UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACION DE OPCIONES LOOKBACK

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

REYNA MARÍA BANDA GONZÁLEZ

TUTOR:
M. EN C. AGUSTÍN ROMÁN AGUILAR

2008

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   Apellido paterno: Banda
   Apellido materno: González
   Nombre (s): Reyna María
   Teléfono: 55 73 96 19
   Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad o escuela: Facultad de Ciencias
   Carrera: Actuaría
   No. de cuenta: 099041353

2. Datos del tutor
   Grado: M en C
   Apellido paterno: Román
   Apellido materno: Aguilar
   Nombre(s): Agustín

3. Datos del sinodal 1
   Grado: Dra.
   Apellido paterno: Bernabé
   Apellido materno: Rocha
   Nombre(s): Araceli

4. Datos del sinodal 2
   Grado: Dr.
   Apellido paterno: Lorenzo
   Apellido materno: Valdés
   Nombre(s): Arturo

5. Datos del sinodal 3
   Grado: Act.
   Apellido paterno: Pérez Tejada
   Apellido materno: López
   Nombre(s): Fernando Alonso

6. Datos del sinodal 4
   Grado: Act.
   Apellido paterno: Ramos
   Apellido materno: García
   Nombre(s): Sandra Cristina

3. Datos del trabajo escrito.
   Título: Valuación de opciones exóticas y derivados de crédito
   Subtitulo: Valuación de opciones lookback
   No. de páginas: 68 p
   Año: 2008

AGRADECIMIENTOS

A Dios:
Por estar conmigo en cada momento de mi vida y permitirme compartir este logro con mis seres queridos.
Gracias Señor.

A la Universidad Nacional Autónoma de México
Por permitirme pertenecer a ella.
Es todo un orgullo.

A mis padres y hermanas:
Gracias por brindarme su amor, su apoyo, su confianza, sus consejos y todas las herramientas necesarias para poder llegar concluir una de mis metas más importantes.

A Luis Fernando:
Por su amor y paciencia,
gracias amor por compartir este
momento conmigo.

A mis amigos:
Gracias por su apoyo incondicional,
y por todos los buenos momentos compartidos.

Reyna María Banda González

Contenido

INTRODUCCIÓN

Dentro de las opciones exóticas, existen la opciones *lookback* las cuales fueron presentadas por primera vez en 1979 por *Goldman*, *Sosin y Gatto*, pero fue hasta la década de los noventas donde tuvieron un gran desarrollo y una creciente aplicación, lo cual tiene un gran impacto en los diferentes mercados de capitales mundiales, implementándose ya como instrumento útil para cubrir el riesgo

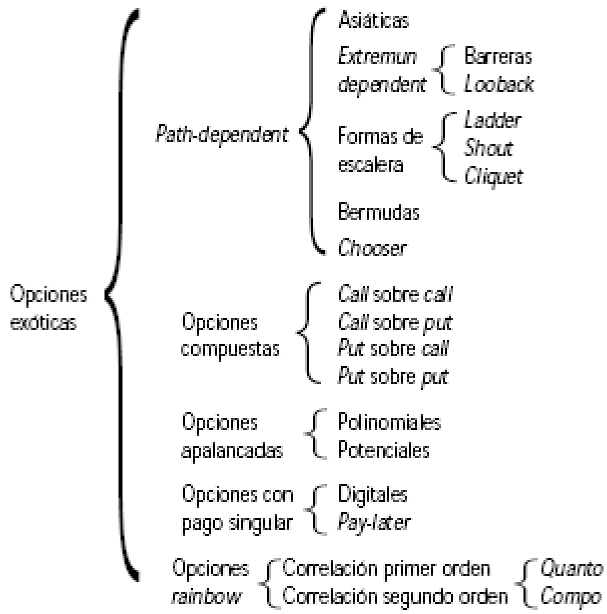
Lo que caracteriza a estas opciones es que el pago o *payoff* de la opción depende del precio mínimo para la compra y máximo para la venta observado durante la vida de la opción [0,T]

El payoff de una call lookback europea es el precio mínimo del subyacente observado durante la vida de la opción siempre que esta sea mayor en el momento del ejercicio.

El payoff de una put lookback europea es el precio máximo del subyacente observado, durante la vida de la opción, siempre que este sea mayor al precio del subyacente en el momento del ejercicio.

Las opciones lookback a diferencia de las vanila, ofrecen seguridad al poseedor que gusta de no correr riesgos debido al cambio de precios y la incertidumbre que esto genera a consecuencia de diversos cambios económicos y políticos que repercuten en el ámbito financiero.

A continuación se muestra la clasificación de las opciones exóticas.



Las opciones lookback, se encuentran dentro del grupo Path-Dependent, en la cuales el precio de estas no depende sólo del valor del subyacente que tenga al vencimiento, sino que toma en cuenta su historia.

En el capitulo 1, definiremos brevemente las opciones lookback así como los tipos, call, put, europeas, americanas, y sus respectivos tipos de pago, así como sus posiciones y precios.

En el capitulo 2, veremos los modelos de valuación analíticos, para las opciones en estudio con precio de ejercicio fijo y para las de precio de ejercicio flotante, para las primeras el modelos del Goldman Sosin y Gatto y para las segundas el modelos de Conze y Viswanathan, en ambos modelos se dan los supuestos y su forma de valuación.

En el capitulo 3, daremos una introducción a los métodos numéricos, Binomial y Montecarlo, para los cuales se desarrollo un algoritmo para la valuación de las opciones lookback.

CAPITULO 1

CARACTERISTICAS DE LAS OPCIONES LOOKBACK

1.1 Introducción

En este capitulo definiremos las opciones lookback, las cuales son del tipo de opciones exóticas, en especial de las path-dependent, veremos en que consiste las opciones call, put, la diferencia entre las europeas y americanas, así como sus tipos de pago.

1.2 Opciones Lookback

Compra

La opción *lookback* de compra otorga al propietario de ésta, el derecho, más no la obligación de ejercerla en un tiempo establecido, y a un precio determinado, es decir, el poseedor tiene la opción de comprar o no el subyacente al precio mínimo observado durante toda la vida de la opción.

Venta

La opción *lookback* de venta otorga al poseedor de ésta, el derecho, mas no la obligación de ejercerla en un tiempo establecido y a un precio determinado, es decir, el propietario tiene la opción de vender o no el subyacente al precio máximo observado durante toda la vida de la opción.

1.3 Opción Lookback Europea

También se clasifican al igual que todas las opciones de acuerdo a la fecha en que pueden ser ejercidas, es decir, una opción *lookback* europea, se puede ejercer únicamente hasta la fecha de vencimiento, es decir, hasta ese momento el poseedor de una opción de venta, tiene la opción de vender al precio máximo observado durante la vida de la misma o no hacerlo. De igual forma, sólo hasta el vencimiento de una opción de compra, el propietario tiene la opción de comprar al precio mínimo observado durante la vida de la opción.

1.4 Opción Lookback Americana

Las opciones *Lookback* Americanas, a diferencia de las europeas, pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la fecha de su vencimiento. En otras palabras, las opciones *lookback* americanas le dan al poseedor el derecho mas no la obligación de comprar al precio mínimo alcanzado, hasta el momento en el que crea conveniente ejercer y para una opción de venta, le da al propietario de ésta el derecho mas no la obligación de vender al precio máximo observado hasta el momento en que se crea ejercerla, por esta razón este tipo de opción es mas costosa que la europea.

1.5 Posiciones

En todo contrato existen dos partes, es decir, dos posiciones: la posición larga y la posición corta:

La *posición larga* la toma quien compra una opción de compra o de venta, es decir, quien adquiere el derecho de comprar al precio máximo alcanzado o de vender al precio mínimo observado durante la vida de la opción para que pueda ser ejercida en cualquier momento antes del vencimiento o hasta la fecha de vencimiento.

La *posición corta* la toma quien vende el derecho de comprar o vender, es decir, quien vende el derecho de comprar al precio minino o de vender al precio máximo observados durante la vida de la opción para ser ejercida hasta el vencimiento o en cualquier momento antes de este.

1.6 *Payoffs* o precios al ejercicio de la opción

El precio de liquidación de una opción vanilla de compra europea se determina como:

$$C(T) = \max(S(T)) - k, 0) \qquad (1.1)$$

Donde k es el precio de ejercicio, T la fecha de vencimiento

Ahora bien en el caso particular de una opción de compra *lookback*, el precio al ejercicio o *payoff* es:

$$C(T) = \max(S(T) - \min S_u, 0) \tag{1.2}$$

Donde $u \in [0, T]$

S_u -Precio del subyacente

El propietario de la opción estará comprando, en el caso de ejercer su derecho, el subyacente al menor precio observado desde el inicio del contrato hasta su fecha de vencimiento.

El precio al ejercicio o *payoff* de una opción vanilla europea de venta es:

$$C(T) = \max(k - S(T), 0) \tag{1.3}$$

En nuestro caso para una *lookback* de venta es:

$$P(T) = \max(\max S_u - S(T), 0) \tag{1.4}$$

$$u \in [0, t]$$

Ahora el tenedor del instrumento estará vendiendo, en caso de ejercer su derecho, el activo subyacente al mayor precio observado durante la vigencia del contrato.

CAPITULO 2

MODELOS DE VALUACION DE OPCIONES LOOKBACK

MODELO GOLDMAN, SOSIN Y GATTO

Opciones Lookback con precio de ejercicio flotante

2.1.1Introducción

En este capítulo mostraremos los métodos analíticos para el tipo de opciones lookback, en esta primera sección veremos el modelo de ***Goldman, Sosin y Gatto*** (1979) para valuar las opciones europeas de precio flotante, así como los supuestos y los fundamentos de este modelo.

