



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACIÓN DE
OPCIONES DE BARRERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

ADRIANA HERRERA OROZCO

TUTOR:

M. EN C. AGUSTÍN ROMÁN AGUILAR

2008





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.

Apellido paterno: Herrera
Apellido materno: Orozco
Nombre (s): Adriana
Teléfono: 56 12 76 99
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela: Facultad de Ciencias
Carrera: Actuaría
No. de cuenta: 096322356

2. Datos del tutor

Grado: M en C
Apellido paterno: Román
Apellido materno: Aguilar
Nombre(s): Agustín

3. Datos del sinodal 1

Grado: Dra.
Apellido paterno: Bernabé
Apellido materno: Rocha
Nombre(s): Araceli

4. Datos del sinodal 2

Grado: Dr.
Apellido paterno: Lorenzo
Apellido materno: Valdés
Nombre(s): Arturo

5. Datos del sinodal 3

Grado: Act.
Apellido paterno: Pérez Tejada
Apellido materno: López
Nombre(s): Fernando Alonso

6. Datos del sinodal 4

Grado: Act.
Apellido paterno: Ramos
Apellido materno: García
Nombre(s): Sandra Cristina

3. Datos del trabajo escrito.

Título: Valuación de opciones exóticas y derivados de crédito
Subtítulo: Valuación de opciones de Barrera
No. de páginas: 53 p
Año: 2008

ÍNDICE

Introducción.....	1
Capítulo I.- Características de las opciones de barrera.....	2
Capítulo II.- Modelos de valuación de las opciones de barrera.....	6
Capítulo III.- Modelos numéricos para la valuación de las opciones de barrera.....	33
Capítulo IV.-Programas en Matlab.....	42
Resultados.....	48
Conclusiones y propuestas.....	52
Bibliografía.....	53

Introducción

Sin duda alguna las opciones de barrera son los derivados exóticos más conocidos y más negociados en los mercados de derivados desarrollados, muy probablemente porque este tipo de opciones suelen ser más baratas que las opciones Vanilla. Por lo anterior este trabajo tiene los siguientes objetivos: que el lector tenga una idea general sobre las opciones de barrera, e implementar diversos modelos de valuación de este tipo de derivados en un programa en Matlab (y concluir a partir de las comparaciones de los resultados, cuál es el método que más conviene utilizar), para cumplir con estos objetivos, el trabajo se desarrolla en 4 capítulos.

En el **capítulo I** se presentan las características generales de las opciones de barrera (entre ellas se menciona por qué son más baratas), su clasificación, las condiciones para el pago, así como algunas estrategias de cobertura en las que son empleadas.

En el **capítulo II** se explican tres modelos analíticos para obtener el precio de estas opciones, uno para las opciones de barrera con monitoreo continuo y los otros dos para las de monitoreo discreto (estas características de monitoreo se explican en el capítulo II), al final se presenta el resultado de aplicar estos modelos a los diferentes tipos de opciones de barrera. Cabe mencionar que a lo largo de este capítulo se busca que el lector con algunos conocimientos de cálculo y probabilidad conozca cómo se obtienen las fórmulas analíticas de estos tres modelos.

En el **capítulo III** se explican tres modelos numéricos (aproximados) de valuación. En primer lugar se presenta el “Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers”, basado en un árbol trinomial, este modelo es empleado para valorar opciones con monitoreo continuo. En segundo lugar se presenta el “Adaptive Mesh Model”, el cual está basado en un árbol trinomial (al que se le insertan más periodos en fechas donde la función del *pay-off* es no lineal), al final se presenta el método de Simulación MonteCarlo para valorar opciones con monitoreo discreto.

En el **capítulo VI** se presenta el código de un programa en Matlab de las fórmulas analíticas y numéricas de valuación de las opciones de barrera, tanto de las que presentan monitoreo continuo y como monitoreo discreto, así como los resultados y conclusiones de ejecutar este programa. De las fórmulas analíticas se presenta el código para valorar opciones con monitoreo continuo y el código de la fórmula (que presenta la corrección al monitoreo continuo) para discretas. De los modelos numéricos se da el código para valorar por el método de Simulación MonteCarlo.

I. Características de las opciones de barrera.

Las opciones de barrera sobre acciones se conocen desde 1967, fecha en la que empezaron a negociarse en los mercados no bursátiles (conocidos como over the counter u OTC). Estas opciones se han vuelto muy conocidas y podría decirse que de las opciones exóticas, son las más populares. En la actualidad las opciones de barrera se negocian en algunas bolsas de valores y en algunos mercados OTC, como ejemplo de las bolsas se tienen: el Chicago Board Option Exchange y el American Option Exchange, en donde se encuentran listadas opciones call *up-and-out* y opciones put *down-and-out* sobre índices bursátiles. En los mercados OTC estas opciones son negociadas activamente sobre diversos subyacentes, entre los que se encuentran las divisas, las tasas de interés y los bienes básicos o commodities.

Las opciones de barrera son muy parecidas a las opciones ordinarias (*vanilla*), existen calls y puts, y por la fecha en que son ejercidas también hay de dos tipos: americanas y europeas; entre las características que distinguen a las opciones de barrera de las *vanilla* destaca la siguiente: las opciones de barrera se desactivan¹ o se activan² si durante el periodo de vida de la opción el precio del activo subyacente toca la barrera.

Otra característica de las opciones de barrera, y por lo que muchas veces son preferidas a las opciones *vanilla*, es que la prima es más barata, esto se debe a que el emisor tiene menor o igual probabilidad de pagar el *pay-off* correspondiente (dada la barrera, los precios que puede tomar el subyacente están acotados) y a que dicho *pay-off* puede ser menor o igual al que se pagaría en la opción *vanilla* (menor, ya que algunas veces está acotado por la barrera).

▪ Clasificación de opciones de barrera:

Las opciones que se desactivan son conocidas en el mercado como “opciones *knock-out*” y las que se activan como “opciones *Knock-in*”, a continuación se presentan de una forma más detallada las características de estas opciones:

- Las opciones *knock-out*, como ya se mencionó empiezan su vida como opciones *vanilla* (opciones activas), ya sea del tipo call o put, y se desactivan cuando el precio spot cruza un nivel predeterminado llamado “*la barrera*”. Algunas de estas opciones que terminan inactivas, dan al tenedor el derecho de recibir un rebate (una compensación por haber entrado en el contrato, que generalmente es un porcentaje de la prima).

A continuación se menciona un ejemplo: suponga que se emite una opción call europea sobre un subyacente el cual tiene un precio spot de 100, y una barrera de 110, esta opción funciona como un call europeo siempre y cuando el precio spot no tome o rebase el precio de 110, cuando lo toma o lo rebasa la opción es “*knocked-out*” y el contrato queda sin valor. La opción no se

¹ Estas opciones comienzan como una *vanilla*, es decir, el tenedor tiene derecho a recibir el pay-off correspondiente en la fecha de ejercicio “la opción está activa”, y se desactiva cuando pierde este derecho.

² Cuando la opción comienza el tenedor no tiene derecho a recibir el pay-off en la fecha de ejercicio, “la opción no está activa”, se activa cuando adquiere este derecho.

vuelve a activar aunque el precio spot alcance un valor menor a 110, una vez que la opción está fuera lo hace por siempre.

Las opciones *knock-out* se clasifican en:

Opciones *Up-and-Out*:

Estas opciones son llamadas así porque el precio spot siempre empieza por debajo del nivel de la barrera, por lo que tiene que moverse hacia arriba para que la opción alcance la barrera y quede *knocked-out*, es decir, sin valor. En algunos casos es pagado el rebate como compensación por el *knocked-out*.

Opciones *Down-and-Out*:

En estas opciones el precio spot empieza por arriba de la barrera por lo que tiene que descender hasta ella para que la opción quede *knocked-out*.

- Las opciones *knock-in* funcionan de manera opuesta a las *knock-out*, como ya se mencionó empiezan su vida inactivas y se activan cuando el precio spot cruza el nivel predeterminado "la barrera". Si las opciones terminan inactivas estás pueden dar al tenedor el derecho a recibir el rebate.

A continuación se menciona un ejemplo: suponga que se emite una opción put europea sobre un subyacente el cual tiene un precio spot de 100, y una barrera de 80, la opción empieza sin valor para el tenedor a menos que el precio spot en algún momento tome o sea menor al precio de 80, momento en el cual la opción es *knocked-in* y el contrato se activa. Una vez que la opción está dentro (o activa), lo hace hasta la fecha de ejercicio.

Las opciones *knock-in* se clasifican en:

Opciones *Up-and-In*:

Son llamadas así porque el precio spot siempre empieza por debajo del nivel de la barrera, por lo que tiene que moverse hacia arriba para que la opción alcance la barrera y quede *knocked-in* (activa). Así, si el precio spot nunca cruza la barrera la opción nunca es activada y termina sin valor, en algunos de estos casos se paga el rebate.

Opciones *Down-and-In*:

En estas opciones el precio spot empieza por arriba de la barrera, por lo que tiene que descender hasta tocar o cruzar la barrera para que la opción se active, si el precio nunca pasa la barrera la opción nunca se activa, en algunos casos se paga el rebate.

El rebate puede ser pagado:

- Para las *knock-out* en el momento en que la opción se vuelve inactiva o algunos días después (lo que podría ser en la fecha de ejercicio).

- Para las *knock-in* en la fecha de ejercicio.

Condiciones para el pago:

A continuación se presenta un resumen con los distintos tipos de opciones de barrera, así como su *pay-off* correspondiente:

Opciones de Barrera	Opciones Knock-in	- Call <i>Down-and-in</i> $S > H$
		Payoff $\begin{cases} \max(S - K; 0) & \text{si } S \leq H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$
		- Call <i>Up-and-in</i> $S < H$
		Payoff $\begin{cases} \max(S - K; 0) & \text{si } S \geq H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$
	Opciones Knock-out	- Put <i>Down-and-in</i> $S > H$
		Payoff $\begin{cases} \max(K - S; 0) & \text{si } S \leq H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$
		- Put <i>Up-and-in</i> $S < H$
		Payoff $\begin{cases} \max(K - S; 0) & \text{si } S \geq H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$
Opciones Knock-out	- Call <i>Down-and-out</i> $S > H$	
	Payoff $\begin{cases} \max(S - K; 0) & \text{si } S > H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$	
	- Call <i>Up-and-out</i> $S < H$	
	Payoff $\begin{cases} \max(S - K; 0) & \text{si } S < H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$	
Opciones Knock-out	- Put <i>Down-and-out</i> $S > H$	
	Payoff $\begin{cases} \max(K - S; 0) & \text{si } S > H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$	
	- Put <i>Up-and-out</i> $S < H$	
	Payoff $\begin{cases} \max(K - S; 0) & \text{si } S < H \text{ con } t \leq T \\ R_b & \text{en otro caso} \end{cases}$	

Donde:

- H es la barrera
- K es el precio de ejercicio
- S es el precio spot
- R_b es el rebate
- T es la fecha de ejercicio
- t variable que indica tiempo

A continuación se dan algunos ejemplos de las expectativas del inversionista al entrar en estos contratos:

- En una opción call *Up-and-Out*, con precio strike de 100 y barrera de 120, el inversionista espera que la opción no rebase el precio de 120. Con esta opción se limita la ganancia a 20, pero el pago de la prima es menor al que se pudo haber pagado por una opción *vanilla* con las mismas características.
- En una opción call *Up-and-In*, con precio strike de 100 y barrera de 120, el inversionista espera que la opción rebase el precio de 120, por lo que no está pagando por la ganancia que podría tener si el precio va de 100 a 120. Con esto el pago de la prima es menor al que se podría haber pagado con una opción *vanilla*.

Monitoreo de las opciones de barrera.

Desde que se entra en un contrato de opciones de barrera se tiene que definir qué significa que la barrera de la opción sea cruzada. Si se puede considerar que la barrera es cruzada en cualquier momento (en que el precio spot cruza la barrera durante el día), ed., es monitoreada o revisada intra-día³, ó sólo al final del día de negociación se toma el precio de cierre, o bien, podría especificarse cualquier otra fecha de revisión: semestral, anual, etc.

Como el precio de las opciones de barrera es dependiente de la trayectoria del precio del subyacente, también se encontrarán en la literatura como *path-dependent option*.

³ Este tipo de monitoreo también es conocido como monitoreo continuo.

