



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FLUJOS DE ACRECIÓN CON ROTACIÓN
HACIA AGUJEROS NEGROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

FÍSICO

P R E S E N T A :

EMILIO TEJEDA RODRÍGUEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TUTOR DE TESIS: DR. SERGIO MENDOZA RAMOS

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

Datos del alumno

Tejeda Rodríguez Emilio

Tel. 56680793

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

301502410

Tutor

Dr. Sergio Mendoza Ramos

Sinodal 1

Dr. Eugenio Ley Koo

Sinodal 2

Dr. William Henry Lee Alardin

Sinodal 3

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada

Sinodal 4

Dr. Sinhué Amos Refugio Haro Corzo

Datos del trabajo escrito

Flujos de acreción con rotación hacia agujeros negros

79 páginas

2008

Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la UNAM por la formación que recibí y a mis maestros por los excelentes cursos que tuve la oportunidad de llevar a lo largo de la carrera.

Agradezco a mi familia por el apoyo que siempre me ha brindado.

Agradezco a mi asesor Sergio Mendoza por presentarme un proyecto de tesis estimulante y por guiarme en el proceso de un trabajo de investigación. Por los comentarios enriquecedores y correcciones recibidas agradezco a Erick Nagel y a los sinodales de esta tesis Eugenio Ley Koo, William Lee, Jerónimo Cortez y Sinhué Haro.

Agradezco también el apoyo proporcionado por la biblioteca y el servicio de cómputo del Instituto de Astronomía en la realización de esta tesis de licenciatura, así como al apoyo económico proporcionado por DGAPA–UNAM (IN119203).

Índice general

| | |
|---|------------|
| Hoja de Datos del Jurado | III |
| Agradecimientos | V |
| Resumen | 1 |
| 1. Fenómenos de acreción | 3 |
| 2. Modelo de acreción de Ulrich | 7 |
| §2.1. Introducción | 7 |
| §2.2. Construcción del modelo de Ulrich | 9 |
| §2.3. Líneas de corriente y campo de densidad | 12 |
| 3. Acreción de una nube finita | 15 |
| §3.1. El modelo y el campo de velocidades | 16 |
| §3.2. Campo de densidad | 19 |
| §3.3. Disco de acreción | 20 |
| §3.4. Convergencia al modelo de Ulrich | 21 |
| §3.5. Líneas de flujo | 21 |
| §3.6. Relación con las observaciones | 27 |
| 4. Mecánica celeste alrededor de un agujero negro | 29 |
| §4.1. Ecuación geodésica y constantes de movimiento | 30 |
| §4.2. Potencial relativista | 33 |
| §4.3. Tipos de órbitas | 36 |
| §4.3.1. Órbitas ligadas | 38 |

| | |
|--|-----------|
| §4.3.2. Órbitas que llegan al origen de coordenadas I | 40 |
| §4.3.3. Órbitas abiertas | 41 |
| §4.3.4. Órbitas que llegan al origen de coordenadas II | 42 |
| 5. Acreción hacia un agujero negro | 45 |
| §5.1. El modelo y el campo de velocidad | 46 |
| §5.2. Campo de densidad | 51 |
| §5.3. Disco de acreción | 52 |
| §5.4. Modelo de Ulrich relativista | 55 |
| §5.5. Convergencia al modelo newtoniano | 58 |
| Conclusiones | 61 |
| Apéndice | 63 |
| §A. Funciones elípticas de Jacobi | 63 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Líneas de corriente. Proyección | 13 |
| 2.2. Líneas de corriente. Barrido | 13 |
| 2.3. Isocontornos de densidad | 14 |
| 2.4. Cortes de la densidad | 14 |
| 3.1. Líneas de corriente con $\mu = \text{cte}$ | 22 |
| 3.2. Líneas de corriente para $r_d = r_0/2$ | 23 |
| 3.3. Isocontornos de densidad | 24 |
| 3.4. Comparación entre flujos con $\nu = 0$ | 25 |
| 3.5. Distintos flujos de acreción con $\mu = 0$ | 26 |
| 3.6. Relación con las observaciones | 28 |
| 4.1. Potencial relativista | 36 |
| 4.2. Dependencia del potencial en el parámetro γ | 37 |
| 4.3. Órbita ligada | 40 |
| 4.4. Ejemplos de órbitas | 42 |
| 5.1. Líneas de corriente | 50 |
| 5.2. Radio del disco de acreción como función de ν | 53 |
| 5.3. Radio del disco de acreción como función de γ | 54 |
| 5.4. Dominio de variación de los parámetros | 55 |
| 5.5. Líneas de flujo para el modelo de Ulrich relativista | 58 |

Resumen

En la presente tesis se trabaja con el tema de la acreción de una nube de gas en rotación hacia un objeto compacto. En este tipo de fenómenos es común encontrarse con que el gas en acreción forma una estructura de disco alrededor del cuerpo central. El estudio de los discos de acreción es un tema relevante en astrofísica que se presenta en distintos escenarios a través de un amplio espectro de escalas de tiempo, longitud y energía. Entre las distintas aplicaciones tenemos: formación estelar al interior de nubes de gas y polvo, fuentes de rayos X, destellos de rayos γ y núcleos activos de galaxias. Los últimos tres fenómenos se encuentran entre los más energéticos conocidos en el universo y se piensa que son el resultado de la acreción de grandes cantidades de materia hacia agujeros negros. En el capítulo 1 de esta tesis se discute la relevancia de los procesos de acreción.

El primer modelo de un flujo de acreción con rotación fue propuesto por Ulrich en 1976. Ulrich consideró una nube de extensión infinita en rotación que es acretada hacia el potencial newtoniano producido por un cuerpo masivo. Este resultado constituye la base de un número importante de trabajos posteriores que estudian la formación, desarrollo y propiedades de los discos de acreción. En el capítulo 2 se hace una descripción detallada de este modelo, discutiendo sus principales características y deficiencias.

En el capítulo 3 se propone una extensión del modelo de Ulrich en la que se trabaja con una nube de tamaño finito. Como resultado se obtiene un modelo analítico con parámetros fácilmente ajustables para la descripción de una amplia variedad de fenómenos astrofísicos. Para algunos valores de estos parámetros se encuentra que, tanto las líneas de corriente como el campo de densidad obtenidos, varían sensiblemente de los resultados que surgen de aplicar el modelo tradicional de Ulrich.

Con el fin de generalizar el modelo propuesto en el capítulo 3 al caso relativista, en el capítulo 4 se estudia el movimiento de partículas de prueba bajo la influencia del potencial correspondiente a un espacio-tiempo de Schwarzschild. Finalmente, en el capítulo 5 se construye dicha generalización y se discuten sus propiedades. Como campos de aplicación para este modelo se tiene la acreción hacia estrellas de neutrones y agujeros negros.

Capítulo 1

Fenómenos de acreción

En astrofísica se le llama acreción al fenómeno en el cual una nube de gas y polvo es capturada dentro del pozo de potencial generado por alguna fuente compacta. Podemos hablar de flujos de acreción hacia estrellas, enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros.

Hoy en día se cree que la acreción es el mecanismo detrás de los fenómenos más energéticos conocidos en el universo, tales como fuentes de rayos X, explosiones de supernova (tipo Ia), núcleos activos de galaxias, colapsares y destellos de rayos γ .

Para hacernos una idea del orden de magnitud de la energía liberada en un proceso de acreción, pensemos en una partícula de prueba de masa m que es atraída hacia un potencial central newtoniano. Digamos que esta partícula parte de infinito en un estado de reposo con lo que su energía total (energía potencial más cinética) es igual a cero. De acuerdo a la mecánica clásica, cuando esta partícula de prueba llega a una distancia r del cuerpo masivo su energía potencial está dada por

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (1.1)$$

donde M es la masa del objeto central y G la constante de la gravitación universal. Dado que la energía total es constante a lo largo del movimiento de la partícula, necesariamente ésta ha ganado una energía cinética $K(r) = -V(r)$ de forma que la energía total siga sumando cero. En otras palabras, si v es la velocidad con la que se mueve la partícula a una distancia r del cuerpo central, entonces

$$K(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r}. \quad (1.2)$$

Supongamos ahora que un mecanismo externo es capaz de frenar por completo a la partícula a una distancia R de la fuente de potencial. Este mecanismo puede consistir en el encuentro con alguna nube de gas o incluso en la colisión con la propia superficie del cuerpo central. Si el mecanismo de frenado es totalmente eficiente tendremos que una fracción importante de la energía cinética que ha ganado la partícula en cuestión es convertida directamente en energía térmica. Esta energía contribuye a elevar la temperatura de los alrededores y, eventualmente, saldrá emitida en forma de radiación electromagnética.

En un escenario ideal, donde se esté alimentando con gas a una tasa de acreción \dot{m} (masa total inyectada por unidad de tiempo) directamente sobre la superficie de una estrella de radio R , tendremos que la luminosidad generada al frenar súbita y eficientemente a las partículas del mismo está dada por

$$L = \frac{1}{2}\dot{m}v^2 = \frac{GM\dot{m}}{R} = \frac{r_s}{2R}\dot{m}c^2 = \xi\dot{m}c^2 \quad (1.3)$$

donde $r_s := 2GM/c^2$ es el radio gravitacional del objeto central y c es la velocidad de la luz en el vacío. El parámetro $\xi := r_s/2R$ es el factor que mide la eficiencia de convertir masa en reposo a luminosidad.

Fenómenos como la fusión y la fisión nuclear son procesos donde la masa en reposo se transforma en radiación electromagnética y en energía térmica. Por ejemplo, en la cadena p-p (la principal vía de generación de energía nuclear para estrellas como nuestro sol) el valor del factor de eficiencia es $\xi \approx 7 \times 10^{-3}$ (Mendoza, 2003). En contraste, para un proceso de acreción hacia una estrella de neutrones este factor puede alcanzar un valor de $\xi \approx 0.1$; si en lugar de una estrella de neutrones tratamos con un agujero negro es posible alcanzar valores cercanos a $\xi = 0.4$ (Glendenning, 2000). A partir de aquí podemos ver que, a excepción de la aniquilación partícula antipartícula (donde $\xi = 1$), el fenómeno de acreción es el mecanismo de conversión de masa en reposo a energía luminosa más eficiente en el universo.

En una situación más realista el gas que es atraído hacia un objeto compacto poseerá cierto grado de momento angular. El resultado de la acreción de una nube de gas en rotación es la formación de una estructura de disco alrededor del cuerpo central (cf. Shapiro & Teukolsky (1983)). Sobre este disco se acumula material que adopta órbitas más o menos circulares, cada una con la velocidad kepleriana correspondiente. La diferencia de velocidad

entre anillos contiguos promueve la aparición de efectos viscosos, a partir de lo cual, las partículas del gas dentro del disco ceden momento angular hacia los anillos exteriores y se desplazan en espiral hacia el centro. De esta forma, en el disco se establece un flujo de material hacia el objeto central a expensas del transporte de momento angular hacia el extremo del disco. Como resultado de la migración de los elementos del gas hacia las regiones interiores del disco se producen esfuerzos viscosos entre las distintas capas del mismo. Esta fricción se traduce en energía térmica que sale finalmente como radiación proveniente de la cara superior e inferior del disco de acreción.

De lo dicho anteriormente, tenemos que el gas en un disco de acreción alrededor de una estrella de neutrones o de un agujero negro de masa estelar alcanza temperaturas tales ($\sim 10^7 K$) que es capaz de radiar en la frecuencia de los rayos X. Por su parte, la acreción hacia un agujero negro supermasivo¹ es el mecanismo responsable de la alta luminosidad de los núcleos activos de galaxias (Shapiro & Teukolsky, 1983; Glendenning, 2000; Hubeny et al., 2000).

En general, la descripción del flujo de acreción hacia un objeto compacto y del patrón de radiación emitido conlleva cálculos complejos. Esto se debe al gran número de elementos que intervienen en el estudio. Lo primero que debe de hacerse es determinar el grado de simetría que posee el flujo; por lo general, se tendrá un flujo tridimensional que varía con el tiempo. En algunos casos ideales se podrá simplificar el análisis tras suponer simetría esférica (unidimensional), cilíndrica (bidimensional) o bien una situación estacionaria. En relación a la geometría del flujo se tienen que determinar las condiciones de frontera tanto en la superficie de la estrella como lejos de ella, donde el gas se une con el medio interestelar.

A continuación nos encontramos con los factores que intervienen en el estudio hidrodinámico del gas en acreción. Entre ellos se tiene los detalles del transporte radiativo, esto es, la información acerca de cómo se calienta y enfría el gas. Este cálculo debe hacerse de forma autoconsistente puesto que la distribución de temperatura del gas depende del campo de radiación pero al mismo tiempo contribuye a éste.

Otro factor importante es la dependencia de la dinámica del gas en el campo magnético que surge de la interacción de las partículas del gas ionizado con los campos magnéticos producidos por algún agente externo, por el mismo gas en rotación y por el objeto central. Adicionalmente tenemos el papel de la presión de radiación (viento generado en la estrella) como un agente que se opone a la caída del gas. Por último está la contribución del campo

¹ $M \gtrsim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$, donde $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g es la masa del sol.

gravitacional del gas en acreción a su propia dinámica, esto es, la naturaleza autogravitante del gas.

Después de haber enumerado los distintos factores que deben tomarse en cuenta al hacer el análisis completo de un flujo de acreción, no es de sorprenderse que este problema haya sido resuelto de forma analítica para muy pocos casos y únicamente tras haber supuesto un buen número de simplificaciones. En el siguiente capítulo vamos a describir en detalle una de estas soluciones: el modelo de Ulrich (1976) que describe un flujo ideal de acreción con rotación.

Capítulo 2

Modelo de acreción de Ulrich

§2.1. Introducción

En 1952 Herman Bondi introdujo el primer modelo con simetría esférica del flujo de acreción hacia un objeto central. Bondi consideró una nube de gas infinita dentro de la cual se encuentra un objeto masivo y compacto cuyo campo gravitacional newtoniano domina sobre la autogravedad de la nube. Tras asumir un régimen estacionario, Bondi fue capaz de integrar las ecuaciones hidrodinámicas para obtener una descripción analítica del flujo. Con el tiempo este modelo se ha convertido en una pieza importante para entender diferentes procesos de acreción en el universo; usándose, por ejemplo, para estimar la tasa de acreción en sistemas dentro de un amplio rango de escalas, desde acreción estelar hasta acreción en cúmulos de galaxias (cf. Frank et al., 2002).

En 1976 Roger Ulrich modificó el modelo de acreción de Bondi al considerar una situación más realista donde la nube posee cierto grado de rotación; en su modelo la nube rota como un cuerpo rígido alrededor de un eje sobre el que se encuentra el objeto central. Las variables que describen el proceso de acreción tienen simetría cilíndrica.

El modelo de Ulrich considera un objeto central de masa M que se encuentra dentro de una nube de gas de extensión infinita. Lejos de la estrella la presión p_0 y la densidad ρ_0 del gas son constantes. El momento angular específico h de los elementos del gas en el ecuador de la nube tiene un valor de h_0 . El gas es inyectado con una tasa de acreción constante \dot{M} . Se asume un proceso de acreción estacionario lo suficientemente lento como para que la masa M del objeto central pueda considerarse constante. En lo que respecta al campo gravitatorio, se asume que la atracción generada por el cuerpo central es mucho

mayor que la autogravedad del gas y, en consecuencia, se desprecia el efecto de esta última sobre la trayectoria que siguen los elementos del gas en acreción.

La siguiente aproximación importante que hace el modelo es despreciar el efecto de los gradientes de presión y del cambio de la energía interna del gas conforme éste cae hacia el cuerpo central. Lejos del objeto central, siempre que la densidad y temperatura de la nube de gas sean suficientemente bajas, es de esperar que esta aproximación sea válida. Para las regiones próximas al origen, esta suposición será válida una vez que el flujo haya alcanzado una velocidad supersónica y que tanto el calentamiento debido a radiación como los efectos viscosos sean despreciables (Cassen & Moosman, 1981). Esta aproximación, donde el gas es considerado como un conjunto de partículas no interactuantes y cuyo movimiento es determinado por el campo gravitatorio de un objeto central, recibe el nombre de aproximación balística.

El modelo de Ulrich es el primer modelo de acreción que predice de manera natural la formación de un disco ecuatorial donde se acumula material de la nube. Cualitativamente podemos entender la formación de un disco de la siguiente manera. Dada la geometría del problema el flujo de acreción es simétrico respecto a la reflexión en el plano ecuatorial. Cuando las líneas de flujo provenientes del hemisferio norte se encuentran en dicho plano con aquellas provenientes del hemisferio sur, se genera un frente de ondas de choque. Es claro que el resultado de este encuentro involucra procesos turbulentos donde debe hacerse un análisis hidrodinámico completo y donde la aproximación balística ya no es válida. Sin embargo, por más complicado que sea este choque, a través de determinados procesos de transporte radiativo (que el modelo no toma en cuenta), la energía cinética asociada a la componente de la velocidad del flujo normal al plano ecuatorial sale del sistema en forma de radiación. En consecuencia, una partícula del gas que llega al plano ecuatorial pierde súbitamente la componente de su velocidad normal al plano y se ve obligada a seguir una nueva trayectoria dentro del mismo. Es entonces que surge en el ecuador una estructura de disco.

La forma en la que el modelo de Ulrich toma en cuenta el proceso antes descrito es seguir las líneas de corriente sólo hasta que se alcanza el plano ecuatorial. A partir de ahí los elementos de gas acretado salen del problema analizado y se incorporan a un disco infinitamente delgado. El modelo asume que la presencia de este disco no modifica el curso de los elementos de gas que siguen cayendo. A partir de esta observación queda claro el porqué el modelo de Ulrich se ha usado para obtener las condiciones iniciales en simulaciones numéricas que tratan con la formación y posterior evolución del disco de

acreción (cf. Lin & Pringle, 1990; Stahler et al., 1994; Nagel, 2007).

El modelo de Ulrich fue originalmente propuesto para dar cuenta de las observaciones de un tipo de estrellas que reciben el nombre genérico de T Tauri. Éstas son estrellas de formación reciente que apenas comienzan a disipar el gas de la nube que las originó. Parte de este gas forma un disco de acreción alrededor de la nueva estrella. El material que es acretado dentro del disco es responsable en gran medida de la luminosidad y del espectro de emisión de estas fuentes.

Para hacernos una idea de la escala sobre la cual esperamos encontrar un disco de acreción consideremos lo siguiente. Debido a que el momento angular del flujo de acreción se conserva, entonces debe cumplirse que a partir de cierto momento la fuerza centrífuga (h^2/r^3) se equilibra con la fuerza gravitacional (GM/r^2). Este equilibrio se alcanza en el punto $r_u = h^2/GM$, en el cual un disco con este radio se forma en el plano ecuatorial.

§2.2. Construcción del modelo de Ulrich

Consideremos un elemento de fluido que forma parte de la nube y que comienza a ser acretado desde infinito. Llamemos θ_0 al ángulo polar que marca su posición inicial. A partir de la distribución de momento angular que describe la rotación de la superficie de una esfera rígida, tenemos que el momento angular específico h de este elemento de fluido está dado por

$$h = h_0 \sin \theta_0. \quad (2.1)$$

Dentro de la aproximación balística tanto el momento angular como la energía total de cada partícula del gas son constantes de movimiento. La energía total por unidad de masa está dada por

$$E = \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = \text{cte.} \quad (2.2)$$

Ahora bien, en el modelo de Ulrich se considera que las partículas comienzan su viaje desde infinito con velocidad radial nula. De esta manera, y como h_0 es una cantidad finita, la energía específica es exactamente cero para todos los elementos del gas.

