UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TESINA

SISTEMAS DINÁMICOS MONÓTONOS COOPERATIVOS Y COMPETITIVOS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

POSADAS DURÁN GABRIELA

DRA. LOURDES ESTEVA PERALTA

MÉXICO, D.F. JULIO, 2008

Sistemas dinámicos monótonos cooperativos y competitivos

Posadas Durán Gabriela

(2007-2008)

Índice general

Dedico esta tesina a:

La vida y al amor

Pero muy especialmente:

A mi padre:

Salomón Posadas

Por todo tu amor y apoyo. Por creer siempre en mí. Pero principalmente por ser mi razón de seguir adelante.

A mi madre:

Irene Durán

Por estar siempre conmigo y por tus consejos.

A mi hermano:

Juan Pablo

Por ser un limoncito que vino para robarse mi amor.

Mi agradecimiento a:

Mi tutora:

Dra. Lourdes Esteva Peralta

Por su apoyo, su paciencia, compresión y confianza. Por permitirme ser su tesista.

Introducción General

Muchos fenómenos biológicos, químicos, físicos y económicos estan representados por sistemas dinámicos monótonos competitivos y cooperativos.
El objetivo principal de este trabajo es presentar ciertos resultados sobre los sistemas dinámicos monótonos competitivos y cooperativos así como algunos ejemplos.

En el primer capítulo se introducirán las definiciones básicas de los sistemas dinámicos monótonos como por ejemplo, la relación de orden parcial, la definición de cono, la definición de un semiflujo monótono, entre otras cosas, así como un resultado de convergencia, el cual ocuparemos en el capítulo dos.

En el capítulo dos particularizaremos las definiciones dadas en el capítulo uno para $\Re^n$. Empezaremos la primera sección con la condición de Kanke, la cual es necesaria para que un sistema dinámico sea monótono. Definiremos lo que es un sistema competitivo y cooperativo y notaremos que un sistema competitivo y cooperativo es monótono. Identificaremos los conjuntos positivamente invariantes de un sistema cooperativo y competitivo. Con esto se muestra que todas las soluciones de un sistema cooperativo y competitivo en $\Re^2$ que sean acotadas convergen monótonamente a un punto de equilibrio. Finalmente se desarrollan las herramientas básicas para demostrar el teorema principal de este trabajo, Teorema 2.3.2:

> El flujo de un conjunto límite compacto de un sistema competitivo o cooperativo en $\Re^n$ es topológicamente equivalente a el flujo de un conjunto invariante compacto de un sistema de ecuaciones diferenciales de Lipchitz en $\Re^{n-1}$

En otras palabras la dinámica del conjunto límite de un sitema competitivo y cooperativo no se puede comportar de manera más complicada que la dinámica en una dimensión menor. Tal vez este resultado no sea tan útil para dimensiones muy altas o dimensiones triviales como dimensión uno, pero para dimensiones dos y tres es muy útil. Para $\Re^3$ se tienen resultados generales como el teorema de Poincaré Bendixon. Más aún, se observará que un sistema coompetitivo en $\Re^3$ puede tener una órbita periódica atractora pero un sistema cooperativo no. Un teorema visto en esta sección da condiciones suficientes para que todas las soluciones que empiezan afuera de la variedad estable del punto de equilibrio

se aproximen a una órbita periódica no trivial. Por último un resultado igualmente importante dice que cada órbita periódica de un sistema competitivo o coperativo contiene un punto de equilibrio dentro de la órbita.
En el capítulo tres, se presentará la generalización de sistemas cooperativos y competitivos en otros conos llamados conos alternativos. Con esta nueva definición el problema de identificar un sistema monótono competitivo o coperativo se vuelve más complicado como se verá en el modélo de Field-Noye y de Belousov-Zhabotinsky donde se aplican los resultados antes vistos.

Capítulo 1

Definiciones básicas

El objetivo principal de este capítulo es introducir las definiciones básicas de los sistemas dinámicos monótonos, así como un resultado, el cual ocuparemos en el siguiente capítulo.

1.1. Definiciones básicas

Un sitema dinámico monótono es un sistema dinámico en un espacio métrico ordenado.

Inicialmente pensaremos que X es un espacio métrico, con metrica d, y una relación de orden parcial $\leq$.

Recordemos:

Definición 1.1.1 *Una relación de orden parcial satisface*

- *reflexiva:* $x \leq x$ *para cada* $x \in X$
- *transitiva:* $x \leq y$ *y* $y \leq z$ *implica* $x \leq z$
- *antisimetrica:* $x \leq y$ *y* $y \leq x$ *implica* $x = y$

Definición 1.1.2 *Un cono* Y_+ *de* Y *es un subconjunto cerrado de* Y *con las siguientes propiedades:*

- $\Re_+ \cdot Y_+ \subset Y_+$
- $Y_+ + Y_+ \subset Y_+$
- $Y_+ \cap (-Y_+) = 0$

La relación definida por $x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in Y_+$ es una relación de orden parcial cerrada.

Definición 1.1.3 *Un semiflujo en X es un mapeo continuo $\phi : X \times \Re^+ \to X$ que satisface:*

- $\phi_0 = id_X$
- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ *para* $t, s \geq 0$

Definición 1.1.4 *La órbita positiva (ó negativa) de x denotada por $\gamma^+(x)$ (ó $\gamma^-(x)$), se define como*

$$\gamma^+(x) = \{\phi_t(x) : t \geq 0\} \quad \big(\text{ ó } \gamma^-(x) = \{\phi_t(x) : t \leq 0\} \big)$$

Definición 1.1.5 *Un punto de equilibrio es un punto x para el cual $\gamma^+(x) = x$. Denotamos por E al conjunto de todos los puntos de equilibrio.*

Definición 1.1.6 *Un conjunto A de X es positivamente invariante si $\phi_t A \subset A$ para todo $t \geq 0$*

Definición 1.1.7 *$\gamma^+(x)$ se dice ser una orbita T-periodica para alguna $T > 0$ si $\phi_T(x) = x$. En este caso $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x)$ para todo $t > 0$, por lo tanto*

$$\gamma^+(x) = \{\phi_t(x) : 0 \leq t \leq T\}$$

Definición 1.1.8 *El conjunto omega limite (alfa limite), $\omega(x)$ ($\alpha(x)$) para alguna $x \in X$, se define como:*

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \phi_s(x)} \quad \left(\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} \phi_s(x)} \right)$$

Definición 1.1.9 *Un punto $x \in X$ se dice un punto **convergente** si $\omega(x)$ consiste de un solo punto. El conjunto de todos estos puntos es denotado por **C***

Definición 1.1.10 *El semiflujo ϕ se dice ser **monótono** si*

$$\phi_t(x) \leq \phi_t(y) \text{ siempre que } x \leq y \text{ y } t \geq 0$$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales cooperativos y competitivos

Uno de los principales teoremas de este trabajo se exibirá en la sección tres, Teorema 2.3.2, este teorema nos garantiza que la dinámica del conjunto limite de un sitema competitivo y cooperativo no se puede comportar de manera más complicada que la dinámica en una dimensión menor. Tal vez este resultado no sea tan útil para dimensiones muy altas o dimensiones triviales como dimensión uno, pero para dimensiones dos y tres es muy útil.

2.1. La condición de Kamke

Considerese un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

donde f es continuamente diferenciable en un subconjunto abierto $D \subset \Re^n$ y sea $\phi_t(x)$, su solución. El ***cono no negativo*** en $\Re^n$, denotado por $\Re^n_+$ es el conjunto de todas las n-tuplas con coordenadas no negativa. Este cono da lugar a un orden parcial en $\Re^n$ dado por:

- $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \Re^n_+ \Leftrightarrow x_i \leq y_i \; \forall \; i$
- $x < y \Leftrightarrow x \leq y \;\; y \;\; x_i < y_i \;\; para \;\; alguna \;\; i$
- $x << y \Leftrightarrow y_i < x_i \;\; \forall \; i$

Nuestro objetivo, ahora, es tener condiciones para que ϕ sea un sistema dinámico monótono con respecto al orden $\leq$

Definición 2.1.1 *f se dice ser del tipo k en D si para cualesquiera dos puntos a y b con $a \leq b$ y $a_i = b_i$ se cumple que $f_i(a) \leq f_i(b)$.*

El siguiente resultado asegura que si f cumple la condición k el sistema es monótono.

Proposición 2.1.1 *Supongamos que f es del tipo k en D y x_0 y $y_0 \in D$. Supóngase que $<_r$ denota cualquiera de las siguientes relaciones de orden $\leq$, $<$ o $<<$. Si $x_0 <_r y_0$, $t > 0$ y $\phi_t x_o$, $\phi_t y_o$ estan definidos entonces $\phi_t x_o <_r \phi_t y_o$*

Demostración: Para $m = 1, 2, ...$, sea $\phi_t^m(x)$ el flujo correspondiente a

$$\dot{x} = f(x) + \left(\frac{1}{m}\right) e$$

donde $e = (1, 1, .., 1)$. Sea $x_0 <_r y_0$ y supongase que $\phi_t x_o$ y $\phi_t y_o$ están definidos

- **CASO 1:** Si $x_0 \leq y_0 \Longrightarrow$, $\phi_s^m\left(y_0 + \frac{e}{m}\right)$ esta definido para $0 \leq s \leq t$, y para toda m grande, digamos $m > M$,

$$\phi_s^m\left(y_0 + \frac{e}{m}\right) \longrightarrow \phi_s(y_0)$$

cuando $m \to \infty$, uniformemente en $s \in [0, t]$. Vea [3, Hale], Capítilo I, lema 3.1.

