

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Simulación de la formación de hadrones en condiciones
extremas

Tesis que para obtener el título de:
Físico
Daniel Hernández Ramos

Asesor
Dr. Genaro Toledo Sánchez
2008



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

Act. Mauricio Aguilar González
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Simulación de la formación de hadrones en condiciones extremas

realizado por **Hernández Ramos Daniel** con número de cuenta **0-9039863-6** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Física. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Axel de la Macorra Petterson	
Propietario	Dra. Gabriela Murguía Romero	
Propietario Tutor	Dr. Genaro Toledo Sánchez	
Suplente	Dr. Dany Page Rollinet	
Suplente	Dr. Eleazar Cuautle Flores	

Atentamente,

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Ciudad Universitaria, D. F., a 12 de mayo de 2008

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

A MIS PADRES

**EVELIA RAMOS MARTÍNEZ
MARIO HERNÁNDEZ MARTÍNEZ**

Agradecimientos

Le agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Física el haberme permitido formar parte de su comunidad y poder realizar mis estudios de Licenciatura.

Quiero agradecer profundamente al Dr. Genaro Toledo por brindarme su confianza y su tiempo para la realización de este trabajo; gracias por todo lo que me ha enseñado.

Le doy las gracias al Dr. Axel de la Macorra, a la Dra. Gabriela Murguía, al Dr. Dany Page y al Dr. Eleazar Cuautle por todas sus aportaciones hechas al presente trabajo. Lo enriquecieron tanto en contenido como en claridad.

A mis hermanos Evelia, Alejandra y David gracias por ser siempre un apoyo incondicional y por sus consejos.

A mis sobrinos Ingrid, José Eduardo y Miguel Ángel gracias por llenar mi vida de alegría.

A Bersa y José, les agradezco por ser artífices de los seres que tanto quiero y por su aprecio.

A mis amigos: Alejandro Gutierrez, Carlos González, Eber Sánchez, Pedro Vazquez y Ricardo Mancilla, gracias por apoyarme siempre que lo he requerido. Su amistad ha sido invaluable.

A mi novia Martha Patricia. Gracias por todos estos años en los cuales le has dado a mi vida tanta dicha. Gracias Pat.

Finalmente, quiero darle las gracias a mis padres. Siempre serán un ejemplo de como ser mejores en la vida. Muchísimas gracias.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Las interacciones fundamentales y el Modelo Estándar	1
1.2. La interacción fuerte	4
1.2.1. Evidencia de la carga de color	6
1.2.2. Evidencia de los gluones	8
1.3. El plasma de quarks y gluones	9
1.4. Presentación y objetivo del trabajo	12
2. El problema de 2 y 3 cuerpos: mesones y bariones	15
2.1. Problema de dos cuerpos	15
2.2. Problema de tres cuerpos	18
2.3. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de dos cuerpos: $\langle r_2^2 \rangle$. . .	20
2.4. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de tres cuerpos: $\langle r_3^2 \rangle$. .	21
3. Formación de hadrones en el modelo de “String-Flip”	23
3.1. Función de onda variacional	23
3.2. Potencial de muchos cuerpos	25
3.3. Energía variacional para mesones y bariones	27
3.4. Cálculo Monte Carlo	30
4. Resultados	33
4.1. Parámetro variacional óptimo y evolución de la energía	33
4.2. Distribución radial	37
4.3. Funciones de correlación	41
4.4. Identificación de la formación hadrónica	47

5. Conclusiones	49
A. Algoritmo de Metrópolis	53
B. Conversión de unidades	57
Bibliografía	59

Resumen

La materia nuclear puede alcanzar densidades muy altas, tanto en las colisiones de iones pesados a energías relativistas, como en el interior de las estrellas de neutrones (hasta 10 veces el valor de la densidad nuclear normal). Es muy factible que en ambos casos, los quarks que forman la materia, ya no se encuentren completamente ligados por gluones formando hadrones, sino en forma de un plasma de quarks y gluones.

Con el fin de analizar cómo se comporta la materia hadrónica al alcanzar estas regiones de alta densidad, en este trabajo realizamos una simulación Monte Carlo de la forma en cómo ocurre el proceso de hadronización/deconfinamiento, como función de la densidad de energía. Para ello utilizamos un sistema formado por quarks u y d , e incorporamos la dinámica vía el modelo de String-Flip, el cual incluye propiedades de la interacción fuerte.

La simulación realizada se divide en dos casos: mesones (sistema quark-antiquark) y bariones (sistema de tres quarks). Ambas simulaciones se realizan por separado y se comparan los resultados entre sí. A bajas densidades, equiparamos el comportamiento de ambos sistemas como si los quarks actuaran dentro de un potencial de tipo armónico, para ello se analiza con detalle los problemas de dos y tres cuerpos de manera analítica. A densidades altas, esperamos que los quarks se comporten como si fuesen un gas de Fermi. Para entender esta transformación se realiza un análisis detallado del sistema vía una aproximación variacional la cual incluye un potencial de muchos cuerpos.

Para caracterizar el sistema, determinamos el parámetro variacional óptimo minimizando el valor de la energía, calculamos las distribuciones radiales de los hadrones formados, las funciones de correlación correspondientes y la fracción de grupos de 3 formados (caso bariónico). Además, hacemos una comparación de estas observables con los resultados correspondientes del sistema a la densidad nuclear normal.

Los resultados obtenidos podrían dar indicios de porqué se observa una variación en la razón de producción protón/pión en colisiones de iones pesados, y mostrar el perfil de contenido hadrónico dentro de una estrella de neutrones.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo presentamos las ideas generales de la teoría que da origen al Modelo Estándar de las partículas elementales y se plantea el objetivo y la motivación del trabajo.

1.1. Las interacciones fundamentales y el Modelo Estándar

Las partículas fundamentales son los ladrillos primigenios que forman la materia. El concepto de partícula elemental ha ido cambiando con el desarrollo de la física. A finales del siglo XIX, se encontró que la materia estaba hecha de moléculas y éstas de átomos; los átomos están compuestos de un núcleo y de electrones, el núcleo a su vez está formado de nucleones: protones y neutrones; finalmente, los nucleones están constituidos por quarks. Con el desarrollo de los grandes aceleradores, se han descubierto muchas partículas (más de 300) llamadas **hadrones**. Hay dos clases de hadrones: los **bariones**, tales como el protón y el neutrón, con número bariónico $\mathbf{B=1}$ y los **mesones**, tales como los piones y los kaones, con $\mathbf{B=0}$.

La teoría moderna -llamada **Modelo Estándar**- intenta explicar todo el fenómeno de la física de partículas en términos de las propiedades e interacciones de tres tipos distintos de partículas: las dos primeras, *leptones* y *quarks*, son fermiones con espín $= \frac{1}{2}$; las del tercer grupo tienen espín $= 1$ y se les llama *bosones de norma*, los cuales actúan como portadores de la fuerza. Estas partículas son consideradas elementales, es decir, son tratadas como partículas puntuales sin estructura interna ni estados excitados.

El ejemplo más familiar de un leptón es el electrón, el cual está ligado a los núcleos

atómicos por medio de la *interacción electromagnética*, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Otro ejemplo bien conocido es el neutrino, el cual es una partícula ligera y neutra, observada inicialmente en los productos de decaimiento β . La fuerza responsable de este decaimiento es la *interacción débil*.

Los quarks (q), se mantienen ligados formando a los hadrones, debido a la tercera fuerza de la naturaleza: la *interacción fuerte*. La teoría es inusual por el hecho de que los quarks no son observados directamente, solamente pueden observarse sus estados ligados. Aun así, hay una abrumadora evidencia que avala su existencia. La interacción fuerte entre los quarks también produce fuerzas observadas entre los hadrones, como la fuerza nuclear, la cual mantiene a los nucleones juntos.

Otras dos características de los quarks son, por un lado, que vienen en *seis sabores*: u (*up*), d (*down*), s (*strange*), c (*charm*), b (*bottom o beauty*), t (*top o true*) y por otro lado, cada uno de ellos tiene una de las siguientes tres *cargas de color*: *blue, green o red*, (azul, verde o rojo, respectivamente). Así, un quark u puede ser blue (u_b), green (u_g) o red (u_r) y lo mismo para los otros cinco sabores. Para los antiquarks (\bar{q}), escribimos \bar{u}_b para referirnos, por ejemplo, a la antipartícula de un quark u blue, y es un quark u antiblue.

El término *color* no tiene nada que ver con su significado ordinario, sólo es una forma de denotar tres nuevas propiedades que los quarks poseen; sin embargo, tiene una interpretación especial: *Todas las partículas en la naturaleza son incoloras*. Esto significa que, ya sea que la cantidad total de cada color es cero, por ejemplo *rojo – antirrojo* o que los tres colores se encuentran en la misma cantidad. Esta regla explica porqué no puede haber una partícula hecha de dos quarks de colores distintos ($q_r q_g$) o de cuatro quarks con colores de la forma ($q_b q_g q_r q_b$) y porqué no hay en la naturaleza quarks individuales. Las únicas combinaciones incoloras conocidas son quark-antiquark del mismo color ($q_r \bar{q}_r, q_b \bar{q}_b, q_g \bar{q}_g$: los mesones), tres quarks o tres antiquarks de distinto color ($q_b q_g q_r$: los bariones y $\bar{q}_b \bar{q}_g \bar{q}_r$: los antibariones). Podría, desde luego, haber partículas de más quarks, pero se interpretaría como un estado ligado de dos hadrones [1].

Además de las interacciones fuerte, débil y electromagnética, hay una cuarta fuerza en la naturaleza: *la gravedad*. Sin embargo, la interacción gravitatoria entre partículas elementales es tan pequeña, comparada con las otras tres, que no es considerada dentro de la teoría del Modelo Estándar, por lo que uno se refiere a las *tres fuerzas de la naturaleza*. Consideremos el ejemplo de la interacción electromagnética. En la física clásica, la

interacción entre dos partículas cargadas se transmite por medio de ondas electromagnéticas, las cuales se emiten y absorben de manera continua. Esto resulta ser una descripción adecuada para grandes distancias, pero a distancias cortas, la naturaleza cuántica de la interacción debe tomarse en cuenta. En la teoría cuántica, la interacción se transmite discontinuamente a través del intercambio de fotones, siendo estos los portadores de la interacción. El largo alcance de la fuerza está relacionado con el hecho de que el fotón tiene masa cero.

Las interacciones débil y fuerte también están asociadas con el intercambio de partículas. Para la interacción débil se les llama *bosones* W^\pm y Z , y son muy masivos; su masa la adquieren vía el mecanismo de *Higgs*, por lo que la fuerza resultante es de corto alcance. Las partículas equivalentes para la interacción fuerte se llaman *gluones* y tienen masa cero como los fotones. Así, por analogía con el electromagnetismo, la interacción básica entre los quarks debería ser de largo alcance. Sin embargo, debido a la hipótesis de confinamiento, la interacción fuerte residual entre los estados ligados de los quarks (los hadrones) es de corto alcance. Estas interacciones pueden ser vistas como manifestaciones de la invariancia bajo la simetría de norma local correspondiente: $\mathbf{U}(1)$ para la interacción electromagnética, $\mathbf{SU}(2)$ para la débil y $\mathbf{SU}(3)$ para la fuerte.

Un fotón no se acopla con otro fotón porque no están cargados eléctricamente; mientras que los bosones débiles y los gluones sí pueden acoplarse entre ellos, ya que estos llevan una carga débil o fuerte. Esto se puede entender en el contexto de la teoría de norma al hecho de que el electromagnetismo está descrito por medio de una teoría de norma Abelianas, mientras que las fuerzas débil y fuerte son teorías de norma no-Abelianas. En resumen, las partículas elementales en el Modelo Estándar son: *Quarks*, *Leptones*, *Bosones de norma*, *Boson de Higgs*

Los números cuánticos de los quarks y los leptones están resumidos en las tablas 1.1 y 1.2, respectivamente. Es interesante notar que tanto los quarks como los leptones están apareados en tres dobletes, los miembros de cada doblete participan en los procesos de interacción débil juntos. La repetición de los dobletes plantea que hay tres generaciones de quarks y leptones. Las partículas correspondientes en las diferentes generaciones, por ejemplo: u , c y t tienen exactamente los mismos números cuánticos. La única propiedad que distingue las diferentes generaciones es la masa [2].

En la siguiente sección veremos algunos detalles relevantes sobre la interacción fuerte, los cuales serán parte del tema de interés del presente trabajo.

Quark	Q	I_3	S	C	B	T	m
u (<i>up</i>)	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1.5 ~ 5 MeV
d (<i>down</i>)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	3 ~ 9 MeV
s (<i>strange</i>)	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	0	60 ~ 170 MeV
c (<i>charm</i>)	$+\frac{2}{3}$	0	0	+1	0	0	1.47 ~ 1.83 GeV
b (<i>bottom</i>)	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0	4.6 ~ 5.1 GeV
t (<i>top</i>)	$+\frac{2}{3}$	0	0	0	0	+1	174.3 ± 4.0 GeV

Cuadro 1.1: Números cuánticos de los quarks: Q (carga eléctrica), I_3 (componente de simetría de isospín), S (*strangeness*), C (*charmness*), B (*bottomness*), T (*topness*), los cuales están asociados con los quarks s, c, b y t respectivamente, m (masa).

Leptón	Q	L_e	L_μ	L_τ	m
e (<i>electrón</i>)	-1	+1	0	0	~ 0.511 MeV
ν_e (<i>neutrino del electrón</i>)	0	+1	0	0	<0.225 MeV
μ (<i>muón</i>)	-1	0	+1	0	≈ 105.66 MeV
ν_μ (<i>neutrino del muón</i>)	0	0	+1	0	≤ 0.19 MeV
τ (<i>tau</i>)	-1	0	0	+1	≈ 1777 MeV
ν_τ (<i>neutrino del tau</i>)	0	0	0	+1	≤ 18.2 MeV

Cuadro 1.2: Números cuánticos de los leptones: Q (carga eléctrica), L_e (número leptónico de la familia del electrón), L_μ (número leptónico de la familia del muón), L_τ (número leptónico de la familia del tau), m (masa)

1.2. La interacción fuerte

En la tercera década del siglo XX, Yukawa propuso que la interacción fuerte estaba mediada por piones. Dado que el núcleo contiene muchos protones, debería existir una fuerza atractiva más *fuerte* que venciera la repulsión eléctrica entre los mismos, aun así, no hubo el desarrollo de una teoría como tal de la interacción fuerte en aquel entonces. Muchos hadrones, además de los nucleones y los piones, habían sido descubiertos y se encontró que la interacción entre ellos era bastante complicada y no parecía ser fundamental.

Gell-Mann y Zweig propusieron en 1964 que los hadrones estaban compuestos por otras partículas, a las que llamaron quarks, para explicar su espectroscopía. Estas nuevas

partículas se establecieron como el constituyente fundamental de los hadrones en el desarrollo del modelo de quarks en las décadas de los 60's y 70's [2].

La teoría que describe las interacciones fuertes en el modelo estándar es la cromodinámica cuántica (**QCD** por las siglas en inglés de *quantum chromodynamics*), la cual describe la dinámica de los quarks y de los gluones. Aunque la QCD no ha sido probada con la misma precisión que la electrodinámica cuántica (QED), aún no ha estado en contradicción con algún experimento realizado hasta el momento. La QCD es una teoría de norma no-Abeliana con simetría SU(3) de color, lo que implica una *independencia del sabor* en las interacciones fuertes. Esto significa que los diferentes sabores de quarks tienen interacciones fuertes idénticas.