II. Modelos de valuación de las opciones de barrera.

En este capítulo se obtendrá un modelo de valuación para los diferentes tipos de opciones de barrera, para llegar a tal objetivo, primero se desarrollará el modelo de valuación para las opciones *vanilla*, al cual se le aplicarán algunas adecuaciones, para así obtener el modelo de valuación de las opciones de barrera.

Desarrollo del modelo de valuación de las opciones *vanilla*.¹

Para valorar una opción, en principio se necesita de un modelo que describa probabilísticamente el precio del activo subyacente " $S(t)$ " durante toda la vida de la opción, es decir, para toda $t \in [0, T]$.

Para obtener este precio Black and Scholes supusieron en su trabajo más reconocido que los rendimientos de los activos subyacentes se distribuían normalmente, y que el modelo dinámico que describía la variabilidad de tales rendimientos era el movimiento geométrico Browniano (dicho movimiento también es conocido como el proceso lognormal o proceso de Wiener), dado lo anterior, definieron a dS/S de la siguiente forma:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dX(t),$$

al integrar esta ecuación se tiene:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu t + \sigma X(t))},$$

donde μ es la media del rendimiento, σ la volatilidad y $S(0)$ el precio actual del activo subyacente, $X(t)$ el movimiento geométrico Browniano.

Antes de seguir con el desarrollo del modelo de valuación para las opciones *vanilla*, se dará una breve explicación de los conceptos matemáticos sobre los que se basa la obtención de la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes.

Base matemática para la obtención de la ecuación de Black-Scholes.

Si se toman intervalos pequeños (intervalos infinitesimales) de tiempo dt , durante los cuales S cambia a $S + dS$, y se utiliza el modelo anterior (el cual descompone al rendimiento en dos partes: la que es predecible-determinista μdt y la que modela el cambio aleatorio en el precio del activo en respuesta a factores externos "la que es representada por una variable aleatoria que se distribuye normal con media 0 y

¹ El desarrollo para obtener las fórmulas de valuación de las opciones *vanilla* y de las de barrera (la mayor parte de este capítulo), fue tomado de Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J.N. (1999) y de Venegas Martínez, Francisco. (2008). "Riesgos financieros y económicos"

varianza dt) para determinar dS , se obtiene la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dX.$$

Por un resultado que no se verá en este trabajo, con probabilidad 1²:

$$dX^2 \rightarrow dt \text{ cuando } dt \rightarrow 0,$$

Si $f(S, t)$ es una función continua y derivable con respecto a S y t , si se olvida por un momento que S es estocástica, y si se hacen variar a S y t por pequeñas cantidades dS y dt respectivamente, claramente, f también variará con respecto a dS y dt , por lo que la expansión en serie de Taylor de df , queda de la siguiente forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + R_2$$

donde R_2 es una cantidad muy cercana a cero.³

Si se recuerda que $dS = S(\sigma dX + \mu dt)$, y que es sólo un número (aunque sea aleatorio), se puede elevar al cuadrado:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2$$

al examinar el orden de magnitud de cada uno de los términos de esta ecuación, y al considerar que:

$$dX = O(\sqrt{dt}),^4$$

se determina que el primer término de dS^2 es más grande que los otros dos, por lo que:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + \dots$$

Y por uno de los resultados vistos anteriormente:

² Para mayor detalle consultar Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J.N. (1999)

³ Para mayor detalle ver la fórmula de Taylor de segundo orden en: Marsden (1991)

⁴ Ya que la varianza de dX es dt

$$dS^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt \text{ cuando } dt \rightarrow 0$$

Si se sustituye esto en la serie de Taylor de df , se tiene:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial S} (\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S dX + \mu S dt)^2 \\ &= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt \end{aligned} \quad 5$$

como las dos funciones f y S dependen de la variable aleatoria dX , se puede eliminar la aleatoriedad al construir una tercera función g , para la cual la variación dg sea completamente determinista durante un periodo pequeño de tiempo dt .

Sea Δ un número arbitrario, se define a:

$$g = f - \Delta S,$$

dada la definición anterior:

$$\begin{aligned} dg &= df - \Delta dS \\ &= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt - \Delta (\sigma S dX + \mu S dt) \\ &= \sigma S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

Si se elige:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

y la función es evaluada al inicio del intervalo de tiempo en t , se tiene que dX desaparece.

Después de esta breve explicación, se seguirá con el desarrollo del modelo para la opción *vanilla*.

⁵ Aquí se observa el Lema de Itô, el cual relaciona pequeños cambios en una función de una variable aleatoria con pequeños cambios en dicha variable.

Análisis de Black and Scholes

Supuestos:

- El precio del activo subyacente sigue un proceso lognormal.
- La tasa libre de riesgo r y la volatilidad del activo subyacente σ , son funciones conocidas durante todo el periodo de vigencia.
- No hay costos de transacción asociados con la cobertura de un portafolio.
- El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción.
- No hay posibilidades de arbitraje.
- Las negociaciones del activo subyacente se pueden hacer en forma continua.
- Las ventas en corto son permitidas y los activos subyacentes son divisibles.

Si $V(S, t)$ es el precio de la opción, el cual sólo depende de S y t , y V es continua y derivable, entonces V cumple con las características de la función f , la cual se mencionó en la sección anterior, por lo que dV puede escribirse de la siguiente forma:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

note que se requiere que V sea derivable al menos una vez con respecto a t y dos veces con respecto a S .

Se define a Π como el portafolio consistente de una opción y una porción

negativa del activo subyacente ($-\Delta$), donde Δ es una cantidad que se especifica más

adelante:

$$\Pi = V - \Delta S$$

el incremento en el valor de este portafolio durante dt es:

$$d\Pi = dV - \Delta dS^6$$

por los resultados vistos en la sección anterior, se tiene:

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt$$

como ya se mencionó se puede eliminar la aleatoriedad, siempre y cuando se elija:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}^7$$

como resultado se tiene que los incrementos en el valor del portafolio son completamente deterministas:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Ahora se tomarán en cuenta los conceptos de arbitraje, de la oferta y la demanda, y se supondrá que no existen costos de transacción. Así, el rendimiento de una cantidad Π invertida en un activo libre de riesgo deberá tener un crecimiento igual a $r\Pi dt$ durante dt . Si el lado derecho de la ecuación anterior fuera invertido a una tasa libre de riesgo durante dt y este fuera mayor que $r\Pi dt$, alguien podría tener mayor ganancia (sin riesgo) al pedir prestada una cantidad Π e invertirla en el portafolio. Por el contrario si el lado derecho fuera menor que $r\Pi dt$, entonces el inversionista se podría quedar corto en el portafolio e invertir Π a la tasa r . La capacidad de negociar a costos bajos, asegura que el rendimiento sobre el portafolio y el de una inversión sean muy similares, por lo que se tiene:

$$r\Pi dt = r \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

al sustituir $\Pi = V - \Delta S$ y $\Delta = \partial V / \partial S$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

la ecuación diferencial parcial de Black and Scholes.

⁶ Δ será constante durante dt

⁷ Δ es el valor de $\partial V / \partial S$ al comienzo de dt

Para obtener el valor de un call europeo con valor $C(S, t)$, lo único que hay que hacer es reemplazar V por C en la ecuación anterior y determinar las condiciones iniciales o finales y de frontera respectivas a dicho Call:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

con

$$C(0, t) = 0, \quad C(S, t) \approx S \quad \text{cuando} \quad S \rightarrow \infty,$$

como condiciones de frontera y

$$C(S, T) = \max(S - K, 0)$$

como condición final.

Las condiciones que se acaban de presentar son bastante intuitivas. Si todo el mundo tuviera acceso al subyacente en cualquier fecha y sin costo alguno, entonces el derecho para comprarlo en el futuro tendría que ser gratuito. Por otro lado, si el subyacente es un activo costoso, la opción de comprarlo en el futuro también sería muy costosa.

La ecuación que se acaba de presentar se parece a la ecuación que es utilizada para resolver problemas de difusión de calor “*la Ecuación de Calor*”:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

La cual se puede interpretar de la siguiente manera: $-\infty < x < \infty$ representa una varilla de longitud infinita; $u_0(x)$ es la cantidad de calor que se aplica en el punto x en el tiempo $\tau = 0$; y $u(x, \tau)$ describe cómo se difunde el calor en cada punto x en $\tau > 0$.

Como se observa, la ecuación de Black and Scholes tiene más términos, y cada vez que C es diferenciada con respecto a S , C es multiplicada por S , por lo que no tiene coeficientes constantes, además se observa que es de la forma backward⁸ con dato final en $t = T$.

⁸ Las ecuaciones diferenciales por sus condiciones iniciales o finales, se clasifican en: ecuaciones forward, en donde se tiene una condición inicial y se parte de ella, y las backward, las que tienen condición final y se tiene que llegar a ella.

Para poder aplicar la solución de la ecuación de calor a esta ecuación, se hará lo siguiente:

Eliminar S y S^2 que multiplican a $\partial C/\partial S$ y a $\partial^2 C/\partial S^2$ respectivamente, se transformará a la ecuación en una ecuación forward, se le aplicarán los siguientes dos cambios de variable y se obtendrá un parámetro adimensional⁹:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \tau / \frac{1}{2} \sigma^2, \quad k = \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2}$$

al despejar se tiene:

$$x = \log\left(\frac{S}{K}\right) \quad y \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)$$

Las nuevas variables x y τ representan respectivamente, el diferencial de los logaritmos entre el precio del activo subyacente y el precio de ejercicio (el rendimiento del activo ajustado por el precio de ejercicio, suponiendo que $S_0=1$) y el tiempo invertido yendo de la fecha de vencimiento hacia atrás, salvo el factor constante $1/2 \sigma^2$. El precio de la opción bajo estos cambios se denotará mediante:

$$C = K v(x, \tau)$$

se puede ver que el valor intrínseco de la opción de compra satisface:

$$\begin{aligned} C &= \max(S - K, 0) \\ &= \max(Ke^x - K, 0) \\ &= \max(K(e^x - 1), 0) \\ &= K * \max(e^x - 1, 0) \\ &= K v(x, 0) \end{aligned}$$

donde

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

al sustituir lo anterior en la ecuación del Call que se presentó en hojas anteriores, se llega a la siguiente ecuación:

⁹ Parámetros independientes de las unidades de medida que relacionan variables de las mismas dimensiones.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

donde la condición inicial se transforma en $v(x,0) = \max(e^x - 1, 0)$.

Ahora la ecuación se parece más a la ecuación de calor, sólo que hace falta hacer otro cambio de variable:

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

con α y β constantes (las cuales se definirán más adelante), al obtener la diferencial se tiene:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ku.$$

Para eliminar los términos que dependen de u se eligen β, α (dado que estos valores son arbitrarios):

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k$$

y para eliminar el término $\partial u / \partial x$

$$0 = 2\alpha + (k-1)$$

por lo que:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2.$$

al sustituir:

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} u(x, \tau),$$

de esta manera se convierte la forma de la ecuación de Black-Scholes en la forma de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

con

$$u(x,0) = u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0).$$

La solución al problema de la ecuación de calor es el siguiente:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} ds$$

donde $u_0(s)$ fue definida en un paso anterior.

Para evaluar esta integral es conveniente hacer el siguiente cambio de variable $x' = (s - x)/\sqrt{2\tau}$, por lo que:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

para evaluar I_1 se debe transformar la integral anterior en una de la forma estándar, es decir:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

y

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

es la función de distribución acumulativa de la normal.

El cálculo de I_2 es idéntico al de I_1 , sólo que $(k+1)$ es reemplazado por $(k-1)$.

Para obtener el resultado final, se hacen los cambios de variables correspondientes para dejar a nuestra ecuación en términos de las variables originales:

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau)$$

$$x = \log(S/K), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad y \quad C = Kv(x, \tau)$$

al realizar los cambios de variables correspondientes, se obtiene la ecuación que determina el precio de una opción Call Europea:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde:

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Desarrollo del modelo de valuación de las opciones de barrera.

Para calcular el valor de los 16 tipos de opciones de barrera europeas con monitoreo continuo, existen fórmulas explícitas y son las que se verán a continuación. El

modelo para las opciones de barrera europeas con monitoreo discreto, se verá al final de esta sección.

Considere el caso Call *down-and-out* europeo, con *pay-off* en la fecha de vencimiento igual a $\max(S - K, 0)$. Sólo si S nunca es menor o igual a la barrera (la cual se define por H) durante la vida de la opción, pues si S toca H , la opción se queda sin valor, es decir, se hace nula.

