



Ciencia e Ingeniería
de Materiales

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

“Fluctuaciones de Fuerza de un Objeto Interactuando con un Flujo Turbulento”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE
MATERIALES

P R E S E N T A

FÍS. JOSÉ MANUEL GUADARRAMA CETINA



Tutor: Dr. Gerardo Ruiz Chavarría

México, D. F.

2008

Dedicado a

Dalia

Agradecimientos

Mucha gente ha colaborado para hacer posible la realización de este trabajo. Debo de agradecer y reconocer que la idea original aportada para este trabajo fue hecha por el Dr. Nicolas Garnier de la *L'École Normale Supérieure de Lyon, France* y que por la gran ayuda para la realización de una estancia de investigación en dicha institución de mi tutor Dr. Gerardo Ruiz Chavarría, este trabajo pudo ser realizado. Agradezco los comentarios hechos por mi colega Sergio Hernández Zapata quién facilitó el acceso a instalaciones de laboratorio del Taller de Fluidos del Tlahuizcalpan, además de que asistió, discutió y comentó ampliamente el trabajo experimental presentado. Quiero mencionar a mis sinodales asignados que conforman el jurado por las valiosas observaciones hechas a este trabajo. También quiero dar gracias a Dalia, que ha sido una gran compañera y que sin su apoyo en toda la extensión de la palabra no hubiera podido escribir una sola línea de la tesis. Gracias a mis padres y hermanas por todo su apoyo anímico y por seguir ahí donde siempre.

Índice general

0.1. Introducción	2
0.1.1. Trabajo relacionado	4
0.1.2. Esquema de la tesis	7
1. Movimiento Browniano y Teorema de Fluctuación Disipación	8
1.1. Movimiento Browniano	8
1.1.1. Movimiento Browniano y la Medición de la Agitación o Actividad del Medio	11
1.1.2. Análisis Armónico	12
1.1.3. Teorema de Fluctuación Disipación	15
1.2. TFD en Sistemas Fuera de Equilibrio no Estacionarios	19
1.3. Conclusiones de Capítulo	23
2. Experimentos	25
2.1. Experimento I	26
2.1.1. Dispositivo Experimental y Esquema	27
2.1.2. Relación entre la Posición de la Base de la Barra x y la Posición del Haz Láser sobre el Fotodiodo $\delta(x)$ con $\frac{V_x}{V_\Sigma}$	33
2.1.3. Constante de Rigidez k	35
2.1.4. Cálculo del Coeficiente de Disipación α	36

2.1.5. La Fuerza Magnética $F_B = \beta B$	40
2.2. Experimento II	42
2.2.1. Caracterización de la Celda de Tensión Compresión	44
2.2.2. Dispositivo Experimental	44
2.2.3. Análisis de Fuerzas	44
2.2.4. Constante de rigidez k	50
2.2.5. Fuerza magnética F_B y la disipación α	50
2.3. Gráficas y Resultados	56
2.3.1. Experimento I	56
2.3.2. Experimento II	61
2.4. Conclusiones de capítulo	69
3. Temperatura Efectiva	71
3.1. Presentación de Capítulo	71
3.2. Cálculo de la Temperatura Efectiva T_{ef}	72
3.2.1. Análisis de T_{ef} y el Número de Reynolds.	76
3.2.2. Análisis de la Frecuencia Crítica en T_{ef}	83
4. Conclusiones	86
4.1. Trabajo por realizar	89

Resumen

El teorema de Fluctuación Disipación ó TFD es utilizado en física estadística para cuantificar la actividad de un sistema que se encuentra cercano al equilibrio, no obstante, cuando se trata de sistemas fuera de equilibrio, el TFD no es válido. Con algunas modificaciones a éste teorema, definiendo una cantidad llamada temperatura efectiva ó T_{ef} que depende de la frecuencia, con la cual se podrá cuantificar la actividad de un sistema en el régimen fuera de equilibrio y estacionario. El objetivo principal de este trabajo es cuantificar la T_{ef} en dos experimentos. Estos experimentos consisten en hacer interactuar un chorro de aire y un campo magnético aleatorio con un brazo de palanca que sujeta placas con diferentes valores de masa y área. El número de Reynolds del flujo varía de forma controlada. Los valores de T_{ef} son relacionados con el número de Reynolds y el área y masa de las placas. Se determina la respuesta del sistema mediante una función H y se realiza un balance de las mediciones de las fuerzas. En este trabajo de tesis se presentan los detalles y resultados de dos experimentos dentro del marco teórico de los fenómenos fuera de equilibrio, la física estadística, el estudio del movimiento Browniano.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos: en el Capítulo 1 se presenta el modelo teórico para sistemas estacionarios y fuera de equilibrio. En el Capítulo 2 se presenta una descripción de los sistemas experimentales utilizados y se conocen parámetros de los sistemas. En el Capítulo 3 se muestra el valor de T_{ef} y la dependencia de la actividad con diversas variables de conjunto y se discuten los resultados. En el Capítulo 4 se exponen las conclusiones.

Palabras clave: *Disipación, Ecuación de Langevin, Exponentes de Escalamiento, Física Estadística, Oscilador Armónico, Sistemas Fuera de Equilibrio, Temperatura Efectiva, Teorema de Fluctuación Disipación, Turbulencia.*

0.1. Introducción

La descripción de la evolución de sistemas fuera de equilibrio tales como los sistemas mecánicos sensibles a perturbaciones, sistemas biológicos, movimiento browniano, envejecimiento de cristales, nanotecnología y otros sistemas cuyas interacciones tienen importancia en escalas nanométricas, permanecen aún como un reto para la ciencia de los materiales, la física y la mecánica estadística. En la actualidad, para abordar este tipo de problemas existen muchas técnicas. Sin embargo, este trabajo se enfoca al Teorema de Fluctuación Disipación y con el cual, se obtiene una función denominada temperatura efectiva. Originalmente el TFD es válido únicamente para sistemas cercanos al equilibrio. Este teorema relaciona una perturbación débil con una fluctuación espontánea del sistema. En los experimentos reportados, se efectúan variaciones de conjunto que modifican la intensidad de la fuerza de excitación. Posteriormente, se analiza la respuesta del sistema vía la densidad de potencia espectral ó PSD y por último, se buscan cuales son los factores que determinan el valor de la temperatura efectiva en cada caso [1].

Recientemente, la temperatura efectiva se ha estudiado teórica y experimentalmente. Por ejemplo, en el análisis del desempeño de variables dinámicas en las mediciones microreológicas del envejecimiento del vidrio, en los cuales, se ha explorado la evolución de las propiedades viscoelásticas en un amplio intervalo de frecuencias. Este sistema no es el único en donde se pueden explorar el comportamiento de las fluctuaciones de un sistema, también existen sistemas mecánicos no microscópicos en los cuales se puede observar muy claramente la relación de la función de respuesta del sistema y la temperatura efectiva.

Al mencionar el concepto de temperatura efectiva, pudiera pensarse en una referencia a la Ley Cero de la Termodinámica, pero tal no es el caso. Se hacen estimaciones sobre sistemas totalmente fuera de equilibrio con las cuales no se podría avanzar por la misma ruta conceptual en el establecimiento de una ley de escalas. Para medir la temperatura efectiva en un sistema totalmente fuera de equilibrio es necesario lo siguiente: la determinación de la posición de un sistema, dos

fuerzas de excitación y otra amortiguadora que interaccionen con el sistema. En cambio, para determinar la temperatura según la Ley Cero, se requieren tres sistemas que estén en contacto y que alcancen un equilibrio térmico.

El sistema utilizado en los experimentos consiste en un oscilador, ya que es fácil de modelar y es ampliamente citado en la literatura: el oscilador del sistema consistente en un brazo palanca cuyo extremo libre tiene colocada una placa, esto se hace vibrar mediante la aplicación de las fuerzas de interacción. Las propiedades observadas son las de un oscilador armónico, ver las Figuras 1 y 2 y además puede ser representado por

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_{turb} + F_B \quad (1)$$

donde m , α y k son respectivamente la masa, una constante de disipación y la constante de rigidez del oscilador ($F = -kx$), siendo x la posición de la base del oscilador debido a las fuerzas aleatorias producidas por el chorro de aire F_{turb} y la fuerza magnética aleatoria que es generada por la bobina F_B cuando ambas interactúan con el oscilador. La Ecuación 1 sin el término kx se conoce como ecuación de Langevin. Fue propuesta para el estudio del movimiento Browniano [2] en 1908. Langevin se aproximó de una forma más simple que el modelo basado en ecuaciones diferenciales parciales (ecuación de Fokker-Planck) de Einstein. Langevin aplicó la segunda Ley de Newton para una partícula Browniana y «por así decirlo inventó la $F = ma$ de la física estocástica». Sus ideas implican el uso de objetos matemáticos, tales como, distribuciones gaussianas, ruido blanco y ecuaciones diferenciales estocásticas, que con un manejo cauteloso e intuitivo, sus propiedades son utilizadas ampliamente desde entonces.

Se puede escribir esta ecuación en la representación de Fourier para obtener una función de respuesta Lorentziana

$$x = HF, \quad (2)$$

donde H tiene la forma de

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\alpha\omega}. \quad (3)$$

Cuando el sistema es excitado por una fuerza aleatoria únicamente, de la Ec. 2 se obtiene una descripción de las posiciones $x_s(\omega)$ del oscilador. Adicionalmente a la excitación principal se aplica una fuerza de amortiguamiento, en este caso es una fuerza magnética aleatoria, la descripción de la posición es $x_{SB}(\omega)$, pero si la excitación del sistema está dada únicamente por la fuerza magnética, entonces la posición será $x_B(\omega)$. El interés de realizar un balance de la posición del sistema correspondiente a estos modos de excitación para conocer cuáles la contribución de los parámetros en la Ec. 3, para ello se utiliza el ajuste

$$|\Im\{H(\omega)\}| \sim \frac{|x_S(\omega) - x_{SB}(\omega)|}{x_B(\omega)} \sim \alpha|H|^2. \quad (4)$$

Posteriormente, con ayuda del TFD y la temperatura efectiva se estima la temperatura efectiva del sistema [1, 3] como

$$4K_B T_{ef} = \frac{\langle |x(\omega)|^2 \rangle}{\alpha \Im\{H(\omega)\}} \approx \frac{\langle |x(\omega)|^2 \rangle}{\alpha |H(\omega)|^2}. \quad (5)$$

En los capítulos siguientes, se abundan en más detalles sobre el significado y uso de estas ecuaciones.

0.1.1. Trabajo relacionado

Este tipo de trabajos se enfocan, por lo general, al estudio del envejecimiento de polímeros o cristales y da la pauta para utilizar modelos basados en la Ecuación 1 [5]. Entre otras aplicaciones se encuentra el estudio de la susceptibilidad magnética de materiales diversos ya que es importante para conocer propiedades estructurales.

En un sistema en estado estacionario y fuera del equilibrio, el cómputo del balance de sus interacciones dará la temperatura efectiva. Los factores de resistencia, disipación o fricción son relevantes en la respuesta del medio con la partícula. Realizando un estudio dinámico del movimiento de la partícula, se encontrará cómo actúan estas cantidades de “resistencia”. Los efectos de fricción o disipación sobre la actividad de la partícula están relacionados a variables de conjunto que modifican el sistema. En este trabajo se busca dicha relación. Al realizar un análisis espectral de T_{ef} del sistema se localiza un valor de frecuencia característica ω_c en donde se localiza una transición

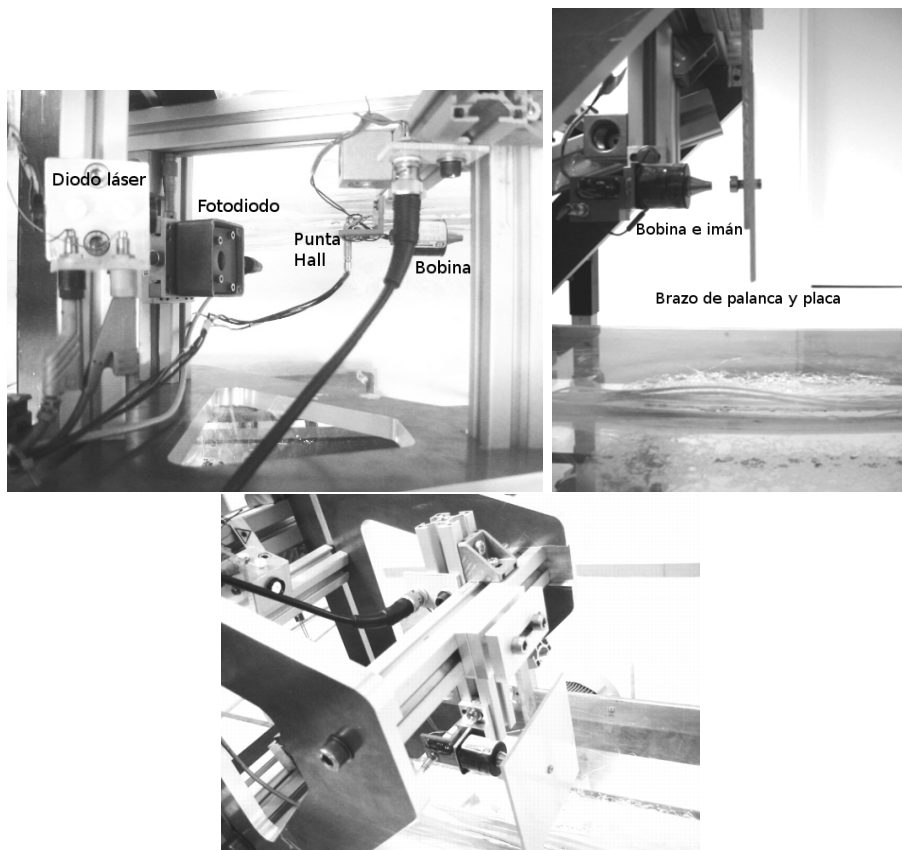


Figura 1: En la fotografía superior se puede apreciar el diodo láser y el fotodiodo que se encuentran sobre el mismo eje vertical. Justo en frente del fotodiodo se aprecia la bobina utilizada a la cual se le ha conectado una punta Hall para medir el campo magnético. La fotografía inferior izquierda se muestra la bobina y el brazo de palanca con una placa fija con tornillos. Del lado de la bobina se ha colocado un imán de tierras raras. En la fotografía inferior derecha se puede apreciar el soporte metálico de todo el sistema y se ofrece de una mejor perspectiva el diodo láser, la bobina, la punta Hall y el brazo de palanca con la placa colocada.

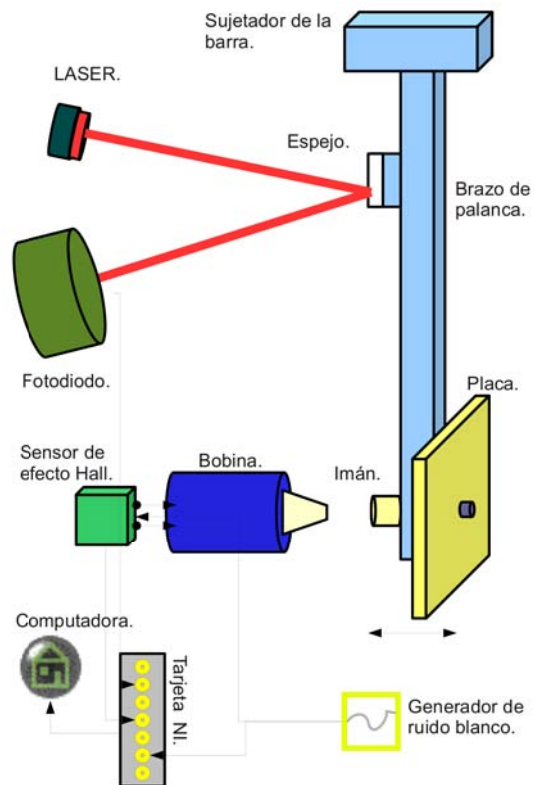


Figura 2: En el esquema se puede observar las partes del dispositivo dedicadas a la medición y adquisición de datos.

de los estados del sistema que serán comparados con las variables de conjunto. La motivación de variar la intensidad media de las interacciones en el sistema es para obtener una mejor comprensión de cómo ciertas variables dependientes del tiempo modifican los valores estimados de la T_{ef} . Se han hecho un gran número de experimentos para determinar la temperatura efectiva de sistemas de envejecimiento, por ejemplo [8] en donde se hace un estudio del modelo de Langevin aplicado al modelo de Rouse¹ encontrando que las funciones de respuesta son derivadas de una aproximación variacional Gaussiana.

0.1.2. Esquema de la tesis

En el Capítulo 1 se recuerda el razonamiento de Langevin para modelar el movimiento Browniano, posteriormente se revisa el TFD. En el Capítulo 2, se describe el trabajo experimental; uno propuesto en "L'École Normale Supérieure de Lyon" y otro más propuesto en el Taller de Fluidos, Edif. Tlahuizcalpán, Fac. de Ciencias, UNAM. En esta etapa del trabajo de tesis se caracterizan de forma experimental los parámetros del sistema. En el Capítulo 3 se lleva a cabo el análisis de datos, cuantificando la actividad del sistema aplicando el TFD y así mismo se presenta una discusión de los resultados hallados. En el Capítulo 4 se cuantifica la actividad del sistema y se discute cómo el estudio de este modelo dinámico se puede ayudar a interpretar lo que sucede en sistemas un poco más complejos como la degradación de cadenas de polímeros, cristales líquidos y vidrios.

¹El modelo de Rouse es utilizado para describir una cadena de polímeros unidimensional, en donde cada molécula y su enlace con sus vecinas, se comporta como un oscilador armónico. El modelo de Rouse describe la dinámica de las cadenas de polímeros fundidas y proporciona una aproximación de la relajación. En esta bibliografía se puede ver el modelo de Rouse y algunas aplicaciones [6] y [7].

Capítulo 1

Movimiento Browniano y Teorema de Fluctuación Disipación

Presentación de capítulo

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos básicos sobre movimiento browniano y el Teorema de Fluctuación Disipación. Además se presentan los casos en donde el sistema se encuentra fuera de equilibrio de manera estacionaria o no estacionaria y cómo se aborda la temperatura efectiva.

1.1. Movimiento Browniano

Al revisar el estudio que en 1908 Langevin hizo sobre el movimiento browniano con esta expresión [2]. A principios del siglo XX ya se conjeturaba que el movimiento aleatorio sufrido por las partículas suspendidas en un medio era debido a agitación térmica de las moléculas. La Ec. 1 es pieza clave en el análisis de fenómenos aleatorios. La forma de abordar este tema era determinando

la distancia recorrida por la partícula. Ver Ecuación 1.1.