Del problema de Kepler de la mecánica no-relativista (Landau & Lifshitz, 1989), sabemos que la órbita de la partícula está restringida a un plano. En el caso de energía total igual a cero la órbita corresponde a una parábola. Además, si φ es el ángulo medido sobre

dicho plano respecto al origen entre la posición inicial de la partícula y su posición en r , la ecuación de la órbita es

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad (2.3)$$

donde,

$$p = \frac{h^2}{GM} \quad (2.4)$$

es el lado recto de una parábola cuyo foco coincide con la posición del cuerpo central. Sustituyendo la ec. (2.1) en la ec. (2.4) llegamos a

$$p = r_u \sin^2 \theta_0. \quad (2.5)$$

donde $r_u := h_0^2/GM$ que, como veremos más adelante, corresponde al radio del disco de acreción que se forma en el ecuador.

Hasta el momento hemos visto cómo escribir a r como una función del ángulo azimutal φ en el plano de la órbita. Fijémonos en una trayectoria particular con posición angular inicial en (θ_0, ϕ_0) . Llamemos \mathbf{S} al sistema de referencia cuyo ecuador coincide con el plano de la trayectoria en cuestión, esto es, con coordenadas $(r, \vartheta = \pi/2, \varphi)$. Ahora procederemos a efectuar un par de rotaciones con el propósito de obtener una descripción en términos del marco de referencia general \mathbf{R} con coordenadas (r, θ, ϕ) y cuyo eje polar coincide con el eje de rotación de la nube.

Para relacionar a \mathbf{R} con \mathbf{S} primero hacemos una rotación en ϕ_0 sobre el eje $z_{\mathbf{R}}$. Con esto permitimos que la partícula provenga de cualquier dirección inicial. Después hacemos una segunda rotación sobre el eje $y_{\mathbf{R}}$ resultante en un ángulo de $\pi/2 - \theta_0$ con lo que llegamos al marco de referencia orbital \mathbf{S} . Estas dos operaciones conducen a las siguientes relaciones entre ángulos

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}, \quad \cos(\phi - \phi_0) = \frac{\tan \theta_0}{\tan \theta}, \quad (2.6)$$

donde el ángulo φ_0 es aquel para el cual $r(\varphi_0) = r_0$. Como en el presente caso tenemos $r_0 = \infty$, obtenemos $\varphi_0 = 0$. La primera de estas relaciones permite encontrar una expresión para las líneas de corriente en la que la simetría cilíndrica del problema se hace evidente puesto que no intervienen los ángulos ϕ y φ .

Antes de dar la solución de Ulrich, reescribamos al problema en un lenguaje adimensional mediante las siguientes sustituciones

$$\frac{r}{r_u} \rightarrow r, \quad \frac{v_i}{v_u} \rightarrow v_i \quad (i = r, \theta, \phi), \quad \frac{\rho}{\rho_u} \rightarrow \rho, \quad (2.7)$$

donde la velocidad v_u y la densidad ρ_u están definidas como

$$v_u := \left(\frac{GM}{r_u} \right)^{1/2}, \quad \rho_u := \frac{\dot{M}}{4\pi v_u r_u^2}, \quad (2.8)$$

la velocidad v_u corresponde a la de una partícula que sigue una trayectoria circular de radio r_u bajo la influencia de un campo central newtoniano.

Las soluciones analíticas para las líneas de corriente, el campo de velocidad v_i ($i = r, \theta, \phi$) y la densidad ρ para un flujo de acreción con rotación están dadas por (Ulrich, 1976)

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}}, \quad (2.9)$$

$$v_\phi = \frac{\sin^2 \theta_0}{r \sin \theta}, \quad (2.10)$$

$$v_\theta = \frac{\sin \theta_0}{r \sin \theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$v_r = -\frac{\sin \theta_0}{r} \left(\frac{\cos \theta_0 + \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

$$\rho = \frac{\sin \theta_0}{r^2} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{3 \cos^2 \theta_0 - 1}{r} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

La ec. (2.9) se encuentra al sustituir la primera relación entre ángulos dada en la ec. (2.6) dentro de la ec. (2.3). La ec. (2.10) se sigue directamente de la conservación del momento angular. Para obtener la ec. (2.11) se deriva la segunda relación dada en la ec. (2.6). Para la ec. (2.12) se usa la ecuación de conservación de energía. Por último, la ec. (2.13) se obtiene a partir de la ecuación de continuidad.

Cada línea de corriente queda determinada unívocamente por el par de coordenadas angulares θ_0, ϕ_0 . No obstante, también pueden utilizarse a r y θ_0 como variables inde-

pendientes para encontrar los campos de velocidades y de densidad. Al fijar θ_0 nos colocamos sobre una línea de corriente representativa de todos aquellos elementos de fluido que comienzan su viaje desde el paralelo que resulta de la intersección del cono $\theta = \theta_0$ con la superficie de la esfera de radio infinito. Después, al ir disminuyendo en r desde ∞ vamos descendiendo a lo largo de dicha línea de flujo hasta llegar al plano ecuatorial. En cada punto (r, θ_0) se encuentra θ a través de la ec. (2.9) y de esta manera es posible evaluar el resto de las cantidades descritas por las ecs. (2.12) - (2.13).

§2.3. Líneas de corriente y campo de densidad

En la Figura 2.1 se muestra una proyección de las líneas de corriente provenientes de un meridiano fijo sobre el cascarón esférico inicial situado en infinito. En otras palabras, estas líneas de flujo comparten el ángulo ϕ_0 inicial. La proyección en esta figura está hecha sobre el plano perpendicular a la dirección original, esto es, sobre el plano dado en coordenadas esféricas por $\phi = \phi_0 + \pi/2$.

En la Figura 2.2 se presentan las mismas líneas de corriente pero bajo una construcción diferente. En este caso se toma la misma familia de líneas de flujo pero ahora la gráfica se construye al barrer el plano $\phi = \text{cte}$ desde la posición ϕ_0 hasta $\phi_0 + \pi/2$. En este momento la diferencia entre estas dos figuras parece irrelevante, sin embargo, en la siguiente sección veremos que el segundo método descrito para presentar las líneas de corriente es más adecuado que el primero ya que, en ciertos casos, éste presenta intersecciones falsas entre las distintas líneas de corriente producto sólo de la proyección realizada.

Tanto la Figura 2.1 como la Figura 2.2 son independientes del ángulo ϕ_0 escogido, poniéndose así de manifiesto la simetría cilíndrica del problema con el que tratamos.

En estas figuras también podemos ver que cuando $\theta_0 \rightarrow 0$ las componentes polar y azimutal de la velocidad se anulan, con lo cual las líneas de corriente tienden a hacerse paralelas al eje de rotación.

De sustituir $\theta = \pi/2$ en la ec. (2.9) obtenemos la distancia $r = \sin^2 \theta_0$ a la cual llega cada línea de corriente al plano ecuatorial. Luego, al sustituir este resultado dentro de la ec. (2.13) encontramos la siguiente expresión para el perfil de densidad sobre el disco de acreción

$$\rho = \frac{1}{2 \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0}. \quad (2.14)$$

A partir de esta última expresión vemos que la densidad es singular en dos puntos: $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/2$ que corresponden al origen y al borde del disco ($\theta_0 = \pi/2$, $r = 1$) respectivamente. Este último comportamiento se debe a haber considerado un disco infinitamente delgado.

En la Figuras 2.3 y 2.4 se muestra el logaritmo de la densidad. En ambas figuras podemos observar la divergencia de la densidad en los puntos antes señalados.

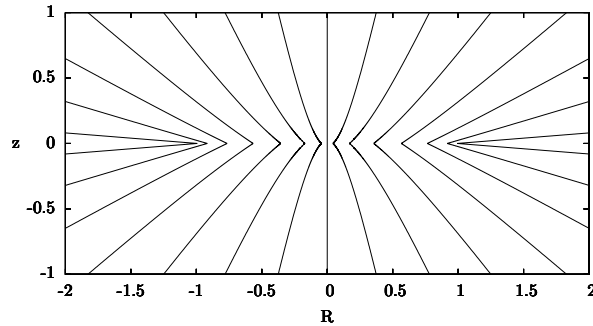


Figura 2.1: Líneas de corriente para el flujo de acreción del modelo de Ulrich. Se presenta una proyección de las trayectorias de los elementos de fluido provenientes de un mismo meridiano (mismo ϕ_0) sobre el plano normal a esta dirección. En el modelo las líneas de corriente colisionan con su contraparte simétrica al llegar al plano ecuatorial de manera tal que la componente de la velocidad en dirección ortogonal a dicho plano se termaliza. Las partículas quedan rotando alrededor del eje z por conservación de momento angular formándose así un disco. Las longitudes están medidas en unidades de r_u .

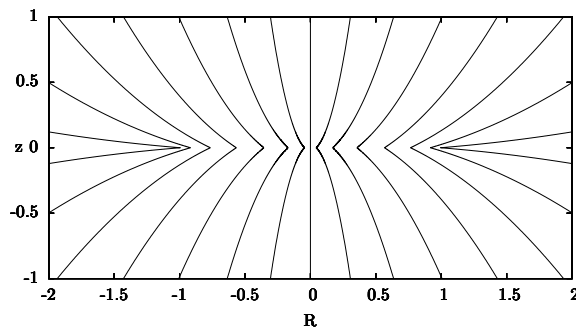


Figura 2.2: Se presenta el mismo flujo que en la figura anterior sólo que en este caso el gráfico se genera no mediante una proyección sino a través del barrido de un plano ortogonal al ecuador que, fijado en el eje polar, barre desde $\phi = \phi_0$ hasta $\phi = \phi_0 + \pi/2$ a la familia de líneas de corriente provenientes de $\phi = \phi_0$. Las longitudes están medidas en unidades de r_u .

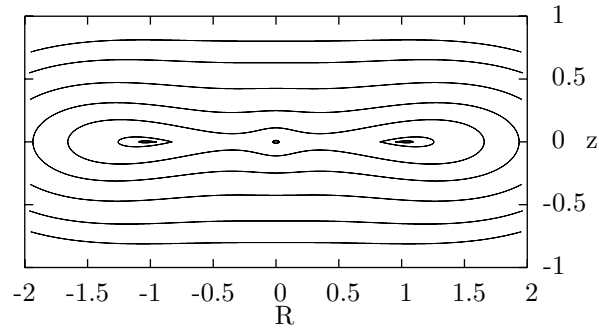


Figura 2.3: Se grafican isocontornos del logaritmo de la densidad para el modelo de Ulrich (ver ec. (2.13)) para los valores $\rho = -0.55, -0.47, -0.35, -0.2, 0.0, 0.5, 1.0$. Obsérvese que la densidad crece conforme nos acercamos al ecuador de manera que podemos identificar una estructura con forma de disco. Las longitudes están medidas en unidades del radio del disco r_u y la densidad en unidades de ρ_u .

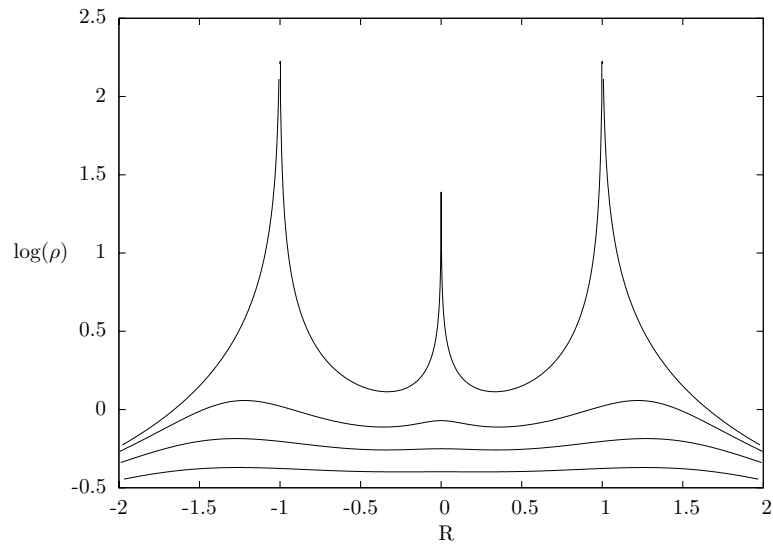


Figura 2.4: Se grafican cortes del logaritmo de la densidad (ver ec. (2.13)) para los valores de $z = 0, 0.15, 0.3, 0.5$. Los tres puntos de divergencia en el corte $z = 0$ son evidentes. Las longitudes están medidas en unidades de r_u y la densidad en unidades de ρ_u .

Capítulo 3

Acreción de una nube finita

En el capítulo anterior se introdujo el modelo de Ulrich (1976), se detallaron las hipótesis sobre las cuales se sustenta y se discutieron algunas de sus limitaciones. Entre sus desventajas se encuentra que:

- Se hace un estudio balístico y no hidrodinámico del flujo de acreción.
- Se asume un alto grado de simetría en las condiciones iniciales.
- Supone una nube inicial de radio infinito.
- Asume una velocidad radial inicial nula.¹

De estas cuatro desventajas sólo las dos últimas pueden ser sobrellevadas fácilmente sin perder la posibilidad de obtener una solución analítica al problema. El modelo que se propone en este capítulo representa una generalización del modelo de Ulrich en la que se extiende el estudio a un flujo de acreción desde una nube de gas de extensión finita con una velocidad inicial no necesariamente nula. No obstante, se mantendrán como suposiciones que el flujo ha alcanzado un régimen estacionario y que la masa del objeto central se mantiene constante. Trabajaremos además dentro de la aproximación balística.

Partiendo de estas suposiciones se construye la solución analítica de un flujo cilíndricamente simétrico que predice la existencia de un disco de acreción alrededor del objeto

¹Esta característica junto con un tamaño finito de la nube original implican una densidad inicial ρ_0 infinita pues, de acuerdo a la ec. (3.1), si la tasa de acreción \dot{M} es una constante, entonces $v_{r_0} \rightarrow 0$ implica que la densidad diverge en el borde de la nube.

central. Tanto el campo de velocidades como de densidad varían sensiblemente de la solución dada por Ulrich para valores de los parámetros con aplicación a sistemas astrofísicos. También se muestra que las trayectorias no son todas parabólicas sino que pueden ser cualquier sección cónica y, una vez que las condiciones de frontera han sido seleccionadas, pueden ser de diferente tipo para cada elemento de fluido.

Como justificación a esta extensión del modelo de Ulrich podemos resaltar que en muchas de las situaciones astrofísicas en las que este modelo ha sido utilizado (cf. Cassen & Moosman (1981); Mendoza et al. (2004)) se ha dado por hecho que éste es válido a pesar de que el análisis sea aplicado a una nube de gas finita y no infinita. La modificación de las condiciones de frontera conduce a un modelo más realista con aplicaciones a una amplia variedad de problemas de acreción. En principio, esta extensión del modelo puede modificar los resultados de un buen número de trabajos que tratan con distintas situaciones astrofísicas (cf. Ulrich (1976); Lin & Pringle (1990); Stahler et al. (1994); Mendoza et al. (2004); Nagel (2007)).

Este modelo tiene como principal campo de aplicación el estudio de la formación estelar en regiones donde una nube de gas colapsa bajo la acción de distintos tipos de mecanismos externos. Ejemplos de agentes externos son la eyección de material estelar en la forma de vientos o de explosiones de supernova así como el frente de radiación ionizante proveniente de una estrella. Cada uno de estos mecanismos establecerá condiciones de frontera particulares para el colapso de la nube de gas que forma a la estrella.

§3.1. El modelo y el campo de velocidades

Consideremos una nube de gas esféricamente simétrica y un radio característico r_0 a partir del cual el material de la nube es acregado de forma estacionaria hacia un objeto masivo. Por comodidad tomemos la posición de este objeto como el origen de un sistema de coordenadas esféricas donde r , θ , ϕ son la coordenada radial, el ángulo polar y el azimutal respectivamente. Supongamos que los elementos de fluido que componen al cascarón esférico situado en r_0 siguen un movimiento de cuerpo rígido en la dirección del ángulo azimutal, de forma tal que el momento angular total de la nube de gas apunta en la dirección del eje polar. Adicionalmente, los elementos de fluido sobre la superficie de la esfera de gas tienen una componente de velocidad radial constante v_{r_0} así como una densidad ρ_0 también constante.

Puesto que el gas está siendo acregado desde r_0 en forma estacionaria, la tasa de acreción

\dot{M} evaluada sobre cualquier esfera de radio $r < r_0$ es constante y está dada por

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho_0 v_{r_0}. \quad (3.1)$$

Una partícula del gas situada en (r_0, θ_0, ϕ_0) posee un momento angular específico h dado por

$$h = h_0 \sin \theta_0. \quad (3.2)$$

Tal como en el capítulo anterior tenemos que tanto la energía total como el momento angular son constantes de movimiento a lo largo de cada trayectoria. La energía total específica E está dada por

$$E = \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_{r_0}^2 + \frac{1}{2}\frac{h_0^2 \sin^2 \theta_0}{r_0^2} - \frac{GM}{r_0}. \quad (3.3)$$

Introduzcamos ahora dos parámetros adimensionales μ y ν definidos como

$$\mu^2 := \frac{h_0^2}{r_0^2 E_u} = \frac{r_u^2}{r_0^2}, \quad \nu^2 := \frac{v_{r_0}^2}{E_u}, \quad (3.4)$$

con $r_u = h_0^2/GM$, el radio del disco en el modelo de Ulrich y $E_u = GM/r_u$ la energía potencial específica de una partícula de fluido situada en r_u . El parámetro μ incorpora la hipótesis de una nube finita de forma que al considerar $\mu \rightarrow 0$ se tiene $r_0 \rightarrow \infty$. Por su parte, con el parámetro ν se introduce la posibilidad de una velocidad radial inicial diferente de cero. Al tomar $\mu = 0$ y $\nu = 0$ debe de recuperarse el modelo de Ulrich.

Usando estos parámetros, la ec. (3.3) se reescribe en forma adimensional como

$$\varepsilon = \nu^2 + \mu^2 \sin^2 \theta_0 - 2\mu, \quad (3.5)$$

donde la energía adimensional ε está dada por $\varepsilon := 2E/E_u$.