Se considerará en detalle sólo el caso en el que $K > H$, ya que si $K < H$ la opción siempre quedaría sin valor (al tocar H) antes de tocar K .

Para el caso en el que S es más grande que H , el valor de la opción $V(S, t)$ satisface la ecuación de Black–Scholes, teniendo como condición final:

$$V(S, T) = \max(S - K, 0).$$

Cuando S es muy grande la probabilidad de que la barrera se acerca a 0 (si S no paga dividendos), entonces:

$$V(S, t) \sim S \text{ cuando } S \rightarrow \infty$$

Note que al tomar en cuenta estas condiciones, se observa que el problema es idéntico al de una opción call *vanilla*, no obstante el problema difiere en la segunda condición de frontera, el valor de la opción es cero cuando $S = H$ y no en $S = 0$ como lo es en las opciones call *vanilla*:

$$V(X, t) = 0$$

Dado lo anterior se completa la formulación del problema, por lo que ahora sólo resta encontrar la solución explícita.

Se usarán los siguientes cambios de variables:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \tau / \frac{1}{2}\sigma^2, \quad V = Ke^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau).$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2, \quad \text{y} \quad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

la barrera se transforma en:

$$x_0 = \log(H/K),$$

y el problema de la opción de barrera en:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con

$$u(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x), \quad x \geq x_0,$$

$$u(x, t) \sim e^{(1-\alpha)x - \beta\tau} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty,$$

y

$$u(x_0, t) = 0. \quad 10$$

En la sección anterior se relacionó el problema de valorar calls (y puts) *vanilla* con la ecuación de calor sobre una barra infinita, en este caso se hará sobre una barra *semi-infinita* con temperatura cero en el punto $x_0 = \log(H/K)$.

Para dar solución a nuestro problema se utilizará el hecho de que el flujo de calor en la barra no es afectado por el sistema coordenado utilizado, es decir, $u(x_0, \tau)$ es invariante bajo la traslación de x a $x+x_0$, o bajo la reflexión de x a $-x$, por lo que sí $u(x, \tau)$ es una solución de $\partial u / \partial \tau = \partial^2 u / \partial x^2$, también lo son $u(x+x_0, \tau)$ y $u(-x+x_0, \tau)$, para alguna constante x_0 .

Para resolver $u(x_0, t) = 0$ se utilizará el método de imágenes, el cual resuelve el problema sobre una región *semi-infinita* de la siguiente forma: se soluciona el problema sobre una región *infinita*, la cual se divide en dos regiones *semi-infinitas* con temperaturas iniciales opuestas: una región es caliente y la otra fría. El efecto hace que la temperatura en la unión sea cero.

Sea $x_0 = \log(H/K)$ el punto inicial (la unión de las dos barras), $u(x_0, \tau) = 0$. En vez de resolver $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x_0, \tau)$ sobre el intervalo $x_0 < x < \infty$, se resolverá $u(x_0, \tau) = 0$ para todo x sujeta a $u(x, 0) = u_0(x) - u_0(2x_0 - x)$, así que,

¹⁰ La última condición de frontera se tratará por el método de imágenes.

$$u(x,0) = \begin{cases} \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) & \text{para } x > x_0 \\ -\max(e^{(k+1)\left(x_0 - \frac{1}{2}x\right)} - e^{(k-1)\left(x_0 - \frac{1}{2}x\right)}, 0) & \text{para } x < x_0 \end{cases}$$

de esta forma se garantiza que $u(x_0,0) = 0$.

Ahora suponga que

$$C(S,t) = Ke^{\alpha x + \beta \tau} u_1(x, \tau)$$

es el valor de la opción *vanilla* con el mismo precio de ejercicio y fecha de ejercicio, pero sin barrera. Este valor es obtenido por la fórmula de Black-Scholes y se sabe que $u_1(x, \tau)$ es una solución de la ecuación de calor. Así, que

$$u_1(x, \tau) = e^{-\alpha x + \beta \tau} C(S, t) / K$$

al sustituir en la solución de la opción de barrera:

$$V(S, t) = Ke^{\alpha x + \beta \tau} (u_1(x, \tau) + u_2(x, \tau))$$

donde $u_2(x, \tau)$ es solución del problema con dato inicial opuesto. La solución de este problema puede ser encontrada en términos de u_1 al usar la invarianza de la ecuación de calor bajo traslación, cambios de variable y de signo, así se debe tener:

$$\begin{aligned} u_2(x, \tau) &= -u_1(2x_0 - x, \tau) \\ &= \frac{-e^{-\alpha\left(2x_0 - \frac{1}{2}x\right) + \beta\tau} C\left(X^2/S, t\right)}{K} \end{aligned}$$

donde reemplazar x por $2x_0 - x$ es equivalente a reemplazar S por H^2/S . Finalmente se llega a la solución en términos de S y de t :

$$V(S, t) = C(S, t) - \left(\frac{S}{H}\right)^{(k-1)} C(H^2/S, t).$$

Donde es obvio que $V(H, t) = 0$; puede verificarse que la ecuación y la condición final son satisfechas (la condición final es satisfecha sólo para $S > H$, ya que para $S < H$ la opción no está activa).

Como las otras opciones *out* pueden ser valuadas de forma similar, ahora se verán las opciones *In*.

Considérese el caso call *down-and-in*, el valor de la opción $V(S, t)$ aún satisface la ecuación de Black–Scholes, así que lo único que se tiene que hacer es determinar las condiciones iniciales y de frontera correctamente. Se usará la notación $C(S, t)$ para denotar un call *vanilla* europeo con la misma fecha y precio de ejercicio de la opción de barrera.

Una vez que la barrera ha sido tocada, la opción de barrera se convierte en un call *vanilla*, por lo que su valor está dado por la fórmula de Black – Scholes. Ahora se tomará en cuenta la situación en la que la barrera no ha sido tocada.

La opción tiende a perder valor cuando $S \rightarrow \infty$, ya que entre más grande sea S menor es la posibilidad de que S toque la barrera H antes de que la opción expire y se active la opción, por lo que una condición de frontera es:

$$V(S, t) \rightarrow 0 \text{ cuando } S \rightarrow \infty$$

Si S ha sido mayor que H al vencimiento entonces la opción expira sin valor, por lo que la condición final para $S > H$ es:

$$V(S, T) = 0$$

Finalmente, el precio del activo debe tocar H para que la opción tenga el valor de una opción *vanilla*, por lo que la segunda condición de frontera es:

$$V(H, t) = C(H, t).$$

Si $S < H$ en algún momento, la barrera es cruzada, la opción ha sido activada y su valor es exactamente el mismo que una opción call *vanilla*, por lo que sólo se tiene que resolver el problema para $S > H$. Esto completa la formulación de la ecuación de la opción de barrera tipo call *down-and-in*.

A fin de resolver explícitamente la *down-and-in*, primero se escribirá

$$V(S, t) = C(S, t) - \bar{V}(S, t),$$

Puesto que la ecuación de Black-Scholes y las condiciones de frontera son lineales, se sabe que \bar{V} debe satisfacer la ecuación de Black-Scholes con condición final:

$$\bar{V}(S,T) = C(S,T) - V(S,T) = C(S,T) = \max(S - K, 0);$$

y condiciones de frontera:

$$\bar{V}(S,t) = C(S,t) - V(S,t) \sim S - 0 = S, \quad \text{cuando } S \rightarrow \infty$$

$$\bar{V}(H,t) = C(H,t) - V(H,t) = C(H,t) - C(H,t) = 0$$

Si se recuerdan las características del problema para valuar el call *down-and-out*, se verá que son las mismas que se acaban de presentar, por lo que se tendrá el valor de $\bar{V}(S,t)$. En otras palabras en este caso una opción europea *In* más una *Out* equivalen a una opción *vanilla*, esto es conocido como la paridad *in and out*. Desde un punto de vista financiero esto puede verse como el valor de un portafolio consistente de una opción-*in* y una opción-*out*, (con la misma barrera, precio de ejercicio y fecha de ejercicio), porque sólo una de las dos opciones de barrera está activa al vencimiento y cualquiera de las dos tiene el valor de una opción call *vanilla*.

Después de haber desarrollado el modelo para obtener las fórmulas explícitas, a continuación, se presentarán las 16 fórmulas explícitas, las cuales fueron desarrolladas por Merton (1973) y Reiner y Rubinstein (1991)¹¹:

Call *Down-and-in*

$$C_{dit(H>H)} = S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_1) - K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}) \\ + R_b e^{-rT} [N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T})]$$

$$C_{dit(H<H)} = S e^{(b-r)T} N(x_1) - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} N(x_2) \\ + K e^{-rT} N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) + S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_2) \\ - K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T}) + S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_2) \\ - K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T})$$

¹¹ Este desarrollo fue tomado de Haug, E.G. (2007) "The Complete Guide To Option Pricing Formulas".

$$+ R_b e^{-rT} [N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T})]$$

Call *Up-and-in*

$$C_{\text{uf}(K>H)} = S e^{(b-r)T} N(x_1) - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) \\ + R_b e^{-rT} [N(x_2 + \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(y_2 + \sigma\sqrt{T})]$$

$$C_{\text{uf}(K<H)} = S e^{(b-r)T} N(x_2) - K e^{-rT} N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(-y_1) \\ + K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(-y_1 + \sigma\sqrt{T}) + S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(-y_2) \\ - K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(-y_2 + \sigma\sqrt{T}) \\ + R_b e^{-rT} [N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(-y_2 + \sigma\sqrt{T})]$$

Put *down-and-in*

$$P_{\text{df}(K>H)} = -S e^{(b-r)T} N(-x_2) + K e^{-rT} N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) \\ + S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_1) \\ - K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_2) \\ + K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T}) \\ + R_b e^{-rT} [N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T})]$$

$$P_{\text{df}(K<H)} = -S e^{(b-r)T} N(-x_1) + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) \\ + R_b e^{-rT} [N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T})]$$

Put *up-and-in*

$$P_{\text{uf}(K>H)} = -S e^{(b-r)T} N(-x_1) + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S e^{(b-r)T} N(-x_2) \\ + K e^{-rT} N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(-y_2)$$

$$\begin{aligned}
& + Ke^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(-y_2 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b e^{-rT} [N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(-y_2 + \sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{put}(K < H)} &= -S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(-y_1) + Ke^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(-y_1 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b e^{-rT} [N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(-y_2 + \sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

Call down-and-out

$$\begin{aligned}
C_{\text{do}(K > H)} &= S e^{(b-r)T} N(x_1) - Ke^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_1) \\
& + Ke^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b [(H/S)^{\mu+\lambda} N(z) - (H/S)^{\mu-\lambda} N(z - 2\lambda\sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{do}(K < H)} &= S e^{(b-r)T} N(x_2) - Ke^{-rT} N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(y_2) \\
& + Ke^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_2 - \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b [(H/S)^{\mu+\lambda} N(z) - (H/S)^{\mu-\lambda} N(z - 2\lambda\sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

Call up-and-out

$$C_{\text{uo}(K > H)} = R_b [(H/S)^{\mu+\lambda} N(-z) - (H/S)^{\mu-\lambda} N(-z + 2\lambda\sigma\sqrt{T})]$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{uo}(K < H)} &= S e^{(b-r)T} N(x_1) - Ke^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} N(x_2) \\
& + Ke^{-rT} N(x_2 - \sigma\sqrt{T}) + S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(-y_1) \\
& + Ke^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(-y_2) \\
& + Ke^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(-y_2 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b [(H/S)^{\mu+\lambda} N(-z) - (H/S)^{\mu-\lambda} N(-z + 2\lambda\sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

Put down-and-out

$$P_{\text{do}(K > H)} = -S e^{(b-r)T} N(-x_1) + Ke^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S e^{(b-r)T} N(-x_2)$$

$$\begin{aligned}
& -Ke^{-rT}N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) - Se^{(b-r)T}(H/S)^{2(\mu+1)}N(y_1) \\
& -Ke^{-rT}(H/S)^{2\mu}N(y_2 - \sigma\sqrt{T}) + Se^{(b-r)T}(H/S)^{2(\mu+1)}N(y_2) \\
& -Ke^{-rT}(H/S)^{2\mu}N(y_2 - \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b[(H/S)^{\mu+\lambda}N(z) - (H/S)^{\mu-\lambda}N(z - 2\lambda\sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

$$P_{do(H < H)} = R_b[(H/S)^{\mu+\lambda}N(-z) - (H/S)^{\mu-\lambda}N(-z + 2\lambda\sigma\sqrt{T})]$$

Put up-and-out

$$\begin{aligned}
P_{uo(H > H)} &= -Se^{(b-r)T}N(-x_2) + Ke^{-rT}N(-x_2 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + Se^{(b-r)T}(H/S)^{2(\mu+1)}N(-y_2) \\
& - Ke^{-rT}(H/S)^{2\mu}N(-y_2 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b[(H/S)^{\mu+\lambda}N(-z) - (H/S)^{\mu-\lambda}N(-z + 2\lambda\sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{uo(H < H)} &= -Se^{(b-r)T}N(-x_1) + Ke^{-rT}N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + Se^{(b-r)T}(H/S)^{2(\mu+1)}N(-y_1) \\
& - Ke^{-rT}(H/S)^{2\mu}N(-y_1 + \sigma\sqrt{T}) \\
& + R_b[(H/S)^{\mu+\lambda}N(-z) - (H/S)^{\mu-\lambda}N(-z + 2\lambda\sigma\sqrt{T})]
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} & x_2 &= \frac{\ln(S/H)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} \\
y_1 &= \frac{\ln(H^2/(SK))}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} & y_2 &= \frac{\ln(H/S)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} \\
z &= \frac{\ln(H/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} & \mu &= \frac{b - \sigma^2/2}{\sigma^2} & \lambda &= \sqrt{\mu^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}
\end{aligned}$$

b = costo de acarreo
 σ = volatilidad del activo subyacente
 r = tasa de interés libre de riesgo

Modelo para valorar opciones de barrera con monitoreo discreto de la barrera.