Una segunda característica de la interacción fuerte es que las fuerzas entre los quarks tiene que ser de largo alcance, porque los gluones no tienen masa. Esto no implica que las fuerzas entre los hadrones sean también de largo alcance, ya que los hadrones tienen carga neta de color cero. Las fuerzas entre los hadrones “incolores” son fuerzas residuales de las que experimentan sus quarks constituyentes y que se cancelan cuando los hadrones se alejan [3].

El grupo SU(3) tiene ocho generadores, si los denotamos por T^a con $a = 1, 2, \dots, 8$ satisfacen:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

donde f^{abc} son constantes de estructura. Una representación está dada por las matrices de Gell-Man λ_a con $a = 1, 2, \dots, 8$, y son hermíticas de traza cero tales que:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

Si consideramos la transformación de norma local de quarks $q_i \longrightarrow e^{-ig_s T^a \theta^a(x)} q_i$, el Lagrangeano invariante más simple bajo esta transformación se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \sum \bar{q}_j (i\gamma_\mu D_{jk}^\mu - m) q_k$$

donde $D_{jk}^\mu = \delta_{jk} \partial^\mu + ig_s (T_a)_{jk} A_a^\mu$, y A_a^μ es un campo de gluones tal que:

$$A_\mu^a \longrightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \theta^a - g_s f^{abc} A_\mu^b \theta^c$$

y

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

En la tabla 1.3 están descritos los términos del Lagrangeano obtenido.

Término	Descripción
$\bar{q}\gamma_\mu\partial_\mu q$	Término cinético del quark
$m\bar{q}q$	Término de masa
$-g_s\bar{q}_j\gamma_\mu(T_a)_{jk}A_a^\mu q_k$	Término de interacción quark-gluón
$G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$	Término cinético de los gluones
g_s	Constante de acoplamiento quark-gluón

Cuadro 1.3: Descripción de los términos del Lagrangeano

Existen muchas observables con las cuales se pueden medir las propiedades de los quarks (su espín, su carga fraccionaria, su color) y de los gluones. A manera de ejemplo, presentamos algunas evidencias de que los quarks tienen carga de color y que los gluones existen dentro de los hadrones.

1.2.1. Evidencia de la carga de color

Hay muchas evidencias que respaldan la existencia del grado de libertad de color, el cual fue planteado en primera instancia para resolver la dificultad en la relación de espín y estadística en la espectroscopía de bariones. En el modelo de quarks, los bariones están hechos de tres quarks de espín $= \frac{1}{2}$. Sin el espacio de color, la función de onda de un barión está descrita por el producto de funciones de onda de sabor, espaciales y de espín. Consideremos la partícula $\Delta^{++}(1232)$ con espín $= \frac{3}{2}$. En el estado base del sistema ligado formado por tres quarks uuu , su función de onda es totalmente simétrica bajo el intercambio de cualquier par de quarks u en las funciones de onda de sabor, espaciales y de espín. Sin embargo, dado que $\Delta^{++}(1232)$ es un fermión, su función de onda total debe ser antisimétrica bajo el intercambio de cualquier par de quarks u . Esta dificultad puede resolverse introduciendo una función de onda antisimétrica en el espacio de color, donde éste es un nuevo espacio interno con números cuánticos: r , g y b .

Una evidencia más directa de que el color viene en tres tipos se obtiene de los datos experimentales en la aniquilación e^+e^- a altas energías. Basados en el modelo de quarks, la razón

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (1.1)$$

se predice que sea $R = \sum_q e_q^2$ donde e_q es la carga eléctrica de los quarks producidos en la aniquilación e^+e^- . Pasando el umbral de la producción del quark s , excepto para energías no tan altas, solamente los quarks u, d y s contribuyen a esta razón R y llevan a:

$$R = e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 = \frac{2}{3}, \text{ (sin color)}$$

$$R = 2 \text{ (con tres colores)}$$

Similarmente, para energías que sobrepasan el umbral de producción del quark c , R es:

$$R = e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 + e_c^2 = \frac{10}{9}, \text{ (sin color)}$$

$$R = \frac{10}{3} \text{ (con tres colores)}$$

y para energías más altas, que sobrepasan el umbral de la producción del quark b ,

$$R = e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2 = \frac{11}{9}, \text{ (sin color)}$$

$$R = \frac{11}{3} \text{ (con tres colores)}$$

En la figura 1.1 se muestran los valores experimentales para R en función de la energía de colisión de e^+e^- . Allí podemos observar que los datos experimentales concuerdan con los resultados para tres colores en todos los casos [2].

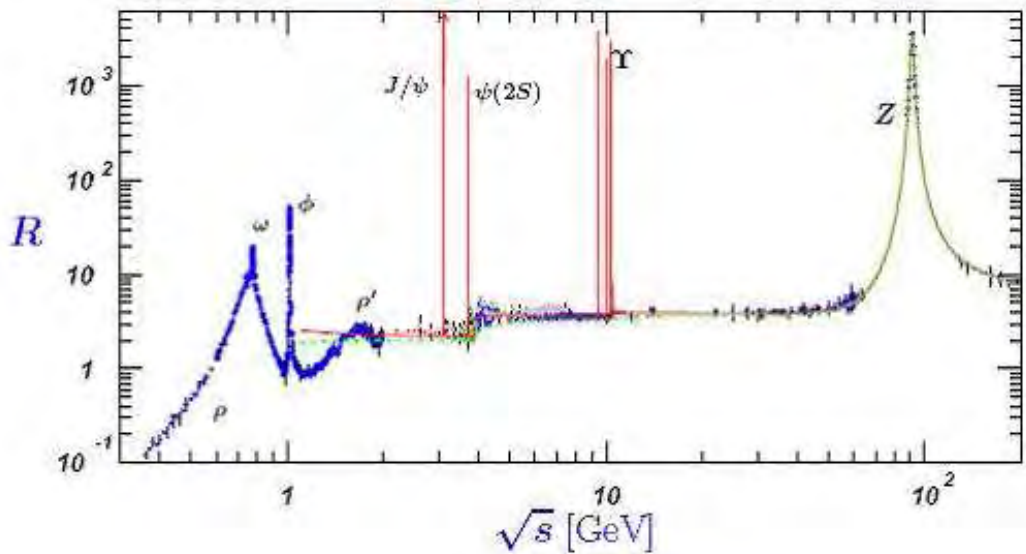


Figura 1.1: Valores de la razón $\frac{(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ como función de la energía.

1.2.2. Evidencia de los gluones

En el proceso de dispersión $ep \rightarrow ep$ se puede estudiar la estructura interna del protón. Para ello la corriente hadrónica se parametriza usando las funciones de estructura $F_1(x)$ y $F_2(x)$ las cuales están relacionadas con las propiedades electromagnéticas del protón. Estas funciones satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{x}F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9}u^p(x) + \frac{1}{9}d^p(x) \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{x}F_2^{en}(x) = \frac{4}{9}d^p(x) + \frac{1}{9}u^p(x) \quad (1.3)$$

donde F_2^{ep} y F_2^{en} son las funciones de dispersión $e-p$ y $e-n$, y $u^p(x)$ y $d^p(x)$ son las funciones de probabilidad de que el correspondiente quark lleve una fracción de momento (x). Experimentalmente, al integrar los datos de las ecuaciones (1.2) y (1.3), se obtiene:

$$\int_0^1 dx F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9}\epsilon_u + \frac{\epsilon_d}{9} = 0.18 \quad (1.4)$$

$$\int_0^1 dx F_2^{en}(x) = \frac{\epsilon_u}{9} + \frac{4}{9}\epsilon_d = 0.12 \quad (1.5)$$

con $\epsilon_u \equiv \int_0^1 x dx(u + \bar{u})$ y $\epsilon_d \equiv \int_0^1 x dx(d + \bar{d})$. Para el caso de protones y neutrones, las antipartículas no contribuyen.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1.4) y (1.5) debe darnos las fracciones de momento llevadas por los quarks u y d . Definiendo $\epsilon_g \equiv 1 - \epsilon_u - \epsilon_d$ como la fracción de momento del protón que no está en los quarks u y d , obtenemos:

$$\epsilon_d = 0.18$$

$$\epsilon_u = 0.36$$

$$\epsilon_g = 0.46$$

Este último elemento, distinto de los quarks, se lleva cerca del 50% del momento del protón y se le identifica con los gluones. Evidencias adicionales soportan esta afirmación, por ejemplo la producción de tres jets [4].

Enseguida describiremos en qué consiste el plasma de quarks y gluones, así como los métodos experimentales para detectarlo.

1.3. El plasma de quarks y gluones

La materia experimenta una serie de cambios drásticos en su estado cuando se incrementa la temperatura; los cuales pueden ser sólido, líquido y gaseoso. Estos distintos estados de la materia se llaman *fases* y el cambio de una fase a otra a una cierta temperatura se llama *transición de fase*. Si calentamos todavía más la materia, toda se convertirá a un estado llamado *plasma*, el cual consiste en iones y electrones. Esta última transformación toma lugar gradualmente al ionizarse cada molécula o átomo por medio de colisiones; así que es una transición de fase distinta a las anteriores. El plasma, constituido de partículas cargadas, tiene propiedades electromagnéticas distintas a las otras fases, tales como oscilación y apantallamiento; por eso se le llama *la cuarta fase de la materia*. También se forma cuando, por ejemplo, un material aislante se comprime bajo presiones muy altas, en este caso, algunos electrones son liberados del confinamiento en el cual se encuentran y se forma un plasma cuántico degenerado. Este cambio de estado ocurre como una transición de fase: la transición aislante-metal.

Usando estas ideas, podemos considerar al núcleo atómico como una gotita de un líquido de Fermi, constituido de nucleones. La materia nuclear también realiza una transición hacia un estado gaseoso al aumentar su temperatura unas pocas decenas de MeV, ($1\text{MeV}=10^{10}\text{K}$), lo cual puede lograrse en las colisiones de iones pesados a bajas energías. Al incrementarse la temperatura de la materia nuclear se crean más mesones ligeros, pero no habrá ionización de quarks ni emisión de gluones debido a su propiedad de *confinamiento de color*. Sin embargo, con el aumento de la temperatura la densidad de estos mesones crecerá y, como cada mesón es un sistema compuesto, tiene una dimensión espacial finita por lo cual deberían intercalarse unos con otros formando una especie de red compuesta de quarks, antiquarks y gluones, la cual se extendería por todo el espacio.

De ser así, la materia nuclear se debería volver un plasma de quarks y gluones (**PQG**) a temperaturas suficientemente altas. La naturaleza precisa de esta transición es aún de-

sconocida, incluyendo la existencia de la transición de fase o, si lo hay, el orden de la transición. Esto es debido a la dificultad para resolver la QCD en el régimen no perturbativo donde esta transición se espera que ocurra. Prevalece la opinión, basada en los resultados de simulaciones Monte Carlo de versiones de QCD en una red, (*lattice QCD*), de que la transición es muy rápida y ocurre alrededor de una temperatura de $T=150\text{MeV}$ [5].

La forma comprimida de la materia nuclear también puede existir en el núcleo de estrellas compactas, conocidas como estrellas de neutrones, (**NS**). Estas estrellas pueden considerarse como un núcleo gigante constituido de 10^{57} bariones (en su mayoría neutrones amarrados por la fuerza gravitacional contra la repulsión debido al principio de exclusión de Pauli y la fuerza nuclear), cubierto por una capa delgada de átomos de forma metálica, mientras que la densidad central del núcleo de la estrella podría exceder varias hasta 10 veces la densidad de un núcleo ordinario. Por lo que es natural pensar que la materia en el núcleo de una **NS** existe como una mezcla de un **PQG** degenerado. Tales conjeturas fueron concebidas antes del desarrollo de la QCD.

Experimentalmente, el único método actual para determinar la existencia del **PQG**, es la colisión de dos núcleos a energías relativistas extremas. A estas energías, una colisión de frente de dos núcleos de número de masa A puede ser vista como dos núcleos de alta densidad en forma de disco. El factor de contracción de Lorentz en el centro de masa del sistema es $8\gamma_{cm} = \frac{E_{cm}}{m} \simeq 100$ y el grosor del disco nuclear es de $\frac{2R}{\gamma_{cm}} \simeq 0,015\text{fm}$ incluso para núcleos pesados, el cual es más pequeño que el tamaño de un hadrón. Sin embargo, aun cuando se produjera el **PQG**, se enfriaría demasiado rápido y se agruparía en miles de hadrones ordinarios en un lapso de 10^{-21} a 10^{-20} segundos. Esto hace extremadamente difícil identificar su formación. Algunas de las ideas que se han propuesto para identificarlo son las siguientes:

- **Composición de sabor:** En el **PQG**, la cantidad de quarks y antiquarks se encuentran de acuerdo a una regla estadística. En equilibrio, está determinada solamente por la masa de las excitaciones y para altas energías la diferencia entre las masas de los tres sabores más ligeros (u , d y s) es muy pequeña, por lo que podemos asumir que se encuentren prácticamente en la misma cantidad. Sin embargo, esta simetría inicial de sabor podría no ser reflejada directamente en la abundancia hadrónica final si hay un incremento en la formación de hadrones extraños (K , Λ , $\bar{\Lambda}$, ...)

- **Leptones y fotones:** Los leptones y fotones no sienten el estado de interacción fuerte final y pueden contener información del interior de la materia producida, vía su acoplamiento a fluctuaciones térmicas.
- **Quarkonio:** Un par de quarks pesados ($c\bar{c}, b\bar{b}$) ocasionalmente son producidos en el estado inicial de una colisión y algunos de ellos pueden evolucionar hacia un estado ligado llamado quarkonio. La producción hadrónica de un quarkonio puede ser observado por las resonancias de masas grandes en el espectro de masa invariante del dilepton (un par formado por un leptón y su antipartícula) [6].
- **Chorros (Jets):** Las fuertes colisiones de los partones primarios genera un par de partones energéticos que llevan una gran cantidad de momento transverso, el cual se fragmentará en chorros de hadrones contrapuestos en el espacio libre. Las distancias que dos miembros del par viajen dependerá de la localización de la primera colisión y por eso no será la misma en todos los casos. Esto puede llevar a un desbalance en los dos chorros o incluso a la extinción de uno o de ambos. Este efecto depende la energía perdida por el partón en la materia densa. Se sabe que la radiación del gluón es un mecanismo dominante en la pérdida de energía del partón [7].

Por otra parte, en el *Relativistic Heavy-Ion Collider*, **RHIC**, es posible estudiar colisiones nucleares a energías relativistas extremas, por arriba de los 200A GeV, con iones tan pesados como los núcleos de oro ($A = 197$). Uno de los resultados obtenidos en el RHIC, ha sido el comportamiento extraño en la producción de bariones con respecto a mesones en colisiones centrales $Au + Au$. Se encontró que las razones $\frac{p}{\pi}$ se aproximan a la unidad y en algunos casos la superan [9], como se muestra en la figura 1.2, las cuales son diferentes a las razones $\frac{p}{\pi} \sim 0.1 - 0.3$ medidos en las interacciones $p + p$ y e^+e^- [10, 11]

Uno de los modelos para explicar de manera efectiva estos resultados es el modelo de recombinación [12]. Este modelo argumenta que en la colisión se crea un medio térmico con una alta densidad de partones suaves, es decir, con bajo momento transverso. De modo que existe una probabilidad de que estos se combinen para formar hadrones.