2.1.2 Valuación de opciones

Supuestos

i. El precio del subyacente, es modelado por un movimiento Browniano Geométrico, es decir, el precio es log-normal o el rendimiento es normal. Sea $\{W_t\}_{t\in[0.t]}$ un movimiento Browniano Geométrico sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\in[0,t]}, \mathrm{P})$. Suponemos que el precio del subyacente se modela por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.1}$$

ii. La volatilidad, σ, es constante

iii. No hay oportunidad de arbitraje

Notación

0: tiempo en el que se emite la opción

t: fecha de valuación

T: fecha de vencimiento

S_t : Precio del subyacente

q : Tasa de rendimientos

r : Tasa libre de riesgo

σ : Volatilidad

El pago al ejercicio de la opción de compra está definido de la siguiente forma:

$$\max(S_T - m_T^S, 0) = S_T - m_T^S \tag{2.2}$$

Donde $m_T^s = \min_{u\in[0,T]} S_u$

El pago al ejercicio de la opción de venta está definido de la siguiente forma:

$$\max(M_T^S - S_T, 0) = M_T^S - S_T \tag{2.3}$$

Donde $M_T^S = \max_{u\in[0,T]} S_u$

El precio al tiempo t de una opción europea de compra que paga dividendos a una tasa continua q con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente es[1]:

$$\begin{aligned} c_m &= S_t e^{-q(T-t)}\phi(d_m) - m_t^S e^{-r(T-t)}\phi\left(d_m - \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &+ \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{k}\left[\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right)^{-k}\phi\left(-d_m + k\sigma\sqrt{T-t}\right) - e^{(r-q)(T-t)}\phi(-d_m)\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$k = \frac{2(r-q)}{\sigma^2} \tag{2.5}$$

[1] Ver Black, F. and M. Sholes (1973). “The pricing of Opcions and Corporate Liabilities”. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654

$$d_m = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.6}$$

El precio al tiempo t de una opción europea de venta que paga dividendos a una tasa continua q con precio de ejercicio igual al valor máximo del subyacente es[2]:

$$\begin{aligned} p_M &= M_t^S e^{-r(T-t)}\phi\left(-d_M + \sigma\sqrt{T-t}\right) - S_t e^{-q(T-t)}\phi\left(-d_M\right) \\ &+ \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{k}\left[-\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right)^{-k}\phi\left(d_M + k\sigma\sqrt{T-t}\right) - e^{r(T-t)}\phi\left(d_M\right)\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde

$$d_M = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{M_t^S}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.8}$$

y

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{2.9}$$

[2]Ver Black, F. and M. Sholes (1973). “The pricing of Opcions and Corporate Liabilities”. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654

MODELO DE CONZE-VISWANATHAN DE OPCIONES

Opciones Lookback con precio de ejercicio fijo

2.2.1. Introducción

En esta segunda parte del capítulo veremos el método analítico para valuar las opciones europeas sobre precio mínimo o máximo observado para el precio de ejercicio, es decir, valuaremos las opciones *lookback* de precio fijo, las fueron estudiadas por primera vez por Conze y Viswanathan en 1991, este tipo de opciones son frecuentemente utilizadas sobre divisas, títulos de capital e índices bursátiles.

2.2.2. Valuación

Notación

0: tiempo en el que se emite la opción
t: fecha actual
T: fecha en que vence la opción
T-t: periodo de vida de las opciones

Una opción de compra lookback con precio de ejercicio fijo paga a la fecha de su vencimiento lo siguiente:

$$\max(M_T^S - K, 0) \tag{2.10}$$

Donde

$$M_T^S = \max_{u \in [0,T]} S_u \tag{2.11}$$

Que es la diferencia entre el precio máximo observado del activo subyacente y el precio de ejercicio *K*, si la diferencia es positiva, si no lo es, el pago seria igual a cero Análogamente para una opción de venta lookback, es decir sobre una opción de venta sobre el precio mínimo observado del activo subyacente con un precio de ejercicio fijo, se paga:

$$\max(K - m_T^S, 0) \tag{2.12}$$

Donde

$$m_T^S = \min_{u \in [0,T]} S_u \tag{2.13}$$

Es decir se paga la diferencia entre el precio mínimo observado del activo subyacente , y el precio de ejercicio fijo k , siempre y cuando la diferencia sea positiva, si no el resultado es igual a cero.

2.2.3. Opción de compra con precio de ejercicio fijo

Ahora para una opción de compra lookback, con precio de ejercicio fijo emplearemos la siguiente aproximación cuando $K > M_t^S$ [3]

$$c(t,S_t,M_t^S) = S_t e^{-q(T-t)}\Phi(d_M) - KB(t,T)\Phi(d_M - \sigma\sqrt{T-t}) \tag{2.14}$$
$$-\frac{S_t B(t,T)}{\gamma}\left[-\left(\frac{S_t}{K}\right)^{\gamma}\Phi(d_M + \gamma\sigma\sqrt{T-t}) + \exp\{(r-q)(T-t)\}\Phi(d_M)\right]$$

Donde

$$B(t-T) = e^{-r(T-t)} \tag{2.15}$$

$$\gamma = \frac{2(q-r)}{\sigma^2} \tag{2.16}$$

$$d_M = \frac{\ln\left(S_t/K\right) + \left[r - q + (\sigma^2/2)\right](T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.17}$$

Y en caso de que $K \le M_t^S$ [3]

[3] Ver Conze, A. and Viswanathan (1991). Path Dependent Options: The Case of Lookback Options". The Journal of Finance, Vol 46, No.5, pp. 1893-1907

$$c(t,S_t,M_t^S) = B(t,T)(M_t^S - K) + S_t e^{-q(T-t)}\Phi(d_M) \tag{2.18}$$
$$- M_t^S B(t,T)\Phi(d_M - \sigma\sqrt{T-t})$$
$$- \frac{S_t B(t,T)}{\gamma}\left[-\left(\frac{S_t}{M_t^S}\right)^{\gamma}\Phi(d_M + \gamma\sigma\sqrt{T-t}) + \exp\{(r-q)(T-t)\}\Phi(d_M)\right]$$

Donde d_M se define como en (2.17), excepto que en lugar de K se escribe M_t^S

2.2.4. Opción de venta con precio de ejercicio fijo

Para valuar opciones de venta lookback, con precio de ejercicio fijo cuando $K < m_t^S$, empleamos la siguiente fórmula[3]:

$$p(t,S_t,m_t^S) = KB(t,T)\Phi(d_m + \sigma\sqrt{T-t}) - S_t e^{-q(T-t)}\Phi(d_m) \tag{2.19}$$
$$- \frac{S_t B(t,T)}{\gamma}\left[\left(\frac{S_t}{K}\right)^{\gamma}\Phi(-d_m + \gamma\sigma\sqrt{T-t}) - \exp\{(r-q)(T-t)\}\Phi(-d_m)\right]$$

Donde

$$d_m = \frac{\ln\left(S_t/K\right) + \left[r - q + (\sigma^2/2)\right](T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.20}$$

Ahora para el caso de $K > m_t^S$ se emplea lo siguiente[3]:

[3] Ver Conze, A. and Viswanathan (1991). Path Dependent Options: The Case of Lookback Options". The Journal of Finance, Vol 46, No.5, pp. 1893-1907

$$p(t,S_t,m_t^S) = B(t,T)(K - m_t^S) - S_t e^{-q(T-t)}\Phi(-d_m)$$
$$+ m_t^S B(t,T)\Phi(-d_m + \sigma\sqrt{T-t})$$
$$- \frac{S_t B(t,T)}{\gamma}\left[\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right)^{\gamma}\Phi(-d_m - \gamma\sigma\sqrt{T-t}) - \exp\{(r-q)(T-t)\}\Phi(-d_m)\right] \quad (2.21)$$

Donde d_m es tomada como en (2.20), en lugar de ser k, es m_t^S

CAPITULO 3

METODOS NUMERICOS DE VALUACION DE OPCIONES LOOKBACK

MODELO BINOMIAL

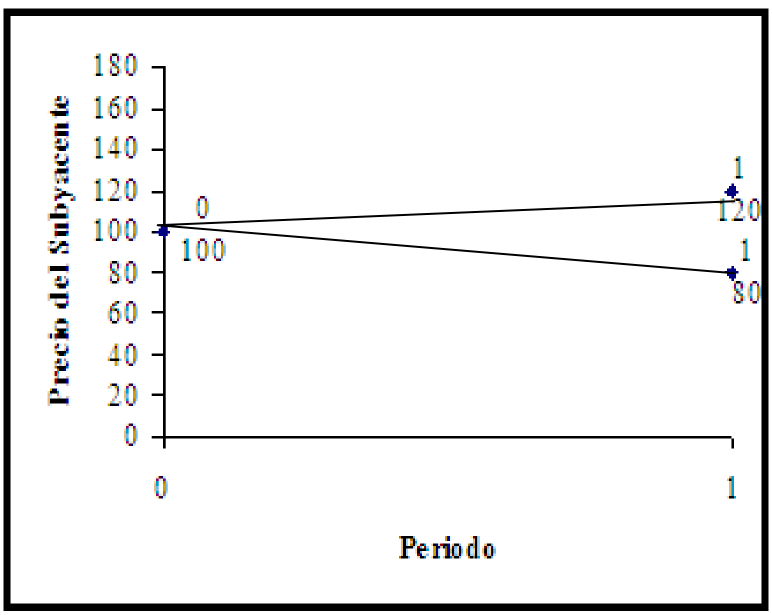
3.1.1 Introducción

El modelo binomial es uno de los modelos mas utilizados para obtener el precio de un derivado, la representación del árbol binomial nos muestra los diferentes posibles precios que puede tomar la opción hasta la fecha de vencimiento de la misma, primero veremos como se representa, así como todo el procedimiento para obtener el precio de la opción, ya que es un modelo muy versátil y que muestra buenas aproximaciones en este trabajo se adaptara este modelo para calcular el precio de las opciones *lookback*.