De la solución al problema de Kepler sabemos que la trayectoria de cada partícula de fluido está contenida en un plano y es descrita por una sección cónica; el origen de coordenadas, donde se encuentra el cuerpo central, representa uno de los focos de dicha curva. Definamos la posición de la partícula sobre el plano de la órbita por medio del ángulo azimutal φ , el cual en la posición inicial tiene el valor φ_0 , es decir, $r(\varphi_0) = r_0$. La ecuación para la trayectoria de cada elemento de fluido es (Landau & Lifshitz, 1989)

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - e \cos \varphi}, \quad (3.6)$$

donde la distancia está escalada en unidades de r_u y e es la excentricidad de la órbita definida por

$$e = \sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 \theta_0}. \quad (3.7)$$

Efectuando las mismas rotaciones descritas en la sección §2.2 se obtienen las siguientes expresiones que relacionan a los ángulos φ , φ_0 , θ , θ_0 , ϕ y ϕ_0 :

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}, \quad \cos(\phi - \phi_0) = \frac{\tan \theta_0}{\tan \theta}. \quad (3.8)$$

Usando la ec. (3.8) para reescribir a la ec. (3.6) se obtiene que

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - e \cos \zeta}, \quad (3.9)$$

donde

$$\zeta = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) + \varphi_0. \quad (3.10)$$

Por otra parte, usando las condiciones de frontera se encuentra la siguiente relación para el ángulo φ_0

$$e \sin \varphi_0 = \nu \sin \theta_0. \quad (3.11)$$

La ec. (3.9) es la expresión para las líneas de corriente. En lo que respecta al campo de velocidades empezamos con v_ϕ . Usando la conservación del momento angular se tiene

$$v_\phi = r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} = \frac{h \sin \theta_0}{r \sin \theta}, \quad (3.12)$$

o bien, en forma adimensional usando a $v_u = GM/h_0$ como unidad para medir la velocidad,

$$v_\phi = \frac{\sin^2 \theta_0}{r \sin \theta}. \quad (3.13)$$

Una vez que encontramos v_ϕ , las componentes v_θ y v_r se obtienen de las siguientes relaciones

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi} \frac{v_\phi}{\sin \theta}, \quad v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{v_\theta}{r}. \quad (3.14)$$

Usando estas identidades junto con la ecs. (3.2), (3.8) y (3.9) se llega a

$$v_\theta = \frac{\sin \theta_0}{r \sin \theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{1/2}, \quad (3.15)$$

$$v_r = -\frac{e \sin \theta_0 \sin \zeta}{r (1 - e \cos \zeta)}. \quad (3.16)$$

§3.2. Campo de densidad

Para encontrar una expresión del campo de densidad, partimos de la ecuación de continuidad en una situación estacionaria

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.17)$$

Tomemos un volumen de integración consistente en un “tubo” construido de manera tal que su superficie lateral está limitada por líneas de corriente mientras que sus tapas por secciones esféricas, la superior a $r = 1/\mu = r_0/r_u$ y la inferior a cualquier distancia r tal que $0 < r < 1/\mu$. Integrar a la ec. (3.17) sobre el volumen descrito resulta en

$$\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \Big|_{r=1/\mu} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \Big|_r. \quad (3.18)$$

Tomando en cuenta que el elemento de área diferencial está dado por

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r + r \sin \theta dr d\phi \mathbf{e}_\theta + r dr d\theta \mathbf{e}_\phi, \quad (3.19)$$

la ec.(3.18) se transforma en

$$\sin \theta_0 d\theta_0 d\phi_0 = -\rho v_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (3.20)$$

donde la densidad se ha medido en unidades de ρ_u de forma tal que $(\rho_0/\rho_u)\nu/\mu^2 = 1$. Recurriendo a la simetría de las cantidades involucradas en esta ecuación respecto al ángulo azimutal podemos integrar a la ec. (3.20) sobre ϕ desde 0 hasta 2π y al fin obtener

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left[-v_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right)_r \right]^{-1}. \quad (3.21)$$

Por otro lado, a partir de la ec. (3.9), se sigue que

$$-v_r \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right)_r = \frac{1}{\sin \theta_0} \left\{ \left(1 + \frac{3 \cos^2 \theta_0 - 1}{r} - 2\mu \cos \theta_0 \cos \theta \right) \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0} \right)^{1/2} + \frac{\nu}{\sin \theta_0} (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_0) \right\}. \quad (3.22)$$

Al substituir a las ec. (3.22) y (3.16) dentro de ec. (3.21) llegamos al campo de densidad de partículas requerido

$$\rho = \frac{\sin \theta_0}{r^2} \left\{ \left(1 + \frac{3 \cos^2 \theta_0 - 1}{r} - 2\mu \cos \theta_0 \cos \theta \right) \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0} \right)^{1/2} + \frac{\nu}{\sin \theta_0} (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_0) \right\}^{-1}. \quad (3.23)$$

En este caso tenemos que el perfil de densidad sobre el plano ecuatorial está descrito por

$$\rho = \frac{(1 + \nu \sin \theta_0)^2}{\sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 (2 + \nu \sin \theta_0)}, \quad (3.24)$$

de donde vemos que el origen y el borde del disco son puntos singulares del campo de densidad, tal como ocurre en el modelo de Ulrich.

§3.3. Disco de acreción

Por los mismos argumentos que se usaron en la sección §2.2, las líneas de corriente del flujo de acreción se cortan abruptamente al llegar al plano ecuatorial donde contribuyen a la formación de un disco.

Para obtener la expresión del radio del disco r_d , tomemos $\theta = \pi/2$ en la ec. (3.9), i.e. consideremos partículas sobre el plano ecuatorial. A continuación tomamos el límite

$\theta_0 \rightarrow \pi/2$ para llegar al borde del disco con lo cual

$$r_d = \frac{1}{1 + \nu}. \quad (3.25)$$

Claramente si $\nu = 0$, el radio del disco del presente modelo es igual al radio del disco en el modelo de Ulrich.

A partir de la ec. (3.25) se obtiene que la condición para que el disco de acreción sea menor que la nube que lo origina

$$\mu \leq 1 + \nu. \quad (3.26)$$

De esta manera, podemos tener nubes de gas con radios menores que el radio del disco en el modelo de Ulrich ($\mu > 1$) siempre y cuando la velocidad radial inicial sea lo suficientemente grande.

§3.4. Convergencia al modelo de Ulrich

Como se vió en la sección §3.1 para recuperar el modelo original de Ulrich a partir del presente desarrollo debemos tomar $\mu = 0$ y $\nu = 0$.

Al sustituir estos valores de los parámetros del modelo obtenemos que:

$$\varepsilon = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad e = 1, \quad (3.27)$$

con lo cual recuperamos las trayectorias parabólicas del modelo de Ulrich. Por su parte el campo de velocidades y densidad dados en las ecs. (3.13), (3.15), (3.16) y (3.23) convergen a aquellos de las ecs. (2.12)-(2.13) respectivamente.

§3.5. Líneas de flujo

En la Figura 3.1 se muestran las líneas de corriente del flujo descrito por la ec. (3.9) para un valor fijo de μ y diferentes valores de ν . Esto es, estamos comparando diferentes escenarios de acreción que parten de una nube del mismo tamaño y con el mismo momento angular pero con distintos valores de velocidad radial inicial. En la figura observamos cómo conforme aumenta el valor del parámetro ν , el radio del disco de acreción que se forma en el ecuador va disminuyendo.

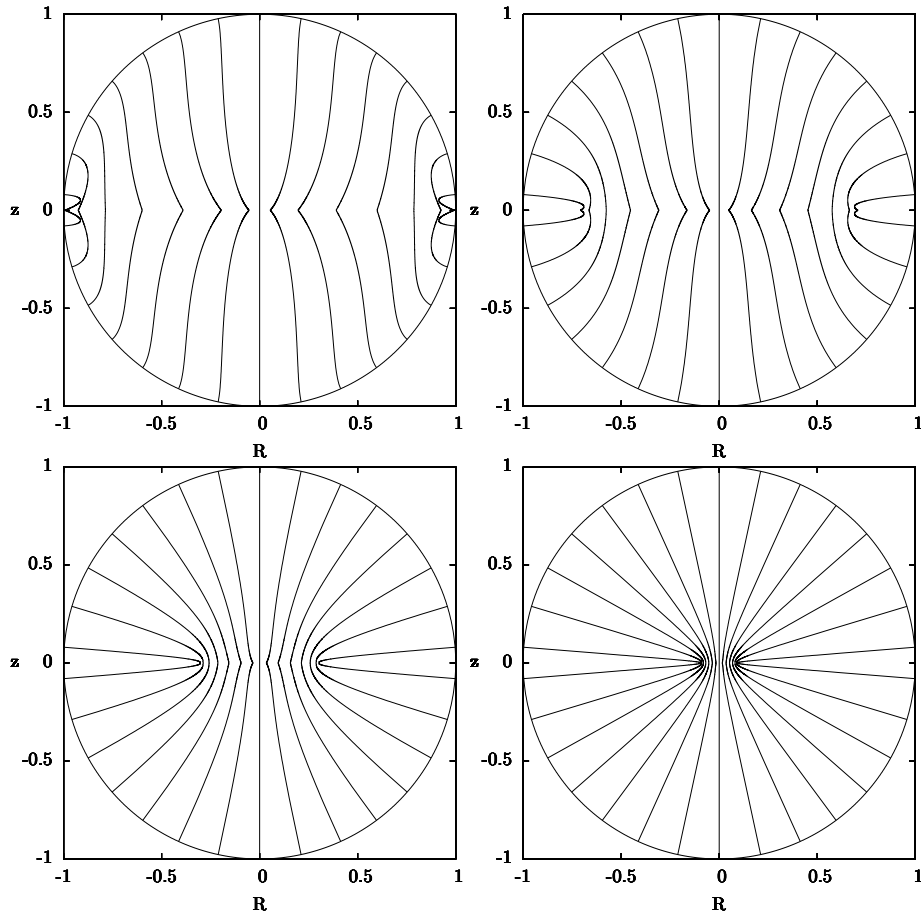


Figura 3.1: La figura muestra ejemplos de las líneas de corriente del flujo de acreción para el valor fijo de $\mu = 1.28$ y para diferentes valores del parámetro ν . De izquierda a derecha y de arriba a abajo estos son $\nu = 0.28, 0.80, 3.20, 12.80$. Cada punto sobre una línea de las gráficas corresponde a la intersección de la línea de corriente real con un plano $\phi = \text{cte}$ conforme este último es barrido desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi/2$. La razón por la cual se ha graficado de esta manera y no con una proyección directa de las líneas de corriente sobre el plano $\phi = \text{cte}$ es porque con este último método surgen intersecciones falsas de las líneas de corriente. En estas gráficas se ha escalado la distancia en unidades del radio inicial r_0 a fin de poder hacer una comparación entre los diferentes casos. En el primer cuadro el radio del disco es igual al radio de la nube inicial.

En la Figura 3.2 se muestran cuatro ejemplos de las líneas de corriente para un valor del radio del disco r_d igual a un medio del radio de la nube inicial ($r_d = 1/2\mu$). Los paneles inferiores de la Figura 3.2 tienen “triángulos” trazados encima que representan zonas fuera

del alcance del presente modelo debido a que su frontera consiste en intersecciones reales entre líneas de corriente que se traducen en singularidades del campo de densidad. Claramente ésta es una característica irreal que surge de haber hecho un análisis balístico. En este caso resulta que las líneas de corriente muestran intersecciones para $\nu \gtrsim 1$. Conforme ν aumenta estos triángulos crecen hasta alcanzar una extensión más o menos fija a partir de $\nu \gtrsim 50$.

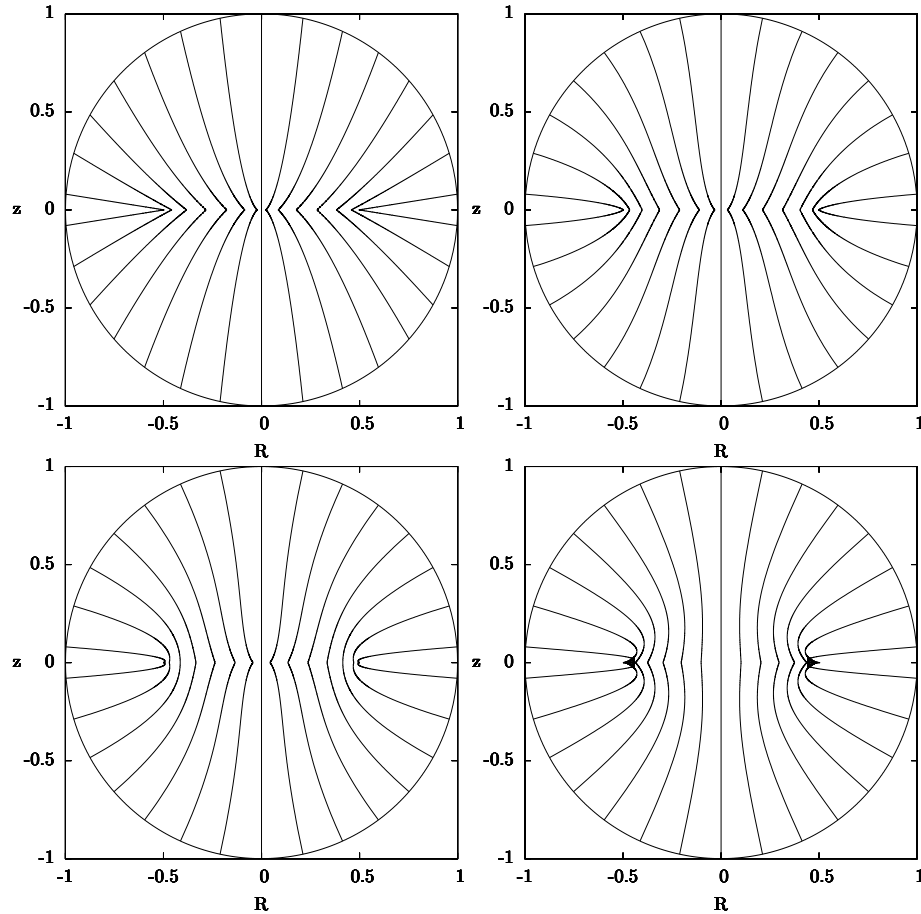


Figura 3.2: La figura muestra las líneas de corriente que se obtienen a partir de valores de los parámetros μ y ν tales que el radio del disco sea la mitad del radio de la nube original, esto es, $r_d = 1/2\mu$. De izquierda a derecha y de arriba a abajo estos valores son $\mu = 0.5, 0.81, 1.31, 51.01, \nu = 0.0, 0.64, 1.62, 101.0$. Las regiones “triangulares” sombreadas en los gráficos inferiores representan zonas fuera del alcance del modelo delimitadas por intersecciones de las líneas de corriente.

La Figura 3.3 muestra isocontornos del logaritmo de la densidad para los mismos casos de la Figura 3.2.

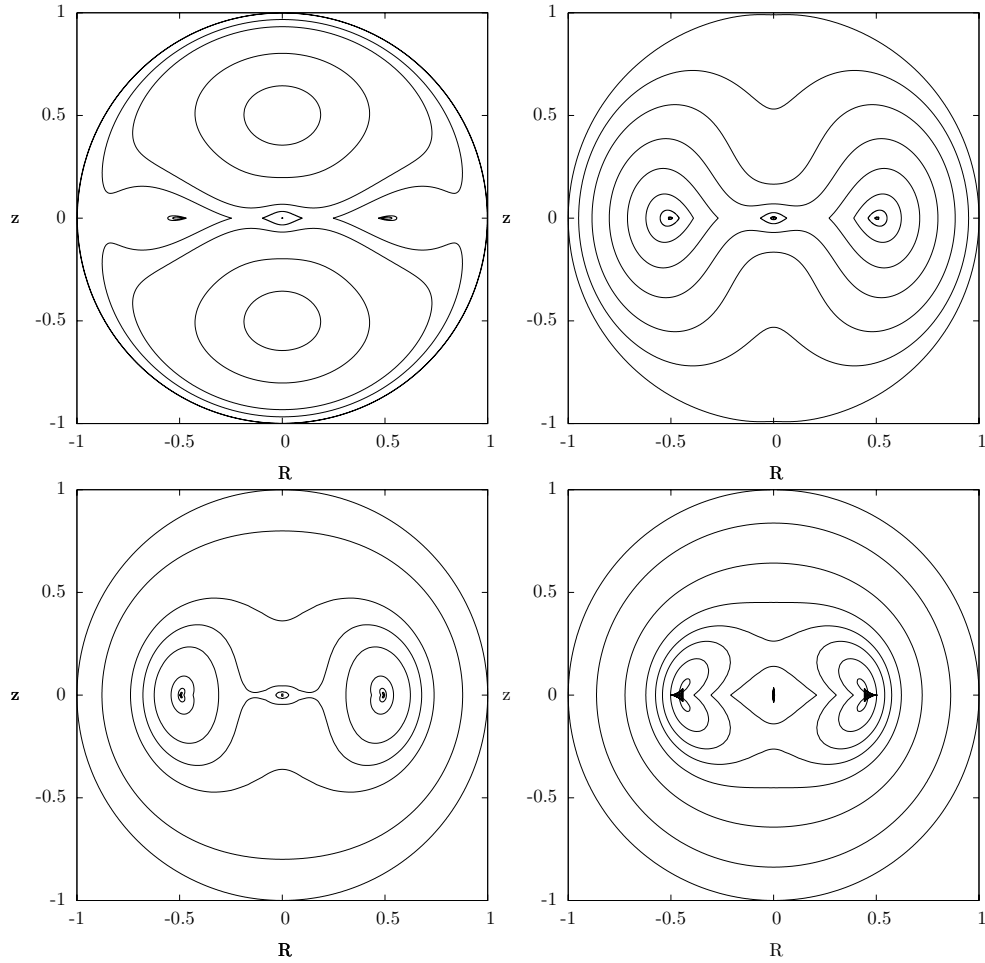


Figura 3.3: Se muestran isocontornos del logaritmo de la densidad en unidades de ρ_u . De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo los valores de los isocontornos son $\{0.32, 0.4, 0.6, 0.75, 1.5, 1.75\}$, $\{0.3, 0.34, 0.4, 0.5, 0.65, 0.9, 1.3, 2.0\}$, $\{0.0, 0.13, 0.33, 0.45, 0.6, 1.0, 1.5, 2.0\}$ y $\{-1.0, -0.85, -0.65, -0.45, -0.32, -0.2, 0.0, 0.5\}$. Las regiones sombreadas en los paneles inferiores representan las zonas fuera del alcance del modelo.

En la Figura 3.4 se considera el caso $\nu = 0$ en el cual se cumple $\varphi_0 = 0$ y $r_d = 1$. En la misma gráfica se han sobrepuesto las líneas de flujo para tres valores distintos del parámetro μ , lo cual corresponde a tres valores del radio de la nube inicial.

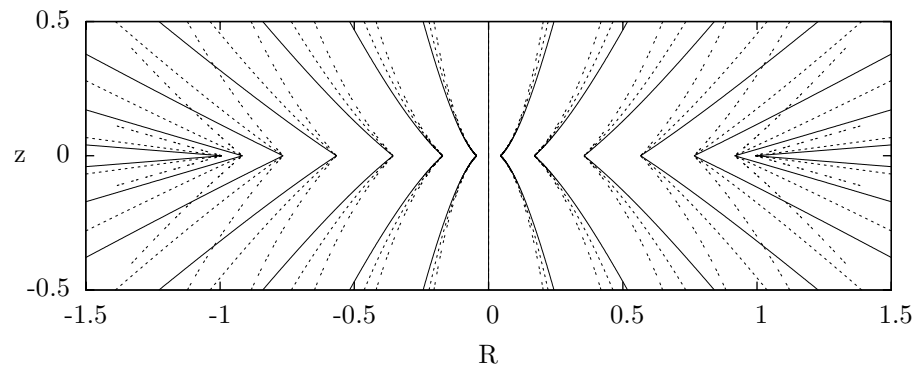


Figura 3.4: La gráfica muestra una comparación entre las líneas de flujo para tres valores distintos del radio de la nube inicial pero para el valor común $\nu = 0$. Estos valores son $r_0/r_u = \infty, 2.46, 1.38$. La distancia está medida en unidades de r_u .

En la Figura 3.5 se presentan líneas de corriente, isocontornos y cortes de densidad para tres casos donde $\mu = 0$, esto es, con un radio de nube inicial infinito. En este caso no se presentan las intersecciones de líneas de corriente que se observaron en la Figura 3.2. Esto nos indica que a partir de un valor de r_0/r_u estas intersecciones desaparecen.