El cociente $\frac{p}{\pi}$ presenta un aumento debido a que se hace más probable que en el espacio fase se recombinen tres partones que dos partones. Esto es porque el partón que forma un mesón tendrá un peso probabilístico menor que el partón que forma un barión. Estos son proporcionales a los factores de degeneración C_m y C_b y se calculan tomando en cuenta

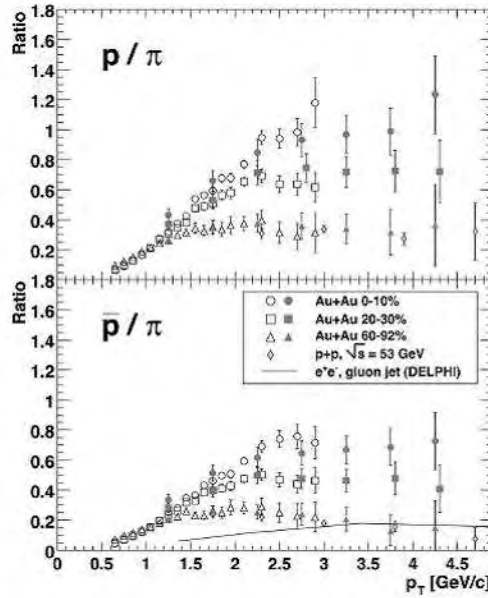


Figura 1.2: Razón protón/pión como función del momento transversal medida experimentalmente.

sólo las degeneraciones asociadas al hadrón en cuestión, que en este caso corresponden al espín [12].

Es necesario un análisis más detallado del proceso de recombinación en el que se incorporen la dinámica entre quarks y los tiempos de hadronización [13, 14].

A continuación presentamos el objetivo de este trabajo así como la forma en la cual está distribuido el material a través de los diversos capítulos.

1.4. Presentación y objetivo del trabajo

Dada la gran región de densidades en las cuales la materia nuclear se encuentra, ya sea en las NS o en las colisiones de iones pesados, la formación de hadrones se espera que experimente cambios importantes. Mientras que a bajas densidades tendríamos, básicamente, mesones y bariones, a densidades altas tendremos quarks y gluones en estados no necesariamente ligados.

En este trabajo se plantea estudiar, por medio de una simulación Monte Carlo, cómo evolucionan en su formación los estados bariónicos y mesónicos conforme se incrementa su densidad. Esto ayudará a entender, por ejemplo, cómo está formada la estructura hadrónica de una NS o cual es la producción hadrónica en una colisión de iones pesados.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 estudiamos con detalle los problemas relativos a dos y tres cuerpos, interactuando a través de un potencial armónico, éstos corresponderán al caso mesónico y bariónico respectivamente, a bajas densidades. También realizamos el cálculo del valor promedio del radio al cuadrado, con respecto a su centro de masa, para cada uno de los dos sistemas.

En el capítulo 3 hacemos una descripción del modelo que utilizaremos para la simulación del sistema de quarks ligados por gluones (modelo de *String-Flip*), empezando por describir la función de onda variacional y el tipo de potencial armónico utilizado para el caso mesónico y bariónico. Con esta información mostramos cómo se puede calcular la energía variacional, que en el caso de muy altas densidades corresponderá a la energía de un gas de Fermi. Agregamos también un pequeño resumen de como se realiza la simulación Monte Carlo.

En el capítulo 4 presentamos los resultados obtenidos: Determinación del parámetro variacional óptimo minimizando el valor de la energía, las distribuciones radiales, las funciones de correlación, la fracción de grupos de 3 (caso bariónico) y la comparación con la correspondiente a la densidad nuclear normal.

En el capítulo 5 exponemos las conclusiones derivadas de estos resultados.

Finalmente, dado que la simulación Monte Carlo está basada en el *Algoritmo de Metrópolis*, en el apéndice **A** explicamos más detalladamente en qué consiste este criterio, y como a lo largo de la simulación fijamos las unidades arbitrariamente para realizar los cálculos, en el apéndice **B**, establecemos los factores de conversión para cada caso basados en resultados experimentales.

Capítulo 2

El problema de 2 y 3 cuerpos: mesones y bariones

A fin de realizar el análisis de la formación de hadrones al variar la densidad, estudiaremos primero el límite a muy bajas densidades, en donde el sistema de quarks debe comportarse como un sistema de hadrones aislados. Por lo tanto, por simplicidad, podemos considerar a un mesón, o a un barión, como un sistema no relativista de quarks interactuando por medio de un potencial armónico.

En este capítulo calculamos las eigen-energías y las eigen-funciones correspondientes a dicho potencial, así como el valor promedio del radio al cuadrado de cada partícula, con respecto al centro de masa del sistema, para cada caso. Esto con el fin de tener valores de referencia cuando estudiemos el sistema de muchos cuerpos.

2.1. Problema de dos cuerpos

Consideremos un mesón como un sistema de dos cuerpos de masas iguales m , interactuando a través de un potencial armónico, entonces el Hamiltoniano de este sistema está descrito por:

$$H_{12} = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \quad (2.1)$$

donde P_1 y P_2 son las magnitudes de los momentos de los cuerpos uno y dos, respectivamente, y k es la constante del resorte.

Para resolver la ecuación de Schrödinger correspondiente a un Hamiltoniano dado por (2.1), realizamos los siguientes cambios de variable para pasar a un sistema de coordenadas de centro de masa y relativo.

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.2)$$

de donde se obtiene que las coordenadas iniciales están dadas por:

$$\vec{r}_1 = \frac{2\vec{R} + \vec{r}}{2} \quad y \quad \vec{r}_2 = \frac{2\vec{R} - \vec{r}}{2} \quad (2.3)$$

por lo que los momentos $\vec{P}_1 = m\dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{P}_2 = m\dot{\vec{r}}_2$ se pueden escribir en términos de los momentos $\vec{P}_R = M\dot{\vec{R}}$: momento del centro de masa y $\vec{P}_r = \mu\dot{\vec{r}}$: momento relativo del sistema, (donde $M = 2m$ y $\mu = m/2$) entonces:

$$\vec{P}_1 = m\left(\frac{2\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}}{2}\right) \rightarrow \vec{P}_1 = \frac{\vec{P}_R + 2\vec{P}_r}{2}$$

$$\vec{P}_2 = m\left(\frac{2\dot{\vec{R}} - \dot{\vec{r}}}{2}\right) \rightarrow \vec{P}_2 = \frac{\vec{P}_R - 2\vec{P}_r}{2}$$

por lo tanto la ecuación (2.1) ahora toma la forma siguiente:

$$H_{12} = \frac{(\vec{P}_R + 2\vec{P}_r)^2}{8m} + \frac{(\vec{P}_R - 2\vec{P}_r)^2}{8m} + \frac{1}{2}kr^2$$

Desarrollando y agrupando términos

$$H_{12} = \frac{P_R^2}{4m} + \frac{P_r^2}{m} + \frac{1}{2}kr^2 \quad (2.4)$$

En el sistema centro de masa, el momento $\vec{P}_R = 0$ por lo que (2.4) se reduce a

$$H_{12} = \frac{P_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kr^2 \quad (2.5)$$

por lo que resulta ser el Hamiltoniano de un oscilador armónico de masa reducida μ , cuyas soluciones analíticas exactas son conocidas [15]. Los valores de la eigen-energía, en una y en tres dimensiones, están dados respectivamente por:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (2.6)$$

$$E_n = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})\hbar\omega \quad (2.7)$$

con n, n_x, n_y y $n_z = 0, 1, 2, \dots$ y la frecuencia angular ω , está dada por la ecuación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (2.8)$$

Por otra parte, las eigen-funciones de onda están dadas por:

$$\psi_n = \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu\omega}{\hbar}r^2} H_{n_x}(x)H_{n_y}(y)H_{n_z}(z) \quad (2.9)$$

donde $H_{n_x}(x)$, $H_{n_y}(y)$ y $H_{n_z}(z)$ son los polinomios de Hermite de orden n .

Podemos identificar en las eigen-funciones descritas por (2.9) la siguiente forma en la exponencial: $-\frac{1}{2}\lambda_2 r^2$, donde λ_2 vale, de acuerdo con (2.8) y (2.9):

$$\lambda_2 = \frac{\mu}{\hbar} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\mu k} \quad (2.10)$$

y como $\mu = \frac{m}{2}$ entonces:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{mk}{2}} \quad (2.11)$$

Este valor será de gran utilidad cuando introduzcamos la función de onda del sistema de muchos cuerpos.

Por otra parte, para el estado base n_x, n_y y $n_z = 0$ por lo que el valor de la energía de acuerdo con (2.8) y (2.7) es igual a:

$$E = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.12)$$

El valor de la energía dado por (2.12) está en función de la masa y de la constante de interacción entre los quarks. A fin de tener una descripción completa sólo en términos de estos últimos, establecemos la energía por partícula, E_2 , como la energía total dividida entre el número de partículas. Posteriormente, se realizará la descripción de la evolución

del sistema en función de las propiedades de los hadrones formados. Por lo tanto, para el caso de dos cuerpos, E_2 , está dada por:

$$E_2 = \frac{E}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

En resumen, tomando el sistema en el cual $\hbar = k = m = 1$, los valores de λ_2 y E_2 son:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.14)$$

$$E_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

A continuación analizaremos el sistema formado por tres cuerpos.

2.2. Problema de tres cuerpos

Un barión, en el caso general, lo podemos considerar como un sistema de tres cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3 interactuando por pares a través de un potencial armónico. En el caso particular, en el cual dos masas sean iguales ($m_1 = m_2 = m$) y una diferente ($m_3 = m'$), el Hamiltoniano de este sistema está dado por:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m'} + \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 + \frac{1}{2}k(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2$$

donde cada P_i corresponde a la magnitud del momento de cada uno de los cuerpos y k es la constante del resorte, la cual se considera igual para los tres pares. Para resolver la ecuación de Schrödinger, en este caso, realizamos los siguientes cambios de variable:

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.16)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (2.17)$$

$$\vec{R} = \frac{m(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + m'\vec{r}_3}{2m + m'} \quad (2.18)$$

Realizando un desarrollo similar al del problema de dos cuerpos llegamos a:

$$H = \frac{P_{CM}^2}{2M} + \frac{P_\rho^2}{2m_\rho} + \frac{P_\lambda^2}{2m_\lambda} + \frac{3}{2}k(\rho^2 + \lambda^2)$$

$$\text{con: } M = 2m + m', \quad m_\rho = m, \quad m_\lambda = \frac{mm'}{M}$$

Situandonos en el sistema centro de masa $\vec{P}_{CM} = 0$, el hamiltoniano se reduce a:

$$H = \frac{P_\rho^2}{2m_\rho} + \frac{P_\lambda^2}{2m_\lambda} + \frac{3}{2}k(\rho^2 + \lambda^2)$$

el cual es análogo al hamiltoniano de dos osciladores armónicos desacoplados. De la teoría de la mecánica cuántica, sabemos que la solución para este problema es un producto de las soluciones individuales, las cuales son soluciones exactas. En particular, el estado base tiene la siguiente forma:

$$\psi_{00}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \frac{\alpha_\rho^{\frac{3}{2}} \alpha_\lambda^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\alpha_\rho^2 \rho^2 + \alpha_\lambda^2 \lambda^2}{2}\right) \quad (2.19)$$

$$\text{con: } \alpha_\rho^2 = \sqrt{3k_\rho m_\rho}, \quad \alpha_\lambda^2 = \sqrt{3k_\lambda m_\lambda}, \quad k_\rho^2 = \frac{3km_\rho}{\hbar}, \quad k_\lambda^2 = \frac{3km_\lambda}{\hbar}$$

En el caso del protón, podemos considerar las tres masas iguales, por lo que el argumento de la exponencial toma la forma: $\frac{-\lambda_3(\rho^2 + \lambda^2)}{2}$ ($\lambda_3 = \alpha_\rho^2 = \alpha_\lambda^2$). Al igual que en el caso anterior, el valor de este parámetro será importante como comparación en la descripción de muchos cuerpos.

Por otra parte, los valores de la eigen-energía están dados por:

$$E = (E_{n_\rho} + E_{n_\lambda})\hbar\omega \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

En el estado base: $n_\lambda = n_\rho = 0$ por lo que E vale:

$$E = \hbar\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Nuevamente, a fin de tener una descripción sólo en términos de los quarks, dividimos este valor entre el número de quarks del sistema ($N = 3$), para obtener la energía por quark E_3 . En unidades $\hbar = k = m = 1$, λ_3 y E_3 toman los siguientes valores;

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.20)$$

$$E_3 = \frac{E}{N} = \frac{E}{3} = \hbar \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$E_3 = \frac{E}{3} = \sqrt{3} \quad (2.21)$$

2.3. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de dos cuerpos: $\langle r_2^2 \rangle$

El valor esperado del radio al cuadrado de una partícula, con respecto al centro de masa del sistema del cual forma parte, lo podemos definir de la siguiente manera:

$$\langle r_2^2 \rangle \equiv \left\langle \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2 \right\rangle \quad (2.22)$$

En el caso de los mesones, de acuerdo con las ecuaciones (2.2) y (2.3), llegamos a

$$\langle r_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle r^2 \rangle$$

donde $r^2 \equiv (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$. Tomando la función de onda, ec. (2.9), en su estado base tenemos

$$\langle r^2 \rangle = \int \psi_{00}^*(\vec{r}) r^2 \psi_{00}(\vec{r}) d^3r$$

con $d^3r = r^2 dr d\Omega$, y si no hay dependencia angular entonces $\int d\Omega = 4\pi$, por lo tanto:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int r^4 e^{-\frac{\mu\omega}{\hbar} r^2} dr$$

Con base en las siguientes fórmulas de integración:

$$\int_0^\infty \nu^2 e^{-\alpha\nu^2} d\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}} \quad (2.23)$$

$$\int_0^\infty \nu^4 e^{-\alpha\nu^2} d\nu = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}} \quad (2.24)$$

llegamos a:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\mu\omega}$$

y de acuerdo con (2.10) y (2.11)

$$\mu\omega = \sqrt{\frac{mk}{2}}$$

por lo que en el sistema $\hbar = k = m = 1$ se tiene:

$$\langle r_2^2 \rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (2.25)$$

2.4. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de tres cuerpos: $\langle r_3^2 \rangle$

Para el caso de tres cuerpos, caso bariónico, con base en la definición dada por (2.22) y de acuerdo con las ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.18), llegamos a:

$$\vec{r}_1 - R_c \vec{m} = \frac{\vec{\rho}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{m'}{M} \vec{\lambda}$$

$$\vec{r}_2 - R_c \vec{m} = -\frac{\vec{\rho}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{m'}{M} \vec{\lambda}$$

$$\vec{r}_3 - R_c \vec{m} = -\sqrt{6} \frac{m}{M} \vec{\lambda}$$

$$\Rightarrow \langle r_3^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle + \frac{6}{M^2} \left(m^2 + \frac{m'^2}{2} \right) \langle \lambda^2 \rangle$$

Por un lado:

$$\langle \rho^2 \rangle = \int \psi_{00}^*(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \rho^2 \psi_{00}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) d^3 \rho d^3 \lambda$$

tomando en cuenta que $d^3 \rho = \rho^2 d\rho d\Omega$ y sustituyendo la función de onda en su estado base, ecuación (2.19)

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{4\pi}{\pi^3} \int \alpha_\lambda^3 e^{-\alpha_\lambda^2 \lambda^2} d^3 \lambda \int \alpha_\rho^3 e^{-\alpha_\rho^2 \rho^2} \rho^4 d\rho$$

Como la función de onda está normalizada, la integral en la variable λ , la cual es independiente de la variable ρ debe ser igual a la unidad, esto es: $\int \alpha_\lambda^3 e^{-\alpha_\lambda^2 \lambda^2} d^3\lambda = 1$ y utilizando (2.23) y (2.24) obtenemos:

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{3}{2\alpha_\rho^2}$$

Por otro lado, para $\langle \lambda^2 \rangle$ es lo mismo con $\alpha_\rho \rightarrow \alpha_\lambda$ y $\rho^2 \rightarrow \lambda^2$

En el caso de masas iguales $\alpha_\rho = \alpha_\lambda$

$$\Rightarrow \langle r_3^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle \left(1 + \frac{6}{M^2} \frac{3m^2}{2}\right) \text{ con } M = 3m, \text{ por lo que:}$$

$$\langle r_3^2 \rangle = 2\langle \rho^2 \rangle = \frac{3}{\alpha_\rho^2}$$

Sustituyendo el valor para α_ρ^2 con $k = m = 1 \Rightarrow \alpha_\rho^2 = \sqrt{3}$ por lo tanto:

$$\langle r_3^2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \tag{2.26}$$

Los resultados obtenidos, para E , λ y $\langle r^2 \rangle$ para dos cuerpos y tres cuerpos, establecen los valores de las observables de los hadrones aislados correspondientes en los límites de bajas densidades; los cuales deben ser reproducidos en el estudio de muchos cuerpos cuando se tome dicho límite. La forma de determinar el parámetro λ en cada caso tendrá su explicación al estudiar la forma de la función de onda variacional en dicho sistema.