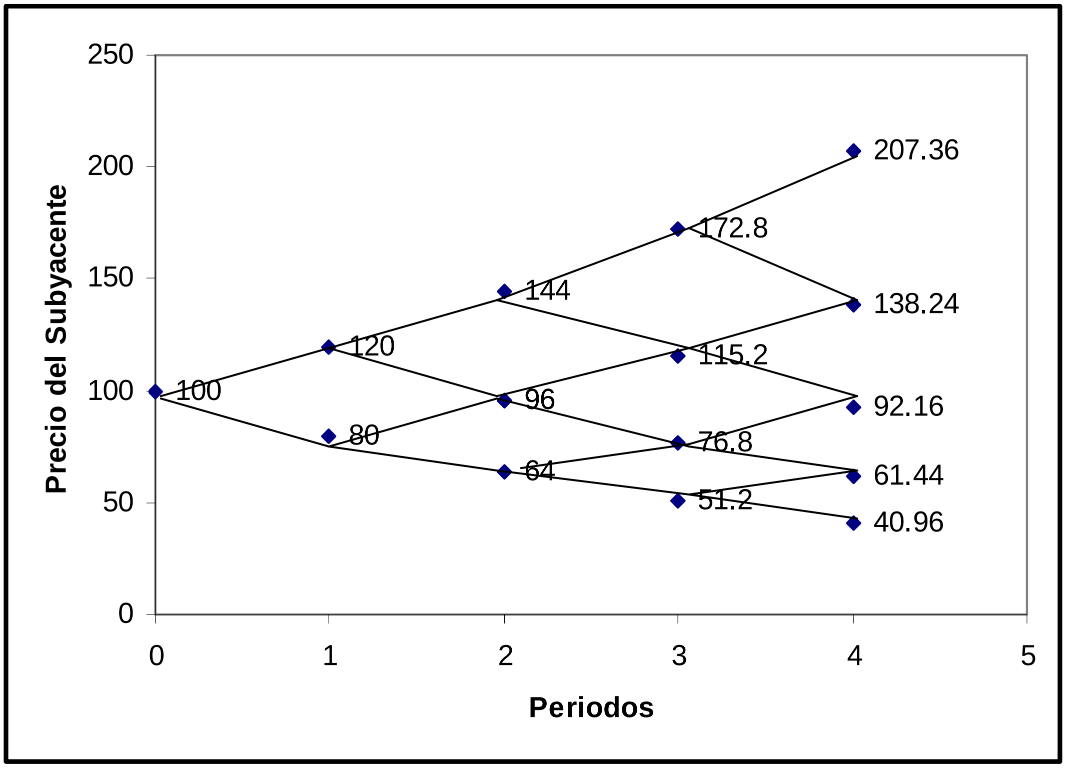
3.1.2 Representación Modelo Binomial

Para la construcción del modelo binomial tomamos como base ***So*** el precio del activo subyacente, ***u*** y ***d***, tal que, $0<d<1<u$, u es la rapidez con la que el activo subyacente sube de precio y d es la rapidez con la que el precio del activo subyacente decrece, de tal forma que para el primer periodo quedaría de la siguiente forma:

En la siguiente grafica se muestra un ejemplo con los siguientes datos, ***So***= 100, ***u***=1.2, ***d***=0.80



De la misma forma que se construyó la gráfica anterior para el periodo inicial, se hace para los siguientes periodos hasta el periodo final. El diagrama de todos los periodos se construye de la siguiente manera, con los parámetros anteriores.



3.1.3 Valor de la opción

Ahora denotemos al precio de la opción con precio de ejercicio *So* como *f*, entonces cuando el precio de ejercicio S_0 sube, es decir, $S_0 u$, el precio de la opción es *fu*, si el precio de ejercicio baja, es decir $S_0 d$ el precio de la opción esta definida por *fd.*

Ahora construyamos un portafolio que consiste en una posición larga en el subyacente con Δ unidades y una posición corta en una opción, determinaremos Δ tal que haga un portafolio de menor riesgo, de esta forma si la opción sube, el valor del portafolio al final de la vida de la opción es:

$$Sou\Delta - fu \tag{3.1}$$

Y de la misma manera, si la opción baja, el valor del portafolio al final de la vida de la opción es:

$$Sod\Delta - fd \tag{3.2}$$

El valor de ambos portafolios será el mismo si:

$$Sou\Delta - fu = Sod\Delta - fd \tag{3.3}$$

De esta forma podemos obtener Δ

$$\Delta = \frac{fu - fd}{Sou - Sod} \tag{3.4}$$

Ahora bien si r es la tasa libre de riesgo, el valor presente del portafolio es:

$$(Sou\Delta - fu)e^{-rT} \tag{3.5}$$

Y el costo del portafolio es:

$$So\Delta - f \tag{3.6}$$

Se sigue:

$$So\Delta - f = (Sou\Delta - fu)e^{-rT}$$

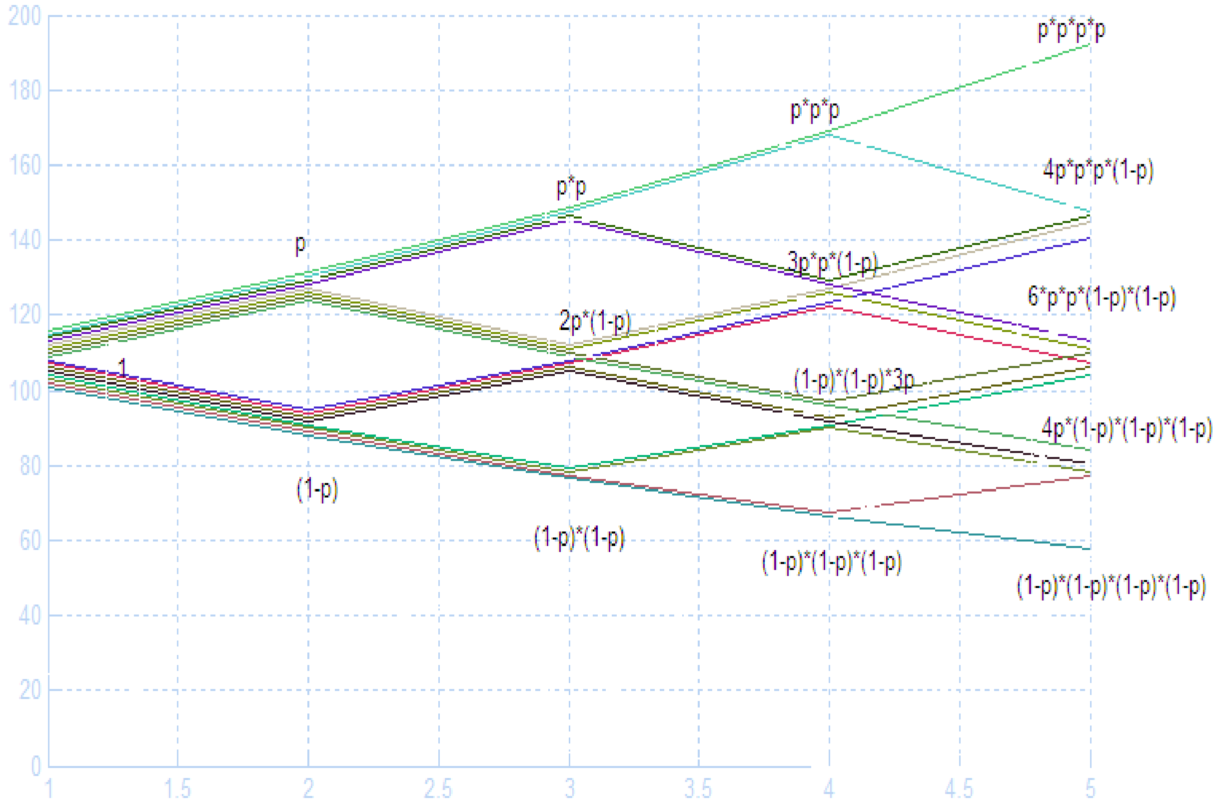
$$f = So\Delta - (Sou\Delta - fu)e^{-rT}$$

$$f = e^{-rT}\left[pfu + (1-p)\,fd\right] \tag{3.7}$$

donde

$$p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d} \tag{3.8}$$

Obtenida *p*, y definida como la probabilidad de riesgo neutral, el diagrama de árbol con sus respectivas probabilidades es:



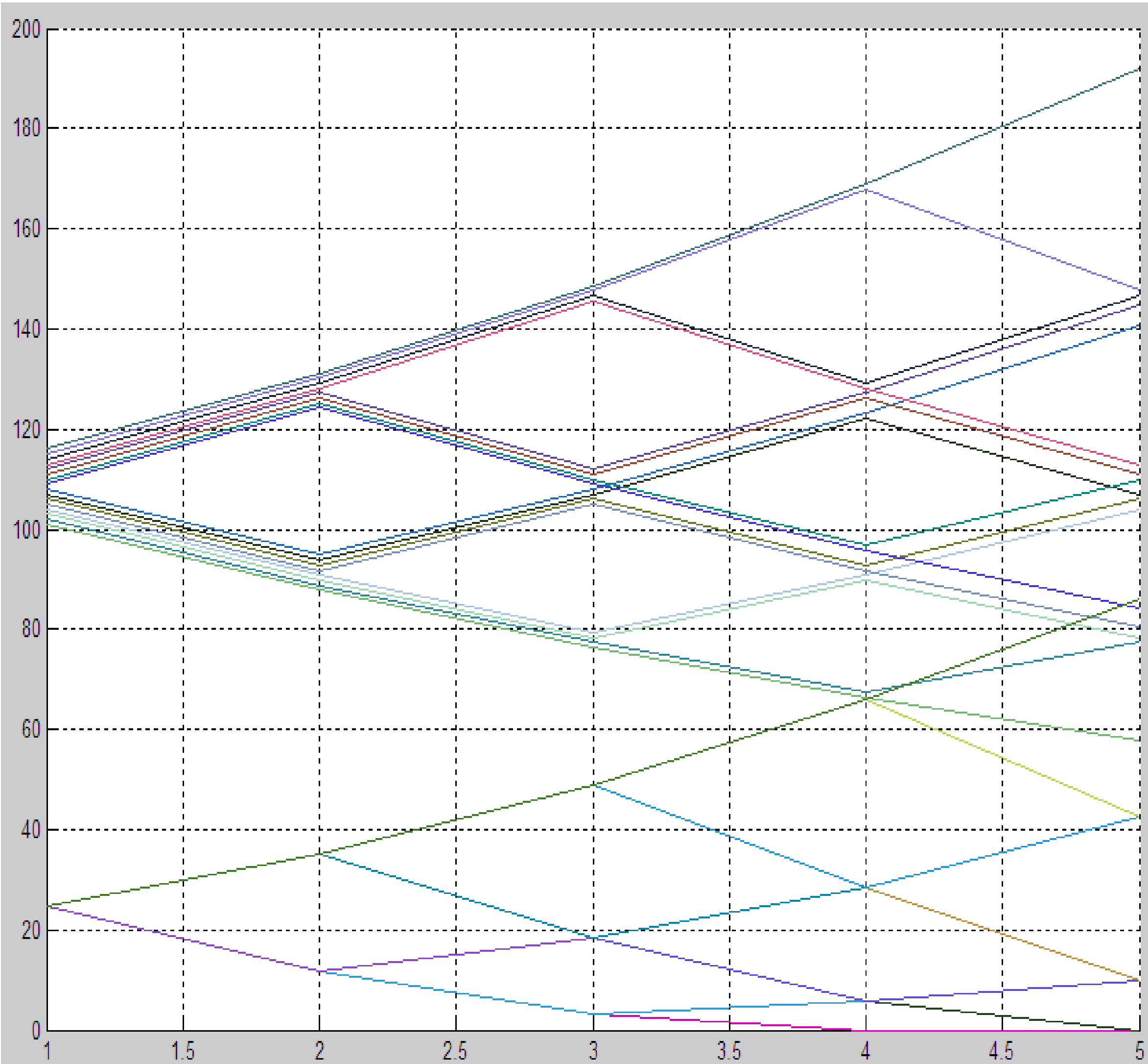
Para obtener *f* , falta calcular los valores de *fu* y *fd,* si tomamos como ejemplo un árbol binomial de un periodo, *fu* y *fd* se calculan para el caso de una opción de compra lookback como:

$$\max(S_T - m_T^S, 0) = S_T - m_T^S \tag{3.9}$$

Para el caso de una opción de venta *fu* y *fd* se obtienen de la siguiente:

$$\max(M_T^S - S_T, 0) = M_T^S - S_T \tag{3.10}$$

Ahora generalizando para un árbol binomial de mas de un periodo, obtenemos el precio de una opción *lookback*, regresando periodo por periodo, pero tomando en cuenta, cual es el precio máximo, para una opción de venta alcanzado en las trayectorias para llegar al nodo en el que se este calculando el precio y tomando el valor mínimo alcanzado en las trayectorias para llegar al nodo en el que se este calculando para una opción de compra, como se ilustra en el siguiente diagrama:



3.1.4 Algoritmo Binomial Recursivo

Se declara la función con los siguientes parámetros:

- S_0 - precio inicial del activo subyacente
- $S_{\max}$ - Precio máximo alcanzado en la trayectoria
- $S_{\min}$ - Precio mínimo alcanzado en la trayectoria
- X-Precio fijo
- T-Tiempo
- Periodos
- r- Tasa libre de riesgo
- q- Tasa de rendimientos
- σ -Volatilidad
- Compra-Venta
- Fijo-Flotante

Tomamos $S_{\max} = S_{\min} = S_0$

- Obtenemos

$$u = \exp\left(\sigma * \sqrt{\frac{T}{Periodos}}\right) \tag{3.11}$$

$$d = \frac{1}{u} \tag{3.12}$$

$$q = \frac{\left[\exp(r-q) * \left(\frac{T}{periodos}\right) - d\right]}{u-d} \tag{3.13}$$

-Si el numero de periodos=0, declaramos la función del *payoff*, declarando los siguientes parámetros S_0, X, $S_{\max}$, $S_{\min}$, *call-put*, *fijo-flotante* y obtenemos el *payoff* respectivo de cada tipo de opción (europea, americana, fijo, flotante)

Para el caso de las opciones de compra con precio de ejercicio flotante

$$f = So - S_{\min} \tag{3.14}$$

Para el caso de las opciones de venta con precio de ejercicio flotante

$$f = S_{\max} - So \tag{3.15}$$

Para el caso de las opciones de compra con precio de ejercicio fijo

$$f = \max(S_{\max} - X, 0) \tag{3.16}$$

Para el caso de las opciones de venta con precio de ejercicio fijo

$$f = \max(X - S_{\min}, 0) \tag{3.17}$$

Obtenemos el valor de la opción como del periodo como sigue:

$$f_{T,S_o} = \max\left[e^{-(rT\,/\,Periodos)} * \left(pf_{\left(T-\frac{T}{periodos}\right),u} + (1-p)\, f_{\left(T-\frac{T}{periodos}\right),d} \right), tipo * f_{T,S_o} \right] \qquad (3.18)$$

Esta el la función recursiva, para el caso de que valuemos una opción europea la variable tipo = 0, y si la opción que queremos valuar es de tipo americana es igual a 1.

Lo que hace el programa que implementamos es que en los últimos nodos va haciendo las comparaciones entre máximos y mínimos y tomando los que se necesiten i.e. en el caso de la opción de compra los mínimos y para el caso de la opción de venta los puntos máximos, lo hace para cada nodo hasta llegar al nodo inicial, cuando se encuentra en ese punto ya se tiene toda la historia y el mínimo y máximo en cada caso para valuar la opción

MODELO SIMULACIÓN MONTECARLO

3.2.1 Introducción

Este método numérico, simulación Montecarlo, es un proceso estocástico, el cual consiste en generar trayectorias aleatoriamente y se ha implementado, ya que proporciona buenos resultados, además de que es muy sencillo realizar dicha simulación, claro es que entre mayor sea el numero de trayectorias generadas, se obtendrán mejores aproximaciones, por lo que el precio del activo subyacente es dependiente del número de trayectorias.

3.2.2 Valuación

Simulación Montecarlo emplea para la valuación de opciones el resultado de riesgo neutral, ya que el promedio de los *payoff*s o pago final de la opción en un contexto de riesgo neutral, se obtiene a través de un procedimiento de muestras, el cual es descontado a una tasa de interés de riesgo neutral.

El modelo discreto para el precio de un activo subyacente esta dado de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.19}$$

También podemos ver la ecuación anterior como sigue:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.20}$$

Donde la variable ΔS es el incremento en el precio *S*, en el intervalo de tiempo Δt, y ε es la trayectoria aleatoria normal estandarizada, es decir, con media 0, y desviación estándar 1; el parámetro μ es la tasa de retorno esperada por unidad de tiempo del precio del subyacente, y por último σ es la volatilidad del precio del subyacente, ambos parámetros se suponen constantes.

Ahora para obtener el precio del subyacente, y por la naturaleza del proceso se empleará la siguiente ecuación:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{3.21}$$

o

$$\frac{dS}{S} = \mu Sdt + \sigma Sdz \qquad (3.22)$$

Donde dz es un proceso de Wiener, el cual es un tipo particular del proceso estocástico de Markov, con cambios de media 0, y varianza en la tasa de 1 por año; μ y σ definidas con anterioridad.

3.2.3 Algoritmo Simulación Montecarlo

-Se declara la función con las siguientes variables

- S_0: Precio inicial del subyacente
- k: Precio del ejercicio
- T : Tiempo
- Periodos
- Número de trayectorias
- r: Tasa libre de riesgo
- q: Tasa de rendimientos
- σ : Volatilidad

- Se pone el contador=0, al inicio de la ejecución del programa, este contador guardara cada precio final de la opción en cada trayectoria generada, por lo que al final, el contador nos sumara todos los precios finales del total de las trayectorias.
- Se inicializa $S1 = S_0$
- Ahora para $i = 1 : periodos$

$$S(i+1) = S(i)(r-q)(T/periodos) + \sigma\sqrt{t/periodos}\,S(i)N(0,1) + S(i)$$

Con $S(1) = S$ $\qquad\qquad i = 1 : periodos$

Este es el procedimiento para llegar al precio final

Se obtienen los máximos y mínimos de todas las trayectorias, de la sig forma:

- para el caso de la opción *lookback* de venta se guarda el precio máximo alcanzado en cada nodo o periodo, es decir se van comparando el anterior y el actual en cada periodo y se va guardando el mayor en ambos y así consecutivamente hasta terminar con todos los periodos

Y análogamente para la opción de compra se guarda el precio mínimo alcanzado en cada periodo, comparando el precio actual con el anterior, hasta haber concluido con el total de periodos.