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} \tau \quad (1.1)$$

donde τ es el intervalo de tiempo que toma una partícula en desplazarse, μ es la viscosidad dinámica, a es el radio de la partícula, R la constante de gases ideales y N el número de Avogadro. Aplicando el teorema de equipartición de la energía cinética a un sistema con varios grados de libertad, en equilibrio y utilizando una partícula suspendida en cualquier tipo de líquido posee una energía cinética promedio de $RT/2N$. Si $\xi = dx/dt$ es la velocidad en un instante dado y tomando el promedio de las partículas idénticas que pueden tener la misma dirección, se obtiene que la energía cinética promedio es

$$m\overline{\xi^2} = \frac{RT}{N}. \quad (1.2)$$

Cuando una de estas partículas se desplaza una distancia más grande en comparación a la distancia promedio de las moléculas del fluido con una velocidad ξ , experimenta un arrastre $-6\pi\mu a\xi$ de acuerdo con la ley de Stokes. Utilizando la Segunda Ley de Newton y el arrastre, ahora se puede escribir

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a \frac{dx}{dt} + X \quad (1.3)$$

donde X es una fuerza aleatoria que puede ser negativa o positiva y su magnitud es tal que mantiene en agitación a la partícula. Para un número grande de partículas, se toma un promedio sobre la aceleración de la Ecuación 1.3 y se multiplica por x , siendo el valor promedio de Xx nulo a causa de las fluctuaciones de X . Si se escribe $z = \overline{dx^2}/dt$ entonces,

$$\frac{m}{2} \frac{dz}{dt} + 3\pi\mu a z = \frac{RT}{N} \quad (1.4)$$

la solución general es

$$z = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} + C e^{-\frac{6\pi\mu a}{m}t}. \quad (1.5)$$

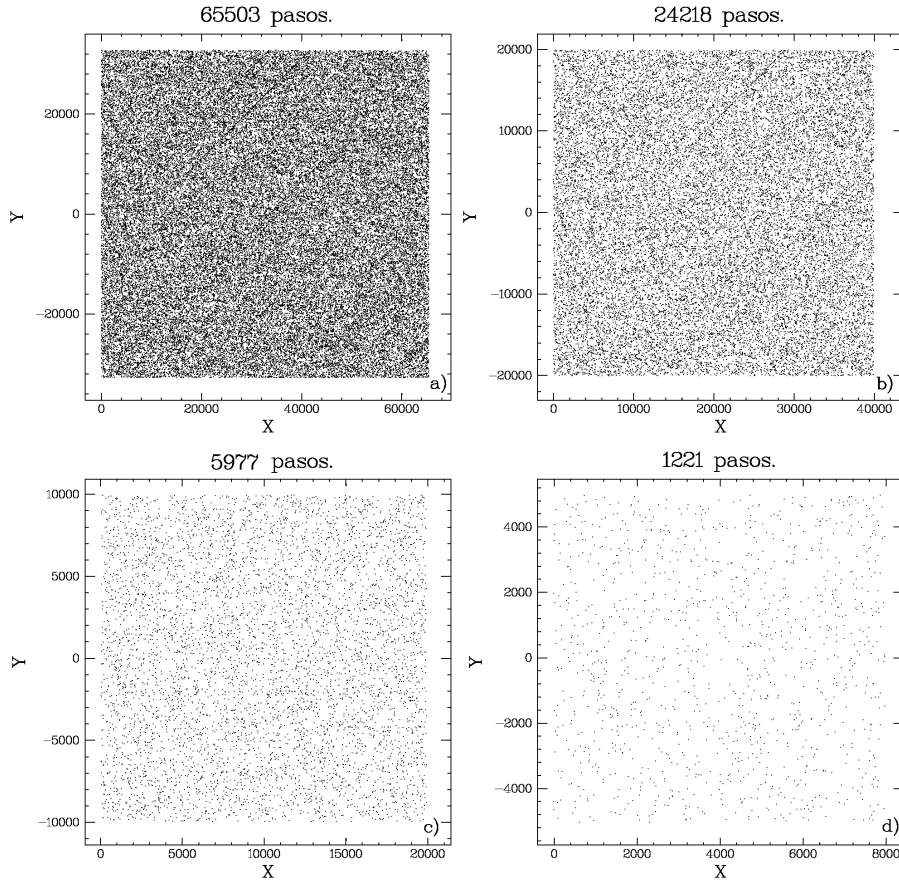


Figura 1.1: Una partícula se encuentra inmersa en un medio que interactúa con ella de manera aleatoria. La interacción produce un desplazamiento errático de la partícula. Un punto representa la posición final de una partícula después de haber dado n cantidad de pasos desde una posición inicial. Los demás puntos corresponden a la posición final del recorrido de una partícula al realizar m veces el mismo experimento. El algoritmo utilizado es: $\mu = y_0 - y_f[y_0/y_f]$ y $x_t = x_{t-1}y_0 - \mu y_0$, donde los enteros guardan la relación $y_0 < y_f$ entre sí al incrementarse una unidad en cada experimento m . El número de pasos que da la partícula es $t = 1, 2, 3, \dots, n$. x_t es la posición en el paso t . Únicamente se grafica la posición final $x_{t=n}$.

El segundo término del lado derecho de la igualdad tiende rápidamente a cero. Para tiempos largos, el desplazamiento promedio se puede medir para un régimen relajado como

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a}. \quad (1.6)$$

El primer término en (1.5) es un valor constante y $m/6\pi\mu a$ tiene un valor aproximado de 10^{-8} segundos [2] para las partículas en las cuales se puede observar movimiento Browniano. En un intervalo de tiempo τ en (1.6), un desplazamiento se puede escribir como

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2 - x_0^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} \tau. \quad (1.7)$$

En resumen, el movimiento browniano se desarrolla en un sistema con los siguientes puntos:

1. Interacción de la partícula con el medio. La fuerza de esta interacción es dependiente de la posición.
2. La interacción surgida del movimiento de la partícula en el medio puede verse como la fricción ó fuerza de Stokes que siente la partícula debida al medio.
3. Interacción de fuerzas externas sobre el sistema.

Los puntos 1 y 3 describen el tipo de fuerzas que actúan en el desarrollo de la dinámica del sistema. El punto 2 representa la respuesta del sistema. La fuerza aleatoria X de la Ec. 1.3 puede ser escrita cómo

$$X = F_p + F_{ext},$$

en donde F_p representa al punto 1 y F_{ext} al punto 3.

1.1.1. Movimiento Browniano y la Medición de la Agitación o Actividad del Medio

Cuando Langevin y Einstein estudiaron el movimiento Browniano ya se tenían algunas ideas sobre los elementos que lo hacían posible; faltaban herramientas de análisis para profundizar más en

detalles tanto experimentales como teóricos. El estudio de estas interacciones nos proporcionará información inequívoca de la actividad neta del sistema. Para comprender el concepto de temperatura efectiva, se hará un análisis armónico de la Ec. 1 y posteriormente, el movimiento Browniano como un proceso Gaussiano y se llegará al teorema de fluctuación disipación [9].

1.1.2. Análisis Armónico

Fijaremos nuestra atención únicamente en el movimiento de las partículas Brownianas. La Ec. 1.3 puede reescribirse como

$$m \frac{du}{dt} = -m\gamma u + R(t). \quad (1.8)$$

en donde m es la masa, γ un parámetro de disipación, u es la velocidad de la partícula y $R(t)$ una fuerza aleatoria en función del tiempo. Para resolver (1.8), expresamos el movimiento de la partícula como una superposición de funciones trigonométricas y suponemos que el medio es un sistema estacionario por ello, la probabilidad calculada de la posición en la que pudiera estar una partícula en un instante t debe ser invariante, es decir

$$W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau). \quad (1.9)$$

Si una medición¹ $z(t)$ definida en un intervalo de tiempo ($0 \leq t \leq T$) y que además $z(t) \in Z(t)$, donde $Z(t)$ es un conjunto numerable. A partir de una expansión en series de Fourier de $z(t)$ como

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i\omega_n t) \quad (1.10)$$

con

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

se obtiene una colección de coeficientes a_n . Los coeficientes a_n se representan como

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) \exp(-i\omega_n t) dt.$$

¹De ahora en adelante $z(t)$ no tendrá relación con la variable utilizada en la sección (1.1) y en cambio, se utilizará por el resto del trabajo como se define en este párrafo.

El conjunto $Z(t)$ es numerable y está compuesto de una cantidad infinita de variables aleatorias.

Los valores esperados a_n de cada medición $z(t)$ se representan de la siguiente manera

$$\langle a_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle z(t) \rangle \exp(-i\omega_n t) dt. \quad (1.11)$$

Al filtrarse las frecuencias en un intervalo $\Delta\omega$, los coeficientes observados de la serie de Fourier, se podrá definir un promedio de la intensidad del fenómeno,

$$I(\omega)\Delta\omega = \sum_{\omega_n \in \Delta\omega} \langle |a_n|^2 \rangle. \quad (1.12)$$

El lado derecho de esta ecuación es la suma de todas las amplitudes contenidas en el ancho de banda definida. Suponiendo que $\langle a_n^2 \rangle$ es continua en la frecuencia ω_n la intensidad se podrá expresar como

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \langle |a_n|^2 \rangle. \quad (1.13)$$

Un ejemplo de lo anterior, es interpretar a $z(t)$ como el ruido producido por la red eléctrica e $I(\omega)$ como la intensidad del ruido escuchado por el filtrado de frecuencias, en una banda $\Delta\omega$ alrededor de ω . $I(\omega)$ de (1.13) se le conoce como la densidad de potencia espectral PSD del conjunto $Z(t)$. La correlación entre los valores observados en los muestreos $z(t)$ en dos tiempos distintos t_0 y $t_0 + t$ se escribe como,

$$\phi(t) = \langle z(t_0)z(t_0 + t) \rangle. \quad (1.14)$$

El teorema de Wiener-Khintchine² dice que $I(\omega)$ es igual a la transformada de Fourier de la correlación $\phi(t)$. Si se expresa la fuerza aleatoria $R(t)$ y la velocidad $u(t)$ como series de Fourier, series correspondientes de $R(t)$ y $u(t)$ son:

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(i\omega_n t)$$

y

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp(i\omega_n t),$$

se puede convertir la Ecuación 1.8 en

$$u_n = \frac{1}{i\omega + \gamma} \frac{R_n}{m} \tag{1.15}$$

que se deduce de aplicar la transformada de Fourier a la ecuación diferencial que describe el movimiento browniano.

Al escribir la PSD de $R(t)$ y $u(t)$ en términos de I_R e I_u se observa que

$$I_u(\omega) = \frac{1}{|i\omega + \gamma|^2} \frac{I_R(\omega)}{m^2} = \frac{I_R}{(\omega^2 + \gamma^2)m^2}. \tag{1.16}$$

Usando de forma explícita el teorema de Wiener-Khintchine y definiendo la función característica para $z(t)$ se obtiene $\phi(\xi) = \langle \exp(i\xi x) \rangle$ entonces,

$$\langle |a_n|^2 \rangle = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \langle z(t_1)z(t_2) \rangle \exp(-i\omega_n(t_1 - t_2)) dt_1 dt_2. \tag{1.17}$$

²El teorema establece que la densidad de potencia espectral en un proceso aleatorio es igual a la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Para el caso continuo se tiene:

$$S_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

donde

$$r_{xx} = \langle x(t)x^*(t - \tau) \rangle,$$

que es la autocorrelación temporal definida en términos de los valores estadísticos esperados y $S_{xx}(f)$ es la PSD de la función $x(t)$. Nótese que, la función de autocorrelación está definida en términos de los valores esperados de un producto y que la transformada de Fourier de $x(t)$ no está definida pues, los procesos aleatorios no son cuadráticamente integrables.

La función de correlación depende únicamente en la diferencia de tiempo ($t_1 - t_2$). Haciendo un cambio de variable $t_1 - t_2 = t$ en la Ec. 1.17, las integrales se expresan como

$$\int_0^T (T - t)\phi(t) \exp(-i\omega_n t) dt ,$$

y

$$\int_0^T (T - t)\phi(-t) \exp(i\omega_n t) dt .$$

Si la partícula Browniana está confinada a una región cercana al origen por una fuerza de tipo elástica, la ecuación de Langevin con el término restaurador puede ser representada de la siguiente manera (ver Ecs. 1 y 2):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{R(t)}{m}. \quad (1.18)$$

En la Ecuación 1.18 x es la posición de la partícula y ω_0^2 está relacionada con la fuerza restauradora y siendo esta, la frecuencia natural de resonancia del sistema. Para este modelo, la relación de potencias espectrales entre I_x e I_R es:

$$I_x(\omega) = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega|^2} \frac{I_R(\omega)}{m^2}. \quad (1.19)$$

Este resultado muestra que es suficiente conocer la función de correlación o la PSD, para poder caracterizar al sistema. Esto resulta muy cómodo experimentalmente hablando.

1.1.3. Teorema de Fluctuación Disipación

En general, cuando se habla de fluctuaciones en sistemas con un número grande de grados de libertad se recurre al teorema de fluctuación disipación. Además, se puede suponer que la fuerza aleatoria tiene un espectro de ruido blanco en un intervalo de frecuencias. Adicionalmente, se supone que la fricción depende de la velocidad instantánea de una partícula. Sin embargo, la fricción en general puede retardarse por un tiempo t' ; este retraso puede ser visto en la ecuación de Langevin generalizada como

$$\frac{du(t)}{dt} = - \int_{-\infty}^t \gamma(t - t')u(t')dt' + \frac{1}{m}(R(t) + K(t)). \quad (1.20)$$

En donde $\gamma(t)$ es la fricción por retardo, $R(t)$ es una fuerza aleatoria y $K(t)$ es una fuerza externa. La fuerza aleatoria en promedio es cero, es decir, $\langle R(t) \rangle = 0$. Suponiendo que la fuerza externa es periódica, el promedio de la velocidad inducida por esta fuerza será

$$\langle u(t) \rangle = \Re\{\mu(\omega)K_0e^{i\omega t}\}, \quad (1.21)$$

donde $K(t) = K_0\cos(\omega t) = \Re\{K_0e^{i\omega t}\}$ y $\mu(\omega)$ es la movilidad compleja que se escribe como

$$\mu(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{i\omega + \gamma[\omega]}. \quad (1.22)$$

$\gamma[\omega] = \int_0^\infty \gamma(t)e^{-i\omega t}dt$ que es la transformada de Fourier - Laplace para el retardamiento que puede ser obtenida a partir del promedio de (1.20) como sigue a continuación,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t) \rangle = - \int_{-\infty}^t \gamma(t-t')\langle u(t-t') \rangle dt' + \Re\left\{\frac{1}{m}R(t)\right\}. \quad (1.23)$$

Se piensa que $\gamma[\omega]$ puede tener alguna relación con la conductividad o admitancia. La ecuación generalizada de Langevin (1.20) es lineal y se puede realizar en ella un análisis armónico. Si la fuerza externa $K(t)$ es cero y el movimiento es provocado únicamente por la fuerza aleatoria $R(t)$, aplicando la transformada de Fourier inversa sobre la velocidad $u(t)$ y la fuerza $R(t)$,

$$R(t) = \int_{-\infty}^\infty R(\omega)e^{i\omega t}d\omega \text{ y}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^\infty u(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

con lo cual, $u(\omega) = \frac{1}{i\omega + \gamma[\omega]} \frac{R(\omega)}{m}$, que es un resultado que ya hemos visto (ver en introducción Ecs. 2 y 3, además en esta sección Ec. 1.19). Para $R(t)$ y $u(t)$ la PSD cuando se relacionan a ambos procesos es:

$$I_u(\omega) = \frac{1}{m^2} \frac{I_R(\omega)}{|i\omega + \gamma[\omega]|^2}. \quad (1.24)$$

Ahora, si el espectro $I_R(\omega)$ para la fuerza aleatoria $R(t)$ está dado por la Ec. 1.19 y produce I_u de la cual, la función de correlación $\langle u(0)u(t) \rangle$ es obtenida utilizando el teorema de Wiener-Khintchine y representa la distribución de la velocidad en el equilibrio térmico y del espectro $I_R(\omega)$ entonces,

$$I_R(\omega) = \frac{mkT}{\pi} \Re\{\gamma[\omega]\}; \quad (1.25)$$

o

$$\langle R(\omega)R^*(\omega') \rangle = \frac{mkT}{\pi} \Re\{\gamma[\omega]\delta(\omega - \omega')\}. \quad (1.26)$$

La Ec. 1.25 viene de suponer que la PSD es independiente de la frecuencia $I_R(\omega) = cte$; es decir, que que se considera como ruido blanco. La función de correlación de un proceso que tiene una densidad de potencia espectral de ruido blanco tiene una correlación despreciable para tiempos pequeños, $\phi(t_1 - t_2) = \langle R(t_1)R(t_2) \rangle = 2\pi I_R \delta(t_1 - t_2)$. Entonces, para una fuerza de esta naturaleza tendremos que la función de correlación de la velocidad para una partícula Browniana es $\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \frac{\pi I_R}{m^2 \gamma} e^{-\gamma|t_1 - t_2|}$. Esto quiere decir que esta función de correlación decrece exponencialmente en el tiempo con la constante γ . Para $t_1 = t_2$, $\langle u^2 \rangle = \frac{\pi I_R}{m^2 \gamma}$. Si la partícula ha estado en un fluido a una temperatura T durante un tiempo grande. Por el teorema de equipartición de la energía podemos escribir $m\langle u^2 \rangle = kT$ siendo esto consistente con $I_R = \frac{m\gamma kT}{\pi}$.

Por lo anterior se deduce que, $\langle R(t_1)R(t_2) \rangle = mkT\gamma(t_1 - t_2)$. Redefiniendo la función para $0 < t$ y $t < 0$ y suponiendo que $\gamma(t) = \gamma(-t)$ se concluye que, $\Re\{\gamma[\omega]\} > 0$ y la correlación para la velocidad

$$\langle u(t_0)u(t_0 + t) \rangle = \frac{kT}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{i\omega + \gamma[\omega]} + \frac{1}{-i\omega + \gamma^*[\omega]} \right) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.27)$$

La contribución del segundo término de la integral puede eliminarse [9] para $t > 0$, pues $\gamma(\omega)$ es analítica en el plano donde $Im\{\omega\} < 0$, por lo tanto la Ecuación 1.27 queda como

$$\langle u(t_0)u(t_0 + t) \rangle = \frac{kT}{2\pi m} \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} \left(\frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \gamma[\omega]} \right) d\omega. \quad (1.28)$$

La movilidad compleja (1.22) es:

$$kT\mu(\omega) = \int_0^{\infty} \langle u(t_0)u(t_0 + t) \rangle e^{-i\omega t} dt \quad (1.29)$$

y la función de retardamiento $m\gamma[\omega]$ se puede expresar en términos de la transformada de Fourier de las correlaciones de la fuerza aleatoria del sistema $R(t)$:

$$kTm\gamma[\omega] = \int_0^{\infty} \langle R(t_0)R(t_0 + t) \rangle e^{-i\omega t} dt. \quad (1.30)$$

La expresión (1.29) expresa la movilidad compleja en términos de la transformada de Fourier de la función de correlación de la velocidad, que es una generalización de la ecuación de Einstein. La expresión (1.30) es la resistencia compleja o la impedancia compleja expresada en términos de la transformada de Fourier de la función de correlación de la fuerza. Estas dos expresiones implican que la respuesta del sistema a una perturbación externa está relacionada a las fluctuaciones térmicas espontáneas producidas en el sistema en ausencia de fuerzas externas³. El TFD es válido en ambos casos; para distinguir entre ambas expresiones llamamos a la primera (1.29), **TFD-I** y a la segunda, (1.30) **TFD-II**. Las funciones de correlación que aparecen del lado derecho pueden ser calculadas con relativa facilidad pero, por otro lado, la fuerza aleatoria que aparece en la ecuación (1.30) no es trivial pues, la separación de la fuerza en su partes friccional y aleatoria es un problema complejo de la mecánica estadística⁴. El valor medio del cuadrado del desplazamiento de una partícula Browniana en un intervalo de tiempo $(0, t)$ se puede calcular como

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle u(t_1)u(t_2) \rangle dt_1 dt_2. \quad (1.31)$$

Haciendo una transformación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle x(t)^2 \rangle}{2t} = \int_0^\infty \langle u(t_0)u(t_0 + t') \rangle dt'. \quad (1.32)$$

De la función de correlación de la velocidad que es dependiente de $t_1 - t_2$ se puede obtener la relación de Einstein

$$\langle X^2 \rangle = 2Dt$$

además, se obtiene que el resultado puede expresarse en términos de parámetros disipativos y la temperatura absoluta

$$D = \mu(0)kT.$$

³La relación de la parte disipativa en la respuesta a las fluctuaciones y fue reconocida por primera vez por Nyquist.

Ésta obtuvo el nombre de Teorema de Fluctuación Disipación.

⁴Pretendemos sortear este problema utilizando un oscilador ya que es posible controlar la totalidad de sus parámetros.

$$\langle u^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

y $D = \frac{\langle u^2 \rangle}{\gamma} = \frac{kT}{m\gamma}$, que son casos del TFD-I.

1.2. TFD en Sistemas Fuera de Equilibrio no Estacionarios

Para los sistemas totalmente fuera del equilibrio no se puede aplicar directamente el TFD ya que los términos que describen la disipación no siguen las formas antes analizadas. Haciendo uso de la ecuación generalizada de Langevin para determinar el movimiento de una partícula y aplicando un análisis asintótico de Fourier [10], se puede caracterizar un medio fuera de equilibrio mediante la medición de la movilidad (ver Ec. 1.22). A continuación analizaremos tres casos en donde daremos la forma explícita de la temperatura efectiva [5]. El primer caso, el sistema se encuentra cercano al equilibrio, en segundo lugar, cuando el sistema está totalmente fuera de equilibrio, pero en estado estacionario y en tercer lugar, cuando el sistema se encuentra totalmente fuera de equilibrio y no es estacionario.

1. TFD: Sistema cercano al equilibrio.

El movimiento de una partícula de masa m inmersa en un medio en estado estacionario se describe usualmente como la ecuación de Langevin generalizada donde la velocidad

$$u(\omega) = \mu(\omega)F(\omega), \mu = \frac{1}{m[\gamma(\omega) - i\omega]}, \quad (1.33)$$

donde la expresión (1.33) es la TF ó transformada de Fourier de la ecuación generalizada de Langevin y las densidades espectrales de los procesos aleatorios están ligados por:

$$C_{uu}(\omega) = |\mu(\omega)|^2 C_{FF}(\omega). \quad (1.34)$$

C_{uu} y C_{FF} son las correlaciones para la velocidad y la fuerza aleatoria:

$$C_{uu} = \langle u(t')u(t' + t) \rangle$$

y

$$C_{FF} = \langle F(t')F(t'+t) \rangle.$$

2. TFD: Sistema fuera de equilibrio y estacionario.

Las expresiones de TFD-I y TFD-II que se aplican a la velocidad de una partícula Browniana y, al medio en general fueron vistas anteriormente y únicamente se usarán los resultados,

$$\int_0^\infty \langle u(t)u(0) \rangle e^{i\omega t} dt = kT\mu(\omega) = -\frac{\omega^2}{2} \int_0^\infty \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle e^{i\omega t} dt \quad (1.35)$$

y

$$C_{uu}(\omega) = \int_0^\infty \langle u(t)u(0) \rangle e^{i\omega t} dt = kT2\Re\{\mu(\omega)\} \quad (1.36)$$

Se ha dejado a la expresión de la movilidad en términos de la media cuadrática de los desplazamientos; esto es más conveniente cuando se trata de analizar datos experimentales. Ahora para TFD-II donde $C_{FF}(\omega)$ se escribe como,

$$C_{FF}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \langle F(t)F(0) \rangle e^{i\omega t} dt = mk_B T 2\Re\{\gamma(\omega)\} \quad (1.37)$$

Estas tres ecuaciones (1.33,1.35 y 1.36) son equivalentes cuando se tiene el equilibrio.