La mayor parte de los modelos para valorar opciones de barrera asume monitoreo continuo de la barrera (los presentados en las secciones anteriores asumen este tipo de monitoreo), no obstante, la mayor parte de los contratos de estas opciones, cuenta con monitoreos en fechas específicas (monitoreo discreto), típicamente los cierres diarios. Desafortunadamente el precio exacto sólo se tiene para las opciones con monitoreo continuo y para muy pocos casos con monitoreo discreto (con menos de 5 fechas de monitoreo), pues es difícil incorporar la característica de monitoreo discreto en la valuación de las opciones de barrera, aún cuando los métodos numéricos usan técnicas de enrejado o simulación Monte Carlo.

Existe una forma de calcular el precio de una opción de barrera con monitoreo discreto, el cual puede ser expresado con fórmulas cerradas en términos de probabilidades de normales multivariadas¹², en donde la dimensión de la distribución normal multivariada será el número de monitoreos realizados (por esta característica el método se vuelve muy complicado):

Considere por ejemplo una opción call *down-and-out* con sólo una fecha de monitoreo en T_R , se puede escribir el *payoff* como $E[\max(0, S_T - K) | S_{T_R} > H]$, la cual es una expresión que fácilmente puede ser valuada.

$$\begin{aligned} C(S, K, H, R_b, T_R, T) &= R_b e^{-rT} Pr(S_{T_R} \leq H) + e^{-rT} E_0[(S_T - K) | S_{T_R} > H] \\ &= R_b e^{-rT} K N[-d_2(S, H, T_R)] \\ &\quad + S e^{-qT} N_2[d_1(S, H, T_R), d_1(S, H, T), \rho] \\ &\quad - K e^{-rT} N_2[d_2(S, H, T_R), d_2(S, K, T), \rho] \end{aligned}$$

Aquí $E_0[.]$ denota la esperanza en el tiempo 0, $N[.]$ y $N_2[.,.,.]$ representan la distribución normal acumulada y la distribución normal bivariada acumulada respectivamente, $\rho = \sqrt{T_R/T}$, d_1 y d_2 se definen como sigue:

$$d_1(x, y, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln(x/y) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right],$$

$$d_2(x, y, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left| \ln(x/y) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right|,$$

¹² Fuente: Figlewski, S., and Gao, B. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing."

El problema con este tipo de soluciones cerradas es que es difícil calcular estimados para distribuciones normales multivariadas una vez que la dimensión es mayor a 4, esto se debe a que la función de distribución acumulativa de la normal sólo puede ser evaluada por una aproximación numérica, no obstante, la implementación de este tipo de modelos se complica una vez que el número de monitoreos crece, por lo que se producen mejores resultados con otras formas de valuación.

Dado lo anterior, para valuar este tipo de opciones se ha optado por utilizar una simple corrección al modelo de valuación explícita (con monitoreo continuo)¹³. La corrección consiste en que la barrera sea multiplicada por una cantidad la cual será determinada por la frecuencia del monitoreo, la volatilidad del activo y una constante $\beta \approx 0.5826$, por lo que es fácil implementarlo.

Este cálculo está basado en los supuestos de mercado de Black and Scholes, en particular en que el precio del activo $\{S_t, t \geq 0\}$ sigue la ecuación diferencial estocástica que se vio anteriormente.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$$

donde X es un proceso estándar de Wiener, μ y σ son constantes, S_0 es fijo, la estructura de plazos es constante y se denota como r , la tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente. El precio de una reclamación contingente es el valor esperado de sus flujos de efectivo bajo la medida de Martingala equivalente¹⁴, por lo que denotamos $\mathbb{P} - r$.

Sea H la barrera, una opción *up* tiene la característica: $H > S_0$ y una *down*: $H < S_0$, en particular se supondrá que $H \neq S_0$. Cuando el precio del activo alcance la barrera por primera vez será denotado por:

$$\tau_H = \inf\{t > 0: S_t = H\};$$

Una opción call *knock-in* con fecha de ejercicio T y strike K paga $(S_T - K)^+$ en T si $\tau_H \leq T$ y 0 en otro caso, por lo que su precio es

$$e^{-rT} E[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\tau_H \leq T}],$$

donde la esperanza se toma con respecto a la medida de Martingala equivalente.

¹³ Desarrollo tomado de Broadie, M., P. Glasserman, and S. Kou “A Continuity Correction for Discrete Barrier Options”

¹⁴ Si \mathbb{P} es una medida de probabilidad, bajo la cual un movimiento browniano con tendencia se transforma en un movimiento browniano sin tendencia, \mathbb{P} recibe el nombre de medida Martingala Equivalente. Para mayor detalle ver: Venegas Martínez, Francisco. (2008). “Riesgos financieros y económicos”.

Ahora suponga que la barrera es monitoreada i veces, cada Δt , $i = 0, 1, \dots, m$ donde $\Delta t = T/m$. Se escribe \tilde{S}_i para $S_{i\Delta t}$, por lo que $\{\tilde{S}_i, i = 0, 1, \dots\}$ será el precio del activo en los momentos monitoreados. Se define:

$$\tilde{\tau}_H = \begin{cases} \inf\{n > 0 : \tilde{S}_n > H\}, & \text{si } S_0 < H \\ \inf\{n > 0 : \tilde{S}_n < H\}, & \text{si } S_0 > H \end{cases}$$

Por lo que el precio de un call *Knock-in* con monitoreo discreto esta dado por

$$e^{-rT} E[(S_m - K)^+ ; \tilde{\tau}_H \leq m],$$

En general no hay una forma fácil de valuar con fórmulas cerradas los precios de estas opciones. Una consecuencia de este análisis es la conclusión de que el precio discreto converge al continuo conforme el número de monitoreos se incrementa, sugiriendo que el precio continuo puede ser usado como una aproximación. El siguiente resultado muestra cómo ajustar la fórmula continua para obtener una muy buena aproximación al precio discreto.

$$V_m(H) = V(H e^{\mp \beta \sigma \sqrt{T/m}}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

Donde \mp aplica si $H > S_0$, - si $H < S_0$, y $\beta = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right)/\sqrt{2\pi} \approx 0.5826$, con ζ la función zeta de Riemann¹⁵.

El resultado anterior indica que para utilizar la fórmula del precio continuo para valuar una opción con monitoreo discreto, primero se debe multiplicar la barrera por el factor $\exp(\beta \sigma \sqrt{\Delta t})$.

Existe la versión en opciones de barrera americanas, las cuales no tienen fórmula explícita, sino numérica, y cuya solución se verá en el siguiente capítulo.

¹⁵ La función zeta de Riemann está definida, para valores reales mayores que 1, por la serie: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Precios calculados con las fórmulas para monitoreo continuo.

CALL DOWN - AND - IN						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
175	135	150	1	6.0000%	8.00%	0.825196
175	200	150	2	9.0000%	25.00%	2.766963
80	75	70	2	9.0000%	25.00%	3.998392
175	160	150	2	7.7000%	25.00%	8.229356
175	160	150	2	7.7000%	10.00%	0.533485

CALL UP - AND - IN						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
375	300	500	4	8.5000%	25.00%	71.618608
375	550	500	4	8.5000%	25.00%	20.249596
375	400	500	2	8.5000%	10.00%	3.059483
375	400	500	4	6.0000%	10.00%	10.309998
100	135	150	1	7.7000%	15.00%	0.079084

PUT DOWN - AND - IN						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
50	40	30	2	8.5000%	10.00%	0.003301
50	20	30	2	8.5000%	10.00%	0.000000
50	20	30	3	10.0000%	30.00%	0.185627
50	70	30	3	15.0000%	25.00%	7.738639
100	50	80	2	10.0000%	25.00%	0.190716

PUT UP - AND - IN						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
100	50	120	3	10.0000%	10.00%	0.000000
100	110	120	3	10.0000%	10.00%	0.346569
100	130	120	3	10.0000%	25.00%	10.559948
200	260	250	2	8.5000%	25.00%	12.923688
150	210	200	1	7.7012%	10.00%	0.033807

CALL DOWN - AND - OUT						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio

75	70	50	1	7.7012%	15.00%	6.744044
120	30	40	2	7.7012%	15.00%	77.152627
270	290	260	2	7.7012%	20.00%	6.323607
120	115	100	3	9.0000%	25.00%	12.488413
120	95	100	1	6.0000%	8.00%	24.254398

CALL UP - AND - OUT						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
125	100	145	2	7.7012%	10.00%	11.247765
125	130	145	1	7.7012%	10.00%	0.956480
125	80	145	2	7.7012%	10.00%	23.391528
15	5	18	1	8.5000%	10.00%	8.441621
100	130	125	3	6.0000%	30.00%	0.000000

PUT DOWN - AND - OUT						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
300	325	270	1	6.0000%	10.00%	11.122686
300	295	270	3	6.0000%	10.00%	0.372376
300	350	270	3	9.0000%	25.00%	0.672240
25	50	20	3	9.0000%	10.00%	14.035711
1.000	900	800	5	10.0000%	32.00%	0.067787

PUT UP - AND - OUT						
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Precio
100	125	150	1	10.0000%	10.00%	22.666080
100	200	150	1	7.7012%	25.00%	88.646379
100	80	150	1	7.7012%	20.00%	1.098027
100	80	150	5	7.7012%	20.00%	5.229669
100	124	125	5	15.0000%	10.00%	11.470888

Precios calculados con las fórmulas para monitoreo discreto.