Es decir para una opción de compra flotante

$$Smin=Smin+(max(s)-s(periodos+1)) \tag{3.23}$$

Para una opción de venta flotante

$$Smax=Smax+(s(periodos+1)-min(s)) \tag{3.24}$$

análogamente para las opciones de compra y venta de precio fijo,

Para la opción de compra fijo

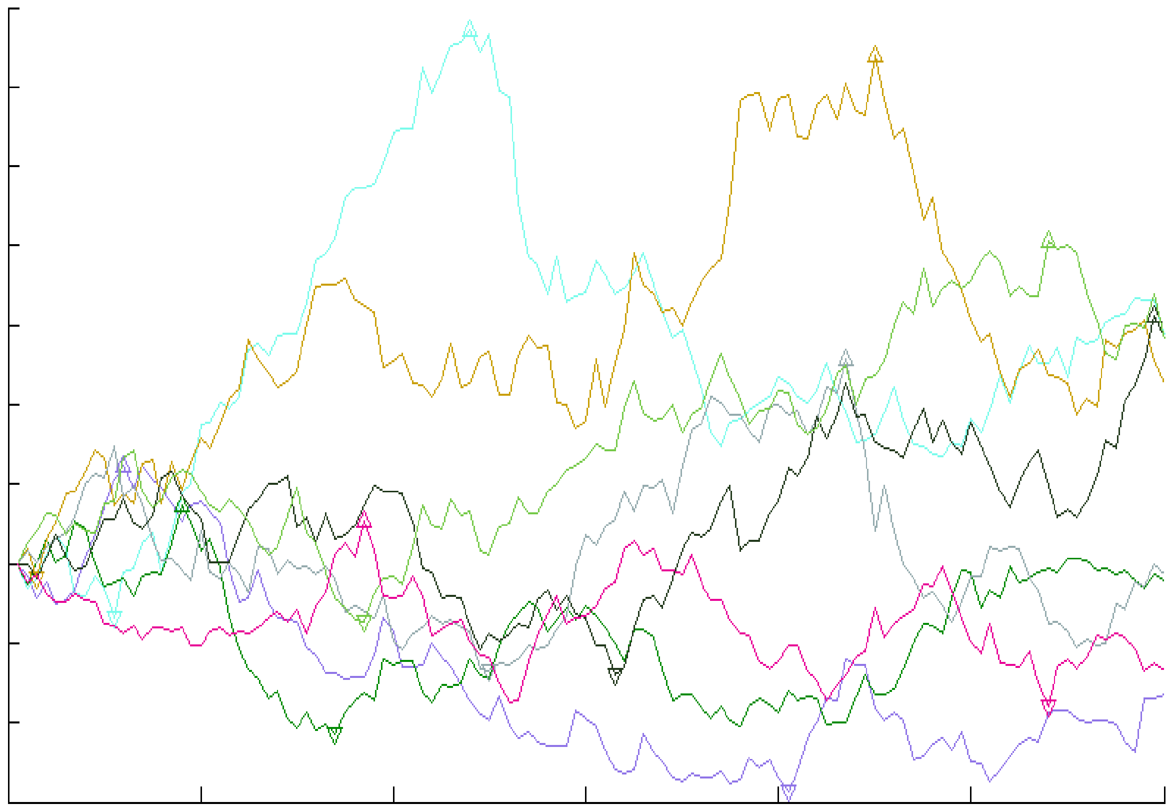
(3.25)

$$Smin=Smin +(K-min(s))$$

Para la opción de venta fijo

(3.26)

$$Smax =Smax +(max(s)-K);$$



Como podemos observar en la grafica, de la simulación Montecarlo están marcados los puntos máximos y mínimos para cada trayectoria generada, es decir para el caso de la opción de compra y de venta.

Se obtiene el payoff o precio final y se suman todos los *payoff´s*, se obtiene el promedio, y por ultimo los traemos a valor presente de la siguiente manera:

$$\frac{\sum Payoff}{Trayectorias} e^{-(rT)} \tag{3.27}$$

CAPITULO 4

APLICACIÓN DE MÉTODOS

4.1.1. MODELO GOLDMAN, SOSIN Y GATTO

A continuación aplicaremos el modelo Goldman Sosin y Gatto para valuar opciones lookback europeas con precio de ejercicio flotante.

Empezaremos a ver un ejemplo para una opción de compra que no paga dividendos con los siguientes parámetros

Precio Inicial	So	100
Tiempo (años)	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.03
Dividendos	q	0
Volatilidad	sigma	0.2
Precio mínimo observado	m	100

Se obtiene un precio de la opción es de 23.1130.

Ahora observemos que pasa si se paga un 6% de dividendos

Precio Inicial	So	100
Tiempo (años)	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.03
Dividendos	q	.06
Volatilidad	sigma	0.2
Precio mínimo observado	m	100

Obtenemos un precio de la opción menor 16.2826

Veamos otro ejemplo aumentando los dividendos a un 10%

Precio Inicial	So	100
Tiempo (años)	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.03
Dividendos	q	.10
Volatilidad	sigma	0.2
Precio mínimo observado	m	100

Obtenemos el siguiente resultado 12.7974, por lo que podemos concluir de esto es que a mayores dividendos un precio de compra menor, ya que si los disminuimos o eliminamos, el precio de la opción es mayor.

Ahora veamos el comportamiento del precio de la opción haciendo variar la volatilidad

Precio Inicial	So	100
Tiempo (años)	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.03
Dividendos	q	.06
Volatilidad	sigma	0.01
Precio mínimo observado	m	100

Obtenemos el siguiente resultado 0.1478

De esto podemos decir que a mayor volatilidad mayor es el precio de una opcion de compra, ya que con una volatilidad del 15%, obtenemos un precio de 11.9363, mientras que para una volatilidad de 20%, el precio de la opción de compra es de 16.2826

También veremos lo que sucede con la tasa libre de riego del 1%

Precio Inicial	So	100
Tiempo (años)	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.01
Dividendos	q	0.06
Volatilidad	sigma	0.15
Precio mínimo observado	m	100

Obtenemos un precio de la opción de 10.6858., si aumentamos la tasa libre de riesgo a un 3%, obtenemos un precio de la opción de 11.9363, y obtenemos que a mayor tasa libre de riesgo menor es el precio de opción de compra. Así como a precio inicial mayor, mayor precio de la opción de compra.

Ahora observemos que pasa con la opción lookback de venta con los siguientes parámetros

Precio inicial	So	120
Tiempo	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.03
Dividendos	Q	0
Volatilidad	sigma	0.2
Precio máximo observado	M	180

Obtenemos el siguiente resultado 27.4412, ahora veamos que ocurre si se pagaran dividendos del 6%, obtenemos un precio de la opción de 45.7163.
Ahora hagamos el mismo ejercicio para la tasa libre de riesgo del 6%

Precio inicial	So	120
Tiempo	T	2
Tasa libre de riesgo	r	0.06
Dividendos	q	0.05
Volatilidad	Sigma	0.2
Precio máximo observado	M	180

El precio de la opción es de 1.0921, ahora para una tasa libre de riesgo del 3%, el precio de la opción es de 45.7163, es decir que si la tasa libre de riesgo es menor el precio de la opción es mayor., tomando de referencia el ejemplo anterior , ahora veamos como se comporta el precio de la opción variando la volatilidad, con una volatilidad de 15%, obtenemos un precio de la opción de 52.4890, habiendo una diferencia entre una volatilidad del 20% y el 15%, de 45.7163-52.4890, como podemos darnos cuenta a menor volatilidad el precio de la opción es menor

4.2.1. MODELO DE CONZE, Y VISWANATHAN

Vamos a valuar el precio de una opción lookback de compra con precio fijo, y veremos el comportamiento del precio variando los distintos parámetros, como la tasa libre de riesgo, los dividendos, el tiempo, así como la volatilidad.

Ahora veamos el resultado con los siguientes parámetros, definidos con anterioridad, k, siendo el precio fijo y M, el precio máximo alcanzado, así como So>k

So	100
T	2
R	0.03
Q	0
sigma	0.2
K	90
M	150

El precio de la opción es de 59.9943, ahora veamos que sucede usando los mismo parámetro, pero So<k, es decir, 80<120, el resultado obtenido es de 28.7348, con esto podemos decir si So>k el precio de la opción es mayor, que en el otro caso.

Observemos que sucede con la tasa libre de riesgo, en el caso anterior con una tasa libre de riesgo del 3%, obtuvimos 28.7348, y con la tasa al 5%, el resultado que obtenemos es de

27.8017, con lo que podemos concluir que a mayor tasa libre de riesgo el precio de la opción es mayor.

Veamos que sucede con los rendimientos, si se pagan dividendos del 3%, obtenemos el precio de la opción 27.5319, ahora si pagáramos unos dividendos mas altos, es decir, del 6%, el precio de la opción es de 27.3658, esto para los siguientes parámetros.

So	80
T	2
R	0.05
q	0.06
sigma	0.2
K	120
M	150

Por lo que podemos decir que a mayor pago de dividendos, el precio de la opción de compra es menor.

Al modificar la varianza obtenemos los siguientes resultados

So	80
T	2
r	0.05
q	0.06
sigma	0.25
k	120
M	150

El precio de la opción es de 28.1240, mientras que para una varianza del 20%, el precio de la opción es de 27.368, ahora para el mismo caso, pero una varianza del 15%, el precio de la opción es de 27.1588, por lo que podemos decir que el disminuir la varianza, el precio de la opción de compra es menor, es decir el tenedor de la opción se vera beneficiado al haber una varianza pequeña.

4.3.1. MODELO BINOMIAL

Ahora emplearemos el método numérico binomial y obtendremos los precios para opciones *lookback* europeas o americanas, de precio fijo o flotante, variaremos todos los parámetros para ver como influye cada uno de ellos en el precio de la opción.

4.3.1.1. Opciones europeas de precio fijo

Primero veamos que sucede en el caso de las opciones *lookback* de compra europeas de precio fijo, con los siguientes parámetros, con So>X

Precio inicial	So	100
Precio máximo observado	Smax	180
Precio mínimo observado	Smin	0
Precio strike	X	90
Tiempo	T	2
Periodos	P	4
Tasa libre de riesgo	R	0.03
Dividendos	Q	0
Volatilidad	Sigma	0.2

Obtenemos un precio de la opción de 84.7588

Veamos que sucede al aumentar los periodos a 10, tomando los mismos parámetros anteriores, obtenemos el precio de opción de 88.4848, podemos observar que en este tipo de opción al aumentar el número de periodos aumenta el precio de la opción, lo mismo haremos per ahora con la tasa libre de riesgo

So	100
S máx	180
S min	0
X	90
T	2
Periodos	10
R	0.05
Q	0
Sigma	0.2

Como podemos ver, teníamos una tasa libre de riesgo del 3%, y la aumentamos al 5%, el precio de la opción que obtenemos al hacer esta variación es de 85.6156, como podemos ver, con este cambio obtuvimos una disminución en el precio de la opción, es decir a mayor tasa libre de riesgo menor es el precio de la opción de compra, por lo que el tenedor de la opción de compra se ve favorecido con una tasa libre de riesgo mayor.

