



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una clasificación de las digráficas
localmente semicompletas en flechas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Goldfeder
Ortiz
Ilán Abraham
5574 3415
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
402063636
2. Datos del tutor
Dra
Hortensia
Galeana
Sánchez
3. Datos del sinodal 1
Dr
Hugo Alberto
Rincón
Mejía
4. Datos del sinodal 2
Dra
María del Rocío
Rojas
Monroy
5. Datos del sinodal 3
Dr
Ricardo
Gómez
Aiza
6. Datos del sinodal 4
Mat
Laura
Pastrana
Ramírez
7. Datos del trabajo escrito
Una clasificación de las digráficas localmente semicompletas en flechas
35 p
2008

Agradecimientos

Creo que no podría explicarme a mí mismo, menos al presente trabajo, sin considerar a las personas que me rodean: estoy en tanto estamos y estamos en tanto estoy.

Podré mencionar a algunos en particular, no serán todos.

La causa eficiente, mis padres. En cuanto a la familia, particularmente a Jaime y a Taty.

En tanto los amigos, a Sol, Ana, Paula, Lorelei, Luis Alfonso y José Luis. De la Facultad a Luis, Raúl, Violeta y Fernando.

Con todo mi cariño a Guillermo y también a Ociel y a Vicente.

A Hortensia Galeana por la tolerancia y las libertades. A Hugo Rincón, el ejemplo. A Rafael Rojas, la formalidad.

Particular mención como extraordinarios profesores a Julieta del Carmen Verdugo y a Ángel Carrillo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, campo de tantas batallas, en particular a las Facultades de Ciencias y Filosofía y Letras y al Instituto de Matemáticas.

Y a los que faltan y a los que vienen.

Hacia la memoria de *Julieta del Carmen*
Verdugo Díaz, 1952-2008

Índice

Prefacio	1
1 Nociones básicas	3
1.1 Primeras definiciones	3
1.1.1 Caminos, trayectorias y ciclos	4
1.1.2 Conexidad	6
1.1.3 Digráficas bipartitas	6
1.1.4 Homomorfismos de digráficas e igualdad de digráficas	7
1.1.5 Dominancia y 2-dominancia	8
1.1.6 Composición y 2-composición	8
1.2 Torneos y generalizaciones de torneos	9
1.2.1 Generalizaciones de torneos	10
1.2.2 Definiciones	11
2 Una clasificación de las digráficas LSF	13
2.1 Extensiones	13
2.2 Trayectorias 1-dirigidas	17
2.3 Estructura de las digráficas LSF	18
2.4 Conclusiones	30
Bibliografía	33

Prefacio

El tema del presente trabajo fue un accidente. Empecé trabajando con la Dra. Hortensia Galeana Sánchez en la caracterización de subconjuntos de vértices con ciertas propiedades de independencia y dominación en clases de digráficas consideradas como *generalizaciones de torneos*.

Nuestro trabajo con las digráficas cuasitransitivas fue tranquilo. Sin embargo tuvimos problemas al trabajar con las digráficas *localmente semicompletas en flechas* (*arc-locally semicomplete* en inglés), las cuales aunque están bien caracterizadas cuando son fuertemente conexas (trabajo realizado por Jørgen Bang-Jensen), teníamos pocos resultados estructurales sobre ellas.

Lo anterior nos condujo a dar propiedades de esta clase de digráficas que pudiesemos utilizar en nuestro trabajo. De estas completamos la caracterización previa de Bang-Jensen.

El trabajo es breve. En el primer capítulo presento las nociones básicas de la Teoría de las Gráficas, desde la noción de gráfica dirigida hasta presentar la clase de los torneos y sus generalizaciones.

En el segundo capítulo presento la generalización de la caracterización de las digráficas localmente semicompletas en flechas. En principio examino las extensiones de trayectorias dirigidas y ciclos dirigidos, que son clases particulares de digráficas localmente semicompletas en flechas. Sobre esta base desarrollo el análisis posterior que generaliza algunos de los resultados obtenidos por Bang-Jensen.

En cuanto a la forma en que enuncio definiciones utilizo la doble implicación cuando por lo general se utiliza sólo un sentido. Conuerdo con Rafael Rojas Barbachano: el otro sentido de la implicación no está implícito del hecho de que sea definición.

Con respecto a la ortografía del texto, me apegué en todo lo posible al *Diccionario Panhispánico de Dudas* de la Real Academia Española de la Lengua.

*Por mi raza hablará el espíritu
Por un mundo donde quepan muchos mundos*

Ilán A. Goldfeder en Ciudad Universitaria en el Distrito Federal,
México, octubre de 2008

Nociones básicas

Para el presente trabajo asumiré las nociones básicas de la Teoría de los Conjuntos con la notación usual, salvo que indique lo contrario. Al respecto se puede consultar en [12] el capítulo relativo al tema como introducción y se puede profundizar en [24]. Sobre la Teoría de las Gráficas, en particular de las gráficas dirigidas, puede consultarse [8].

1.1 Primeras definiciones

Una *gráfica dirigida* (*digráfica*) D es un par ordenado de conjuntos (V_D, A_D) donde V_D es un conjunto arbitrario, posiblemente vacío, al cual llamaré los *vértices* de D y A_D es una relación 2-aria sobre V_D , las *flechas* de D . Para el resto del trabajo consideraré sólo digráficas cuyo conjunto de vértices no es vacío y que satisfagan que $V_D \cap A_D = \emptyset$.

Dadas D y E digráficas, diré que E es *subdigráfica* de D (y lo denotaré por $E \leq D$) si y sólo si $V_E \subseteq V_D$ y $A_E \subseteq A_D \cap (V_E \times V_E)$. Notemos que E es por sí una digráfica. Si $A_E = A_D \cap (V_E \times V_E)$ entonces diré que E es subdigráfica *inducida* de D . En particular dado $\{u_0, \dots, u_n\}$ subconjunto de vértices de D denotaré por $D[\{u_0, \dots, u_n\}]$ ó por $D[u_0, \dots, u_n]$ a la subdigráfica de D inducida por u_0, \dots, u_n .

Consideraré D una digráfica y u un vértice de ella, denotaré por $D \setminus u$ a la digráfica $D[V_D \setminus \{u\}]$.

Dada D una digráfica, D^{-1} es la digráfica *dual* de D si y sólo si $V_D = V_{D^{-1}}$ y $(u, v) \in A_D$ si y sólo si $(v, u) \in A_{D^{-1}}$. Notemos que $D = (D^{-1})^{-1}$.

Dada una digráfica D , siempre que $(u, v) \in A_D$ diré que u *domina* v y lo denotaré por $u \rightarrow v$, \overrightarrow{uv} ó \overleftarrow{vu} . Por \overline{uv} denotaré que existe \overrightarrow{uv} ó \overleftarrow{vu} . Por \overleftrightarrow{uv} denotaré que existen tanto \overrightarrow{uv} como \overleftarrow{vu} . \overline{uv} es una arista de D y \overleftrightarrow{uv} una flecha simétrica de D . Si \overline{uv} diré que u y v son adyacentes, de otro modo que u y v son *independientes*. Para cualquier subconjunto de vértices S de D , diré que S es independiente si y sólo si dos a dos los elementos de S son independientes. A la máxima cardinalidad de todos los subconjuntos independientes de vértices de D la llamaré el *número de independencia* de D .

Llamaré E_n a la digráfica formada por n vértices independientes entre sí.

Dado un vértice u en una digráfica D llamaré *in-vecindad* (respectivamente *ex-vecindad*) al conjunto de vértices que dominan (resp. son dominados por) u y la denotaré por $N_D^-(u)$ (resp. $N_D^+(u)$). Si u es un vértice de E subdigráfica de D entonces la in-vecindad (respectivamente ex-vecindad) de u en E es $N_E^-(u) = N_D^-(u) \cap V_E$ ($N_E^+(u) = N_D^+(u) \cap V_E$). A su unión la llamaré la *vecindad* de u (ya en E , ya en D) y la denotaré por $N(u)$. A la cardinalidad de la in-vecindad (respectivamente ex-vecindad) de u en D la llamaré el *in-grado* (resp. *ex-grado*) de u en D y lo denotaré por $d_D^-(u)$ (resp. $d_D^+(u)$). Análogamente cuando u esté en una subdigráfica E de D y quiera referirme a aquella. Omitiré los subíndices cuando no haya lugar a dudas.

1.1.1 Caminos, trayectorias y ciclos

Dada D una digráfica, diré que una sucesión de vértices $P = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ es un *camino* (también lo llamaré como (u_0, u_n) -camino donde u_0 es el vértice inicial y u_n el final de P) de *longitud* n (denotada por $l(P) = n$) en D si cada par de vértices consecutivos es adyacente entre sí (ver Figura 1.1). Cuando $u_0 = u_n$ diré que P es un camino *cerrado*. Si

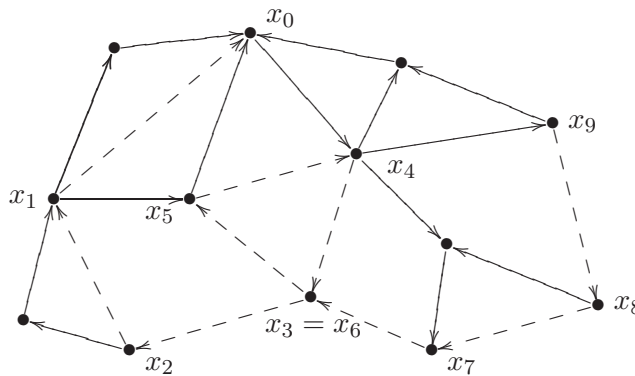


Figura 1.1: (x_0, \dots, x_9) es un camino

tenemos que $u_i \neq u_j$ siempre que $i \neq j$ (respectivamente salvo $u_0 = u_n$) diré que P es una *trayectoria* (ver Figura 1.2, resp. *ciclo*). A cualquier arista \overline{uv} podemos considerarla como un camino de longitud uno (u, v) . Si una trayectoria pasa por todos los vértices de D diré que tal trayectoria es *hamiltoniana*.

Dado un camino P (respectivamente trayectoria o ciclo) si cada vértice domina al consecutivo diré que P es *dirigido*.

Denotaré por V_P (resp. A_P) al conjunto de vértices (resp. flechas) de P ; así (V_P, A_P) es subdigráfica de D . Diré que P' es un *subcamino* (resp. *subtrayectoria*) de P si y sólo si es un camino (resp. trayectoria) y es una subdigráfica de P . Notemos que todo subcamino es por sí un camino.

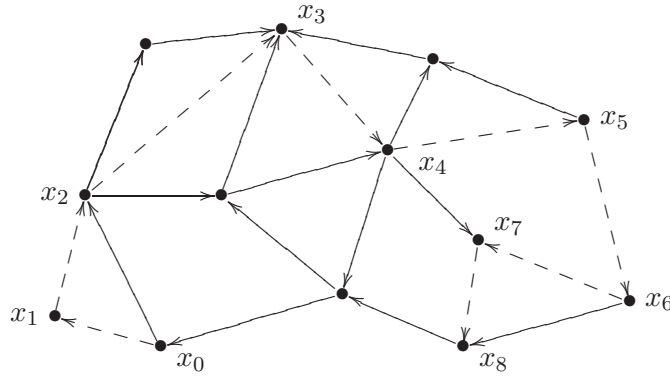


Figura 1.2: (x_0, \dots, x_8) es una trayectoria dirigida

Dado un camino P en D , diré que P es un *camino inducido* (respectivamente para trayectorias y ciclos dirigidos y no dirigidos) si y sólo si $D[V_P] = (V_P, A_P)$.

Llamaré \vec{P}_n (respectivamente \vec{C}_n) a la trayectoria dirigida (resp. al ciclo dirigido) de longitud n considerada como digráfica en sí.

Dado un camino (respectivamente ciclo) $P = (u_0, \dots, u_n)$ denotaré por $P[u_i, u_j]$ al (u_i, u_j) -subcamino $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ de P . Dados $P = (u, \dots, v)$ y $Q = (x, \dots, y)$ caminos, si $v = x$ entonces por $P \cup Q$ denotaré al camino resultante de concatenar los dos anteriores, $(u, \dots, v = x, \dots, y)$.

Dados dos vértices u, v en D , definiré la *distancia* (respectivamente *distancia dirigida*) de u a v , y la denotaré como $d_{UG(D)}(u, v)$ (resp. $d_D(u, v)$), como la menor longitud entre todos los caminos (resp. caminos dirigidos) de u a v . Como antes observé, podemos restringirnos a todos los caminos en de una subdigráfica E de D en cuyo caso denotaremos la distancia por $d_{UG(E)}(u, v)$ (resp. $d_E(u, v)$), omitiré el subíndice cuando no haya lugar a dudas.