3. TFD: Sistema fuera de equilibrio y no estacionario.

Cuando un medio no es estacionario, las funciones que lo describen $\chi'_{\phi\phi}(t, t')$ y $\chi'_{vx}(t, t')$ dependen de dos tiempos t y t' y no únicamente de la diferencia $\tau = t - t'$, donde τ es la medida del tiempo⁵ de observación del sistema o edad del sistema. Estas funciones en términos del tiempo son muy importantes y no se pueden descartar para conocer la evolución del sistema sin embargo, no son suficientes para caracterizarlo. Con la intención de obtener

⁵Se está haciendo referencia a una variable independiente que produce algún cambio sobre todo el ensemble; por ejemplo, en los experimentos mostrados en el Capítulo 2, se hace mención a la variación de la frecuencia de funcionamiento de un túnel de viento, al cambio de distancia entre la boquilla de una boquilla expulsora de un chorro de aire a una placa y el área de la placa.

información complementaria, se ha propuesto una función dependiente del tiempo y de la frecuencia. Aplicando la TF respecto a τ de la función y dejando al tiempo t que representa la edad del sistema. Considerando la función de respuesta $\chi(t, t')$ como

$$\chi_1(\omega, t) = \int_a^b \chi'_1(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.38)$$

El límite inferior a de la integral en la Ec. 1.38 es igual a 0. El límite superior es t menos el valor mínimo de t' . Suponiendo que la perturbación es aplicada a $t' = 0$, el valor máximo de integración es t y la integral anterior se reescribe como

$$\chi_1(\omega, t) = \int_0^t \chi'_1(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.39)$$

Se puede invertir la relación (1.38) obteniendo,

$$\Theta(t')\Theta(\tau)\chi'(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega, t) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (1.40)$$

Este resultado viene de suponer que χ' se puede escribir como la Ec. 1.43. El tiempo t al ser interpretado como la edad del sistema es reescrita como t_w ,

$$\chi_1(\omega, t_w) = \int_0^{t_w} \chi'_1(t_w, t_w - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.41)$$

En el caso de un régimen estacionario se supone que $\chi'(t, t')$ es invariante ante la traslación $\chi'(t, t') = \chi'_1(\tau)$ y adicionalmente que la edad del sistema tiene a infinito

$$\chi(\omega) = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \int_0^{t_w} \chi'(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.42)$$

La Ec. 1.40 no es una TF de $\chi'_1(t_w, \tau)$ sino, una TF parcial en el intervalo $0 < \tau < t_w$. Como consecuencia, no posee las mismas propiedades analíticas de $\chi(\omega)$ definida en la relación (1.43), la función $\chi_1(\omega, t_w)$ es analítica en todo el plano complejo. Por decir, si el decremento exponencial de una función de respuesta fuera

$$\chi'(t, t') = \Theta(t - t') e^{-\gamma(t-t')}, \quad (1.43)$$

entonces su TF parcial sería:

$$\chi_1(\omega, t_w) = \frac{1}{\gamma - i\omega} [1 - e^{-(\gamma - i\omega)t_w}]. \quad (1.44)$$

La susceptibilidad generalizada se obtiene cuando se evalúa el límite $t_w \rightarrow \infty$ en la Ec. 1.44 resultando,

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\gamma - i\omega}. \quad (1.45)$$

El ejemplo anterior $\chi(\omega)$ tiene un polo en la mitad inferior del plano complejo ($\omega = -i\gamma$) y la función respuesta es analítica en cualquier parte. Es importante remarcar que la información obtenida acerca de la naturaleza de los modos del sistema sin perturbar, se encuentra en los polos de la susceptibilidad generalizada y no en la TF parcial. Sin embargo, si $\omega t_w \gg 1$ se puede suponer que $\chi_1(\omega, t_w)$ varía poco con t_w en cierto intervalo de valores de ω . El sistema entonces se puede caracterizar en dos escalas de tiempo; una escala para el tiempo de medición y otra, para el tiempo de espera.

Con el problema de difusión de una partícula en un medio fuera de equilibrio, en un régimen cuasi-estacionario, la velocidad de la partícula obedece a ecuación generalizada de Langevin y la susceptibilidad generalizada $\mu(\omega) = \chi_{vx}(\omega)$ y el coeficiente de fricción $\gamma(\omega) = -1/(m\omega)\chi_{\phi\phi}$ ⁶, de las relaciones para TFD-I (1.29) y de la relación de Einstein,

$$kT = \frac{D(\omega)}{\Re\{\mu(\omega)\}} \quad (1.46)$$

que no son válidas para sistemas fuera de equilibrio. Se puede extender la teoría para respuesta lineal escribiendo la relación entre la PSD para la velocidad y la parte real de la movilidad obteniéndose,

$$C_{uu}(\omega) = kT_{ef}(\omega) 2\Re\{\mu(\omega)\}. \quad (1.47)$$

Modificando la relación de Einstein (1.46) de la siguiente manera:

$$\frac{D(\omega)}{\Re\{\mu(\omega)\}} = kT_{ef}(\omega). \quad (1.48)$$

⁶Esta relación proviene de $\chi_{\phi\phi} = -m \frac{d\gamma'}{dt}$.

Estas dos últimas relaciones (1.47 y 1.48) definen una temperatura efectiva dependiente de la frecuencia pero bajo esta forma, no es posible escribir la relación para el TFD-I, sin embargo, T_{ef} es consistente para $C_{FF}(\omega)$ y la parte real del coeficiente de fricción. Para cualquier sistema estacionario T_{ef} es consistente en $C_{uu}(\omega) = |\mu(\omega)|^2 C_{FF}(\omega)$. De la misma manera que en la Ec. 1.29 se tiene

$$C_{FF}(\omega) = mkT_{ef}(\omega)2\Re\{\gamma(\omega)\}. \quad (1.49)$$

Pero, el mismo problema persiste para TFD-I y TFD-II, al introducir T_{ef} en la Ec. 1.30 no cumpliéndose la igualdad. Dados $\Re\{\gamma\}$ y T_{ef} , es posible calcular de la correlación $\langle u(t)u(t') \rangle$ mediante el análisis de Fourier la función de la temperatura efectiva.

El teorema de fluctuación disipación se cumple estrictamente en sistemas en equilibrio, en tales sistemas no hay flujo de calor interno. Cugliandolo y *et al* [24] establecen que este teorema puede ser extendido para estimar la temperatura de sistemas fuera del equilibrio, tales como el relajamiento de vidrios que fueron sometidos a esfuerzos o que son deformados lentamente. Para el caso de los sistemas que se encuentran en equilibrio, la temperatura es independiente de la frecuencia, pero en el caso de la temperatura efectiva hay una dependencia con la frecuencia. Esta dependencia nos muestra que hay varias escalas temporales de relajamiento del sistema durante el proceso. Actualmente, la densidad espectral de las fluctuaciones y la respuesta del sistema pueden ser determinadas experimentalmente. Esto será materia de los siguientes capítulos.

1.3. Conclusiones de Capítulo

Se ha estudiado el movimiento Browniano a partir de la ecuación de Langevin a través del estudio detallado de las funciones de correlación para la velocidad de una partícula en un medio y también la correlación de la fuerza aleatoria del medio ejercida a una partícula obteniéndose que el Teorema de Fluctuación Disipación se define por las Ecuaciones 1.29 y 1.30. También, se estudiaron los casos referentes a los sistemas totalmente fuera de equilibrio, siendo que el TFD

puede ser aplicado mediante la Ecuación 1.36. La evolución de sistemas fuera de equilibrio y no estacionarios quedan descritos por el TFD mediante la Ecuación 1.38. Con la información sobre la evolución temporal de un sistema a partir de su movilidad y/o susceptibilidad, es posible medir y trazar su evolución. Las relaciones de Einstein, se pueden evaluar en su forma estacionaria o fuera de equilibrio para poder cuantificar las violaciones al TFD y conocer, además de los detalles del envejecimiento y qué tan fuera del equilibrio se encuentra el sistema.

Capítulo 2

Experimentos

Presentación de Capítulo

Se reportan dos experimentos¹ en donde se hacen mediciones de fuerzas restauradoras y de amortiguamiento aleatorias aplicadas a un oscilador y la caracterización de los parámetros de los distintos osciladores pertinentes para el cálculo T_{ef} .

El objetivo principal de estos experimentos es obtener registro de la posición de las fluctuaciones de un brazo de palanca debidas a la interacción de dos fuerzas aleatorias, posteriormente se obtienen las PSD de los registros, para en el Capítulo 3, calcular y estudiar la temperatura efectiva del sistema. También se reporta la caracterización de los transductores utilizados en las mediciones de la posición de los sistemas por proponerse. Para poder lograr este objetivo, es necesario determinar de forma experimental los parámetros involucrado en la Ecuación

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + k(x) = F_A + F_B,$$

donde m es la masa del sistema, α es el parámetro de disipación del sistema y k es la constante de

¹Se conviene que en el Experimento **I** se utiliza $\omega = 2\pi f$ y en el Experimento **II** se utiliza solo f para todos los cálculos.

rigidez del brazo de palanca. F_A y F_B son fuerzas aleatorias. A parte, se determina la relación de la intensidad media del chorro respecto a la variación de la frecuencia de giro de ventiladores de un túnel de viento para el primer experimento y la distancia entre el oscilador y la boquilla expulsora del chorro, en el según experimento.

La adquisición de datos se realiza con una frecuencia de 1.0 kHz obteniéndose 1.0×10^6 datos. Para valores grandes de frecuencia de funcionamiento del túnel de viento (mayores de $30 < \Omega \text{ Hz}$), se toman 3×10^6 datos. Se muestrean de tres señales: la primera corresponde a la vibración de la barra, la segunda corresponde a la intensidad de campo magnético producido por el paso de corriente en la bobina, la tercera señal adquirida se recaba de la fuente alimentación de la bobina, esto con el fin de conocer la fuerza de campo magnético. Cabe señalar que se espera una relación lineal entre la fuerza de campo magnético y la corriente que lo produce; esta medición es muy complicada de deducir directamente de las mediciones de las fluctuaciones de la barra y la fuerza magnética aplicada, ya que se introduce muchísimo ruido, en cambio, tomando mediciones en las cuales se mandan una señal de frecuencia de 1 Hz con forma senoidal o triangular, se puede determinar sencillamente que existe una relación lineal entre la fuerza aplicada a la barra y su deflexión.

2.1. Experimento I

Interactúan dos fuerzas aleatorias: 1) una fuerza de excitación es producida por la interacción entre una placa y un chorro de aire cuya intensidad es variable. 2) Una fuerza de amortiguamiento que es generada por un campo magnético inducido por una bobina por la cual circula una corriente aleatoria. 3) Ambas fuerzas interactúan con el oscilador al mismo tiempo. Además se calcularán los siguientes parámetros: constante de rigidez k , la disipación del sistema α , además se obtendrán las funciones de densidad espectral ó PSD de la fuerzas de interacción. Se ofrece un esquema del dispositivo experimental en la Figura 2.1.

2.1.1. Dispositivo Experimental y Esquema

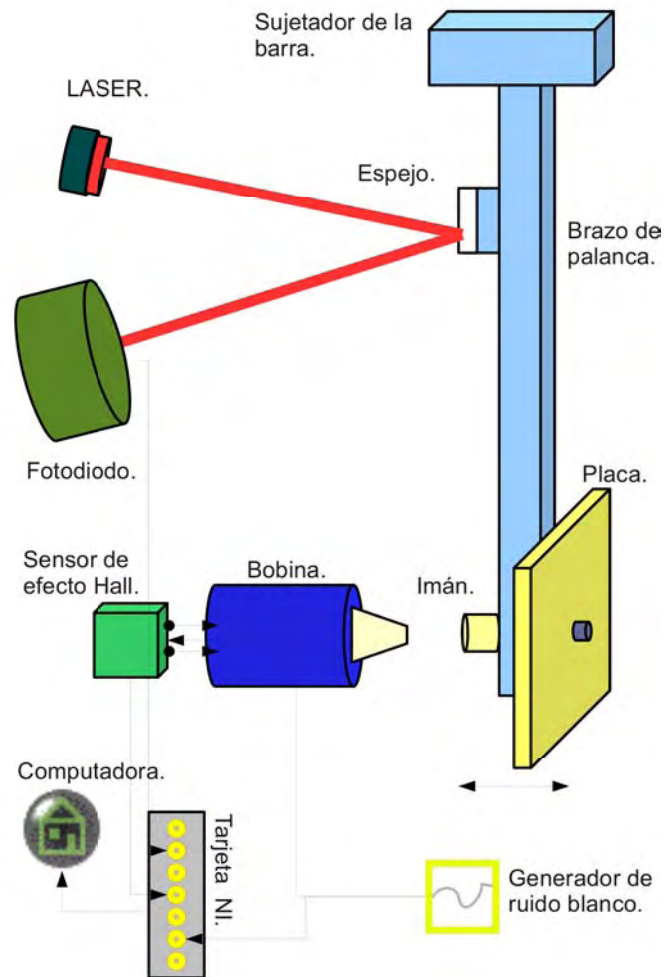


Figura 2.1: En el esquema se observan las partes del dispositivo dedicadas a la medición y adquisición de datos.

Una barra de $14.5 \times 1.0 \times 0.5 \text{ cm}^3$ se encuentra fija en uno de sus extremos, cercano a éste extremo se encuentra un pequeño espejo. Su función es reflejar un haz láser a un fotodiodo capaz de traducir en voltaje el desplazamiento del haz sobre su superficie. El fotodiodo puede detectar el desplazamiento de un haz láser en las direcciones X y Y sobre su plano sensible. Solamente será de

interés el desplazamiento sobre el eje X en el plano coordenado del fotodiodo.

Las características de este transductor son las siguientes: modelo *Pacific Silicon Sensor QP50-6-SM* que tiene una superficie activa de 50 mm^2 , las películas que lo componen son muy pequeñas y están separadas por $45 \text{ }\mu\text{m}$. El fotodiodo puede ser alimentado por una diferencia de potencial de 15 volts . La capacitancia por segmento es de 17 pF a 10 volts y se puede alcanzar en 45 ns , además es sensible a luz de 633 nm .

Del mismo lado de la barra pero, en su extremo libre, se encuentra un imán de tierras raras. A poca distancia del imán, una bobina es alimentada por una fuente de voltaje de ruido blanco. Esto permite generar una interacción aleatoria de amortiguamiento con el brazo de palanca. El voltaje máximo de salida de la fuente no es mayor de 5.0 volts . Además, se ha colocado un transductor de efecto Hall en la bobina para conocer el campo magnético generado. Del lado opuesto al imán, se pueden fijar placas de diferente tamaño al brazo de palanca, cuya función es la de interactuar con el chorro de aire del túnel de viento. El túnel de viento proporciona la interacción principal al sistema. Se realizan mediciones del desplazamiento del haz reflejado en el fotodiodo, el campo magnético medido por el transductor Hall como una señal de voltaje mediante una tarjeta de adquisición *National Instruments*. También se realizan mediciones promedio de la velocidad de viento con un tubo de Pitot para cada placa y frecuencia de giro de los ventiladores del túnel de viento Ω , que más adelante se relacionará con la velocidad media del chorro de aire y el número de Reynolds. La forma de medir la velocidad del chorro de aire se puede apreciar en la Figura 2.2. Además, las dimensiones de las placas utilizadas son:

El túnel de viento expulsa un chorro de aire a través de una boquilla de 5 cm de diámetro. Para cada placa se hicieron mediciones del número de Reynolds Re en (véase la referencia [11]) y se obtuvieron las tendencias mostradas en la figura (2.3), la distancia de la boquilla a las placas es de 1.5 m . El esquema experimental por proponerse está pensado en relacionar distintas mediciones de la actividad de un oscilador descrito por la E_c .

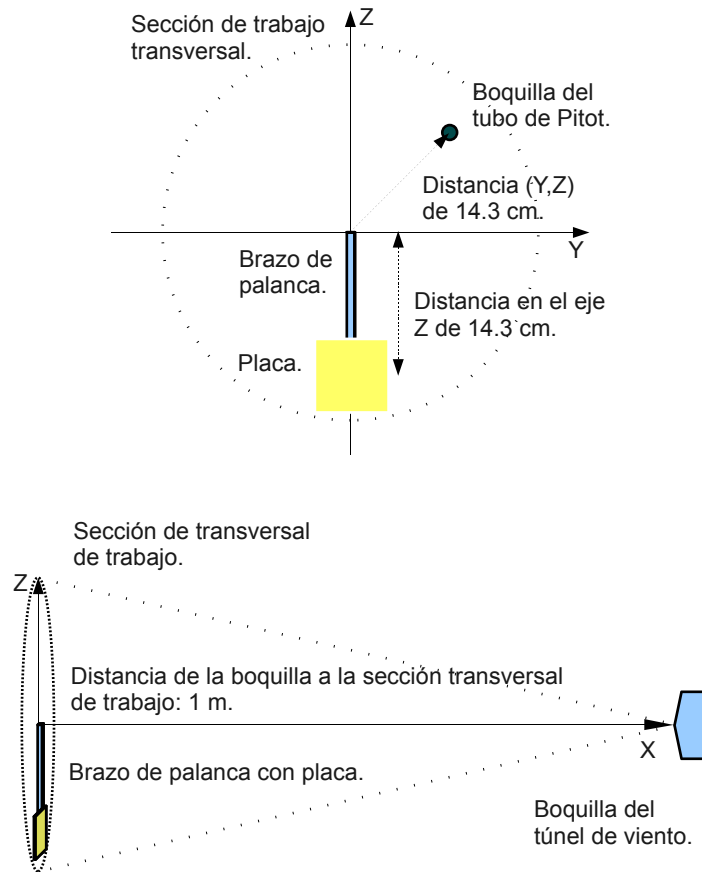


Figura 2.2: En la parte superior de esta figura se puede localizar sobre el eje Z el brazo de palanca con una placa, éstas determinan una sección transversal de trabajo, en donde el flujo producido por el túnel de viento es simétrico. El centro de la placa se encuentra situado a una distancia de 14.3 cm del extremo fijo de la barra. Las mediciones de la velocidad promedio son hechas con un tubo de Pitot, cuya boquilla se encuentra a una misma distancia dentro de la sección de trabajo. En la parte inferior, se observa que la distancia de la boquilla del túnel de viento a la placa es de 1.0 m .

Placa	Área $\delta \pm = (A+0.05)^2$ (cm^2)	Diagonal $\delta \pm = 0.05$ (cm)	Masa $\delta \pm = 1 \times 10^{-7}$ (Kg)	Resonancia (Hz)
1	8.5×7.0	0.1101	0.05059	84.42
2	10.0×9.8	0.1400	0.04090	99.96
3	0.07×7.0	0.0700	0.01983	117.23
4	5.0×5.0	0.0500	0.00943	100.03

Cuadro 2.1: El espesor de las placas es 0.3 cm . Adicionalmente, se reporta información de la frecuencia de resonancia del brazo de palanca para cada placa.

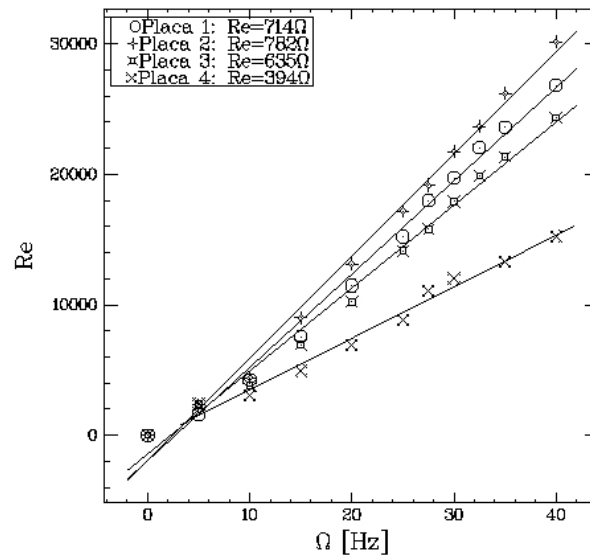


Figura 2.3: Número de Reynolds $Re = \frac{uL}{\nu}$ en donde L es la longitud transversal de la placa, u es la velocidad del viento medida con el tubo de Pitot. El número de Reynolds se grafica contra la frecuencia de funcionamiento del túnel de viento Ω para cada valor de la longitud de la placa.

