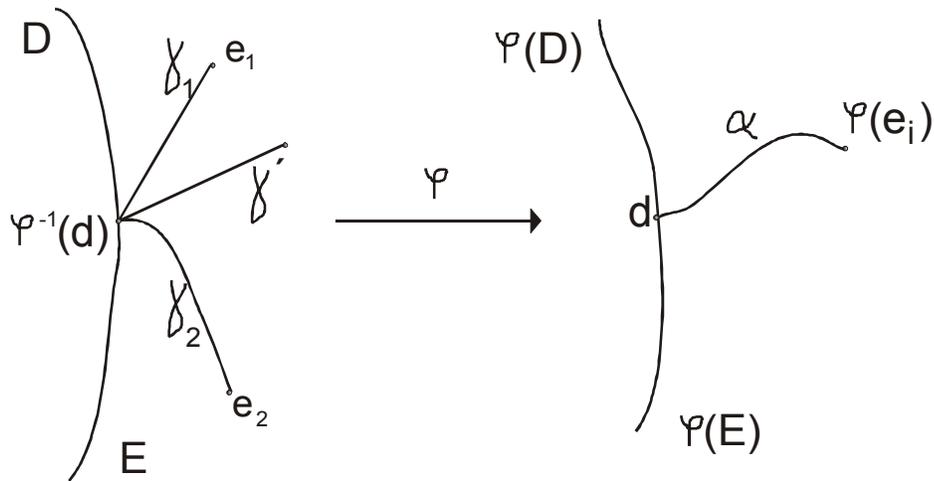


Figure 4-3:

γ_1 y γ_2 distintas entre sí, de no ser así se rompería la continuidad y la no inyectividad, que van de e_1 y e_2 a la única imagen inversa $\varphi^{-1}(d)$ respectivamente. Por continuidad, existe una curva γ' situada entre γ_1 y γ_2 que llega a $\varphi^{-1}(d)$ sobre la cual hay un doblez, lo cual rompe la conformidad en $C(M)$. Ver figura 4-3. Por tanto $D = C(M)$ y la función es inyectiva en todo $C(M)$.

Ahora probaremos que

$$|\varphi(c)| \longrightarrow 1 \text{ cuando } c \longrightarrow \partial M \quad (10)$$

Vemos que

$$1 < |\varphi(c)| = |\Phi(c, c)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_c^n(c)|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |Q_{n+1}(c)|^{\frac{1}{2^n}}$$

Por otro lado sea $\varepsilon > 0$ y escogemos un entero positivo k tal que

$$4 < (1 + \varepsilon)^{2^{k-1}}$$

Y sea

$$E = \{z : |z| < 3, |Q_k(z)| < 3\}$$

Por el Teorema 4.2.1, E es un conjunto abierto que contiene a M , y probaremos (10) mostrando que si $c \in E$, entonces $|\varphi(c)| \leq 1 + \varepsilon$.

Sea $T(x) = x^2 + 3$.

Por inducción vemos que $T^n(3) \leq (\frac{3}{4})4^{2^n}$

Pues para $n = 1$ se da la igualdad.

Suponiendo que es válido para n :

$$\begin{aligned} [T^n(3)]^2 &\leq (\frac{9}{16})4^{2^{n+1}} \\ \implies [T^n(3)]^2 + 3 &\leq (\frac{9}{16})4^{2^{n+1}} + 3 \leq (\frac{9}{16})4^{2^{n+1}} + (\frac{3}{16})4^{2^{n+1}} \\ \implies T^{n+1}(3) &\leq (\frac{3}{4})4^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Puesto que $3 \leq (\frac{3}{16})4^{2^{n+1}} \iff 16 \leq 4^{2^{n+1}} \leq 4^{2^{n+1}}$.

Sea $c \in E$. Como $|c| \leq 3$, para cada n , tenemos que

$$\begin{aligned} |Q_{n+1}(c)| &\leq T(|Q_n(c)|) \\ \implies |Q_{n+1}(c)|^2 &\leq [T(|Q_n(c)|)]^2 \leq T^2(|Q_n(c)|) \\ \implies |Q_{n+1}(c)|^{2^2} &\leq [T^2(|Q_n(c)|)]^2 \leq T^3(|Q_n(c)|) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \implies |Q_{n+1}(c)|^{2^{k-1}} &\leq T^k(|Q_n(c)|) \end{aligned}$$

Y como para $n \geq k$:

$$\begin{aligned} \left| \left[\dots \left[|Q_n(c)|^2 + 3 \right]^2 + \dots + 3 \right]^2 + 3 \right| &\leq \left| \left[\dots \left[|Q_k(c)|^2 + 3 \right]^2 + \dots + 3 \right]^2 + 3 \right| \\ k - \text{ veces} & \qquad \qquad \qquad n - \text{ veces} \\ \implies T^k(|Q_n(c)|) &\leq T^n(|Q_k(c)|) \\ \implies |Q_{n+1}(c)|^{2^{k-1}} &\leq T^n(|Q_k(c)|) \leq T^n(3) \leq 4^{2^n} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\varphi(c)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |Q_{n+1}(c)|^{\frac{1}{2^n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[4^{\frac{2^n}{2^{k-1}}} \right]^{\frac{1}{2^n}} = (4)^{\frac{1}{2^{k-1}}} < 1 + \varepsilon \\ \implies 1 &< |\varphi(c)| < 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

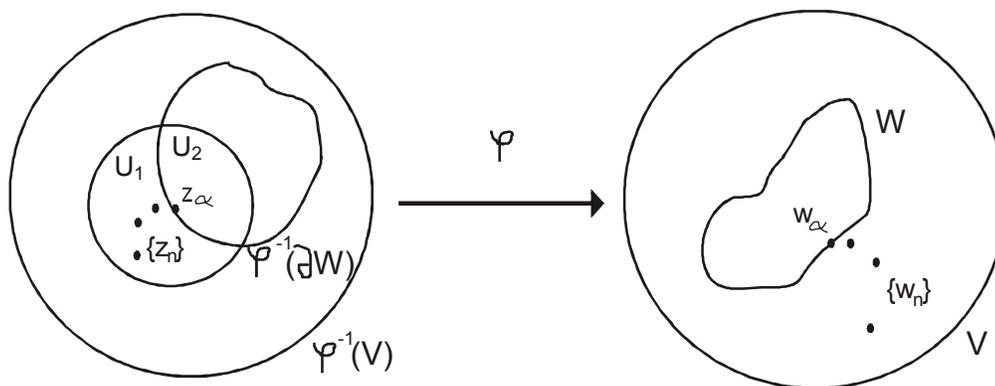


Figure 4-4:

Y por tanto $|\varphi(c)| \rightarrow 1$ cuando $c \rightarrow \partial M$.