CALL DOWN - AND - IN							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio

T							
175	135	150	1	6.0000%	8.00%	Mensual	0.482827
						Semanal	0.641291
						Diario	0.751128
175	200	150	2	9.0000%	25.00%	Mensual	1.647039
						Semanal	2.168250
						Diario	2.526602
80	75	70	2	9.0000%	25.00%	Mensual	2.673535
						Semanal	3.311265
						Diario	3.727531
175	160	150	2	7.7000%	25.00%	Mensual	5.461946
						Semanal	6.791222
						Diario	7.661786
175	160	150	2	7.7000%	10.00%	Mensual	0.300742
						Semanal	0.407352
						Diario	0.482422

CALL UP - AND - IN							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
375	300	500	4	8.5000%	25.00%	Mensual	69.102488
						Semanal	70.461306
						Diario	71.193113
375	550	500	4	8.5000%	25.00%	Mensual	20.249596
						Semanal	20.249596
						Diario	20.249596
375	400	500	2	8.5000%	10.00%	Mensual	2.456556
						Semanal	2.759390
						Diario	2.943979
375	400	500	4	6.0000%	10.00%	Mensual	9.400364
						Semanal	9.874522
						Diario	10.146104
100	135	150	1	7.7000%	15.00%	Mensual	0.057687
						Semanal	0.068481
						Diario	0.075030

PUT DOWN - AND - IN							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
50	40	30	2	8.5000%	10.00%	Mensual	0.002195

						Semanal	0.002719
						Diario	0.003069
50	20	30	2	8.5000%	10.00%	Mensual	0.000000
						Semanal	0.000000
						Diario	0.000000
50	20	30	3	10.0000%	30.00%	Mensual	0.185627
						Semanal	0.185627
						Diario	0.185627
50	70	30	3	15.0000%	25.00%	Mensual	6.894352
						Semanal	7.329849
						Diario	7.583752
100	50	80	2	10.0000%	25.00%	Mensual	0.190716
						Semanal	0.190716
						Diario	0.190716

PUT UP - AND - IN							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
100	50	120	3	10.0000%	10.00%	Mensual	0.000000
						Semanal	0.000000
						Diario	0.000000
100	110	120	3	10.0000%	10.00%	Mensual	0.217477
						Semanal	0.278092
						Diario	0.319194
100	130	120	3	10.0000%	25.00%	Mensual	7.958303
						Semanal	9.246109
						Diario	10.049875
200	260	250	2	8.5000%	25.00%	Mensual	8.718943
						Semanal	10.750119
						Diario	12.068783
150	210	200	1	7.7012%	10.00%	Mensual	0.013843
						Semanal	0.022351
						Diario	0.029005

CALL DOWN - AND - OUT							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
75	70	50	1	7.7012%	15.00%	Mensual	6.744045

						Semanal	6.744045
						Diario	6.744045
120	30	40	2	7.7012%	15.00%	Mensual	77.152629
						Semanal	77.152628
						Diario	77.152627
270	290	260	2	7.7012%	20.00%	Mensual	10.536777
						Semanal	8.503431
						Diario	7.181633
120	115	100	3	9.0000%	25.00%	Mensual	13.886246
						Semanal	13.214362
						Diario	12.774888
120	95	100	1	6.0000%	8.00%	Mensual	24.259028
						Semanal	24.257209
						Diario	24.255621

CALL UP - AND - OUT							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
125	100	145	2	7.7012%	10.00%	Mensual	12.686537
						Semanal	11.948954
						Diario	11.514404
125	130	145	1	7.7012%	10.00%	Mensual	1.279769
						Semanal	1.111767
						Diario	1.014881
125	80	145	2	7.7012%	10.00%	Mensual	25.678420
						Semanal	24.515243
						Diario	23.820966
15	5	18	1	8.5000%	10.00%	Mensual	8.671874
						Semanal	8.560930
						Diario	8.488650
100	130	125	3	6.0000%	30.00%	Mensual	0.000029
						Semanal	0.000000
						Diario	0.000000

PUT DOWN - AND - OUT							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
300	325	270	1	6.0000%	10.00%	Mensual	13.867443
						Semanal	12.451274

						Diario	11.625180
300	295	270	3	6.0000%	10.00%	Mensual	0.674690
						Semanal	0.503081
						Diario	0.418672
300	350	270	3	9.0000%	25.00%	Mensual	1.411411
						Semanal	0.983187
						Diario	0.780601
25	50	20	3	9.0000%	10.00%	Mensual	14.762859
						Semanal	14.394354
						Diario	14.173106
1.000	900	800	5	10.0000%	32.00%	Mensual	0.252419
						Semanal	0.135318
						Diario	0.089388

PUT UP - AND - OUT							
Precio del activo S	Precio Strike K	Barrera H	Tiempo al vencimiento T	Tasa libre de riesgo r	Volatilidad σ	Monitoreo	Precio
100	125	150	1	10.0000%	10.00%	Mensual	22.666080
						Semanal	22.666080
						Diario	22.666080
100	200	150	1	7.7012%	25.00%	Mensual	90.232784
						Semanal	89.491248
						Diario	88.984833
100	80	150	1	7.7012%	20.00%	Mensual	1.098027
						Semanal	1.098027
						Diario	1.098027
100	80	150	5	7.7012%	20.00%	Mensual	5.263922
						Semanal	5.247872
						Diario	5.236957
100	124	125	5	15.0000%	10.00%	Mensual	11.707019
						Semanal	11.591478
						Diario	11.518030

III. Modelos numéricos para la valuación de opciones de barrera.

Muchos derivados exóticos no tienen formas cerradas (analíticas) de valuación, por lo que deben ser valuados utilizando métodos numéricos. En este capítulo se analizarán dos modelos para la valuación de opciones de barrera: uno en el que se aplican las técnicas de enrejado y el otro modelo de Simulación Monte Carlo.

Entre los modelos más conocidos en los que se aplican las técnicas de enrejado, destacan los árboles binomiales y trinomiales, sin embargo, estos modelos presentan inconvenientes ya que contienen errores de distribución y errores de linealidad.

El error por distribución se debe a que el modelo a través del árbol intenta aproximarse a una distribución continua log-normal mediante una distribución discreta binomial o trinomial. Este error desaparece rápidamente cuando se incrementa el número de períodos en el árbol. El error por linealidad ocurre porque el valor de la opción es no lineal o discontinuo en algunas regiones del precio del activo subyacente, en una forma que no puede ser capturada adecuadamente por el enrejado discreto. En las opciones de barrera la no linealidad ocurre no sólo en la fecha de expiración sino cuando el precio del activo subyacente se aproxima a la barrera.

Boyle y Lau en 1994, describen la problemática de valuar opciones de barrera utilizando el árbol binomial: “si se tiene un nodo con un precio, justo debajo de la barrera, por ejemplo, la barrera *knock-out* es de 90 y el nodo tiene un valor de 89.95 (el nodo no toca la barrera), con su respectiva probabilidad. Cuando se hace más pequeño el período de tiempo para incrementar el número de períodos (y tener una mejor precisión), el nodo ahora tiene un valor de 90.05 y la opción será *knocked-out*. Por lo que un cambio pequeño en el tamaño del período puede producir un error mayor al que se hubiera producido antes del cambio”. Un árbol con 343 períodos puede tener una muy buena estimación del precio de la opción, mientras que uno con 344 puede proporcionar una estimación pésima.

Por lo anterior, utilizar árboles binomiales y trinomiales comunes en la valuación de opciones de barrera, puede resultar en que la convergencia al valor de la opción sea lenta y errónea, produciendo errores grandes, aún cuando se generen cálculos para miles de períodos de tiempo y millones de nodos. Adicionalmente, las opciones de barrera que son monitoreadas sólo en períodos discretos presentan mayor dificultad para los modelos de enrejado.

A continuación se presentan dos modelos en los que es utilizado el árbol trinomial con ajuste en la barrera para valuar opciones de Barrera. El primero es utilizado para valuar opciones con monitoreo continuo y el segundo con monitoreo discreto.

Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers

Este método fue propuesto por Derman, Kani, Ergener y Bardhan en 1995, es utilizado para valuar opciones de Barrera con monitoreo continuo, este método se encarga de mejorar los resultados obtenidos al valuar la opción con un árbol binomial. Aunque el artículo de estos autores utiliza el árbol binomial en este trabajo

se utiliza uno trinomial, el mismo que se utiliza en el libro “*The Complete Guide To Option Pricing Formulas*”.

Los autores mencionan que hay tres tipos de barrera al valorar esta opción, la barrera modificada, la barrera especificada (la verdadera) y la barrera efectiva (la que corresponde al nodo del precio del subyacente en donde realmente se verifica la condición).

La idea básica del modelo se basa en que la barrera especificada (la verdadera) se encuentra entre dos nodos del árbol. Este método propone que una buena aproximación al valor real de la opción puede ser obtenida al interpolar los dos valores correspondientes al valor de la opción, el valor que toma cuando se mueve hacia el nodo de arriba de la barrera (la barrera efectiva) y al valor de la opción cuando se mueve hacia el nodo de abajo la barrera (la barrera modificada).

Los pasos para calcular el valor de la opción de Barrera por este método son los siguientes:

1. Calcular el valor del activo que proporciona la opción $T(S)$ (este será el valor que obtiene el comprador de la opción, por ejemplo si no existe rebate y la opción termina fuera del dinero el valor será 0) y el valor de la opción $V(S)$ tomando el precio del subyacente que se encuentra por encima de la verdadera Barrera (la barrera especificada) como barrera válida (la barrera efectiva o upper barrier U).
2. Al igual que en el paso anterior, valorar $T(S)$ y $V(S)$ con la barrera, tomando como barrera válida el precio del nodo que se encuentra por debajo (lower barrier D) de la barrera especificada. El valor de $V(S)$ en la barrera modificada es precisamente $T(D)$, el valor que obtiene el comprador si la opción termina dentro del dinero.
3. Reemplace $V(D)$ por el valor $\check{V}(D)$, el cual se obtiene al interpolar entre $V(D)$ y $T(D)$ con respecto a la distancia que existe entre la Barrera Efectiva y la Barrera Modificada:

$$\check{V}(D) = \left(\frac{B-D}{U-D}\right) * V(D) + \left(\frac{U-B}{U-D}\right) * T(D)$$

4. Obtener el valor de la opción como normalmente se obtiene (valuación hacia atrás) con el valor de la Barrera Modificada como valor del nodo en los que se encuentran por debajo de la barrera.

Adaptive Mesh Model (AMM)

Figlewski y Gao en 1999 introdujeron el *Adaptive Mesh Model* (AMM), un modelo flexible que incrementa enormemente la eficiencia de los modelos trinomiales en la valuación de opciones de barrera. En este modelo, secciones de tamaño semi-grueso

(que son más rápidas de calcular) son utilizadas en la mayor parte del árbol, y pequeñas secciones son añadidas dentro de las semi-gruesas en regiones específicas, para incrementar la precisión donde ésta realmente importa.

Presenta como base de enrejado un árbol trinomial, el cual se construye para aproximar el proceso de difusión del precio del activo subyacente con riesgo-neutralizado, este proceso se define como:

$$d \ln S = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente, q es la tasa de pago de dividendos, σ denota la volatilidad, y dW es un movimiento Browniano estándar. Es conveniente que se defina $X \equiv \ln S$ y la media $\alpha \equiv \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, al sustituir estas definiciones en la ecuación anterior se obtiene:

$$dX = \alpha dt + \sigma dW$$

Este proceso es aproximado por el siguiente proceso trinomial (ecuación del proceso trinomial):

$$X_{t+1} - X_t = \begin{cases} \alpha k + \sigma h, & \text{con probabilidad } p_u = \frac{k}{2h^2} \\ \alpha k, & \text{con probabilidad } p_m = 1 - \frac{k}{h^2} \\ \alpha k - \sigma h, & \text{con probabilidad } p_d = \frac{k}{2h^2} \end{cases}$$

donde k es el tamaño del período de tiempo y h es el tamaño del intervalo del precio. Las probabilidades de subir, permanecer y bajar de precio están dadas por p_u , p_m y p_d respectivamente. El valor de la opción para un precio y un período de tiempo, dado $V(X | t)$ es calculado por los valores de los nodos sucesores, como:

$$V(X + t) = \exp(-rk) \{ p_u V(X + \alpha k + \sigma h, t + k) + p_m V(X + \alpha k, t + k) + p_d V(X + \alpha k - \sigma h, t + k) \}$$

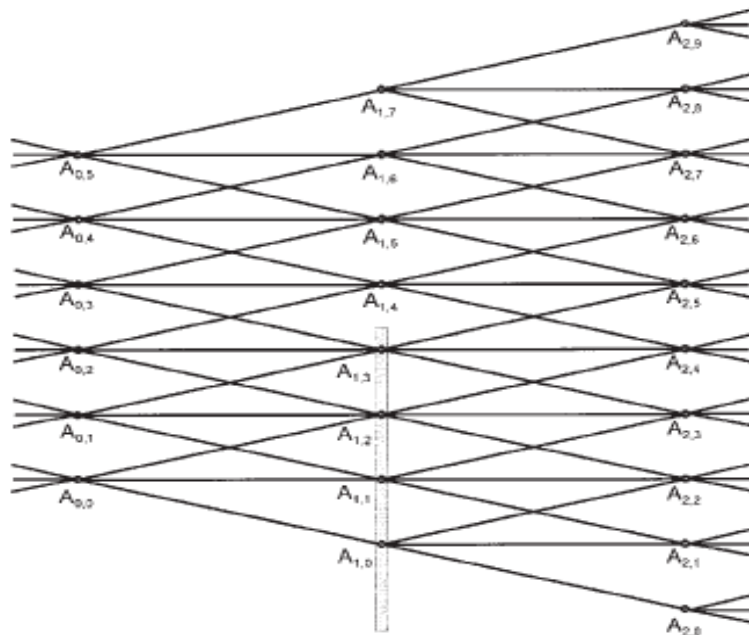
En este trabajo se presenta una estructura isomorfa¹ del AMM, la cual deberá injertarse alrededor del segmento de las barreras discretas.