Afirmación: $\phi_s(x_o) << \phi_s^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})$ para toda $0 \leq s \leq t$ y para toda $m > M$.

Demostración de la afirmación: Supongamos que la afirmación es falsa $\Rightarrow$

existe t_0, con $0 \leq t_0 \leq t$, tal que $\phi_s(x_o) << \phi_s^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})$ en $0 \leq s \leq t_0$ y existe un indice i tal que $\phi_{t_0}(x_o)_i = \phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{1}{m})_i$.

Observese que la afirmación es verdadera para $s = 0$, efectivamente ya que si $m > M$, $x_0 << y_0 + \frac{\epsilon}{m}$, y como, $\phi_0(x_0) = x_0$ y $\phi_0^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m}) = y_0 + \frac{\epsilon}{m} \Rightarrow \phi_0(x_0) << \phi_0^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})$. Por lo tanto la afirmación se vale si $s = 0$. Rescibiendo lo anterior se tiene que

existe t_0, con $0 < t_0 \leq t$, tal que $\phi_s(x_o) << \phi_s^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})$ en $0 < s \leq t_0$ y existe un indice i tal que $\phi_{t_0}(x_o)_i = \phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{1}{m})_i$.

Como $0 < t_0$ entonces existe $h \in \Re$ tal que $-t_0 < h < 0$. Considerando $s = t_0 + h$ y sustituyendo en lo anterior finalmente se tiene:

Existe t_0, con $0 < t_0 \leq t$, tal que

$$\phi_{t_0+h}(x_o) << \phi_{t_0+h}(y_0 + \frac{\epsilon}{m}) \tag{2.2}$$

y existe un indice i tal que

$$\phi_{t_0}(x_o)_i = \phi_{t_0}(y_0 + \frac{1}{m})_i \tag{2.3}$$

De 2.2 tenemos en particular que

$$\phi_{t_0+h}(x_o)_i < \phi_{t_0+h}(y_0 + \frac{1}{m})_i \tag{2.4}$$

Entonces por 2.3 y 2.4 tenemos que:

$$\phi_{t_0+h}(x_o)_i - \phi_{t_0}(x_o)_i < \phi_{t_0+h}(y_0 + \frac{1}{m})_i - \phi_{t_0}(y_0 + \frac{1}{m})_i$$

Como $h < 0$ entonces

$$\frac{phi_{t_0+h}(x_o)_i - \phi_{t_0}(x_o)_i}{h} > \frac{\phi_{t_0+h}(y_0 + \frac{1}{m})_i - \phi_{t_0}(y_0 + \frac{1}{m})_i}{h}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s(x_o)_i &= lim_{h\to 0^-}\frac{\phi_{t_0+h}(x_o)_i - \phi_{t_0}(x_o)_i}{h} \\
&> lim_{h\to 0^-}\frac{\phi_{t_0+h}(y_0 + \frac{1}{m})_i - \phi_{t_0}(y_0 + \frac{1}{m})_i}{h} \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})_i
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Es decir

$$\frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s(x_o)_i > \frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})_i \tag{2.6}$$

Por otro lado como tambien se tiene que

$$\phi_{t_0}(x_o)_j < \phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})_j$$

para $i \neq j$ (según la relación de orden $<<$) lo cual implica que

$$\phi_{t_0}(x_o)_j \leq \phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})_j$$

para $i \neq j$, y como por hipótesis f satisface la condicion $k \Rightarrow$

$$f_i\left(\phi_{t_0}(x_o)\right) \leq f_i(\phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})) < f_i(\phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})) + \frac{1}{m}$$

es decir

$$f_i\left(\phi_{t_0}(x_o)\right) < f_i(\phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{\epsilon}{m})) + \frac{1}{m}$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s(x_0)_i < \frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_m^s(y_0 + \frac{\epsilon}{m})_i.$$

Esta última ecuación contradice la ecuación 2.6. Por lo tanto la afirmación se ha demostrado.

Regresando a la demostración original y tomando el límite cuando $m \to \infty$ en la afirmación se tiene que $\phi_t(x_0) \leq \phi_t(y_0)$.

- **Caso 2:** Si $x_0 < y_0 \Longrightarrow x_0 \leq y_0$ así, por el caso 1, $\phi_t(x_o) \leq \phi_t(y_o)$ y la igualdad no se cumple ya que ϕ_t es uno a uno, por lo tanto $\phi_t(x_o) < \phi_t(y_o)$.
- **Caso 3:** Si $x_0 << y_0$. Como ya sabemos, ϕ_t mapea el conjunto $[x_0, y_0] \cap D$ en el conjunto $[\phi_t(x_0), \phi_t(y_0)]$. Como ϕ_t es un homeomorfismo en D y como $[x_0, y_0]$ tiene interior no vacío entonces $[\phi_t(x_0), \phi_t(y_0)]$ tiene interior no vacio $\Rightarrow \phi_t(x_0) << \phi_t(y_0)$. ■

Que una función sea del tipo K puede ser expresada en términos de las derivadas parciales de f en dominios apropiados.

Definición 2.1.2 *Decimos que D es p-convexo si $tx + (1-t)y \in D$ para toda $t \in [0,1]$ siempre que $x, y \in D$ y $x \leq y$.*

Afirmación 2.1.1 *Si D es un subconjunto p-convexo de $\Re^n$ y*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geq 0, \ \ con\ i \neq j\ \ y\ x \in D \tag{2.7}$$

entonces f es del tipo k en D.

Demostración: Supóngase que $a \leq b$ y $a_i = b_i$. Por el teorema fundamental del cálculo y considerando que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geq 0$ se tiene que

$$f_i(b) - f_i(a) = \int_0^1 \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a + r(b-a))(b_j - a_j)dr \geq 0$$

$$\Rightarrow f_i(b) - f_i(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow f_i(b) \geq f_i(a)$$

Observación 2.1.1 *La proposición 2.1.1 tiene un análogo, para sistemas no autónomos, es decir, supongase que $f(t,x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ son continuas en $\Re^+ \times D$ y para cada $t > 0$, $f(t, \bullet)$ satisface ser del tipo K. Si $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones de*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

en el intervalo $[a,b]$ tal que $x(a) <_r y(a)$ entonces $x(b) <_r y(b)$.

Observación 2.1.2 *La observación anterior puede ser aplicada al sistema lineal*

$$\dot{y} = Df(x(t))y,$$

donde $x(t)$ es la solución del sistema $\dot{x} = f(x)$ y $Df(x)$ es la matriz Jacobiana de f en x. En este caso, la función $g(t,y) = Df(x(t))y$ satisface las hipótesis de la observacion anterior. Consecuentemente, si $y(t)$ es una solución del sistema lineal satisfaciendo $0 <_r y(0)$, entonces $0 <_r y(t)$ para $t > 0$.

Definición 2.1.3 *Un sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice ser un* ***sistema cooperativo*** *si la desigualdad 2.7 se cumple en un dominio p-convexo D.*

Observése que con esta definición, un sistema cooperativo genera un sistema dinámico monótono ya que la relación de orden $\leq$ se preserva por el flujo según la proposicion 2.1.1.

Definición 2.1.4 *Un sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice ser un* ***sistema competitivo*** *si D es p-convexo y se cumple la desigualdad:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \leq 0, \text{ con } i \neq j \text{ y } x \in D.$$

Observación 2.1.3 *Si $\dot{x} = f(x)$ es un sistema coompetitivo con flujo ϕ_t entonces*

$$\dot{x} = -f(x)$$

es un sistema cooperativo con flujo $\psi_t(x) = \phi_{-t}(x)$. De aquí que se diga que un sistema coompetitivo se convierta en un sistema cooperativo, cuando se invierte la dirección de t, y viceversa.

Demostración de la Observación: Efectivamente ya que $\phi_t(x) = \phi(x,t)$ es el flujo del sistema $x' = f(x)$ entonces

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = f(\phi(x_0,t)). \tag{2.8}$$

Cambiando t por $-t$ en la ecuacion 2.8,

$$\frac{\partial \phi(x,-t)}{\partial (-t)} = f(\phi(x_0,-t)), \tag{2.9}$$

pero

$$\frac{\partial \phi(x,-t)}{\partial (-t)} = -\frac{\partial \phi(x,-t)}{\partial t}. \tag{2.10}$$

De 2.9 y 2.10

$$-\frac{\partial \phi(x,-t)}{\partial t} = f(\phi(x_0,-t))$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(x,-t)}{\partial t} = -f(\phi(x_0,-t))$$

es decir

$$\frac{\partial \phi_{-t}(x)}{\partial t} = -f(\phi_{-t}(x_0)) \qquad \blacksquare$$

Por lo tanto un sistema competitivo tiene la propiedad que para el tiempo hacia atrás el sistema es monótono, esto es, si $x \leq y$ y $t < 0$ entonces $\phi_t(x) \leq \phi_t(y)$. En particular, si x y y no estan relacionados esto es, ni $x \leq y$ ni tampoco $y \leq x$ y si $t > 0$ o $t < 0$ (dependiendo si el sistema es cooperativo o competitivo) entonces $\phi_t(x)$ y $\phi_t(y)$ no estan relacionados.