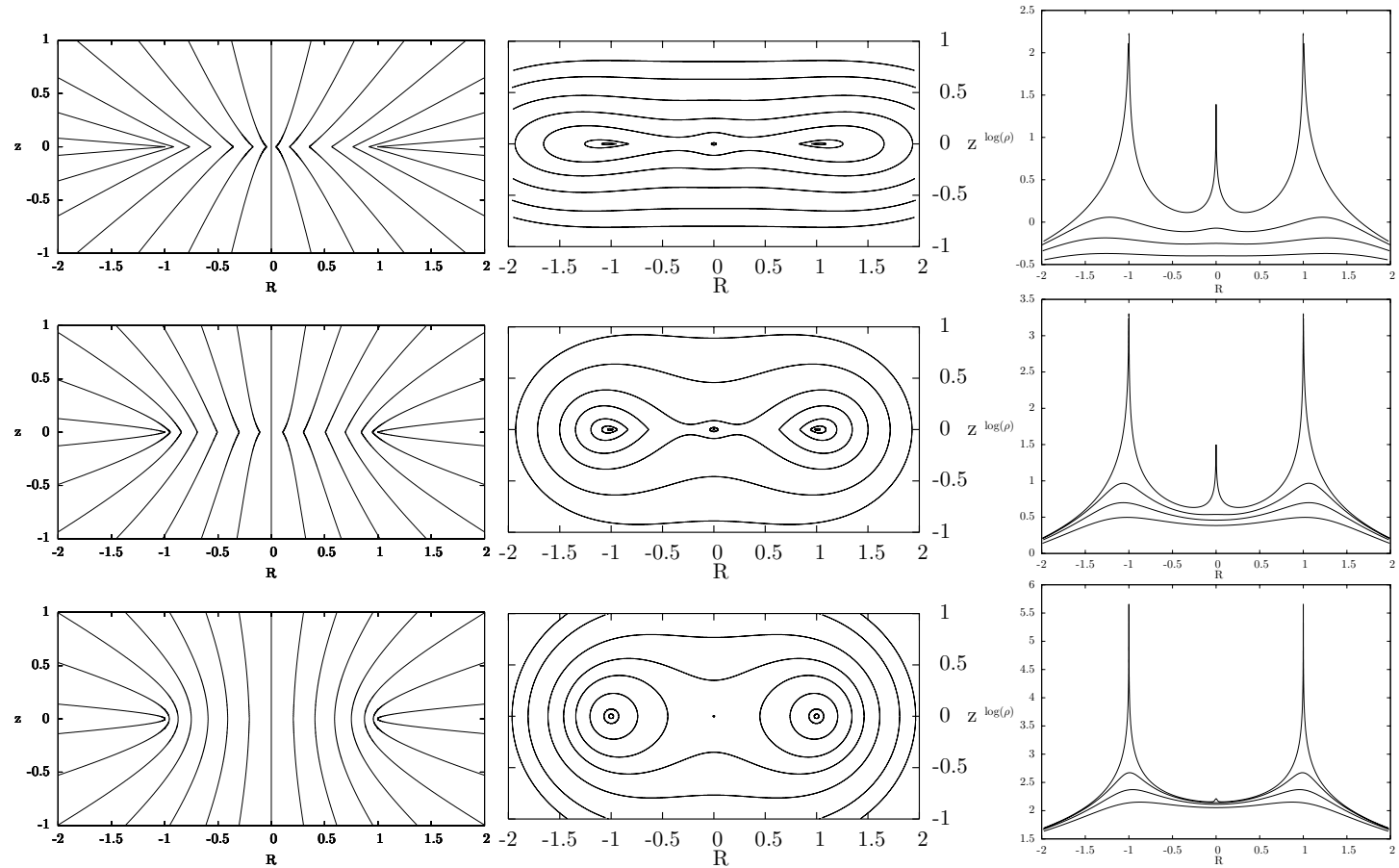


Figura 3.5: Se muestran tres ejemplos de flujos de acreción para una nube infinita ($\mu = 0$) con los valores del parámetro $\nu = 0, 2, 100$. Los paneles superiores corresponden al modelo de Ulrich. La distancia está medida en unidades del radio disco r_d . En la primer columna se muestran las líneas del flujo; en la segunda aparecen isocontornos del logaritmo de la densidad (en unidades de ρ_u). De arriba hacia abajo los conjuntos de valores de isocontornos son $\{-0.55, -0.47, -0.35, -0.2, 0.0, 0.5, 1.0\}$, $\{0.25, 0.4, 0.6, 0.8, 1.1, 1.5, 2\}$, y $\{1.7, 1.8, 1.95, 2.1, 2.25, 2.5, 3, 3.5\}$. En la tercer columna se muestran cortes del logaritmo de la densidad como función de la distancia ecuatorial $R = r \sin \theta$ a las alturas $z = 0, 0.15, 0.3, 0.5$. Nótese que en los tres casos el perfil para $z = 0$ diverge en $R = 0, \pm 1$.

§3.6. Relación con las observaciones

Como ejemplo de aplicación del modelo desarrollado en este capítulo, consideremos el estudio del espectro de emisión proveniente de un núcleo protoestelar que tiene que atravesar la nube de gas que lo originó antes de llegar al observador. En este tipo de estudios se hace un cálculo de transporte radiativo donde se toman en cuenta varios factores como: luminosidad y composición de la estrella, abundancia y propiedades ópticas del material en el núcleo, etc. No obstante, un ingrediente principal es la determinación del espesor óptico que presenta el gas de la nube progenitora. A grandes rasgos, el espesor óptico se calcula al integrar la densidad del gas sobre una línea de visión (aunque al hacer esta integración hay que tomar en cuenta diferentes procesos de transporte radiativo). Muchos autores usan para este cálculo al campo de densidad dado por el modelo de Ulrich (cf. Kenyon et al., 1993; Butner et al., 1991; Adams & Shu, 1986; Whitney et al., 2003).

A continuación se presenta una serie de figuras con la densidad superficial que se obtiene de usar el modelo de Ulrich o bien la presente generalización. Con estas figuras se pretende dar una idea cualitativa de la diferencia en el espesor óptico que encontraríamos en cada caso.

Para un disco de acreción visto desde arriba, en la Figura 3.6 se presenta la densidad superficial Σ como función de la coordenada radial, tanto para el modelo de Ulrich (Σ_u) como para su generalización (Σ_a para el caso $v_{r_0} = 0$ y Σ_b para $v_{r_0} = 5 \times 10^4$ cm/s).² Esta comparación se hace para tres casos representativos de r_0 y $\Omega = h_0/r_0$, tales que $r_u = 20.4$ AU es el mismo en todos. En los tres casos se ha tomado una masa de la estrella central de $M = 1 M_\odot$ y una tasa de acreción de $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot/\text{año}$. De acuerdo con las observaciones, el caso de mayor relevancia astronómica es (b) (Benson & Myers, 1989; Jijina et al., 1999).

Como se discutió anteriormente, con el fin de tener una tasa de acreción constante, si $v_{r_0} = 0$ y $r_0 < \infty$, necesariamente $\rho_0 = \infty$. Esta es una condición irreal, por lo que, de los casos mostrados en la Figura 3.6, Σ_b representa la situación más realista. En esta misma figura vemos también que Σ_u es menor que Σ_a y Σ_b en las regiones interiores de la nube de gas. En consecuencia, entre los dos modelos el de Ulrich predice un mayor flujo de radiación. A partir de estas gráficas vemos que los resultados obtenidos con el presente modelo muestran importantes variaciones con aquellos obtenidos a partir del tradicional modelo de Ulrich.

²Se propone este valor de v_{r_0} como un valor típico de acuerdo a los resultados de Hennebelle et al. (2004)

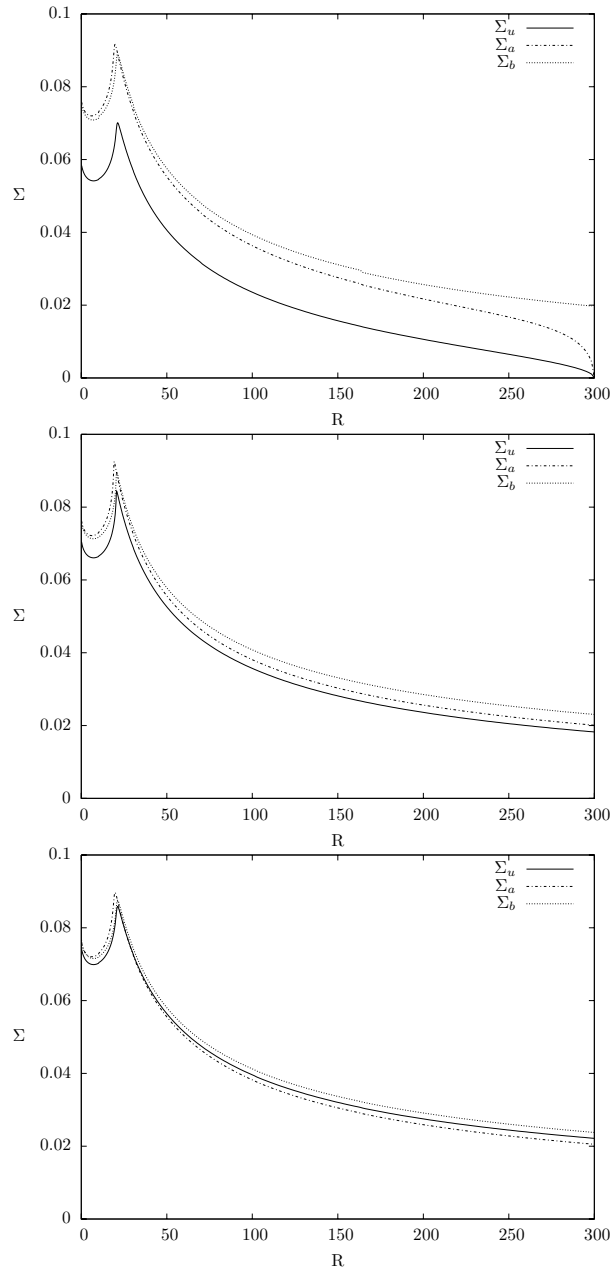


Figura 3.6: Se grafica la densidad superficial Σ como función de la coordenada radial R para un disco visto desde arriba. La integración se ha hecho a partir del campo de densidad dado por el modelo de Ulrich (Σ_u) y para el campo dado por la ec.(3.23) en el caso $v_{r_0} = 0$ ($\nu = 0$) (Σ_a) y para $v_{r_0} = 5 \times 10^4$ cm/s ($\nu = 0.075$) (Σ_b). En los tres casos se tiene $r_u = 20.4$ AU, $M = 1 M_\odot$ y $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot/\text{año}$. De arriba a abajo el valor de los restantes parámetros es: (a) $r_0 = 300$ AU, $\Omega = 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ($\mu = 6.8 \times 10^{-2}$), (b) $r_0 = 3000$ AU, $\Omega = 10^{-13} \text{ s}^{-1}$ ($\mu = 6.8 \times 10^{-3}$) y (c) $r_0 = 30000$ AU, $\Omega = 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ ($\mu = 6.8 \times 10^{-4}$). La distancia está medida en unidades astronómicas y la densidad superficial en g/cm^2 .

Capítulo 4

Mecánica celeste alrededor de un agujero negro de Schwarzschild

En el capítulo anterior se construyó un modelo de acreción con dos parámetros ajustables que cubren una amplia variedad de condiciones de frontera. El campo de aplicación de este modelo se encuentra en el estudio de la formación estelar en regiones donde los distintos mecanismos que disparan el proceso de acreción imponen un gran espectro de condiciones iniciales.

Como vimos en el capítulo 1, la acreción hacia objetos compactos, tales como estrellas de neutrones y agujeros negros, es el proceso que da lugar a las fuentes luminosas más potentes y energéticas que existen en el universo. Sin embargo, el estudio de este tipo de fenómenos exige llevar a cabo un análisis dentro del contexto de la relatividad general. Con el objetivo de extender el modelo del capítulo anterior a un régimen relativista, en este capítulo vamos a hacer una revisión del problema de Kepler para un espacio-tiempo de Schwarzschild, esto es, vamos a buscar y a describir el tipo de trayectorias que siguen las partículas de prueba en este espacio.

En contraste con la mecánica newtoniana donde la gravitación es considerada una interacción entre partículas, en relatividad general se aborda como una propiedad intrínseca del espacio-tiempo que se manifiesta en la geometría de éste. Dentro de este marco, el espacio-tiempo se reconoce como una entidad dinámica de cuatro dimensiones cuya curvatura dicta el movimiento de las partículas y la evolución de los campos físicos. Al mismo tiempo, el contenido de materia-energía en el universo determina la curvatura del espacio-tiempo. De esta forma, la pieza clave para estudiar el movimiento de las partículas en mecánica

relativista es el llamado tensor métrico g_{ij} (o simplemente métrica), el cual contiene la información sobre la geometría del espacio-tiempo.

La métrica de Schwarzschild es la solución a las ecuaciones de campo de la relatividad general para el exterior de un cuerpo central esféricamente simétrico de masa M en condiciones estacionarias. Los resultados que se obtienen a partir de esta solución representan, en la mayoría de los casos, una pequeña corrección a los que se obtienen con una descripción newtoniana. Sin embargo, en el caso de campos gravitacionales intensos, como los que se encuentran en la región próxima a objetos compactos como estrellas de neutrones y agujeros negros, cualquier análisis debe hacerse necesariamente a partir de esta solución.

§4.1. Ecuación geodésica y constantes de movimiento

Un elemento de distancia en el marco de la solución de Schwarzschild está dado por¹ (Landau & Lifshitz, 1994)

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G la constante de la gravitación universal. Antes de seguir con la búsqueda del tipo de órbitas que se presentan en un espacio como éste, es conveniente hacer algunos comentarios sobre el sistema de coordenadas en el cual está escrita la ec. (4.1).

A diferencia de la mecánica newtoniana, en relatividad general no existen marcos de referencia privilegiados y, por tanto, hay cierta arbitrariedad a la hora de escoger el sistema de coordenadas con el que se va a trabajar. Las coordenadas en las que se ha escrito la ec. (4.1) nos recuerdan a las coordenadas esféricas ordinarias, sin embargo, una inspección cuidadosa a esta ecuación nos indica que efectos inusuales se presentan cuando $r = r_s := 2GM/c^2$. Por ejemplo, el papel de las coordenadas r y t se intercambia al atravesar este radio en el sentido que r deja de ser una coordenada tipo espacio y se convierte a tipo tiempo y lo contrario pasa con t .

¹Hemos escogido una signatura $(-, +, +, +)$ para la métrica. Convengamos además en usar índices latinos para denotar las componentes de los cuadvectores y cuadritensores. Específicamente tomaremos los valores 0 para t , 1 para r , 2 para θ y 3 para ϕ . En las siguientes ecuaciones se ha utilizado la convención de suma implícita sobre índices repetidos.

El radio r_s recibe el nombre de radio de Schwarzschild o radio gravitacional y encierra a un conjunto de eventos causalmente desconectados del exterior. Una vez que cualquier partícula o un rayo de luz cruza este radio se ve obligada a seguir una trayectoria que la lleve hacia el origen de coordenadas. El valor de r_s es extremadamente chico incluso para objetos celestes. Para el caso de la tierra tenemos $r_s \approx 0.9$ cm mientras que para el sol $r_s \approx 3$ km.

Ahora examinemos la diferencia entre las mediciones que hace un observador sobre los eventos que transcurren a su alrededor y aquellas que hace otro sobre los mismos eventos pero usando las coordenadas de la ec. (4.1). En un marco de referencia local, la distancia física entre dos puntos vecinos se determina a partir del vector de desplazamiento $\delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{e}_r + \delta y\mathbf{e}_\theta + \delta z\mathbf{e}_\phi$. Las componentes de este vector se relacionan con las coordenadas del marco de referencia de Schwarzschild mediante (Frolov & Novikov, 1998)

$$\delta x = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr, \quad (4.2)$$

$$\delta y = r d\theta, \quad (4.3)$$

$$\delta z = r \sin \theta d\phi. \quad (4.4)$$

A partir de estas relaciones vemos que el papel de las coordenadas θ y ϕ es el usual en un sistema esférico. Sin embargo, la coordenada r no mide directamente ninguna distancia y el factor $(1 - r_s/r)^{-1/2}$ que aparece en la ec. (4.2) es indicativo de la curvatura del espacio tridimensional.

Por su parte, el intervalo de tiempo propio $d\tau$ que mide un observador en reposo en su propio sistema de referencia, se relaciona con la coordenada t mediante

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} dt. \quad (4.5)$$

Para radios cercanos a r_s tanto los intervalos de tiempo como los de espacio medidos desde el marco de Schwarzschild difieren cada vez más de aquellos medidos por un observador local. Conforme $r \rightarrow r_s$ el tiempo τ transcurre cada vez más lento en comparación con el tiempo t .

Podemos ver que para una distancia suficientemente alejada del agujero ($r \gg r_s$) la distancia física converge a la distancia coordenada lo mismo que el intervalo de tiempo ordenado converge al de tiempo propio. Es por esto que decimos que el marco de referencia

de Schwarzschild corresponde a un sistema de coordenadas de un observador situado en infinito.

Si un observador cayera hacia el agujero negro cruzando el horizonte de sucesos, al momento de hacer el cruce este observador no notaría ningún efecto extraño mientras que, de acuerdo a otro observador que siguiera la caída desde afuera del agujero, el tiempo invertido en caer crece sin límite conforme se acerca a r_s sin nunca llegar a hacer el cruce.

Después de estas consideraciones vemos que el marco de referencia de Schwarzschild es adecuado para hacer una descripción de los fenómenos que transcurren al exterior del agujero negro no obstante las coordenadas r y t no corresponden directamente a medidas físicas de distancia y tiempo.

Consideremos el movimiento de una partícula de prueba que cae libremente dentro de un espacio descrito por la ec. (4.1). La trayectoria que sigue corresponde a una línea geodésica del espacio-tiempo en cuestión y satisface las ecuaciones diferenciales (Shapiro & Teukolsky, 1983)

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) = r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2, \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{d\tau}(r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}) = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \right] = 0, \quad (4.8)$$

para θ , ϕ y t respectivamente. La ecuación diferencial para r se obtiene directamente del hecho de que la norma de la cuadvirvelocidad es constante e igual a $-c^2$, esto es

$$u_i u^i = -c^2. \quad (4.9)$$

Tomemos la ec. (4.6) y notemos que, sin pérdida de generalidad, podemos elegir un sistema de referencia tal que inicialmente la partícula se mueva en el plano ecuatorial (i.e., $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$). A partir de esta ecuación tendremos entonces que el movimiento de la partícula quedará restringido a este plano para siempre. Este resultado se sigue de la unicidad en la solución para este tipo de ecuaciones diferenciales junto con que la solución $\theta = \text{cte}$ satisface a la ec. (4.6) para todo tiempo τ . Tomando entonces $\theta = \pi/2$ tenemos que las ecs. (4.7) y (4.8) se transforman respectivamente en

$$r^2 \dot{\phi} = \text{cte} := h, \quad (4.10)$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \dot{t} = \text{cte} := E. \quad (4.11)$$

A la primera de estas constantes de movimiento la reconocemos como el momento angular específico h mientras que a la segunda la definimos como la energía específica E . Sustituyendo las ecs. (4.10) y (4.11) dentro de la ec. (4.9), obtenemos

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = \frac{E^2}{c^2}, \quad (4.12)$$

o bien,

$$\frac{dr}{d\tau} = \left[\frac{E^2}{c^2} - c^2 + \frac{2GM}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2GMh^2}{c^2 r^3}\right]^{1/2}, \quad (4.13)$$

que constituye la ecuación diferencial que gobierna la evolución de r como función de τ .

Podemos además definir un potencial efectivo dado por

$$V(r) = -\frac{2GM}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GMh^2}{c^2 r^3}, \quad (4.14)$$

que es idéntico al potencial efectivo que se define para el problema de Kepler en mecánica newtoniana excepto que aquí aparece un término extra que escala con el inverso de la tercera potencia de la coordenada radial y que constituye la generalización relativista a dicho problema.

§4.2. Potencial relativista

En la sección anterior se identificaron dos constantes de movimiento que, junto con la ec. (4.13), nos permiten resolver por completo el problema de Kepler en un espacio-tiempo de Schwarzschild.