Proposición 1.1.1. *Dada una digráfica D , cualquier (u, v) -camino posee al menos una (u, v) -subtrayectoria.*

Demostración. Consideraré un camino $P = (u = x_0, \dots, x_n = v)$. Haré la prueba por inducción sobre los vértices repetidos, definamos $R_P = \{(i, j) : x_i, x_j \in P, x_i = x_j \text{ e } i < j\}$ el conjunto de los pares de índices de los vértices repetidos en P (y ordenados). Si $|R_P| = 0$ entonces P es una (u, v) -trayectoria. De otra forma tomaré $(i, j) \in R_P$. Así $P_1 = P[x_0, x_i] \cup P[x_j, x_n]$ es un (u, v) -subcamino de P con $|R_{P_1}| < |R_P|$. Ya que R_P es finito entonces existe una (u, v) -subtrayectoria de P . \square

Proposición 1.1.2. *Dada una digráfica D , cualquier camino cerrado de D que pasa por el vértice v posee un ciclo que pasa por v .*

Demostración. Consideremos $C = (v = x_0, \dots, x_n = v)$ un camino cerrado. Haré la prueba por inducción sobre los vértices repetidos, definamos $R_C = \{(i, j) : x_i, x_j \in C, x_i = x_j \text{ e } i < j\}$ el conjunto de los pares de índices de los vértices repetidos en C (y ordenados). Si $|R_C| = 0$ entonces C es un ciclo. De otra forma tomaré $(i, j) \in R_C$. Así $C_1 = C[x_0, x_i] \cup C[x_j, x_n]$ es un subcamino cerrado de C con $|R_{C_1}| < |R_C|$. Ya que R_C es finito entonces existe un ciclo en C que pasa por x_0 . \square

1.1.2 Conexidad

Diré que una digráfica D es *conexa* si y sólo entre cualesquiera dos vértices u y v de D existe un (u, v) -camino.

Diré que una digráfica D es *fuertemente conexa* si y sólo si entre cualesquiera dos vértices u y v de D existe un (u, v) -camino dirigido.

A las subdigráficas de D fuertemente conexas y máximas por contención en los vértices las llamaré *componentes fuertemente conexas* de D .

1.1.3 Digráficas bipartitas

Diré que una digráfica D es *bipartita* si y sólo existe una (bi)partición $\{V_0, V_1\}$ de los vértices de D (i.e. satisface que $V_0 \cup V_1 = V_D$ y que $V_0 \cap V_1 = \emptyset$) tal que V_0 y V_1 son conjuntos independientes de vértices.

Teorema 1.1.3. *Una digráfica conexa es bipartita si y sólo si no posee caminos cerrados de longitud impar.*

Para demostrar el Teorema anterior, basta demostrar el siguiente lema:

Lema 1.1.4. *Dada una digráfica conexa bipartita D con $\mathcal{P} = \{V_0, V_1\}$ una bipartición de D , para cualesquiera dos vértices u, v (posiblemente iguales) se tiene que:*

- *si pertenecen a la misma parte de la bipartición \mathcal{P} entonces todo (u, v) -camino es de longitud par y*
- *si pertenecen a partes distintas de la bipartición entonces todo (u, v) -camino es de longitud impar.*

Demostración. Haré la prueba por inducción sobre la longitud de los (u, v) -caminos. Si el camino tiene longitud cero, i.e. $u = v$, entonces pertenecen a la misma parte de \mathcal{P} . Si el camino tiene longitud uno, puesto que V_0 y V_1 son independientes, u y v deben pertenecer a partes distintas (de la partición).

Tomaré ahora un (u, v) -camino $P = (u = x_0, \dots, x_n = v)$ y supondré que para todo camino de longitud menor que n se satisface la proposición. Consideraré dos casos: u y v

pertenecen a la misma o a distintas partes. Supondré primero, sin pérdida de generalidad, que u y v pertenecen a V_0 . Como este es independiente y existe $\overline{x_{n-1}v}$ entonces x_{n-1} pertenece a V_1 . $P[u, x_{n-1}]$ es un camino de longitud menor que n y por mi hipótesis de inducción, ya que u y x_{n-1} pertenecen a partes distintas, tiene longitud impar. Así P tiene longitud par. Para el caso en que u y v pertenecen a partes distintas, la prueba es análoga. \square

Demostración del Teorema 1.1.3. Mostraré la suficiencia. Dada una digráfica bipartita D por el Lema 1.1.4 todos sus caminos cerrados son de longitud par.

Ahora demostraré la necesidad. Supondré que todos los caminos cerrados de D son de longitud par y tomemos u cualquier vértice de D . Definiré

$$V_0 = \{v \in V_D : d(u, v) \text{ es par}\} \text{ y } V_1 = \{v \in V_D : d(u, v) \text{ es impar}\}$$

Notemos primero que $u \in V_0$.

Supondré primero que V_0 (respectivamente V_1) no es independiente, *i.e.* existe \overline{wz} con $w, z \in V_0$ (resp. en V_1). Por la definición de V_0 (resp. V_1), existen P una (u, w) -trayectoria y Q una (z, u) -trayectoria, ambas de longitud par (resp. impar). Así $P \cup \overline{wz} \cup Q$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar, una contradicción. De aquí que V_0 y V_1 son subconjuntos independientes de vértices.

Como D es conexa tenemos que hay al menos un camino entre cualesquiera dos vértices, así $V_0 \cup V_1 = V_D$.

Finalmente mostremos que $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, para ello supongamos que existe $v \in V_0 \cap V_1$. Por definición existen T_0 un (u, v) -camino de longitud par y T_1 un (u, v) -camino de longitud impar. Así $T_0 \cup T_1$ es un camino cerrado de longitud impar, una contradicción.

Se sigue que $\{V_0, V_1\}$ es una bipartición de D . \square

1.1.4 Homomorfismos de digráficas e igualdad de digráficas

Consideraré dos digráficas D y F y una función $\phi : V_D \rightarrow V_F$ entre los vértices de estas. Diré que ϕ es un *homomorfismo* de digráficas (y lo denotaré simplemente por $\phi : D \rightarrow F$) si y sólo si $u \rightarrow v$ en D implica que $\phi(u) \rightarrow \phi(v)$ en F . Notemos que por esto último, todo homomorfismo de digráficas $\phi : D \rightarrow F$ determina una función $\phi^* : A_D \rightarrow A_F$ entre las flechas de las digráficas. Así puedo hablar de homomorfismos de digráficas inyectivos (respectivamente suprayectivos) en vértices o en flechas.

Notemos que dada D' subdigráfica de D , siempre existe un homomorfismo de digráficas $i : D' \rightarrow D$ inyectivo en vértices y en flechas. Dadas digráficas D y E y un homomorfismo de digráficas $\phi : E \rightarrow D$ inyectivo en vértices y en flechas, diré que E *está en* D . Así $\phi(E)$

es subdigráfica de D pero ya que $\phi(E) = E$, usualmente consideraré a E como subdigráfica de D .

Dado un homomorfismo de digráficas $\phi : D \rightarrow F$ diré que es un *isomorfismo* de digráficas si y sólo si es biyectivo en vértices y en flechas. Diré que D y F son digráficas *isomorfas* si y sólo si existe un isomorfismo $\phi : D \rightarrow F$ y lo denotaré por $D \cong F$ ó $D = F$.

1.1.5 Dominancia y 2-dominancia

Dada una digráfica D y subconjuntos de vértices A, B de V_D diré que A *domina* B (y lo denotaré por $A \Rightarrow B$) si y sólo si para todo vértice u en A y todo vértice v en B tengo que $u \rightarrow v$.

Puedo extender la idea a digráficas bipartitas de forma tal que la dominación *respete* la independencia de cada uno de los elementos de la bipartición. Consideraré el caso anterior pero con $\mathcal{P} = \{V_0, V_1\}$ una bipartición de D . Diré que A *2-domina* B según \mathcal{P} ($A \Rightarrow_2^{\mathcal{P}} B$) si y sólo si para todo vértice u en $A \cap V_k$ y para todo vértice v en $B \cap V_{k+1}$ tengo que $u \rightarrow v$, con k módulo 2.

1.1.6 Composición y 2-composición

Dadas una digráfica D con $V_D = \{v_0, \dots, v_n\}$ y digráficas D_0, \dots, D_n (cuyos vértices son dos a dos ajenos) llamaré *composición* $D[D_0, \dots, D_n] = C$ a la digráfica con vértices $V_C = \cup_{i=0}^n (V_{D_i} \times \{i\})$ y para $(w, i), (z, j) \in V_C$ la flecha $(w, i) \rightarrow (z, j)$ estará en C si y sólo si

- $i = j$ y \overrightarrow{wz} en D_i ó
- $\overrightarrow{v_i v_j}$ en D .

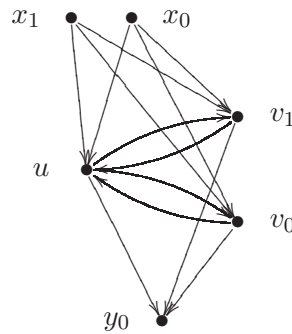


Figura 1.3: Ejemplo de una composición, $\vec{P}_2[E_2, \vec{C}_2[E_1, E_2], E_1]$

Nótese que cada D_i puede considerarse como subdigráfica de la composición C y, de esta manera, si $v_i \rightarrow v_j$ entonces $D_i \Rightarrow D_j$. Considérese como ejemplo la Figura 1.3

Dada $D[D_0, \dots, D_n] = C$ una composición, si cada D_i es independiente entonces diré que C es una *extensión* de D .

Dada una digráfica D con $V_D = \{v_0, \dots, v_n\}$ y digráficas bipartitas D_0, \dots, D_n (cuyos vértices son dos a dos ajenos) con biparticiones $\mathcal{P}_{D_i} = \{V_0^i, V_1^i\}$ y $\mathcal{P} = \{\cup_{i=0}^n V_0^i = V_0, \cup_{i=0}^n V_1^i = V_1\}$, la *2-composición* según \mathcal{P} es la digráfica $D[D_0, \dots, D_n]_2^{\mathcal{P}} = C$ con vértices $V_C = \cup_{i=0}^n (V_{D_i} \times \{i\})$ y para $(w, i), (z, j) \in V_C$ tenemos que $(w, i) \rightarrow (z, j)$ en C si y sólo si

- $i = j$ y \overrightarrow{wz} en D_i ó
- $w \in V_k^i, z \in V_{k+1}^j$ (k módulo 2) y $\overrightarrow{v_i v_j}$ en D .

Nótese que la 2-composición depende de la bipartición elegida y que D puede o no ser bipartita pero la 2-composición siempre lo es.

Análogamente al caso previo, puedo considerar cada D_i como subdigráfica de la composición C y, de esta manera, si $v_i \rightarrow v_j$ entonces $D_i \Rightarrow_2^{\mathcal{P}} D_j$.

Si considero $\vec{P}_2[E_2, \vec{C}_2, E_1]_2^{\mathcal{P}}$ entonces hay dos 2-composiciones posibles (ver Figuras 1.4 y 1.5).

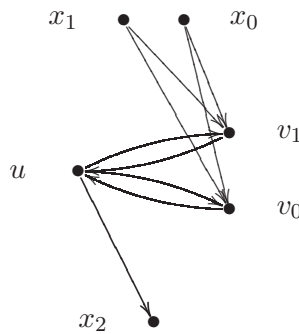


Figura 1.4: $\mathcal{P} = \{\{x_0, x_1, u\}, \{v, x_2\}\}$

1.2 Torneos y generalizaciones de torneos

Diré que una digráfica es un *torneo* si y sólo si entre dos vértices existe una y solo una flecha (Figura 1.6). Si T es un torneo con n vértices, diré que es un n -torneo.

Un resultado importante pero particularmente simple es el siguiente:

Teorema 1.2.1. *Todo torneo posee al menos una trayectoria dirigida hamiltoniana .*

Demostración. Lo haré por inducción sobre el número de vértices del torneo. Consideraré T un torneo. Es claro que todos los torneos de uno, dos y tres vértices poseen un trayectoria

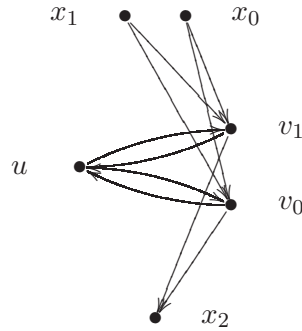


Figura 1.5: $\mathcal{P} = \{\{x_0, x_1, u, x_2\}, \{v\}\}$

hamiltoniana; lo supondré para todos los torneos que posean menos vértices que T . Tomaré u cualquier vértice de T . Como $T \setminus u$ es un torneo y tiene menos vértices que T entonces posee una trayectoria dirigida hamiltoniana $P = (x_0, \dots, x_n)$. Como T es torneo, existen aristas $\overrightarrow{ux_0}$ y $\overrightarrow{x_nu}$. Si $\overrightarrow{ux_0}$ ó $\overrightarrow{x_nu}$ entonces agregando u a P tendré la trayectoria hamiltoniana en T . De otro modo el conjunto $A = \{i : \overrightarrow{ux_i}\}$ no es vacío. Ya que A es finito entonces posee máximo, j . Como no existe $\overrightarrow{x_nu}$ entonces $j < n$. Puesto que j es el máximo entonces tendré que $\overrightarrow{ux_{j+1}}$. Así $P[x_0, x_j] \cup (x_j, u, x_{j+1}) \cup P[x_{j+1}, x_n]$ es una trayectoria dirigida hamiltoniana en T . \square



Figura 1.6: Ejemplos de 1, 2 y 3-torneos

1.2.1 Generalizaciones de torneos

J. Bang-Jensen, G. Gutin y L. Volkmann afirman que los torneos constituyen sin duda la clase de digráficas mejor conocidas [7, 28]. La gran cantidad de resultados que conocemos sobre los torneos se deben en gran medida a lo estricto de su definición. De ahí que pocos den información sobre su estructura.