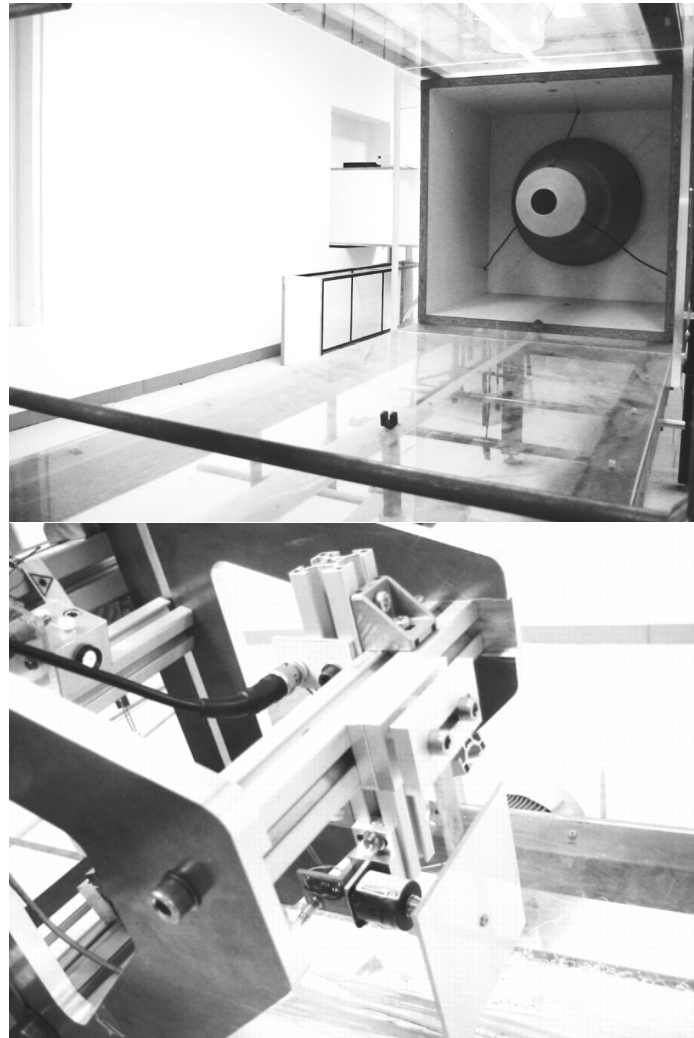


Figura 2.4: Sección de trabajo del túnel de viento y dispositivo experimental en donde se aprecia la barra, el solenoide y el diodo láser montados en una estructura de aluminio.

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_{turb} + F_B,$$

para obtener los parámetros de desplazamiento, rigidez y disipación. A continuación la idea general del experimento: Al aplicarse una tensión a la bobina U , se produce una corriente i . Esta genera un campo magnético B y al interactuar con el brazo de palanca se produce una fuerza magnética F_B . Por otro lado, se produce una fuerza F al interactuar el chorro de aire y la placa colocada en el brazo de palanca. Se determina la posición de la base de la barra y del espejo x y $\delta(x)$ y por último, el voltaje medido del fotodiodo $\frac{V_x}{V_\Sigma}$.

El orden de las mediciones propuesto para determinar todos los parámetros y coeficientes relevantes del sistema es el siguiente:

1. $\delta(x) \rightarrow \frac{V_x}{V_\Sigma}$: Relación de la posición del espejo en la barra y la señal de voltaje medido en el fotodiodo producido por la reflexión del haz.
2. $x \rightarrow \delta(x)$: Relación del valor de la posición de la base de la barra, el voltaje de las mediciones y la posición del espejo.
3. $F \rightarrow x$: Relación de la fuerza y el desplazamiento en la base de la barra.
4. $U \rightarrow i$: Relación del potencial de la fuente y la corriente en la bobina.
5. $i \rightarrow B$: Relación entre la corriente y el campo magnético.
6. $B \rightarrow F$: Relación del campo magnético y la fuerza en la barra.

Los valores que se pueden medir y relacionar directamente son:

1. El voltaje del fotodiodo $\frac{V_x}{V_\Sigma}$.
2. El desplazamiento del espejo $\delta(x)$.
3. El desplazamiento en la base de la barra x .
4. La frecuencia de resonancia del sistema f_0 .

5. El campo magnético B mediante la sonda de efecto Hall.
6. La tensión proporcionada a la bobina U .

2.1.2. Relación entre la Posición de la Base de la Barra x

y la Posición del Haz Láser sobre el Fotodiodo $\delta(x)$ con $\frac{V_x}{V_\Sigma}$

La constante de rigidez k de la barra es un parámetro físico muy importante en el experimento. Para estudiar las deflexiones de la barra se define un sistema de referencia donde z es el eje que recorre la altura de la barra, el origen se ubica en la parte superior de la barra y las oscilaciones ocurren en el eje x . Se definen las funciones $\gamma(z)$ y $\theta(z)$ que son respectivamente, la deflexión de la barra en la posición z dado y el ángulo tangente a la barra en z . Aplicando una fuerza [13] en la base de la barra se puede obtener un desplazamiento como

$$\gamma(z) = \frac{Fz^2}{6EI}(3L - z) \quad (2.1)$$

donde el módulo de Young del Al es $E = 7.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Entonces de la ecuación (2.1), se deduce el ángulo $\theta(z)$ para deflexiones pequeñas.

$$\theta(z) = \frac{d\gamma}{dz} = \frac{Fz}{2EI}(2L - z). \quad (2.2)$$

La deflexión en la base de la barra será entonces,

$$\gamma(L) = \frac{FL^3}{3EI} = x. \quad (2.3)$$

Ahora se calcula la deflexión de la barra a la altura del espejo γ_m y el ángulo θ_m

$$\gamma_m = \gamma(z = aL) = \frac{a^2}{2}(3 - a)x, \quad (2.4)$$

donde a es una fracción de la altura de la barra. La función $\delta(x)$ define la posición del haz láser sobre el fotodiodo. En la Figura 2.5 se muestra la relación lineal que guarda el desplazamiento del espejo y el voltaje medido del fotodiodo. El espejo pegado a la barra no es perfecto, está hecho de

vidrio y recubierto con una película reflejante, esto produce que se reflejen dos rayos además, por la deflexión de la barra hay una contribución también sobre el ángulo que forma el espejo con el eje vertical, entonces $\delta(x)$ se puede escribir como

$$\delta(x) = \delta\epsilon_\gamma + \delta\epsilon_\theta, \quad (2.5)$$

$$\delta\epsilon_\gamma = 2\gamma_m \tan(\beta) \quad (2.6)$$

por lo tanto

$$\delta\epsilon_\gamma = D\{\tan(\beta + 2\theta_m) - \tan(\beta)\}, \quad (2.7)$$

siendo $\theta_m \ll 1 \Rightarrow \tan(2\theta_m) \simeq 2\theta_m$ y $\delta(x)$ se escribe como

$$\delta(x) = \left(2 \tan(\beta) \frac{a^2}{2} (3 - a) + \frac{6aD(1 - a/2)}{L \cos^2(\beta)}\right) \times x. \quad (2.8)$$

En este caso $\delta(x) \approx 4.65 \times x$ siendo la relación entre x y $\delta(x)$ lineal, ver la Figura 2.5.

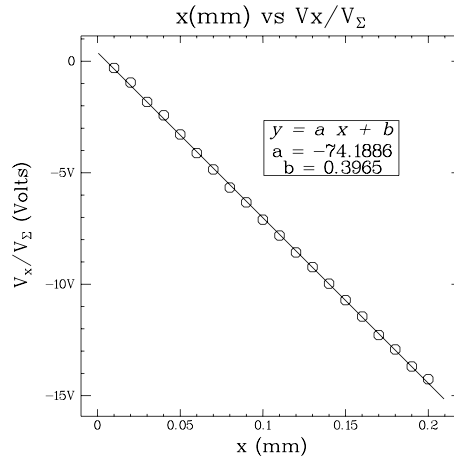


Figura 2.5: Relación lineal entre la posición del haz láser y el voltaje de salida del fotodiodo. Estas mediciones se obtuvieron de desplazar el extremo libre de la barra con ayuda de un tornillo micrométrico y registrar el voltaje producido por el cambio de la posición del haz reflejado en el fotodiodo.

2.1.3. Constante de Rigidez k

Para medir k de la barra [9] se colocan diferentes masas en su base y se excita el sistema mediante un pequeño golpe en la base, con el fin de conocer el cambio de la frecuencia de resonancia, (ver figura 2.6). Se adquieren 5×10^4 datos con una frecuencia de adquisición de 1 kHz .

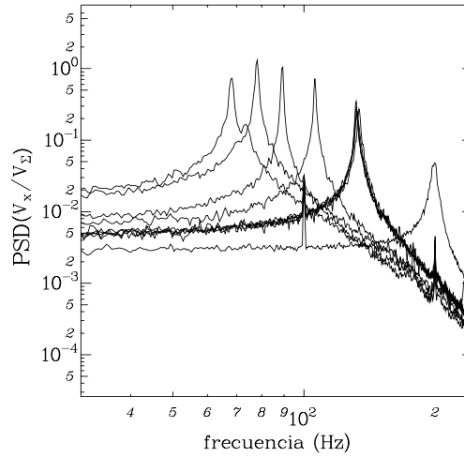


Figura 2.6: Información sobre los valores de frecuencia de resonancia. Mientras mayor sea el valor de la masa, menor será la frecuencia.

Posteriormente se analiza la señal obteniendo su PSD y se busca el pico más alto, siendo esta la frecuencia de resonancia f_0 (ver Ec. 2.9).

$$f_0 = \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}}. \quad (2.9)$$

Del ajuste lineal visto en la Figura 2.7, sigue que,

$$\frac{1}{f_0^2} = 4\pi^2 m_{ef}/k + 4\pi^2 \frac{a^4(3-a)^2}{4k} m_{iman}. \quad (2.10)$$

Para obtener el valor de k , se toma en cuenta la cantidad m_{ef} representa la masa del brazo de palanca, también se incrementa la masa en la barra m_{iman} con la ayuda de imanes pequeños que se van colocando. $a^4(3-a)^2/4$ es el factor de ajuste por las lecturas que se hacen del espejo A partir del ajuste mostrado en la Figura 2.7 y la Ec. 2.10 se obtiene $k = 13495.22 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Es importante

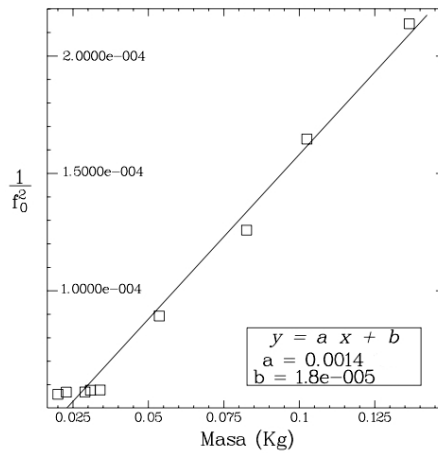


Figura 2.7: Ajuste lineal para la relación masa-frecuencia. Se esperaba obtener una relación lineal entre los valores de la masa y el inverso cuadrado de la frecuencia por la Ec. 2.9.

notar que cada vez que se hace alguna modificación, por más ligera que esta sea, hay cambios importantes; el valor de k antes mencionado cambió cuando hubo que hacer algunas mediciones que requirieron desplazar la barra y volver a adherir espejo, entre otras reparaciones. Para la Placa 4, el valor obtenido es $k = 19306.7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

2.1.4. Cálculo del Coeficiente de Disipación α

Ahora, a partir del ajuste $H(\omega)$ (ver las ecuaciones 1 y 2), además la referencia [14]) se conoce el parámetro de disipación α que está relacionado con la resistencia del medio al movimiento del sistema (ver la figura 2.11). Se ofrecen detalles del ajuste Lorentziano y el tipo de información que se puede extraer.

$$y = \frac{1}{\sqrt{a\phi^2 + b\phi + c}} \quad (2.11)$$

La Ec. 2.11 describe el comportamiento del movimiento de la palanca. Esta ecuación contendrá los parámetros de la rigidez del brazo de palanca, la masa del sistema, la disipación y depende de la frecuencia. Para simplificar, se definen las siguientes constantes como: $\phi = \omega^2$ y los coeficientes

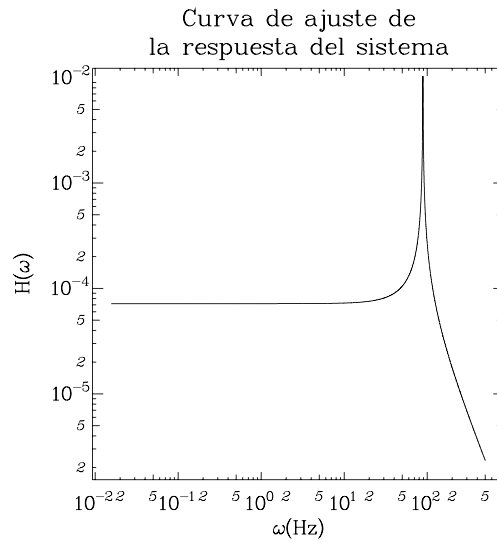


Figura 2.8: Esta es una curva Lorentziana y se ajusta al balance descrito en la relación (4). Este ajuste representará el balance y será utilizado directamente en el cómputo de la *temperatura efectiva*.

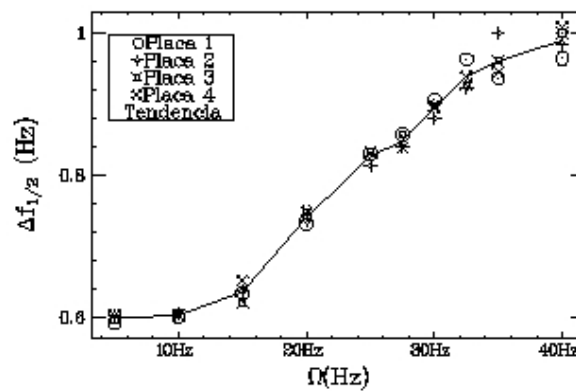


Figura 2.9: Se estima el valor de $\Delta f_{1/2}$ para cada valor de Ω . El aumento de los valores de las diferencias de frecuencia se incrementan con la excitación. Se observa una región donde puede hacerse un ajuste lineal entre $\Delta f_{1/2}$ y Ω , sin embargo, esto permite observar la tendencia que tienen las diferencias de frecuencia a incrementarse. En la Figura 2.10, se puede apreciar que existe una dependencia diferente con respecto a la variable Re . Las tendencias de α están disponibles en las Figuras 2.11 y 2.12.

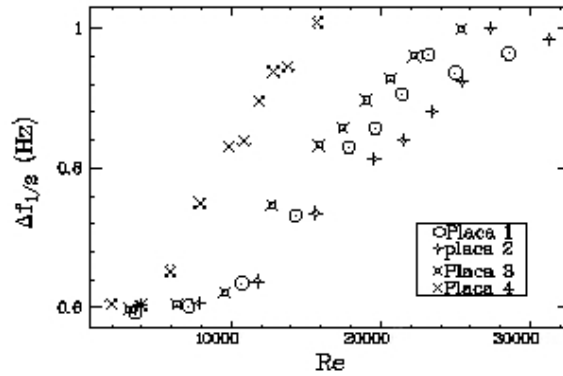


Figura 2.10: Se estima el valor de $\Delta f_{1/2}$ para cada valor de Re . Se otorga sentido físico mediante la variable Re a la diferencia de frecuencias observadas al ajustar los resultados con la función de respuesta $H(\omega)$.

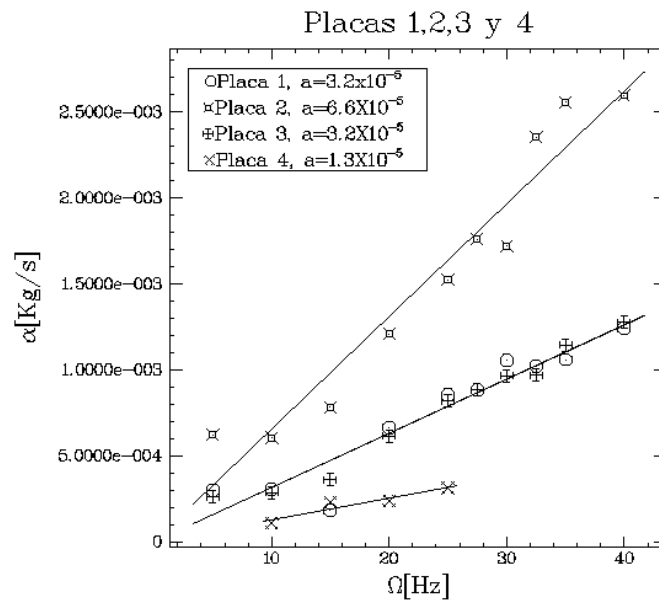


Figura 2.11: Se han computado los valores de α en función de Ω [Hz] para cada placa según el procedimiento indicado anteriormente.

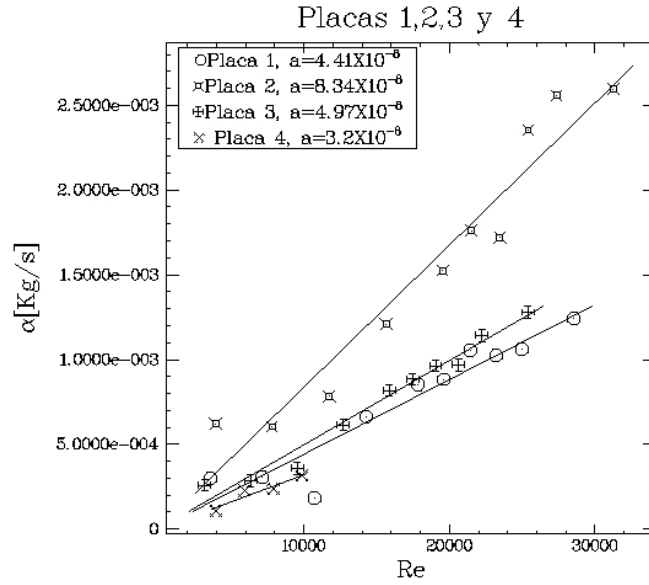


Figura 2.12: Para poder apreciar las diferencias físicas que se guardan entre la intensidad del chorro de aire y los valores de α para cada placa se han puesto en función de Re .

como $a = m^2$, $b = \alpha^2 - 2km$, $c = k^2$. La Ec. 2.11 tiene un máximo en $\phi_1 = -b/2a$, evaluando

$$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{-b^2/4a+c}},$$

entonces se espera que el ajuste sea $y = \frac{y_{max}}{2} \Rightarrow a\phi^2 + b\phi + c = 4(-b^2/4a + c)$. Resolviendo y escribiendo todo en términos de la frecuencia de resonancia ω que se expresa en dos valores, se ve que

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha / 2\sqrt{km} \right).$$

La diferencia² entre estos dos valores será entonces,

$$\Delta f_{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{\alpha}{m}. \quad (2.12)$$

Este es el criterio a seguir para realizar el ajuste de la función de respuesta. La Ec. 2.12 es aplicada para encontrar los valores que satisfacen la Ec. 1 y para la Ec. 1.1. La fuerza F_B se determina con mediciones del campo magnético inducido por una corriente que tiene una periodicidad de 1.0

²La demostración de esta expresión se verá en la sección (2.2.5).

[Hz], intensidad de 5.0 volts y la forma de una señal triangular. Para obtener la función $H(\omega)$ Ec. 4 primero se perturba el sistema con la interacción del flujo de viento $x(\omega)$ y se aplica la fuerza magnética F_B para obtener $x(\omega)_B$, ver la Figura 2.13. Las gráficas para las fluctuaciones, el forzamiento debido al campo magnético y la fuerza magnética aplicada B se pueden ver en la Figura 2.13. En la Figura (2.9), la tendencia que existe entre el valor $\Delta f_{1/2}$ y Ω ver la Figura 2.11 para las diferentes placas, de igual manera es posible obtener la respuesta del sistema para cada tipo de placa.

2.1.5. La Fuerza Magnética $F_B = \beta B$

Una vez que se han determinado los parámetros α y k , y x , entonces se deduce fácilmente la fuerza magnética.

La medición de B se realiza simplemente aplicando una tensión continua y midiendo la variación del campo magnético B con el transductor de efecto Hall. Para medir β se aplica una señal senoidal de 1.0 Hz (que se encuentra lejos de la resonancia) y se observa que $B \propto V_x/V_\Sigma$, entonces la Ec. 2.13 se escribe como

$$B = \frac{k}{\beta \ell} \frac{V_x}{V_\Sigma}. \quad (2.13)$$

Encontrando que $\beta = 276.93 \mu$. En la Sección 2.3 observan todas las mediciones experimentales realizadas. Se Abundan en detalles de cálculo en el siguiente experimento.