A continuación, describiremos el modelo utilizado para realizar la simulación de muchos cuerpos.

Capítulo 3

Formación de hadrones en el modelo de “String-Flip”

Para realizar el estudio de la hadronización/deconfinamiento de quarks, como función de la densidad de energía que hemos mencionado, necesitamos un modelo que pueda realizar la descripción del sistema basado en quarks, los cuales a bajas densidades se comporten como hadrones aislados formando grupos, ya sea de dos o tres quarks, mientras que a densidades altas se comporten como quarks libres y la transición sea generada dinámicamente. Un modelo con esas características es el modelo de String-Flip [17, 18, 19, 20]

En este modelo, el confinamiento de los quarks está descrito en términos de un potencial V . En un sistema de muchos quarks, las *cuerdas*, que simulan lo que se conoce como *tubos de flujo gluónico*, conectan a los quarks de acuerdo a una regla de configuración dada. La configuración de la cuerda está determinada como la combinación más corta posible (o la de menor energía) de entre todas las posibles combinaciones en las que se pueden ligar los quarks.

En este capítulo analizaremos sus propiedades, así como la obtención de las observables relacionadas con los sistemas de mesones y bariones, los cuales se estudian de manera independiente.

3.1. Función de onda variacional

La función de onda que se propone es una función de onda variacional de la forma:

$$\Psi_\lambda = e^{-\lambda V} \Phi_{FG} \quad (3.1)$$

donde:

λ : es un parámetro variacional

V : es un potencial de muchos cuerpos

Φ_{FG} : es un producto de determinantes de Slater, uno por cada combinación de color-sabor, el cual corresponde a la función de onda de un gas de Fermi.

$\Phi_{FG} = \phi_{ur}\phi_{ug}\phi_{ub}\phi_{dr}\phi_{dg}\phi_{db}$ (si se consideran solamente quarks u y d).

Entonces, cada uno de los determinantes de Slater es de la forma.

$$\begin{vmatrix} \psi_{n1}(\vec{x}_1) & \psi_{n1}(\vec{x}_2) & \dots & \psi_{n1}(\vec{x}_N) \\ \psi_{n2}(\vec{x}_1) & \dots & \dots & \psi_{n2}(\vec{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{nN}(\vec{x}_1) & \dots & \dots & \psi_{nN}(\vec{x}_N) \end{vmatrix}$$

Para poder realizar la simulación, es necesario que la función de onda que describe al sistema de quarks sea antisimétrica. Esta función se obtiene vía el determinante de Slater, en el cual cada una de las entradas es solución al problema de una partícula en una caja, como se describe a continuación.

Para una partícula en una dimensión dentro de un potencial cuadrado de ancho a , el valor de la eigen-función está dado por: [15]

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \quad (3.2)$$

donde n es un entero positivo, y las eigen-energías son:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (3.3)$$

En el caso de tres dimensiones, es decir, cuando se trata de una partícula encerrada en una caja cuadrada de lado a , la solución para las eigen-funciones es un producto de tres funciones independientes (una por cada dimensión espacial) de la forma (3.2) y las eigen-energías serán tres sumandos similares a (3.3)

$$\psi_n(\vec{r}) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z) \quad (3.4)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (3.5)$$

con $\phi_{ni} = \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n_i \pi i}{a}\right)$, $i = x, y, z$ y $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$

Por lo que la eigen-función resultante es:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \text{sen}\left(\frac{\pi x n_x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi y n_y}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z n_z}{a}\right) \quad (3.6)$$

Ahora, como (3.2) puede escribirse también en términos de la función coseno, la eigen-función dada por (3.6) en realidad presenta ocho combinaciones de productos de senos y cosenos:

$$\begin{pmatrix} \text{sen} & \text{sen} & \text{sen} \\ \text{sen} & \text{sen} & \text{cos} \\ \text{sen} & \text{cos} & \text{sen} \\ \text{sen} & \text{cos} & \text{cos} \\ \text{cos} & \text{sen} & \text{sen} \\ \text{cos} & \text{sen} & \text{cos} \\ \text{cos} & \text{cos} & \text{sen} \\ \text{cos} & \text{cos} & \text{cos} \end{pmatrix}$$

Ahora analizaremos la forma del potencial para el caso de los mesones y para los bariones.

3.2. Potencial de muchos cuerpos

El potencial de muchos cuerpos está basado en encontrar las configuraciones de mínima energía cuando hacemos interaccionar dos o tres sistemas de quarks de diferente color, tomando por simplicidad la interacción de tipo armónico.

De forma general, si tenemos dos sistemas de quarks de colores c_1 y c_2 , entonces el potencial está definido como:

$$V_{c_1 c_2} = \min_{[p]} \sum_{ij} V(\vec{r}_i, P[\vec{r}_j]) \quad (3.7)$$

con $V(\vec{r}_i, P[\vec{r}_j]) = \frac{1}{2}k(\vec{r}_i - P[\vec{r}_j])^2$ donde $\min_{[P]}$ significa el mínimo en energía de todas las posibles permutaciones con las que se pueden aparear los quarks de color c_1 con los quarks de color c_2 y $P[\vec{r}_j]$ es la posición del quark j con el cual se liga el quark i que está en la posición \vec{r}_i bajo ese mapeo óptimo.

En el **caso de los bariones** el potencial está dado por la interacción entre los tres colores y tiene la siguiente forma:

$$V_p \equiv V_{rb} + V_{rg} + V_{bg} \quad (3.8)$$

donde cada uno de los términos corresponde a considerar c_1 y c_2 de la ecuación (3.7) para los colores respectivos.

En la figura 3.1-a observamos dos tipos de potenciales a través de los cuales se puede formar un barión: potencial tipo “Y”(lado izquierdo), potencial tipo “ Δ ”(lado derecho). No existe un consenso en los estudios en la red de cual es la configuración más adecuada, ya que ambas dan resultados similares para el potencial entre quarks en un estado bariónico [21, 22]. Por consideraciones técnicas elegimos el potencial por pares tipo “ Δ ”, esto debido a que no contamos con un algoritmo eficiente para calcular el potencial tipo “Y”.

Por otra parte, como se observa en la figura 3.1-b, el resultado de combinar seis quarks también es un objeto neutro; pero esta combinación no debe ser tomada en cuenta para la identificación de bariones y deben ser removidos de las propiedades globales (ver sección 4.4).

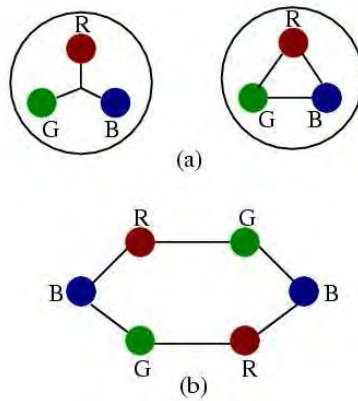


Figura 3.1: Configuraciones neutras de color: (a) Grupos de 3 quarks ligados por un potencial tipo "Y"(izquierda), y un potencial por pares tipo Δ (derecha). (b) Grupo de 6 quarks neutro de color

Por otra parte, en la figura 3.2, vemos del lado izquierdo la configuración idónea, es

decir, aquella que tendrá una mínima energía en comparación con el arreglo representado en el lado derecho.

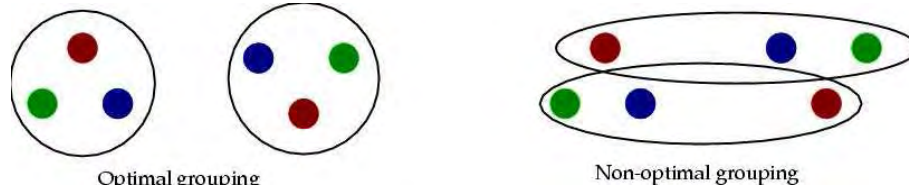


Figura 3.2: Elección de la configuración de menor energía

Para el **caso de los mesones** sólo permitimos interacción entre color-anticolor así, el potencial toma la siguiente forma:

$$V_{\pi} \equiv V_{r\bar{r}} + V_{b\bar{b}} + V_{g\bar{g}} \quad (3.9)$$

En ambos casos, el potencial será igual a aquel que tenga una mínima energía, la cuál es buscada sobre todas las posibles permutaciones entre los quarks del sistema y que además cumplan con la condición de neutralidad de color.

A continuación, analizaremos como es la energía total cuando interactúan muchos quarks conforme aumenta la densidad.

3.3. Energía variacional para mesones y bariones

El Hamiltoniano de un sistema de N quarks interactuando a través de un potencial V es:

$$H = \sum_i^N \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i,j}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (3.10)$$

donde V toma la forma de $V = V_P$ o V_{π} dependiendo del tipo de hadrón que se forme. Cuando consideramos una función de onda del tipo (3.1) como solución a la ecuación de Schrödinger para un Hamiltoniano dado por (3.10), entonces el valor esperado de la energía total, $\langle H \rangle_{\lambda}$, es igual a:

$$\langle H \rangle_{\lambda} = \langle T \rangle_{\lambda} + \langle V \rangle_{\lambda} \quad (3.11)$$

En particular la parte cinética, $\langle T \rangle$, la podemos reescribir de la siguiente manera (omitiendo un factor de masa en el denominador):

$$\langle T \rangle_\lambda = \frac{1}{Z(\lambda)} \int dx \psi_\lambda(x) \left(\sum_i \frac{-1}{2} \partial_i^2 \right) \psi_\lambda(x) \quad (3.12)$$

donde $Z(\lambda) = \langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle$ y $\frac{-\partial_i^2}{2}$ es el operador cinético para la i -ésima partícula.

Sea $F_\lambda(x) = e^{-\lambda V(x)}$, entonces:

$$-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \psi_\lambda(x) = -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i [(\partial_i F_\lambda(x)) \Phi(x) + F_\lambda \partial_i \Phi(x)]$$

con lo cual

$$\langle T \rangle_\lambda = \frac{1}{Z(\lambda)} \int dx \psi_\lambda \left\{ F_\lambda(x) \left(-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \Phi(x) \right) - \frac{1}{2} \sum_i [(\partial_i^2 F_\lambda(x)) \Phi(x) + 2\partial_i F_\lambda(x) \partial_i \Phi(x)] \right\}$$

El primer término es el correspondiente a la energía cinética de un gas de Fermi, la cual denotamos como T_{FG} . La energía de Fermi es aquella energía de la última capa llenada por los quarks. Podemos escribir T_{FG} de la siguiente manera:

$$T_{FG} = \frac{\int dx e^{-\lambda V(x)} \Phi(x) e^{-\lambda V(x)} \left(-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \Phi(x) \right)}{\int dx (e^{-\lambda V(x)} \Phi(x))} = \frac{\int dx e^{-2\lambda V(x)} \Phi(x) \left(\frac{-1}{2} \sum_i \partial_i^2 \Phi(x) \right)}{\int dx (e^{-2\lambda V(x)} \Phi^2(x))}$$

Por lo que $\langle T \rangle_\lambda$ queda como:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\int dx [\Phi(x) F_\lambda(x) (\partial_i^2 F_\lambda(x) \Phi(x) + 2\Phi(x) F_\lambda(x) \partial_i F_\lambda(x) \partial_i \Phi(x))]}{Z(\lambda)}$$

Al desarrollar y simplificar términos llegamos a la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= T_{FG} + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dx \Phi^2(x) [\partial_i F_\lambda(x)]^2 \frac{F_\lambda^2(x)}{F_\lambda^2(x)} \\ \langle T \rangle_\lambda &= T_{FG} + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dx \psi_i^2(x) [\partial_i \ln F_\lambda(x)]^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definimos:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i [\partial_i \ln F_\lambda(x)]^2 \quad (3.14)$$

Entonces, la energía total se puede escribir como:

$$\langle H \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda + \langle V \rangle \quad (3.15)$$

En el caso de una partícula en un barión, por ejemplo un quark rojo, su potencial V_{ir} que la liga con los correspondientes quarks verde y azul, lo podemos expresar del modo siguiente:

$$V_{ir} = \frac{1}{2} k [(\vec{r}_{ir} - \vec{r}_{kb})^2 + (\vec{r}_{ir} - \vec{r}_{jg})^2] \quad (3.16)$$

de donde podemos ver que W debe tener la forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_i [\partial_i (-\lambda V)]^2 = 2(\lambda k)^2 \sum_i \left[\frac{x_j + x_k}{2} - x_i \right]^2 \quad (3.17)$$

donde hemos utilizado (3.16) y la i corresponde al número de partículas y a los valores de las distintas componentes.

Podemos obtener una expresión de manera similar para los mesones.

Ahora, cuando estamos en el extremo de altas densidades, es decir, cuando $\rho \gg 1$, donde esperamos que los quarks se comporten como un gas de Fermi, la energía correspondiente podemos calcularla de la siguiente manera:

Sea N el número de partículas de nuestro sistema en un volumen V , la densidad de partículas correspondiente es:

$$\rho = \frac{N}{V} \quad (3.18)$$

y por otro lado, usando la suma de partículas hasta la energía de Fermi, con momento k_F , esta puede obtenerse como:

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k(1) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{k_F^3}{3} (4\pi) \quad (3.19)$$

donde g es la degeneración.