So	100
Smax	180
Smin	0
X	90
T	2
Periodos	10
R	0.05
Q	0.05
Sigma	0.2

A continuación la variable que modificaremos serán los dividendos, en los ejemplos anteriores habíamos manejado los dividendos igual a cero, y con los dividendos del 5%, obtenemos el precio de la opción de 84.9527, lo cual también beneficia al tenedor de dicha opción.

Finalmente hagamos modificaciones en la varianza para ver que resultados obtenemos, ahora tomaremos una varianza del 15% y obtenemos un precio de la opción de 84.2597, tomamos los mismos parámetros pero ahora con una volatilidad del 10%, y obtenemos el mismo resultado, por lo que podemos concluir que disminuyendo la volatilidad si disminuye el precio de la opción, pero los cambios no son tan significativos.

Para concluir con este tipo de opciones veamos lo que sucede con X> So, con los siguientes parámetros obtenemos que el precio de la opción es de 56.5059

So	90
Smax	180
Smin	0
X	120
T	2
Periodos	4
R	0.03
Q	0
Sigma	0.2

Por lo que podemos ver es que para este caso cuando X> So, se obtiene un muy buen precio de compra de la opción *lookback*. Análogamente para el caso de opciones *lookback* europeas de venta de precio fijo, primero veamos que sucede con So>X

So	120
Smax	0
Smin	80
X	100
T	2
Periodos	4
R	0.03
Q	0
Sigma	0.2

El precio de la opción es de 19.9994

Veamos ahora el caso del X=120>So=110, con los demás parámetros definidos cono en el ejemplo anterior, el precio de la opción obtenido es de 39.6428, si aumentamos el número de periodos a 10, el resultado seria 45.5031, por lo que a mayor número de periodos mayor es el precio de venta de la opción, si aumentamos la tasa libre de riesgo a 5% 42.8771, existe una diferencia de 45.5031-42.8771, así que podemos decir que a mayor tasa libre de riesgo el precio de la opción de venta es menor.

So	110
Smax	0
Smin	80
X	120
T	2
Periodos	10
R	0.03
Q	0
Sigma	0.2

Ahora usemos el ejemplo anterior, solo que en lugar de que los dividendos sean igual a cero, sean del 6% el precio de la opción de venta de precio fijo sería de 48.4339, por lo que a mayor pago de dividendos mayor es el precio de esta opción. Por ultimo veamos que sucede al disminuir la volatilidad al 15%, con los siguientes parámetros

So	110
Smax	0
Smin	80
X	120
T	2
Periodos	10
R	0.03
Q	0.06
Sigma	0.15

Por lo que vemos es que al disminuir la volatilidad nos da el mismo resultado ,48.4339, de igual forma para una volatilidad del 25%, de esto podemos decir que la volatilidad no es un factor que cambie significativamente el precio de una opción.

4.3.1.2. Opciones europeas de precio flotante

Es el turno de ver que sucede con las opciones lookback europeas de compra de precio flotante, valuándolas con el método binomial.

Primero veamos que sucede cuando So<X, es decir para 110<120, con los siguientes parámetros

So	110
Smax	150
Smin	90
X	120
T	2
Periodos	10
R	0.03
Q	0.06
Sigma	0.25

Obtenemos un precio de la opción de compra de 29.3831

Ahora hagamos lo mismo pero para So>X

So	130
Smax	150
Smin	90
X	80
T	2
Periodos	10
R	0.03
Q	0.06
Sigma	0.25

Obtenemos un resultado de 41.1074, como podemos ver, para cuando S0>X, el precio de la opción de compra el mayor, tomemos el mismo ejemplo, pero aumentemos el número de periodos a 20 , y obtenemos el siguiente resultado, 50.3585, cabe destacar que en el modelo binomial al aumentar el numero de periodos , se incrementa de manera considerable el tiempo en el que se realiza la valuación, Anteriormente teníamos una tasa libre de riesgo del 3%, y el precio de la opción para esa tasa era de 41.1074 ahora modificaremos la tasa libre de riesgo a un 5%, y el resultado que obtenemos es el siguiente 42.9832, con lo que podemos decir que a menor tasa libre de riesgo el precio de la opción de compra es mayor.

Ahora si variamos los dividendos y usando los siguientes parámetros obtenemos

So	130
Smax	150
Smin	90
X	80
T	2
Periodos	10
R	0.05
Q	0.08
Sigma	0.25

El precio de la opción sería de 39.4956, si disminuimos los dividendos a un 6%, obtenemos el siguiente resultado 42.9832, por lo que es conveniente tener una tasa de dividendos grande. Por ultimo para este caso de opciones de compra veamos lo que sucede con una volatilidad del 10%, y el resultado el de 39.4956, el mismo que con una volatilidad del 25%, por lo que concluimos es que la volatilidad no trae cambios significativos a esta opción.

Ahora analizaremos las opciones lookback de venta europea de precio flotante
Con So>X, es decir 130>80, y con los siguientes parámetros

So	130
Smax	150
Smin	90
X	80
T	2
Periodos	10
R	0.05
Q	0.08
Sigma	0.2

Y obtenemos el siguiente resultado 48.1784, ahora tomemos los a So< X, y los mismos parámetros anteriormente citados, con So=80 y X=120, y el resultado que obtenemos es 68.8041, por lo que obtenemos un mejor resultado para la opción de venta.

Observemos que sucede si disminuimos la tasa libre de riesgo a un 3%, para el caso anterior y obtenemos 74.1879, por lo que también es conveniente una tasa libre de riesgo menor.

Por ultimo veamos que sucede con los dividendos, si en con los siguientes parámetros

So	130
Smax	150
Smin	90
X	80
T	2
Periodos	10
R	0.05
Q	0.05
Sigma	0.2

Y obtenemos el siguiente precio de la opción 44.7282, y con unos dividendos del 8% como ya habíamos observado obtenemos lo siguiente 48.1784, por lo que es conveniente una tasa mayo de dividendos también para este caso.

4.3.1.3. Opciones americanas de precio fijo

Primero veamos a las opciones de compra de este tipo

So	130	90
Smax	150	150
Smin	90	90
X	80	130
T	2	2
Periodos	10	10
R	0.05	0.05
Q	0.05	0.05
Sigma	0.2	0.2
Precio	92.0821	23.0661

En la tabla anterior podemos observar que cuando So>X, obtenemos un precio mayor de la opción de compra a comparación del otro resultado

Observemos que sucede con la tasa libre de riesgo

So	90
Smax	150
Smin	90
X	130
T	2
Periodos	10
R	0.05
Q	0.05
Sigma	0.2

Al considerar una tasa libre de riesgo del 5%, el resultado obtenido era 23.0661, mientras que si usamos una tasa de 2%, el precio de la opción que obtenemos es de 23.0772, en realidad al modificar la tasa libre de riesgo no hace variar mucho nuestro resultado. Como ya hemos visto en casos anteriores y esta no será la excepción la volatilidad no hace un cambio significativo.

4.3.1.4. Opciones americanas de precio flotante

Ahora analizaremos a las opciones lookback de venta americanas de precio flotante

So	90
Smax	150
Smin	90
X	130
T	2
Periodos	10
R	0.02
Q	0.05
Sigma	0.2

Primero veamos el caso para cuando So<X y el precio de la opción de venta es de 66.3301, ahora para el caso de So>X, con So=120 y X=80, el resultado es 52.5977, por lo que para este caso es mas conveniente que So<X, ya que le precio de la opción de venta es mayor.

Ahora veamos que sucede con la tasa libre de riesgo, con los siguientes parámetros

So	100
Smax	150
Smin	90
X	120
T	2
Periodos	10
R	0.02
Q	0.05
Sigma	0.2

El precio de la opción es de 60.2994, y si tomamos los mismos parámetros, pero una tasa libre de riesgo mayor del 2.5%, el resultado es 59.2172, para finalizar con el modelo binomial veamos lo que sucede con la tasa de dividendos

So	100
Smax	150
Smin	90
X	120
T	2
Periodos	10
R	0.02
Q	0.02
Sigma	0.2
americana	1

El precio de la opción que obtenemos es de 57.2800, mientras que para una tasa de dividendos del 5%, el precio de la opción de venta es de 60.2994, por lo que es conveniente una mayor tasa de dividendos.

4.4.1. MODELO SIMULACION MONTECARLO

El modelo de simulación Montecarlo lo emplearemos únicamente para valuar opciones lookback de tipo europeo, la “deficiencia” que tiene este modelo es el tiempo que emplea en evaluar y que se obtienen buenos resultados generando aproximadamente 1000 trayectorias aleatorias.

Empezaremos por valuar opciones de compra de precio fijo y con So>k

So	100
K	85
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	200
R	0.03
Q	0
Sigma	0.2

El precio de la opción es de 35.8717, ahora si So<k, el precio resultante es 6.6378, con los siguientes parámetros

So	90
K	110
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	200
R	0.03
Q	0
Sigma	0.2

Ahora veamos el caso, anterior, pero incrementado el numero de trayectorias a 1000 el precio de la opción de compra es 6.7829, también podemos ver el comportamiento del precio de la opción dando dividendos del 5%, obteniendo un resultado de 3.7431, podemos decir que en es conveniente el pago de dividendos., finalmente modifiquemos la volatilidad

a un 25%, obteniendo 6.2631, habiendo un cambio significativo, ya que existe una diferencia de 6.2631-3.7431.