Algunos matemáticos notaron que clases de digráficas *cercanas* a los torneos aportaban información sobre ellos. Esto motivo al estudio de dichas clases y a la definición de nuevas clases de digráficas *cercanas* a torneos. Esas clases de digráficas se agruparon bajo la denominación común de *generalizaciones de torneos* y gran parte del análisis se centra en qué propiedades ya conocidas sobre los torneos pueden extenderse.

En las generalizaciones de torneos hay importantes trabajos de Jørgen Bang-Jensen, Yubao Guo, Gregory Gutin, Pavol Hell, Jing Huang, Khee Meng Koh, Yannis Manoussakis, B.P. Tan, Carsten Thomassen, Lutz Volkmann y Anders Yeo.

Entre las clases de digráficas que se consideran generalizaciones de torneos están los torneos k -partitos, las digráficas *semicompletas* y las k -partitas *semicompletas* ([9, 19, 20, 21, 22, 18, 26, 27, 29, 30]). También las digráficas *cuasitransitivas* ([13, 11, 6]) que Alain Ghoulà-Houri introdujo como una generalización de las digráficas transitivas. Así como las digráficas *localmente semicompletas* (y las digráficas *localmente torneos*, [1, 4, 5, 10, 14, 16, 15, 17, 23, 25, 31, 32]) introducidas por J. Bang-Jensen en 1991 y las digráficas *localmente semicompletas en flechas* (*arc-locally semicomplete*, [2, 3]), introducidas por J. Bang-Jensen en 1993.

1.2.2 Definiciones

Diré que una digráfica D es un *torneo k -partito* si y sólo si es k -partita, i.e. existen subconjuntos V_1, \dots, V_k de los vértices de D tales que $\cup_{i=1}^k V_i = V_D$, para todo i se tiene que $V_i \neq \emptyset$ y cada V_i es independiente, tales conjuntos constituyen una k -partición de D , y entre cualesquiera dos vértices que no estén en el mismo V_i existe una y sólo una flecha.

Diré que una digráfica D es *semicompleta* si y sólo si entre cualesquiera dos vértices existe al menos una flecha y diré que D es *completa* si entre cualesquiera dos vértices hay una flecha simétrica.

Dada una digráfica D , diré que es *k -partita semicompleta* si es k -partita y entre cualesquiera dos vértices que no estén en la misma parte existe al menos una flecha.

Se sigue fácilmente del Teorema 1.2.1 que:

Corolario 1.2.2. *Toda digráfica semicompleta posee al menos una trayectoria dirigida hamiltoniana.*

Dada una digráfica D , diré que es *transitiva* si y sólo si para cualesquiera tres vértices u , v y w en D cada vez que se tiene que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ entonces tenemos que $u \rightarrow w$. D es *cuasitransitiva* si, bajo las mismas condiciones, y solo si tenemos que u y w son adyacentes (ver Figuras 1.8, 1.9 y 1.10).

Una digráfica D es *in-localmente semicompleta* (respectivamente *ex-localmente semicompleta*) si y sólo si la in-vecindad (ex-vecindad) de cualquier vértice induce una subdigráfica semicompleta en D .

Una digráfica D es *localmente semicompleta* si y sólo si es in- y ex-localmente semicompleta. Análogamente para las digráficas localmente torneos (ver Figuras 1.8, 1.8 y 1.10).

Es fácil ver que una digráfica D es semicompleta si y sólo si es localmente semicompleta y cuasitransitiva.

Dada una digráfica D , direé es *localmente semicompleta en flechas* (LSF) si y sólo para cualesquiera u y v , vértices adyacentes, todo elemento x en la in-vecindad de u es adyacente a todo elemento y en la in-vecindad de v , siempre que x y y sean distintos, y todo elemento x en la ex-vecindad de u es adyacente a todo elemento y en la ex-vecindad de v , siempre que x y y sean distintos (ver Figuras 1.7, 1.9 y 1.10).



Figura 1.7: Localmente semicompleta y localmente semicompleta en flechas pero no cuasitransitiva.



Figura 1.8: Localmente semicompleta y cuasitransitiva pero no localmente semicompleta en flechas.



Figura 1.9: Localmente semicompleta en flechas y cuasitransitiva pero no localmente semicompleta. También es transitiva.



Figura 1.10: Localmente semicompleta, localmente semicompleta en flechas y cuasitransitiva, *i.e.* un torneo. También es transitiva.

Por TT_n denotaré al n -torneo transitivo.

Una clasificación de las digráficas localmente semicompletas en flechas

Bang-Jensen en [2, 3] introdujo y demostró algunas características de las digráficas localmente semicompletas en flechas, incluida la siguiente caracterización:

Teorema 2.0.3 (Bang-Jensen [3]). *Dada D una digráfica fuertemente conexa y localmente semicompleta en flechas, D es semicompleta, bipartita semicompleta o la extensión de un ciclo dirigido.*

De forma similar a como se han demostrado muchas de las propiedades que conocemos sobre torneos, para la demostración del teorema previo no es necesario profundizar en la estructura de las digráficas LSF, por lo general basta con hacer un uso adecuado de la definición de ser LSF.

En el presente capítulo analizaremos la estructura de dichas digráficas para extender el resultado de Bang-Jensen a todas las digráficas LSF y, al mismo tiempo, dar las caracterizaciones de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas con base en las digráficas LSF. Para ello primero profundizaremos en las extensiones de las trayectorias dirigidas y los ciclos dirigidos, que constituyen clases de digráficas que también son LSF.

2.1 Extensiones de trayectorias y ciclos dirigidos

Definición 2.1.1. Diré que un uv -camino dirigido es *extenso* si y sólo si $d^-(u) + d^+(v) = 0$ ó existe \vec{vu} .

Lema 2.1.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. D es la extensión de una trayectoria dirigida (no trivial) o de un ciclo dirigido.
2. Existen:
 - una trayectoria dirigida inducida $P = (x_0, \dots, x_n)$ con $d^-(x_0) + d^+(x_n) = 0$ ó
 - un ciclo dirigido inducido $P = (x_0, \dots, x_n = x_0)$

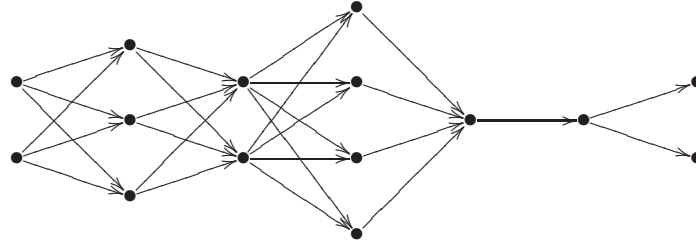


Figura 2.1: $\vec{P}_7[E_2, E_3, E_2, E_4, E_1, E_1, E_2]$

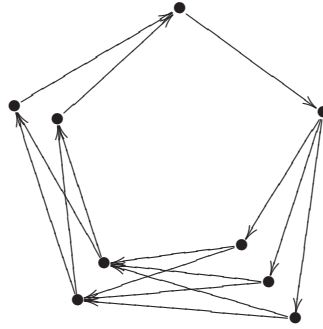


Figura 2.2: $\vec{C}_5[E_2, E_1, E_1, E_3, E_2]$

y un homomorfismo de digráficas $\phi_P : D \rightarrow P$ suprayectivo en vértices y flechas tales que para cualesquiera $u, v \in V_P$ con \vec{uv} se tiene que $\phi_P^{-1}(u) \Rightarrow \phi_P^{-1}(v)$ (i.e. ϕ_P levanta flechas: bajo ϕ_P la preimagen de u domina a la preimagen de v).

3. Existe un camino dirigido extenso inducido $C = (x_0, \dots, x_n)$ tal que para cada $w \in V_D$ existe $x_j \in V_C$ con $N^-(w) = N^-(x_j)$ y $N^+(w) = N^+(x_j)$.
4.
 - i) D no es trivial,
 - ii) si D no es fuertemente conexa entonces todas sus componentes fuertemente conexas son triviales y todas sus trayectorias son inducidas,
 - iii) dado P un (x_0, x_n) -camino dirigido extenso e inducido (salvo quizá por $\overrightarrow{x_n x_0}$), cualquier (u, v) -camino dirigido de D es extenso e inducido (salvo quizá por \overrightarrow{vu}) si y sólo si tiene la misma longitud que P y
 - iv) para cualquier camino dirigido extenso P en D y para cualquier vértice w en D , si $d^-(w)d^+(w) \neq 0$ entonces hay por lo menos dos flechas entre w y P , en otro caso hay por lo menos una.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Es claro.

$2 \Rightarrow 1$. Por hipótesis tenemos que para todo j (si P es un ciclo módulo n) que $\phi_P^{-1}(x_j) \Rightarrow \phi_P^{-1}(x_{j+1})$ y cada $\phi_P^{-1}(x_j)$ es independiente, pues P no tiene lazos. Así tenemos

que $D = P[\phi_P^{-1}(x_0), \dots, \phi_P^{-1}(x_n)]$.

1 \Rightarrow 3. Como D es la extensión de una trayectoria dirigida o de un ciclo $P = (x_0, \dots, x_n)$ entonces existen conjuntos de vértices independientes E_0, \dots, E_n tales que $D = P[E_0, \dots, E_n]$. Basta tomar una trayectoria o un ciclo P' en D isomorfo a P . Notemos que $P' \cap E_i$ es unitario. Así para cada w en E_i le corresponde $P' \cap E_i$ y satisface la condición.

3 \Rightarrow 2. Sea $P = (x_0, \dots, x_n)$ el camino dirigido extenso inducido que satisfaga que para cada $u \in V_D$ existe $x_i \in V_P$ tal que $N^-(u) = N^-(x_i)$ y $N^+(u) = N^+(x_i)$. Como P es inducido entonces es una trayectoria dirigida inducida o un ciclo dirigido inducido. Considerando que tal x_i puede no ser única, hagamos una elección para definir una función:

$$\phi : V_D \rightarrow V_P$$

que satisfaga $N^-(u) = N^-(\phi(u))$ y $N^+(u) = N^+(\phi(u))$. Mostraré que tal función determina el homomorfismo de gráficas pedido. Supondré $u, v \in V_D$ con $\phi(u) = x_j$ y $\phi(v) = x_k$. Por hipótesis sé que $N^+(u) = N^+(x_j)$ y $N^-(v) = N^-(x_k)$. Existe \overrightarrow{uv} si y sólo si $v \in N^+(x_j)$ que es lo mismo que $x_j \in N^-(v)$ y esto es equivalente a $\overrightarrow{x_i x_k}$ si y sólo si $k = j + 1$, por ser P inducida. Por lo anterior ϕ es un homomorfismo de gráficas suprayectivo en vértices y flechas. En particular para dos vértices u, v de D , si $u \in \phi^{-1}(x_j)$ y $v \in \phi^{-1}(x_{j+1})$ entonces \overrightarrow{uv} . Por lo tanto $\phi^{-1}(x_j) \Rightarrow \phi^{-1}(x_{j+1})$.

2 \Rightarrow 4. Por hipótesis tenemos i).

Demostraré la primera afirmación del inciso ii) por contrapositiva, i.e. supondré que D posee una componente fuertemente conexa no trivial. Así posee al menos un ciclo dirigido, le llamaré C . Como los homomorfismos de digráficas preservan caminos dirigidos cerrados, tenemos que $\phi_P(C)$ es un camino dirigido cerrado en P . Como P por hipótesis es una trayectoria dirigida o un ciclo dirigido inducido, se sigue que $\phi_P(C) = P$. Por 2 tengo que $\phi_P^{-1}(x_j) \Rightarrow \phi_P^{-1}(x_{j+1})$ y así D es fuertemente conexa.

Demostraré la segunda afirmación del inciso ii); para ello supondré que D no es fuertemente conexa y tomaré $Q = (y_0, \dots, y_m)$ cualquier camino dirigido. Si Q no es inducido, puesto que ϕ_P es homomorfismo de digráficas, entonces P tampoco lo es, una contradicción.