Para una partícula de masa m la energía es: $\varepsilon_i = mc^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, entonces, la energía total del sistema por unidad de volumen la podemos obtener de la siguiente manera:

$$\frac{E}{V} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega \left(mc^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \quad (3.20)$$

Si no hay dependencia angular $\int d\Omega = 4\pi$ entonces, la densidad de energía es:

$$\frac{E}{V} = \frac{g4\pi}{(2\pi)^3} \left(mc^2 \frac{k_F^3}{3} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{k_F^5}{5} \right) \quad (3.21)$$

Al simplificar (3.21) y dividir por (3.18) obtenemos la energía por partícula:

$$\frac{E}{V} \frac{V}{N} = \frac{E}{N} = mc^2 + \frac{3}{10} \frac{(\hbar k_F)^2}{m} \equiv \frac{T_{FG}}{N} \quad (3.22)$$

3.4. Cálculo Monte Carlo

Necesitamos un método para muestrear estadísticamente los eventos. Esto requiere generar la distribución de probabilidades deseada de manera directa. Una de las formas de realizarlo es usando una simulación Monte Carlo (MC) de procesos de Markov. Un proceso de Markov genera el evento $n + 1$ estocásticamente a partir del evento n , sin necesitar información del evento $n - 1$. La parte MC arregla los pesos estadísticos del proceso de Markov, tal que la distribución de probabilidad deseada es aproximada asintóticamente.

La técnica Monte Carlo [23, 24] es un método útil para calcular integrales múltiples por medio de muestreos aleatorios. Este método ofrece una de las herramientas más poderosas para simular experimentos y crear modelos de datos experimentales.

Los números aleatorios se generan por medio de un algoritmo diseñado para producir una secuencia de números aparentemente sin correlación, los cuales están uniformemente

distribuidos sobre un rango definido. En general, el generador de números aleatorios debe satisfacer los siguientes criterios básicos:

- La distribución de los números tiene que ser uniforme en un rango específico y debe satisfacer pruebas estadísticas de estocasticidad, tales como carencia de predictibilidad y correlación entre números cercanos.
- El cálculo debe producir una gran cantidad de números únicos antes de que se repita el ciclo.
- El cálculo debe ser muy rápido.

Un método simple de multiplicación es usado con frecuencia para generar los números aleatorios. Se eligen un valor entero inicial r_0 y dos valores enteros constantes a y m . Los números aleatorios sucesivos se derivan de la relación recursiva

$$r_{i+1} = (a \times r_i) \bmod m \quad (3.23)$$

donde la operación **mod** consiste en dividir el producto entre paréntesis por m para obtener el residuo. Con una elección apropiada de las constantes a y m , puede obtenerse una secuencia finita de números que parecen estar seleccionados al azar entre 1 y $(m - 1)$.

Los valores de expectación de W y V fueron calculados usando la técnica Monte Carlo, en la cual se utilizó el algoritmo de Metrópolis. Este algoritmo es muy popular dada su simplicidad computacional. Como un ejemplo ilustrativo de la forma en la cual se realiza el muestreo usando el algoritmo de metrópolis, en el apéndice **A** presentamos el cálculo sencillo de una integral.

En el caso de los mesones, utilizamos un sistema formado por: 32 quarks u , 32 quarks d , 32 antiquarks u y 32 antiquarks d ; y los valores de \hbar , m y k son tomados iguales a uno por simplicidad numérica. En el límite de baja densidad, los resultados deberán concordar con los valores calculados teóricamente para el parámetro variacional λ_2 y E_2 de acuerdo con las ecuaciones (2.14) y (2.15), respectivamente. A fin de expresar estos valores en unidades de GeV/fm^3 para la densidad de energía ε y de fm^2 para el valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle$ realizamos una conversión basada en resultados experimentales (ver apéndice B).

Para los bariones, el sistema estuvo compuesto por 32 u_r , 32 u_g , 32 u_b , 32 d_r , 32 d_g y 32 d_b ; de modo que el número máximo de bariones que pueden formarse es de 64. De igual manera los valores de \hbar , m y k se consideraron unitarios por lo que los resultados deberán estar acordes con las ecuaciones (2.20) y (2.21) para λ y E , respectivamente, en el límite de baja densidad. También, para la conversión de unidades (ver apéndice B), se utilizaron valores experimentales.

En ambos casos el procedimiento fue el siguiente:

- Con base en la ecuación (3.18), fuimos variando el valor de ρ desde 0.05 hasta 2.5 para los mesones y desde 0.05 hasta 0.50 para los bariones. En total se corrieron 19 valores distintos de ρ para mesones y 29 para bariones.
- Para cada valor de ρ , se realizó el cálculo de la energía de acuerdo con las distintas configuraciones que tomaban los quarks. A cada valor de E le correspondió un valor de λ . Esta serie de puntos fueron ajustados por medio de una curva cúbica; para obtener el valor óptimo de λ calculamos el mínimo de la curva y registramos tanto el valor de λ como el de E .
- Posteriormente, con el valor de λ óptimo para cada valor de ρ , calculamos las frecuencias de distribución radial así como las funciones de correlación entre los quarks. En este caso tenemos dos tipos de correlación: cuando se trata de correlacionar quarks del mismo tipo y cuando son quarks distintos.
- Finalmente, calculamos, la función que nos muestra la eficiencia del sistema para formar grupos de 3 quarks, en el caso de los bariones.

Capítulo 4

Resultados

Utilizando el procedimiento descrito en el capítulo anterior, se realizó el estudio de hadronización/deconfinamiento de hadrones. Los resultados obtenidos, tanto para los mesones como para los bariones, los presentamos de manera simultánea a fin de comparar las similitudes y diferencias entre ambos.

4.1. Parámetro variacional óptimo y evolución de la energía

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra el comportamiento del parámetro variacional óptimo (λ) en función de la densidad de energía (ε) para el caso mesónico y el bariónico, respectivamente. En cada caso, λ se normalizó respecto al valor teórico obtenido de acuerdo con (2.14) y (2.20) correspondientes a dos y tres cuerpos. El comportamiento que se observa, a bajas densidades, es el que esperabamos en ambos casos. Las oscilaciones que aparecen en el caso mesónico se deben a fluctuaciones de cálculo. En el caso bariónico, el tamaño de los símbolos es el equivalente a las barras de error correspondientes. Podemos observar que en el caso mesónico a partir del valor $\varepsilon = 0.25 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ hay una disminución en el valor de λ , aunque lo hace de una manera muy suave. A diferencia de lo que sucede para el caso bariónico, donde para $\varepsilon = 0.75 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ el valor desciende de manera abrupta y a partir de ahí tiene una disminución continua pero muy tenue. Este comportamiento de λ se debe a la forma en como hadronizan ambos sistemas: en el caso de los mesones, al aumentar la ε , hay una disminución paulatina en interacción de los quarks para formarlos, mientras que para los bariones se mantiene más o menos constante hasta que cae

abruptamente. Sin embargo, al seguir aumentando la densidad de energía, ambos sistemas empiezan a comportarse como un gas de Fermi, pero es en el caso bariónico donde se observa una transición “rápida” hacia este estado. Note que en ambos casos, λ , no se anula completamente, reflejando la existencia de una interacción remanente.

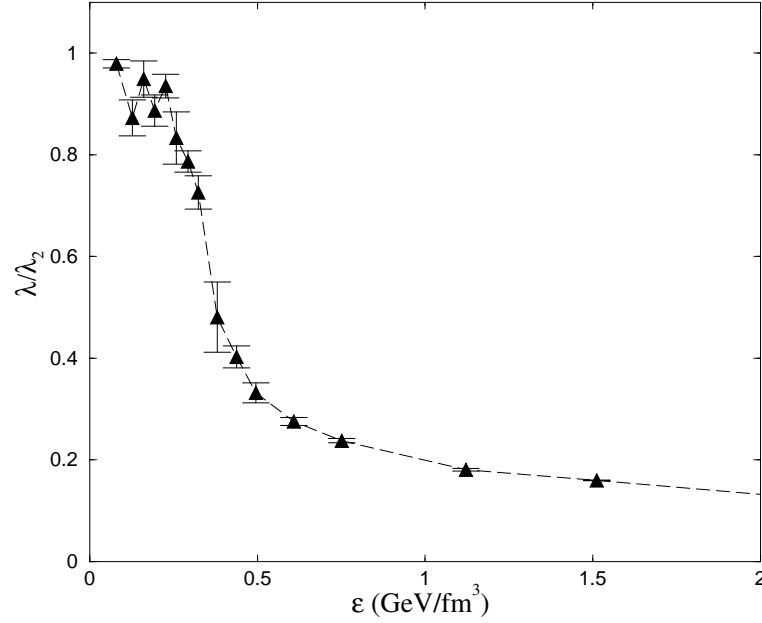


Figura 4.1: λ normalizada a λ_2 en función de la densidad de energía: caso mesónico

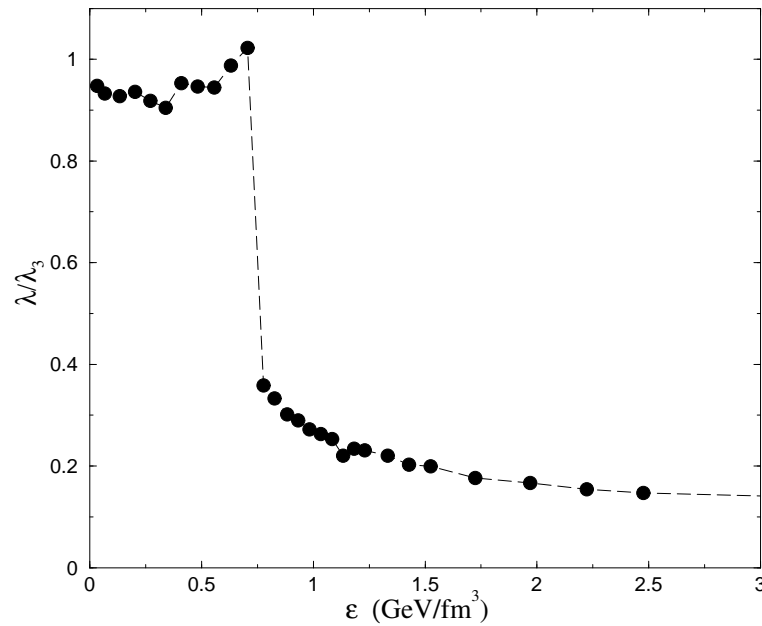


Figura 4.2: λ normalizada a λ_3 en función de la densidad energía: caso bariónico

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran las gráficas correspondientes a los valores de la energía por partícula ($\frac{E}{N} + m$) en función de la densidad de energía ε , para los mesones y bariones, respectivamente. En el caso particular de los mesones, hemos graficado también las contribuciones debidas a la energía cinética de un gas de Fermi (línea continua) y las restantes debidas a las funciones W y V (línea entrecortada). Un comportamiento similar es esperado para el caso de los bariones.

A bajas densidades, las energías por partículas, convergen a los esperados de acuerdo con las ecuaciones (2.15) y (2.21) más la masa, en las unidades correspondientes. En ambos casos la energía va subiendo lentamente a medida que aumenta la densidad hasta que llega a un máximo en $\varepsilon = 0.4 \text{ GeV/fm}^3$ (mesones) y $\varepsilon = 0.75 \text{ GeV/fm}^3$ (bariones), a partir de este punto la energía comienza a descender de manera muy pronunciada para después volver a subir debido a la dependencia de T_{FG} en la densidad de energía. Este comportamiento está modulado por el papel que juega λ en la función de onda. Por ejemplo, en el caso mesónico, figura 4.3, dado que el valor de $\langle W \rangle$ está en función de λ^2 , a densidades bajas donde el valor de λ es grande de acuerdo con la figuras 4.1, la contribución de $\langle W \rangle$ es también alta; por el contrario, al aumentar la densidad, λ se vuelve muy pequeño por lo que la contribución de $\langle W \rangle$ es casi cero y lo mismo sucede con $\langle V \rangle$. En cambio, la contribución correspondiente a la parte cinética siempre va en aumento y para valores muy altos de ε , donde el sistema se comporta como si fuese un gas de Fermi, este valor y la energía total son muy similares.

En el caso bariónico la contribución de la parte cinética y potencial es muy similar, sin embargo, en la figura 4.4 sólo se presentan los puntos correspondientes a la energía total por partícula en la región que consideramos de mayor interés, ya que como veremos más adelante, es en esta región donde identificamos la transición de fase.

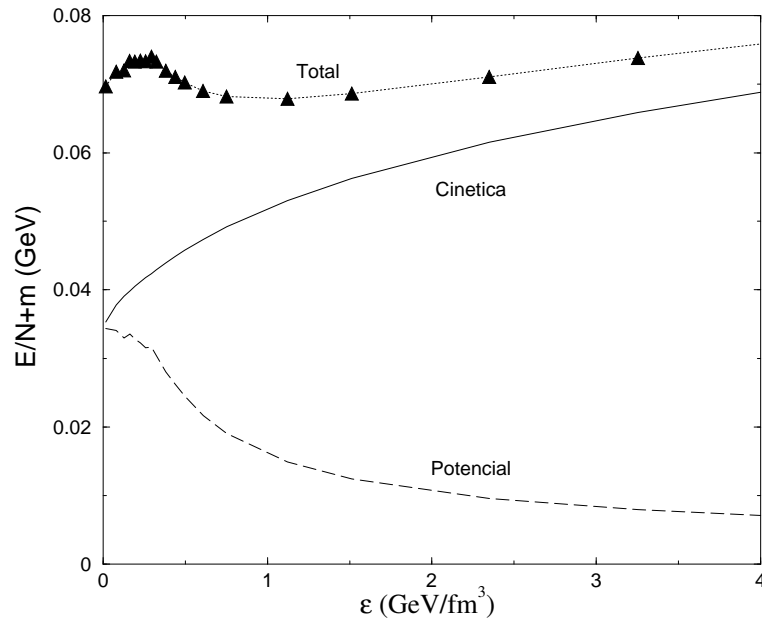


Figura 4.3: Energía por partícula incluyendo la masa vs densidad de energía (triángulos). También se muestran las contribuciones de la energía cinética de un gas de Fermi (línea continua) y las debidas a las funciones W y V (línea entrecortada): mesones

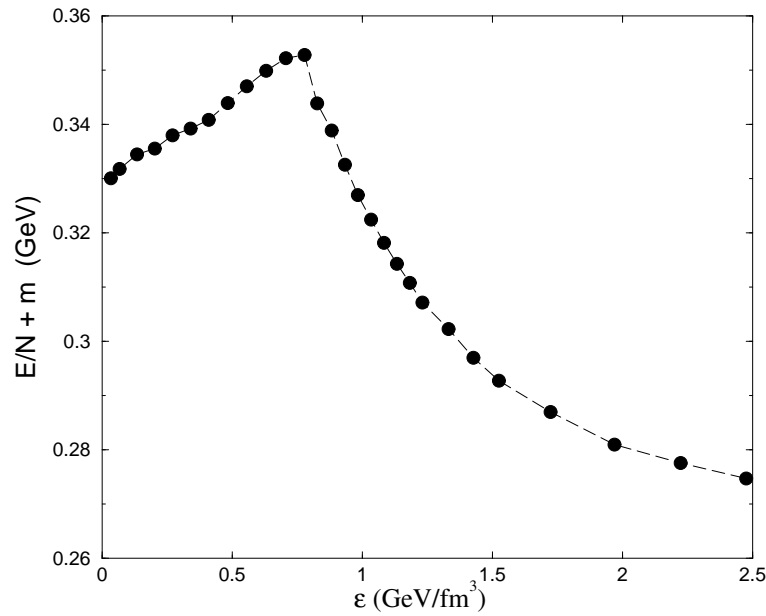


Figura 4.4: Energía por partícula incluyendo la masa vs densidad de energía: bariones

4.2. Distribución radial

Uno de los resultados obtenidos, tanto para los mesones como para los bariones, fueron las frecuencias de distribución en función de la raíz del valor promedio del radio al cuadrado, $D_r(\varepsilon)$, para cada densidad de energía. Estos fueron calculados usando la definición dada en la descripción de 2 y 3 cuerpos (ver capítulo 2) empleando la información del apareamiento óptimo en cada caso. En el caso de los bariones se identificó primero que se formarían los grupos de tres quarks correspondientes.