2.2. Conjuntos positivamente invariantes

Los sistemas cooperativos y coompetitivos tienen ciertos conjuntos positivamente invariantes,como se puede ver en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1

1. *Si $\dot{x} = f(x)$ es un sistema cooperativo, y $<_r$ significa cualquiera de las relaciones $\leq$, $<$ o $<<$ se tiene entonces*
    a) *$P_+ = \{x \in D : 0 <_r f(x)\}$ y $P_- = \{x \in D : f(x) <_r 0\}$ son conjuntos positivamente invariantes.*
    b) *Si $x \in P_+$ (o $x \in P_-$) entonces, $\phi_t(x)$ es no decreciente (o no creciente) para $t \geq 0$.*
2. *Si $\dot{x} = f(x)$ es un sistema competitivo:*
    a) *$U_+ = \{x \in D : f_i(x) > 0$ para alguna $i\}$ y $U_- = \{x \in D : f_i(x) < 0$ para alguna $i\}$ son conjuntos positivamente invariantes.*
    b) *$V_+ = \{x \in D : f_i(x) \geq 0$ para alguna $i\}$ y $V_- = \{x \in D : f_i(x) \leq 0$ para alguna $i\}$ son conjuntos positivamente invariantes.*
    c) *$V_+ \cap V_-$ es cerrado, positivamente invariante y contiene a cualquier conjunto compacto invariante que no contiene puntos de equilibrio.*

Demostración:

1. *a*) Considérese el sistema lineal
$$\dot{y} = Df(x(t))y, \tag{2.11}$$
donde $x(t)$ es una solución de $\dot{x} = f(x)$. Es claro que $y(t) = f(x(t))$ es una solución del sistema lineal 2.11, por la observación 2.1.2 se sigue que si $0 <_r f(0)$, entonces $0 <_r f(x(t))$ para $t > 0$. Por lo tanto P^+ es positivamente invariante. Análogamente se puede demostrar que P^- es positivamente invariante.

    b) Sea $x \in P^+$, por el inciso a), P^+ es positivamente invariante, y $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x)) >_r 0$ para $t > 0$, entonces $\phi_t(x)$ es no decreciente. Análogamente se puede demostrar que si $x \in P^-$ entonces $\phi_t(x)$ es no creciente.

2. *a*) Utilizaremos reducción al absurdo: supongamos que U_+ no es positivamente invariante esto implica que $\exists\ x_0 \in U_+$ y $s > 0$ tal que $\phi_s(x_0) \notin U_+$. Así $y_0 = \phi_s(x_0) \in G = \{z \in D : -f(z) \geq 0\}$. G es negativamente invariante. Así pues, aplicando el tiempo hacia atrás a $y_0 = \phi_s(x_0)$, se tiene, $x_0 = \phi_{-s}(y_0) \in G$. Esto contradice el hecho de que $x_0 \in U_+$. Por lo tanto U_+ es positivamente invariante.

b) Argumentos similares pueden mostrar que U_-, V_+ y V_- son positivamente invariantes.

c) $V_+ \cap V_-$ es cerrado y positivamente invariante ya que V_+ y V_- son cerrados y positivamente invariantes. Ahora veamos que $V_+ \cap V_-$ contiene a cualquier conjunto compacto invariante que no contiene puntos de equilibrio por reducción al absurdo. Sea A un conjunto compacto invariante que no contiene puntos de equilibrio y supóngase que A no esta contenido en $V_+ \cap V_-$, es decir, existe $x \in A$ tal que $x \notin V_+ \cap V_- \Rightarrow x \in (V_+ \cap V_-)^c$, pero, $(V_+ \cap V_-)^c = V_+^c \cup V_-^c \Rightarrow x \in V_+^c \cup V_-^c$. Supongamos que $x \in V_+^c \Rightarrow x \notin V_+ \Rightarrow f(x) << 0 \Rightarrow -f(x) >> 0$ $\Rightarrow$ como $-f$ es competitivo se preserva el orden hacia atrás, es decir, $-f(\phi_{-t}(x)) >> 0$ para $t > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x)) << 0$ para $t < 0$. Por lo tanto $\phi_t(x)$ es estrictamente decreciente para $t < 0$.
Como A es un conjunto compacto para cada sucesión $\{\phi_{t_n}(x)\}_{n\in N}$ tal que $t_n \to -\infty$ existe una subsucesión $\left\{\phi_{t_{n_k}}(x)\right\}_{k\in N}$ convegente. Supongamos que $\left\{\phi_{t_{n_k}}(x)\right\}_{k\in N} \to p$. Como $\phi_t(x)$ es estrictamente decreciente para $t < 0$ entonces $\{\phi_{t_n}(x)\}_{n\in N} \to p$. Como la sucesión es arbitraria entonces $\phi_t(x) \to p$ cuando $t \to -\infty \Rightarrow \alpha(x) = p$. Por lo tanto $\alpha(x)$ es un punto de equilibrio que esta en A ya que A es invariante lo cual es una contradicción ya que A es un conjunto que no contiene puntos de equilibrio. Por lo tanto $A \subset V_+ \cap V_-$. ■

De acuerdo con la Proposición anterior, una solución de un sistema competitivo que nunca intersecta a $V_+ \cap V_-$, debe de ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente para todo t ya que V_+ y V_- son positivamente invariantes y se tiene que $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$. Si dicha solución genera una órbita positiva con cerradura compacta en D, entonces esta converge a un punto de equilibrio. Más aún, cualquier órbita periódica debe de estar contenida en $V^+ \cap V^-$.
Por otro lado, para un sistema cooperativo, la invariancia positiva de los conjuntos P_+ y P_- muestran que cualquier solución acotada en alguno de estos conjuntos es monótona y por lo tanto debe de converger a un punto de equilibrio.

Ejemplo 2.2.1 ***Cálculo de $V_+ \cap V_-$ en el sistema de Lotka-Volterra.*** *Considérese el sitema competitivo de Lotka Volterra*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(1 - x_1 - a_{12}x_2) \\ x_2' &= \rho x_2(1 - x_2 - a_{21}x_1) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Cálculemos los puntos de equilibrio de este sistema

$$\begin{cases} x_1^{'} = 0 \\ x_2^{'} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1(1 - x_1 - a_{12}x_2) = 0 \\ \rho x_2(1 - x_2 - a_{21}x_1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & \text{ó } 1 - x_1 - a_{12}x_2 = 0 \\ \rho x_2 = 0 & \text{ó } 1 - x_2 - a_{21}x_1 = 0 \end{cases}$$

- ***CASO 1:*** *Si* $x_1 = 0$ *y* $\rho x_2 = 0$ *entonces* $(0, 0)$ *es un punto de equilibrio.*
- ***CASO 2:*** *Si* $x_1 = 0$ *y* $1 - x_2 - a_{21}x_1 = 0$ *entonces* $(0, 1)$ *es un punto de equilibrio.*
- ***CASO 3:*** *Si* $x_2 = 0$ *y* $1 - x_1 - a_{12}x_2 = 0$ *entonces* $(1, 0)$ *es un punto de equilibrio.*
- ***CASO 4:*** *Si* $1 - x_1 - a_{12}x_2 = 0$ *y* $1 - x_2 - a_{21}x_1 = 0$ *entonces tenemos dos rectas en el primer cuadrante de* $\Re^2$*:*

$$l_1(x_1) = \frac{1}{a_{12}} - \frac{1}{a_{12}}x_1,\ l_2(x_1) = 1 - a_{12}x_1$$

Hay cuatro posibilidades para las dos rectas, vea la figura 2.1:

$a_{12} < 1$ *y* $a_{21} < 1$*;* $a_{12} > 1$ *y* $a_{21} > 1$*;* $a_{12} < 1$ *y* $a_{21} > 1$*;* $a_{12} > 1$ *y* $a_{21} < 1$.

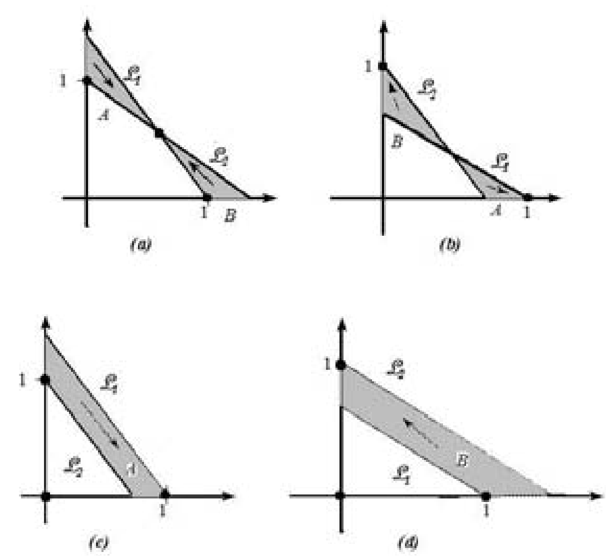

Figura 2.1: El área sombreada corresponde a $V_+ \cap V_-$ para el sistema competitivo de Lotka Volterra (a) $a_{12} < 1$ y $a_{21} < 1$; (b) $a_{12} > 1$ y $a_{21} > 1$; (c) $a_{12} < 1$ y $a_{21} > 1$; (d) $a_{12} > 1$ y $a_{21} < 1$

Para gráficar el conjunto invariante $V_+ \cap V_-$ *recordemos que*

$V_+ = \{x \in D_i : f_i \geq 0 \text{ para alguna } i\} = \{x \in D : f_1 \geq 0\} \cup \{x \in D : f_2 \geq 0\}$

$V_- = \{x \in D_i : f_i \leq 0 \text{ para alguna } i\} = \{x \in D : f_1 \leq 0\} \cup \{x \in D : f_2 \leq 0\}$