Ahora mostraré iii). Tomemos $C = (z_0, \dots, z_n)$ cualquier camino dirigido extenso e inducido (salvo quizá por $\overrightarrow{z_n z_0}$). Por la forma en como definí el homomorfismo tengo que si P es una trayectoria entonces $\phi_P(C) = P$ ó si P es un ciclo entonces $l(C) = l(P) - 1$. Recíprocamente, si C es un (z_0, z_n) -camino dirigido en D y si P es una trayectoria tengo que $l(C) = l(P)$ ó si es un ciclo que $l(C) = l(P) - 1$; puesto que por hipótesis ϕ_P es suprayectivo y levanta flechas tengo que C es un camino dirigido extenso.

Finalmente demostraré iv); tomaré w cualquier vértice con $\phi_P(w) = x_j$. w es interior en D si y sólo si x_j lo es en P . Como $\phi_P(C) = P$ tengo que $\phi_P(z_i) = x_i$. Por como definí el homomorfismo tengo que si w es interior entonces $\overrightarrow{z_{i-1} w}, \overrightarrow{w z_{i+1}}$. En otro caso tengo $\overrightarrow{z_1 w}$ ó $\overrightarrow{z_{n-1} w}$.

4 \Rightarrow 3. Observemos primero que si D no es fuertemente conexa (por ii) D no posee componentes fuertemente conexas no triviales y así para cualquier vértice z existen caminos dirigidos $\Lambda_z^- = (a_0, \dots, a_p = z)$ y $\Lambda_z^+ = (b_0 = z, \dots, b_q)$ con $d^-(a_0) + d^+(b_q) = 0$ (puede haber más de uno, en tal caso escogeré uno). Sea $P = (x_0, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida extensa e inducida (salvo quizá por $\overrightarrow{x_n x_0}$) de D . Si D es fuertemente conexa siempre existe tal P . Si D no es fuertemente conexa por ii) puedo asegurar su existencia. Por iv) todo vértice es adyacente por lo menos a un vértice de P ; con base en ésto y posiblemente en una elección definiré:

$$\psi_P : V_D \rightarrow V_P$$

que satisfaga que dado w en D si $\psi_P(w) = x_i$ entonces $\overrightarrow{x_{i-1} w}$ ó $\overrightarrow{w x_{i+1}}$. Mostraré que para cada P (trayectoria dirigida extensa e inducida) la función ψ_P es única y que siempre se tienen $\overrightarrow{x_{i-1} w}$ y $\overrightarrow{w x_{i+1}}$.

- Probaré que para cualquier vértice w , $d^-(w) = 0$ si y sólo si D no es fuertemente conexa y $\psi_P(w) = x_0$. Demostraré la suficiencia. Como $d^-(w) = 0$ entonces D no es fuertemente conexa y por ii) D todas sus componentes fuertemente conexas son triviales. Así no existe $\overrightarrow{x_n x_0}$ y entonces tengo que $d^-(x_0) + d^+(x_n) = 0$. Supondré $\psi_P(w) = x_j$. Por hipótesis $d^-(w) = 0$ entonces $\overrightarrow{w x_{j+1}}$. Así tomaré $P' = \overrightarrow{w x_{j+1}} \cup P[x_{j+1}, x_n]$. P' es un camino dirigido extenso, por iii) es inducido y por iv) $l(P') = l(P)$. Se sigue que $x_{j+1} = x_1$ y así $\psi_P(w) = x_0$. Ahora mostraré la necesidad. Tengo por hipótesis que $\psi_P(w) = x_0$. Como P es un camino dirigido extenso y D no es fuertemente conexa entonces $d^-(x_0) + d^+(x_n) = 0$. Así existe $\overrightarrow{w x_1}$ y por lo tanto $\Lambda_w^- \cup \overrightarrow{w x_1} \cup P[x_1, x_n]$ es extenso y por iii) es inducido. Por iv) $l(\Lambda_w^- \cup \overrightarrow{w x_1} \cup P[x_1, x_n]) = l(P)$ y por lo tanto $l(R_w^-) = 0$ y $d^-(w) = 0$. Por dualidad tengo que $d^+(w) = 0$ si y sólo si D no es fuertemente conexa y $\psi_P(w) = x_n$.
- Supondré $d^+(w)d^-(w) \neq 0$ y $\psi_P(w) = x_j$. Demostraré que $\overrightarrow{x_{j-1} w}$ y $\overrightarrow{w x_{j+1}}$. Por hipótesis tengo sólo una de ellas, supondré sin pérdida de generalidad por la dualidad $\overrightarrow{w x_{j+1}}$. Consideraré dos casos: D es o no fuertemente conexa. Si D es fuertemente conexa ya que $\overrightarrow{w x_{j+1}} \cup P[x_{j+1}, x_{j-1}]$ es un camino dirigido de la misma longitud de P por iii) es extenso e inducido y como D es fuertemente conexa entonces $\overrightarrow{x_{j-1} w}$. Si D no es fuertemente conexa por iv) existe x_k en P tal que $\overrightarrow{x_k w}$ distinta de $\overrightarrow{w x_{j+1}}$. Supondré primero que $\overrightarrow{x_k w}$; así tengo que $\Lambda_w^- \cup \overrightarrow{w x_{j+1}} \cup P[x_{j+1}, x_n]$ y $\Lambda_w^- \cup \overrightarrow{w x_k} \cup P[x_{j+1}, x_n]$ son dos caminos dirigidos extensos. Por ii) y iii) tienen la misma longitud y se sigue que $\overrightarrow{w x_k} = \overrightarrow{w x_{j+1}}$, una contradicción. Entonces supondré que $\overrightarrow{x_k w}$; como $P[x_0, x_k] \cup (x_k, w, x_{j+1}) \cup P[x_{j+1}, x_n]$ y P son caminos dirigidos extensos, por ii) y iii) tienen la misma longitud y así tengo que $x_k = x_{j-1}$ y que $\overrightarrow{x_{j-1} w}$.

Consideremos w cualquier vértice en $V_D \setminus V_P$ con $\psi_P(w) = x_j$. Denotaré por P_w el camino dirigido que resulta de substituir $\psi_P(w)$ por w . Por iii) es extenso e inducido. Ahora mostraré que $N^-(w) = N^-(\psi_P(w))$ y $N^+(w) = N^+(\psi_P(w))$. Consideraré $z \in N^-(w)$.

Ya que P_w , P_z y P son extensas e inducidas se sigue que $\psi_P(z) = x_{j-1}$ y, por lo que ya mostré, $\overrightarrow{zx_j}$. Cuando $z \in N^-(x_j)$ y para mostrar $N^+(w) = N^+(\psi_P(w))$ el argumento es el mismo. \square

Corolario 2.1.3. *Las extensiones de trayectorias dirigidas o de ciclos dirigidos son localmente semicompletas en flechas.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad por la dualidad consideremos vértices u, v, w, z en D , la extensión de una trayectoria dirigida o de un ciclo dirigido, tales que $\overleftarrow{u} \overrightarrow{vw} \overrightarrow{z}$. Por el inciso 3 del Lema 2.1.2 existe un camino dirigido extenso inducido $C = (x_0, \dots, x_n)$ tal que para cada vértice y en D existe x_j en C con $N^-(w) = N^-(x_j)$ y $N^+(w) = N^+(x_j)$. Así existen x_{j_0} y x_{j_1} tales que $N^-(u) = N^-(x_{j_0})$ y $N^-(w) = N^-(x_{j_1})$. Pero como $v \in N^-(u)$, $v \in N^-(w)$ y C es inducido, $j_0 = j_1$. Luego $N^+(u) = N^+(x_{j_0}) = N^+(w)$ y $z \in N^+(w)$. Por lo tanto \overrightarrow{uz} . \square

2.2 Trayectorias 1-dirigidas

Diré que una trayectoria T es *antidirigida* si no posee subtrayectorias dirigidas de longitud dos.

Definición 2.2.1. Dada una trayectoria $T = (x_0, \dots, x_n)$ diré que es *1-dirigida* si y sólo si es dirigida o antidirigida.

Proposición 2.2.2. *Si D es una digráfica localmente semicompleta en flechas entonces toda trayectoria inducida es 1-dirigida.*

Demostración. Si una trayectoria no es 1-dirigida entonces como no es antidirigida posee al menos una subtrayectoria dirigida de longitud dos y como no es dirigida, la subtrayectoria es propia. Así posee vértices u, v, w, z tales que $\overrightarrow{u} \overrightarrow{vw} \overleftarrow{z}$ ó $\overleftarrow{u} \overrightarrow{vw} \overrightarrow{z}$ y por ser localmente semicompleta en flechas (entonces existe) \overrightarrow{uz} . Por lo tanto T no es inducida. \square

Corolario 2.2.3. *En una digráfica localmente semicompleta en flechas toda wv -trayectoria posee una wv -trayectoria inducida 1-dirigida. En particular toda trayectoria inducida es 1-dirigida.*

Esta última proposición resulta relevante porque muestra, en cierto sentido, que las digráficas localmente semicompletas en flechas, principalmente las digráficas semicompletas, bipartitas semicompletas y las extensiones de trayectorias dirigidas y ciclos dirigidos, son un paso intermedio entre las digráficas localmente semicompletas y las cuasitransitivas.

Proposición 2.2.4. *Dada D una digráfica localmente semicompleta entonces todas sus trayectorias inducidas son dirigidas (y por lo tanto son 1-dirigidas).*

Proposición 2.2.5. *Dada D una digráfica cuasitransitiva entonces todas sus trayectorias inducidas son antidirigidas (y por lo tanto son 1-dirigidas).*

Las pruebas son análogas que cuando son localmente semicompletas en flechas.

2.3 Estructura de las digráficas localmente semicompletas en flechas

El resto del análisis lo basaré en las siguiente subdigráficas:

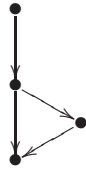


Figura 2.3: \mathcal{L}_2^{+1}



Figura 2.4: \mathcal{L}_2^{-1}



Figura 2.5: \mathcal{L}_3

Diré que D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre si D no posee a \mathcal{L}_2^{+1} , \mathcal{L}_2^{-1} ni a \mathcal{L}_3 como subdigráficas.

Dada una subdigráfica E de D , diré que u en los vértices de E es vértice *interior* en E si y sólo si $d_E^-(u)d_E^+(u) \neq 0$.

Lema 2.3.1. *Sea D una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa. Todo vértice es adyacente:*

- i. a cualquier camino dirigido extenso P (con $|A_{D[P]}| \geq 2$),
- ii. a cualquier 3-torneo transitivo y
- iii. al menos a un vértice interior de cualquier copia de \mathcal{L}_3 en D .

Demostración. Demostraré el primer caso. Tomemos $T = (x_0, \dots, x_n)$ cualquier camino dirigido extenso y w cualquier vértice en D ; tenemos dos casos: existe o no $\overrightarrow{x_n x_0}$.

Supondré primero que existe $\overrightarrow{x_n x_0}$. Así T se puede extender a un camino dirigido cerrado C (con $V_C = V_T$). Entonces $|A_{D[T]}| \geq 2$. Supondré que $d_{UG(D)}(w, C) = d_{UG(D)}(w, T) \geq 2$ y tomaré $P = (w = y_0, \dots, y_m = x_j)$ una wT -trayectoria de longitud mínima con $j \in \{0, \dots, n\}$. Tengo dos casos, $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$ ó $\overleftarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$. Supondré sin pérdida de generalidad por la dualidad que $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$ (i.e. el segundo caso se sigue dualizando D , aplicando el primer caso y volviendo a dualizar). Así tenemos $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1} x_j x_{j-1}}$ (j módulo n) y como D es localmente semicompleta en flechas $\overrightarrow{y_{m-2} x_{j-1}}$, lo que contradice que P es de longitud mínima. Por lo tanto $d_{UG(D)}(w, T) \leq 1$.