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran las frecuencias de distribución para algunas densidades de energía. Las curvas de distribución están ya normalizadas, de tal forma que el área bajo la curva es igual a uno. En ambos casos, tomamos como referencia, para la evolución del comportamiento, la distribución cuya densidad de energía está más próxima al valor experimental aceptado para la densidad nuclear normal $\varepsilon_N \simeq 0.2 \text{ GeV}/\text{fm}^3$.

En el caso mesónico, figura 4.5, la curva de referencia se muestra con círculos y corresponde a un valor de $\varepsilon = 0.193 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. Podemos observar que al aumentar ε la curva se desplaza hacia la derecha ($\varepsilon = 0.30 \text{ GeV}/\text{fm}^3$) y después de aumentar aún más ε las curvas se desplazan hacia la izquierda ($\varepsilon = 1.512 \text{ GeV}/\text{fm}^3$).

En el caso bariónico, figura 4.6, la curva de referencia (círculos) corresponde al valor de $\varepsilon = 0.202 \text{ GeV}/\text{fm}^3$; al aumentar ε las curvas se desplazan hacia la izquierda, sin embargo, al alcanzar el valor $\varepsilon = 0.705 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ cambia, y para $\varepsilon = 0.777 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ la curva se encuentra del lado derecho y a partir de ahí se mueven otra vez hacia la izquierda.

En ambos casos, el comportamiento de las curvas está directamente correlacionado con el valor de λ de las figuras 4.1 y 4.2.

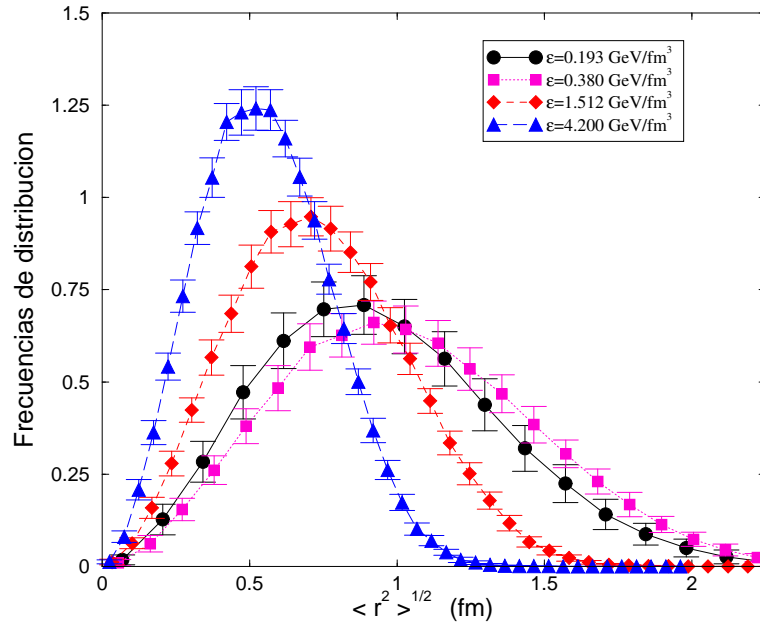


Figura 4.5: Frecuencias de distribución $D_r(\varepsilon)$ para distintos valores de ε : mesones

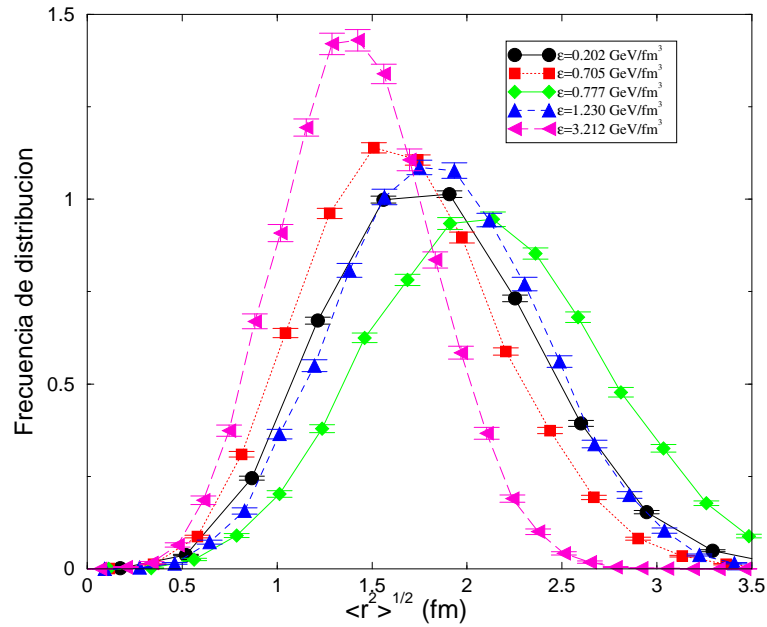


Figura 4.6: Frecuencias de distribución $D_r(\varepsilon)$ para distintos valores de ε : bariones

Como una forma de cuantificar la fracción de grupos de dos y tres quarks, que se distribuyen de manera similar a la distribución de referencia al ir aumentando la densidad de energía, definimos la función $F_r(\varepsilon)$ como la intersección del área de la distribución para cada densidad de energía con el área de la distribución de referencia:

$$F_r(\varepsilon) = \int D_r(\varepsilon_0) \cap \int D_r(\varepsilon_i)$$

Por construcción, en ambos casos, el valor de la intersección de las áreas siempre es menor que el área de referencia. En las figuras 4.7 y 4.8 se muestran los valores obtenidos en función de la densidad de energía para los mesones y bariones, respectivamente.

Es interesante notar que en el caso bariónico, el primer mínimo (sin considerar las fluctuaciones) coincide con el valor para el cual, en la figura 4.2, el parámetro variacional λ cae drásticamente y apartir de este punto la función de distribución crece nuevamente, alcanza un máximo, debido a la combinación entre los efectos de ligadura y la densidad de energía, alrededor de $\varepsilon = 1.5\text{GeV}/\text{fm}^3$ y vuelve a caer; este subir y bajar coincide de manera exacta con el zig zag que presentan las curvas correspondientes a la frecuencia normalizada de distribución radial de la figura 4.6, donde primero van hacia la izquierda, luego se van a la derecha y de nueva cuenta hacia la izquierda.

En el caso mesónico se observa un comportamiento similar pero en distintas regiones las cuales están correlacionadas con el parámetro λ .

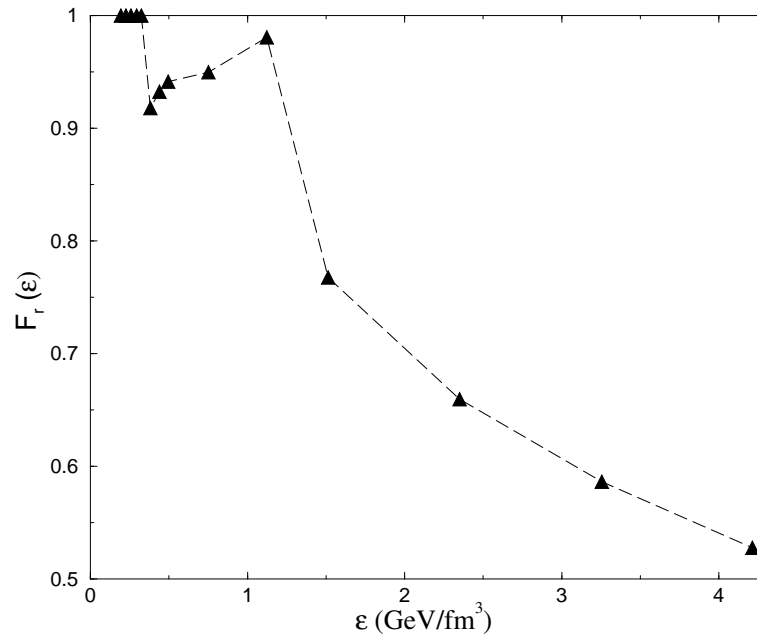


Figura 4.7: Valor de la intersección de las áreas de cada una de las distribuciones con la distribución de referencia: mesones

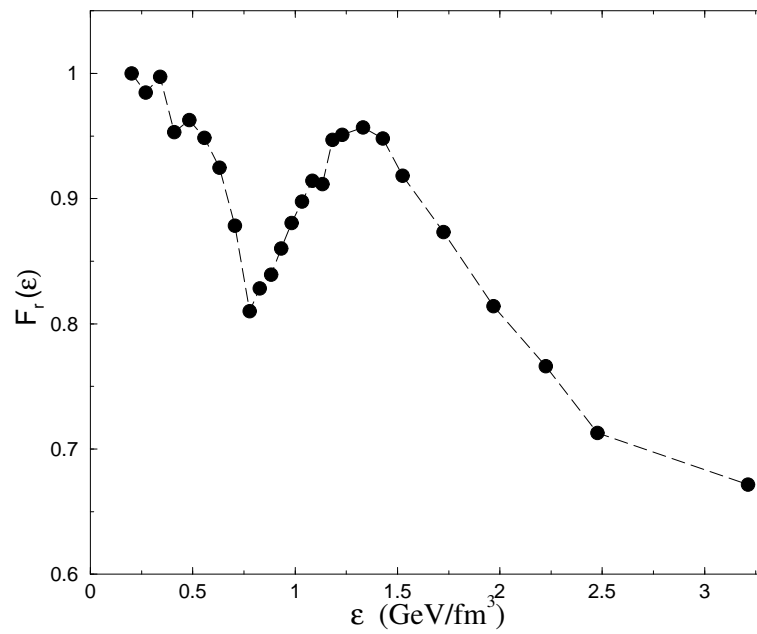


Figura 4.8: Valor de la intersección de las áreas de cada una de las distribuciones con la distribución de referencia: bariones

4.3. Funciones de correlación

Otra observable útil para caracterizar la transición de fase es la función de correlación de dos cuerpos [25]

$$\rho_2(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\beta(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}) | \Psi_0 \rangle \quad (4.1)$$

donde α y β denotan el conjunto de todos los números cuánticos internos, tales como el sabor y el color. La función de correlación mide la probabilidad de encontrar dos partículas, con números cuánticos dados, a una distancia relativa r .

En nuestro caso, definimos

$$g(r) \equiv \frac{\rho_2(\mathbf{r})}{\rho^2} - 1, \quad (4.2)$$

de forma tal que la normalización sea aquella en la cual esta converja a cero a largas distancias. Esto será particularmente útil al cuantificar las contribuciones relativas, como se explica más adelante.

Así, para la densidad de referencia, la magnitud relativa refleja la probabilidad de que una partícula esté correlacionada con otra aunque su valor individual no es explícitamente indicativo. Por ejemplo, en la figura 4.9 la máxima correlación es para $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, $r \rightarrow 0$ y vale 1.5; mientras que en la figura 4.13 la máxima correlación es para $r \rightarrow 0$ con valor = 0.

En la figuras 4.9 y 4.10 se muestran la funciones de correlación $g(r)$ entre quarks independientemente de sus números cuánticos, para mesones y bariones, respectivamente. En ambos casos, a partir de la curva de referencia (círculos), la cual corresponde al caso en el cual los quarks están ligados (correlacionados) a cortas distancias, hay una descenso suave conforme va aumentando el radio, al llegar a un valor de $r = 1.5$ fm para los mesones y $r = 2$ fm para los bariones. Conforme aumenta la densidad de energía la correlación es prácticamente nula, aunque λ no es cero para $\varepsilon \geq 1.1$ GeV/fm³. Esto implica que a densidades muy altas, los quarks ya no son capaces de ligarse de manera efectiva entre sí.

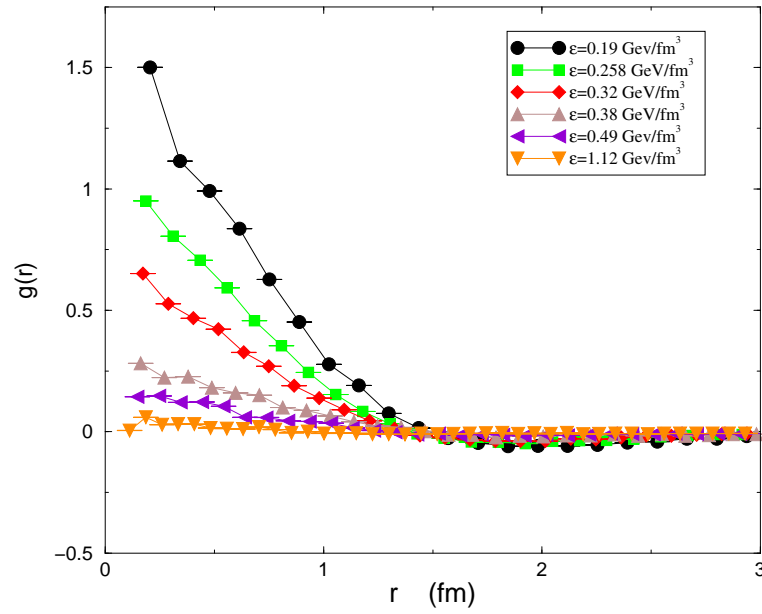


Figura 4.9: Función de correlación $g(r)$ entre quarks de cualquier tipo para distintos valores de ϵ : mesones

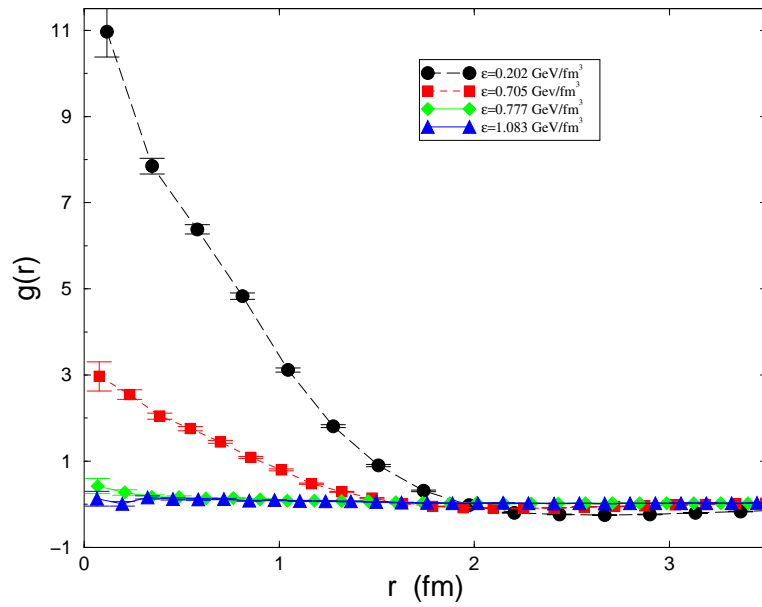


Figura 4.10: Función de correlación $g(r)$ entre quarks de cualquier tipo para distintos valores de ϵ : bariones

Podemos calcular la integral correspondiente de las funciones de correlación de las figuras 4.9 y 4.10 para cada densidad de energía; tomando el valor obtenido para la integral de la densidad de referencia ($\varepsilon \approx 2 \text{ GeV}/\text{fm}^3$), definimos:

$$C(\varepsilon) \equiv \frac{\int g(r, \varepsilon) dr}{\int g(r, \varepsilon_o) dr}$$

como la razón de las integrales de las funciones de correlación a una densidad de energía dada con respecto a la integral de la función de correlación a la densidad de energía de referencia. Note que la elección de la normalización de las funciones de correlación de las figuras 4.9 y 4.10 es tal que cuando $r \rightarrow \infty$ entonces $g(r) \rightarrow 0$, con el propósito de tener bien definida la integral. Si tomamos la normalización estándar para la cual $g(r) \rightarrow 1$ la integral siempre tendría una contribución infinita cuando $r \rightarrow \infty$

En las figuras 4.11 y 4.12 presentamos su comportamiento, para el caso mesónico y bariónico, como función de la densidad de energía. Para los mesones la evolución es descendente de manera continua y prácticamente nula para $\varepsilon \geq 1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. En cambio, para los bariones se aprecia un descenso muy rápido y después una caída abrupta.