¹ Isomorfas: que presentan la misma estructura. Para que estructuras aun más finas puedan ser añadidas sobre las ya existentes y se utilice el mismo procedimiento de valuación

Este modelo funciona para h y k positivos, con $h = O(\sqrt{k})$. Si se define $h = \sqrt{3k}$, entonces $p_u = p_d = \frac{1}{6}$ y $p_m = \frac{2}{3}$, y el modelo toma la forma del “High Order Trinomial (A-HOT)” propuesto por Gao en 1997, con el cual, el proceso trinomial discreto relaciona los primeros 5 momentos con los del proceso de difusión continuo log-normal que pretende aproximar. Por lo anterior en este trabajo se utilizará el “A-HOT”.

El árbol trinomial se construye con N períodos, por lo que el período de tiempo k se define como $k = T/N$.

La figura que se presenta a continuación muestra una sección del árbol trinomial alrededor de la barrera discreta. Los nodos provenientes de secciones “semi-gruesas” son etiquetados por $A_{i,j}$, donde i denota el período de tiempo y j la posición del precio. Se debe notar que los índices son relativos al diagrama, por ejemplo, $A_{1,0}$ indica el nodo sobre la barrera para el menor precio. Si se observará el árbol completo, se verían más períodos de tiempo y un mayor número de precios menores a los que se observan.

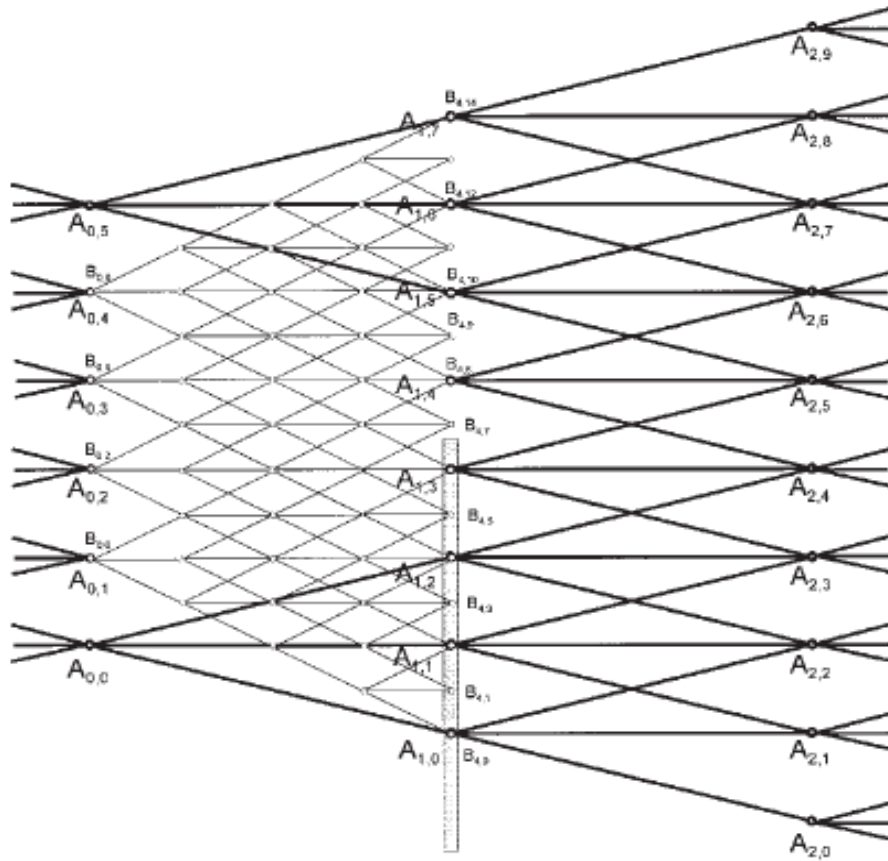


El árbol debe de construirse de tal forma que toque la barrera en donde se unen dos períodos de tiempo.

Para incrementar la resolución del enrejado cerca de la barrera se deben insertar pequeñas secciones en las dos secciones semi-gruesas que se encuentran cercanas a la barrera, es decir, en la que se encuentra antes de la barrera y que se etiquetará como perteneciente al “primer período” de tiempo y en la que se encuentra después de la barrera, la que pertenecerá al “segundo período”.

El AMM añade períodos de tiempo y precio más finos en el “primer período”, reduciendo el tamaño del período de tiempo a $k/4$ y el tamaño del intervalo de precio a $h/2$, las probabilidades para llegar a estos nodos se obtienen de la ecuación del proceso trinomial, al sustituir $k/4$ por k y $h/2$ por h .

Los nodos de las secciones pequeñas se denotan por $B_{i,j}$, y se expresan como antes en forma relativa, éstos deben cubrir a los nodos $A_{0,j}$ de los cuales salen finas trayectorias que tocan y que no tocan la barrera. La siguiente figura muestra cómo se debe ver el árbol hasta este momento.

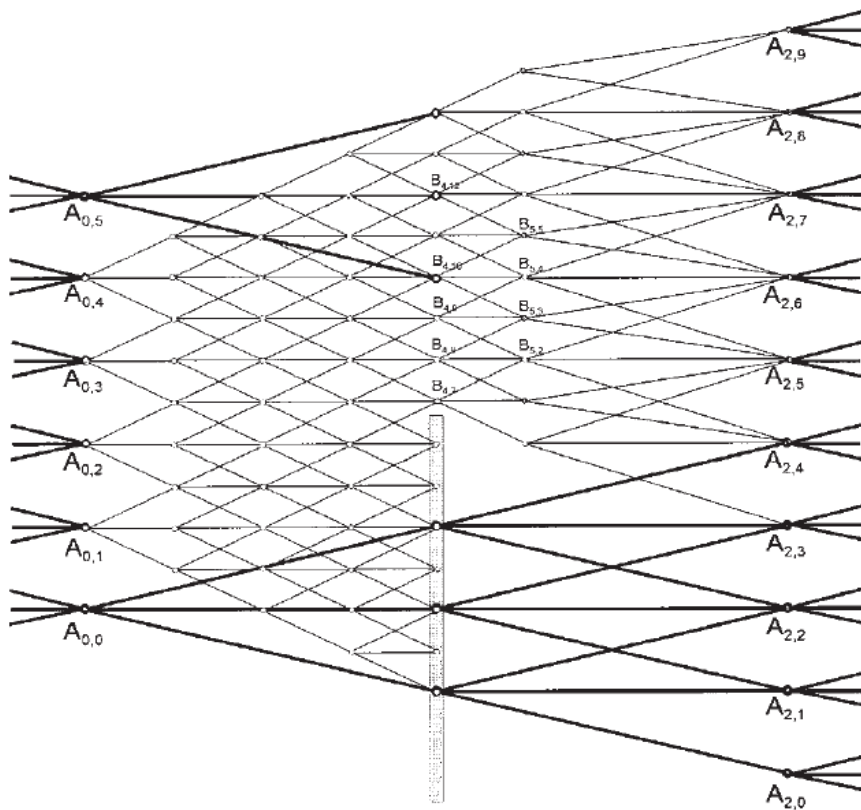


En el siguiente paso se conectan las trayectorias finas del “primer período” con las trayectorias del “segundo período”. Los nodos B , tales como $B_{4,10}$ que se traslapan con los nodos $A_{1,j}$ del “primer período” no presentan ningún problema, a diferencia de los nodos como el $B_{4,9}$ que caen entre dos nodos $A_{1,j}$. Para resolver este problema se dividirá al “segundo período” en dos sub-períodos, el primero de tamaño del período de tiempo igual a $k/4$ y de tamaño del intervalo de precio igual a $h/2$ (estos nodos serán etiquetados con $B_{5,j}$, los nodos $B_{4,j}$ se unirán con los $B_{5,j}$ como se muestra en la figura siguiente), y el segundo de tamaño $3k/4$ y h respectivamente. Las probabilidades que se utilizan para el primer sub-período son las mismas que se utilizaron para los nodos B del “primer período”, de lo anterior se obtienen dos tipos de nodos $B_{5,j}$ nodos para los cuales se permanece sobre el mismo nivel de precio de los nodos A , tal como $B_{5,4}$, los cuales deben unirse como antes con los tres nodos $A_{2,j}$ más cercanos. Las probabilidades pertenecientes a estos nodos se obtienen de “la ecuación del proceso trinomial”, con un tamaño del intervalo de precio de h y un tamaño de período de tiempo de $3k/4$, con esto se obtienen las siguientes probabilidades: $p_u = p_d = \frac{1}{8}$ y $p_m = \frac{3}{4}$.

Para los nodos B que no se encuentran sobre el mismo nivel de precio (los que se encuentran entre dos nodos A), como es el caso de $B_{6,3}$, se pueden utilizar trayectorias cuatrinomiales al unir $B_{6,3}$ a $A_{2,4}$, $A_{2,5}$, $A_{2,6}$ y a $A_{2,7}$. Con $k' = 3k/4$ e igualando los momentos del proceso cuatrinomial a los del log-normal, es decir, al igualar la media, la volatilidad y la curtosis, y al hacer que las probabilidades sumen 1 para las cuatro ecuaciones desconocidas, la solución interesantemente, se colapsa en el modelo binomial, justo en los nodos de en medio como se muestra a continuación:

$$X_{t+1} - X_{t+1/4} = \begin{cases} \alpha k' + \frac{3\sigma h}{2} & \text{con probabilidad } p_{uu} = 0 \\ \alpha k' + \frac{\sigma h}{2} & \text{con probabilidad } p_u = \frac{1}{2} \\ \alpha k' - \frac{\sigma h}{2} & \text{con probabilidad } p_d = \frac{1}{2} \\ \alpha k' - \frac{3\sigma h}{2} & \text{con probabilidad } p_{dd} = 0 \end{cases}$$

La siguiente figura muestra cómo deben quedar unidos los nodos de las diferentes secciones.



La estructura isomorfa del enrejado fino lleva a añadir más enrejados para mejorar la estimación, con períodos de precio y tiempo $h_c = h/4$ y $k_c = k/16$, al usar el mismo procedimiento como el descrito anteriormente. El nivel C se construye con los dos nodos B alrededor de la barrera, empezando en los nodos $B_{4,6}$ en la vecindad de

la barrera, justo un período antes. La implementación se facilita por el hecho de que las subrutinas computacionales pueden ser llamadas recursivamente.

El Método de Simulación Monte Carlo.

Es un método de simulación numérica que se suele utilizar cuando no existen fórmulas cerradas de valuación de opciones, con él se pueden valorar la gran mayoría de las opciones de tipo europeo y múltiples modalidades de exóticas, entre estas últimas se encuentran las opciones de barrera. El método es particularmente útil para “path dependent options”.

Esta metodología fue introducida por Boyle en 1977.

La idea del modelo parte del hecho de que el valor de un derivado es la esperanza del pay-off descontado a valor presente a una tasa libre de riesgo². Así el valor f de un activo que paga f_T en el tiempo T está dado por:

$$f = \exp\{-r * (T - t)\} \bar{E}(f_T)$$

donde \bar{E} denota el valor esperado en un mundo neutral al riesgo. La hipótesis de partida es que el logaritmo natural del activo subyacente sigue un proceso geométrico browniano, de forma tal que:

$$S + dS = S * \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz\right\}$$

donde S es el precio del activo subyacente, μ es la tasa de rendimiento esperada del activo subyacente, σ es la volatilidad del activo subyacente y dz es un proceso de Wiener con media 0 y desviación estándar 1.

Para simular el proceso, se debe transformar la ecuación anterior que se encuentra expresada en forma continua a tiempo discreto, es decir, se tiene que dividir el intervalo de tiempo $T - t$ en intervalos Δt , de forma que se obtenga lo siguiente:

$$S + \Delta S = S * \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}\right\}$$

donde ΔS es la variación en tiempo discreto para S en el intervalo de tiempo Δt y ε_t es un número aleatorio que se distribuye normal estándar $N(0,1)$. Si se realizan miles de simulaciones se obtiene un conjunto de valores para S_t .

² Desarrollo tomado de Wilmott, P. (2000). “On Quantitative Finance”

Para un activo que no paga dividendos la ecuación expresada en forma discreta queda de la siguiente forma:

$$S_{t+1} = S_t * \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}e_t\right\}$$

A medida que la Δt es más pequeña, más precisa es la simulación.