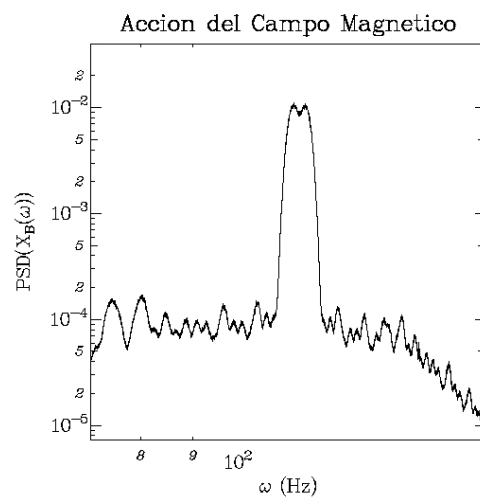


Figura 2.13: Se puede observar la interacción del campo magnético generado por el selenoide con la placa 2, es decir x_B .

2.2. Experimento II

Se utiliza una celda de tensión compresión que puede detectar fuerzas en un intervalo de 0 N a 20 N . Su caracterización de este instrumento de medición es relativamente sencilla, pues basta con hacer pender diferentes pesos de ella. El dispositivo tiene un puente eléctrico que convierte la carga directa en una señal eléctrica. La celda está hecha para soportar tensión o compresión axial y estos pueden variar del eje vertical de la celda por 3° sin ser significativos [16]. La celda tiene las siguientes características:

- Un puente de resistivo de 350.0 $Ohms$.
- Voltaje de excitación de 5.0 $Volts$.
- Frecuencia natural de la celda 500 Hz .

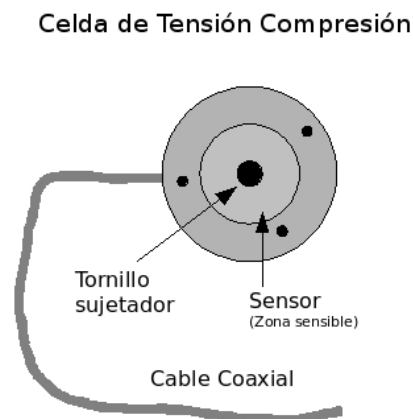


Figura 2.14: El dispositivo es muy sencillo de utilizar, en cualquiera de las dos caras se pueden hacer mediciones de tensión y/o compresión.

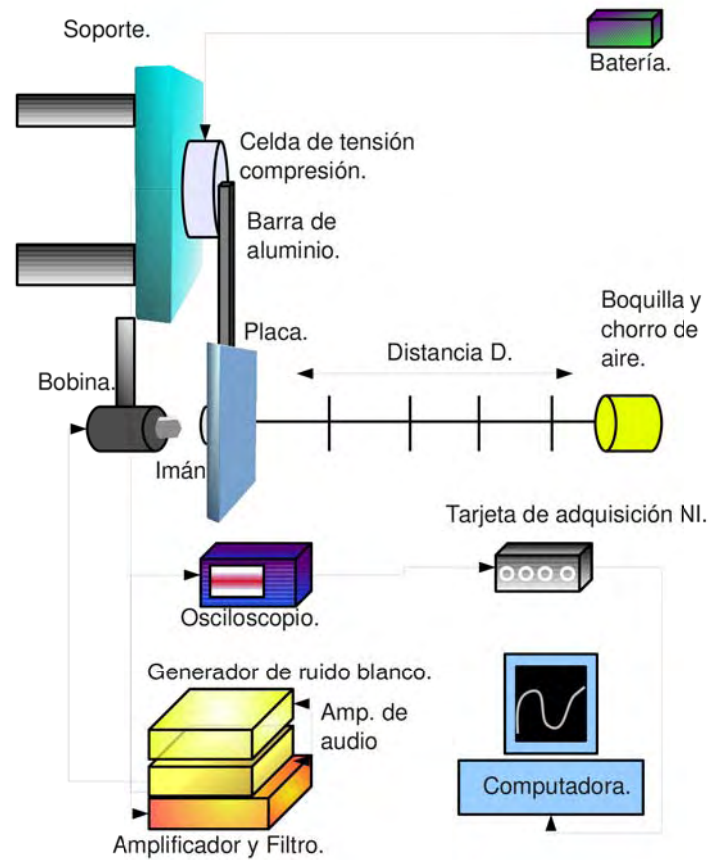


Figura 2.15: Se mide siguiente manera: primero se mide la fuerza producida por el chorro de aire en la placa, luego se ponen a interaccionar la fuerza del chorro y la fuerza magnética y se mide lo que resulte en por medio de la celda. Por último se mide únicamente la fuerza del campo magnético. La intensidad de la fuerza del chorro de aire varía al distanciarse la boquilla hasta 1,6 m de la placa colocada en la barra.

2.2.1. Caracterización de la Celda de Tensión Compresión

La señal de salida de la celda debe ser amplificada en 70 *db* y filtrada a 500 *Hz* con un filtro pasa bajos, de esta manera se genera una señal que tiene como máximo 2.34 *Volts* de salida. Con una tarjeta de adquisición *National Instruments* se hizo la adquisición de datos a una frecuencia de 1000 *Hz* (ver figura 2.16). Para la caracterización, por cada peso colocado en la celda se promedian 10^4 datos. Los valores de voltaje para el peso y la fuerza representados por los puntos de la Figura 2.16 mantienen una relación lineal y determinan una sección de trabajo para los experimentos de esta sección.

2.2.2. Dispositivo Experimental

En la celda se fija una barra de aluminio con dimensiones $0.5 \times 1.4 \times 16.4 \text{ cm}^3$. En el extremo libre de la barra se fijan diferentes placas, además se le coloca un imán. La placa colocada, por un lado recibe la acción de una fuerza F_a , resultado de la interacción del chorro de aire, mientras que por el lado opuesto, recibe la influencia de una fuerza magnética F_B proporcionada por una bobina que tiene una impedancia de 6 *Ohms* que utiliza voltaje directo. A partir de un generador de funciones *Stanford Research* modelo 30 *MHz Synthesized*, se produce una señal de ruido blanco y se amplifica con un sistema de audio a 35 *db*, el cual permite generar una salida de hasta 7.45 *volts* como máximo. Se hace variar la distancia entre la boquilla que expulsa el chorro de aire y la placa en distancias múltiplos de 0.20 *m* (ver figura 2.15). Las dimensiones de las placas utilizadas son las siguientes: Se miden las velocidades promedio del chorro de aire. Es suficiente conocer cantidades promedio de la velocidad para calcular el número de Reynolds.

2.2.3. Análisis de Fuerzas

Hay muchas ventajas de tener una medición directa de la fuerza, entre ellas, se observa una relación lineal entre el voltaje medido y la fuerza. El motivo por el cual se utiliza una barra como

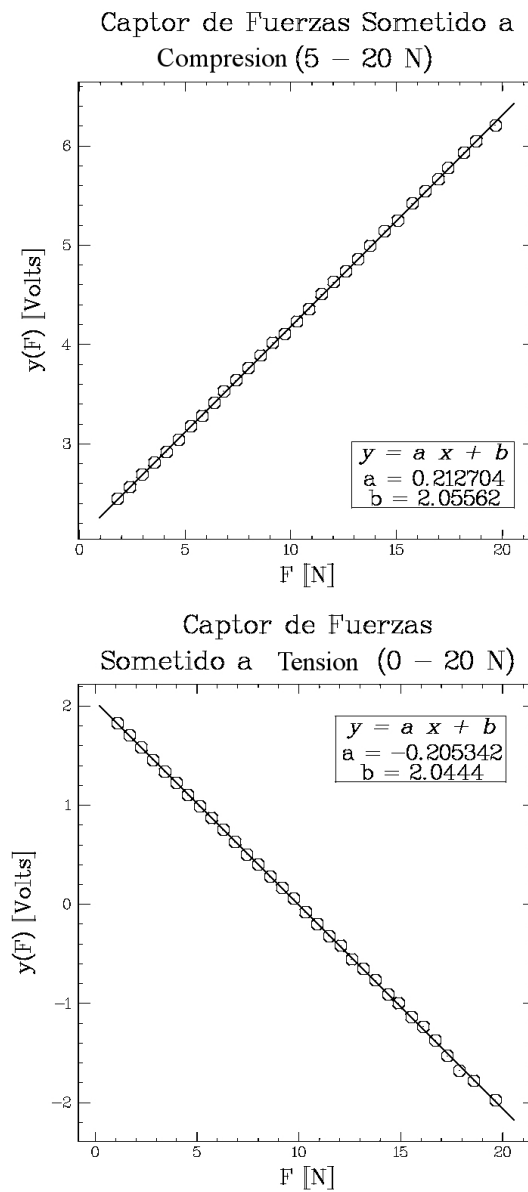


Figura 2.16: En la gráfica superior, la sección de trabajo útil para medir compresión de las caras del captor queda representada por una recta, así mismo, en la gráfica inferior se determina la sección útil para medir tensiones. $y(F)$ expresa la equivalencia de peso en valores de voltaje.

Placa	Área $\delta \pm = (A+0.05)^2$ (cm^2)	Diagonal $\delta \pm = 0.05$ (cm)	Masa $\delta \pm = 1 \times 10^{-7}$ (Kg)	Resonancia (Hz)
1	6.89	12.20	0.01658	42.24
2	10.10	14.00	0.02218	38.57
3	12.08	16.00	0.02810	35.64
4	15.88	17.80	0.03675	31.74
5	20.02	19.90	0.04701	28.32
6	24.02	21.80	0.05126	26.86

Cuadro 2.2: Masa del imán ajustado a la placa $m_{iman} = 0.00408$ (Kg), Masa de tornillo con tuerca $m_{tornillo} = 0.0022$ (Kg).

Distancia (m)	Placa 1	Placa 2	Placa 3	Placa 4	Placa 5	Placa 6
0.6	67927	77949	89084	99106	110799	121378
0.8	53131	60970	69680	77519	86664	94939
1.0	44388	50937	58213	64762	72403	79316
1.2	30937	35501	40573	45137	50463	55281
1.4	26901	30871	35281	39250	43880	48070
1.6	23539	27012	30871	34344	38395	42061

Cuadro 2.3: Se tabulan los numeros de Reynolds en función de la longitud de la placa correspondiente L y la distancia D (ver la Figura 2.17). El número de Reynolds se calcula con el valor medio de la velocidad a una distancia y la longitud transversal de cada placa.

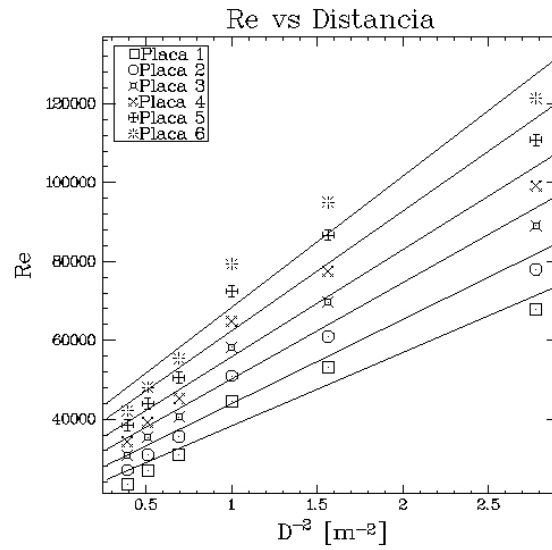


Figura 2.17: Número de Reynolds en función de la distancia de la boca de la aspiradora a la placa (ver tabla 2.3). D es la distancia medida de la placa a la boquilla.

oscilador es que, dicha configuración permite obtener una amplificación de los eventos sucedidos en las placas colocadas en el extremo libre y que, con los modelos teóricos antes expuestos, es posible extraer información sobre la disipación del sistema. Sin embargo, hay que considerar que al aplicar la fuerza en un extremo de la barra y al estar percibiéndola en el otro extremo, se tendrá una disparidad entre los valores netos de la fuerza. Para conocer estos valores, hay que aplicar diferentes fuerzas con valores conocidos, entonces se obtiene que la amplificación de la fuerza es lineal, ver la Figura 2.18. Un argumento en contra del uso de la celda de tensión compresión es que, con la perforación en el centro que tiene como diseño para atornillar alguna pieza que mantenga contacto con el brazo de palanca, resulta contraproducente al momento de querer medir un valor intrínseco del sistema, como lo es la constante de rigidez k . Lo que se tiene es la respuesta de tres elementos: uno el tornillo que sujeta la barra, otro la celda misma que es una superficie que vibra y la barra en cuestión. Al comparar los resultados obtenidos con la celda y el resultado obtenido con las mediciones hechas en el experimento I (nuevamente con el módulo de Young del aluminio E_{Al} y el

momento de inercia I^3 para la barra de 0.02796 Kg y con dimensiones de $L = 16.4 \text{ cm}$, $Lx = 1.4 \text{ cm}$ y $Ly = 0.5 \text{ cm}$, se podrán conocer con la Ec. 2.1 cómo es la deflexión de la barra al someterla a un esfuerzo). Con los datos experimentales representados en la Figura 2.19 se determina la posición

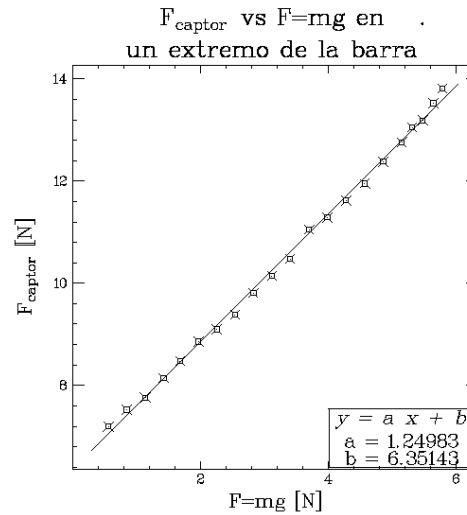


Figura 2.18: La sensibilidad de la celda de tensión compresión se amplifica al colocarle una barra y hacer mediciones en el extremo libre de la barra y en el extremo fijo en el captor es proporcional.

que ocupa la base de la barra para alguna fuerza aplicada al sistema. La relación entre fuerza y posición es clave para todos los cálculos, pues con los parámetros encontrados se soluciona la Ec. 2.14 (ver descripción en la Introducción)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_{\text{turb}} + F_B, \quad (2.14)$$

entonces, como es parte esencial del análisis de datos, la señal de voltaje debe representar el valor de la posición a través de la fuerza.

$${}^3I = \int_S (x^2 + y^2) dS = 5.156 \times 10^{-9} m^4$$

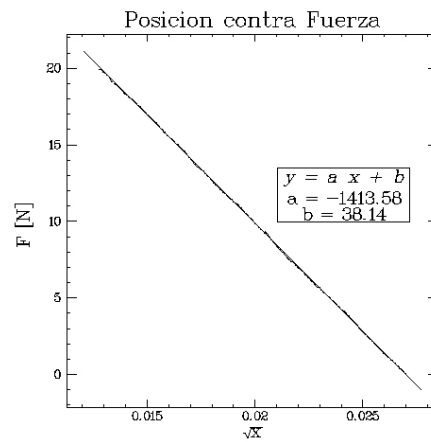


Figura 2.19: Se realiza un ajuste lineal de la posición $|x|$ m contra la fuerza medida en la celda de tensión compresión al momento de desplazar la base de la barra de aluminio, se hicieron 567 desplazamientos con un tornillo micrométrico.

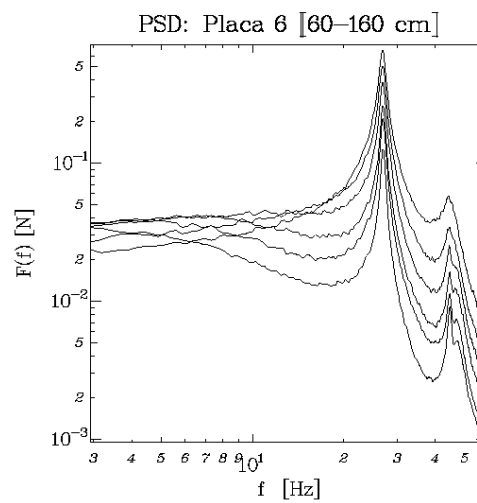


Figura 2.20: En esta colección de curvas se representa la variación de la fuerza de resonancia del sistema $F = -kx$ con respecto a la distancia entre la boquilla del chorro de aire y la placa. El valor máximo de la fuerza es para $d = 0.6$ m con $F = 0.664$ N y el mínimo para $d = 1.6$ m con $F = 0.126$ N.

2.2.4. Constante de rigidez k

De forma análoga al procedimiento visto en la Sección 2.1.4, se calcula el valor de la constante de rigidez k de la barra, ver Figura 2.21. La variación tan notable en el valor de la constante k del

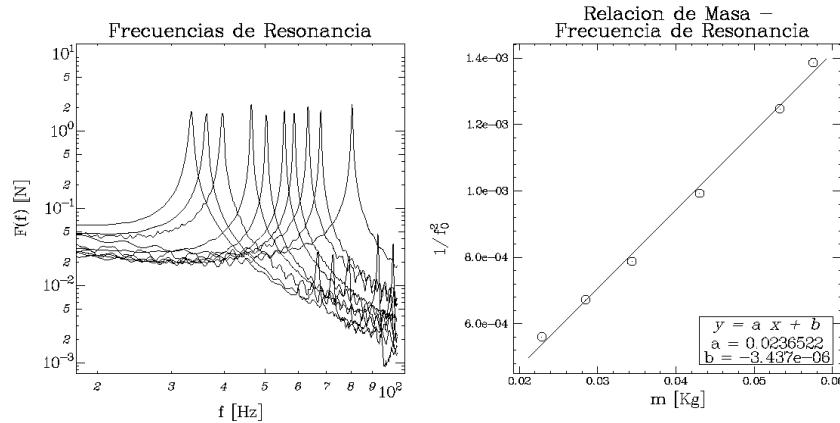


Figura 2.21: Lado derecho: relación entre la frecuencia de resonancia f_0 y la constante de rigidez de la barra. Lado izquierdo: diferentes picos de resonancia; la f_0 disminuye al aumentar la masa en el extremo libre que vibra. El valor calculado de $k = 40.787 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

primer experimento y la calculada aquí, se debe a que la celda de tensión compresión y todas las uniones entre la barra y el captor también reaccionan a las vibraciones modificando el valor de k que debiera tener la barra (ver las Figuras 2.20 y 2.21). De cualquier manera, se pueden detectar las interacciones del sistema con la placa, ver Cuadro 2.2. Tomando en consideración los cálculos hechos en el primer experimento se puede tener una estimación del verdadero valor de k de la barra utilizada. El valor calculado es $k = 40.787 \text{ [N} \cdot \text{m}^{-1}]$.

2.2.5. Fuerza magnética F_B y la disipación α

La fuerza magnética inducida en el sistema se produjo mediante la aplicación de un voltaje aleatorio (cuyo valor máximo registrado es de 7.26 Volts) a un selenoide (con resistencia eléctrica de 6Ω). El valor de la frecuencia de resonancia se encuentra en el ancho de banda de frecuencias con la que se induce la fuerza magnética F_B .