Los resultados obtenidos dentro de este capítulo son independientes del escenario astrofísico que haya decidido abordarse, sin embargo, con la idea de simplificar el desarrollo del siguiente capítulo supongamos que estamos interesados en estudiar el movimiento de una colección de partículas dentro de un problema caracterizado por la distancia r_0 y por el

momento angular específico h_0 . La distribución del momento angular específico está dada por

$$h = h_0 f(i), \quad (4.15)$$

donde $f(i)$ es una función del índice i que etiqueta a cada una de las partículas.

Para estrechar la comparación con el problema newtoniano definamos

$$E_N = \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} - c^2 \right) = \frac{1}{2} v_{r_0}^2 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{r_0^2} - \frac{GM}{r_0} - \frac{GMh^2}{c^2 r_0^3}, \quad (4.16)$$

que es una energía que en el límite no relativista converge a la energía específica de la mecánica clásica, donde la energía asociada a la masa en reposo no es tomada en cuenta.

Tal como se hizo en el capítulo anterior, introduzcamos los siguientes parámetros adimensionales

$$\mu^2 := \frac{h_0^2}{r_0^2 E_u} = \frac{r_u^2}{r_0^2}, \quad \nu^2 := \frac{v_{r_0}^2}{E_u}, \quad \gamma := \frac{r_s}{r_u}, \quad (4.17)$$

donde $r_u = h_0^2/GM$ es el radio del disco en el modelo de Ulrich, $E_u = GM/r_u$ y $r_s = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild. Los parámetros μ y ν son exactamente los mismos que definimos en la ec. (3.3). El parámetro nuevo γ contiene la corrección relativista al problema newtoniano antes tratado. Nótese que en el límite no relativista donde el radio de Schwarzschild de cualquier objeto se considera nulo, tenemos que $\gamma = 0$.

Sustituyendo estos parámetros dentro de la ec. (4.12), usando r_u como unidad para medir distancias y a $v_u = GM/h_0$ como unidad de medida para la velocidad, llegamos a

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon + \frac{2}{r} - \frac{f(i)^2}{r^2} + \frac{\gamma f(i)^2}{r^3} = \varepsilon - \Phi(r), \quad (4.18)$$

donde $\varepsilon := 2E_N/E_u$ es la energía adimensional y $\Phi := 2V/E_u$ es el potencial efectivo de la ec. (4.14) en forma adimensional. La ec. (4.16) se reescribe como

$$\varepsilon = \nu^2 + \mu^2 f(i)^2 (1 - \mu\gamma) - 2\mu. \quad (4.19)$$

Formas típicas del potencial efectivo Φ se han graficado en las Figuras 4.1 y 4.2. Puesto que el lado izquierdo de la ec. (4.18) es mayor o igual que cero, la energía ε de una trayectoria particular debe ser siempre mayor o igual que el potencial Φ . En consecuencia, para una

órbita con una energía ε dada, el rango dentro del cual puede variar la coordenada radial está restringido a aquellos valores para los cuales la gráfica de Φ esté por debajo del valor ε .

Por ejemplo, considérese la trayectoria etiquetada con $\varepsilon = \varepsilon_3$ en la Figura 4.1. La partícula que sigue esta trayectoria puede provenir desde $r = \infty$ pero no puede alcanzar valores de r más pequeños que aquel valor donde la línea punteada intersecta a la gráfica de Φ . Este punto, etiquetado con la letra E , recibe el nombre de punto de retorno donde, puesto que $\varepsilon = \Phi$, necesariamente $dr/d\tau = 0$. Esto es, la coordenada radial alcanza su valor mínimo, la velocidad radial cambia de signo y la partícula regresa a infinito.

Sobre la forma de la gráfica de Φ en la Figura 4.1 podemos decir, a grandes rasgos, que para $r \gg 1$ el término dominante es el proporcional al inverso de la distancia y por tanto el potencial se comporta como el potencial newtoniano. Conforme nos acercamos al origen el término de repulsión centrífuga comienza a cobrar importancia, provoca que el potencial pase por un mínimo (punto A) y después vuelva a incrementar su valor. En mecánica newtoniana este término es crucial a distancias próximas del origen al hacer que el potencial crezca sin límite en una pared repulsiva. En consecuencia evitaba que, siempre que hubiera una velocidad angular no nula, la partícula de prueba alcanzara el origen. La aportación de la solución de Schwarzschild, el término proporcional al inverso de la tercera potencia, constituye una pequeña corrección a los resultados newtonianos para $r \gg 1$. Sin embargo, este término atractivo cobra una importancia creciente conforme nos acercamos al origen y provoca que la pared de repulsión centrífuga sea finita. Es así que existen trayectorias con energías tales que, a pesar de la repulsión centrífuga llegan al origen de coordenadas, por ejemplo la trayectoria con energía ε_5 en la Figura 4.1.

A partir de la ec. (4.18) vemos que es posible tener órbitas circulares ($r = \text{cte}$) en el mínimo y en el máximo de Φ . En la Figura 4.1 estos puntos corresponden a A y a F respectivamente. De estas dos trayectorias sólo la primera constituye una órbita estable ya que en la segunda, al tratarse de un máximo, cualquier pequeña perturbación en r resultaría en un movimiento acelerado que se aleja del máximo. Cualitativamente encontramos órbitas circulares para

$$r = \frac{f^2(i)}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 6 \frac{\gamma}{f^2(i)}} \right), \quad (4.20)$$

de donde vemos que este tipo de órbitas existen sólo para $f^2(i) > 6\gamma$. Al valor de $\gamma_c = f^2(i)/6$ lo identificamos como el valor crítico por arriba del cual no existen órbitas cerradas.

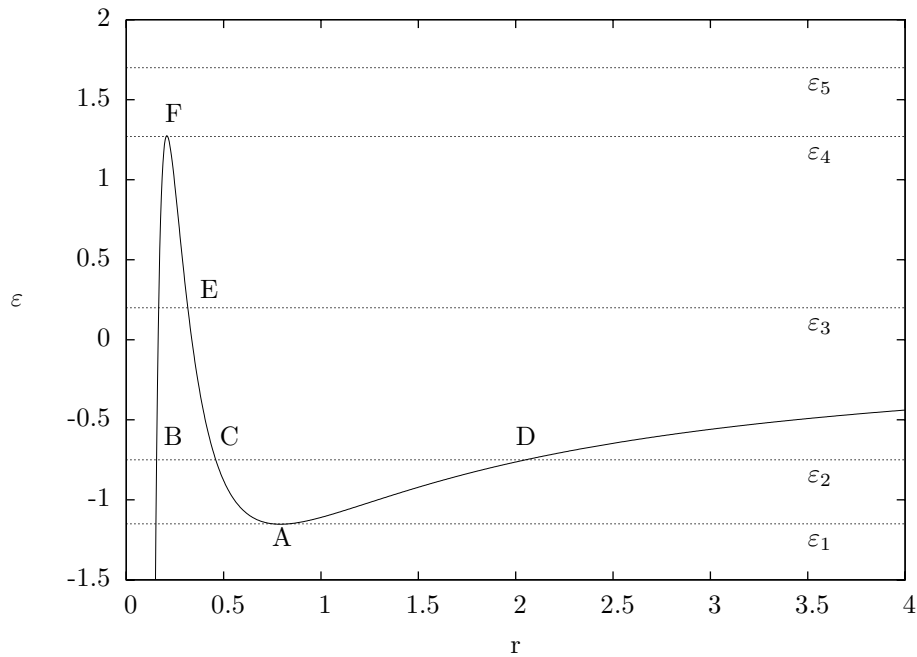


Figura 4.1: Se grafica el potencial efectivo relativista definido en la ec. (4.18) con $f(i) = 1$, $\mu = 0.8$, $\nu = 0.1$ y $\gamma = 0.11$. Lejos del origen el factor dominante es el término atractivo proporcional al inverso de la distancia. El potencial comienza a crecer después del mínimo en A gracias al término repulsivo del potencial centrífugo. La caída de $\Phi(r)$ cerca del origen se debe al término relativista proporcional al inverso de la tercera potencia de la distancia.

En la Figura 4.2 se han graficado ejemplos del potencial Φ para distintos valores de γ .

§4.3. Tipos de órbitas

Ahora buscamos una expresión analítica para las trayectorias. Primero reescribamos a la ec. (4.10) en forma adimensional

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{f(i)}{r^2}. \tag{4.21}$$

Usando esta expresión junto con la ec. (4.18) podemos expresar a r como una función de ϕ en lugar de τ , de forma que

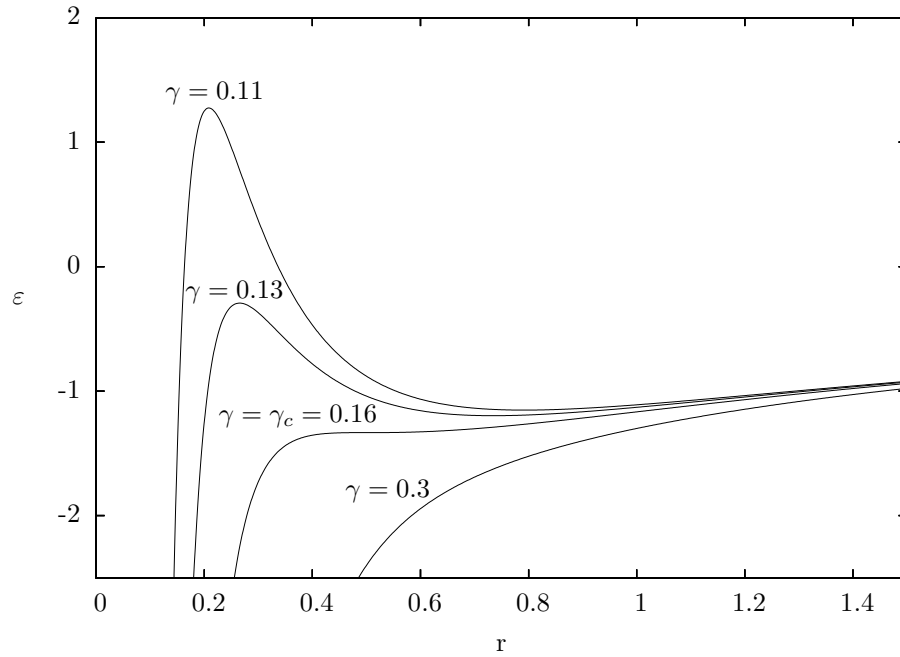


Figura 4.2: Se grafica Φ en el caso $f(i) = 1$, $\mu = 0.8$ y $\nu = 0.1$. La gráfica con $\gamma = \gamma_c$ corresponde al caso crítico; para $\gamma < \gamma_c$ tenemos dos puntos extremos y ninguno para $\gamma > \gamma_c$.

$$f(i)^2 \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \varepsilon r^4 + 2r^3 - f(i)^2 (r^2 - \gamma r). \quad (4.22)$$

La expresión anterior puede ser reescrita como

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{f(i)} |P(r)|^{1/2}, \quad (4.23)$$

con

$$P(r) = r \left[r^3 + \frac{2}{\varepsilon} r^2 - \frac{f(i)^2}{\varepsilon} (r - \gamma) \right]. \quad (4.24)$$

Luego, de acuerdo a la ec. (4.23), buscar la solución a nuestro problema se reduce a resolver la siguiente integral

$$\int_{\alpha}^r \frac{du}{|P(u)|^{1/2}} = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{f(i)} \phi, \quad (4.25)$$

donde α es algún límite de integración adecuado. Esta integral es soluble en términos de funciones elípticas de Jacobi, que a su vez dependen de la forma de las raíces de $P(r)$. Con el objetivo de encontrar estas raíces definamos (Abramowitz & Stegun, 1970)

$$Q = 4 + 3\varepsilon f(i)^2, \quad R = 8 + 9\varepsilon f(i)^2 \left(1 + \frac{3}{2}\gamma\varepsilon\right), \quad (4.26)$$

$$D^2 = R^2 - Q^3.$$

Entonces, siempre que $D^2 < 0$ tendremos que las raíces de $P(r)$ son reales y están dadas por (aparte de cero)

$$r_a = \frac{1}{3\varepsilon} \left(2\sqrt{Q} \cos(\Psi + 5\pi/3) - 2\right), \quad r_b = \frac{1}{3\varepsilon} \left(2\sqrt{Q} \cos(\Psi + \pi/3) - 2\right), \quad (4.27)$$

$$r_c = \frac{1}{3\varepsilon} \left(2\sqrt{Q} \cos(\Psi + \pi) - 2\right),$$

donde Ψ se define a través de la siguiente relación

$$\cos(3\Psi) = \frac{R}{Q^{3/2}}. \quad (4.28)$$

§4.3.1. Órbitas ligadas

Analicemos el caso de las trayectorias etiquetadas con ε_1 y ε_2 en la Figura 4.1. En cada una de ellas tenemos dos posibilidades, por ejemplo, en ε_2 hay una órbita entre los puntos C y D y otra entre el origen y el punto B. La primera corresponde a una órbita ligada donde r se encuentra acotada entre dos valores extremos mientras que la segunda se trata de una órbita donde la partícula termina inevitablemente en el origen de coordenadas.

En cualquiera de estos casos tenemos que tanto D^2 como ε son menores que cero y por tanto, $P(r)$ tiene tres raíces reales y positivas, llamemos

$$r_1 = r_a, \quad r_2 = r_b, \quad r_3 = r_c, \quad (4.29)$$

con lo cual se cumple $0 < r_1 < r_2 < r_3$. En el ejemplo de ε_2 en la Figura 4.1 tenemos que r_1 está en el punto B, r_2 en el C y r_3 en el D, mientras que en la trayectoria con energía ε_1 dos de estas raíces son iguales y están en el punto A. Este caso corresponde a una órbita circular.

Supongamos que $r_2 < r < r_3$. En términos de funciones elípticas, la solución a la ec. (4.25) está dada por (Hancock, 1917)

$$\int_{r_2}^r \frac{du}{|P(u)|^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{r_2(r_3 - r_1)}} \operatorname{cn}^{-1} \left(\frac{(r_2 - r_1)(r_3 - r)}{(r_3 - r_2)(r - r_1)} \right)^{1/2}, \quad (4.30)$$

donde $\operatorname{cn}^{-1}(x)$ es la inversa de la función elíptica de Jacobi definida en la ec. (A.6) del Apéndice y cuyo módulo está dado por

$$k_1^2 = \frac{r_1(r_3 - r_2)}{r_2(r_3 - r_1)}. \quad (4.31)$$

A partir de la ec. (4.30) llegamos a la siguiente expresión para la ecuación de la trayectoria

$$r = \frac{r_3(r_2 - r_1) + r_1(r_3 - r_2) \operatorname{cn}^2 \xi_1}{r_2 - r_1 + (r_3 - r_2) \operatorname{cn}^2 \xi_1}, \quad (4.32)$$

donde

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{r_2|\varepsilon|(r_3 - r_1)}}{2f(i)} \phi. \quad (4.33)$$

Esta solución constituye una órbita ligada y acotada entre los valores $r_2 < r < r_3$. Además es una solución periódica en ϕ con periodo 2Π . No obstante, Π en general no será un múltiplo entero de π y por tanto la órbita que describe esta solución no es necesariamente una trayectoria cerrada.

De acuerdo al Apéndice, la función elíptica $\operatorname{cn}(x)$ es periódica con periodo $4K$ (donde $K(k)$ es la integral elíptica completa definida en la ec. (A.14)). Como en la ec. (4.32) únicamente interviene el cuadrado de cn tendremos entonces que r tiene periodo $2K$. Luego, igualando la ec. (4.33) a $2K(k_1)$ y resolviendo para ϕ , llegamos a

$$2\Pi = \frac{4f(i)}{\sqrt{r_2|\varepsilon|(r_3 - r_1)}} K(k_1). \quad (4.34)$$

En la Figura 4.3 se grafica un ejemplo de este tipo de órbita. Puede verse que los puntos r_2 y r_3 representan puntos de retorno donde la velocidad radial vale cero. En la gráfica

se ha trazado una línea continua que corresponde a un periodo completo; en este caso, en $\phi = 0$ la partícula se encuentra en $r = r_3$, cuando $\phi = \Pi$ la partícula está en $r = r_2$ y cuando $\phi = 2\Pi$ la partícula se encuentra de vuelta en $r = r_3$. Este tipo de órbitas es el análogo a las órbitas elípticas que se obtienen en mecánica newtoniana. De hecho, si $\gamma \ll 1$ es posible aproximar a la ec. (4.32) como una elipse cuyo periastro prescesa lentamente. Nótese que en el límite $\gamma \rightarrow 0$ se tiene $\Pi \rightarrow \pi$.

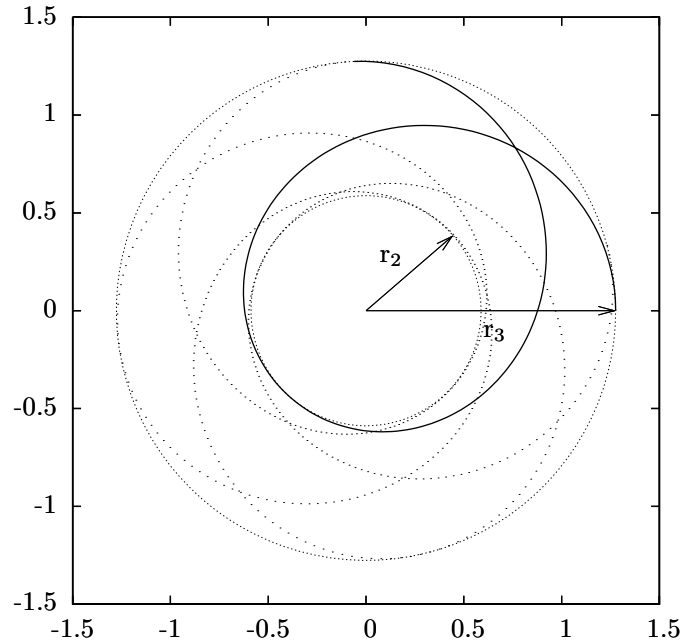


Figura 4.3: Se muestra un ejemplo de órbita ligada. En este caso se tiene el valor de los parámetros $\mu = 0.8$, $\nu = 0.1$, $\gamma = 0.1$ y $f(i) = 1$. La trayectoria está acotada entre los valores $r_2 = 0.59$ y $r_3 = 1.28$. El periodo (ver ec. (4.34)) es $\Gamma = 7.94$. La línea continua corresponde a un periodo completo de la órbita.

§4.3.2. Órbitas que llegan al origen de coordenadas I

Ahora fijémonos en la solución que existe para $r < r_1$ en la órbita etiquetada con $\varepsilon = \varepsilon_2$ de la Figura 4.1. Este es un caso sin paralelo en mecánica newtoniana donde una partícula, a pesar de tener velocidad angular no nula, termina cayendo al origen de coordenadas. La solución está dada por (Hancock, 1917)

$$\int_0^r \frac{du}{|P(u)|^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{r_2|r_3 - r_1|}} \operatorname{cn}^{-1} \left(\frac{r_3(r_1 - r)}{r_1(r_3 - r)} \right)^{1/2}, \quad (4.35)$$

con el módulo k_2 definido igual que k_1 en la ec. (4.31).

A partir de la ec. (4.35) llegamos a que la ecuación de la trayectoria es

$$r = \frac{r_3 r_1 \operatorname{sn}^2 \xi_2}{r_3 - r_1 \operatorname{cn}^2 \xi_2}, \quad (4.36)$$

con ξ_2 definido igual que ξ_1 en la ec. (4.33).