Supondré ahora que no existe $\overrightarrow{x_n x_0}$. Como $|A_{D[T]}| \geq 2$ tengo que $n \geq 2$. Supondré que $d_{UG(D)}(w, T) \geq 2$ y tomaré $P = (w = y_0, \dots, y_m = x_j)$ una (w, T) -trayectoria de longitud mínima (en $UG(D)$) con $j \in \{0, \dots, n\}$. Consideraré primero el caso $j = 0$. Puesto que T es extensa, $\overleftarrow{y_{m-1} x_0}$ y así $\overleftarrow{y_{m-1} x_0 x_1 x_2}$, $\overleftarrow{y_{m-1} x_2}$. Si $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$ (respectivamente $\overleftarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$) tendría $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1} x_2 x_1}$ (resp. $\overleftarrow{y_{m-2} y_{m-1} x_0 x_1}$) y entonces $\overrightarrow{y_{m-2} x_1}$, lo que contradice que T sea de longitud mínima. Sin pérdida de generalidad puedo suponer que $j < n$, pues de otro modo tendría $\overrightarrow{y_{m-1} x_n x_{n-1} x_{n-2}}$ ($\overleftarrow{y_{m-1} x_n}$ pues T es extensa) y por ser localmente semicompleta en flechas $\overrightarrow{y_{m-1} x_{n-2}}$. Así $T[y_0, y_{m-1}] \cup \overrightarrow{y_{m-1} x_{n-2}}$ es una (w, T) -trayectoria en $UG(D)$ de la misma longitud que T , pero que llega a x_{n-2} no a x_n . Finalmente supondré sin pérdida de generalidad por la dualidad que $\overrightarrow{y_{m-1} x_j}$. Consideraré $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$ (respectivamente $\overleftarrow{y_{m-2} y_{m-1}}$). Así tengo que $\overrightarrow{y_{m-2} y_{m-1} x_j x_{j-1}}$ (resp. $\overleftarrow{y_{m-2} y_{m-1} x_j x_{j+1}}$) y por ser D localmente semicompleta en flechas se sigue que $\overrightarrow{y_{m-2} x_{j-1}}$ (resp. $\overleftarrow{y_{m-2} x_{j+1}}$) lo cual contradice que T sea de longitud mínima. Se sigue que $d_{UG(D)}(w, T) \leq 1$.

Ahora demostraré la segunda afirmación, tomaré T_3 en D con $\overrightarrow{k_1 k_2}$, $\overrightarrow{k_1 k_3}$ y $\overrightarrow{k_2 k_3}$. Supondré que $d_{UG(D)}(w, T_3) \geq 2$ y tomaré $P = (w = y_0, \dots, y_n = k_j)$ una (w, T_3) -trayectoria de longitud mínima con $1 \leq j \leq 3$. Supondré primero que $j = 2$. Supondré $\overrightarrow{y_{n-2} y_{n-1}}$ (respectivamente $\overleftarrow{y_{n-2} y_{n-1}}$). Así tengo que $\overrightarrow{y_{n-2} y_{n-1} k_2 k_1}$ (resp. $\overleftarrow{y_{n-2} y_{n-1} k_2 k_3}$) y por ser localmente semicompleta en flechas $\overrightarrow{y_{n-2} k_1}$ (resp. $\overleftarrow{y_{n-2} k_3}$), una contradicción. Sin pérdida de generalidad por la dualidad supondré que $j = 1$. Si $\overrightarrow{y_{n-1} k_0}$ (respectivamente $\overleftarrow{y_{n-1} k_0}$), así tengo que $\overrightarrow{y_{n-1} k_0 k_3 k_2}$ (resp. $\overleftarrow{y_{n-1} k_0 k_2 k_3}$) y por ser localmente semicompleta en flechas $\overrightarrow{y_{n-1} k_2}$, lo cual nos remite al caso anterior. Se sigue que $d_{UG(D)}(w, T_3) \leq 1$.

Finalmente tomaré \mathcal{L}_3 en D con $\overrightarrow{m_0 m_1}$, $\overrightarrow{m_1 m_2}$, $\overrightarrow{m_2 m_3}$ y $\overrightarrow{m_0 m_3}$. Dado w en D , supondré que $d_{UG(D)}(w, \mathcal{L}_3) \geq 2$ y tomaré $P = (w = y_0, \dots, y_n = m_j)$ una (w, \mathcal{L}_3) -trayectoria de longitud mínima con $0 \leq j \leq 3$. Supondré primero que $j = 1, 2$. Si $\overrightarrow{y_{n-2} y_{n-1}}$ (respectivamente $\overleftarrow{y_{n-2} y_{n-1}}$) entonces $\overrightarrow{y_{n-2} y_{n-1} m_j m_{j-1}}$ (resp. $\overleftarrow{y_{n-2} y_{n-1} m_j m_{j+1}}$) y por ser localmente semicompleta en flechas $\overrightarrow{y_{n-2} m_{j-1}}$ (resp. $\overleftarrow{y_{n-2} m_{j+1}}$), una contradicción. Supondré sin pérdida de generalidad por la dualidad que $j = 0$. Si $\overrightarrow{y_{n-1} m_0}$ (respectivamente $\overleftarrow{y_{n-1} m_0}$) tendría que $\overrightarrow{y_{n-1} m_0 m_3 m_2}$ (resp. $\overleftarrow{y_{n-1} m_0 m_1 m_2}$) y por ser localmente semicompleta $\overrightarrow{y_{n-1} m_2}$, lo cual nos remite al caso anterior. La línea anterior también muestra que w es adyacente a un vértice interior de \mathcal{L}_3 . Se sigue que $d_{UG(D)}(w, \{m_1, m_2\}) \leq 1$, así $d_{UG(D)}(w, \mathcal{L}_3) \leq 1$. \square

Corolario 2.3.2 (Bang-Jensen [3]). *Dadas D una digráfica conexa localmente semicompleta en flechas y D' cualquier subdigráfica no trivial y fuertemente conexa de D . Todo vértice $x \in V_D \setminus V_{D'}$ es adyacente a algún vértice en $V_{D'}$.*

Demostración. Basta notar que toda componente fuertemente conexa posee un ciclo dirigido, en particular posee una trayectoria dirigida extensa. \square

Corolario 2.3.3. *Consideremos D una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa. Si posee más de una componente fuertemente conexa inicial (respectivamente terminal) entonces estas son triviales.*

Demostración. Por contrapositiva, dada D' una componente fuertemente conexa no-trivial inicial (respectivamente terminal). Así posee un ciclo dirigido y por tanto un camino dirigido extenso. Por el Lema 2.3.1 para todo vértice $u \in V_D \setminus V_{D'}$ existe $v \in V_{D'}$ tal que \overrightarrow{uv} (resp. \overleftarrow{uv}). Se sigue que es única. \square

Corolario 2.3.4. *Dada D una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa, si posee como subdigráfica $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ ($\overrightarrow{k_1k_2}$, $\overrightarrow{k_2k_3}$, $\overrightarrow{k_1k_3}$ con zk_1 ó k_3z), para todo vértice w en D se tiene que $\overrightarrow{wk_2}$.*

Demostración. Supondré que $\overrightarrow{k_1k_2}$, $\overrightarrow{k_2k_3}$, $\overrightarrow{k_1k_3}$ y, sin pérdida de generalidad por la dualidad, $\overrightarrow{zk_1}$. Tomaré w en D . Por el Lema 2.3.1 w es adyacente a algún vértice de $\{k_1, k_2, k_3\}$, así tengo tres posibilidades.

- Si $\overrightarrow{wk_2}$ ya está.
- Supondré que $\overrightarrow{wk_1}$. Consideraré primero que $\overrightarrow{wk_1}$. Si $\overrightarrow{wk_1}$ entonces $\overrightarrow{wk_1k_3k_2}$ y así $\overrightarrow{wk_2}$.
De forma análoga siempre tengo que $\overrightarrow{zk_2}$.
Ahora consideraré $\overleftarrow{wk_1}$. Así tengo que $\overleftarrow{k_3k_2k_1w}$ y entonces $\overleftarrow{k_3w}$. Si $\overrightarrow{zk_2}$ ó $\overrightarrow{k_3w}$ tendría que $\overleftarrow{k_2zk_1w}$ ó $\overleftarrow{k_2k_1k_3w}$ y por lo tanto $\overleftarrow{k_2w}$. Así supondré $\overleftarrow{zk_2}$ y $\overleftarrow{k_3w}$. Como $\overleftarrow{zk_2k_1k_3}$ entonces $\overleftarrow{zk_3}$. Se sigue que $\overleftarrow{k_2zk_3w}$ y entonces $\overleftarrow{k_2w}$.
- Finalmente supondré que $\overleftarrow{wk_3}$. Si $\overleftarrow{wk_3}$ tendría que $\overleftarrow{wk_3k_1k_2}$ y así $\overleftarrow{wk_2}$. De otro modo tendría $\overleftarrow{wk_3}$, $\overleftarrow{wk_3k_2k_1}$ y así $\overleftarrow{wk_1}$, el caso previo.

\square

Lema 2.3.5. *Consideremos D una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa. Si D no es bipartita (respectivamente es bipartita) y posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ (resp. \mathcal{L}_3) como subdigráfica entonces para cualesquiera dos vértices (resp. de partes distintas) u, v que satisfagan*

$$d^+(u)d^-(u) + d^+(v)d^-(v) \neq 0$$

se tiene que son adyacentes.

Demostración. Supondré primero que D no es bipartita y, por hipótesis y sin pérdida de generalidad por la dualidad, que posee \mathcal{L}_2^{+1} con $\overrightarrow{k_0k_1}$, $\overrightarrow{k_1k_2}$, $\overrightarrow{k_2k_3}$, $\overrightarrow{k_1k_3}$ y tomaré vértices u, v en D que satisfagan la hipótesis (ver Figura 2.6). Por el Lema 2.3.1 existen $\overrightarrow{uk_2}$ y $\overrightarrow{vk_2}$. Por hipótesis y sin pérdida de generalidad supondré que existen z_0, z_1 tales que $\overrightarrow{z_0u}$ y $\overrightarrow{uz_1}$. Supongamos primero que $k_2 \neq z_0, z_1$. Por el Lema 2.3.1 existen $\overrightarrow{z_0k_2}$ y $\overrightarrow{z_1k_2}$. Si $\overrightarrow{vk_2}$ (respectivamente $\overleftarrow{vk_2}$) tendría que $\overrightarrow{v}k_2z_1\overleftarrow{u}$ (resp. $\overleftarrow{v}k_2z_0\overrightarrow{u}$) y así \overrightarrow{uv} . De otra forma supondré sin pérdida de generalidad por la dualidad que $k_2 = z_0$. Si $\overrightarrow{vk_2}$ se sigue como el caso anterior. Así supondré que $\overleftarrow{vk_2}$. Tengo que $\overleftarrow{k_3k_1k_2}\overrightarrow{u}$ y así $\overleftarrow{k_3u}$. Si $\overleftarrow{k_3u}$ entonces tengo que $D[k_1, k_2, u, k_3]$ contiene una copia de \mathcal{L}_2^{+1} y por Corolario 2.3.4 tengo que \overrightarrow{uv} . Si en cambio tengo que $\overrightarrow{k_3u}$ entonces $\overleftarrow{u}k_3k_2\overrightarrow{v}$ y así \overrightarrow{uv} .

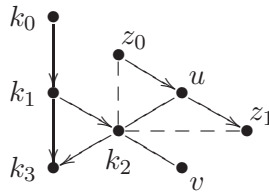


Figura 2.6: Primera parte del Lema 2.3.5

Demostraré el segundo caso, supondré que D es bipartita y que posee \mathcal{L}_3 como subdigráfica, así $\overrightarrow{m_0m_1}$, $\overrightarrow{m_1m_2}$, $\overrightarrow{m_2m_3}$, $\overrightarrow{m_0m_3}$ en D (ver Figura 2.7). Tomemos vértices u, v en D en partes distintas. Por el Lema 2.3.1 u, v son adyacentes a, por lo menos, un vértice interior de \mathcal{L}_3 y puesto que D es bipartita y están en partes distintas, supongamos sin pérdida de generalidad por la dualidad que $\overrightarrow{um_1}$ y $\overrightarrow{vm_2}$. Supondré, por hipótesis y sin pérdida de generalidad, que existen z_0, z_1 tales que $\overrightarrow{z_0u}$ y $\overrightarrow{uz_1}$. Consideraré primero que $m_1 \neq z_0, z_1$. Por el Lema 2.3.1 y puesto que están en una parte distinta a la de u , tenemos que $\overrightarrow{z_0m_2}$ y $\overrightarrow{z_1m_2}$. Si $\overrightarrow{vm_2}$ (respectivamente $\overleftarrow{vm_2}$) tendría que $\overrightarrow{v}m_2z_1\overleftarrow{u}$ (resp. $\overleftarrow{v}m_2z_0\overrightarrow{u}$) y así \overrightarrow{uv} . Finalmente supondré, sin pérdida de generalidad por la dualidad, que $m_1 = z_0$. Si $\overrightarrow{vm_2}$ se sigue como el caso anterior. Si en cambio tengo $\overleftarrow{vm_2}$ entonces tendría $\overleftarrow{u}m_1m_2\overrightarrow{v}$ y así \overrightarrow{uv} .

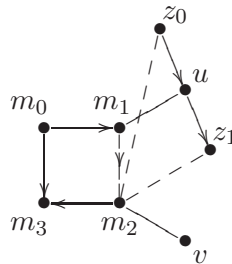


Figura 2.7: Segunda parte del Lema 2.3.5

Si $z_0 = z_1$ la prueba es la misma. \square

Corolario 2.3.6 (Bang-Jensen [2]). *Consideraré D una digráfica localmente semicompleta y conexa pero no fuertemente conexa. Si todo vértice de D está en algún ciclo dirigido entonces es semicompleta o bipartita semicompleta.*

Demostración. Ya que todo vértice u está en algún ciclo dirigido tenemos entonces que

$$d^-(u)d^+(u) \neq 0,$$

así el resultado se sigue del lema inmediato anterior. \square

Llamemos \mathcal{C}_3^* al 3-ciclo dirigido con una flecha simétrica (ver Figura 2.8).