El número de simulaciones depende del nivel de exactitud que se quiere obtener con el modelo. Normalmente a partir de 10,000 simulaciones los resultados obtenidos son fiables. El principal inconveniente de la simulación es el elevado costo computacional, es decir, el tiempo en el que el ordenador ejecuta la simulación.

Los resultados anteriores permiten estimar el valor de las opciones de barrera mediante los pasos siguientes:

1. Simular la trayectoria del precio del activo bajo un mundo neutral al riesgo utilizando la fórmula recursiva (el valor de S_t depende de S_{t-1}), el cálculo se empieza hoy con S_0 , y se termina en la fecha de expiración de la opción S_T . Con esto se tiene la realización del precio del activo subyacente en la fecha de ejercicio S_T .
2. Para esta realización hay que considerar que se cumplan las condiciones para tener derecho a ejercer las opciones de barrera, es decir, ver que el precio del activo subyacente en las fechas de monitoreo f_m cumplan lo siguiente: para una opción up-and-in $S_{f_m} \geq X$, para una down-and-in $S_{f_m} \leq X$, para una up-and-out $S_{f_m} < X$ y para una down-and-out $S_{f_m} > X$, en otros casos el valor de esta realización es 0.
3. Con la información anterior se calcula el *pay-off*.
4. Realizar un número considerable de observaciones sobre el tiempo de horizonte
5. Calcular el valor promedio sobre todos los *pay-offs* que se realizaron (incluyendo los valores de 0).
6. Tomar el valor presente de este promedio, este es el valor de la opción.

Como en la primera parte de este algoritmo se requiere de la generación de números aleatorios provenientes de una distribución normal estándar, a continuación se describen el Método de Halton (buen generador de números aleatorios provenientes de una distribución uniforme) y el Método de Box Muller (buen generador de números aleatorios provenientes de una distribución normal estándar), cabe mencionar que los números de Halton serán empleados en el Método de Box Muller.

El método de Halton genera una sucesión de n números aleatorios distribuidos uniformemente: $h(i, b)$ para $i=1, \dots, n$, donde b es un número primo que se denomina la base. El modelo consiste en escribir los n enteros positivos en orden ascendente en la base b (que en para este trabajo será $b=2$), es decir, 1, 10, 11, 100, etc., por lo que el entero i se puede escribir de la siguiente forma:

$$i = \sum_{j=1}^m a_j b^j \text{ en base } b, \text{ donde } 0 \leq a_j \leq b.$$

Por lo anterior los números de Halton están dados por:

$$h(i, b) = \sum_{j=1}^m a_j b^{-j-1}.$$

El método Box-Muller toma dos números aleatorios distribuidos uniformemente x_1 y x_2 entre 0 y 1, los cuales son generados por el Método de Halton, y los modifica como se muestra a continuación, para generar dos números aleatorios ambos distribuidos normalmente:

$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) \text{ y } y_2 = \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2)$$

La aproximación a la distribución normal usando la sucesión de Halton y el método de Box Muller da un mejor resultado del valor de la opción, pero como la simulación Monte Carlo es ineficiente comparada con el método de diferencias finitas, en dimensiones menores a 3, aún cuando se utilicen buenos generadores de números aleatorios, se puede conseguir un mejor precio utilizando la técnica “Antithetic Variables”.

Esta técnica consiste en realizar dos estimaciones para el valor de la opción. Para la primera se generan los números aleatorios normales y con ellos se obtiene una realización del precio del activo, el pay-off de la opción y su valor presente. Después se toma el mismo conjunto de números aleatorios pero se cambia el signo de éstos, así cambiamos \emptyset por $-\emptyset$. Otra vez se simula una realización, se obtiene el pay-off y se trae a valor presente. El estimado para la opción es el promedio de estos dos valores. Realizar esta operación muchas veces consigue un mejor estimado del valor de la opción.

IV. Código del Programa Valuación de Opciones de Barrera en Matlab.

- Código para Opciones de Barrera con monitoreo discreto: Modelo con corrección a la Fórmula

```
function val=correccion(H,S,X,T,v,b,nop,c,noveces)

veces=T/noveces;
K=X;
r=b;
b=0;
Rb=0;
if c==1
    c=2;
end
if H>S
    rie=-zeta(1/2)/(sqrt(2*pi()));
elseif H<S
    rie=zeta(1/2)/(sqrt(2*pi()));
end

H=H*exp(rie*v*sqrt(veces));

mu=(b-(v*v/2))/(v*v);
lambda=sqrt(mu*mu+((2*r)/(v*v)));
x1=(log(S/K)/(v*sqrt(T)))+(1+mu)*v*sqrt(T);
y1=log((H*H)/(S*K))/(v*sqrt(T))+(1+mu)*v*sqrt(T);
x2=(log(S/H)/(v*sqrt(T)))+(1+mu)*v*sqrt(T);
y2=log(H/S)/(v*sqrt(T))+(1+mu)*v*sqrt(T);
z1=log(H/S)/(v*sqrt(T))+lambda*v*sqrt(T);

if H>S
    if and(nop==1,c==1)
        if K>H
            val=S*exp((b-r)*T)*normcdf(x1)-K*exp(-r*T)*normcdf(x1-
                v*sqrt(T))+Rb*exp(-r*T)*(normcdf(-x2+v*sqrt(T))-
                ((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y2+v*sqrt(T)));
        elseif K<H
            val=S*exp((b-r)*T)*normcdf(x2)-K*exp(-r*T)*normcdf(x2-v*sqrt(T))-
                S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y1)+K*exp(-
                r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y1+v*sqrt(T))+S*exp((b-
                r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y2)-K*exp(-
                r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y2+v*sqrt(T))+Rb*exp(-r*T)*(normcdf(-
                x2+v*sqrt(T))-((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y2+v*sqrt(T)));
        end
    elseif and(nop==1,c==2)
        if K>H
            val=-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x1)+K*exp(-r*T)*normcdf(-x1+v*sqrt(T))-
                (-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x2)+K*exp(-r*T)*normcdf(-x2+v*sqrt(T)))-
                S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y2)+K*exp(-
                r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y2+v*sqrt(T))+Rb*exp(-r*T)*(normcdf(-
                x2+v*sqrt(T))-((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y2+v*sqrt(T)));
        elseif K<H
            val=-S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y1)+K*exp(-
                r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y1+v*sqrt(T))...
                +Rb*exp(-r*T)*(normcdf(-x2+v*sqrt(T))-((H/S)^(2*mu))*normcdf(-
                y2+v*sqrt(T)));
        end
    elseif and(nop==3,c==1)

```

```

if K>H
    val=Rb*((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(-z1)-((H/S)^(mu-lambda))*normcdf(-
        z1+2*lambda*v*sqrt(T));
elseif K<H
    val=S*exp((b-r)*T)*normcdf(x1)-K*exp(-r*T)*normcdf(x1-v*sqrt(T))-
        S*exp((b-r)*T)*normcdf(x2)+K*exp(-r*T)*normcdf(x2-v*sqrt(T))+S*exp((b-
        r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y1)-K*exp(-
        r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y1+v*sqrt(T))-S*exp((b-
        r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y2)...
        +
        K*exp(-r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-
        y2+v*sqrt(T))+Rb*((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(-z1)-((H/S)^(mu-
        lambda))*normcdf(-z1+2*lambda*v*sqrt(T));
end
elseif and(nop==3,c==2)
    if K>H
        val=-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x2)+K*exp(-r*T)*normcdf(-
            x2+v*sqrt(T))+S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y2)-K*exp(-
            r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-y2+v*sqrt(T))+
            Rb*((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(-z1)-((H/S)^(mu-lambda))*normcdf(-
            z1+2*lambda*v*sqrt(T));
    elseif K<H
        val=-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x1)+K*exp(-r*T)*normcdf(-
            x1+v*sqrt(T))+S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(-y1)-K*exp(-
            r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(-
            y1+v*sqrt(T))+Rb*((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(-z1)-((H/S)^(mu-
            lambda))*normcdf(-z1+2*lambda*v*sqrt(T));
    end
end
elseif H<=S
    val=0;
end

if H<S
    if and(nop==2,c==1)
        if K>H
            vv=S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y1)-K*exp(-
                r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y1-v*sqrt(T))+Rb*exp(-
                r*T)*(normcdf(x2-v*sqrt(T))-((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-
                v*sqrt(T)));
        elseif K<H
            vv=S*exp((b-r)*T)*normcdf(x1)-K*exp(-r*T)*normcdf(x1-
                v*sqrt(T))-S*exp((b-r)*T)*normcdf(x2)+K*exp(-r*T)*normcdf(x2-
                v*sqrt(T))+S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y2)-
                K*exp(-r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-v*sqrt(T))+Rb*exp(-
                r*T)*(normcdf(x2-v*sqrt(T))-((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-
                v*sqrt(T)));
        end
    elseif and(nop==2,c==2)
        if K>H
            vv=-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x2)+K*exp(-r*T)*normcdf(-
                x2+v*sqrt(T))+S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y1)-
                K*exp(-r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y1-v*sqrt(T))-S*exp((b-
                r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y2)+K*exp(-
                r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-v*sqrt(T))+Rb*exp(-
                r*T)*(normcdf(x2-v*sqrt(T))-((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-
                v*sqrt(T)));
        elseif K<H
            vv=-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x1)+K*exp(-r*T)*normcdf(-
                x1+v*sqrt(T))+Rb*exp(-r*T)*(normcdf(x2-v*sqrt(T))-
                ((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-v*sqrt(T)));
        end
    end
end

```

```

elseif and(nop==4,c==1)
    if K>H
        val=S*exp((b-r)*T)*normcdf(x1)-K*exp(-r*T)*normcdf(x1-v*sqrt(T))-
        S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y1)+K*exp(-
        r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y1-
        v*sqrt(T))+Rb*(((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(z1)-((H/S)^(mu-
        lambda))*normcdf(z1-2*lambda*v*sqrt(T)));
    elseif K<H
        val=S*exp((b-r)*T)*normcdf(x2)-K*exp(-r*T)*normcdf(x2-v*sqrt(T))-
        S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y2)+K*exp(-
        r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2)-
        v*sqrt(T))+Rb*(((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(z1)-((H/S)^(mu-
        lambda))*normcdf(z1-2*lambda*v*sqrt(T)));
    end
elseif and(nop==4,c==2)
    if K>H
        val=-S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x1)+K*exp(-r*T)*normcdf(-
        x1+v*sqrt(T))+S*exp((b-r)*T)*normcdf(-x2)-K*exp(-r*T)*normcdf(-
        x2+v*sqrt(T))-S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*
        normcdf(y1)+K*exp(-r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y1-
        v*sqrt(T))+S*exp((b-r)*T)*((H/S)^(2*(mu+1)))*normcdf(y2)-K*exp(-
        r*T)*((H/S)^(2*mu))*normcdf(y2-v*sqrt(T))
        +Rb*(((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(z1)-((H/S)^(mu-lambda))*normcdf(z1-
        2*lambda*v*sqrt(T)));
    elseif K<H
        val=Rb*(((H/S)^(mu+lambda))*normcdf(-z1)-((H/S)^(mu-lambda))*normcdf(-
        z1+2*lambda*v*sqrt(T)));
    end
end
elseif H<=S
    val=0;
end
end
end

```

- Código para Opciones de Barrera con monitoreo discreto Modelo de Simulación MonteCarlo.

```

function vv=simmon_6(H,S,v,b,T,nsim,X,c,nop,noveces,m,tk1)

if noveces>0
n=m*noveces+1;
else n=m+1;
end
dt=T/(n-1);
drift=(b-v*v*0.5)*dt;
vsqrt=v*sqrt(dt);
sum=0;
Sp=eye(n,n);

    if or(nop==1,nop==3)
        if S>=H
            H=input('Teclea una barrera "H" mayor al precio inicial
            del activo "S"');
        end
    elseif or(nop==2,nop==4)
        if S<=H
            H=input('Teclea una barrera "H" menor al precio inicial
            del activo "S"');
        end
    end

```



```

end
%
f=figure('Name','Gráfica','Toolbar','none','NumberTitle','off','Unit
s','normalized','Position',[0.23 0.345 .71 .465]);

if noveces>0
    for j=1:nsim
        if or(nop==1,nop==2)
            barrierhitprob=0;
        elseif or(nop==3,nop==4)
            barrierhitprob=1;
        end
        Sp(1,1)=S;
        counter=0;
        %colores=rand(3,1);
        tk=m*(noveces-1)+tk1;
        for i=2:n;
            Sp(i,i)=Sp(i-1,i-1)*exp(drift+vsqrt*muller1);
            if i==tk+1
                if nop==1
                    if Sp(i,i)>=H
                        counter=counter+1;
                        barrierhitprob=1;
                    end
                elseif nop==2
                    if Sp(i,i)<=H
                        counter=counter+1;
                        barrierhitprob=1;
                    end
                elseif nop==3
                    if Sp(i,i)>=H
                        counter=counter+1;
                        barrierhitprob=0;
                    end
                elseif nop==4
                    if Sp(i,i)<=H
                        counter=counter+1;
                        barrierhitprob=0;
                    end
                end
            end
            if noveces>1
                noveces=noveces-1;
                tk=(noveces-1)*m+tk1;
            end
        end

        %while (j<5)
        %plot([i-1 i], [Sp(i-1,i-1) Sp(i,i)],'color',colores)
        %plot([i-1 i], [H H],'b')
        %hold on
        %end
        end

        %saveas(gcf,'f.fig')

    if counter>=1
        if or(nop==1,nop==2)
            sum=sum+(barrierhitprob)*max(c*(Sp(n,n)-X),0);
        end
    end
end

```

```

end
if counter==0;
    if or(nop==3,nop==4)
        sum=sum+(barrierhitprob)*max(c*(Sp(n,n)-X),0);
    end
end
end

vv=exp(-b*T)*(sum/nsim); ...