Por lo tanto

$$V_+ \cap V_- = A \cup B$$

donde

$$A = \{x \in D : f_1 \geq 0 \text{ y } f_2 \leq 0\} \text{ y } B = \{x \in D : f_1 \leq 0 \text{ y } f_2 \geq 0\}$$

Localicemos A*, en todos los incisos de la figura 2.1. Sabemos que*

$$x = (x_1, x_2) \in A \Leftrightarrow x_1(1 - x_1 - a_{12}x_2) \geq 0 \text{ y } \rho x_2(1 - x_2 - a_{21}x_1) \leq 0$$

Como x_1, x_2 *y* ρ *son positivos, las ecuaciones anteriores se convierten en:*

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{12}} - \frac{x_1}{a_{12}} \geq x_2 \text{ y } 1 - a_{12}x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow l_1(x_1) \geq x_2 \text{ y } l_2(x_1) \leq x_2.$$

Ahora localicemos B *en todos los incisos de la figura 2.1*

$$x = (x_1, x_2) \in B \Leftrightarrow x_1(1 - x_1 - a_{12}x_2) \leq 0 \text{ y } \rho x_2(1 - x_2 - a_{21}x_1) \geq 0$$

Como x_1, x_2 *y* ρ *son positivos, lo anterior*

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{12}} - \frac{x_1}{a_{12}} \leq x_2 \text{ y } 1 - a_{12}x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow l_1(x_1) \leq x_2 \text{ y } l_2(x_1) \geq x_2$$

El siguiente teorema es un caso particular de la Proposición 2.2.1 para sistemas competitivos o cooperativos en $\Re^2$.

Teorema 2.2.1 *Sea* $\dot{x} = f(x)$ *un sistema competitivo o cooperativo en un dominio* $D \subset \Re^2$.

1. *Si* $x(t)$ *es una solución definida para toda* $t \geq 0$*, entonces existe* $T \geq 0$ *tal que para cada* $i = 1, 2$*,* $x_i(t)$ *es monótona para* $t \geq T$.

2. *Si* $x(t)$ *es una solución definida para toda* $t \leq 0$*, entonces existe* $T \geq 0$ *tal que para cada* $i = 1, 2$*,* $x_i(t)$ *es monótona para* $t \leq -T$.

En particular si $\gamma^+(x(0))$ *(ó* $\gamma^-(x(0))$*) tiene una cerradura compacta en* D*, entonces* $\omega(x_0)$ *(ó* $\alpha(x_0)$ *) constan de un único punto de equilibrio.*

Demostración: Es suficiente mostrar el inciso a). Para demostrar el inciso b) nótese que la solución correspondiente del sistema obtenido tomando el tiempo hacía atrás está definida para $t \geq 0$ aplicandose así el inciso anterior, y este sistema es tambien cooperativo o competitivo.

Afirmación: *Los conjuntos* $V_+ = \{x \in D : f_1(x) \geq 0 \text{ y } f_2(x) \leq 0\}$ *y* $V_- = \{x \in D : f_1(x) \leq 0 \text{ y } f_2(x) \geq 0\}$ *son positivamente invariantes*

Demostración de la afirmación: Es suficiente mostrar que V_+ es positivamente invariante. Supongamos que V_+ no es positivamente invariante, esto implica que existe $x_0 \in V_+$ satisfaciendo cualquiera de las dos condiciones

1. $f_1(x_0) = 0$ y $f_2(x_0) < 0$ tal que $f_1(\varphi_t(x_0)) < 0$ y $f_2(\varphi_t(x_0)) < 0$ para t suficientemente pequeño ó
2. $f_1(x_0) > 0$ y $f_2(x_0) = 0$ tal que $f_1(\varphi_t(x_0)) > 0$ y $f_2(\varphi_t(x_0)) > 0$ para t suficientemente pequeño.

es decir,

$$f_1(\varphi_t(x_0))f_2(\varphi_t(x_0)) > 0 \tag{2.13}$$

para t suficientemente pequeño.
Por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f_1 \cdot f_2) &= \frac{d}{dt}f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \frac{d}{dt}f_2 \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) \cdot f_2 + f_1 \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}f_1 \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2 \cdot f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}f_1 \cdot f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}f_1 \cdot f_2 \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) f_1 \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}f_1^2
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como el sistema es competitivo entonces $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$ y $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}f_1^2 < 0 \text{ y considerando la identidad 2.14} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(f_1 \cdot f_2) < (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2})f_1 f_2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(f_1 \cdot f_2) < g(x) f_1 f_2$$

donde $g(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$

$$\Rightarrow f_1 f_2 \leq c e^{\int_0^t g(\varphi(x_0,\tau))d\tau} \tag{2.15}$$

donde $c = f_1 f_2|_{x_0} = 0$
Esto implica que:

$$f_1(\varphi_t(x_0))f_2(\varphi_t(x_0)) \leq 0$$

contradiciendo 2.13.

Por lo tanto V_+ es positivamente invariante. Análogamente se puede mostrar que V_- es positivamente invariante. Retomando la demostración del teorema, observese que:

- Caso 1: Si $x(t_0) \in Q_+ \cup Q_-$ para alguna $t_0 \geq 0$ entonces podemos suponer que $x(t_0) \in Q_+ \Rightarrow x_1(t)$ es no decreciente y $x_2(t)$ es no creciente. Por la tanto cualquier $T \geq 0$ nos sierve para decir que $x_i(t)$ es monótona si $t \geq T$ e $i = 1, 2$

- Caso 2: Si $x(t) \notin V_+ \cup V_-$ para toda $t \geq 0 \Rightarrow x(t) \in (V_+ \cup V_-)^c = V_+^c \cap V_-^c$ para toda $t \geq 0 \Rightarrow f(x(t)) >> 0$ ó $f(x(t)) << 0 \; \forall \; t \geq 0$ es decir el vector derivada en cada punto estará en el primer o tercer cuadrante. Como $\{f(x(t)) : t \geq 0\}$ es conexo entonces $f(x(t)) >> 0 \; \forall \; t \geq 0$ ó $f(x(t)) << 0$ $\forall \; t \geq 0$.

Así para cualquiera de los dos casos y para cualquier $T \geq 0$ se tiene el resultado. La última parte de esté teorema es clara, ya que por la primera parte, existe un tiempo en el que $\gamma^+((x_0))$ y $\gamma^-((x_0))$ son monotonos crecientes o decrecientes. Como por hipotesis $\gamma^+((x_0))$ y $\gamma^-((x_0))$ tienen cerradura compacta en D entonces $\gamma^+((x_0))$ y $\gamma^-((x_0))$ deben de tener un punto de acumulación, es decir, $\omega(x_0)$ y $\alpha(x_0)$ son ambos un punto de equilibrio. ■

2.3. Resultados principales

El resultado principal de este trabajo es el teorema 2.3.2, pero para llegar a él, se necesitan resultados previos como los que a continuación se enuncian.

Definición 2.3.1 *Sea $x(t)$ la solución del sistema $\dot{x} = f(x)$ en un intervalo I. Un subintervalo $[a, b]$ de I se llama **creciente** si $x(a) < x(b)$ y un intervalo **decreciente** si $x(b) < x(a)$.*

Lema 2.3.1 *Sea $x(t)$ la solución de un sistema cooperativo $\dot{x} = f(x)$ (ó un sistema competitivo) en un intervalo I. Entonces $x(t)$ no puede tener un intervalo de crecimiento y un intervalo de decrecimiento que sean ajenos.*

Demostración: Para la demostración del lema necesitamos la siguiente afirmación.

> ***Afirmación:*** Si $[a, b]$ es un intervalo creciente o (decreciente) contenido en I y $s > 0$ tal que $[a + s, b + s]$ esta contenido en I entonces $[a + s, b + s]$ es un intervalo creciente (o decreciente).
> ***Demostración de la afirmación:*** Como $[a, b]$ es un intervalo creciente
>
> $$\Rightarrow x(a) < x(b)$$
>
> por la Proposición 2.1.1

$$x(a+s) = x_s(x(a)) < x_s(x(b)) = x(b+s)$$

es decir

$$x(a+s) < x(b+s)$$

Por lo tanto $[a+s, b+s]$ es un intervalo creciente.

Prosiguiendo con la demostración original, supóngase que I contiene un intervalo decreciente $[a, r]$ y un intervalo creciente $[s, b]$ tal que ambos son ajenos ó I contiene un intervalo de crecimiento $[a, r]$ y un intervalo de decrecimiento $[s, b]$ tal que ambos son ajenos. Sin pérdida de generalidad supongamos que pasa lo primero, I contiene un intervalo decreciente $[a, r]$ y un intervalo creciente $[s, b]$ tal que ambos son ajenos, es decir $[a, r] \cap [s, b] = \phi \Rightarrow a < r < s < b$.
Observación: Si $[s, b]$ es un intervalo creciente entonces este no contiene un intervalo de decrecimiento.

- **Caso 1: Si** $r - a \leq b - s$
  Considérese el intervalo decreciente $[a, r]$, sumando a cada elemento de este conjunto $s - a$ se tiene el intervalo.

  $$[a + s - a, r + s - a] = [s, s + r - a].$$

  Como $[s, s + r - a]$ es una traslación hacia la derecha de $[a, r]$ y $[a, r]$ es decreciente entonces por la afirmación anterior $[s, s+r-a]$ es un intervalo decreciente.
  Como $r - a \leq b - s \Rightarrow r - a + s \leq b \Rightarrow [s, s + r - a] \subset [s, b]$. Por lo tanto $[s, s+r-a] \subset [s, b]$ y es decreciente contradiciendo la observación anterior es decir $[s, b]$ no puede contener un intervalo decreciente.