Puesto que en este caso la trayectoria queda acotada entre los valores $0 < r < r_1$, tenemos que, a su vez, ϕ está acotado por $0 < \phi < \Pi$. En términos de la integral elíptica $K(k_2)$, en este caso tenemos

$$\Pi = \frac{2f(i)}{\sqrt{r_2 \varepsilon (r_1 - r_3)}} K(k_2). \quad (4.37)$$

§4.3.3. Órbitas abiertas

Centrémonos ahora en una trayectoria como la etiquetada con ε_3 en la Figura 4.1. En este caso $D^2 < 0$ pero $\varepsilon > 0$, lo cual se traduce nuevamente en tres raíces reales, llamemos

$$r_1 = r_b, \quad r_2 = r_a, \quad r_3 = r_c. \quad (4.38)$$

En este caso $r_3 < 0$ y se satisface $0 < r_1 < r_2 < |r_3|$.

La solución a la integral es

$$\int_{r_2}^r \frac{du}{|P(u)|^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{r_2(r_1 - r_3)}} \operatorname{cn}^{-1} \left(\frac{(r_2 - r_1)(r - r_3)}{(r_2 - r_3)(r - r_1)} \right)^{1/2}, \quad (4.39)$$

con el mismo módulo que en la ec. (4.31). Si reescribimos a la ec. (4.33) como²

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{r_2 \varepsilon (r_1 - r_3)}}{2f(i)} \phi, \quad (4.40)$$

entonces la ec. (4.30) describe también a la trayectoria en este caso. La diferencia es que ahora la órbita ya no está ligada de forma que la partícula se aproxima a una distancia

²Nótese que si $\varepsilon < 0$ entonces $r_1 < r_3$ y cuando $\varepsilon > 0$ se cumple $r_1 > r_3$.

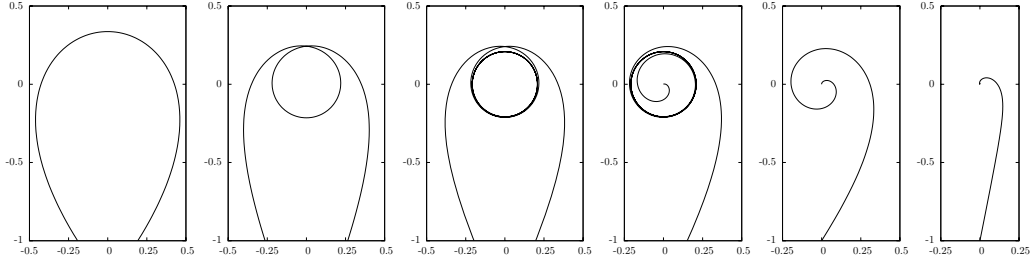


Figura 4.4: Se grafican seis ejemplos de órbitas para los valores de $\mu = 1.0$, $\gamma = 0.11$ y $f(i) = 1$. De izquierda a derecha tenemos $\nu = 1.05, 1.54, \nu_c - \delta, \nu_c + \delta, 1.6, 5.0$, con $\nu_c \approx 1.544307$ y $\delta = 10^{-11}$. El valor de ν_c es aquel para el cual la energía $\varepsilon = \varepsilon_4$ en la Figura 4.1, es decir, corresponde al valor máximo de Φ . En todos los casos $\varepsilon \geq 0$. En los primeros tres casos tenemos $D^2 < 0$ y en consecuencia las órbitas están dadas por la ec. (4.32). Para los otros tres casos $D^2 > 0$ y por tanto las órbitas corresponden a la ec. (4.47). El caso $\nu = \nu_c$ es una órbita circular inestable. Conforme ν se aproxima a este valor la trayectoria resultante puede dar un número de vueltas al origen tan grande como se quiera. Por ejemplo, en la tercer gráfica la partícula da 4 vueltas antes de regresar a infinito, mientras que en la cuarta la partícula da más de 5 vueltas para finalmente terminar en el origen de coordenadas.

mínima r_2 del objeto central y después se aleja sin límite. El equivalente newtoniano de estas órbitas son la parábola (si $\varepsilon = 0$) e hipérbola (si $\varepsilon > 0$).

Para encontrar el ángulo ϕ_∞ al cual la trayectoria tiende asintóticamente conforme $r \rightarrow \infty$, buscamos el límite del argumento de la función elíptica inversa en la ec. (4.39), i.e.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(r_2 - r_1)(r - r_3)}{(r_2 - r_3)(r - r_1)} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_3}, \quad (4.41)$$

luego, tenemos que

$$\phi_\infty = \frac{2f(i)}{\sqrt{r_2\varepsilon(r_1 - r_3)}} F \left(k_1, \cos^{-1} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_3} \right)^{1/2} \right). \quad (4.42)$$

Donde $F(k, u)$ es la integral elíptica incompleta de primer especie definida en la ec. (A.4).

Las primeras tres gráficas de la Figura 4.4 ejemplifican a este tipo de trayectorias.

§4.3.4. Órbitas que llegan al origen de coordenadas II

Ahora consideremos el caso $D^2 > 0$. $P(r)$ tendrá, aparte de cero, una raíz real y las otras dos un par de complejos conjugados. Llamando

$$S = \sqrt[3]{D - R}, \quad T = \sqrt[3]{D + R}, \quad (4.43)$$

tenemos que las raíces están dadas por

$$r_{1,2} = a \pm ib, \quad r_3 = \frac{1}{3\varepsilon}(S - T - 2), \quad (4.44)$$

donde

$$a = \frac{1}{6\varepsilon}(T - S - 4), \quad b = \frac{1}{2\sqrt{3}\varepsilon}(S + T). \quad (4.45)$$

Definamos además los siguientes parámetros auxiliares

$$A^2 = (r_3 - a)^2 + b^2, \quad B^2 = a^2 + b^2. \quad (4.46)$$

Siempre que $\varepsilon < 0$ y en consecuencia $r_3 > 0$, la solución a la ec. (4.23) resulta (Byrd & Friedman, 1954)

$$\int_0^r \frac{dr}{|P(r)|^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{cn}^{-1} \left[\frac{(r_3 - r)B - rA}{(r_3 - r)B + rA} \right], \quad (4.47)$$

con el módulo k_3 dado por

$$k_3^2 = \frac{r_3^2 - (A - B)^2}{4AB}. \quad (4.48)$$

De esta manera llegamos a la siguiente ecuación de la órbita

$$r = \frac{r_3 B (1 - \operatorname{cn} \xi_3)}{A + B + (A - B) \operatorname{cn} \xi_3}, \quad (4.49)$$

con ξ_3 dado por

$$\xi_3 = \frac{\sqrt{|\varepsilon|AB}}{f(i)} \phi. \quad (4.50)$$

En este caso el ángulo ϕ cumple nuevamente $0 < \phi < \Pi$, ahora con

$$\Pi = \frac{2f(i)}{\sqrt{|\varepsilon|AB}} K(k_3). \quad (4.51)$$

En el caso $\varepsilon > 0$ se tiene $r_3 < 0$ y la solución es (Byrd & Friedman, 1954)

$$\int_0^r \frac{dr}{|P(r)|^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{cn}^{-1} \left[\frac{(r - r_3)B - rA}{(r - r_3)B + rA} \right], \quad (4.52)$$

con el módulo k_4 dado por

$$k_4^2 = \frac{(A + B)^2 - r_3^2}{4AB}. \quad (4.53)$$

A partir de la ec. (4.52) llegamos a la siguiente expresión para la trayectoria

$$r = \frac{r_3 B (1 - \operatorname{cn} \xi_4)}{B - A - (A + B) \operatorname{cn} \xi_4}, \quad (4.54)$$

con ξ_4 definido igual que ξ_3 (ver ec. (4.50)). La trayectoria etiquetada con ε_5 en la Figura 4.1 corresponde a este tipo de órbita así como también las últimas tres gráficas de la Figura 4.4. En este caso el ángulo ϕ cumple $0 < \phi < \phi_\infty$, con

$$\phi_\infty = \frac{2f(i)}{\sqrt{|\varepsilon|AB}} F \left(k_4, \cos^{-1} \left(\frac{B - A}{B + A} \right) \right). \quad (4.55)$$

Capítulo 5

Acreción con rotación hacia un agujero negro de Schwarzschild

En este capítulo consideramos el problema de una nube de gas de radio finito que acreta material hacia un objeto compacto y que gira alrededor de un eje que pasa a través de éste. Trabajamos con las mismas hipótesis descritas en el capítulo 3 excepto que en lugar de suponer un potencial central newtoniano, tratamos con el problema relativista en un espacio-tiempo descrito por la métrica de Schwarzschild tal como se describió en el capítulo 4.

En años recientes se han propuesto varios modelos para estudiar los flujos de acreción hacia objetos compactos como estrellas de neutrones y agujeros negros. En el capítulo 1 vimos que estos procesos se asocian a potentes fuentes de rayos X, a núcleos activos de galaxias así como a destellos de rayos γ . Como ejemplo de este tipo de modelos tenemos el trabajo de Huerta & Mendoza (2007), las simulaciones numéricas de Beloborodov & Illarionov (2001) y de Lee & Ramírez-Ruiz (2006). En el primer caso se hace un desarrollo parecido al que se sigue en este capítulo pero se llega a un resultado incorrecto. En el segundo caso se hace una aproximación de la ecuación geodésica y se obtiene un resultado que en el límite newtoniano no converge al modelo de Ulrich (1976). En el tercer caso se considera un potencial de Paczyński–Witta (pseudonewtoniano) para modelar las condiciones iniciales del proceso de acreción.

El interés de las simulaciones numéricas de Lee & Ramírez-Ruiz (2006) es explicar a los destellos de rayos γ como resultado del colapso gravitacional de las capas exteriores de una estrella. Durante este colapso, el gas de las capas exteriores es acretado hacia el

remanente compacto. Gracias a la rotación de las capas de gas de la estrella se forma una estructura de disco dentro de escalas pequeñas de longitud y tiempo (decenas de kilómetros y segundos respectivamente). No obstante, en este tipo de simulaciones se ha planteado la posibilidad de abordar el problema como un proceso cuasiestacionario y con simetría cilíndrica. En el caso de Beloborodov & Illarionov (2001) se tiene un escenario parecido pero aplicado a la acreción en núcleos de galaxias y su conexión con fuentes de rayos X. El modelo que se presenta en este capítulo puede proveer condiciones iniciales adecuadas a estas simulaciones; sobre todo si se tiene en cuenta que el radio de la nube de gas a partir de la cual cae el material, no sólo es mucho menor que el radio de las nubes consideradas en el contexto de formación estelar, sino que es comparable al radio gravitacional del objeto masivo en cuestión.

§5.1. El modelo y el campo de velocidad

La distribución de momento angular específico que corresponde al movimiento de un cascarón esférico de radio r_0 está dada por $h = h_0 \sin \theta_0$. En relación al capítulo anterior, si usamos a θ_0 para etiquetar a las partículas que comienzan su viaje desde r_0 , tenemos que $f(\theta_0) = \sin \theta_0$.

En la sección §4.2 se construyeron las distintas expresiones para las posibles trayectorias que puede seguir una partícula de prueba en este espacio. Sin embargo, esta descripción fue hecha con respecto al sistema de referencia \mathbf{S} en el cual el plano de la órbita coincide con el plano ecuatorial. Además, en dicha sección se tomó al periastro (r_2 o el origen según el caso) como referencia para medir al ángulo azimutal. Esto es, si al ángulo azimutal medido en este sistema de referencia le llamamos ψ entonces, $r(\psi = 0) = r_{\min}$. Por su parte, llamémosle ϕ al ángulo azimutal del sistema de referencia general \mathbf{R} .

Con el propósito de obtener una correspondencia entre los marcos de referencia \mathbf{S} y \mathbf{R} , debe de reconocerse que, para t y r fijas, la métrica de Schwarzschild se reduce a la de una 3-esfera ordinaria, esto es

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.1)$$

En este espacio podemos efectuar libremente las operaciones básicas de rotación. Luego, siguiendo el procedimiento descrito en la sección §2.2 llegamos a las siguientes relaciones

entre ángulos¹

$$\cos(\psi_0 - \psi) = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}, \quad \cos(\phi - \phi_0) = \frac{\tan \theta_0}{\tan \theta}. \quad (5.2)$$

Empleando las variables y parámetros adimensionales introducidos en la sección §4.2 las líneas del flujo de acreción están dadas por

$$r = \frac{r_3(r_2 - r_1) + r_1(r_3 - r_2)\text{cn}^2 \xi_1}{r_2 - r_1 + (r_3 - r_2)\text{cn}^2 \xi_1}, \quad \text{si } D^2 \leq 0 \text{ y } r_2 < r < r_3, \quad (5.3)$$

$$r = \frac{r_3 r_1 \text{sn}^2 \xi_2}{r_3 - r_1 \text{cn}^2 \xi_2}, \quad \text{si } D^2 \leq 0 \text{ y } 0 < r < r_1, \quad (5.4)$$

$$r = \frac{r_3 B (1 - \text{cn} \xi_3)}{A + B + (A - B) \text{cn} \xi_3}, \quad \text{si } D^2 > 0 \text{ y } r_3 > 0, \quad (5.5)$$

$$r = \frac{r_3 B (1 - \text{cn} \xi_4)}{B - A - (A + B) \text{cn} \xi_4}, \quad \text{si } D^2 > 0 \text{ y } r_3 < 0, \quad (5.6)$$

con los módulos k_{1-4} definidos en dicha sección y donde

$$\xi_{1,2} = \frac{\sqrt{\varepsilon r_2 (r_1 - r_3)}}{2 \sin \theta_0} \left[\psi_{0,1,2} - \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \right], \quad (5.7)$$

$$\xi_{3,4} = \frac{\sqrt{|\varepsilon| AB}}{\sin \theta_0} \left[\psi_{0,3,4} - \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \right]. \quad (5.8)$$

La condición que debe satisfacer el ángulo ψ_0 es

$$r(\psi_0) = 1/\mu. \quad (5.9)$$

A partir de las ecs. (5.3), (5.4), (5.5) y (5.7) encontramos

$$\psi_{0_1} = \frac{2 \sin \theta_0}{\sqrt{\varepsilon r_2 (r_1 - r_3)}} \text{cn}^{-1} \left[\frac{(r_2 - r_1)(1 - \mu r_3)}{(r_3 - r_2)(\mu r_1 - 1)} \right]^{1/2}, \quad (5.10)$$

¹Debido al cambio de sistema de referencia para medir al ángulo azimutal sobre el plano de la órbita tenemos que, si φ es el ángulo azimutal medido en referencia al apastro, tal como se usa en la ec. (2.6), entonces $\psi = \Pi - \varphi$ con lo que $\varphi - \varphi_0 = \psi_0 - \psi$.

$$\psi_{0_2} = \frac{2 \sin \theta_0}{\sqrt{\varepsilon r_2 (r_1 - r_3)}} \operatorname{cn}^{-1} \left[\frac{r_3 (\mu r_1 - 1)}{r_1 (\mu r_3 - 1)} \right]^{1/2}, \quad (5.11)$$

$$\psi_{0_3} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{|\varepsilon| AB}} \operatorname{cn}^{-1} \left[\frac{(\mu r_3 - 1)B - A}{(\mu r_3 - 1)B + A} \right], \quad (5.12)$$

$$\psi_{0_4} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{|\varepsilon| AB}} \operatorname{cn}^{-1} \left[\frac{(1 - \mu r_3)B - A}{(1 - \mu r_3)B + A} \right]. \quad (5.13)$$

Para evaluar numéricamente cualquiera de estas expresiones usamos el hecho de que

$$\operatorname{cn}^{-1}(x) = F(k, \cos^{-1}(x)), \quad (5.14)$$

donde $F(k, \Phi)$ es la integral elíptica incompleta de primera especie definida en la ec. (A.6).

En lo que respecta al campo de velocidades tenemos que las componentes espaciales de la 4-velocidad son

$$u^r = \frac{dr}{d\tau}, \quad u^\theta = \frac{d\theta}{d\tau}, \quad u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (5.15)$$

A partir de la segunda relación entre ángulos dada en la ec. (5.2) encontramos que las componentes angulares, medidas en unidades de $v_u = GM/h_0$, están dadas por

$$u^\phi = \frac{\sin^2 \theta_0}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.16)$$

$$u^\theta = \frac{\sin \theta_0}{r^2 \sin^2 \theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (5.17)$$

Para la componente radial usamos las ecs. (5.4)-(5.6), la regla de la cadena $dr/d\tau = (dr/d\theta)u^\theta$ junto con las expresiones para las derivadas de las funciones elípticas en la ec. (A.31) de forma que llegamos a

$$u^r = -\frac{\sqrt{r_2|\varepsilon|(r_3-r_1)}(r_3-r_2)(r_3-r_1)(r_2-r_1)\operatorname{cn}\xi_1\operatorname{sn}\xi_1\operatorname{dn}\xi_1}{r^2[r_2-r_1+(r_3-r_2)\operatorname{cn}^2\xi_1]^2}, \quad \text{si } D^2 \leq 0 \text{ y } r_2 < r < r_3, \quad (5.18)$$

$$u^r = -\frac{\sqrt{r_2|\varepsilon|(r_3-r_1)}(r_3-r_1)r_3r_1\operatorname{cn}\xi_2\operatorname{sn}\xi_2\operatorname{dn}\xi_2}{r^2[r_3-r_1\operatorname{cn}^2\xi_2]^2}, \quad \text{si } D^2 \leq 0 \text{ y } 0 < r < r_1, \quad (5.19)$$

$$u^r = -\frac{2\sqrt{|\varepsilon|AB}r_3AB\operatorname{sn}\xi_3\operatorname{dn}\xi_3}{r^2[A+B+(A-B)\operatorname{cn}\xi_3]^2}, \quad \text{si } D^2 > 0 \text{ y } r_3 > 0, \quad (5.20)$$

$$u^r = -\frac{2\sqrt{|\varepsilon|AB}r_3B(B-A)\operatorname{sn}\xi_3\operatorname{dn}\xi_3}{r^2[B-A-(A+B)\operatorname{cn}\xi_4]^2}, \quad \text{si } D^2 > 0 \text{ y } r_3 < 0. \quad (5.21)$$

En el caso relativista tenemos restricciones adicionales sobre los parámetros μ y ν . Puesto que ningún objeto físico puede moverse con una velocidad mayor que c entonces, si v_{ϕ_0} es la velocidad azimutal inicial, tenemos que $h_0 = r_0 v_{\phi_0} < r_0 c$ lo mismo que $v_{r_0} < c$. Estas condiciones se reescriben en términos de los parámetros del modelo como

$$\gamma\mu^2 < 2, \quad \gamma\nu^2 < 2. \quad (5.22)$$

Cuando $\gamma \ll 1$ y $v_{r_0}, v_{\phi_0} \ll c$, el flujo de acreción que se obtiene a partir del presente modelo es prácticamente indistinguible de la contraparte newtoniana discutida en el capítulo 3. En la figura Figura 5.1 se presentan 6 ejemplos de las líneas de flujo para el valor de $\gamma = 0.1$. A partir de la ec. (5.22), en los casos representados se tiene la restricción $\mu, \nu < \sqrt{2/\gamma} \approx 4.47$.