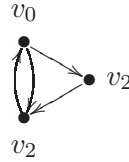


Figura 2.8: \mathcal{C}_3^*

Lema 2.3.7. *Dada D una digráfica localmente semicompleta en flechas, conexa y si tiene al menos cuatro vértices entonces posee por lo menos una flecha simétrica. D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre si y sólo si es:*

1. *subdigráfica de la digráfica completa de tres vértices,*
2. *$\mathcal{C}_3^*[E_1, E_n, E_1]$ ó*
3. *subdigráfica semicompleta de $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_{m_1}, E_{m_2}], E_{m_3}]_2^{\mathcal{P}}$ donde \vec{P}_1 es la 2-trayectoria dirigida, $m_1 = 1$ y si $m_2 > 1$ entonces la bipartición es $\mathcal{P} = \{E_{m_1}, E_{m_0} \cup E_{m_2} \cup E_{m_3}\}$.*

Demostración. Si D posee a lo más tres vértices entonces claramente D es subdigráfica de la digráfica completa de tres vértices.

Supondré que D posee al menos cuatro vértices y al menos una flecha simétrica. Tomaré $\vec{u}\vec{v}$. Como es un camino dirigido extenso, por el Lema 2.3.1 tengo que $V_D = N(u) \cup N(v)$.

$N^-(u) \setminus \{v\}$ es independiente, pues de existir $p, q \in N^-(u) \setminus \{v\}$ tal que $\vec{p}\vec{q}$ tendría que $D[p, q, v]$ posee una copia de $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$. Análogamente para la ex-vecindad de u y también intercambiando u y v .

Mostremos ahora que $N(u) \setminus \{v\}$ (análogamente intercambiando u y v) es independiente. De existir $p \in N^-(u) \setminus \{v\}$ y $q \in N^+(u) \setminus \{v\}$ tales que $\vec{p}\vec{q}$ consideraré dos casos: $D[p, q, u]$ contiene a \vec{C}_3 ó a TT_3 . En el primer caso tendría $\vec{q}\vec{p}\vec{u}\vec{v}$ entonces $\vec{q}\vec{v}$. Así $D[q, p, u, v]$

contiene tanto $\mathcal{L}_3^{\pm 1}$ como \mathcal{L}_3 (sin importar la orientación de \overrightarrow{qv}), una contradicción. En el segundo caso $D[p, q, u, v]$ contiene $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$, una contradicción.

Finalmente mostraré que no existen flechas entre $N(u) \setminus \{v\}$ y $N(v) \setminus \{u\}$. Supondré que existen $p \in N(u) \setminus \{v\}$ y $q \in N(v) \setminus \{u\}$ tales que \overrightarrow{pq} y demostraré que $D[p, q, u, v]$ posee \mathcal{L}_3 como subdigráfica. Si (u, p, q, v) ó (v, q, p, u) es una trayectoria dirigida, ya está considerando \overrightarrow{uv} ó \overleftarrow{uv} . Si (u, p, q, v) contiene una subtrayectoria dirigida de longitud dos, sin pérdida de generalidad por la dualidad consideremos que (u, p, q) es una trayectoria dirigida entonces considerando \overrightarrow{vu} y \overrightarrow{vq} ya está. Finalmente si (u, p, q, v) es antidirigida, supongamos sin pérdida de generalidad por la dualidad que \overleftarrow{up} , \overrightarrow{pq} , \overleftarrow{qv} , basta considerar \overrightarrow{uv} . Así $D[p, q, u, v]$ contiene \mathcal{L}_3 , una contradicción.

Ahora consideraré dos casos: $(N(u) \cap N(v)) \setminus \{u, v\}$ es o no vacía.

- Si existe $p \in (N(u) \cap N(v)) \setminus \{u, v\}$ consideraré dos casos: \overrightarrow{up} , \overrightarrow{vp} ó \overleftarrow{up} , \overleftarrow{vp} (las otras dos posibilidades se siguen por dualidad).

Supondré primero que \overrightarrow{up} , \overrightarrow{vp} . Como D tiene al menos cuatro vértices, existe q tal que \overrightarrow{qv} ó \overleftarrow{qu} . Sin pérdida de generalidad por la dualidad supondré que \overrightarrow{qu} . Si \overrightarrow{qu} entonces $D[q, u, v, p]$ contiene $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$, una contradicción. Si en cambio tengo que \overleftarrow{qu} entonces $\overleftarrow{q} \overleftarrow{uv} \overrightarrow{p}$ y así \overrightarrow{qp} . Así $D[q, p, u, v]$ contiene $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$, una contradicción.

Ahora supondré que \overleftarrow{up} , \overleftarrow{vp} . Por hipótesis existe al menos otro vértice en D . Si existe q tal que \overrightarrow{qu} ó \overrightarrow{vq} entonces $D[q, p, u, v]$ contiene $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$. Así para todo $x \in V_D \setminus \{u, v, p\}$ tengo que \overrightarrow{ux} ó \overleftarrow{xv} . Pero como $\overleftarrow{x} \overrightarrow{up} \overrightarrow{v}$ ó $\overleftarrow{x} \overleftarrow{vp} \overleftarrow{u}$ siempre tengo ambas flechas. Así $D \cong \mathcal{C}_3^*[E_1, V_D \setminus \{u, v, p\}, E_1]$.

- Finalmente supondré que $(N(u) \cap N(v)) \setminus \{u, v\} = \emptyset$. Si $N^+(u) \setminus \{v\} \neq \emptyset$ entonces $N^+(v) \setminus \{u\} = \emptyset$ pues de otra forma tendría $p \in N^+(u) \setminus \{v\}$ y $q \in N^+(v) \setminus \{u\}$ y así $\overleftarrow{p} \overleftarrow{uv} \overrightarrow{q}$ y así \overrightarrow{pq} , una contradicción. De forma análoga con las in-vecindades.

Por último, sin pérdida de generalidad por la dualidad, tengo dos posibilidades: $N(v) \setminus \{u\} = \emptyset$ ó $N^-(u) \setminus \{v\} \neq \emptyset$, $N^+(v) \setminus \{u\} \neq \emptyset$ (y así $N^-(v) \setminus \{u\} \neq \emptyset$, $N^+(u) \setminus \{v\} \neq \emptyset$). En el primer caso si considero $E_{m_2} = \{w \in V_D : \overrightarrow{uw}\}$, $E_{m_0} = N^-(u) \setminus E_{m_2}$ y $E_{m_3} = N^+(u) \setminus E_{m_2}$ con $\mathcal{P}(E_{m_0}) = \{\emptyset, E_{m_0}\}$, $\mathcal{P}(\overrightarrow{C}_2[E_1, E_{m_2}]) = \{E_1, E_{m_2}\}$ y $\mathcal{P}(E_{m_3}) = \{\emptyset, E_{m_3}\}$ tengo que D es, dependiendo de cuales de los conjuntos anteriores son vacíos pero no todos pueden serlo, puesto que posee al menos cuatro vértices, $\overrightarrow{C}_2[E_1, E_{m_2}]$, $\overrightarrow{P}_1[E_{m_0}]$, $\overrightarrow{C}_2[E_1, E_{m_2}]_2$, $\overrightarrow{P}_1[\overrightarrow{C}_2[E_1, E_{m_2}], E_{m_3}]_2$ ó $\overrightarrow{P}_2[E_{m_0}]$, $\overrightarrow{C}_2[E_1, E_{m_2}, E_{m_3}]_2$. En el segundo caso si considero $E_{m_0} = N^-(u) \setminus \{v\}$ y $E_{m_1} = N^-(u) \setminus \{v\}$ con $\mathcal{P}(E_{m_0}) = \{E_{m_0}, \emptyset\}$ y $\mathcal{P}(E_{m_1}) = \{\emptyset, E_{m_1}\}$ tengo que $D \cong \overrightarrow{P}_2[E_{m_0}, \overrightarrow{C}_2, E_{m_1}]_2$.

En el caso de la necesidad, es claro que todas las digráficas de la lista son localmente semicompletas en flechas y $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libres. \square

Proposición 2.3.8. *Tomaré D una digráfica localmente semicompleta en flechas, conexa, $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre y sin flechas simétricas. Si no es fuertemente conexa entonces todas sus*

componentes fuertemente conexas son triviales.

Demostración. Procederé por contrapositiva, i.e. supondré que posee una componente fuertemente conexa no-trivial distinta de D , le llamaré D' . Puesto que por hipótesis D no posee flechas simétricas, puedo suponer que D' posee un ciclo dirigido de longitud tres. Llamaré $C = (x_0, \dots, x_m = x_0)$ a tal ciclo. Tomaré $w \in V_D \setminus V_{D'}$. Por el Lema 2.3.1 existe j tal que $\overrightarrow{wx_j}$. Sin pérdida de generalidad por la dualidad supondré que $\overrightarrow{wx_j}$. Así tendría $\overrightarrow{wx_jx_{j-1}x_{j-2}}$ (j módulo m) y entonces, por ser D' localmente semicompleta en flechas y componente fuertemente conexa, $\overrightarrow{wx_{j-2}}$. Así $D[w, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]$ contiene a \mathcal{L}_3 como subdigráfica, por lo tanto no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. \square

Lema 2.3.9. *Consideraré D una digráfica localmente semicompleta en flechas, conexa y sin flechas simétricas. D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre si y sólo si es:*

1. *subdigráfica de la extensión de una flecha,*
2. *$TT_3[E_1, E_n, E_1]$,*
3. *la extensión de un ciclo dirigido (de longitud al menos tres) o de una trayectoria dirigida (de longitud al menos dos).*

Demostración. Demostraré la suficiencia. Supondré primero que D no posee trayectorias dirigidas de longitud dos. Así D es subdigráfica de la extensión de una flecha.

Supondré que D posee al menos una trayectoria dirigida de longitud dos. Por la Proposición 2.3.8 si D no es fuertemente conexa entonces todas sus componentes fuertemente conexas son triviales.

Consideraré $P = (x_0, \dots, x_n)$ un camino dirigido, de longitud al menos dos, extenso e inducido salvo quizá $\overrightarrow{x_nx_0}$ o, de tener longitud exactamente dos, salvo $\overrightarrow{x_0x_2}$. Por el Lema 2.3.1 todo vértice de D es adyacente a P . Así puedo definir (haciendo una elección cuando sea necesario)

$$\phi_P : V_D \rightarrow V_P$$

que satisfaga que si $\phi_P(w) = x_j$ entonces $\overrightarrow{x_{j-1}w}$ ó $\overrightarrow{wx_{j+1}}$. Mostraré que siempre se tienen ambas flechas (siempre que los vértices respectivos en P existan) y que ϕ_P es única.

Dado $w \in V_D \setminus V_T$ supondré que $\overrightarrow{x_{j-1}w}$ con $j \in \{0, \dots, n\}$. Demostraré que existe $\overrightarrow{wx_{j+1}}$ (siempre que exista x_{j+1}). En caso de que P sea un ciclo, consideraré j módulo n . Tengo $\overrightarrow{wx_{j-1}x_jx_{j+1}}$ y de aquí $\overrightarrow{wx_{j+1}}$. Si $\overrightarrow{wx_{j+1}}$ entonces $D[w, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$ posee una copia de \mathcal{L}_3 , lo cual es una contradicción. Así tengo que $\overrightarrow{wx_{j+1}}$. Análogamente si tengo que $\overrightarrow{wx_{j+1}}$ y existe x_{j-1} entonces $\overrightarrow{x_{j-1}w}$.

Demostraré que no pueden existir $i, j \in \{0, \dots, n\}$ con $i < j$ tales que $\overrightarrow{wx_i}$ y $\overrightarrow{wx_j}$. Supondré pues que existen. Por lo anterior notemos que existen $\overrightarrow{x_{i-2}w}$ y $\overrightarrow{x_{j-2}w}$ siempre que existan x_{i-2} ó x_{j-2} (este último siempre existe puesto que por ser P extensa tengo que $j > i > 0$). Consideraré tres casos: $j = i + 1$, $j = i + 2$ y $j > i + 2$.

- Supondré primero que $j = i + 1$. Así tendría que $\overrightarrow{x_{j-2}w}, \overrightarrow{wx_i}, \overrightarrow{x_ix_j}$ y $\overrightarrow{wx_j}$ forman una copia $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ en D , una contradicción.
- Si $j = i + 2$ entonces $\overrightarrow{wx_i}, \overrightarrow{x_ix_{i+1}}, \overrightarrow{x_{i+1}x_j}$ y $\overrightarrow{wx_j}$ forman una copia de \mathcal{L}_3 en D , una contradicción.
Si P es de longitud tres, bastan los dos casos previos. Así puedo suponer que no es de longitud tres.
- Si $j > i + 2$ entonces tendría $\overleftarrow{x_{i+1}x_iw}x_j$ y así $\overrightarrow{x_{i+1}x_j}$, que contradice que P sea inducido (salvo quizá $\overrightarrow{x_nx_0}$).