- **CASO 2: Si** $r - a > b - s$
  Ahora considerese el intervalo decreciente $[a, r]$, sumando a cada elemento de este intervalo $b - r$ obtenemos

  $$[a + b - r, r + b - r] = [a + b - r, b].$$

  Como $[a+b-r, b]$ es un traslación hacia la derecha del intervalo decreciente $[a, r]$ entonces por la afirmación, $[a + b - r, b]$ es un intervalo decreciente $\Rightarrow x(b) < x(a + b - r)$ y como $[s, b]$ es creciente se tiene

  $$x(s) < x(b) < x(a + b - r).$$

  Para ubicar un poco los extremos de los intervalos nótese que

  $$a < a + b - r < s < b.$$

La primera desigualdad se sigue de que $b - r > 0 \Rightarrow a < a + (b - r)$. La segunda desigualdad se sigue de que $r-a > b-s \Rightarrow s > b-r+a = a+b-r$. Considérese el siguiente conjunto $A = \{t \in [a+b-r, s] : x(b) \leq x(t)\}$. Este conjunto es distinto del vacío ya que $a+b-r \in A$ y esta acotado superiormente por s, así pues, este conjunto tiene supremo. Sea

$$c = sup\{t \in [a+b-r, s] : x(b) \leq x(t)\}$$

entonces $c < s < b$ y $x(b) \leq x(c)$ lo que explica que $[c, s]$ es un intervalo decreciente adyacente al intervalo creciente $[s, b]$

- ***SUBCASO 1: Si*** $s - c \leq b - s$. Haciendo una traslación hacia la derecha del intervalo $[c, s]$, de $s - c$ unidades se tiene un nuevo intervalo decreciente $[s, 2s - c] \subset [s, b]$ lo cual es una contradicción al hecho de que $[s, b]$ no puede contener un intervalo decreciente.
- ***SUBCASO 2: Si*** $s-c > b-s$ entonces $c < c+b-s < s$ y $[c+b-s, b]$ es una traslación a la derecha del intervalo $[c, s]$ por lo tanto este último es un intervalo decreciente es decir $x(b) < x(c+b-s)$, y esto contradice la definición de que c es el supremo de A. ■

Teorema 2.3.1 *Un conjunto límite compacto de un sistema competitivo o cooperativo no puede tener dos puntos relacionados por* $<<$.

Demostración (Reducción al absurdo): Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el conjunto es cooperativo y que el conjunto límite es un conjunto alfa limite $L = \alpha(x_0)$.
Supongase que L contiene dos puntos x_1 y x_2 satisfaciendo que $x_1 << x_2$. Sea $x(t) = \phi_t(x_0)$ para $t \leq 0$.

Afirmación 1: $A = \{x \in L : x_1 << x\}$ es una vecindad abierta relativa a L de x_2.

Demostración de la Afirmación 1: Observese que $x_2 \in A$. Para ver que A es una vecindad abierta de x_2, hay que demostrar que todo punto de A es punto interior, es decir, $\forall\ x \in A\ \exists\ \epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap L \subset A$.
Sea $x \in A \Rightarrow x_1 << x \Rightarrow x_{1i} < x_i\ \forall\ i \in \{1, ...n\}$.
Sea

$$\begin{aligned} \epsilon &= min\{|x_1 - x_{11}|, ..., |x_n - x_{1n}|\} \\ &= min\{x_1 - x_{11}, ..., x_n - x_{1n}\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por demostrar que $B_\epsilon(x) \cap L \subset A$. Sea $y \in B_\epsilon(x) \cap L \Rightarrow d(x, y) < \epsilon \Rightarrow d(x_i, y_i) < \epsilon\ \forall\ i \in \{1, ..., n\}$ (efectivamente ya que $d(x_i, y_i) = |x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = d(x, y) < \epsilon) \Rightarrow$

$$-\epsilon < x_i - y_i < \epsilon\ \forall i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow$$

$$-(x_i - x_{1i}) < x_i - y_i < x_i - x_{1i} \ \forall i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow$$

En particular

$$x_i - y_i < x_i - x_{1i} \Rightarrow$$

$$x_{1i} < y_i \ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Esto implica que $x_1 << y$, es decir $y \in A$. Por lo tanto A es abierto.

Volviendo a la demostración original. Como A es un abierto relativo a L $\exists$ $t_1 < 0$ tal que $x_1 << x(t_1)$.
Las siguientes afirmaciones se demuestran en forma análoga a la *afirmación 1.*
Afirmación 2: $B = \{x \in L : x << x(t_1)\}$ es una vecindad abierta relativa a L de x_1.
Como B es un abierto relativo a L $\exists$ t_2 tal que $t_2 < t_1$ y $x(t_2) << x(t_1)$.
Afirmación 3: $C = \{x \in L : x << x(t_2)\}$ es una vecindad abierta relativa a L de x_1.
Como C es un abierto relativo a L $\exists$ t_3 tal que $t_3 < t_2 < t_1$ y $x(t_3) << x(t_2)$.
Afirmación 4: $D = \{x \in L : x_1 << x\}$ es una vecindad abierta relativa de L de x_2.
Como D es un abierto relativo a L $\exists$ $t_4 < 0$ tal que $t_4 < t_3 < t_2 < t_1$ y $x(t_3) << x(t_4)$.
Por lo tanto $[t_4, t_1]$ contiene el intervalo decreciente $[t_4, t_3]$ y el intervalo creciente $[t_2, t_1]$ los cuales son disjuntos contradiciendo el Lema 2.3.1 ■

Una órbita periódica γ de un sistema cooperativo o competitivo es un conjunto límite compacto y consecuentemente, por el teorema anterior no puede tener, dos puntos relacionados por $<<$.
Esto claramente elimina la existencia de órbitas periódicas en sistemas competivos o coperativos de $\Re^2$, ya que cualquier curva de Jordan en el plano necesariamente contiene dos puntos relacionados por $<<$.

Proposición 2.3.1 *Sea γ una orbita periódica no trivial de un sistema cooperativo o competitivo. Entonces γ no puede contener dos puntos relacionados por $<$.*

Demostración:(Reducción al absurdo) Sin perdida de generalidad podemos suponer que el sistema es cooperativo. Supongase que y_1 y y_2 estan en γ tal que $y_1 < y_2$. Sea $T > 0$ el periodo minimal de la solución $\phi_t(y_2) = x(t)$. Entonces existe $\tau \in (0, T)$ tal que $x(\tau) = y_1 < y_2 = x(0)$. Por lo tanto $[0, \tau]$ es un intervalo de decrecimiento para $x(t)$. Dando una segunda vuelta a la orbita periodica se tiene que

$$x(\tau + T) = y_1 < y_2 = x(2T)$$

por lo tanto $[\tau+T, 2T]$ es un interva de crecimiento ajeno a $[0,\tau]$, esto contradice Lema 2.3.1 ■ Daremos dos definiciones para finalmente demostrar el teorema principal de esta sección.

Definición 2.3.2 *Sea A un conjunto invariante para $\dot{x} = f(x)$ con flujo ϕ_t y B un conjunto invariante para el sistema $\dot{y} = F(y)$ con flujo ψ_t. Decimos que el flujo ϕ_t en A es* ***topológicamente equivalente*** *al flujo ψ_t en B si existe un homeomorfismo $Q : A \to B$ tal que*

$$Q(\phi_t(x)) = \psi_t(Q(x))$$

para toda $x \in A$ y para toda $t \in \Re$

Definición 2.3.3 *Un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{y} = F(y)$, definida en $\Re^n$, se dice ser de Lipchitz si F es de Lipchitz, es decir, si existe $K > 0$ tal que $|F(y_1) - F(y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2|$ para todo y_1 y y_2 en $\Re^n$.*

Teorema 2.3.2 ***(Teorema Principal:)*** *El flujo de un conjunto límite compacto de un sistema cooperativo o competitivo en $\Re^n$ es topológicamente equivalente a el flujo en un conjunto invariante compacto de un sistema de ecuaciones diferenciales de Lipchitz en $\Re^{n-1}$.*

Demostración:
Sea L el conjunto limite y v un vector unitario que satisface $0 << v$. Sea H_v el hiperplano ortogonal a v (H_v consiste de todos los vectores $x's$ tales que $x \cdot v = 0$). Vea figura 2.2
Sea Q la proyección ortogonal en H_v de L:

$$Q : L \to Q(L)$$

$$Q(x) = x - (x \cdot v)v.$$

Claramente por construcción Q es una función suprayectiva. Veamos que Q es inyectiva. Supóngase que Q no es inyectiva $\Rightarrow$ existe x_1 y $x_2 \in L$ con $x_1 \neq x_2$ tal que $Q(x_1) = Q(x_2)$. Pero si $x_1 \neq x_2$ entonces $x_1 << x_2$ ó $x_1 >> x_2$ (se sigue de que $Q(x_1) = Q(x_2)$ y $v >> 0$) lo cual es una contradición con el teorema 2.3.1, ya que dos puntos de un conjunto límite compacto no pueden estar relacionados por $<<$, lo que implica que Q es inyectiva. Por lo tanto Q es biyectiva.
Q es continua y tiene inversa continua por tratarse de una proyección.
Obsérvese que como L es compacto y Q es continua entonces $Q(L)$ es compacto en H_v. Por lo tanto Q es un homeomorfismo de L en un subconjunto compacto de H_v.
Veamos que Q_L^{-1} es Lipchitz en $Q(L)$ por reducción al absurdo:

- Supongamos que Q_L^{-1} no es de Lipchitz $\Rightarrow \forall\, k > 0\ \exists\, a$ y $b \in L$ con $a \neq b$ tal que

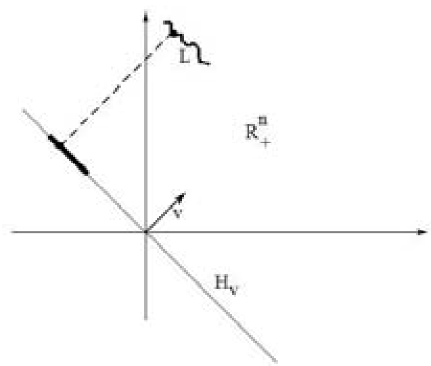

Figura 2.2:

$$\left|Q_L^{-1}(a) - Q_L^{-1}(b)\right| > k\,|a-b|$$

$\Rightarrow \forall\ k > 0\ \exists\ a$ y $b \in L$ con $a \neq b$ tal que

$$\frac{1}{k} \geq \frac{|a-b|}{\left|Q_L^{-1}(a) - Q_L^{-1}(b)\right|}$$

Como Q_L^{-1} es biyectiva entonces $\exists\ x \neq y$ tal que $x = Q_L^{-1}(a)$ y $y = Q_L^{-1}(b)$ es decir $Q_L(x) = a$ y $Q_L(y) = b$. Rescribiendo la desigualdad anterior se tiene.

$$\frac{1}{k} \geq \frac{|Q_L(x) - Q_L(y)|}{|x-y|}$$

Así pues, tomese $k = n$ con $n \in N$ y por lo anterior sabemos que existen x_n, y_n con $x_n \neq y_n$ tal que

$$\frac{|Q_L(x_n) - Q_L(y_n)|}{|x_n - y_n|} \leq \frac{1}{n}.$$

Haciendo $n \to \infty$ se tiene que existe dos suceciones $\{x_n\}_{n\in N}$ y $\{y_n\}_{n\in N}$ con $x_n \neq y_n$ tales que

$$\frac{|Q_L(x_n) - Q_L(y_n)|}{|x_n - y_n|} \to 0$$

o equivalentemente de la definición de Q.

$$\frac{|x_n - (x_n \cdot v)\cdot v - y_n + (y_n \cdot v)\cdot v|}{|x_n - y_n|} \to 0$$

$$\Longrightarrow \frac{|x_n - y_n - (x_n \cdot v)\, v + (y_n \cdot v)\, v|}{|x_n - y_n|} \to 0.$$

Si $w_n = \frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|}$, entonces la última desigualadad implica que

$$|w_n - v\,(v \cdot w_n)| \to 0.$$

Podemos asumir que $w_n \to w$, ya que de lo contrario, como $Q(L)$ es compacto, se podría tomar una subsucesión convergente.
Como $\forall n \in N$, $|w_n| = \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} = 1 \Rightarrow |w| = 1$, por continuidad de la norma.

Ademas, como $|w_n - v\,(v \cdot w_n)| \to 0$ entonces $w - v\,(v \cdot w) = 0$, es decir, $w = v\,(v \cdot w)$. Por lo anterior $1 = |w| = |v|\,|v \cdot w|$ y $|v| = 1$, entonces $1 = |v \cdot w| = (v \cdot w)^2$. Por lo tanto

$$(v \cdot w)^2 = 1. \tag{2.17}$$

Como $w = v\,(v \cdot w)$ entonces $w^2 = v^2\,(v \cdot w)^2$ y considerando la ecuación 2.17 se tiene $w^2 = v^2$ es decir $w = \pm v$.
Como $w_n = \frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|}$, y $w_n \to w$ entonces $\frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|} \to w$

$$\Rightarrow \frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|} \to \pm v.$$

- ***Si*** $\frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|} \to v$ y como $|x_n - y_n| > 0$ entonces $x_n - y_n >> 0$ es decir que $x_n >> y_n$ para n suficientemente grande contradiciendo el Teorema 2.3.1
- ***Si*** $\frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|} \to -v$ y como $|x_n - y_n| > 0$ entonces $x_n - y_n << 0$ es decir que $x_n << y_n$ para n suficientemente grande contradiciendo el Teorema 2.3.1 .

Por lo tanto Q_L^{-1} es de Lipchitz en $Q(L)$, como Q es un homeomorfismo entonces Q_L es de Lipchitz. L es un conjunto límite invariante para $\dot{x} = f(x)$ se sigue que la dinámica restringida a L puede ser modelada a un sistema dinámico en H_v. En realidad si $y \in Q(L)$ entonces $y = Q_L(x)$ para algún único $x \in L$ y $\psi_t(y) \equiv Q_L(\phi_t(x))$ es un sistema dinámico generado por el campo vectorial

$$F(y) = Q_L(\mathrm{f}(Q_L^{-1}(y)))$$

en $Q(L)$. Hemos establecido la equivalencia topológica del flujo ϕ_t en L con el flujo ψ_t en $Q(L)$.

> **Nota:** De acuerdo con McShave (1934) un campo vectorial de Lipchitz en un subconjunto arbitrario de H_v que puede ser extendido a un campo vectorial de Lipchitz en todo H_v preservando la constate de Lipchitz.

Se sigue que F puede ser extendida a todo H_v como un campo vectorial de Lipchitz. Es fácil ver que $Q(L)$ es un conjunto inveriante para este campo vectorial extendido. Por lo tanto $Q(L)$ es un conjunto invariante para el sistema $n-1$ dimensional en H_v generado por el campo vectorial extendido. ■

2.4. Sistemas en $\Re^3$

La teoría de los sistemas cooperativos y competitivos se ha usado extensamente en dimensión tres ya que en este caso como la dinámica es equivalente a la dinámica de un sistema en dimensión dos, se tienen resultados generales como el Teorema de Poincare Bendixon.
Una de la más notable consecuencia del teorema 2.3.2 es el teorema de Poincaré-Bendixon para un sistema tres dimensional.

Teorema 2.4.1 *Un conjunto límite compacto de un sistema competitivo o coperativo en $\Re^3$ que no contenga puntos de equilibrio es una órbita periódica.*

Demostración: Sea L un conjunto limite. Por el teorema 2.3.2 el flujo ϕ_t en L es topólogicamente equivalente al flujo ψ_t generado por un campo en $\Re^2$. Como L no contiene puntos de equilibrio tampoco $Q(L)$ los contiene, entonces, por el Teorema de Poincaré-Bendixon, $Q(L)$ es una órbita periódica. ■
El siguiente resultado da condiciones necesarias para que las soluciones de un sistema competitivo se aproximen asintóticamente a una orbita periódica no trivial cuando hay un único punto de equilibrio hiperbólico.

Definición 2.4.1 *Recuerdese que un punto de equilibrio p se dice ser hiperbólico si la matriz Jacobiana de f en p no tiene eigenvalores puramente imaginarios.*

En el suguiente teorema se denotará por $W^s(p)$ la ***variedad estable de p***.

Teorema 2.4.2 *Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema competitivo en $D \subset \Re^3$ y supongase que D contiene un único punto de equilibrio p el cual es hiperbólico. Supongase ademas que $W^s(p)$ es uno dimensional y tangente en p a un vector $v >> 0$. Si $q \in D - W^s(p)$ y $\gamma^+(q)$ tiene ceradura compacta en D entonces, $\omega(q)$ es una órbita periódica no trivial.*

Demostración: El resultado se sigue inmediatamante del Teorema 2.4.1 probando que $p \notin \omega(q)$. Claramente $\omega(q) \neq p$ ya que $q \notin W^s(p)$. Si $p \in \omega(q)$ entonces por el Lema de Butler-McGehe, vea [2, Butler y Waltman], implica que $\omega(q)$ contiene un punto y en $W^s(p)$ diferente de p. Por la invarianza de $\omega(q)$ podemos suponer que y es un punto en la variedad estable suficientemente cercana a p. Como $W^s(p)$ es tangente en p a un vector positivo, esto implica que $y << p$ o $p << y$. De cualquiera de las dos formas se contradice el Teorema 2.3.1 ya que tanto p como y pertenece a $\omega(q)$. ■

Un hecho importante acerca de sistemas competitivos o cooperativos en $\Re^3$ para ciertos dominios es que la existencia de ciertas orbitas periódicas implican la existencia de un punto de equilibrio adentro de cierta bola que tiene a la orbita periódica en su frontera. Vea la Proposición 2.4.1, pero antes considérese ciertas definiciones.

Definición 2.4.2 *Sea γ una orbita periódica y asúmase que existe p, q con $p << q$ tal que*

$$\gamma \subset [p, q]$$

Recuérdese que $[p, q] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 : p_1 \leq x_1 \leq q_1, p_2 \leq x_2 \leq q_2, p_3 \leq x_3 \leq q_3\}$
Defínase

$$\begin{aligned} K &= \{x \in R^3 : x \text{ no esta relacionado con cualquier } y \in \gamma\} \\ &= \left(\gamma + \Re^3_+\right)^c \cap \left(\gamma - \Re^3_+\right)^c \end{aligned}$$

Otra definición de K es:

$$K^c = \bigcup_{y \in \gamma} \left[\left(y + \Re^3_+\right) \cup \left(y - \Re^3_+\right)\right]$$

Proposición 2.4.1 *Sea γ una órbita periódica no trivial de un sistema competitivo en $D \subset \Re^3$ y supongase que $\gamma \subset [p, q] \subset D$. Entonces K es un subconjunto abierto de R^3 que consiste de dos componentes conexas, una acotada y una no acotada. La componente acotada que denotaremos por $K(\gamma)$, es homeomorfa a la bola unitaria abierta en $\Re^3$. $K(\gamma) \subset [p, q]$ es positivamente invariante y su cerradura contiene un punto de equilibrio.*

Demostración: Vea [4, Hale Smith], Capítulo III, sección 3, Proposición 4.3

Capítulo 3

Generalización de sistemas cooperativos y competitivos en otros conos

Al considerar conos alternativos se puede generalizar a sistemas que en principio satisfacen las mismas propiedades que los sistemas cooperativos y competitivos, descritos en los capítulos anteriores.