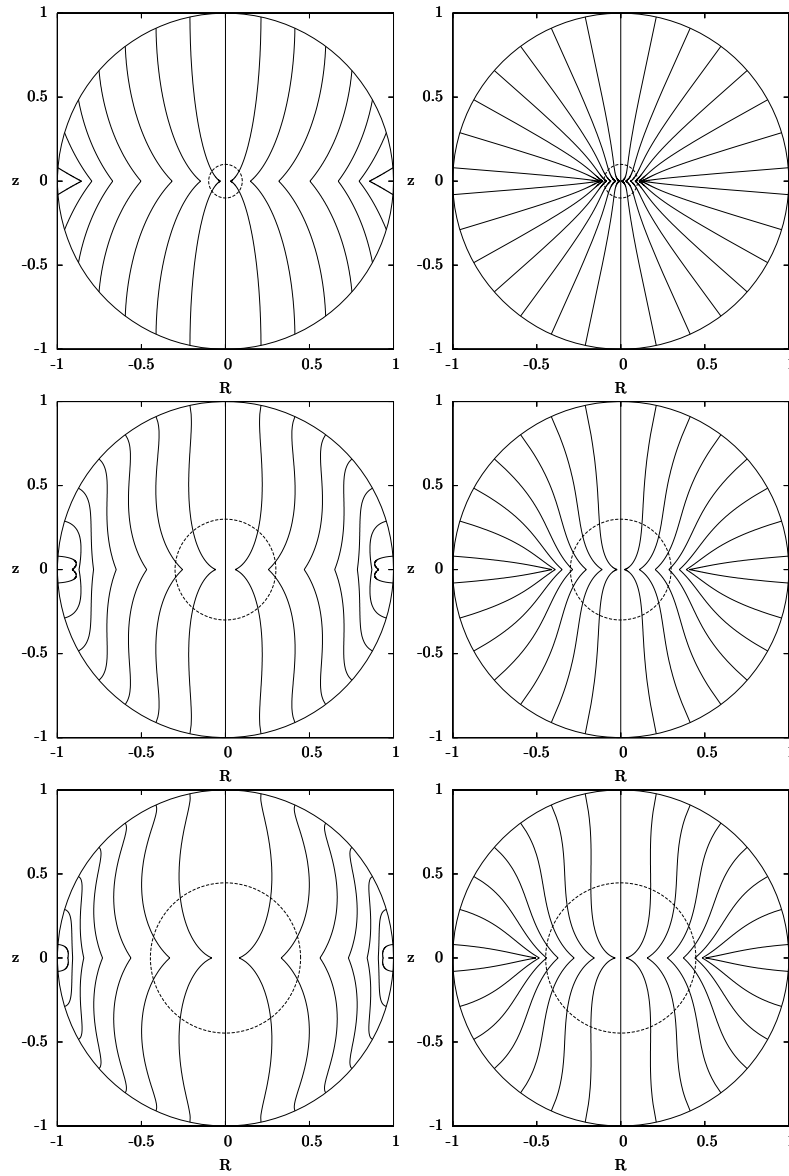


Figura 5.1: Se grafican ejemplos de las líneas de flujo de acreción que se obtienen con el modelo relativista. En los 6 casos se tiene el valor común $\gamma = 0.1$. En los cuadros superiores se tiene $r_s/r_0 = 0.1$ ($\mu = 1.0$), en los de en medio $r_s/r_0 = 0.3$ ($\mu = 3.0$) y en los inferiores $r_s/r_0 = 0.447$ ($\mu = 4.47$). De arriba hacia abajo y de derecha a izquierda se tiene $\nu = 0.0, 4.47, 0.7, 3.0, 0.5, 2.5$. En todos los casos la distancia se ha medido en unidades del radio de la nube original.

§5.2. Campo de densidad

Tal como se hizo en la sección §3.2, a partir de la ecuación de continuidad es posible derivar una expresión para el campo de densidad ρ . En el caso de la relatividad general, la ecuación de continuidad se escribe (Landau & Lifshitz, 1994)

$$(\rho u^i)_{;i} = 0. \quad (5.23)$$

donde el punto y coma representa la derivada covariante. En la expresión anterior la densidad se define a partir de la masa y del volumen que mide un observador en co-movimiento con el elemento de fluido en cuestión, esto es, a partir de la masa en reposo y de un elemento de volumen propio.

La 4-divergencia de un vector (A^i) puede escribirse como

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} A^i), \quad (5.24)$$

donde $g := \det[g^{ij}]$. En el caso particular de la métrica de Schwarzschild (ec. (5.1)) tenemos $g = -r^4 \sin^2 \theta$. Usando esta expresión y restringiéndonos al caso estacionario obtenemos que la ec. (5.23) se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (r^2 \sin \theta \rho u^i) = 0 \quad (5.25)$$

con $i = r, \theta, \phi$. Si ahora integramos la ecuación previa sobre un tubo cuya cara lateral se forma con líneas de corriente, con una sección de la esfera de radio $r = 1/\mu$ como tapa superior y otra sección de esfera para su cara inferior a cualquier r arbitraria, llegamos a

$$\rho u^i da_i \Big|_{r=1/\mu} = \rho u^i da_i \Big|_r. \quad (5.26)$$

Tomando en cuenta el hecho de que un elemento diferencial de área ortogonal a la dirección radial está dado por

$$da_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (5.27)$$

entonces, la ec. (5.26) se transforma en

$$\sin \theta_0 d\theta_0 d\phi_0 = -\rho u^r r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5.28)$$

En la expresión anterior la densidad se ha medido en unidades de ρ_u . Integrando esta ecuación respecto a ϕ desde 0 hasta 2π obtenemos

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left[-u^r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right)_r \right]^{-1}. \quad (5.29)$$

Este resultado tiene la misma forma que el que se encontró en la ec. (3.21), sin embargo debe tenerse en cuenta que los significados de la coordenada radial y de la velocidad u^r no son los mismos. En la sección §3.2 se encontró una expresión analítica de la derivada en el lado derecho a través de la ecuación de la órbita. Sin embargo, en este caso, la diferenciación directa de las ecs. (5.3)-(5.6) nos conduce a expresiones complejas donde intervienen derivadas respecto al argumento, al módulo e incluso a los límites de la integral elíptica. Este camino no parece clarificar en nada la búsqueda de una expresión analítica para el campo de densidad, sobre todo si se toma en cuenta que la ec. (5.29) constituye en sí misma una expresión formal y que la derivada del lado derecho puede evaluarse fácilmente de manera numérica.

§5.3. Disco de acreción

Tal como en el caso newtoniano el presente modelo predice la formación de un disco de acreción en el plano ecuatorial. Para obtener una expresión del radio de este disco evaluamos las ecs. (5.7) y (5.8) en $\theta = \pi/2$ y después tomamos $\theta_0 = \pi/2$ de forma que

$$\xi_{1,2} = \frac{\sqrt{r_2 \varepsilon (r_1 - r_3)}}{2} \left(\psi_{0_{1,2}} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.30)$$

$$\xi_{3,4} = \sqrt{|\varepsilon| AB} \left(\psi_{0_{3,4}} - \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.31)$$

En la Figura 5.2 se presenta una gráfica del radio del disco como función del parámetro ν para cuatro valores distintos del parámetro γ . En los cuatro ejemplos representados el parámetro μ tiene un valor fijo $\mu = 0.2$. Cada caso se ha dividido en dos secciones; el trazo continuo corresponde a $r_d > \gamma$, mientras que el punteado a $r_d < \gamma$. Recordando que, en unidades de r_u , γ es igual al radio gravitacional (la frontera del agujero negro), tenemos que el trazo punteado representa a aquellos casos donde el disco se forma por completo dentro del agujero negro. Puesto que ninguna señal enviada desde un radio menor que γ puede alcanzar la región exterior al agujero, reconocemos que estos casos están fuera del

estudio de nuestro modelo.

En la figura observamos también que r_d es una función decreciente tanto de ν como de γ . En el caso $\gamma = 0$ esta función es justamente $r_d = 1/(1 + \nu)$ como se había encontrado en la ec. (3.25).

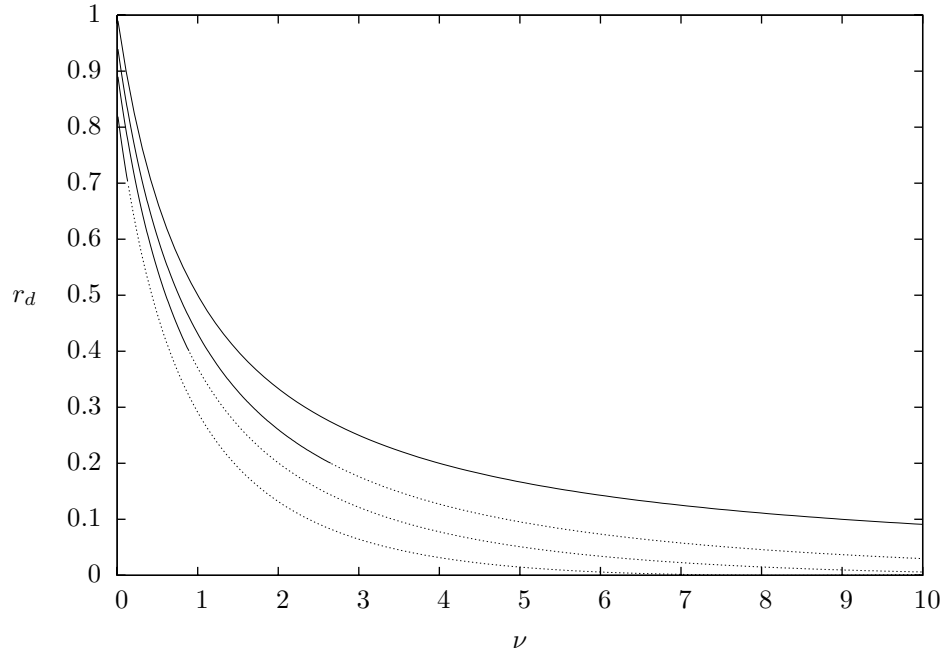


Figura 5.2: Se grafican cuatro ejemplos del radio del disco de acreción como función del parámetro ν para valores fijos de los otros dos parámetros μ y γ . De arriba hacia abajo tenemos $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.7$ mientras que el valor $\mu = 0.2$ es común en los cuatro casos. Cada gráfica se ha dividido en dos regiones, el trazo continuo corresponde a $r_d > \gamma = r_s/r_u$ mientras que el trazo punteado a $r_d < \gamma$. El radio del disco se ha medido en unidades de r_u .

En la Figura 5.3 se grafica el radio del disco como función del parámetro γ para valores fijos de μ y ν . En esta figura se ha trazado con una línea continua aquellos casos en los que $\gamma < r_d < 1/\mu$ y con una línea punteada a los casos en los que alguna de estas condiciones no se satisface. A partir de las Figuras 5.2 y 5.3 encontramos que el radio del disco es una función decreciente de cualquiera de los tres parámetros del modelo.

De la Figura 5.2 parecería que existe un valor crítico γ_c a partir del cual el disco de acreción resultante se forma por completo al interior del agujero negro. Este es efectivamente el caso y se encuentra numéricamente que el valor de este punto crítico es $\gamma_c \approx 0.8788$.

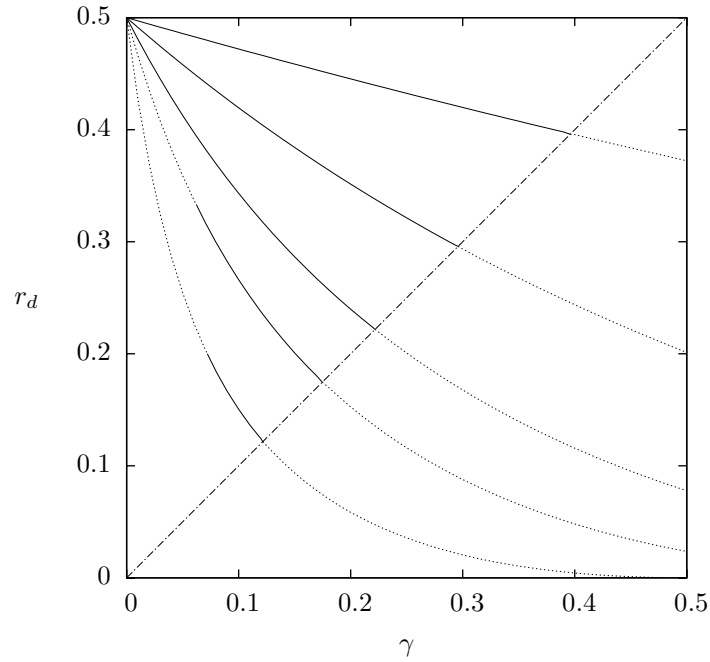


Figura 5.3: Se grafican cinco ejemplos del radio del disco de acreción como función del parámetro γ para valores fijos de los otros dos parámetros μ y ν . De arriba hacia abajo tenemos $\mu = 0, 1, 2, 3, 5$ mientras que el valor $\nu = 1.0$ es común en los cinco casos. En cada gráfica el trazo continuo representa a aquellos valores del radio del disco donde se satisface $r_s < r_d < r_0$. Los casos en los que esto no se satisface corresponden al trazo punteado. Nótese que los puntos sobre la recta identidad representan al radio de Schwarzschild. El radio del disco se ha medido en unidades de r_u .

En todos los casos representados en la Figura 5.4 se satisface la condición $\gamma\mu < 1$ que, de acuerdo a la ec. (4.17), implica $r_s < r_0$. Esto es, que el radio del agujero negro sea menor que el de la nube de gas acretante.

En lo que se refiere a las condiciones sobre μ y ν dadas en la ec. (5.22) tenemos que estas tienen efecto sólo sobre los dominios correspondientes a $\gamma = 0.1, 0.01$ y se traducen en un cuadrado de lado $L = 4.47, 14.14$ respectivamente. Este cuadro no se incluyó en la Figura 5.4 para no saturarla con información.

En el caso newtoniano, gracias a la introducción del parámetro ν , se obtuvieron sistemas nube-disco dentro de escalas de distancia menores a los que permitía el modelo de Ulrich. Esto es, era posible tener $\mu > 1$ siempre que ν fuera lo suficientemente grande. En la Figura 5.4 vemos que, para valores de $0 < \gamma < 0.3$, se puede tener $\mu > 1$ para valores de

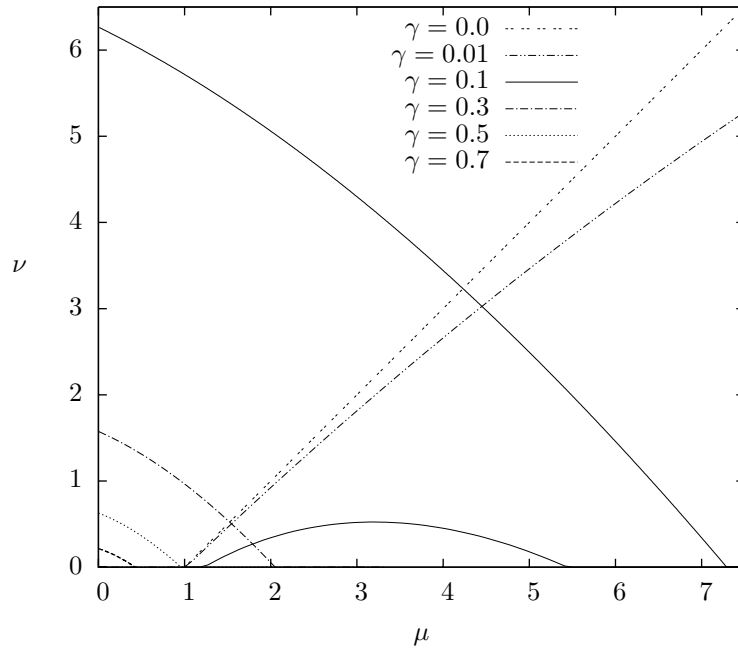


Figura 5.4: La gráfica muestra el dominio de variación de los parámetros μ y ν como función de γ . La frontera superior se forma de los valores μ, ν para los cuales $r_d = \gamma$. La frontera inferior, que en los casos representados existe sólo para $\gamma = 0, 0.1$ y 0.2 , se construye a partir de los valores μ, ν para los cuales $r_d = 1/\mu$, esto es, el radio del disco es igual al de la nube que lo forma. En el caso $\gamma = 0.01$ la región superior no aparece graficada ya que se encuentra por arriba de $\nu = 70$. Como puede observarse, la extensión de este dominio se reduce conforme γ crece. Para $\gamma > \gamma_c \approx 0.8788$ el disco de acreción resultante se forma por completo al interior del agujero negro sin importar el valor de los otros parámetros.

ν menores que los que se necesitaban en el modelo newtoniano. Este comportamiento se debe al papel atractivo que juega el término extra en el potencial relativista.

§5.4. Modelo de Ulrich relativista

En esta sección vamos a considerar el caso especial de una nube infinita con velocidad radial inicial nula, es decir, retomaremos las hipótesis del modelo de Ulrich (1976) pero para el campo gravitacional de un agujero negro.

El trabajo de Huerta & Mendoza (2007) avanza en esta misma dirección pero obtiene un resultado incorrecto como consecuencia de haber supuesto una relación entre ángulos

artificial. La relación entre ángulos adecuada es la que se obtiene a través de las rotaciones descritas en la sección §2.2

El hecho de que la velocidad radial inicial sea nula implica que $\nu = 0$ y $r_3 = 1/\mu$. Con estas condiciones de frontera tenemos que la energía adimensional ε definida en la ec. (4.19) se va a cero conforme $\mu \rightarrow 0$. Al tomar este límite tenemos que distinguir entre dos casos: $8\gamma \leq \sin^2 \theta_0$ y $8\gamma > \sin^2 \theta_0$. En el primero se tiene $D^2 \rightarrow 0^-$, mientras que en el segundo $D^2 \rightarrow 0^+$.

Ahora bien, si $8\gamma \leq \sin^2 \theta_0$ la expresión adecuada para las líneas de corriente es la ec. (5.3) y se cumple

$$r = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{r_3(r_2 - r_1) + r_1(r_3 - r_2)\text{cn}^2 \xi_1}{r_2 - r_1 + (r_3 - r_2)\text{cn}^2 \xi_1} \right] = \frac{r_2 - r_1 + r_1 \text{cn}^2 \xi_1}{\text{cn}^2 \xi_1}, \quad (5.32)$$

con

$$r_{1,2} = \frac{\sin^2 \theta_0}{4} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{8\gamma}{\sin^2 \theta_0}} \right), \quad (5.33)$$

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{2} \sin \theta_0} \left[\psi_{01} - \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \right], \quad \psi_{01} = \frac{\sqrt{2} \sin \theta_0}{\sqrt{r_2}} K(k_1), \quad (5.34)$$

$$k_1^2 = \frac{r_1}{r_2}. \quad (5.35)$$

Por otra parte, cuando $8\gamma > \sin^2 \theta_0$ tenemos que la ec. (5.5) es la expresión a considerar. Dado que en el límite $\mu \rightarrow 0$ se cumple

$$\frac{r_3 B}{A + B} \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta_0, \quad \frac{A - B}{A + B} \rightarrow 1, \quad \varepsilon_{AB} \rightarrow \sqrt{2\gamma} \sin \theta_0; \quad (5.36)$$

llegamos a

$$r = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{r_3 B (1 - \text{cn} \xi_3)}{A + B + (A - B) \text{cn} \xi_3} \right] = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta_0 \frac{1 - \text{cn} \xi_3}{1 + \text{cn} \xi_3}, \quad (5.37)$$

donde

$$\xi_3 = \frac{(2\gamma)^{1/4}}{\sqrt{\sin \theta_0}} \left[\psi_{0_3} - \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \right], \quad \psi_{0_3} = \frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{(2\gamma)^{1/4}} 2K(k_3), \quad (5.38)$$

$$k_3^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin \theta_0}{4\sqrt{2\gamma}}. \quad (5.39)$$

Usando la identidad de la ec. (A.12), las ecs. (5.32) y (5.37) pueden reescribirse como

$$r = \frac{r_2}{\operatorname{sn}^2 \chi_1}, \quad \text{si } 8\gamma \leq \sin^2 \theta_0, \quad (5.40)$$

$$r = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta_0 \frac{1 + \operatorname{cn} \chi_2}{1 - \operatorname{cn} \chi_2}, \quad \text{si } 8\gamma > \sin^2 \theta_0, \quad (5.41)$$

donde

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{2} \sin \theta_0} \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right), \quad \chi_2 = \frac{(2\gamma)^{1/4}}{\sqrt{\sin \theta_0}} \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right). \quad (5.42)$$

Para el campo de velocidades tenemos que las componentes angulares siguen siendo las mismas que en las ecs. (5.16) y (5.17). Para la componente radial obtenemos

$$u^r = -\sqrt{\frac{r_2}{2}} \frac{\operatorname{cn} \chi_1 \operatorname{dn} \chi_1}{r \operatorname{sn} \chi_1}, \quad \text{si } 8\gamma \leq \sin^2 \theta_0, \quad (5.43)$$

$$u^r = -2(2\gamma)^{1/4} \sqrt{\sin \theta_0} \frac{\operatorname{dn} \chi_2}{r \operatorname{sn} \chi_2}, \quad \text{si } 8\gamma > \sin^2 \theta_0. \quad (5.44)$$

En la Figura 5.5 se han graficado las líneas del flujo de acreción para tres valores distintos del parámetro γ . Los tres ejemplos representados corresponden al caso $\mu = 0$ y $\nu = 0$. Los segmentos de circunferencia trazados en la figura representan el radio de Schwarzschild para cada caso. Recuérdese que $r_s = \gamma$ cuando la distancia se mide en unidades de r_u . A partir de esta figura vemos que el radio del disco de acreción decrece conforme γ aumenta. Para el valor $\gamma = \gamma_c$, el disco se halla por completo dentro del agujero negro.