En ambos casos el descenso llega casi a cero aunque no lo es, es decir, aun para valores de ε muy grandes, todavía hay una correlación mínima de los quarks en el sistema.

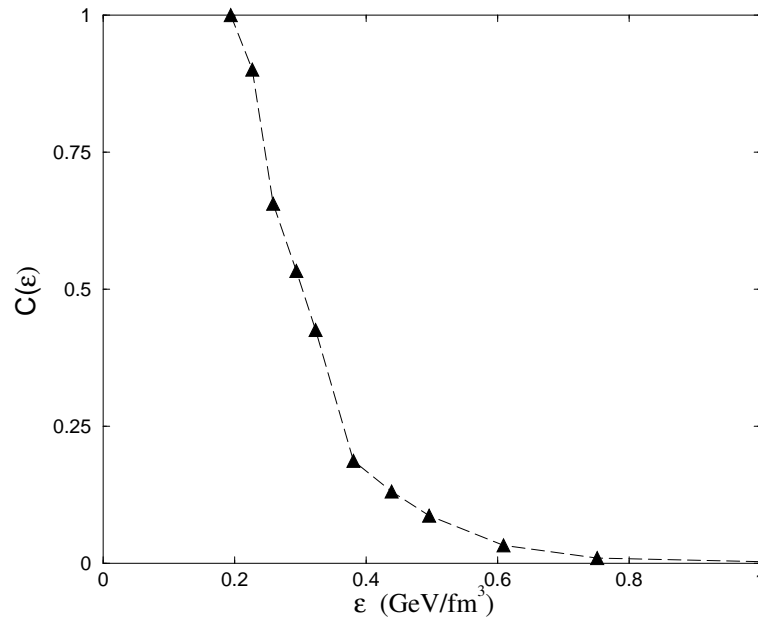


Figura 4.11: Razón de las integrales de las funciones de correlación respecto a la de referencia como función de la densidad de energía: mesones

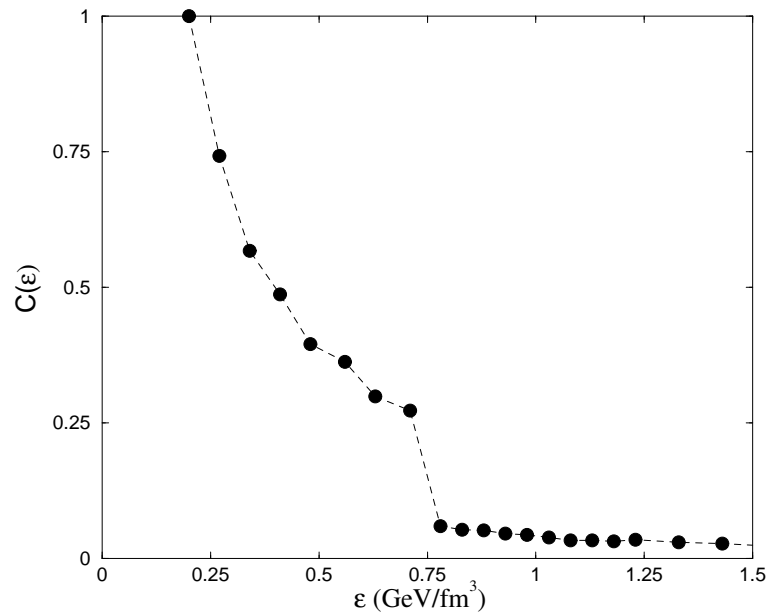


Figura 4.12: Razón de las integrales de las funciones de correlación respecto a la de referencia como función de la densidad de energía: bariones

En las figuras 4.13 y 4.14 se muestra la función de correlación para quarks con los mismos números cuánticos (por ejemplo entre quarks u_r) en términos de la distancia relativa entre ellos, para el caso de mesones y bariones respectivamente. Esta correlación la denotamos por:

$$G(r) \equiv \frac{\rho_2(\mathbf{r})}{\rho^2} \quad (4.3)$$

En este caso, la normalización se eligió de tal manera que $G(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$. De forma que $G(r) = 1$ significa cero correlación.

Nuevamente, ambas gráficas son muy parecidas, difiriendo solamente en el valor de la distancia para la cual la correlación se vuelve constante. El espacio vacío a la izquierda de las curvas se debe al principio de exclusión de Pauli. Así, hay correlación entre quarks del mismo tipo para todos los valores de ε para distancias muy cortas, pero esto es más pronunciado para valores de ε muy grandes.

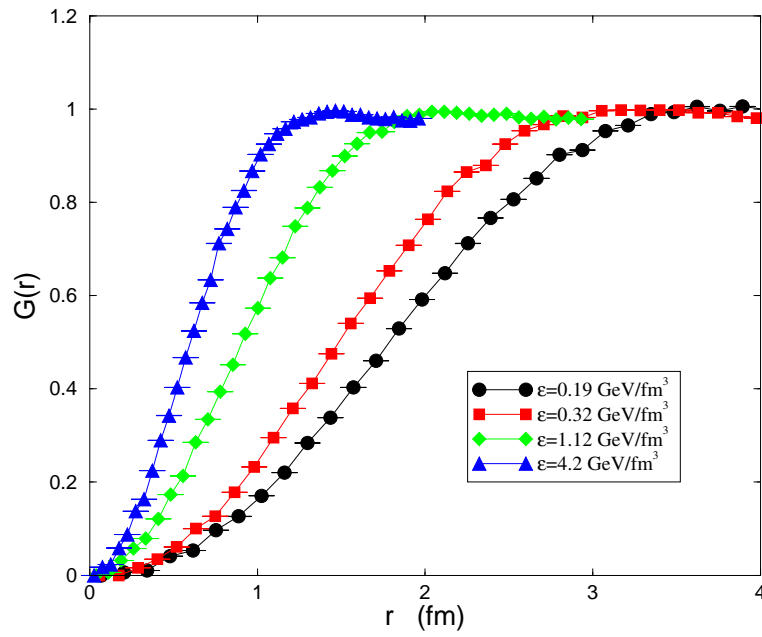


Figura 4.13: Función de correlación para quarks del mismo tipo: mesones

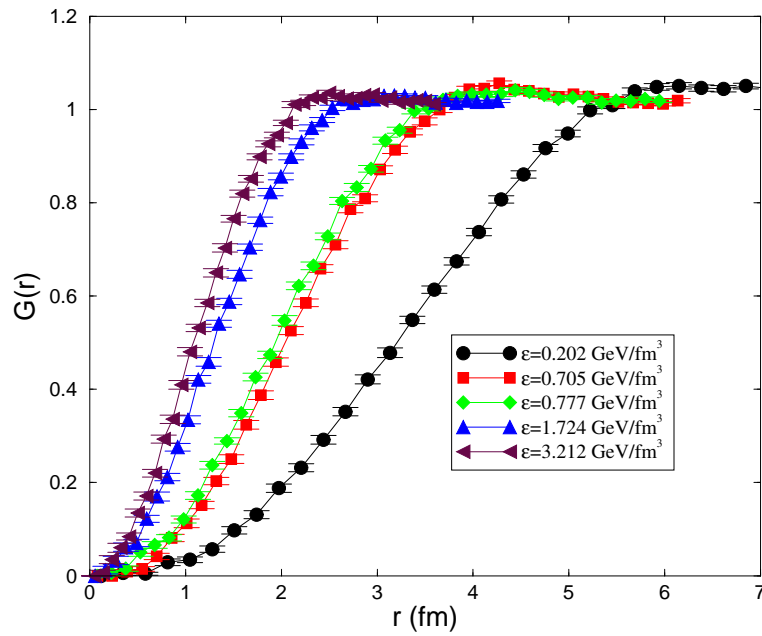


Figura 4.14: Función de correlación para quarks del mismo tipo: bariones

4.4. Identificación de la formación hadrónica

Para identificar el efecto debido sólo a los grupos de tres quarks, necesitamos remover los grupos formados por 6, 9, ... quarks que son neutros de color.

En la figura 4.15 se muestra la gráfica de la fracción del número de bariones formado, normalizado al número que correspondería si todos los quarks hubieran formado sólo grupos de tres, en función de la densidad de energía. De nueva cuenta, tenemos al principio una cantidad más o menos constante que cae de manera marcada, muy parecida a la figura 4.2. Esta caída puede entenderse como el hecho de que al ir aumentando la densidad el sistema ya no tiene la misma eficiencia para formar grupos de tres quarks y entonces forma grupos mayores.

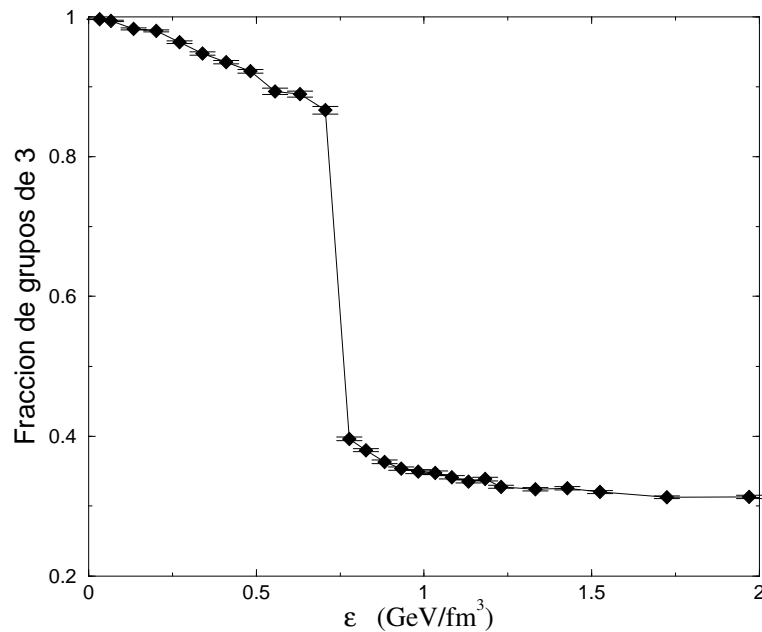


Figura 4.15: Formación de grupos de tres quarks vs. densidad de energía

Todos los resultados presentados, en distintas observables, nos permiten caracterizar de manera detallada la evolución de los sistemas que forman mesones y bariones.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de la formación de hadrones, como función de la densidad de energía (ε), es muy importante por sus implicaciones tanto en los experimentos terrestres como en astrofísica. En este trabajo hemos realizado una simulación Monte Carlo, la cual incluye propiedades de **QCD**, para tratar de entender de manera dinámica cómo ocurre la hadronización/deconfinamiento de un sistema formado por quarks como función de la densidad de energía.

Para caracterizar el sistema, determinamos el parámetro variacional óptimo minimizando el valor de la energía, calculamos las distribuciones radiales de los hadrones formados, las funciones de correlación correspondientes y la fracción de grupos de 3 quarks formados (en el caso bariónico. Para el caso mesónico el sistema estaba intrínsecamente formado sólo de pares). Además, hicimos una comparación de estas observables con los resultados correspondientes del sistema a la densidad nuclear normal.

Para bajas densidades, el modelo variacional empleado, reprodujo los valores de la energía por partícula, el parámetro variacional y el del promedio del radio al cuadrado, correspondientes a un mesón y un barión, de forma muy cercana a los valores calculados teóricamente.

Cuando aumenta el valor de ε , encontramos algunas similitudes y diferencias en el comportamiento entre ambos sistemas, en sus distintas observables:

En el proceso de hadronización/deconfinamiento, el parámetro variacional evoluciona de manera distinta en cada sistema. Identificamos el origen de esto en la restricción impuesta por el potencial para formar estados neutros de color.

En el caso de los mesones, cuando ε se encuentra alrededor de $0.4 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ hay un

cambio significativo en la forma en como empiezan a correlacionarse entre sí los quarks, de modo que al aumentar ε empieza a bajar de manera suave y continua la interacción entre los quarks (identificada con la evolución del parámetro variacional).

En el caso bariónico, este cambio ocurre hasta $\varepsilon = 0.77 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ y es mucho más brusco que en el caso mesónico. Este cambio consiste en una menor eficacia del sistema para poder formar grupos de tres quarks. Más aún, el sistema empieza a parecerse más a un gas de Fermi ($\lambda \rightarrow 0$). Podemos identificar este punto de cambio abrupto como un cambio de fase del sistema, de modo tal que los grupos de tres que puedan formarse en estas condiciones, no corresponden a la formación típica de un barión. Esto nos lleva a considerar que la transición de fase de la materia hadrónica hacia un plasma de quarks y gluones bien puede estar alrededor de este valor de la densidad de energía, la cual es aproximadamente cuatro veces el valor de la densidad nuclear normal.

El comportamiento de la raíz del promedio del radio cuadrado, refleja el juego entre el efecto de la densidad y el potencial de interacción. Mientras que la densidad evoluciona monótonamente, la eficiencia del potencial no lo hace. Esto hace que el tamaño del hadrón muestre contracciones y dilataciones.

Por otra parte, al aumentar la densidad de energía, la correlación entre quarks de diferente tipo se hizo muy pequeña pero no cero en ninguno de los dos casos. Esto implica que para valores de ε grandes todavía existe una fracción mínima de correlación entre quarks. Aunque, dadas las características de las observables estudiadas, por ejemplo el radio, estos estados no corresponden a la formación típica de mesones o bariones.

Al realizar la identificación de los grupos de tres quarks (para bariones) obtuvimos que, después de la región de transición, existe una fracción considerable de grupos de 3 quarks formados. Sin embargo, de acuerdo con los resultados obtenidos en las funciones de correlación para quarks de distinto tipo, a altas densidades los quarks prácticamente ya no están correlacionados y por lo tanto estos grupos de 3 quarks no pueden ser identificados simplemente como bariones.

En el caso de la correlación entre quarks del mismo tipo, en ambos casos obtuvimos que al aumentar ε , la correlación a cortas distancias exhibe el principio de exclusión de Pauli y va desapareciendo para distancias largas.

Todo lo anterior implica que el proceso de hadronización/deconfinamiento de ambos sistemas es diferente y es reflejado en cada una de las observables que hemos estudiado.

Estos resultados podrían dar indicios de porqué se observa una variación en la razón

de producción protón/pión en colisiones de iones pesados, y mostrar el perfil de contenido hadrónico dentro de una estrella de neutrones.