Ahora valuaremos opciones lookback europea de venta de precio fijo con So<k, con los siguientes parámetros

So	90
K	110
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	1000
R	0.03
Q	0.05
Sigma	0.25

El precio de la opción es de 36.5182, ahora veamos que sucede cuando So>k, con los siguientes parámetros

So	120
K	100
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	1000
R	0.03
Q	0.05
Sigma	0.25

Obteniendo el siguiente precio de la opción de venta 10.9968, ahora que sucede cuando tasa libre de riesgo es del 5%, el precio de la opción es de 9.1453, es decir a mayor tasa libre de riesgo el precio de la opción es menor, por ultimo veamos que sucede con la volatilidad el precio de la opción es de 6.0903, el cambio si es significativo.

Ahora valuaremos opciones de compra de precio flotante y con So>k

So	120
K	100
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	1000
R	0.05
Q	0.05
Sigma	0.2

El precio de la opción de compra es de 15.7890.

Ahora veamos el caso de So<k

So	90
K	100
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	1000
R	0.05
Q	0.05
Sigma	0.2

El precio de la opción de compra para este caso es de 11.4501, por lo que es mas conveniente que se de el segundo caso.

Observemos el comportamiento de la tasa libre de riesgo, en el ejemplo anterior tenemos una tas del 5%, ahora la bajaremos al 3% y el precio de la opción de compra que se obtiene es de 10.5425, por lo que es mas conveniente tener una tasa libre de riesgo menor.

Para el caso de los dividendos veremos un ejemplo con los siguientes parámetros

So	90
K	100
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	1000
R	0.03
Q	0.04
Sigma	0.2

El precio de la opción es de 11.0594, y con unos dividendos del 6%, el resultado es 9.6950, por lo que podemos decir que a mayores dividendos el precio de la opción de compra es menor.

Para concluir veremos la influencia de la volatilidad en la opción

So	90
K	100
T	2
Periodos	4
Num_trayectorias	1000
R	0.03
Q	0.06
Sigma	0.25

El precio de la opción es de 13.1051, y para una volatilidad del 20% el precio obtenido es de 9.6950, por lo que podemos concluir es que la volatilidad si influye de manera significativa en el precio de una opción de compra.

4.5.1. ANALISIS COMPARATIVOS DE LOS METODOS

4.5.1.1. Binomial & Montecarlo

Ahora lo siguiente será hacer comparaciones uno a uno, con los métodos antes vistos, empezaremos este análisis con los métodos numéricos binomial y Montecarlo, para opciones europeas de compra de precio fijo

Parámetros	Binomial	Montecarlo
So	100	100
Smax	100	
Smin	100	
X	120	120
T	2	2
Periodos	10	10
U	1.1	
D	0.89	
r	0.03	0.03
q	0.06	0.06
sigma	0.25	0.25
num_trayectorias		10000
Precio opción	**8.4365**	**8.4882**

Como podemos observar usando los mismos parámetros los resultados obtenidos en ambos métodos, binomial y montecarlo son muy similares la diferencia es de .0517

Opciones de compra de precio flotante

Parámetros	Binomial	Montecarlo
So	100	100
Smax	100	
Smin	100	
X	120	120
T	2	2
Periodos	10	10
U	1.1	
D	0.89	
r	0.03	0.03
q	0.06	0.06
sigma	0.25	0.25
num_trayectorias		10000
Precio opción	**16.4146**	**16.3811**

También podemos ver que los resultados son congruentes, ya que solo existe una diferencia de .0335

Opciones de venta de precio fijo

Parámetros	Binomial	Montecarlo
So	100	100
Smax	100	
Smin	100	
X	120	120
T	2	2
Periodos	10	10
U	1.1	
D	0.89	
r	0.03	0.03
q	0.06	0.06
sigma	0.25	0.25
num_trayectorias		10000
Precio opción	**40.7343**	**41.0161**

Con una diferencia de .2018

Opciones de venta de precio flotante

Parámetros	Binomial	Montecarlo
So	100	100
Smax	100	
Smin	100	
X	120	120
T	2	2
Periodos	10	10
U	1.1	
D	0.89	
r	0.03	0.03
q	0.06	0.06
sigma	0.25	0.25
num_trayectorias		10000
Precio opción	**24.9885**	**24.8637**

Habiendo una diferencia de 0.1248

4.5.1.2. Binomial & Goldman Sosin y Gatto

Opciones europeas de compra de precio flotante

Parámetros	Binomial	Goldman Sosin y Gatto
So	100	100
Smax	100	
Smin	100	
X	90	
T	2	2
Periodos	10	
U	1.1	
D	0.83	
R	0.03	0.03
Q	0.06	0.06
Sigma	0.25	0.25
Min		90
Precio opción	**20.8989**	**21.1753**

Diferencia de 0.2064

Opciones europeas de venta de precio flotante

Parámetros	Binomial	Goldman Sosin y Gatto
So	100	100
Smax	100	
Smin	100	
X	90	
T	2	2
Periodos	10	
U	1.1	
D	0.95	
R	0.03	0.03
Q	0.06	0.06
Sigma	0.25	0.25
Max		132
Precio opción	**16.8469**	**16.804**

Existiendo una diferencia de 0.0429

4.5.1.3. Binomial & Conze y Viswanathan

Opciones europeas de compra de precio fijo

Parámetros	Binomial	Conze y Viswanathan
So	80	80
Smax	80	
Smin	80	
X	90	
T	2	2
Periodos	10	
U	1.2	
D	0.85	
r	0.05	0.05
q	0.06	0.06
sigma	0.2	0.2
max		145
Precio opción	**22.3037**	**22.9278**

Diferencia de 0.6241

Opciones europeas de venta de precio fijo

Parámetros	Binomial	Conze y Viswanathan
So	80	80
Smax	80	
Smin	80	
X	90	
T	2	2
Periodos	10	
U	1.8	
D	0.7	
r	0.06	0.05
q	0.04	0.06
sigma	0.25	0.2
max		145
Precio opción	**56.5405**	**56.5754**

La diferencia es de 0.0349

4.5.1.4. Montecarlo &Goldman Sosin y Gatto

Opciones europeas de compra con precio de ejercicio flotante

Parámetros	Montecarlo	Goldman Sosin y Gatto
So	100	100
X	80	
T	2	2
Periodos	50	
Numero de Trayectorias	10000	
R	0.03	0.03
Q	0.06	0.06
Sigma	0.25	0.25
Max		100
Precio opción	**18.3238**	**20.4463**

Opciones europeas de venta con precio de ejercicio flotante

Parámetros	Montecarlo	Goldman Sosin y Gatto
So	110	110
X	80	
T	2	2
Periodos	15	
Numero de Trayectorias	10000	
r	0.03	0.03
q	0.05	0.05
sigma	0.25	0.25
max		157
min		70
Precio opción	**27.6907**	**27.5771**

4.5.1.5. Montecarlo & Conze y Viswanathan

Opciones europeas de compra de precio fijo

Parámetros	Montecarlo	Conze y VISWANATHAN
So	110	110
X	110	
T	2	2
Periodos	15	
Numero de Trayectorias	10000	
r	0.03	0.03
q	0.05	0.05
sigma	0.25	0.25
k		120
max		130
min		60
Precio opción	**24.1666**	**25.2079**

Opciones europeas de venta de precio fijo

Parámetros	Montecarlo	Conze y Viswanathan
So	110	110
X	134	
T	2	2
Periodos	15	
Numero de Trayectorias	10000	
r	0.03	0.03
q	0.05	0.05
sigma	0.25	0.25
k		110
max		110
min		60
Precio opción	**46.9372**	**46.8204**

Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado el tipo de opciones exóticas *lookback*, se ha obseravado que estas opciones son de dos tipos, europeas ,es decir, que pueden ser ejercidas únicamente en el día que expira la opción o fecha de maduración, y americanas, es decir, que pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la fecha de expiración de la opción, también vimos que son de precio fijo, o precio flotante, así también que las opciones de compra ofrecen al poseedor el derecho de comprar al precio mínimo observado durante toda la trayectoria de la opción hasta su maduración, de igual forma para el tipo de opciones de venta, la cual ofrece al poseedor de la misma el derecho de vender al precio mas alto observado durante la vida de la opción, hasta su fecha de maduración.

También empleamos varios métodos de valuación, para el tipo de opciones europeas, el método binomial, el modelo de simulación Montecarlo, así como el modelo de Goldman Sosin y Gatto para opciones de precio flotante, y el modelo de Conze y Viswanathan para opciones de precio fijo, de igual forma para valuar opciones americanas empleamos el método binomial.

Realizamos comparaciones entre cada uno de los modelos, del método binomial podemos decir que no es un método optimo, ya que entre mas periodos haya, es mas tardado obtener el precio de la opción, esto debido a que el programa desarrollado es un método recursivo, por lo que el tiempo que tarda en valuar una opción puede ser excesivo en el momento que se requiera tomar una decisión, pero el resultado al que se llega es una muy buena aproximación, pese al tiempo de espera.

Del método de simulación Montecarlo también se obtiene una buena aproximación al precio de la opción; lo que resulta ser una factor importante para llegar a un buen resultado es el número de trayectorias, ya que entre mayores trayectorias aleatorias se simulen, mejor resultado se obtiene.

También empleamos las formulas para estas opciones que dependen del precio máximo o mínimo, desarrolladas y presentadas por primera vez por *Goldman, Sosin y Gatto* en 1979, para opciones europeas de precio flotante.

De igual forma utilizamos las formulas desarrolladas por *Conze y Viswanathan* y mostradas por primera vez en 1991 para opciones *lookback* europeas de precio fijo, y este tipo de opciones es negociada principalmente sobre divisas, índices bursátiles y títulos de capital.