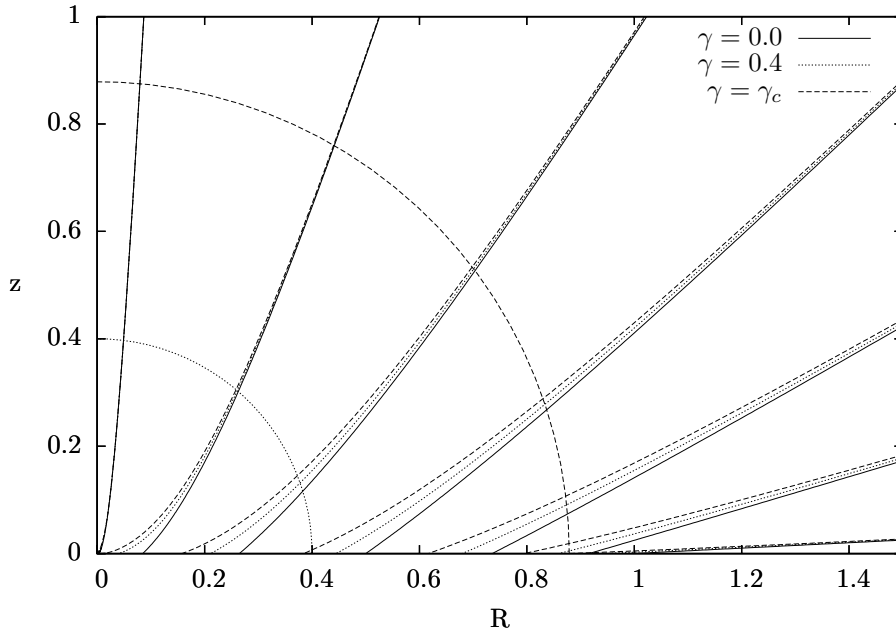


Figura 5.5: Se representan las líneas de flujo en el caso del modelo de Ulrich relativista ($\mu = 0$, $\nu = 0$) para tres valores del parámetro γ . Cuando $\gamma = 0$ el modelo se reduce al tradicional de Ulrich. Cuando $\gamma = \gamma_c$ tenemos que el disco de acreción se forma por completo dentro del agujero negro. Los arcos de circunferencia trazados en la figura representan el radio de Schwarzschild para cada valor del parámetro γ .

§5.5. Convergencia al modelo newtoniano

Para recuperar el modelo del capítulo 3 debemos considerar el límite no-relativista en el cual $\gamma \rightarrow 0$. En este caso, de acuerdo a la ec. (4.19), se cumple que $\varepsilon \geq -1$ y en consecuencia $D^2 \leq 0$. Como consecuencia, los casos representados por las ecs. (5.5) y (5.6) dejan de ser válidos. Por otro lado, dentro de este mismo límite se encuentra que $r_1 = 0$ por lo que el caso representado por la ec. (5.4) pierde sentido y resulta que la expresión para las líneas de corriente se reduce a la ec. (5.3). Para r_2 y r_3 tenemos

$$r_{2,3} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 \theta_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon} (-1 \pm e), \quad (5.45)$$

donde e es la excentricidad definida en la ec. (3.7).

De la definición del módulo k_1 en la ec. (4.31) vemos que en este caso $k_1 = 0$. De acuerdo al apéndice §A cuando este módulo es cero se cumple

$$\operatorname{cn}(x) = \cos(x), \quad \operatorname{sn}(x) = \sin(x), \quad \operatorname{dn}(x) = 1, \quad (5.46)$$

luego, la ec. (5.3) se transforma en

$$r = \frac{r_3 r_2}{r_2 + (r_3 - r_2) \operatorname{cn}^2 \xi_1} = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - e + 2e \cos^2 \xi_1}. \quad (5.47)$$

Por su parte, tenemos que

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left[\psi_0 - \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \right]. \quad (5.48)$$

Como vimos en al inicio de este capítulo, la relación entre los ángulos ψ y φ es $\psi = \Pi - \varphi$, que en el límite no relativista se convierte en $\psi = \pi - \varphi$, de forma que tenemos

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \xi_1 &= 1 + \cos \left[\pi - \varphi_0 - \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \right] \\ &= 1 - \cos \left[\cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) + \varphi_0 \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Tomando esto en cuenta, finalmente llegamos a

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - e \cos \zeta}, \quad (5.50)$$

con

$$\zeta = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) + \varphi_0. \quad (5.51)$$

Las ecs. (5.50) y (5.51) son las mismas expresiones que se encontraron en las ecs. (3.9) y (3.10).

Para el campo de velocidades tenemos que en el límite no relativista los intervalos de tiempo propio son iguales a los intervalos medidos por un observador en infinito y, en consecuencia, $d\tau = dt$, esto es,

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = ru^\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad v_\phi = r \sin \theta u^\phi = r \sin \theta \frac{d\phi}{dt}. \quad (5.52)$$

Usando esta última ecuación encontramos que, en lo que respecta a la componentes angu-

lares, las ecs. (5.16) y (5.17) llevan directamente a las ecs. (3.13) y (3.15) que corresponden al caso no relativista.

Por último, de las distintas expresiones que se encontraron para la componente radial vemos que la única que tiene sentido en el límite $\gamma \rightarrow 0$ es la ec. (5.18). Esta ecuación puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 v_r &= -\frac{\sqrt{-\varepsilon r_2 r_3} (r_3 - r_2) r_3 r_2 \cos \xi_1 \sin \xi_1}{r^2 [r_2 + (r_3 - r_2) \cos^2 \xi_1]^2} \\
 &= -\frac{2e \sin \theta_0 \cos \xi_1 \sin \xi_1}{r (1 - e + 2e \cos^2 \xi_1)} \\
 &= -\frac{e \sin \theta_0 \sin \zeta}{r (1 - e \cos \zeta)},
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

que es la misma expresión que se encontró en la ec. (3.16).

Conclusiones

En el presente trabajo se generalizó el modelo de acreción de Ulrich (1976) a dos niveles. Primero, dentro del esquema newtoniano, se relajaron dos de sus hipótesis principales para así considerar la acreción desde una nube de gas de tamaño finito con una velocidad radial inicial no necesariamente nula. Estas modificaciones dieron lugar a un modelo con dos parámetros libres que permiten considerar un mayor espectro de condiciones iniciales y, con esto, un mayor campo de aplicación a situaciones astrofísicas. Se tomó como ejemplo el estudio de formación estelar en regiones donde las condiciones exteriores imponen una amplia gama de valores para el tamaño de la nube progenitora y para la tasa de acreción.

En segundo lugar se llevó este nuevo modelo a un régimen relativista al considerar un espacio-tiempo de Schwarzschild. Esta extensión del modelo se propone para el estudio de los flujos de acreción hacia estrellas de neutrones y agujeros negros, así como para explosiones de colapsares y destellos de rayos γ .

Para algunos valores de los parámetros del modelo propuesto se encuentran importantes diferencias entre las líneas de flujo y el campo de densidad obtenidos con aquellos predichos por el modelo tradicional de Ulrich. Se demostró que el modelo relativista se reduce al newtoniano (al considerar el límite no relativista) así como este último se reduce al modelo de Ulrich al tomar las condiciones iniciales de éste.

En el caso newtoniano, al considerar una velocidad radial inicial no nula, se encontró la posibilidad de tener sistemas nube-disco de acreción dentro de escalas espaciales que hubieran sido imposibles en el modelo de Ulrich.

En la extensión relativista se encontró una cota superior para las velocidades iniciales así como la existencia de sistemas nube-disco de dimensiones aún más pequeñas que en el caso newtoniano.

Las principales limitaciones de ambos modelos son el asumir una situación estacionaria y hacer un análisis balístico de las trayectorias que siguen los elementos del gas. Por otro lado, la extensión newtoniana conserva la simplicidad en las expresiones para los campos de velocidades y densidad que es uno de los mayores atributos de la solución de Ulrich. Este no es el caso de los resultados obtenidos con el modelo relativista.

Apéndice

§A. Funciones elípticas de Jacobi

En este apéndice se definen las integrales y las funciones elípticas de Jacobi y se mencionan algunas de sus propiedades básicas. Los fundamentos matemáticos pueden encontrarse en los libros de Abramowitz & Stegun (1970), Cayley (1961), Lawden (1989) y Hancock (1917).

En muchas aplicaciones físicas es común encontrarse con integrales de la forma

$$f(x) = \int_0^x \frac{du}{[P(u)]^{1/2}}, \quad (\text{A.1})$$

con $P(u)$ un polinomio en u . Cuando este polinomio es de segundo orden es posible proponer un cambio de variable algebraico² $v = v(u)$ que nos lleve a la integral elemental

$$\int_0^y \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \sin^{-1} y = \cos^{-1} \sqrt{1-y^2}, \quad (\text{A.2})$$

donde $y = v(x)$.

En el caso en el que $P(u)$ sea un polinomio de tercer o cuarto grado existen cambios de variable trigonométricos que nos llevan a la forma estándar

$$\int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} = F(k, \phi), \quad (\text{A.3})$$

esta integral recibe el nombre de integral elíptica de Jacobi del primer tipo. La constante k es el módulo de la integral y ϕ la amplitud de Jacobi. Por medio de cambios de variable algebraícos, la integral anterior puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} &= \text{sn}^{-1} y = \text{cn}^{-1} \sqrt{1-y^2} = \text{dn}^{-1} \sqrt{1-k^2y^2} \\ &= F(k, \phi) = F(k, \sin^{-1} y), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

²En este caso, si $P(u) = au^2 + bu + c$ el cambio de variable adecuado es $v(u) = 2au + b$

donde $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ y $\operatorname{dn}(u, k)$ son las funciones elípticas de Jacobi (Lawden, 1989). Estas funciones se definen como inversas de la función $F(k, \phi)$ de la siguiente manera

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \phi = \sin[F^{-1}(k, u)], \quad (\text{A.5})$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \phi = \cos[F^{-1}(k, u)], \quad (\text{A.6})$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \quad (\text{A.7})$$

Estas funciones se relacionan con las funciones trigonométricas tanto circulares como hiperbólicas mediante

$$\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u, \quad \operatorname{sn}(u, 1) = \tanh u, \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{cn}(u, 0) = \cos u, \quad \operatorname{cn}(u, 1) = \operatorname{sech} u, \quad (\text{A.9})$$

$$\operatorname{dn}(u, 0) = 1, \quad \operatorname{dn}(u, 1) = \operatorname{sech} u. \quad (\text{A.10})$$

Las funciones elípticas de Jacobi son periódicas en $K(k)$ y $K'(k)$ de acuerdo a

$$\operatorname{sn}(u + 2mK + 2niK', k) = (-1)^m \operatorname{sn}(u, k), \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{cn}(u + 2mK + 2niK', k) = (-1)^{m+n} \operatorname{cn}(u, k), \quad (\text{A.12})$$

$$\operatorname{dn}(u + 2mK + 2niK', k) = (-1)^n \operatorname{dn}(u, k), \quad (\text{A.13})$$

donde

$$K(k) = F(k, \pi/2) \quad (\text{A.14})$$

es la integral elíptica completa del primer tipo, $K'(k) = K(k')$ y $k' = \sqrt{1 - k^2}$ es el módulo complementario.

Por definición, las funciones elípticas de Jacobi satisfacen las siguientes identidades

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad (\text{A.15})$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad (\text{A.16})$$

$$\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = k'^2. \quad (\text{A.17})$$

Los módulos satisfacen la relación

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (\text{A.18})$$

Entre otras relaciones importantes tenemos

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad \operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{cn} 2u}, \quad (\text{A.19})$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad \operatorname{cn}^2 u = \frac{\operatorname{dn} 2u + \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u}, \quad (\text{A.20})$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad \operatorname{dn}^2 u = \frac{\operatorname{dn} 2u + \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{cn} 2u}. \quad (\text{A.21})$$

Algunos valores especiales de estas funciones son

$$\operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{sn}(0) = 0, \quad \operatorname{dn}(0) = 1, \quad (\text{A.22})$$

$$\operatorname{cn}(K) = 0, \quad \operatorname{sn}(K) = 1, \quad \operatorname{dn}(K) = k', \quad (\text{A.23})$$

$$\operatorname{cn}(2K) = -1, \quad \operatorname{sn}(2K) = 0, \quad \operatorname{dn}(2K) = 1, \quad (\text{A.24})$$

$$\operatorname{cn}(u+K) = -k' \operatorname{sd}(u), \quad \operatorname{sn}(u+K) = \operatorname{cd}(u), \quad \operatorname{dn}(u+K) = k' \operatorname{nd}(u), \quad (\text{A.25})$$

$$\operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn}(u), \quad \operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn}(u). \quad (\text{A.26})$$

Nueve funciones elípticas más se obtienen al tomar cocientes o recíprocos de las ya

definidas tal como se muestra a continuación

$$\operatorname{ns} u = 1/\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{nc} u = 1/\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{nd} u = 1/\operatorname{dn} u, \quad (\text{A.27})$$

$$\operatorname{sc} u = \operatorname{sn} u/\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{cd} u = \operatorname{cn} u/\operatorname{dn} u, \quad \operatorname{ds} u = \operatorname{dn} u/\operatorname{sn} u, \quad (\text{A.28})$$

$$\operatorname{cs} u = \operatorname{cn} u/\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{dc} u = \operatorname{dn} u/\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{sd} u = \operatorname{sn} u/\operatorname{dn} u. \quad (\text{A.29})$$

Finalmente, las derivadas de las funciones elípticas de Jacobi están dadas por

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \quad (\text{A.32})$$

Bibliografía

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A., 1970. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1970.
- ADAMS, F. C. & SHU, F. H., 1986. Infrared spectra of rotating protostars. *Astrophysical Journal*, **308**, 836–853.
- BELOBORODOV, A. M. & ILLARIONOV, A. F., 2001. Small-scale inviscid accretion discs around black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **323**, 167–176.
- BENSON, P. J. & MYERS, P. C., 1989. A survey for dense cores in dark clouds. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **71**, 89–108.
- BONDI, H., 1952. On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **112**, 195+.
- BUTNER, H. M., EVANS, II, N. J., LESTER, D. F., LEVREULT, R. M. & STROM, S. E., 1991. Testing models of low-mass star formation - High-resolution far-infrared observations of L1551 IRS 5. *Astrophysical Journal*, **376**, 636–653.
- BYRD, P. & FRIEDMAN, M. D., 1954. *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. Springer.
- CASSEN, P. & MOOSMAN, A., 1981. On the formation of protostellar disks. *Icarus*, **48**, 353–376.
- CAYLEY, A., 1961. *An elementary treatise on elliptic functions*. New York : Dover, 1961.
- FRANK, J., KING, A. & RAINE, D. J., 2002. *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition*. Accretion Power in Astrophysics, by Juhan Frank and Andrew King and Derek

- Raine, pp. 398. ISBN 0521620538. Cambridge, UK: Cambridge University Press, February 2002.
- FROLOV, V. P. & NOVIKOV, I. D., 1998. *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments*. Kluwer Academic.
- GLENDENNING, N. K., 2000. *Compact Stars*. Springer.
- HANCOCK, H., 1917. *Elliptic Integrals*. New York : Dover, 1917.
- HENNEBELLE, P., WHITWORTH, A. P., CHA, S.-H. & GOODWIN, S. P., 2004. Protostellar collapse induced by compression - II. Rotation and fragmentation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **348**, 687–701.
- HUBENY, I., AGOL, E., BLAES, O. & KROLIK, J. H., 2000. Non-LTE Models and Theoretical Spectra of Accretion Disks in Active Galactic Nuclei. III. Integrated Spectra for Hydrogen-Helium Disks. *Astrophysical Journal*, **533**, 710–728.
- HUERTA, E. A. & MENDOZA, S., 2007. A simple accretion model of a rotating gas sphere onto a Schwarzschild black hole. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **43**, 191–202.
- JIJINA, J., MYERS, P. C. & ADAMS, F. C., 1999. Dense Cores Mapped in Ammonia: A Database. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **125**, 161–236.
- KENYON, S. J., CALVET, N. & HARTMANN, L., 1993. The embedded young stars in the Taurus-Auriga molecular cloud. I - Models for spectral energy distributions. *Astrophysical Journal*, **414**, 676–694.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1989. *Mechanics*, vol. 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 3rd ed.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1994. *The Classical Theory of Fields*, vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 4th ed.
- LAWDEN, D. F., 1989. *Elliptic Functions and Applications*. Springer.
- LEE, W. H. & RAMÍREZ-RUIZ, E., 2006. Accretion Modes in Collapsars: Prospects for Gamma-Ray Burst Production. *Astrophysical Journal*, **641**, 961–971.

- LIN, D. N. C. & PRINGLE, J. E., 1990. The formation and initial evolution of protostellar disks. *Astrophysical Journal*, **358**, 515–524.
- MENDOZA, S., 2003. *Astrofísica Relativista*. <http://www.mendoza.org/sergio/gravitacion>.
- MENDOZA, S., CANTÓ, J. & RAGA, A. C., 2004. Hydrodynamical Interaction between an Accretion Flow and a Stellar Wind. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **40**, 147–165.
- NAGEL, E., 2007. Formation of a Two-Dense-Rings-Pattern Disk from the Collapse of a Cloud. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **43**, 257–270.
- SHAPIRO, S. L. & TEUKOLSKY, S. A., 1983. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. John Wiley & Sons.
- STAHLER, S. W., KORYCANSKY, D. G., BROTHERS, M. J. & TOUMA, J., 1994. The early evolution of protostellar disks. *Astrophysical Journal*, **431**, 341–358.
- ULRICH, R. K., 1976. An infall model for the T Tauri phenomenon. *Astrophysical Journal*, **210**, 377–391.
- WHITNEY, B. A., WOOD, K., BJORKMAN, J. E. & WOLFF, M. J., 2003. Two-dimensional Radiative Transfer in Protostellar Envelopes. I. Effects of Geometry on Class I Sources. *Astrophysical Journal*, **591**, 1049–1063.