Es importante señalar que en la simulación empleada, no se consideraron explícitamente los aspectos asociados a la distribución de momentos que pudieran llevar los quarks en los sistemas, además de que se calcularon las evoluciones de mesones y bariones de manera separada, es decir como si no hubiera interacción entre ellos. Tampoco se incluyeron quarks más pesados (por ejemplo quarks extraños).

Una extensión de este estudio será calcular las razones p/π como función del momento transversal (P_t) usando el comportamiento de las observables calculadas como probabilidades, aunque de las gráficas de las figuras 4.1 y 4.2 ya se puede vislumbrar que la producción de mesones y bariones es distinta como lo muestra el experimento. También planeamos estudiar las correlaciones hadrónicas para tener un estudio más detallado de las observables en colisiones de iones pesados.

Para el caso de estrellas de neutrones, estos resultados deben aún combinarse con las restricciones de neutralidad de carga eléctrica y equilibrio débil para dar un perfil realista del contenido hadrónico.

Estos aspectos tendrán que ser tomados en cuenta e incluirlos para mejorar los resultados aquí obtenidos.

Apéndice A

Algoritmo de Metrópolis

Los valores esperados de W y V se calcularon por medio de una simulación *Monte Carlo* en la cual se empleó el *algoritmo de Metropolis*. A continuación describimos en que consiste y damos un ejemplo sencillo de su implementación para evaluar una integral.

Dada una configuración k , el algoritmo de Metrópolis propone nuevas configuraciones l con algunas transiciones de probabilidad:

$$f(l, k) \text{ con normalización } \sum_l f(l, k) = 1$$

La nueva configuración es aceptada o rechazada con probabilidad

$$w^{(l)(k)} = \min \left[1, \frac{P_B^{(l)}}{P_B^{(k)}} \right]$$

Si la nueva configuración se rechaza, la configuración anterior se mantiene y tiene que contarse nuevamente.

Podemos describir los pasos del algoritmo de la manera siguiente:

- Sea \vec{x}_0 un valor inicial y $w(\vec{x})$ la función de distribución que se desea generar.
- Sea \vec{x}_t un paso aleatorio en la vecindad de \vec{x}_0 y $w_t = w(\vec{x}_t)$.
- Evaluar la razón $r = \frac{w_t}{w(\vec{x}_0)}$
- Si $r > 1$ Tome el número como un valor permitido del paso.
- Si $r < 1$ Genere un valo r_2 (número) aleatorio: $0 < r_2 < 1$

- Si $r > r_2$ Tome el número como un valor permitido del paso, en caso contrario quedese en la posición anterior.

Lo anterior lo podemos ver esquematizado en el figura A.1.

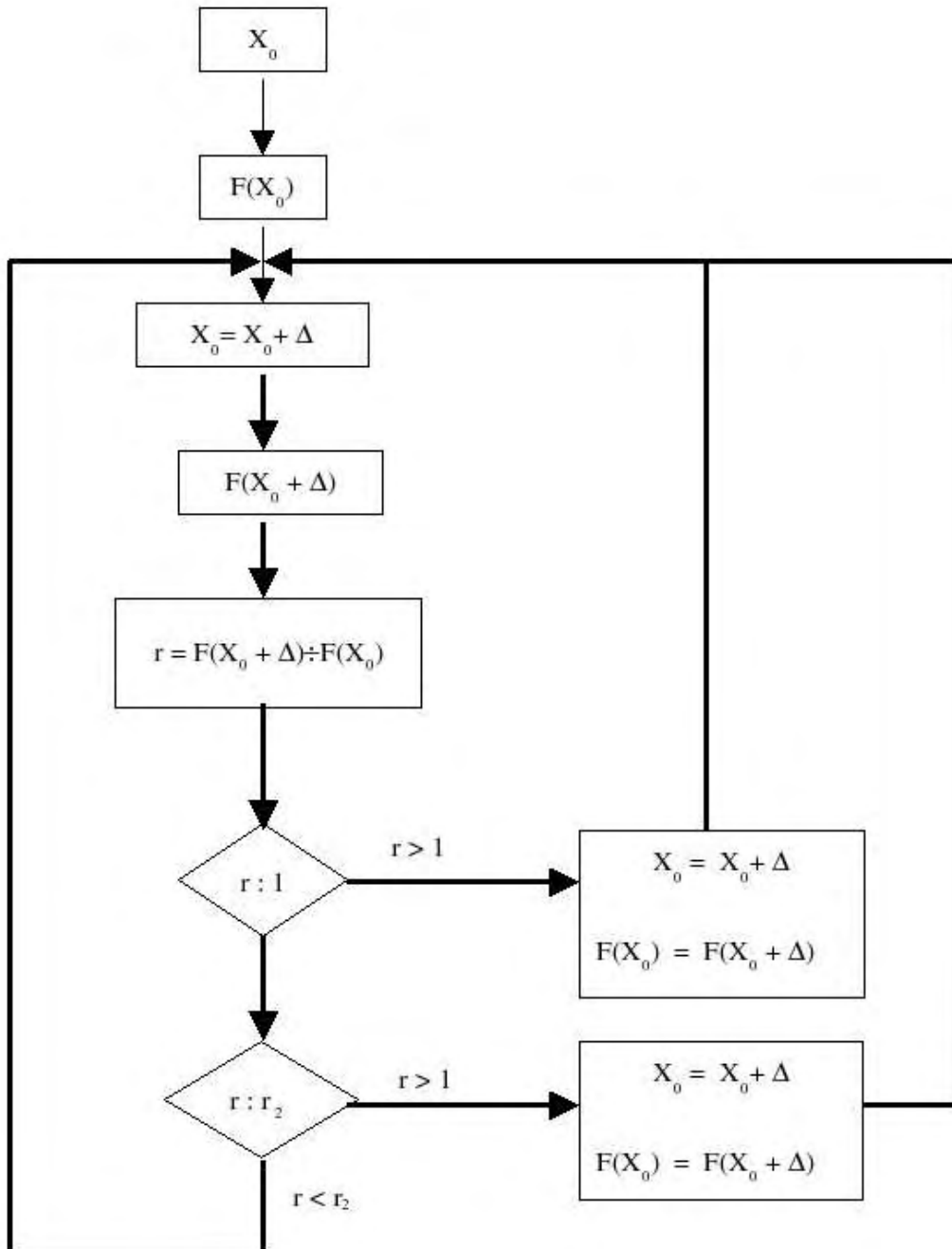


Figura A.1: Diagrama de flujo que muestra el criterio del algoritmo de Metrópolis

Como ejemplo, mostramos a continuación un programa en fortran, que calcula la integral $\langle x^2 \rangle$ para una función de onda de la forma $\psi(x) = \exp^{-x^2\alpha}$. El valor esperado teóricamente para $\alpha = 2$ es 0.25 y el obtenido en el programa es 0.2526 ± 0.0030 .

```

c ALGORITMO DE METROPLIS
program integral
real x, delta, alfa, f, ft, R, R1, xt,rand, sumf, A, B, RESULTADO
real ERROR, promedio
integer iaccepta,N, ibloque, icount, inb, ithermal
iaccepta = 0
delta = 1.5
alfa = 2
N = 40000
ibloque = 1000
sumf = 0
icount = 0
ithermal = 1000
inb=(N-ithermal)/ibloque
A = 0
B = 0
write (*,*) 'valor inicial'
read (*,*) x
f = exp(-alfa*x**2)
write(*,*)'F iniciales ',f,inb
do i=1,N
xt = x + delta*(2*rand(0)-1)
ft = exp(-alfa*xt**2)
R = ft/f
if (R .GT. 1) THEN
f = ft
x = xt
iaccepta = iaccepta + 1
ELSE
R1 = RAND(0)
if (R .GT. R1) THEN
f = ft
x = xt
iaccepta = iaccepta + 1
end if

```

```
end if
if (i .GT. ithermal) THEN
sumf = sumf + x**2
icount = icount + 1
if (icount .EQ. ibloque) THEN
promedio = sumf/float(ibloque)
B = B + promedio
A = A + promedio**2
sumf = 0
icount = 0
end if
write (9,*) x,f
end if
end do
RESULTADO = B/float(inb)
ERROR = SQRT((A/float(inb) - RESULTADO**2)/float(inb))
write (*,*) RESULTADO, ERROR
write (*,*) 'Áceptancia', iaccepta/float(N)
end
```

Apéndice B

Conversión de unidades

En el capítulo 2, al determinar los valores del parámetro variacional λ_i , la energía por partícula E_i así como el valor promedio del radio al cuadrado $\langle r_i^2 \rangle$ con $i = 2$ y 3 , se utilizaron tanto unidades naturales: $\hbar = c = 1$ como unidades ficticias: $m = k = 1$ a fin de simplificar los cálculos, por lo que los valores resultantes son adimensionales. Para expresar las unidades de distancia en fm y las de energía en GeV hacemos las siguientes identificaciones con los resultados experimentales.

Para el **caso de los mesones**, utilizamos los valores experimentales relacionados con el pión (π) para fijar la conversión de unidades.

Para fijar la unidad de distancia, utilizamos el valor del promedio del radio al cuadrado: De acuerdo con la ecuación (2.25)

$$\langle r_2^2 \rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1.0607 \quad (\text{B.1})$$

Por otro lado, el valor experimental del promedio del radio al cuadrado para el caso del pión es:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = 0.5837 \text{ fm}^2 \quad (\text{B.2})$$

Por lo tanto, el factor de conversión para las distancias es \mathcal{R}_2 :

$$\mathcal{R}_2 = \sqrt{\frac{\langle r_\pi^2 \rangle}{\langle r_2^2 \rangle}} = 0.7418 \text{ fm} \quad (\text{B.3})$$

Para fijar la unidad de energía, podemos proceder vía la relación entre distancia y energía, dada por $\hbar c = 197.32 \text{ MeV fm}$. Sin embargo, para nuestro modelo, este procedimiento predice un valor de la masa del pión más pequeño que la observada. Para dar

cuenta de este problema necesitamos realizar un rescalamiento de la energía, o lo que es equivalente, fijar la unidad de energía a partir de la masa medida del pión, como se describe a continuación:

De la ecuación (2.15) tenemos que la energía total por partícula incluyendo la masa, con $m = 1$, es:

$$E_{T2} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1 + 1.0607 = 2.0607 \quad (\text{B.4})$$

esta cantidad tiene que estar en correspondencia con la masa experimental del pión, $m_\pi \approx 0.140$ GeV, dividida entre dos. Por lo que si nuestro factor de conversión lo denotamos como \mathcal{K}_2 tenemos:

$$(E_{T2})(\mathcal{K}_2) = \frac{m_\pi}{2}$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{\frac{m_\pi}{2}}{E_{T2}} = 0.0340 \text{ GeV} \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, para obtener las unidades de densidad de energía del sistema de mesones simulados, el factor de conversión, está dado por:

$$\mathcal{X}_2 = \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{R}_2^3}(3)(3) = 0.749 \text{ GeV/fm}^3 \quad (\text{B.6})$$

donde el primer 3 tiene que ver con la degeneración de color de los quarks y el segundo 3 se incluye para tener un número de quarks igual a los utilizados en el sistema de bariones.

En el **caso de los bariones**, procedemos de manera similar, utilizando los valores experimentales del protón (p):

Para fijar la unidad de distancia, de acuerdo con la ecuación (2.26)

$$\langle r_3^2 \rangle = \sqrt{3} = 1.7321 \quad (\text{B.7})$$

Por otro lado, el valor experimental del promedio del radio al cuadrado para el caso del protón es:

$$\langle r_p^2 \rangle = 0.7762 \text{ fm}^2 \quad (\text{B.8})$$

Por lo tanto, el factor de conversión para las distancias \mathcal{R}_3 , está dado por:

$$\mathcal{R}_3 = \sqrt{\frac{\langle r_p^2 \rangle}{\langle r_3^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{0.7762 \text{ fm}^2}{1.7321}} = 0.6694 \text{ fm} \quad (\text{B.9})$$

Para la unidad de energía, procedemos de manera similar a el caso mesónico, por los mismos argumentos:

De la ecuación (2.21) tenemos que la energía total por partícula incluyendo la masa, con $m = 1$, es:

$$E_{T3} = 1 + \sqrt{3} = 1 + 1.7321 = 2.7321 \quad (\text{B.10})$$

esta cantidad tiene que estar en correspondencia con la masa experimental del protón, $m_p = 0,9381\text{GeV}$, dividida entre tres, por lo que nuestro factor de conversión es:

$$\mathcal{K}_3 = \frac{m_p}{3} = 0.1145 \text{ GeV} \quad (\text{B.11})$$

Finalmente, para obtener las unidades de densidad de energía, de acuerdo con las ecuaciones (B.9) y (B.11) el factor de conversión, \mathcal{X}_3 , está dado por:

$$\mathcal{X}_3 = \frac{\mathcal{K}_3}{\mathcal{R}_3^3}(3)(2) = 2.29 \text{ GeV}/\text{fm}^3 \quad (\text{B.12})$$

donde el factor 3 tiene que ver con la degeneración de color de los quarks y el 2 da cuenta de los antiquarks.

Bibliografía

- [1] *Introduction to Elementary Particles* David Griffiths, John Wiley and Sons. 1987
- [2] *The Physics of the Standard Model and Beyond* T. Morii, C. S. Lim, World Scientific 2004
- [3] *Particle Physics* B. R. Martin, G. Shaw. Wiley 1992
- [4] *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* F. Halzen, A. D. Martin, John Wiley and Sons. 1984
- [5] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert Phys. Lett. B 478 (2000)
- [6] T. Matsui and H. Satz. Phys. Lett. 178B (1986), 416.
- [7] T. Matsui. *Quest for the Quark-Gluon Plasma*. arXiv:nucl-th/0305096 V1 (2003)
- [8] *Compact Stars* Norman K. Glendenning, 2nd Ed. Springer. 2000.
- [9] PHENIX Collaboration, Phys. Lett. 88, 242301 (2002)
- [10] B. Alper et al. Nucl. Phys. B 100 237 (1975)
- [11] DELPHI Collaboration P. Abreu et al. Eur. Phys. J. C. 17, 207 (2000)
- [12] R. J. Fries et al. Phys. Lett. 90(20):202303 (2003)
- [13] Tesis de Maestría, Mauricio Martínez Guerrero. *Recombinación dinámica de partones en colisiones de iones pesados relativistas*. PCF-UNAM, 2006.
- [14] A. Ayala, M. Martínez, G. Paic and G. Toledo Phys. Rev C. 77 044901 (2008).
- [15] *Quantum Mechanics* Claude Cohen-Tannoudji, John Wiley and Sons. 1977

- [16] *Modern Elementary Particle Physics* Gordon Kane, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1987
- [17] G. Toledo Sánchez and J. Piekarewicz. Phys. Rev C. Vol. 65, 045208
- [18] G. Toledo Sánchez and J. Piekarewicz. Phys. Rev C. Vol. 70, 035206 (2004)
- [19] C. J. Horowitz and J. W. Negele Phys. Rev. D 311689 (1985)
- [20] M. Oka, Phys. Rev. D. 31, 2274(1985).
- [21] Ph. de Forcrand, O. Jahn, Nucl. Phys. A 755 (2005) 475c-480c
- [22] T. T. Takahashi *et al.*, Phys. Rev. D 65 (2002) 114509
- [23] *Data Reduction and Error Analysis* Philip R. Bevington, D. Keith Robinson, McGraw Hill, 2003.
- [24] *Quantum Many Particle System*. John W. Negele, Henri Orland, Westview, 1998
- [25] A. L Fetter and J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).