Habiendo hecho las comparaciones entre los diferentes métodos podemos decir que si existe congruencia entre los resultados obtenidos en métodos vistos con anterioridad, a pesar de que la construcción de cada uno de los modelos es diferente y que este tipo de opciones son ideales para inversionistas que desean asegurarse al cien por ciento de que obtendrán el mejor precio de compra o de venta según sea el caso, pese a que la prima sea elevada, debido a la cobertura que estas opciones ofrecen.

Anexos

Modelos analíticos

Goldman Sosin y Gatto

```
% metodo lookback para opciones de precio flotante Goldam, Sosin y Gatto.
% callput: call 1 / put -1
% formula_lookback_GSG(100,4,.4,.5,.2,150,100,-1)
function l=formula_lookback_GSG(S,T,r,q,sigma,M,m,callput)

    if callput==1
        k=2*(r-q)/(sigma^2);
        dM=( log(S/m)+(r-q+sigma*sigma/2)*T )/( sigma*sqrt(T) );
        l=S*exp(-q*T)*normcdf( dM)-m*exp(-r*T)*normcdf(dM-
sigma*sqrt(T))...
            +( S*exp(-r*T)/k )*( ((S/m)^(-k))*normcdf(-
dM+k*sigma*sqrt(T))...
            -exp((r-q)*T)*normcdf(-dM) );
    else
        k=2*r/(sigma^2);
        dM=( log(S/M)+(r-q+sigma*sigma/2)*T )/( sigma*sqrt(T) );
        l=M*exp(-r*T)*normcdf( -dM+sigma*sqrt(T) )-S*exp(-q*T)*normcdf(-
dM)...
            +( S*exp(-r*T)/k )*( -((S/M)^(-
k))*normcdf(dM+k*sigma*sqrt(T))...
            + exp((r-q)*T)*normcdf(dM) );
    end
end
```

Conze y Viswanathan

```
% metodo lookback para opciones de precio fijo Conze, Wiswanathan
% callput: call 1 / put -1
% formula_lookback_CW(100,4,.4,.5,.2,100,150,100,1)
function l=formula_lookback_CW(S,T,r,q,sigma,k,M,m,callput)
    gamma=2*(q-r)/(sigma^2);
        if callput==1
            if k>M;
                dM=(log(S/k)+(r-q+(sigma^2/2))*T)/(sigma*sqrt(T));
                l=S*exp(-q*T)*normcdf( dM)-k*exp(-r*T)*normcdf( dM-
sigma*sqrt(T))...
                    -((S*exp(-r*T))/gamma)*(-(S/k)^(gamma)*normcdf(
dM+gamma*sigma*sqrt(T))...
                    +exp((r-q)*T)*normcdf( dM));
            else
                dM=(log(S/M)+(r-q+(sigma^2/2))*T)/(sigma*sqrt(T));
                l=exp(-r*T)*(M-k)+S*exp(-q*T)*normcdf(dM)...
                    -M*exp(-r*T)*normcdf(dM-sigma*sqrt(T))...
                    -(S*exp(-r*T)/gamma)*(-
(S/M)^gamma*normcdf(dM+gamma*sigma*sqrt(T))...
                    +exp((r-q)*T)*normcdf(dM));
            end

        else
            if k<m;
                dM=(log(S/k)+(r-q+(sigma^2/2))*T)/(sigma*T);
                l=k*exp(-r*T)*normcdf(-dM+sigma*sqrt(T))-S*exp(-
q*T)*normcdf(-dM)...
                    -(S*exp(-r*T))/gamma*(((S/k)^gamma)*normcdf(-dM-
sigma*gamma*sqrt(T))...
                    -exp((r-q)*T)*normcdf(-dM));
            else
                dM=(log(S/m)+(r-q+(sigma^2/2))*T)/(sigma*T);
                l=exp(-r*T)*(k-m)-S*exp(-q*T)*normcdf(-dM)...
                    +m*exp(-r*T)*normcdf(-dM+sigma*sqrt(T))...
                    -((S*exp(-r*T))/gamma)*(((S/m)^gamma*normcdf(-dM-
sigma*gamma*sqrt(T)))...
                    -exp((r-q)*T)*normcdf(-dM));
            end
        end
end
```

Métodos numéricos

Binomial

```
%binomial lookback put call americana europea recursiva
%binomial_lookback_recursiva(120,0,100,0,.5,10,1.1,.8,.06,.1,.3,0,1,1)
%0 europea / americana 1
%1 call / -1 put
%flotante 1/ Fijo -1
%Smaxmin=SO
%K=X
function
f=binomial_lookback_recursiva(S0,Smax,Smin,X,T,periodos,U,D,r,q,sigma,ame
ricana,callput,fijoflotante)

    if S0>Smax
        Smax=S0;
    elseif S0<Smin
        Smin=S0;
    end

    if periodos==0
       f=payoff(S0,X,Smax,Smin,callput,fijoflotante);
    else
        p=(exp((r-q)*T/periodos)-D)/(U-D);

        fU=binomial_lookback_recursiva(S0*U,Smax,Smin,X,T-
(T/periodos),periodos-1,U,D,r,q,sigma,americana,callput,fijoflotante);
        fD=binomial_lookback_recursiva(S0*D,Smax,Smin,X,T-
(T/periodos),periodos-1,U,D,r,q,sigma,americana,callput,fijoflotante);

        f=max(payoff(S0,X,Smax,Smin,callput,fijoflotante)*americana,exp(-
r*T/periodos)...
            *(p*fU...
            +(1-p)*fD));

        plot([T-(T/periodos) T],[S0*U S0])
        hold on
        plot([T-(T/periodos) T],[S0*D S0],'m')
        plot([T-(T/periodos) T],[fU f],'r')
        plot([T-(T/periodos) T],[fD f],'g')

    end
end

function p=payoff(S0,X,Smax,Smin,callput,fijoflotante)
```

```
    if callput==1 && fijoflotante==1
        p=S0-Smin;
        elseif callput==-1 && fijoflotante==1
        p=Smax-S0;
        elseif callput==1 && fijoflotante==-1
        p=max(Smax-X,0);
        elseif callput==-1 && fijoflotante==-1
        p=max(X-Smin,0);
    end

end
```

Método Montecarlo

```
%Método montecarlo put call
%Se escribe por ejemplo:
%>>montecarlo_lookback_graf(100,2,120,500,.03,0,.2,1)

function
l=montecarlo_lookback_graf(S,T,periodos,num_tray,r,q,sigma,callput,n)
    s=ones(periodos,1);
    s(1)=S;
    contc=0;            %cuenta los payoff´s de las call
    contp=0;            %cuenta los payoff´s de las put
    cont_tray=0;        %cuenta el numero de trayectorias
    grafs=0;
    while cont_tray<num_tray
        s(1)=S;         %inicializa el precio del subyacente
        i=1;
        hold on
        while i<=periodos-1
            s(i+1)=s(i)*(r-
q)*(T/periodos)+(sigma*sqrt(T/periodos))*s(i)*normrnd(0,1)+s(i);
            i=i+1;
        end
        if binornd(1,n/num_tray)==1
            grafs=grafs+1;
            colores=rand(1,3);
            plot(s,'Color', colores)

            plot((1:periodos)*(sign(s-max(s))+1), max(s), '^', 'Color',
colores)
            plot((1:periodos)*(sign(min(s)-s)+1), min(s), 'v', 'Color',
colores)
        end

        contc=contc+max(s(periodos)-min(s),0);      %acumula payoff´s
        contp=contp+max(max(s)-s(periodos),0);      %acumula payoff´s
        cont_tray=cont_tray+1;
    end
    if callput==1
        l= contc*(1/cont_tray)*exp(-T*r)
```

```
    else
        l=contp*(1/cont_tray)*exp(-T*r)
    end

    display ('numero trayectorias graficadas:')
    grafs

end
```

Bibliografía

1. Black, F. and M. Sholes (1973), "The pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp 637-654

2. Conze, A. and Viswanathan (1991). Path Dependent Options: The Case of Lookback Options". The Journal of Finance, Vol. 46, No. 5, pp. 1893-1907.

3. Cox, J. C., S. A. Ross, and M, Rubinstein (1979). "Options Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263

4. Gaarden-Haug, E, The Complete Guide to Option Pricing Formulas, McGraw-Hill, New York, NY.

5. Goldman, M. B., H. B. Sosin and M. A. Gatto (1979). "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High". *The Journal of Finance*, Vol. 34, No. 5. pp 1111-1127.

6. García-Machado J, "Opciones Exóticas", *Boletín Económico de ICE*, No.2673. pp I-VIII.

7. Hull, J.C. (2002). Options, Futures, and other Derivatives, 5th Edition, Upper Saddle River, New Jersey.

8. Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale, Method in Financial Modelling. Applications of Mathematics. Stochastic Modeling and Applied Probability Series. Springer-Verlag, Berlin.

9. Oksendal, B. (1991), Stochastic Differencial Equations, An Introduction with Applications. 5^{th} Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

10. Revuz, Daniel, Continous Martingales and Brownian motion, 3^{rd} Edition, Berlin: Springer, c1999

11. Ross, S. M. (1985), Introduction of Probability Models. Academic Press, Inc., 3^{rd} Edition, Orlando, Florida, USA.

12. Ross, S. M. (1999), Simulation. 2^{nd} Edition. Prentice Hall

13. Venegas-Martinez, F., (2006). Riesgos Financieros y Económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre), 1^{a} Edición., Internacional Thomson Editores, México.

14. Wilmott, P., (1998). Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering). John Wiley & Sons, England.

15. Wilmott, P., (2000). Paul Wilmott on Quantitative Finance. Volume one. John Wiley & Sons, England

16. Wilmott, P., S Howison, and J. Dewynne (1995). The Mathematics of Financial Derivatives: A student introduction, Cambridge University Press.