3.1. Conos Alternativos

Consideremos otros tipos de conos en $\Re^n$ llamados **Conos Alternativos**. Con esta nueva definición el problema de identificar un sistema monótono competitivo o cooperativo se vuelve más general.

Definición 3.1.1 *Conos Alternativos Sea* $m = (m_1, m_2, ...m_n)$ *donde* $m_i \in \{0, 1\}$ *y*

$$k_m = \{x \in \Re^n : (-1)^{m_i} x_i \geq 0 \quad y \quad 1 \leq i \leq n\}$$

k_m es un cono en $\Re^n$ que genera un orden parcial, $\leq_m$, definido por:

- $x \leq_m y \Longleftrightarrow x - y \in k_m$, o equivalentemente, $x_i \leq y_i$ para aquellas i's para las cuales $m_i = 0$ y $y_i \leq x_i$ para aquellas i's para las cuales $m_i = 1$.
- Escribiremos $x <_m y \Longleftrightarrow x \leq_m y$ y $x \neq y$.
- Diremos que $x <<_m y \Longleftrightarrow x - y \in Int\ k_m$, o equivalentemente, $x_i < y_i$ para aquellas i's para las cuales $m_i = 0$ y $y_i < x_i$ para aquellas i's para las cuales $m_i = 1$.

Definición 3.1.2 *Sea* P *la matriz diagonal definida por*

$$P = diag[(-1)^{m_1}, (-1)^{m_2}, ..., (-1)^{m_n}]$$

Obsérvese que $P = P^{-1}$, además:

Afirmación 3.1.1 *P es un isomorfismo ordenado, esto es $x \leq_m y \iff Px \leq Py$*

Demostración: Sea $m = (m_1, m_2, ...m_n)$ donde $m_i \in \{0, 1\}$ y $x, y \in \Re^n$

$$x \leq_m y \iff \begin{cases} x_i \leq y_i & \text{si } m_i = 0 \\ y_i \leq x_i & \text{si } m_i = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (-1)^{m_i} x_i = x_i \leq y_i = (-1)^{m_i} y_i & \text{si } m_i = 0 \\ (-1)^{m_i} x_i = -x_i \leq -y_i = (-1)^{m_i} y_i & \text{si } m_i = 1 \end{cases} \iff P(x) \leq P(y)$$

Definición 3.1.3 *El dominio D se dice ser p_m-convexo si $tx + (1-t)y \in D$ donde $x, y \in D$, $0 < t < 1$ y $x \leq_m y$*

Definición 3.1.4 *Diremos que $\dot{x} = f(x)$ es cooperativo con respecto a k_m si D es p_m-convexo y*

$$(-1)^{m_i + m_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geq 0 \quad i \neq j, \quad x \in D.$$

Análogamente un sistema es cooperativo con respecto a k_m sí y sólo sí, haciendo el cambio de variable, $y = Px$, el sistema resultante, $\dot{y} = g(y)$ con $g(y) = Pf(Py)$, es un sistema cooperativo como definimos al principio de este capítulo.

Definición 3.1.5 *Decimos que $\dot{x} = f(x)$ es competitivo con respecto a k_m si D es $p_m - convexo$ y*

$$(-1)^{m_i + m_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \leq 0 \quad i \neq j, \quad x \in D.$$

Todos los resultados hasta ahora mencionados para sistemas cooperativos y competitivos tambien se mantienen para sistemas cooperativos y competitivos con respecto al cono k_m. La siguiente proposición es análoga a la Proposición 2.1.1.

Proposición 3.1.1 *Sea D $p_m - convexo$ y f un campo vectorial continuamente diferenciable en D que es cooperativo. Supongamos que $<_r$ denota cualquiera de las relaciones: $\leq_m$, $<_m$ ó $<<_m$. Si $x <_r y$, $t > 0$ y $\phi_t(x)$ y $\phi_t(y)$ estan definidas entonces $\phi_t(x) <_r \phi_t(y)$. Si el sistema es competitivo conclusiones similares son validas para $t < 0$.*

Demostración: Como D es $p_m - convexo \Longrightarrow PD$ es $p - convexo$.
Considérese la siguiente función $g : PD \longrightarrow \Re^n$ definida como $g(y) = Pf(Py)$. El sistema $\dot{y} = g(y)$ es cooperativo ya que $\dot{x} = f(x)$ lo es. El campo vectorial g genera un flujo ψ_t definido por $\psi_t(y) = P\phi_t(Py)$. Por la afirmación 3.1.1, si $x \leq_m y$ se sigue que $Px \leq_m Py$ y entonces por la proposición 2.1.1 $\psi_t(Px) \leq_m \psi_t(Py)$.

Sustituyendo $\psi_t(Px) = P\phi_t(PPx)$ y $\psi_t(Py) = P\phi_t(PPy)$ en la desigualdad anterior se tiene que $P\phi_t(x) \leq_m P\phi_t(y)$ y aplicando de nuevo la Proposicion 2.1.1 tenemos que $\phi_t(x) \leq_m \phi_t(y)$.

Ahora vamos a dar condiciones necesarias para caracterizar cuando un sistema es cooperativo o competitivo en un cono alternativo.

1. Primero verifíquese que los elementos de la matriz Jacobiana que esten afuera de la diagonal sean de *signo estable*. Es decir, para cada $i \neq j$

   a) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geq 0$ para toda $x \in D$ ó

   b) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \leq 0$ para toda $x \in D$

2. Suponiendo que el paso uno es satisfecho, entonces se procede a hacer la prueba de la *simetría de los signos* en la matriz jacobiana, esto es, verifiquese que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \geq 0$ para toda $i \neq j$ y para toda $x, y \in D$

3. Pasando este segundo paso se hace una tercera prueba gráfica,la cual es muy sencilla, para ver si el sistema es cooperativo: Considérese la gráfica G con vertices 1,2,...,n donde una arista conecta dos vértices distintos i y j si al menos una de las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ o $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ no se anula en D. Poniendo un signo $+$ o $-$ a la arista dependiendo en el signo de una de las derivadas parciales en un punto donde no fue cero.

   a) Entonces $\dot{x} = f(x)$ es cooperativo en D para algún cono k_m sí y sólo sí para cualquier lazo en G, este tiene un número par de aristas con signo menos y

   b) $\dot{x} = f(x)$ es competitivo en D para algún cono k_m sí y sólo sí para cualquier lazo en G, este tiene un número impar de aristas con signo menos.

Si la prueba anterior arrojó un sistema cooperativo, podemos determinar el cono apropiado k_n de la siguiente manera:

1. Para cada $i < j$ coloquese

$$\begin{cases} s_{ij} = 0 & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) > 0 \text{ para alguna } x \in D \\ s_{ij} = 1 & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) < 0 \text{ para alguna } x \in D \\ s_{ij} \in \{0,1\} & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0 \text{ para toda } x \in D \end{cases}$$

2. Ahora considerese el sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones lineales con n incognitas $m_i^{`}s \in \{0,1\}$, dadas de la siguiente manera

$$m_i + m_j = s_{ij}$$

   Aquellas ecuaciones para las cuales s_{ij} fue arbitrario pueden ser borradas. Si el sistema con las restantes ecuaciones puede ser resulto entonces el sistema $\dot{x} = f(x)$ es competitivo con respecto a k_m.

Si la prueba anterior arrojó un sistema competitivo, el sistema visto con el tiempo hacia atras en un sistema cooperativo y el cono apropiado, es determinado, al resolver lo anterior después de que todas las entradas de la matriz Jacobiana fueron multiplicadas por -1.

3.2. El Modelo de Field-Noye

La reacción quimica de Belousov fue descubierta por él, en (1951) y fue descrita en un artículo que no fue publicado. Eventualmente Belousov (1959) publicó unas pequeñas notas en un obscuro boletín médico ruso. Él encontró oscilaciones en la concetración de radio al catalizar la oxidación del ácido cítrico por el bromuro. El estudio de esta reacción fue continuada por Zhabotinskii (1964) y actualmente es conocida como la reacción de Belousov-Zhabotinskii o simplemente BZ reacción. Finalmente el trabajo de Belousov fue reconocido en 1980 ganando el premio de Lenin. El libro de artículos editado por Field and Bunger (1985) describe alguna de la investigación de la reacción BZ. Aquí se ocupará el modelo de Field-Noyes, el cual imita la reacción del químico.