Se sigue que ϕ_P es única.

Para cada $j \in \{0, \dots, n\}$, $\phi_P(x_j)^{-1}$ es independiente en D . De no serlo tendría $u, v \in \phi_P(x_j)^{-1}$ para algún j con \overrightarrow{uv} . Así tendría que $D[x_{j-1}, u, v, x_{j+1}]$, $D[x_{j-2}, x_{j-1}, u, v]$ ó $D[u, v, x_{j+1}, x_{j+2}]$ (tomaré j módulo $n + 1$ en caso de existir $\overrightarrow{x_nx_0}$) posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ como subdigráfica.

Si $u \in \phi_P(x_j)^{-1}$ y $v \in \phi_P(x_{j+1})^{-1}$ entonces \overrightarrow{uv} . Sin pérdida de generalidad por la dualidad supondré que existe x_{j+2} (consideraré j módulo $n + 1$ en caso de existir $\overrightarrow{x_nx_0}$). Así tengo que $\overrightarrow{u}x_{j+1}x_{j+2}\overleftarrow{v}$ y ya que D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre, \overrightarrow{uv} .

Primero supondré que P es de longitud dos y existe $\overrightarrow{x_0x_2}$. $\phi_P^{-1}(x_0) = x_0$ y $\phi_P^{-1}(x_2) = x_2$, pues si $u \neq x_0$ y $u \in \phi_P^{-1}(x_0)$ entonces $\overrightarrow{x_0}x_2x_1\overleftarrow{u}$ y así $\overrightarrow{x_0u}$, una contradicción. Así $D \cong TT_3[E_1, \phi_P^{-1}(x_2), E_1]$.

De otra forma tengo que ϕ_P determina un homomorfismo de D en P (respectivamente en $P \cup \overrightarrow{x_nx_0}$) suprayectivo en vértices tal que $\phi_P(x_j)^{-1} \Rightarrow \phi_P(x_{j+1})^{-1}$. Por el punto 2 del Lema 2.1.2 D es la extensión de un trayectoria dirigida de longitud al menos dos o de un ciclo dirigido de longitud al menos tres.

Ahora demostraré la suficiencia. Si D es subdigráfica de la extensión de un ciclo ó $TT_3[E_1, \phi_P^{-1}(x_2), E_1]$ entonces claramente es localmente semicompleta en flechas y $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. En otro caso, por el inciso 2 del Lema 2.1.2 existe una trayectoria dirigida extensa e inducida $P = (x_0, \dots, x_n)$ (salvo quizá $\overrightarrow{x_0x_n}$ y de longitud al menos dos) y un homomorfismo de digráficas $\phi_P : D \rightarrow P$. Pero no existen homomorfismos de $\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3$ a P , por lo tanto D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. □

Corolario 2.3.10. *Si D es una digráfica localmente semicompleta en flechas, conexa, no bipartita y no $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre entonces posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ como subdigráfica.*

Demostración. Si posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ ya está. Así supondré que posee \mathcal{L}_3 , tomaré $\overrightarrow{m_0m_1}, \overrightarrow{m_1m_2}, \overrightarrow{m_2m_3}$ y $\overrightarrow{m_0m_3}$. Por el Lema 2.3.1 todos los vértices de D son adyacentes por lo menos a un vértice interior de \mathcal{L}_3 , a saber m_1 ó m_2 . Así tengo que $N(m_1) \cup (N(m_2) \setminus N(m_1)) = V_D$. Noto que $m_1 \in N(m_2)$ y $m_2 \in N(m_1)$. Por hipótesis D no es bipartita entonces $N(m_1)$

ó $N(m_2)$ no son independientes. Sin pérdida de generalidad por la dualidad supondré que $u, v \in N(m_1)$ y \overline{uv} .

Si $\overrightarrow{um_1}, \overrightarrow{vm_1}$ (en tal caso $m_2 \neq u, v$) ó $\overleftarrow{um_1}, \overleftarrow{vm_1}$ (en tal caso $m_0 \neq \{u, v\}$) entonces $D[u, v, m_1, m_2]$ ó $D[m_0, u, v, m_1]$ contiene $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ como subdigráfica. Así puedo suponer, sin pérdida de generalidad por la dualidad, que $\overrightarrow{m_1u}$ y $\overleftarrow{m_1v}$.

(*) Si $\{u, v\} \subseteq \{m_0, m_2, m_3\}$ entonces $D[m_0, m_1, m_2, m_3]$ posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ como subdigráfica puesto que posee una diagonal.

Si $m_3 \in \{u, v\}$ se sigue como el caso (*). Así consideraré dos casos: $\{u, v\} \cap \{m_0, m_3\} = \emptyset$ ó $\{u, v\} \cap \{m_2, m_3\} = \emptyset$.

- Supondré que $\{u, v\} \cap \{m_0, m_3\} = \emptyset$. Supondré \overrightarrow{uv} (respectivamente \overleftarrow{uv}), así $\overrightarrow{uvm_1m_0}$ (resp. $\overleftarrow{uvm_1m_0}$) entonces $\overrightarrow{um_0}$ (resp. $\overleftarrow{vm_0}$). Si $\overleftarrow{um_0}$ entonces $D[m_0, m_1, u, v]$ (resp. $D[v, m_0, m_1, u]$) contiene una copia de $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$. Si en cambio tengo que $\overrightarrow{um_0}, \overleftarrow{m_0um_1m_2}$ y así $\overrightarrow{m_0m_2}$, el caso (*).
- Supondré que $\{u, v\} \cap \{m_2, m_3\} = \emptyset$. Supondré \overrightarrow{uv} (respectivamente \overleftarrow{uv}), así $\overleftarrow{vum_1m_2}$ (resp. $\overrightarrow{vum_1m_2}$) entonces $\overrightarrow{vm_2}$ (resp. $\overleftarrow{um_2}$). Si $\overleftarrow{vm_2}$ entonces $D[u, v, m_1, m_2]$ (respec. $D[m_1, m_2, u, v]$) posee una copia de $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$. Si en cambio $\overleftarrow{vm_2}$ tendría $\overleftarrow{m_1vm_2m_3}$ y así $\overrightarrow{m_1m_3}$, el caso (*).

□

Nota. Los Lemas 2.3.7 y 2.3.9 caracterizan las digráficas localmente semicompletas en flechas que son $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libres. Cuando no son fuertemente conexas los casos 1, 4 y 5 del Lema 2.3.7 y 1 del Lema 2.3.9 y cuando son fuertemente conexas el resto de los casos.

Corolario 2.3.11. *Si D es una digráfica semicompleta (respectivamente bipartita semicompleta) y posee al menos cuatro vértices (resp. y no es de la forma 3, 4 y 5 del Lema 2.3.7 ó 1 y 3 del Lema 2.3.9) entonces no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre.*

Demostración. Procederé por contradicción, supondré que D es semicompleta (resp. bipartita semicompleta), que posee al menos cuatro vértices y que es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. Recordemos que toda digráfica semicompleta o bipartita semicompleta es localmente semicompleta en flechas.

Supondré primero que D es semicompleta. Entonces posee una trayectoria dirigida de longitud al menos tres. Pero las únicas digráficas localmente semicompletas, no bipartitas y con al menos una trayectoria dirigida de longitud tres por los Lemas 2.3.7 y 2.3.9 son las extensiones de trayectorias dirigidas o de ciclos dirigidos, pero cuando poseen al menos cuatro vértices tienen un número de independencia de al menos dos, una contradicción.

Supondré ahora que D es bipartita. Si posee al menos una flecha simétrica como es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre entonces es de la forma 3, 4 y 5 del Lema 2.3.7. Si no posee flechas

simétricas como es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre entonces es de la forma 1 ó 3 del Lema 2.3.9. De otra forma no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. \square

Corolario 2.3.12. *Si D es una digráfica localmente semicompleta en flechas, conexa, no $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre y no bipartita entonces tiene una única componente fuertemente conexa inicial y una única final.*

Demostración. Procederé por contradicción, supondré que posee más de una componente fuertemente conexa inicial (respectivamente terminal). Por el Corolario 2.3.3 estas son triviales, les llamaré x_0, \dots, x_n . Por el Corolario 2.3.10 D posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ como subdigráfica, sin pérdida de generalidad por la dualidad supondré que $\overrightarrow{k_0k_1}, \overrightarrow{k_1k_2}, \overrightarrow{k_2k_3}$ y $\overrightarrow{k_1k_3}$. Para $i, j \in \{0, \dots, n\}$ con $i < j$, por el Corolario 2.3.4 $\overrightarrow{x_ik_2}, \overrightarrow{x_jk_2}$ (resp. $\overleftarrow{x_ik_2}, \overleftarrow{x_jk_2}$). Así $\overrightarrow{x_jk_2k_3k_1}$ (resp. $\overleftarrow{x_jk_2k_1k_3}$) y como x_j es inicial (resp. terminal) $\overrightarrow{x_jk_1}$ (resp. $\overleftarrow{x_jk_3}$). Tengo que $\overrightarrow{x_ik_2k_1\overleftarrow{x_j}}$ (resp. $\overleftarrow{x_ik_2k_3\overrightarrow{x_j}}$) y así $\overrightarrow{x_ix_j}$, una contradicción. \square

Corolario 2.3.13. *Tomaré D una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa con al menos una trayectoria dirigida de longitud cuatro. D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre si y sólo si todo x_0x_n -camino dirigido extenso de longitud mínima es inducido, salvo quizá por $\overrightarrow{x_nx_0}$.*

Demostración. Demostraré la necesidad por contrapositiva, i.e. supondré que posee $\mathcal{L}^{\pm 1}$ ó \mathcal{L}_3 como subdigráfica. Tomaré un camino dirigido extenso de longitud al menos cuatro (por hipótesis existe) $P = (x_0, \dots, x_n)$. Por el Lema 2.3.5 existe $\overrightarrow{x_0x_3}$, por lo tanto no es inducido.

Ahora demostraré la suficiencia. Supondré que D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre, así por el Lema 2.3.9 D es la extensión de una trayectoria o de un ciclo dirigido y por el inciso 4. iii) tengo el resultado. \square

Corolario 2.3.14 (Bang-Jensen [3]). *Dada D una digráfica fuertemente conexa y localmente semicompleta en flechas, si contiene un ciclo dirigido inducido de longitud al menos cinco entonces es la extensión de un ciclo.*

Demostración. Basta notar que todo ciclo dirigido inducido de longitud al menos cinco posee una trayectoria dirigida extensa e inducida de longitud al menos cuatro. \square

Teorema 2.3.15. *Consideraré D una digráfica conexa. D satisface que:*

- es localmente semicompleta en flechas,
- si posee al menos cuatro vértices entonces no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}\}$ -libre y
- si sus componentes fuertemente conexas inicial y terminal son triviales entonces son adyacentes (respectivamente no son adyacentes)

si y sólo si es una digráfica semicompleta (resp. es de la forma $\overrightarrow{P}_2[E_1, D', E_1]$ donde D' es semicompleta no-trivial).

Demostración. Demostraré la suficiencia. Ya que posee $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ como subdigráfica, por los Corolarios 2.3.3 y 2.3.12 posee una única componente fuertemente conexa inicial y una única terminal, llamémosles D_0 y D_n respectivamente. Para cualquier vértice u intermedio en D se tiene que

$$d^-(u)d^+(u) \neq 0. \quad (*)$$

Así $D' = D[V_D \setminus \{V_{D_0} \cup V_{D_n}\}]$ es semicompleta por el Lema 2.3.5. Si D_0 ó D_n es no trivial entonces sus vértices satisfacen la condición (*) y por el Lema 2.3.5 D es semicompleta. Si ambas son triviales pero son adyacentes entonces D es semicompleta. De otra forma por el Lema 2.3.5 tengo que $D_0 \Rightarrow D'$ y $D' \Rightarrow D_n$, así $D \cong \vec{P}_2[E_1, D', E_1]$. D' no es trivial por ser D no-bipartita.