Al realizar un análisis de Fourier de la excitación magnética detectada en la celda de tensión compresión, se puede constatar que se produce nuevamente el pico de resonancia. Por otra parte, haciendo un estudio de la respuesta del selenoide en un circuito LR regido por la Ec. 2.15,

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\alpha\omega}$$

y

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V, \quad (2.15)$$

aplicando análisis de Fourier queda:

$$H \approx \frac{F_B}{U} = \frac{\Gamma}{R} \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_B}}. \quad (2.16)$$

En donde Γ es el campo magnético, F_B la fuerza debida al campo y es la resistencia R Ohms. Analizando la función de respuesta H la parte real se tiene un perfil parabólico, y para la parte imaginaria un perfil lineal de la siguiente forma:

$$\Re\left\{\frac{F_B}{H}\right\} = -\omega^2 m + k \quad (2.17)$$

y

$$\Im\left\{\frac{F_B}{H}\right\} = \alpha\omega. \quad (2.18)$$

Es importante remarcar que la respuesta H es la representación de la fuerza magnética ejercida sobre la base del oscilador. De aquí se puede estimar de manera alternativa el valor de k para el sistema. La estimación del parámetro de disipación puede hacerse calcularse directamente de la Ec. 2.18. Al evaluar $|\Im\{H\}|$ se puede constatar que la disipación será proporcional a ω con

$$|H| \sim \frac{|x_S(\omega) - x_{SB}(\omega)|}{x_B(\omega)} \quad (2.19)$$

y

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{m^2\omega^4 + \omega^2(\alpha^2 - 2km) + k^2}}. \quad (2.20)$$

La Ec. anterior 2.20 puede simplificarse de la siguiente manera:

$$a = m^2;$$

$$b = \alpha^2 - 2km;$$

y

$$c = k^2;$$

con

$$\phi = \omega^2$$

entonces,

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{a\phi^2 + b\phi + c}}.$$

Que es más sencilla de escribir. El ajuste $|H|^2$ tiene las siguientes unidades: Kg^2s^{-4} . Analizando el ancho del pico, se ve con ayuda de la Ec. 2.12 y la estimación simple del valor de la disipación α . En la Ec. 2.20 además, el papel que juega en el ajuste es el de determinar el ancho de la función de respuesta H . Este parámetro, puede estar relacionado a la cantidad de masa que circunda a las placas por unidad de tiempo. Su relación con el sistema puede ser interpretada como la energía que debe gastar el sistema para permitir el movimiento de la placa sujeta al brazo de palanca. El cálculo de este valor es muy importante, ya que determina el valor de la temperatura efectiva mediante la energía medida en el sistema. Esto es materia del siguiente capítulo. Mientras tanto, se muestran los valores de α en función de D (ver Figura 2.22 y el Cuadro 2.4). Para encontrar el valor de $\Delta\omega_{1/2}$ es necesaria hacer la hipótesis de que $\alpha^2 \ll 2km$. Resolviendo la ecuación de segundo de grado del argumento de la raíz a la inversa en H y factorizando se obtiene:

$$\phi_{\pm} = \frac{2km - \alpha^2 \pm \sqrt{3(4m^2k^2 - (\alpha^2 - 2km)^2)}}{2m^2},$$

donde el discriminante viene de igualar la ecuación de segundo grado con su valor máximo $\frac{1}{\sqrt{-b^2/4a+c}}$ y luego aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado con los coeficientes que resultan de igualar la ecuación de segundo grado en el argumento de la raíz de H con su valor

máximo para obtener x_{\pm} . Con la hipótesis hecha en el párrafo anterior, simplificando las soluciones y factorizando como

$$\phi_{\pm} = \frac{k}{m} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}\alpha}{2\sqrt{km}} \right)$$

y al escribir en términos de la frecuencia mediante las dos soluciones ϕ_{\pm} se obtiene como resultado

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 \pm \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\sqrt{km}} \right),$$

donde $\Delta f_{1/2} = \alpha\sqrt{3}/2\pi m$. De esta forma queda descrito el criterio para medir la disipación del sistema. Los valores de α son calculados con los datos de los Cuadros 2.2 y 2.4. Ver la Ec. 2.12 y la Figura 2.22.

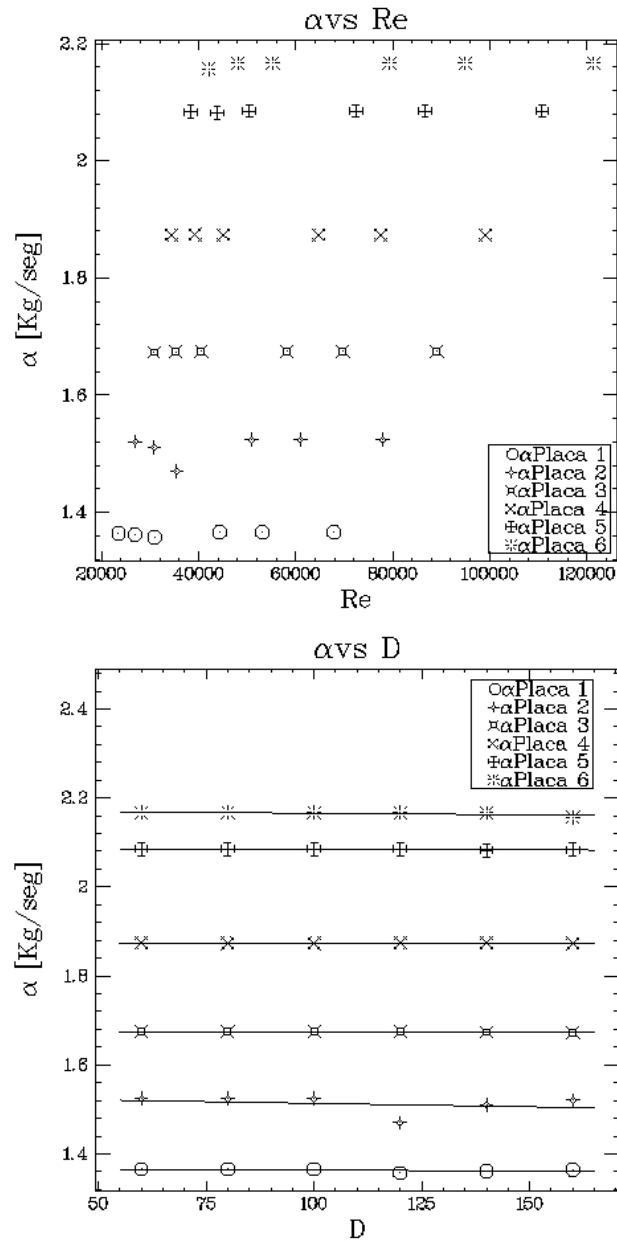


Figura 2.22: Se muestran los valores de $\Delta f_{1/2}$ respecto a Re para cada placa a cada distancia D . Los valores de disipación para cada placa pueden ser vistos en el Cuadro 2.4. En la Figura inferior se observan los valores correspondientes a la disipación contra D .

Distancia (m)	Placa 1 Re	α (Kg · s ⁻¹)	Placa 2 Re	α (Kg · s ⁻¹)	Placa 3 Re	α (Kg · s ⁻¹)
0.6	67927	1.36	77949	1.52	89084	1.67
0.8	53131	1.366	60970	1.52	69680	1.67
1.0	444388	1.36	50937	1.52	58213	1.67
1.2	30937	1.35	35501	1.47	40573	1.67
1.4	26901	1.368	30871	1.51	35281	1.67
1.6	23539	1.36	27012	1.52	30871	1.67
Distancia m	Placa 4 Re	α (Kg · s ⁻¹)	Placa 5 Re	α (Kg · s ⁻¹)	Placa 6 Re	α (Kg · s ⁻¹)
0.6	99106	1.87	110799	2.085	121378	2.17
0.8	77519	1.87	94939	2.085	94939	2.17
1.0	64762	1.87	72403	2.085	79316	2.17
1.2	45137	1.87	50463	2.085	55281	2.17
1.4	39250	1.87	43880	2.082	48070	2.16
1.6	34344	1.87	38395	2.084	42061	2.15

Cuadro 2.4: Valores de la distancia D con el valor correspondiente de Re por placa y α Kg · s⁻¹ utilizados para realizar el ajuste de H . Ver Figura 2.22.

2.3. Gráficas y Resultados

A continuación se muestran las mediciones hechas en los dos experimentos antes detallados.

2.3.1. Experimento I

Las mediciones de la posición $x(\omega)$ *cm*, son obtenidas directamente de la deflexión de la base de la barra. Como se puede apreciar, en las Figuras 2.23, 2.24, 2.25 y 2.26. Hay un incremento en los valores promedio en las mediciones; conforme se incrementa el número de Reynolds del chorro de aire expulsado por túnel de viento. A partir de estas curvas, es que se calcula el ajuste $H(\omega)$ de la siguiente expresión:

$$H \sim \frac{|x_S(\omega) - x_{SB}(\omega)|}{x_B(\omega)}$$

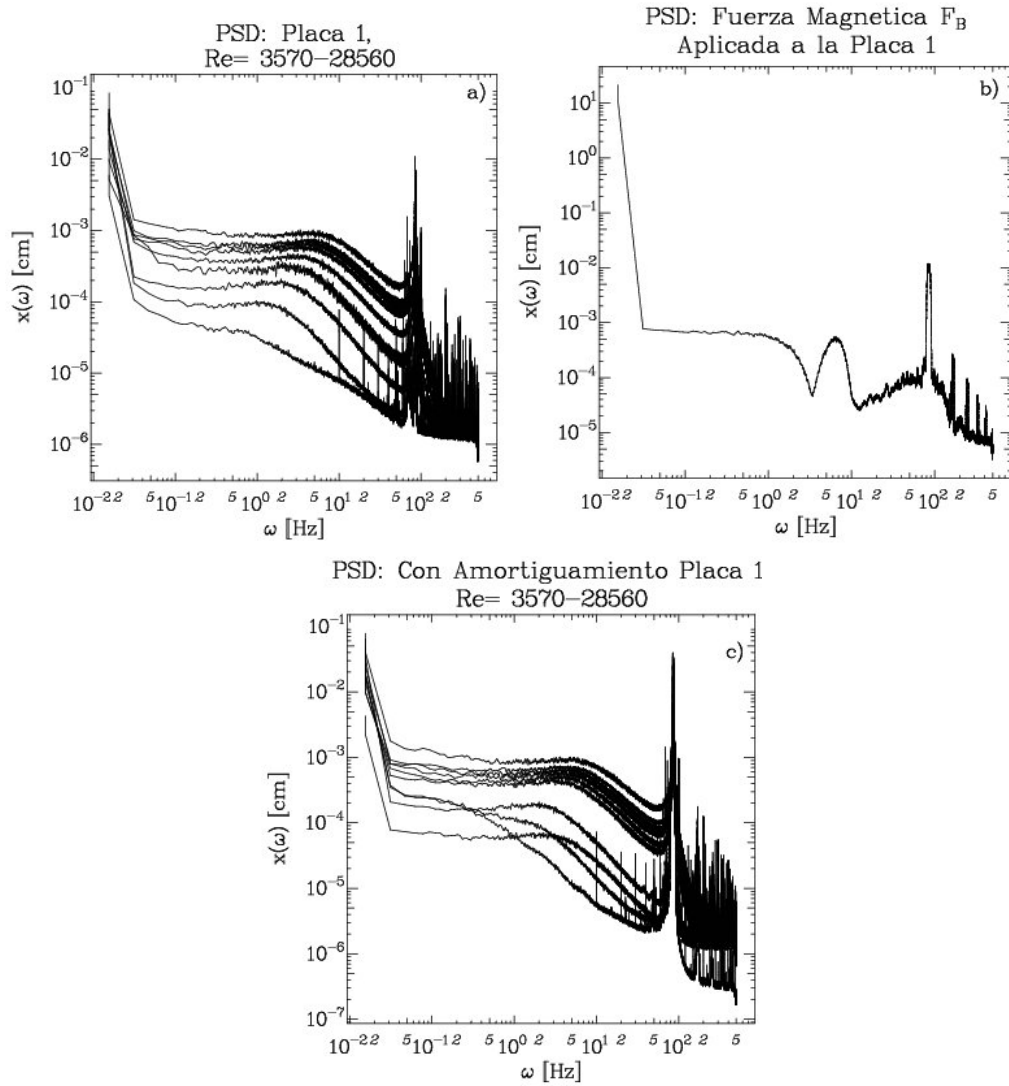


Figura 2.23: Se presentan las mediciones de $x_S(\omega)$ en *a*, $x_B(\omega)$ en *b* y $x_{SB}(\omega)$ en *c* para el intervalo de excitación de $Re = 3570$ a 28560 . En las gráficas correspondientes a *a* *c*, se puede observar que para los valores pequeños de Re no se tiene una región constante en la medida de la posición en frecuencias pequeñas, esto es debido a que no se ha desarrollado un flujo turbulento y más bien, se tienen características de flujo laminar, y por lo tanto la excitación del sistema no es del tipo aleatoria. También se revela que hay un pico debido a la resonancia del sistema que se encuentra alrededor de 84.42 Hz .

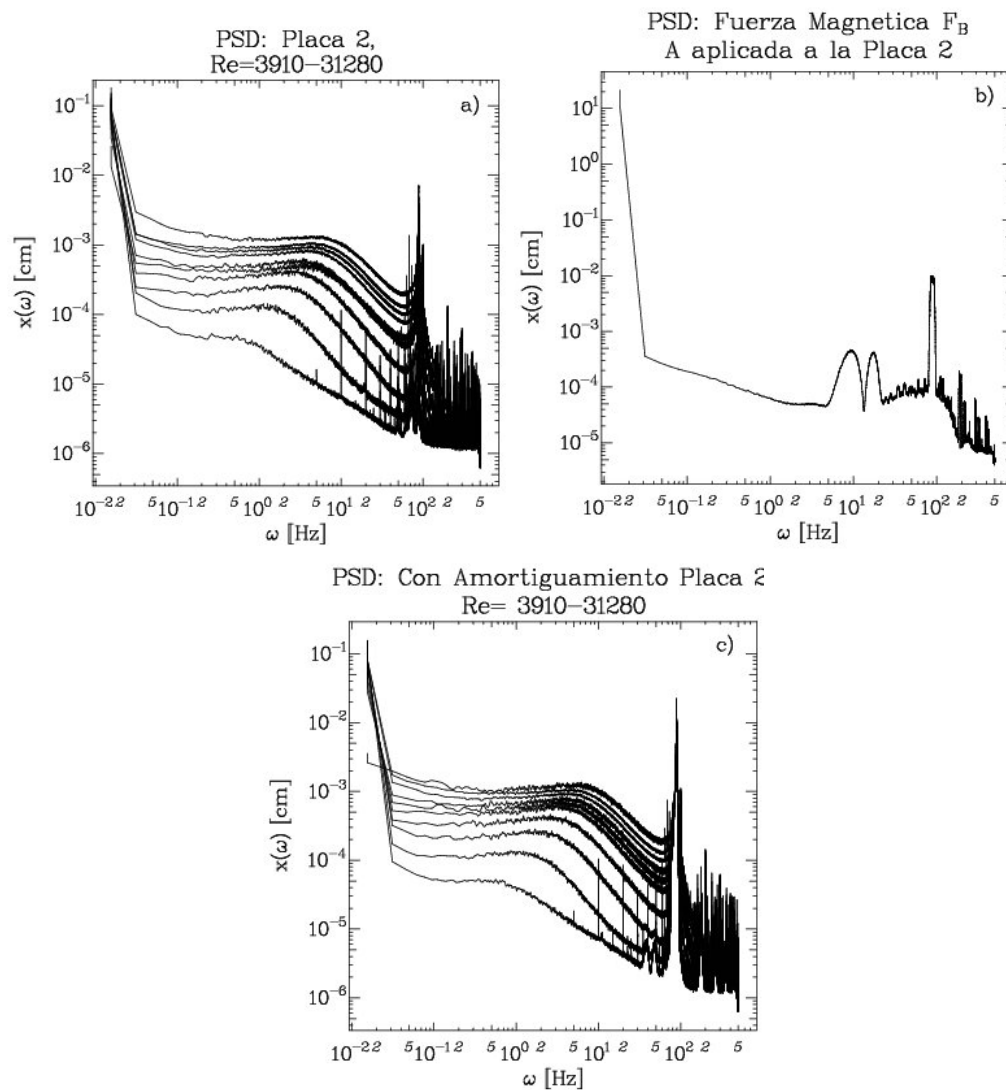


Figura 2.24: Se presentan los resultados de las mediciones obtenidas para la placa 2. El pico debido a la resonancia del sistema se presenta alrededor de 99.96 Hz.

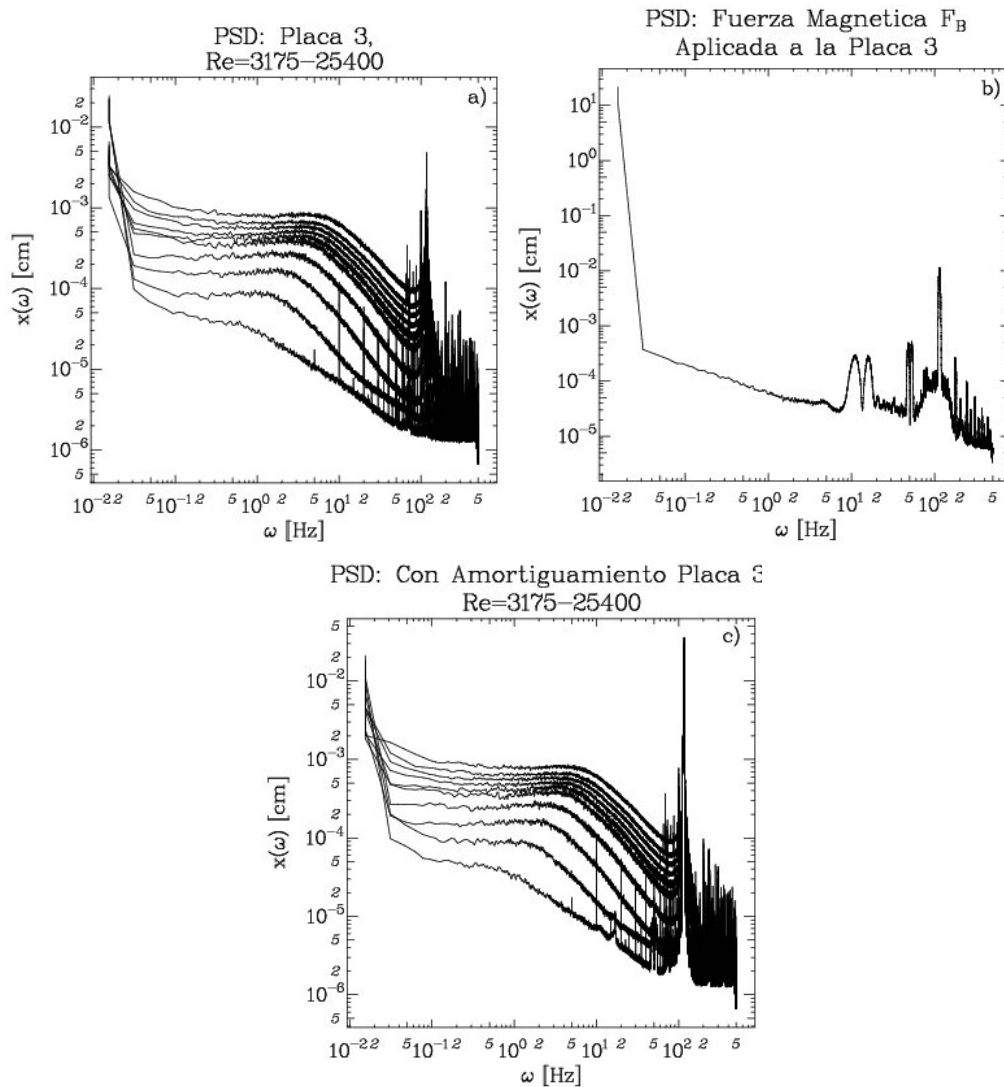


Figura 2.25: Se presentan los resultados de las mediciones obtenidas para la placa 3. El pico debido a la resonancia del sistema se presenta alrededor de 117.23 Hz.

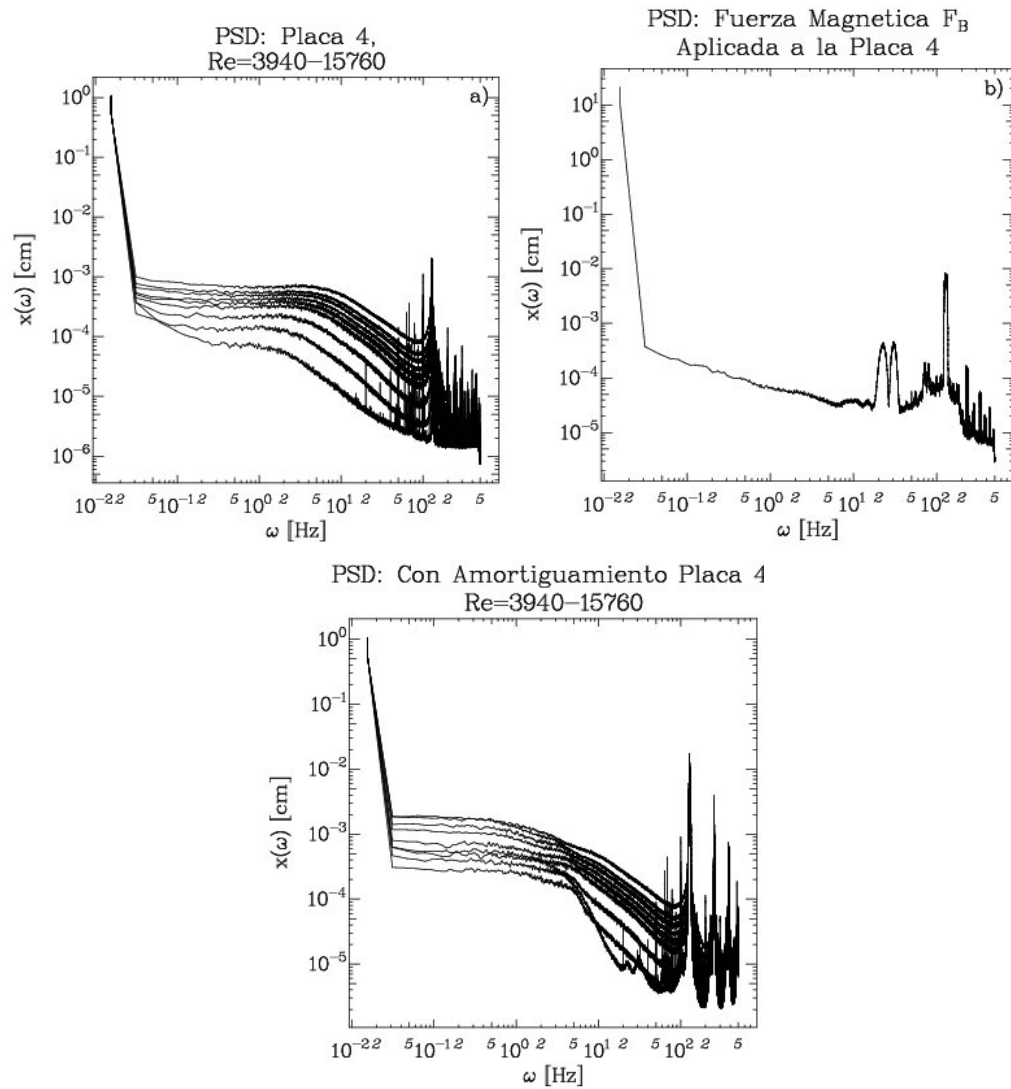


Figura 2.26: Se presentan los resultados de las mediciones obtenidas para la placa 4. El pico debido a la resonancia del sistema se presenta alrededor de 100.03 Hz.