Así pues, considérese el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} \epsilon x' &= y - xy + x(1-qx) \\ y' &= -y - xy + 2fz \\ z' &= \delta(x-z) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Los parametros ϵ, q, f y δ son positivos y el caso interesante se da cuando $0 < q < 1$. El cubo

$$D = \left\{ (x,y,z) : 1 < x < \frac{1}{q},\ \ \frac{2fq}{1+q} < y < \frac{f}{q}, 1 < z < \frac{1}{q} \right\}$$

es positivamente invariante, ya que el flujo entra en la frontera del cubo.
La matriz Jacobiana del campo en el punto (x,y,z) esta dada por:

$$J = Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1-y-2qx}{\epsilon} & \frac{1-x}{\epsilon} & 0 \\ -y & -1-x & 2f \\ \delta & 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos que estan fuera de la diagonal, en esta matriz Jacobiana, son de signo estable en D. Tambien esta matriz es simétrica con respecto a los signos en D. Así la gráfica incidente de J en los vertices x,y y z esta dada en la figura 3.1. Esta consiste de un laso simple con un único signo menos en la arista que conecta x con y ya que $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x) < 0$ y $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x) < 0$. Por lo tanto el sistema es competitivo en D.

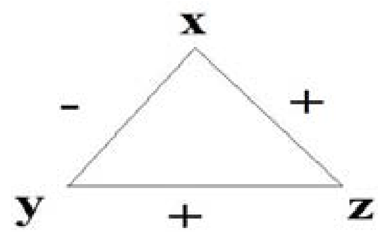

Figura 3.1:

Para determinar el cono para el cual el sistema es competitivo necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 0 \\ m_1 + m_3 &= 1 \\ m_2 + m_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ya que considerando el tiempo hacia atras, se tiene $-J$, y resolviemdo lo anterior:

$$\begin{cases} s_{12} = 0 & \text{ya que } \frac{\partial f_1}{\partial y}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) > 0 \\ s_{13} = 1 & \text{ya que } \frac{\partial f_1}{\partial z}(x) + \frac{\partial f_3}{\partial x}(x) < 0 \\ s_{23} = 1 & \text{ya que } \frac{\partial f_2}{\partial z}(x) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x) < 0 \end{cases}$$

La solución al sistema de ecuaciones 3.2, es $m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = 1$. Esto corresponde al cono

$$k_m = \left\{(x, y, z) \in \Re^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\right\}$$

El sistema 3.1 tiene un único punto de equilibrio $p = (x, y, z) \in D$ dado por

$$x = z, y = \frac{2fx}{1+x}, qx^2 + (2f + q - 1)x - (2f + 1) = 0$$

Ya que $z' = 0 \Leftrightarrow x = z$.

Por otro lado $y' = 0 \Leftrightarrow -y - xy + 2fz = 0$. Sustituyendo $x = z$ en la última ecuación, se tiene que $-y(1 + x) = -2fx \Leftrightarrow y = \frac{2fx}{1+x}$.

Por último $z' = 0 \Leftrightarrow y - xy + x(1 - qx) = 0$. Sustiyendo $y = \frac{2fx}{1+x}$ en la última ecuación, se tiene $\frac{2fx}{1+x} - x\frac{2fx}{1+x} + x(1 - qx) = 0 \Leftrightarrow \frac{2fx-2fx^2}{1+x} =$

$qx^2-x \Leftrightarrow 2fx-2fx^2 = (x+1)(qx^2-x) \Leftrightarrow 2fx-2fx^2 = qx^3+x^2(q-1)-x$. Como $x \neq 0$ podemos dividir toda la ecuación anterior por x obteniendo así $2f-2fx = qx^2+x(q-1)-1$. Por lo tanto $qx^2+(2f+q-1)x-(2f+1) = 0$.

$$\begin{aligned} qx^2 + (2f+q-1)x - (2f+1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad qx^2 + 2fx + qx - 2f = 1 + x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{qx^2 + qx + 2fx - 2f}{1+x} = 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Veamos que p tiene por lo menos una variedad estable unidimensional.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{1-y-2qx}{\epsilon} - \lambda & \frac{1-x}{\epsilon} & 0 \\ -y & -1-x-\lambda & 2f \\ \delta & 0 & -\delta-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

donde:

$A = \delta + 1 + x + \frac{E}{\epsilon}$

$$\begin{aligned} E = 2qx + y - 1 \quad &= \quad 2qx + y - \frac{qx^2 + qx + 2fx - 2f}{1+x} \\ &= \quad 2qx + y - \frac{qx^2 + qx + (1+x)\frac{2fx}{1+x} - 2f}{1+x} \\ &= \quad 2qx + y - \frac{qx^2 + qx + (1+x)y - 2f}{1+x} \\ &= \quad 2qx + y - \frac{2qx^2 + 2qx + y + xy - qx^2 - qx - 2f}{1+x} \\ &= \quad 2qx + y - \frac{(2qx+y)(x+1) - qx^2 - qx - 2f}{1+x} \\ &= \quad 2qx + y - (2qx+y) + \frac{qx^2 + qx + 2f}{1+x} \\ &= \quad \frac{q(x^2+x) + 2f}{1+x} > 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$B = \frac{y+2qx-1}{\epsilon}(\delta + 1 + x) + \frac{1-x}{\epsilon} + \delta + \delta x$

$$C \quad = \quad \frac{\delta}{\epsilon}\left[(1+x)E - 2f(1-x) + y(1-x)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{\epsilon}\left[(1+x)\left(\frac{qx^2+qx+2f}{1+x}\right)-2f(1-x)+y(1-x)\right]\\
&= \frac{\delta}{\epsilon}\left[qx^2+qx+2f-\left(2f-\frac{2fx}{1+x}\right)(1-x)\right]\\
&= \frac{\delta}{\epsilon}\left[qx(x+1)+2f-\frac{2f-2fx}{1+x}\right]\\
&= \frac{\delta}{\epsilon}\left[\frac{qx(x+1)^2+4fx}{1+x}\right]\\
&= \frac{\delta}{\epsilon}\left[qx^2+qx+\frac{4fx}{1+x}\right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por otro lado conciderando 3.3 se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{qx^2+qx+2fx-2f}{1+x}+2f &= 1+2f\\
\Leftrightarrow \frac{qx^2+4fx+qx}{1+x} &= 1+2f\\
\Leftrightarrow qx+\frac{4fx}{1+x} &= 1+2f
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Sustituyendo 3.6 en 3.5 concluimos que:

$C = \frac{\delta}{\epsilon}\left(qx^2+1+2f\right) > 0$

Notese que $A > 0$ ya que $E > 0$ y que $C > 0$. B puede ser positivo o negativo. Entonces por la regla de los signos de Descartes existe al menos un valor propio λ tal que su parte real es negativo, vea Apéncice I sección 3.3. Por lo tanto, por el Teorema de la Variedad Estable, vea [6, Perko], Capítulo II, sección 7, p tiene una variedad estable de dimensión al menos uno. El Teorema 2.4.2 puede se aplicado dando como resultado el siguiente teorema.

Proposición 3.2.1 *Supongamos que p es hiperbólico e inestable para el sistema 3.1. Entonces la variedad estable de p, $W^s(p)$, es uno dimensional y $\omega(q)$ es una orbita periódica en D para cualquier $q \in D - W^s(p)$*

Demostración:Se utilizará fuertemente el Teorema 2.4.2, vea [4, Hale Smith], Capítulo III, sección 6, Proposición 6.1.

Apéndice I

El análisis de la estabilidad de los puntos críticos hiperbólicos involucrá un sistema lineal de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.7}$$

donde A es la matriz del sistema linealizado, es decir, A es la matriz Jacobiana. Las soluciones del sistema linealizado son obtenidas por:

$$x = x_0 e^{\lambda t} \tag{3.8}$$

donde λ es un valor propio y es raiz del polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = 0$$

El polinomio característico puede ser tomado en la forma más general

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{3.9}$$

donde los coeficientes a_i con $i = 0, 1, ..., n$ son todos reales. Asumase que $a_n \neq 0$ ya que si $a_n = 0$ entonces λ es una solución y el polinomio es en realidad de orden $n - 1$.

3.3. La regla de los signos de Descartes

Considera el polinomio 3.9. Supongamos sin perdida de generalidad que $a_n > 0$. Sea N el numero de cambio de signos en la sucesión de los coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$, ignorando cualquiera de ellos, si alguno de ellos es cero.
La regla de los signos de Descartes dice que hay a lo más N raices que tienen parte real positiva. Más aún hay N ó $N - 2$ ó $N - 4$ ... raices que tienen parte real positiva.
Es posible obtener información de las raices que tienen parte real negativa haciendo $w = -\lambda$ y aplicando la misma regla.

Ejemplo 3.3.1 *Considerese*

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda + a_0 = 0 \text{ , } a_i > 0 \textit{ para toda } i = 0, 1, 2.$$

Como hay dos cambios de signo en la sucesión de los coeficientes entonces hay 2 o 0 raices con parte real positiva. Si hacemos el cambio de variable $\lambda = -w$ *la ecuación se convierte en:*

$$w^3 - a_2 w^2 - a_1 w - a_0 = 0$$

quien tiene exactamente un cambio de signo. Por lo tanto el polinomio original tiene exactamente una raíz con parte real negativa.

Bibliografía

[1] Boyce, DiPrima *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa, 2006.

[2] Butler y P. Waltman, *Persistence in dynamical systems*. J. Diff. Eqn. 63. 1986, 255-263.

[3] J.K. Hale, *Ordinary Diferential Equation*. Krieger, Malabar, Florida, 1980.

[4] Hal L. Smith, *Monotone Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Vol 41.

[5] J. Murray, *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] L. Perko, *Diferential Equation and Dynamical Sistem*. Springer, 1996.

[7] G. F. Simons, *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*. Mc Graw Hill, 1993.