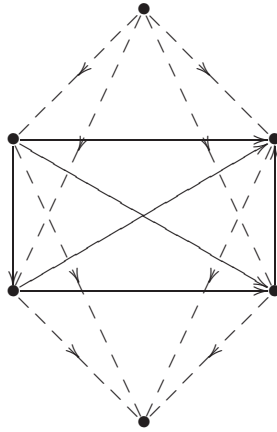


Figura 2.9: $\vec{P}_2[E_1, D', E_1]$

Ahora mostraré la necesidad, tomaré D una digráfica semicompleta. Claramente es localmente semicompleta en flechas. Si sus componentes fuertemente conexas inicial y terminal son triviales entonces son adyacentes. Si D posee al menos cuatro vértices entonces por el Corolario 2.3.11 D no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. Ya que D no es bipartita, por el Corolario 2.3.10 D no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}\}$ -libre. Finalmente supondré que D es de la forma $\vec{P}_2[E_1, D', E_1]$. Es claro que tal digráfica es localmente semicompleta en flechas. Por el Lema 2.3.9 y el Corolario 2.3.10 no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}\}$ -libre. \square

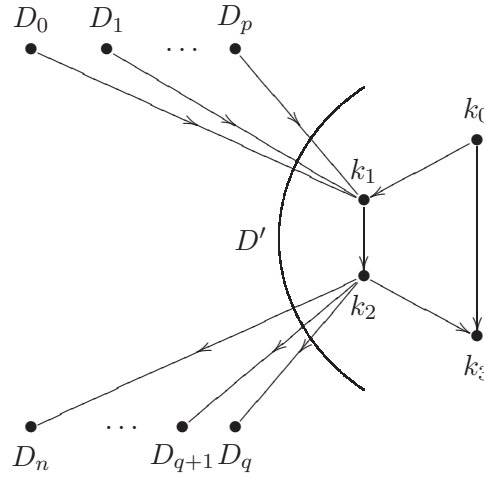
Teorema 2.3.16. Consideraré D una digráfica. D satisface las siguiente dos proposiciones:

- es localmente semicompleta en flechas, conexa y bipartita y
- si D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre entonces es de la forma:
 - i. $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_{m_1}, E_{m_2}], E_{m_3}]_2^P$ donde \vec{P}_1 es la 2-trayectoria dirigida, $m_1 = 1$ y si $m_2 > 1$ entonces la bipartición es $\mathcal{P} = \{E_{m_1}, E_{m_0} \cup E_{m_2} \cup E_{m_3}\}$,

- ii. una subdigráfica bipartita semicompleta de la anterior ó
- iii. la extensión de una 1- ó 2-trayectoria dirigida o de un 4-ciclo dirigido

si y sólo si es bipartita semicompleta o existe una digráfica bipartita semicompleta D' (pudiendo ser una digráfica sin flechas) tal que $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2 \leq D \leq \vec{T}_3[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2$.

Demostración. Demostraré la suficiencia. Si D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre basta notar, en el primer caso, que $\vec{C}_2[E_{m_1}, E_{m_2}]$ es bipartita semicompleta. Si es subdigráfica completa de $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_{m_1}, E_{m_2}], E_{m_3}]_2^P$ ó es una de la digráficas enunciadas en el inciso iii. tengo que es bipartita semicompleta. Así supondré que D no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. Así les llamaré $\overrightarrow{k_0k_1}$,



$\overrightarrow{k_1k_2}$, $\overrightarrow{k_2k_3}$ y $\overrightarrow{k_0k_3}$. Llamaré D_0, \dots, D_p (respectivamente D_q, \dots, D_n) a las componentes fuertemente conexas iniciales (resp. terminales) de D con $D'_0 = \cup_{i=0}^p D_i$ y $D'_n = \cup_{i=q}^n D_i$. Si posee más de una (iniciales o terminales) por el Corolario 2.3.3 estas son triviales y por el Lema 2.3.1 son adyacentes sólo a k_1 ó sólo a k_2 pues de otro modo por ser localmente semicompleta en flechas tendríamos que alguna no es inicial o terminal. Si una componente fuertemente conexas inicial o terminal (D'_0 ó D'_n) no es trivial, por el Lema 2.3.1 es única y por el Lema 2.3.5 tengo que 2-domina o es 2-dominado por $\{k_1, k_2\}$. Así $D'_0 \Rightarrow_2 \{k_1, k_2\}$ y $\{k_1, k_2\} \Rightarrow_2 D'_n$. Sea $D' = D[V_D \setminus \{V_{D'_0} \cup V_{D'_n}\}]$. Ya que todo vértice $u \in V_D \setminus \{V_{D'_0} \cup V_{D'_n}\}$ satisface que $d^-(u)d^+(u) \neq 0$ (en D) por el Lema 2.3.5 tengo que $D'_0 \Rightarrow_2 D' \Rightarrow_2 D'_n$. Si D'_0 ó D'_n es fuertemente conexas no-trivial entonces por el Lema 2.3.5 $D'_0 \Rightarrow_2 D'_n$ y así D es bipartita semicompleta. De otra forma tengo que $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2 \leq D$ con $E_{m_0} = D'_0$ y $E_{m_2} = D'_n$. Ya que es bipartita tengo por el otro lado que $D \leq \vec{T}_3[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2$.

Ahora mostraré la necesidad. $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2$ es localmente semicompleta en flechas así como las digráficas bipartitas semicompletas. Si D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre entonces por el

Lema 2.3.7 es de la forma i. ó ii. ó por el Lema 2.3.9 es de la forma iii. \square

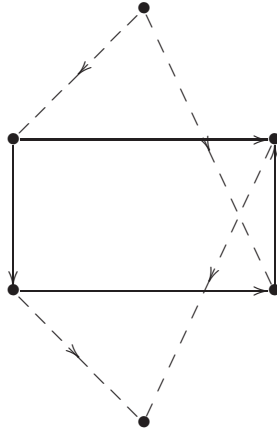


Figura 2.10: $\vec{P}_2[E_1, D', E_1]_2^{\mathcal{P}}$

2.4 Conclusiones

De lo anterior se sigue que,

Teorema 2.4.1. *Si D es una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa entonces es una de las siguientes:*

1. *subdigráfica de la digráfica completa (y por lo tanto simétrica) de tres vértices,*
2. *subdigráfica de la extensión de una flecha,*
3. *subdigráfica bipartita semicompleta de $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_{m_1}, E_{m_2}], E_{m_3}]_2^{\mathcal{P}}$, $m_1 = 1$ y si $m_2 > 1$ entonces la bipartición es $\mathcal{P} = \{E_{m_1}, E_{m_0} \cup E_{m_2} \cup E_{m_3}\}$ (Figuras 1.4 y 1.5),*
4. $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ (Figura 2.8),
5. $TT_3[E_1, E_n, E_1]$,
6. *la extensión de una trayectoria o de un ciclo dirigido (Figuras 2.1 y 2.2),*
7. $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2 \leq D \leq \vec{T}_3[E_{m_0}, D', E_{m_2}]_2$ donde D' es bipartita semicompleta (puede carecer de flechas),
8. $\vec{P}_2[E_1, D', E_1]$ donde D' es semicompleta (Figura 2.10),

9. es bipartita semicompleta o

10. es semicompleta.

Demostración. Consideraré D una digráfica conexa y localmente semicompleta en flechas.

Supondré primero que D es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. Si posee menos de tres vértices o posee una flecha simétrica entonces por el Lema 2.3.7 D es de la forma 1, 3 ó 4. Si en cambio no posee flechas simétricas entonces es de la forma 2, 5 ó 6 por el Lema 2.3.9.

Ahora supondré que D no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}, \mathcal{L}_3\}$ -libre. Si D no es bipartita por el Corolario 2.3.10 no es $\{\mathcal{L}_2^{\pm 1}\}$ -libre. Por el Corolario 2.3.12 y por el Teorema 2.3.15 D es de la forma 8 ó 10. Si D es bipartita entonces por el Teorema 2.3.16 es de la forma 7 ó 9.

Ahora mostraré la necesidad. Todas las digráficas enunciadas son conexas. Si es de la forma 1 ó 2 es localmente semicompleta en flechas por vacuidad. Si es de la forma 6 por el Corolario 2.1.3 es localmente semicompleta en flechas. Si es de la forma 4, 5, 8 ó 10 es localmente semicompleta en flechas por el Teorema 2.3.15. Finalmente si es de la forma 3, 7 ó 9 es localmente semicompleta en flechas por el Teorema 2.3.16. \square

Como corolario tengo el Teorema 2.0.3 de Bang-Jensen [3].

Así la clase de las digráficas localmente semicompletas en flechas es todavía muy cercana a las clases de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas, salvo quizá por las extensiones de trayectorias dirigidas y de ciclos dirigido.

Sin embargo todavía se desconocen las propiedades y caracterizaciones de clases cercanas a las localmente semicompletas en flechas como pueden ser aquellas que satisfacen que toda trayectoria inducida es 1-dirigida (§ 2.2).

Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen. Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments. *J. Graph Theory*, 14:371–390, 1990.
- [2] J. Bang-Jensen. Arc-local tournament digraphs: a generalization of tournaments and bipartite tournaments. Technical Report Preprint no. 2, Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, 1993.
- [3] J. Bang-Jensen. The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.*, 283:1–6, 2004.
- [4] J. Bang-Jensen, Y. Guo, G. Gutin, and L. Volkmann. A classification of locally semicomplete digraphs, 15th british combinatorial conference (stirling, 1995). *Discrete Math.*, 167/168:101–114, 1997.
- [5] J. Bang-Jensen, Y. Guo, and L. Volkmann. Weakly hamiltonian-connected locally semicomplete digraphs. *J. Graph Theory*, 21:163–172, 1996.
- [6] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Vertex heaviest paths and cycles in quasi-transitive digraphs. *Discrete Math.*, 163:217–223, 1996.
- [7] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Generalizations of tournaments: A survey. *J. Graph Theory*, 28:171–202, 1998.
- [8] J. Bang-Jensen and G. Gutin. *Digraphs: theory, algorithms, and applications*. Monographs in mathematics. Springer, 2001.
- [9] J. Bang-Jensen, G. Gutin, and J. Huang. A sufficient condition for a complete multipartite digraph to be hamiltonian. *Discrete Math.*, 161:1–12, 1996.
- [10] J. Bang-Jensen and Y. Gutin. Longest paths and cycles in extended locally semicomplete digraphs. Technical Report Preprint no. 53, Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, 1993.
- [11] J. Bang-Jensen and J. Huang. Quasi-transitive digraphs. *J. Graph Theory*, 20:141–161, 1995.
- [12] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.
- [13] A. Ghouilà-Houri. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arrêtes de maniere à obenir le graphe d'un relation d'ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254:1370–1371, 1962.

-
- [14] Y. Guo. PhD thesis, RTWH Aachen, Germany, 1995.
- [15] Y. Guo. Strongly hamiltonian-connected locally semicomplete digraphs. *J. Graph Theory*, 22:65–73, 1996.
- [16] Y. Guo. Spanning locally tournament digraphs in locally semicomplete digraphs, 4th twente workshop on graphs and combinatorial optimization (enschede, 1995). *Discrete Math.*, 79:119–125, 1997.
- [17] Y. Guo and L. Volkmann. On complementary cycles in locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.*, 135:121–127, 1994.
- [18] Y. Guo and L. Volkmann. Characterizations of vertex pancyclic and pancyclic ordinary complete multipartite digraphs. *Discrete Math.*, 141:153–162, 1995.
- [19] G. Gutin. A criterion for complete bipartite digraphs to be hamiltonian. *Vestsi Acad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 1:99–100, 1984. (In Russian).
- [20] G. Gutin. The radii of n -partite tournaments. *Math. Notes*, 40:743–744, 1986.
- [21] G. Gutin. A characterization of complete n -partite digraphs that have a hamiltonian path. *Kibernetika*, 1:107–108, 1988. (In Russian).
- [22] G. Gutin. m -sources in complete multipartite digraphs. *Vestsi Acad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat.*, 5:101–106, 1989. (In Russian).
- [23] P. Hell, J. Bang-Jensen, and J. Huang. Local tournaments and proper circular-arc graphs. *Springer Lecture Notes in Computer Sci.*, 450:101–108, 1990.
- [24] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to set theory*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. M. Dekker, 1999.
- [25] J. Huang. On the structure of local tournaments. *J. Combinatorial Theory B*, 63:200–221, 1995.
- [26] K. M. Koh and B. P. Tan. The diameter of an orientation of a complete multipartite graph. *Discrete Math.*, 149:131–139, 1996.
- [27] K. M. Koh and B. P. Tan. The minimum diameter of orientations of complete multipartite graphs. *Graphs and Combinatorics*, 12:333–339, 1996.
- [28] L. Volkmann. Multipartite tournaments: A survey. *Discrete Math.*, 307:3097–3129, 2007.
- [29] A. Yeo. One-diregular subgraphs in semicomplete multipartite digraphs. *J. Graph Theory*, 24:1–11, 1997.

-
- [30] C. Q. Zhang. Hamilton paths in multipartite oriented graphs. *Ann. Discrete Math.*, 41:499–514, 1989.
- [31] C. Q. Zhang and C. Zhao. On locally semicomplete digraphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 20:189–192, 1996.
- [32] H. Zhou and X. Zhu. Multiplicativity of acyclic local tournaments. *Combinatorica*, 17:135–145, 1997.