2.3.2. Experimento II

A continuación, se presentan las mediciones de la posición tomadas para cada interacción, con las que se realiza el ajuste H en $|x_S - x_B|/x_B$. Para cada distancia D se obtienen 10^6 datos para seis placas. En las Figuras 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32 *a*, se puede apreciar la posición $x_S(f)$ cuando el sistema interactúa con el chorro de aire. Es notable que hay un grupo de tres curvas de la posición, que corresponden a las mayores distancias entre la boquilla y la placa. El conjunto de estas tres curvas revela que, para frecuencias pequeñas, el sistema ha interactuado con una fuerza aleatoria, mientras que para las dos curvas correspondientes a valores pequeños de D , no se presenta ninguna región constante. Entonces, se puede especular de que el flujo arrojado a tan corta distancia, no ha logrado perder la estructura de la boquilla. Para **b** se grafica la posición $x_{SB}(f)$ cuando el campo magnético y el chorro de aire interactúan con el brazo de palanca. Los valores de la posición $x_B(f)$ son medidos cuando únicamente interactúa el campo magnético, las gráficas de cada medición se muestran en la Figura 2.33. Al respecto de las magnitudes de los valores de la disipación, se puede decir que las variaciones tan pequeñas que se encontraron pudieran deberse a que se requiere amplificar aún más las fuerzas que actúan sobre el sistema; el valor tan pequeño de la rigidez de la barra k refleja esta situación. Es necesario lograr aislar las mediciones del captor de la influencia de postes y bases para poder medir únicamente las fuerzas sobre el brazo de palanca.

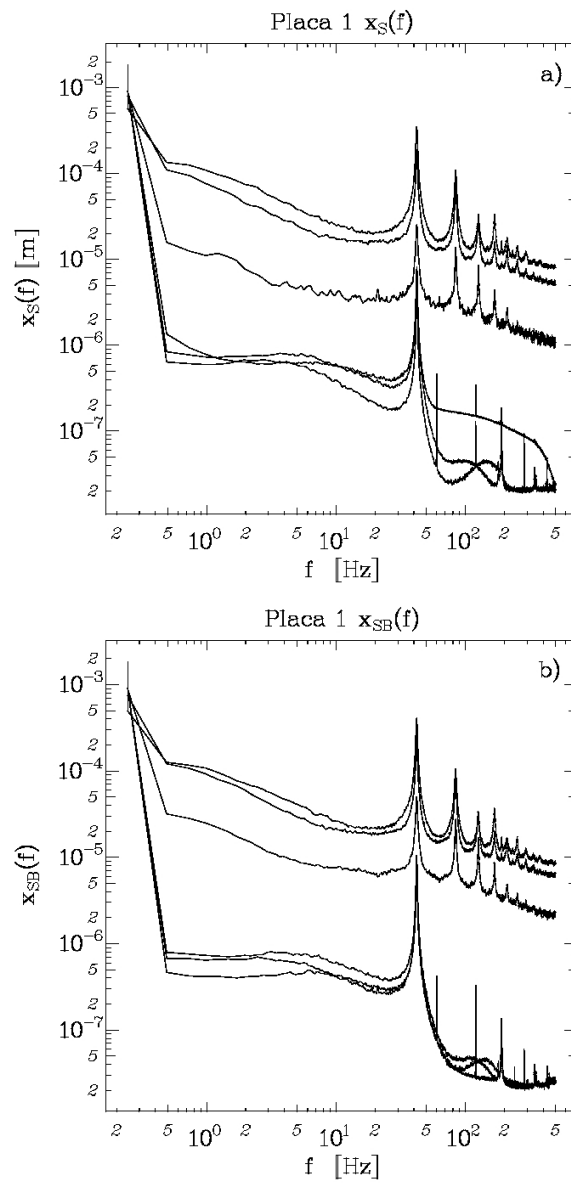


Figura 2.27: En la figura *a* se muestran mediciones de la posición cuando se induce la fuerza por el flujo en la placa 1 haciendo variar $D = 0.6 \dots 1.60 \text{ m}$. En la figura *b* se muestran las mediciones de la posición al inducir la fuerza magnética y la del flujo. Las curvas en *a* y *b* con valores más grandes corresponden al menor valor de D .

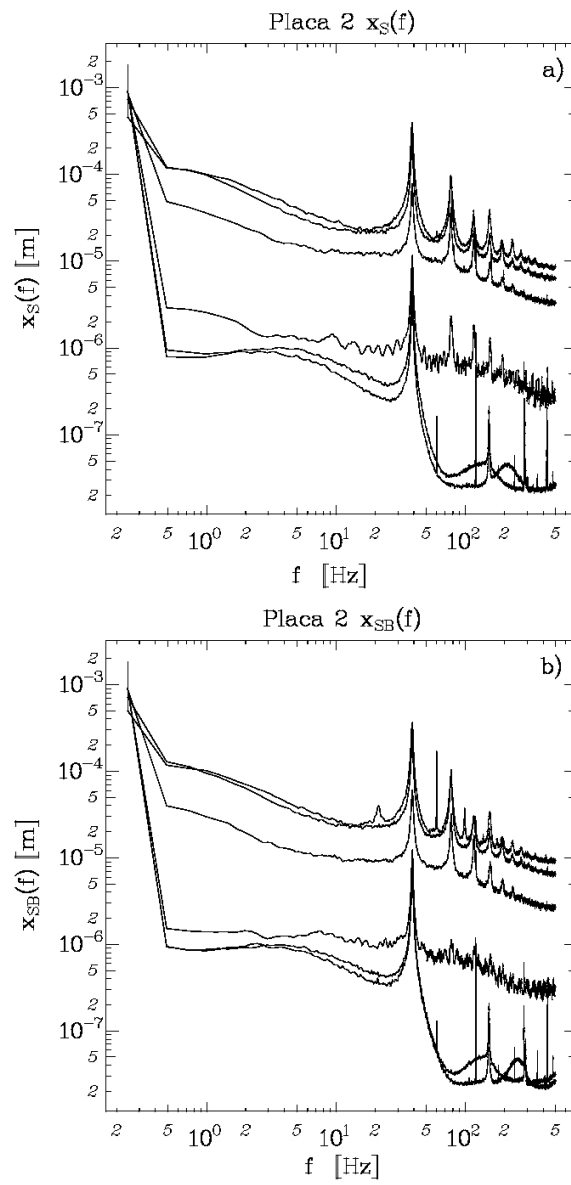


Figura 2.28: En la figura a $x_S(f)$ se representa la posición en presencia de F_S . En la figura b $x_{SB}(f)$ se representa la posición en presencia F_S y F_B . La variación de la distancia es $D = 0.6 \dots 1.60$ m. En la base de la barra se encuentra montada la placa 2.

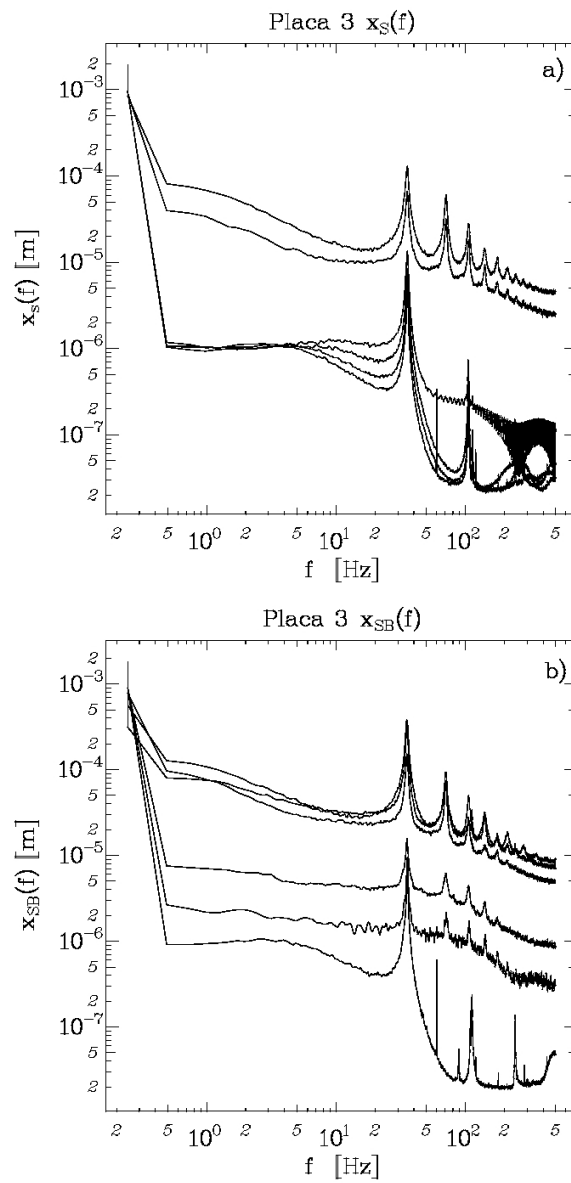


Figura 2.29: En la figura a $x_S(f)$ se representa la medición de la posición en presencia de F_S . En la figura b $x_{SB}(f)$ se representa la posición en presencia F_S y F_B . La variación de la distancia es $D = 0.6 \dots 1.60$ m. En la base de la barra se encuentra montada la placa 3.

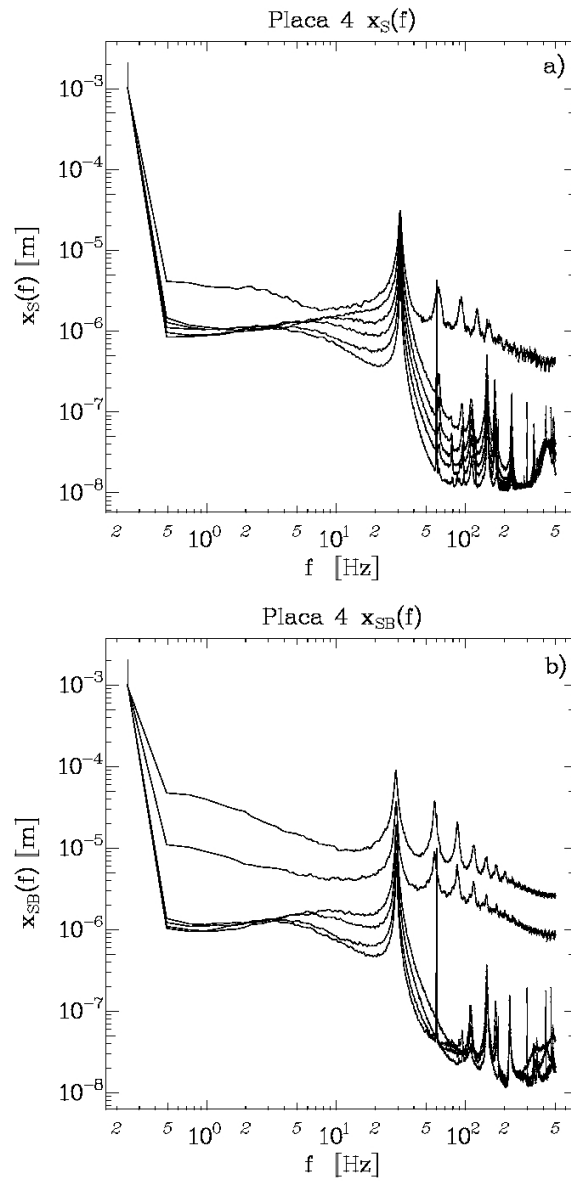


Figura 2.30: En la figura a $x_S(f)$ se representa la posición en presencia de F_S . En la figura b $x_{SB}(f)$ se representa la posición en presencia F_S y F_B . La variación de la distancia es $D = 0.6 \dots 1.60$ m. En la base de la barra se encuentra montada la placa 4.

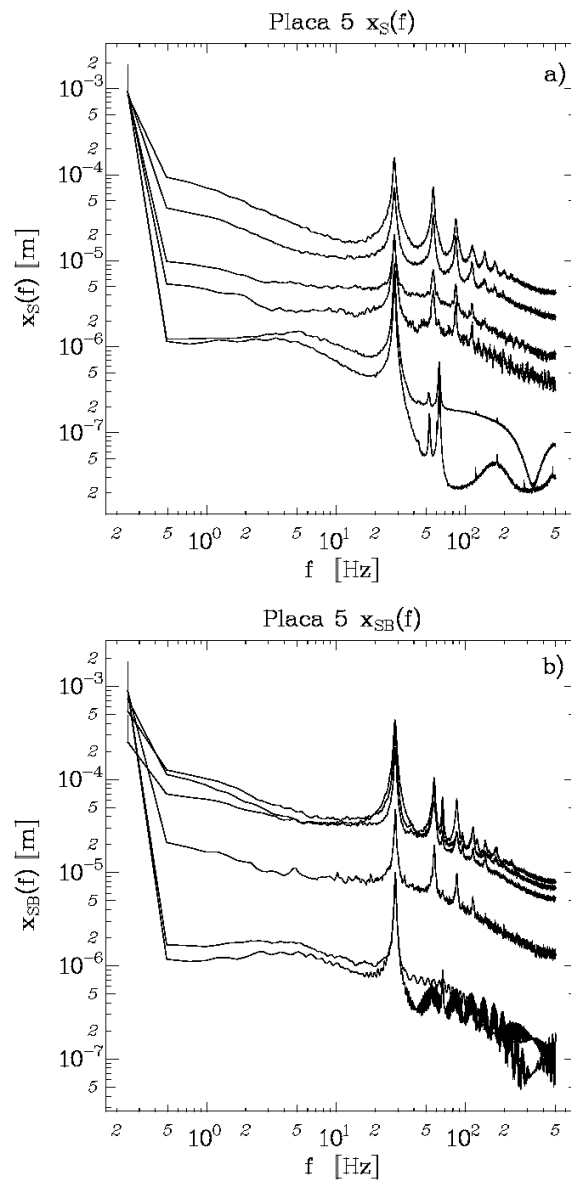


Figura 2.31: En la figura a $x_S(f)$ se representa la posición en presencia de F_S . En la figura b $x_{SB}(f)$ se representa la posición en presencia F_S y F_B . La variación de la distancia es $D = 0.6 \dots 1.60$ m. En la base de la barra se encuentra montada la placa 5.

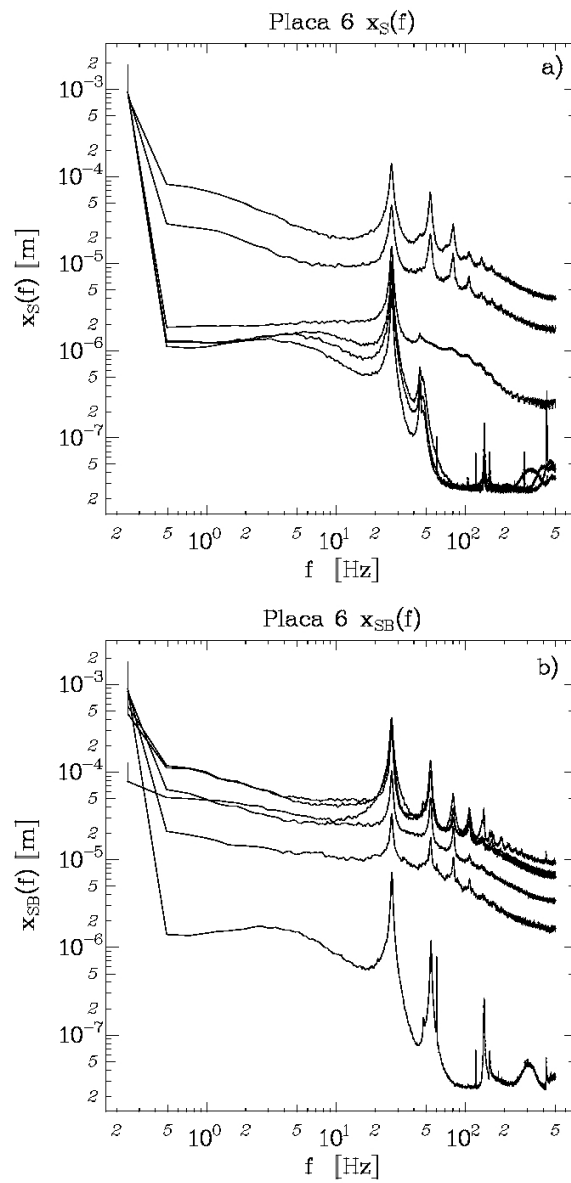


Figura 2.32: En la figura a $x_S(f)$ se representa la posición en presencia de F_S . En la figura b $x_{SB}(f)$ se representa la posición en presencia F_S y F_B . La variación de la distancia es $D = 0.6 \dots 1.60$ m. En la base de la barra se encuentra montada la placa 6.

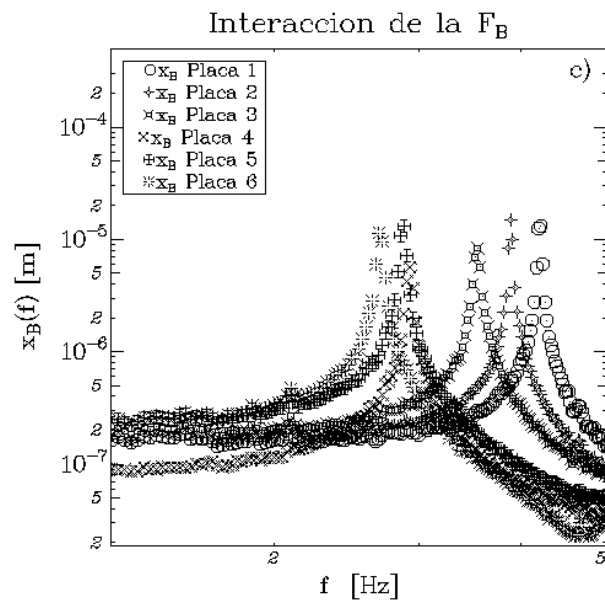


Figura 2.33: Posición de la base del brazo de palanca con las placas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cuando se aplica el campo magnético aleatorio.

2.4. Conclusiones de capítulo

En ambos experimentos, se ha podido determinar los parámetros de la Ecuación

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + k(x) = F_A + F_B.$$

Con lo que respecta la constante de rigidez k , con ayuda de la expresión

$$\frac{1}{f_0^2} = 4\pi^2 m_{ef} / k + 4\pi^2 \frac{a^4 (3-a)^2}{4k} m_{iman}$$

que relaciona las masas colocadas en el brazo m_{iman} de palaca y la masa del brazo m_{ef} , se encontraron los siguientes valores: para el Experimento **I** $k = 13495.22 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ y para el Experimento **II** $k = 40.787 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. La disparidad de los valores de k reportadas, es debida a cuestiones técnicas y de disposición de los transductores utilizados en las mediciones. Esto se puede ver en la Sección 2.2.4.

Para determinar el parámetro de disipación α , se obtuvo mediante el estudio y la solución a la Ecuación

$$\Re\{H(\omega_r)^{-1}\} = \Re\{k - m\omega^2 + i\alpha\},$$

donde ω_r es la frecuencia de resonancia del sistema. El resultado encontrado es:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 \pm \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\sqrt{km}}\right).$$

A partir de ahora, se puede proseguir con el análisis del TFD pues, a partir de la medición de x se puede obtener de forma sencilla $\langle x(\omega)^2 \rangle$ para la interacción principal. También se ha determinado el valor de la disipación $\alpha \text{ Kg} \cdot \text{seg}^{-1}$. El análisis de tres diferentes interacciones, ayudará a establecer un estándar de la actividad en términos de diferentes variables de conjunto. Se han propuesto diferentes valores de α con la finalidad de visualizar la afectación de la disipación en el ajuste H , esto se puede ver la Figura 2.34.