Solo falta probar que $\varphi(C(M))$ es un conjunto simplemente conexo. Supongamos que no lo es. Sea W en $\{z : |z| > 1\}$ tal que $\nexists z$ en $C(M)$ tal que $\varphi(z) \in W$, donde sabemos que $\infty \notin W$. Sea V una vecindad en torno a W , y tomemos una sucesión $\{w_n\}$ en V que tienda a un punto w_α que pertenezca a ∂W , sea $\{z_n\}$ la imagen inversa de $\{w_n\}$, dado que la función es continua e inyectiva $\{z_n\}$ converge a un punto z_α en $\varphi^{-1}(V)$, por (10), este punto no pertenece a ∂M y por la continuidad de la función $\varphi(z_\alpha) = w_\alpha$, lo cual implica que $\partial W \not\subseteq W$. Si $Int(W) = \emptyset$, entonces $W = \emptyset$ y ya acabamos. Ahora consideremos el caso en que $Int(W) \neq \emptyset$, y tomemos una vecindad U en torno a un z_α . Esta vecindad la podemos ver como la unión ajena de tres conjuntos: $(U_1) \cup (U \cap \varphi^{-1}(\partial W)) \cup (U_2)$. Donde por continuidad se tiene que $\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \neq \emptyset$, lo cual rompe la inyectividad de la función. De hecho habría un dobléz en torno a $\varphi(U \cap \varphi^{-1}(\partial W))$ que también rompe la conformidad. Ver figura 4-4. Entonces $W = \emptyset$. Por lo que $\varphi(C(M))$ es simplemente conexa y por (10) es sobreyectiva.

Entonces φ es una función analítica y biyectiva, por lo que es un isomorfismo conforme de $C(M)$ a $\{z : |z| > 1\}$.

Y esto implica que el Conjunto de Mandelbrot es conexo.

■

Este resultado, aún cuando no ha sido tan sencillo probarlo, tal vez no sea tan impactante cuando vemos al Conjunto de Mandelbrot de manera global, como en la figura 4-5, la cual por

cierto no se ve tampoco tan normal, pero ¿qué pasa si nos vamos acercando a un punto de su frontera en particular? Veamos estos acercamientos por rectángulos en las figuras 4-6 a la 4-19.

(Una forma de hacer esto es graficando las $c \in \mathbb{C}$ tal que la norma de las órbitas atractoras de $P_c(z)$ en 0 sean menores o iguales que del círculo de radio 2 en n iteraciones, ver teorema 4.2.1. Esto dará aproximaciones exteriores a M conforme la n crezca).

Viendo estas imágenes hasta parece difícil de creer que el resultado expuesto arriba en unas cuantas páginas garanticen la conexidad en la infinita complejidad de este conjunto. Pero el punto que tomamos para aproximarnos no era "especial" ni mucho menos, cualquier punto en la frontera del conjunto de Mandelbrot, al aproximarse a él, presentará las mismas características de complejidad.

Por un lado al ir aproximándonos se van viendo cosas muy distintas, se trata de un fractal, pero es mucho más complejo que la simple autosemejanza, la cual también está presente, pues se encontrarán copias del Mandelbrot por toda su frontera, esto es denominado como cuasi-autosemejanza. De hecho presentará propiedades muy estrechas con los conjuntos de Julia de donde proviene.

Si ya los conjuntos de Julia parecían bastante complejos e impactantes, estos acercamientos a la frontera del Conjunto de Mandelbrot rebasan por mucho, el significado semántico de estos adjetivos. ¿Cómo describir a un conjunto como este? Parece que aquí, el significado del adjetivo "infinito" llega a un nivel muy, pero muy superior.

Por último mencionaremos a los rayos externos, una herramienta muy útil para estudiar al conjunto de Mandelbrot y a los conjuntos de Julia. El rayo externo con ángulo θ es la curva $R_\theta(t) = \varphi^{-1}(te^{2\pi i\theta})$, es decir la imagen inversa de los rayos que salen del origen con ángulo θ . Ver figura 4-20. Uno de los principales problemas sin resolver en la actualidad, es que no se sabe si todos los rayos aterrizan en el conjunto de Mandelbrot, excepto para ciertos casos, por ejemplo si θ es un ángulo racional.

Si el conjunto de Mandelbrot fuera localmente conexo, es decir si para cada punto $z \in M$ y cada conjunto abierto que contenga a z existiera un conjunto conexo abierto V tal que $z \in V \subset U$, todos los rayos aterrizarían en M , pero esto tampoco se sabe y es conocida como la conjetura de la conexidad local del Mandelbrot. Si todos los rayos externos aterrizaran en el Mandelbrot esto le daría cierta "solidez" al conjunto, dentro de toda la complejidad que tiene.

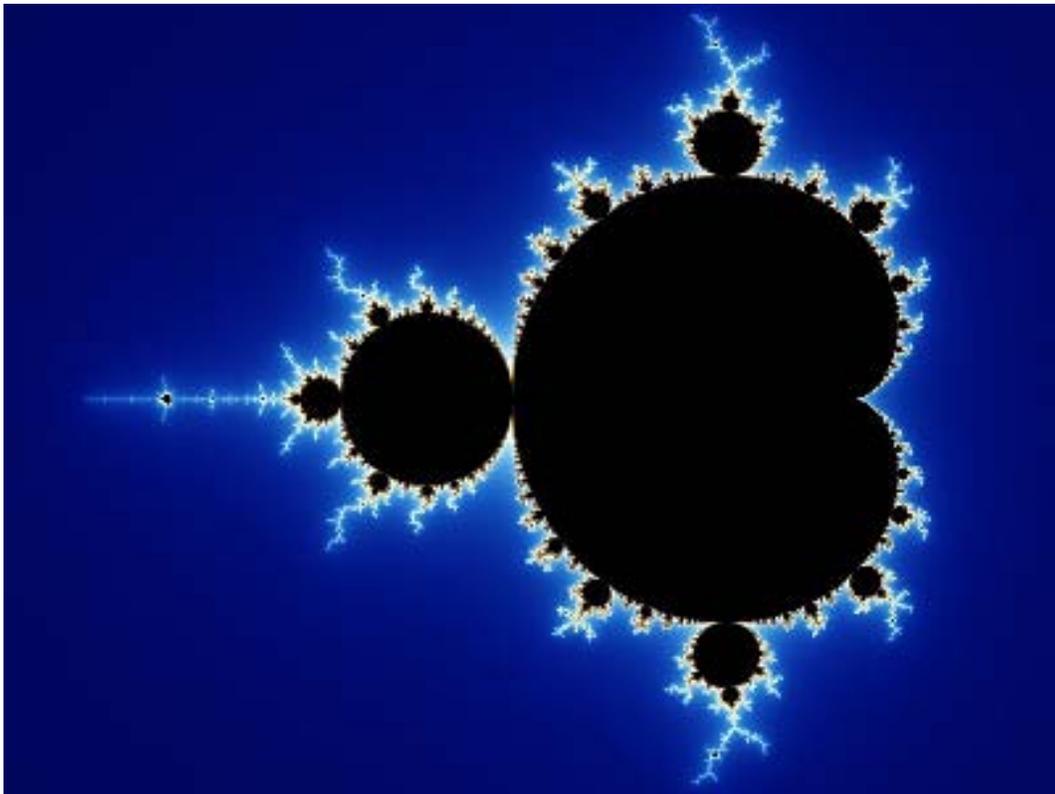


Figure 4-5:

Como se ha visto de manera aproximada, el Conjunto de Mandelbrot presenta una complejidad muy digna de intentar ser entendida. Todo el conjunto presenta un universo infinito en sí mismo con una variedad infinita de estructuras infinitas. ¿Es qué acaso, algún día, tengamos la capacidad de comprender totalmente al Conjunto de Mandelbrot o algo igualmente complejo?



Figure 4-6:

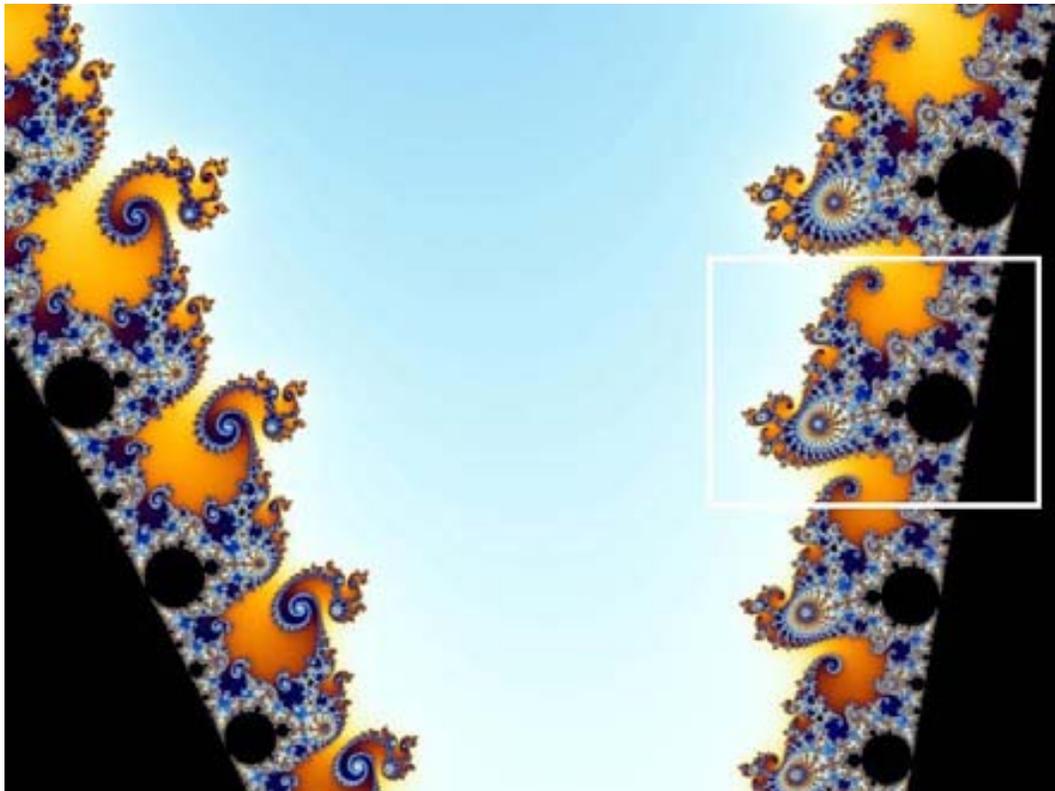


Figure 4-7:

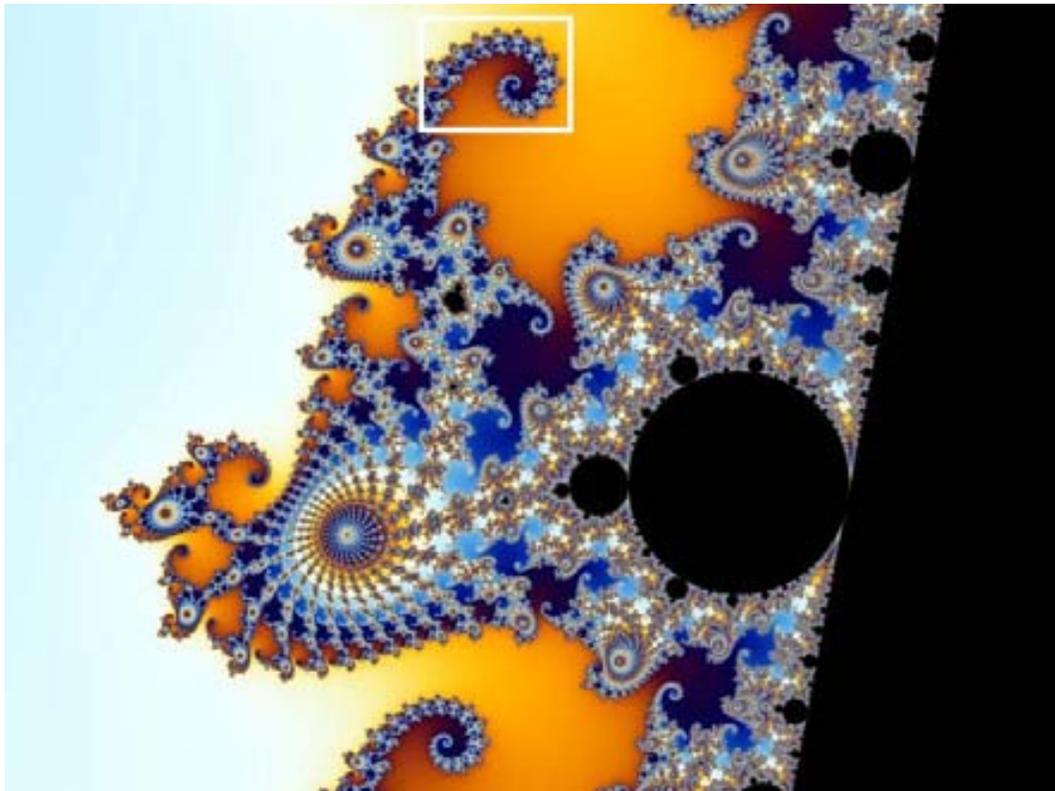


Figure 4-8:

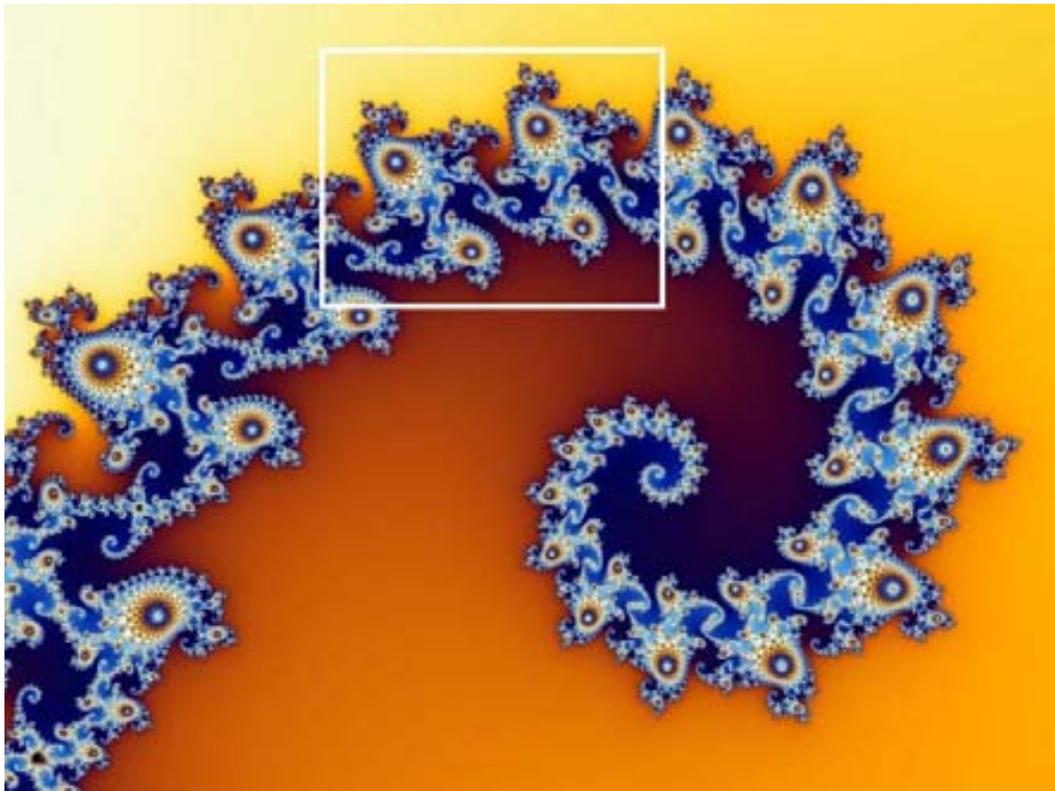


Figure 4-9:

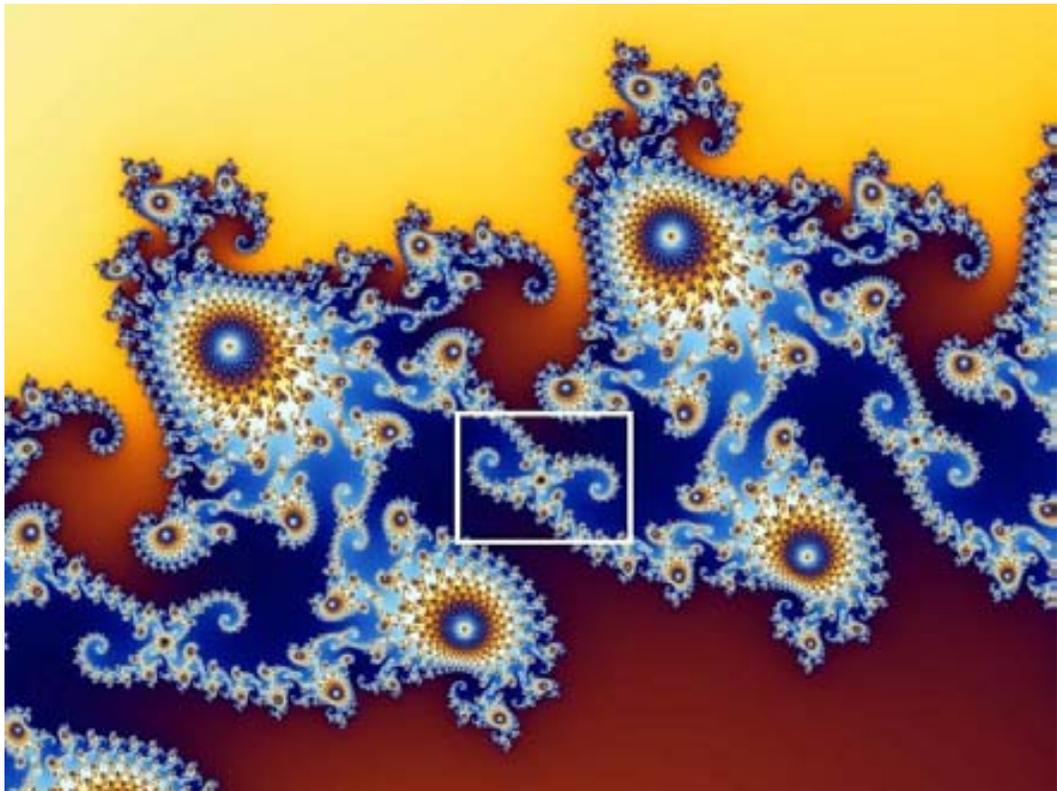


Figure 4-10:

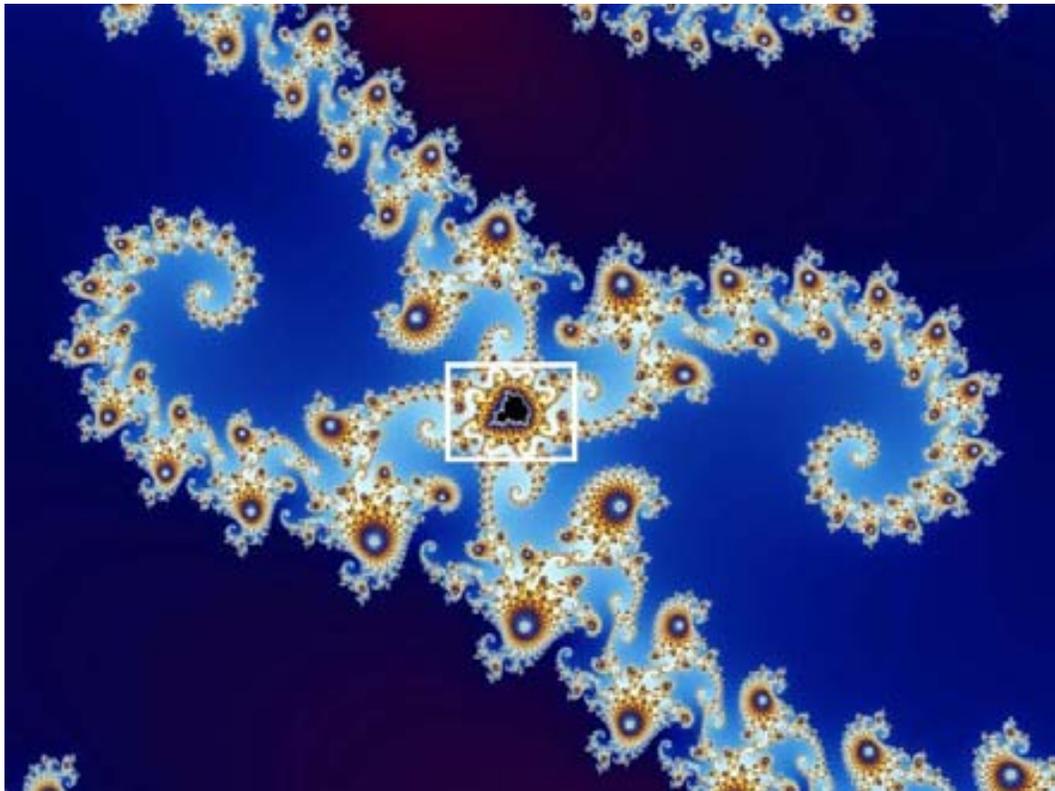


Figure 4-11:

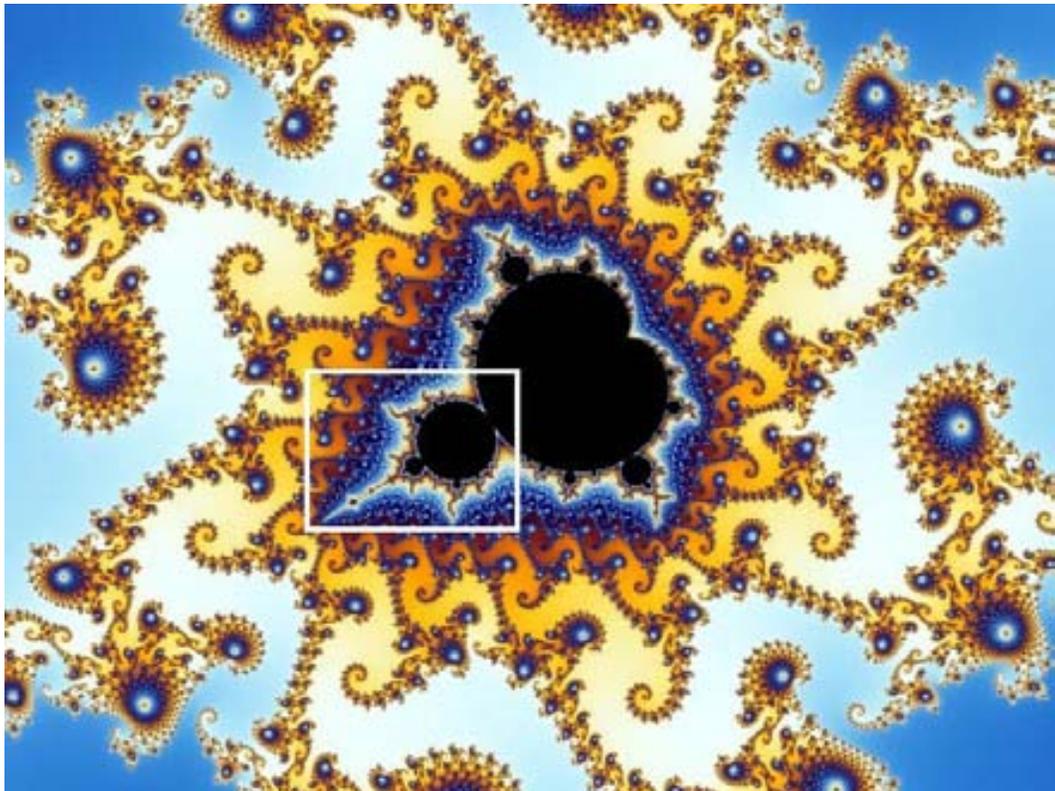


Figure 4-12:

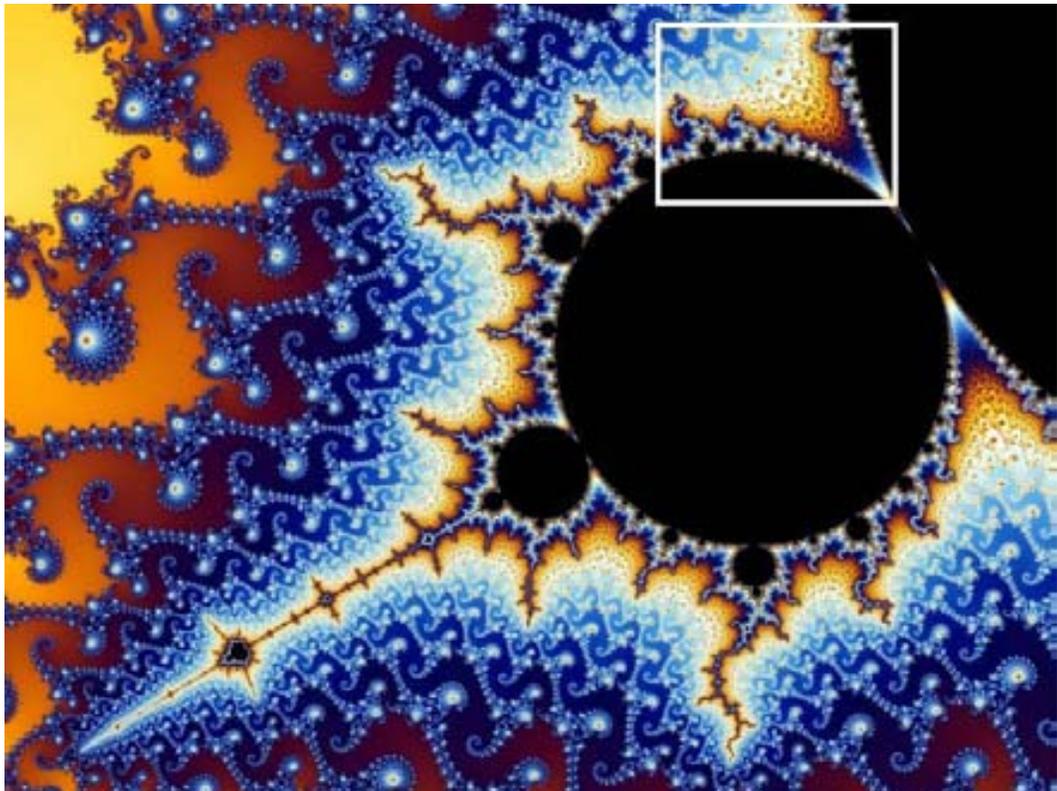


Figure 4-13:

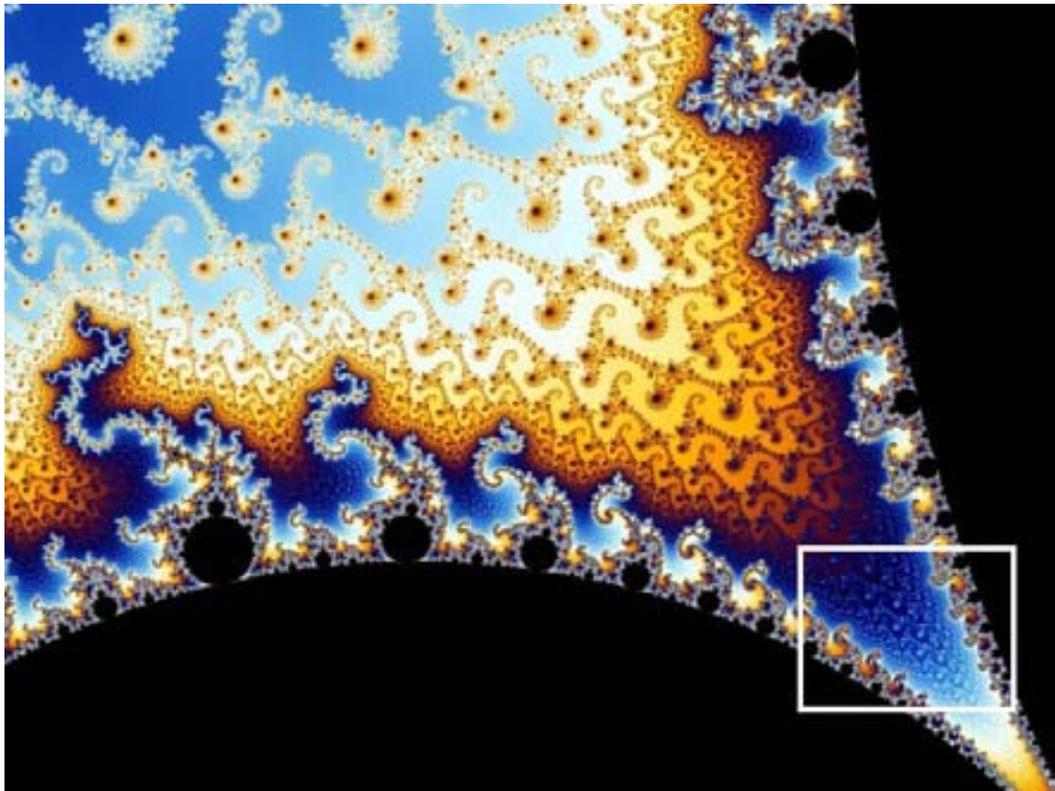


Figure 4-14:

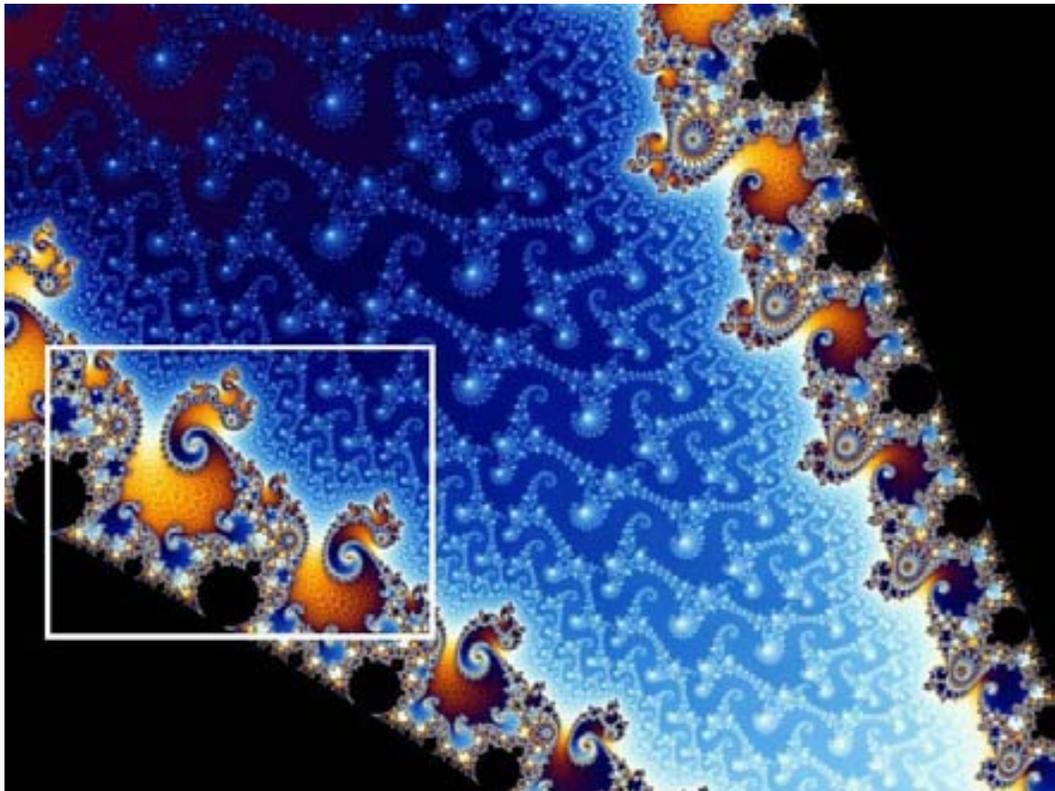


Figure 4-15:

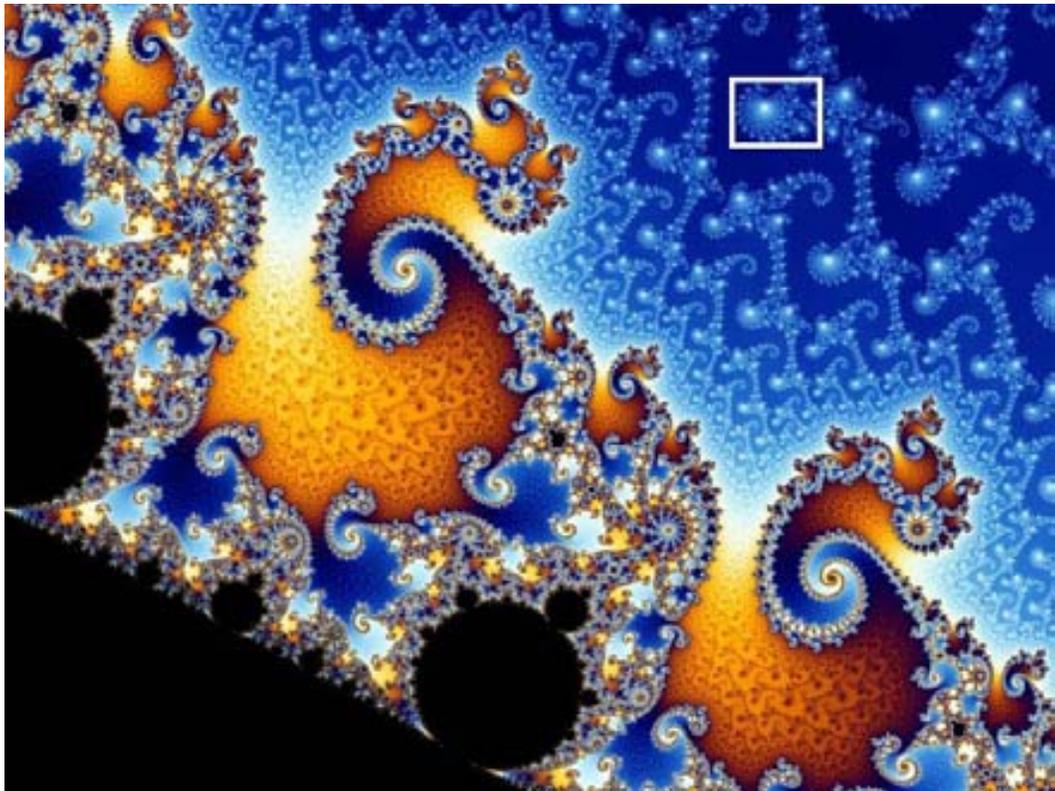


Figure 4-16:

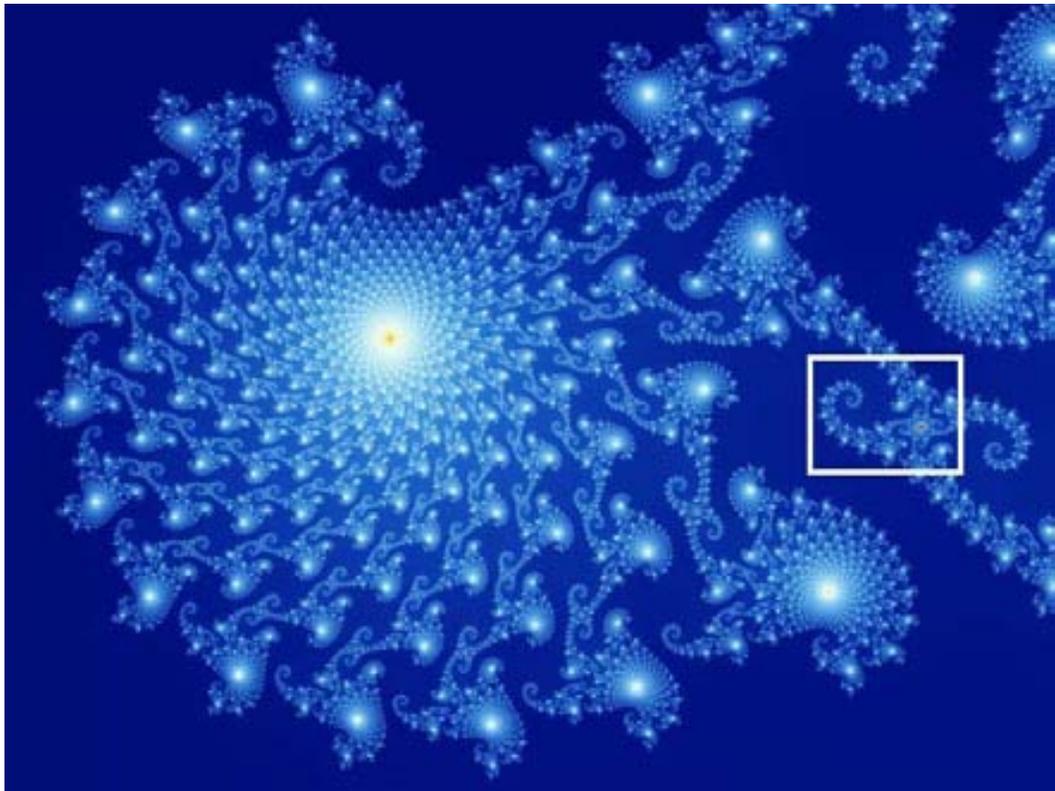


Figure 4-17:

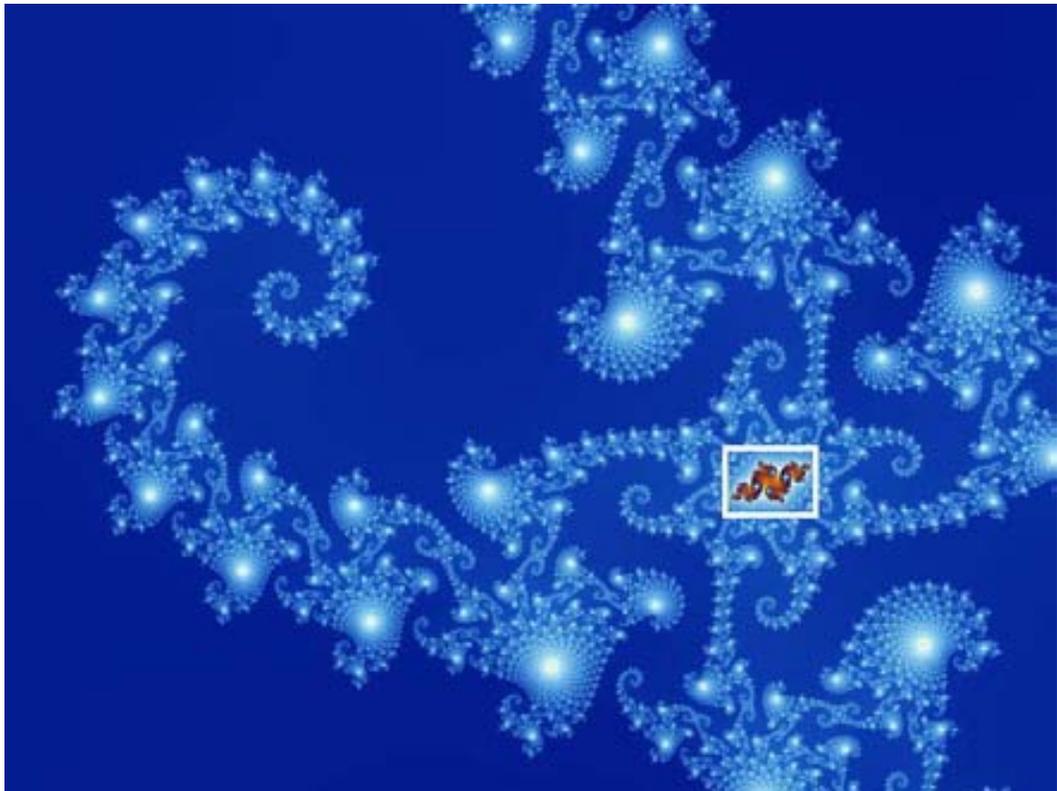


Figure 4-18:

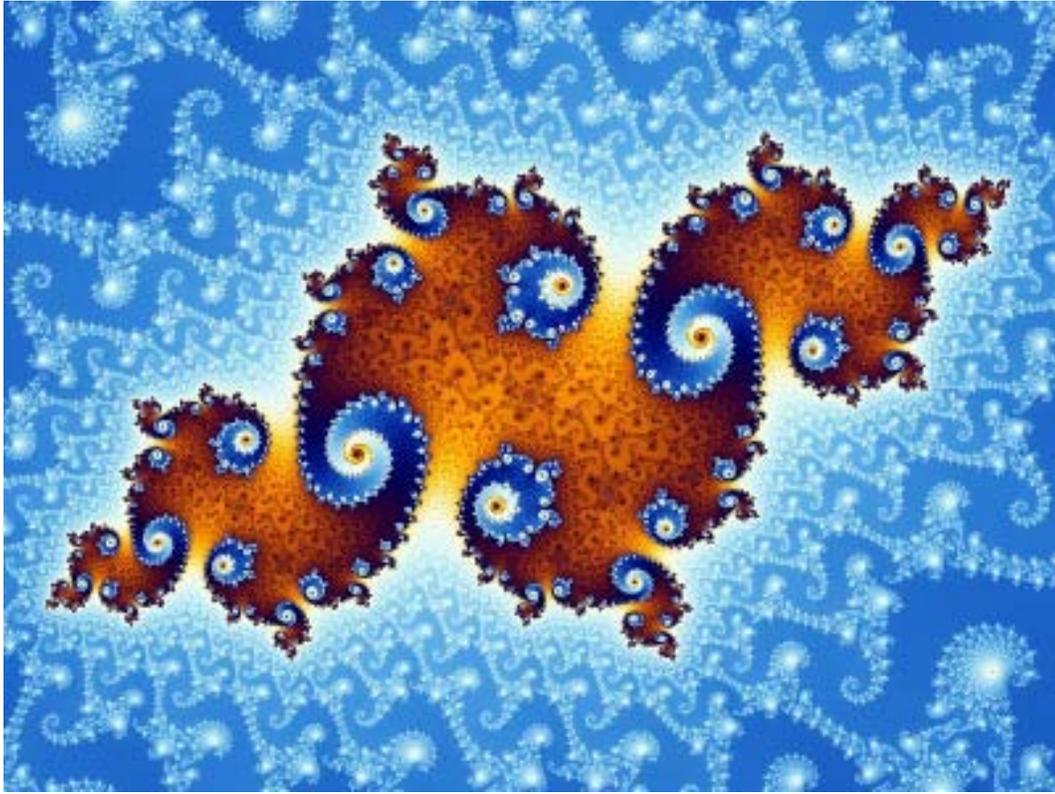


Figure 4-19:

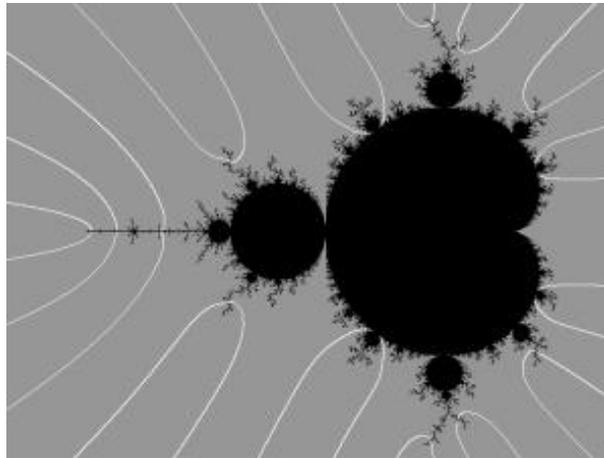


Figure 4-20:

Bibliografía

- [Ahlfors] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable* (Third Edition), Mc Graw Hill, Inc, 1979
- [Beardon] Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag New York, Inc, 1991
- [Carleson] Lennart Carleson y Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag New York, Inc, Universitext: Tracts in Mathematics, 1993
- [Conway] John B. Conway, *Functions of one Complex Variable I* (Second Edition), Graduate Texts in Mathematics 11, Springer-Verlag New York, Inc.
- [Douady] A. Douady y J. H. Hubbard, “Itération des polynômes quadratiques complexes”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 294, 1982, pp.123-126
- [Devaney1] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.,1989
- [Devaney2] Robert L. Devaney, “The Complex Dynamics of Quadratic Polynomials”, *Proceeding of Symposiy in Applied Mathematics Volume 49, Complex Dynamical Systems: The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia sets*, American Mathematical Society, 1994
- [Milnor1] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable* (Second Edition), Vieweg, 2000
- [Milnor2] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable* (Third Edition), Annals of Mathematics Studies, number 160, Princeton University Press, 2006
- [Needham] Tristan Needham, *Visual Complex Análisis*, Oxford University Press Inc., 1997
- [Santiago] Carisa Cano Figueroa y Santiago López de Medrano, *Notas de Variable Compleja II*, UNAM, 2003
- [Stein] Norbert Steinmetz, *Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993
- [Tan] Tan Lei, editor, *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, Lecture Note Series 274, Cambridge University Press 2000, 2000