```

- Código para Opciones de Barrera con continuo Modelo basado en el árbol binomial propuesto por Derman, Bardhan, Ergener y Kani.

```

function f=TrinomialTree_barrera_ad2(c,S,X,H,T,b,v,n,nop)

r=b;
b=0;
dt=T/n;
u=exp(v*sqrt(2*dt));
d=exp(-v*sqrt(2*dt));
pu=((exp(b*dt/2)-exp(-v*sqrt(dt/2)))/(exp(v*sqrt(dt/2))-exp(-v*sqrt(dt/2))))^2;
pd=((exp(v*sqrt(dt/2))-exp(b*dt/2))/(exp(v*sqrt(dt/2))-exp(-v*sqrt(dt/2))))^2;
pm=1-pu-pd;
Df=exp(-r*dt);
m=n+1;
OptionValue=zeros(2*n+1,n+1);
St1=zeros(2*n+1,n+1);
St2=zeros(2*n+1,n+1);

for i=0:1:2*n
    St1(2*n-i+1,n+1)=S*u^max(i-n,0)*d^max(n*2-n-i,0);
    St2(2*n-i+1,n+1)=St1(2*n-i+1,n+1)*d;
    OptionValue(2*n-i+1,n+1) = max(0,c*(St1(2*n-i+1,n+1)-X));
    if nop==3
        if and(and(St1(2*n-i+1,n+1)>H,St2(2*n-i+1,n+1)<=H),i-1>0)
            OptionValue(2*n-i+1,n+1) = (H-St2(2*n-i+1,n+1))/(St1(2*n-i+1,n+1)-St2(2*n-i+1,n+1))*(OptionValue(2*n-i+2,n+1)-0);
        elseif and(St1(2*n-i+1,n+1) >H,St2(2*n-i+1,n+1)>H)
            OptionValue(2*n-i+1,n+1)=0;
        end
    elseif nop==4
        if St1(2*n-i+1,n+1) <= H
            OptionValue(2*n-i+1,n+1)=0;
        elseif and(and(St1(2*n-i+1,n+1)>H,St2(2*n-i+1,n+1)<=H),i-1>0)
            OptionValue(2*n-i+1,n+1) = (St1(2*n-i+1,n+1)-H)/(St1(2*n-i+1,n+1)-St2(2*n-i+1,n+1))*(OptionValue(2*n-i+1,n+1)-0);
        end
    end
end
end

s=m;
for j=1:m
    for i=s

```

```

        St1(i,j)=S*(u^(j-1));
    end
    s=s-1;
end

s=0;
for j=1:m
    for i=s
        St1(i+m,j)=S*(d^(j-1));
    end
    s=s+1;
end

l=m;
s=m;
for j=1:(m-1)
    for i=s:l
        St1(i,j+1)=u*d*St1(i,j);
    end
    s=s-1;
    l=l+1;
end

for j=1:m
    for i=1:2*n+1
        St2(i,j)=St1(i,j)*d;
    end
end

k1=1;
k2=2*n;

for j=m-1:-1:1
    for i=k1+1:k2
        OptionValue(i,j)=(pu*OptionValue(i-1,j+1)
            +pm*OptionValue(i,j+1)+pd*OptionValue(i+1,j+1))*Df;
        if nop==3
            if and(and(St1(i,j)>H,St2(i,j)<=H),i-1>0) %Derman
barrier correction
                OptionValue(i,j)=(H-St2(i,j))/(St1(i,j)-
                    St2(i,j))*(OptionValue(i+1,j)-0);
            elseif and(St1(i,j)>H,St2(i,j)>H)
                OptionValue(i,j)=0;
            end
        elseif nop==4
            if St1(i,j)<=H
                OptionValue(i,j)=0;
            elseif and(and(St1(i,j)>H,St2(i,j)<=H),i-1>0) %Derman
barrier correction
                OptionValue(i,j)=(St1(i,j)-H)/(St1(i,j)-
                    St2(i,j))*(OptionValue(i,j)-0);
            end
        end
    end
    k1=k1+1;
    k2=k2-1;
end

f= OptionValue(n+1,1);
end

```

Resultados.

A continuación se presentan los resultados de la valuación por distintos métodos utilizando los programas presentados en la sección anterior.

- Up and in Call

Up and in call Opción 1	
H	525
S	500
X	540
r	7%
σ	30%
veces	3
T	1

Up and in call Opción 2	
H	1000
S	900
X	950
r	7%
σ	30%
veces	3
T	2

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	40.72990	40.87130	0%
Opción 2	105.38100	112.13700	-6%

- Up and in Put

Up and in put Opción 1	
H	510
S	500
X	600
r	7%
σ	10%
veces	1
T	1

Up and in put Opción 2	
H	120
S	100
X	110
r	7%
σ	20%
veces	3
T	1

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	24.99710	23.81840	5%
Opción 3	0.14745	0.15682	-6%

- Down and in Call

Down and in call Opción 1	
H	90
S	100
X	40
r	7%
σ	25%
veces	1
T	1

Down and in call Opción 2	
H	330
S	360
X	350
r	15%
σ	20%
veces	2
T	1

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	11.94480	12.53510	-5%
Opción 2	1.49297	1.57881	-5%

- Down and in Put

Down and in put Opción 1	
H	350
S	400
X	375
r	5%
σ	20%
veces	1
T	1

Down and in put Opción 2	
H	115
S	120
X	110
r	7%
σ	40%
veces	1
T	1

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	13.78660	14.79430	-7%
Opción 2	12.27990	12.40590	-1%

- Up and out Call

Up and out call Opción 1	
H	200
S	175
X	150
r	7%
σ	10%
veces	1
T	1

Up and out call Opción 2	
H	700
S	500
X	400
r	3%
σ	20%
veces	1
T	2

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	21.39520	20.79460	3%
Opción 2	82.08140	85.05050	-3%

Método	Val Tree Derman	Val Continuo	Diferencia
Opción 1	16.36110	15.77220	4%
Opción 2	55.36050	53.06950	4%

- Up and out Put

Up and out put Opción 1	
H	700
S	550
X	600
r	4%
σ	30%
veces	1
T	1

Up and out put Opción 2	
H	150
S	96
X	95
r	5%
σ	30%
veces	1
T	1

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	90.90710	92.73640	-2%
Opción 2	9.55172	10.36250	-8%

Método	Val Tree Derman	Val Continuo	Diferencia
Opción 1	87.12510	85.84600	1%
Opción 2	10.35990	10.35260	0%

- Down and out Call

Down and out call Opción 1	
H	50
S	175
X	125
r	4%
σ	20%
veces	2
T	1

Down and out call Opción 2	
H	100
S	150
X	200
r	4%
σ	20%
veces	1
T	1

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	50.06030	48.58000	3%
Opción 2	1.22089	1.11679	9%

- Up and out Call

Up and out call Opción 1	
H	200
S	175
X	150
r	7%
σ	10%
veces	1
T	1

Up and out call Opción 2	
H	700
S	500
X	400
r	3%
σ	20%
veces	1
T	2

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	21.39520	20.79460	3%
Opción 2	82.08140	85.05050	-3%

Método	Val Tree Derman	Val Continuo	Diferencia
Opción 1	16.36110	15.77220	4%
Opción 2	55.36050	53.06950	4%

- Up and out Put

Down and out put Opción 1	
H	100
S	175
X	250
r	2%
σ	35%
veces	1
T	1

Down and out put Opción 2	
H	50
S	175
X	125
r	5%
σ	20%
veces	2
T	1

Método	Val MonteCarlo	Val Corrección	Diferencia
Opción 1	69.98310	72.61880	-4%
Opción 2	0.55128	0.53511	3%

Método	Val Tree Derman	Val Continuo	Diferencia
Opción 1	57.57270	58.37050	-1%
Opción 2	0.53460	0.53511	0%

Conclusiones y propuestas.

- De los resultados anteriores se puede concluir, que la valuación de las opciones de Barrera con monitoreo continuo con el modelo propuesto por Derman, Bardhan, Ergener y Kani es una buena aproximación a la fórmula desarrollada por Merton y Reiner y Rubinstein, dado que las diferencias entre estos modelos es no significativa.
- Aunque la diferencia en algunos casos fue superior al 5%, se puede concluir que la valuación por el método de Simulación MonteCarlo utilizada para las opciones de Barrera con monitoreo discreto es una buena aproximación al modelo de Corrección a la fórmula, ya que no es fácil implementar la característica de monitoreo discreto en los modelos propuestos para su valuación.

Dado que el modelo propuesto por Derman, Bardhan, Ergener y Kani arrojo aproximaciones satisfactorias (basándose este modelo en un árbol trinomial) se propone desarrollar el Adaptive Mesh Model para la valuación de opciones de Barrera con monitoreo discreto, esto con la finalidad de incorporar características más complejas (cuando hay más de dos subyacentes, etc.) en este tipo de opciones debido a que las fórmulas analíticas no aplican en estos casos.

Bibliografía

- Broadie, M., P. Glasserman, and S. Kou “*A Continuity Correction for Discrete Barrier Options*” *Mathematical Finance*, (1997), pp. 325-349.
- Broadie, M., P. Glasserman, and Kou, S.G. “*Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options*” *Financial Stochastic*, 3 (1999), pp. 55-82.
- Boyle, P.P., and S.H. Lau, “*Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method.*” *Journal of Derivatives*, 2 (1994), pp. 6-14.
- Chriss N.A. “*Black-Scholes and Beyond Option Pricing Models*” (1997), McGraw-Hill
- Derman, E., I. Bardhan, D. Ergener and I. Kani (1995) “*Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers*”, *Financial Analysts Journal*, November-December, 65-74.
- Dong-Hyun, A., Figlewski, S., and Gao, B. “*Pricing Discrete Barrier Options with an Adaptive Mesh Model*” *Journal of Derivatives*, (Summer 1999), pp. 34-43.
- Figlewski, S., and Gao, B. “*The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing.*” *Journal of Financial Economics*, 53 (1999), pp. 313–351.
- Haug, E.G. (2007) “*The Complete Guide To Option Pricing Formulas*” (2nd Edition). McGraw-Hill
- Hull, J. C. (2003). “*Options, futures, and other derivatives*” (5th Edition). Prentice Hall, New Jersey.
- Marsden Jerrold E., Tromba Anthony J. (1991). “*Cálculo Vectorial*” (3era. Edición). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Rivera, P. I. “*Opciones con Barrera y Opciones Parisinas con volatilidad estocástica: una aplicación Monte Carlo al mercado de derivados energéticos*” Marzo 2006, ITESM.
- Venegas Martínez, Francisco. (2008). “*Riesgos financieros y económicos*”, (2da. Edición), CENAGE Learning.
- Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J.N. (1999) “*The Mathematics of Financial Derivatives*”, Cambridge University Press.
- Wilmott, P. (2000). “*On Quantitative Finance*” (1st Edition), Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.