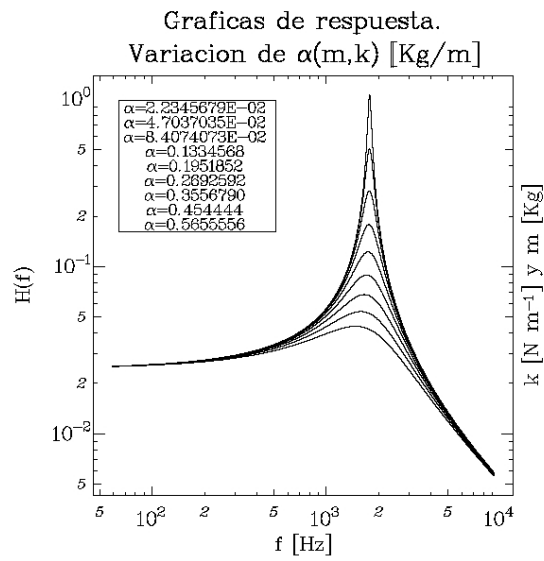


Figura 2.34: Curvas teóricas obtenidas con valores propuestos de α . Para $\alpha = 0$ obtenemos un máximo en la actividad del sistema, es decir, se tiene un sistema donde no hay interacción con sus alrededores. Para valores de $\alpha > 0$ el entorno comienza a ser relevante, pues se impide el libre movimiento del oscilador, esto se observa en las curvas en donde casi se ha desvanecido el pico de resonancia.

Capítulo 3

Temperatura Efectiva

3.1. Presentación de Capítulo

Se calcularán los valores de la temperatura efectiva¹ T_{ef} que se define como

$$4K_B T_{ef} = \frac{\langle x_S(\omega)^2 \rangle}{\alpha |H(\omega)|^2} \quad (3.1)$$

Esta ecuación es muestra de que se puede lograr en la práctica un “termómetro” para sistemas fuera de equilibrio [19] y las Figuras 3.1 y 3.2 lo muestran. Abundaremos en el significado de la función de respuesta utilizada en la Ec. 3.1 que representa el balance $|x_S(\omega) - x_{SB}(\omega)|/x_B(\omega)$ permitiendo así, cuantificar la energía disipada por el sistema. Los valores de $\langle x_S(\omega)^2 \rangle$ por la disipación, representa la energía potencial del sistema excitado por el chorro de aire. Al dividir la energía cinética entre la respuesta del sistema, se está comparando la energía de excitación inyectada y la energía disipada. La temperatura efectiva muestra en que en un intervalo de frecuencias, el sistema puede mantener su actividad hasta que, a un determinado valor de frecuencia de transición o crítica ω_c , donde la disipación comienza a ser relevante en el comportamiento del sistema. Además, se realizará un estudio de la relación entre la temperatura efectiva y el número de Reynolds que nos asocia el

¹Ver introducción y expresión (5).

tamaño de la placa con la velocidad del chorro de aire.

Se aborda el cálculo de T_{ef} con los datos obtenidos en ambos experimentos en el siguiente orden: en primer lugar, se calcula la contribución de las diferentes excitaciones a la posición del sistema. En segundo lugar, se obtiene el ajuste de $|H|^2$ con unidades de $Kg^{-2} \cdot s^4$; al momento de obtener el producto de α con unidades de $[Kg \cdot s^{-1}]$ de las Ecuaciones 3.2.1 y 3.2.1, se obtiene que las curvas de T_{ef} tienden a juntarse en una sola, eliminándose la dependencia a la variable de conjunto Re y solamente, queda una curva que representativa de todo el sistema. En tercer lugar, se acomodarán todas las curvas de T_{ef} de acuerdo a la variable de conjunto que se haya modificado y se buscará un escalamiento respecto a esta variable que produzca un acoplamiento de todas las curvas de la temperatura efectiva. En cuarto y último lugar, se harán comparaciones entre los diferentes conjuntos del mismo experimento.

El TFD expuesto en el Capítulo 1 para sistemas estacionarios fuera de equilibrio es utilizado para el cálculo de la $T_{ef}(\omega)$ con unidades de $Kg \cdot s^{-1} \times m^2 \cdot s^{-2}$. En el Capítulo 2 se expusieron dos experimentos que nos ofrecen dos puntos de vista importantes en la estimación de la T_{ef} pues, uno parte de la observación de la posición del oscilador $x(\omega)$ y el otro analiza la T_{ef} desde la medición de la fuerza $F(\omega)$.

3.2. Cálculo de la Temperatura Efectiva T_{ef}

Las Figuras 3.1 y 3.2 correspondientes al Experimento **I** y las Figuras 3.3, 3.4, 3.5 del Experimento **II** son el resultado del cálculo de T_{ef} . Podemos ver que hay un incremento de los valores de la temperatura al ser aumentada la excitación del sistema. Esto es un resultado esperado.

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_{turb} + F_B ,$$

En el Experimento **II**, el cálculo de la T_{ef} , se ha hecho con un valor de $k_B = 1$ ya que, únicamente interesa conservar el significado físico de las unidades de esta constante.

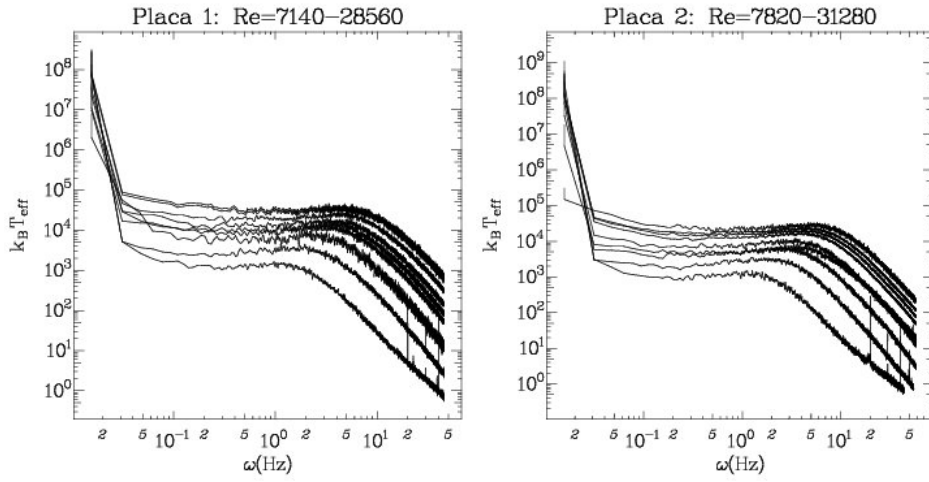


Figura 3.1: Temperatura efectiva calculada para las placas 1 y 2 del Experimento I.

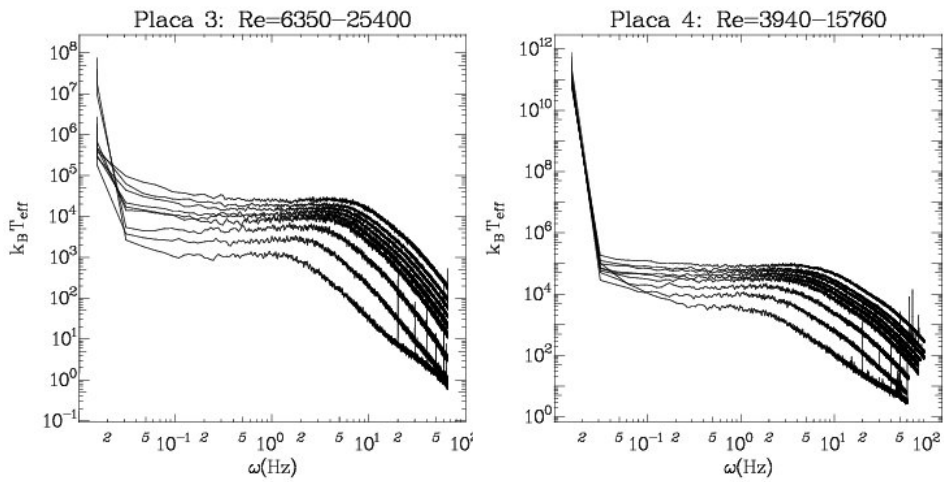


Figura 3.2: Temperatura efectiva calculada para las placas 3 y 4 del Experimento I.

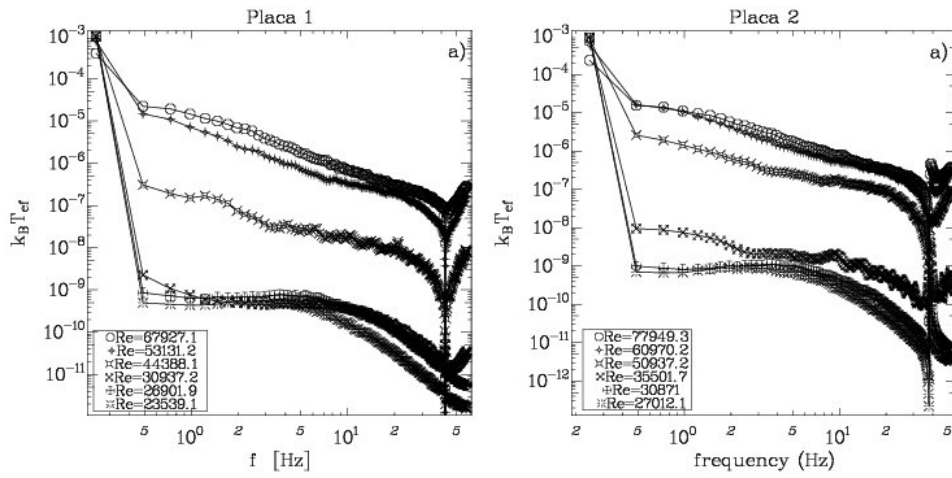


Figura 3.3: Temperatura efectiva calculada para la placa 1 y 2 del Experimento II.

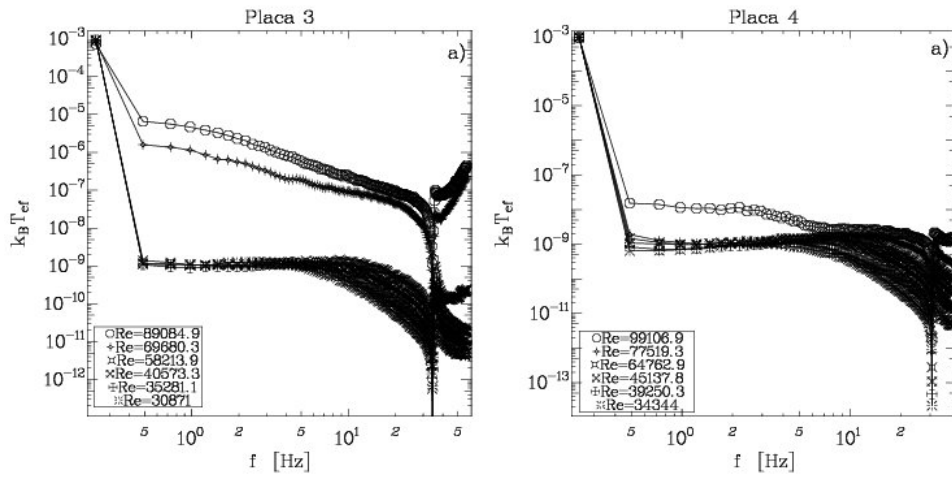


Figura 3.4: Temperatura efectiva calculada para la placa 3 y 4 del Experimento II.

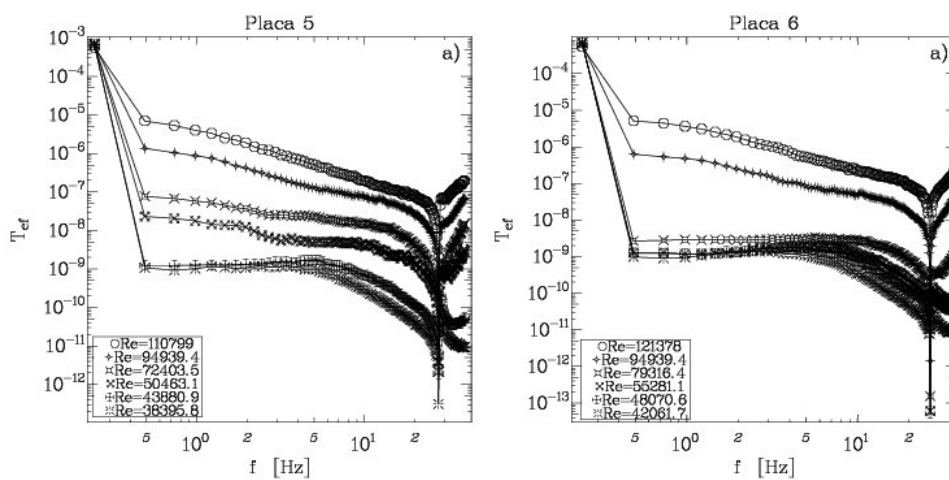


Figura 3.5: Temperatura efectiva calculada para la placa 5 y 6 del Experimento II.

3.2.1. Análisis de T_{ef} y el Número de Reynolds.

La dependencia de la temperatura efectiva como $T_{ef} = T_{ef}(Re, \omega)$ y $T_{ef} = T_{ef}(Re, \omega_c)$ donde Re es función de L , Ω y D en los experimentos **I** y **II** respectivamente, dichas relaciones se pueden ver en las Figuras 2.3 y 2.3. La metodología para determinar la Ec.

$$T_{ef}(Re, \omega) = T_{ef} Re^{-p}, \quad (3.2)$$

es la siguiente. Se determina el valor promedio de $T_{ef}(\omega) = A_0$ para la región en donde los valores de la disipación no son relevantes, esto es: para valores pequeños de frecuencia y en función de Re asociando la placa utilizada en el experimento. En el caso del Experimento **I**, la relación entre Re y A_0 es:

$$A = A_0 Re^p \quad (3.3)$$

Obteniéndose que $p = 11/5$. Ver la Figura 3.6. Es notorio que la intensidad en la excitación

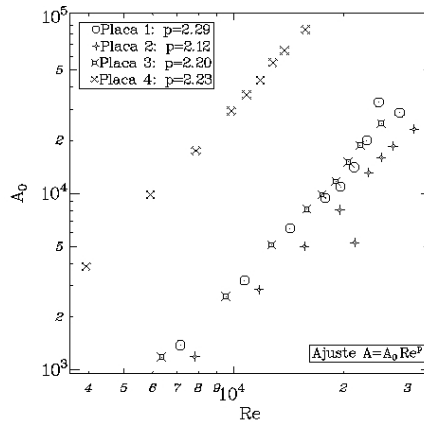


Figura 3.6: A_0 representa valores promedio de $T_{ef}(\omega)$ en donde $\omega < \omega_c$, estos valores se han graficado en función de Re asociado a cada placa para diferentes intensidades de excitación. En el recuadro que se encuentra dentro de la gráfica, se mencionan los valores de la potencia p hallados para cada placa. El ajuste de estas curvas fue realizado por el método de mínimos cuadrados en $\log - \log$.

aumenta como $Re^{11/5}$ y que para observar el comportamiento de T_{ef} sin esta variable de conjunto basta calcular y volver a graficar ω/Re vs $T_{ef}(\omega)/Re^{11/5}$. El resultado será que todas las curvas se

colapsan en una sola.

A diferencia del Experimento **I**, en el Experimento **II** no se puede aplicar el mismo análisis. La variación de la intensidad no mantiene una relación lineal. Por lo tanto, no es posible definir un exponente de escalamiento además, cuando la boquilla que arroja el chorro de aire y se encuentra cercana a la placa, no se ha desarrollado un flujo turbulento homogéneo e isotrópico. En cambio, para valores de D grandes, podemos realizar un ajuste similar al utilizado para los resultados de la T_{ef} en el primer experimento. Esto pudiera ser un inconveniente, pero no lo es del todo, gracias a esto podemos darnos cuenta de forma cualitativa en qué distancias se encuentran condiciones para desarrollar el experimento. También podemos estudiar las frecuencias críticas para cada curva de temperatura efectiva y obtener resultados aceptables para comprender cómo se incrementa la actividad del sistema para las diferentes configuraciones entre longitud de las placas y la intensidad del chorro de aire.

Para valores de Re grandes tenemos que la intensidad de la temperatura efectiva es elevada en comparación con la intensidad a valores de Re pequeños. Sin embargo, que Re sea grande no garantiza que las fuerzas presenten un perfil de ruido blanco en algún intervalo de frecuencias. En esta situación, la T_{ef} no exhibe una región constante en ningún intervalo. Al observar las Figuras 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 y 3.16 correspondientes al Experimento **II**, se puede constatar que, los valores grandes de Re no se grafica ninguna región constante que representaría la actuación de la fuerza aleatoria. Por otro lado, para las curvas de T_{ef} asociadas a valores grandes de Re son colapsadas al igual que para las curvas de la temperatura efectiva asociadas a valores pequeños de Re . Tenemos que decir, que hay resultados que nos sorprenden. De la Figura 3.14, se observa que el acomodo de las curvas colapsadas no corresponde con la lógica de que para valores de Re grandes, pues los valores de la T_{ef} grandes. Por el momento esto no se puede explicar. En el resto de las figuras presentadas en ésta sección, pareciera ser que la lógica de que a valores grandes de Re se tienen valores grandes de T_{ef} se puede apreciar para los casos restantes.

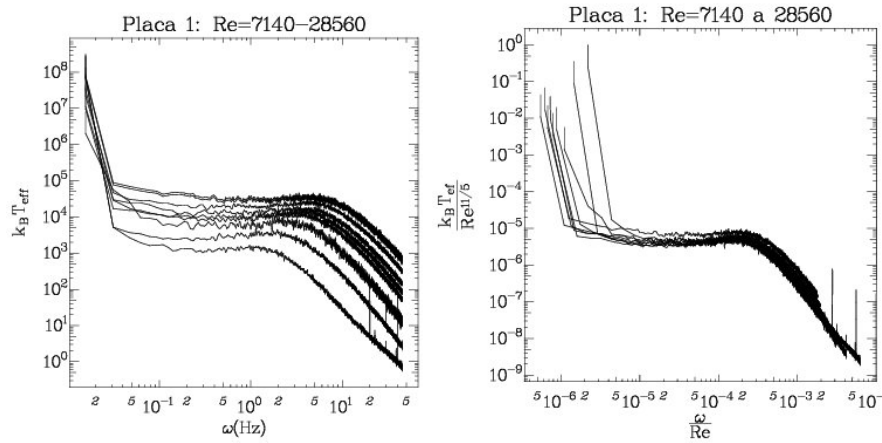


Figura 3.7: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 1. La figura superior contiene las curvas de la T_{ef} para distintos valores de Re , en cambio en la figura inferior, puede verse que las curvas tienden a juntarse, de esta forma, el fenómeno puede ser descrito en una sola curva. Cabe destacar, que pudieran haber diversos motivos por los cuales el colapsamiento de las curvas no fue total, algunos de ellos pudieran ser técnicos, ó de que no se ha logrado obtener un régimen completamente turbulento.

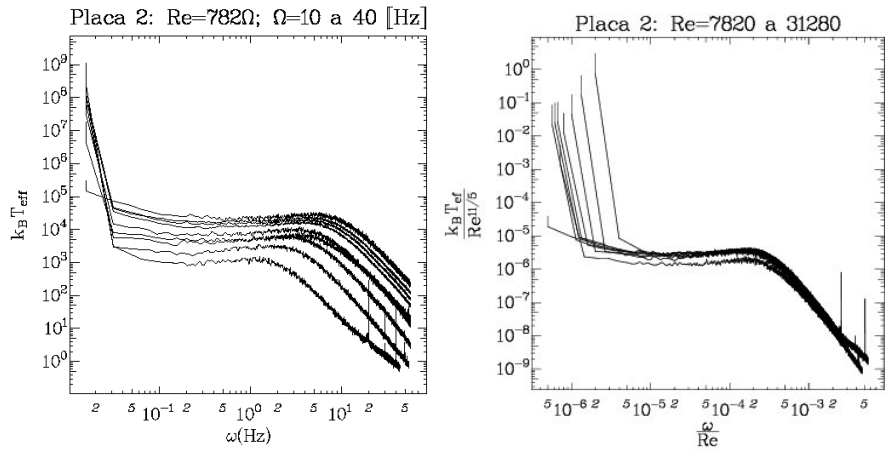


Figura 3.8: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 2. En la figura superior, se puede observar las diferentes curvas de T_{ef} . En la figura inferior, se ha realizado el colapsamiento de las curvas. Todo parece indicar que, es necesario tener un régimen de turbulencia completamente desarrollada, homogénea e isotrópica del flujo de aire, pues para curvas de temperatura efectiva a números de Re pequeños, no hay acoplamiento. Cómo dijimos en el pie de figura (3.7), también pudieran haber problemas técnicos que afectan a una sola configuración experimental.

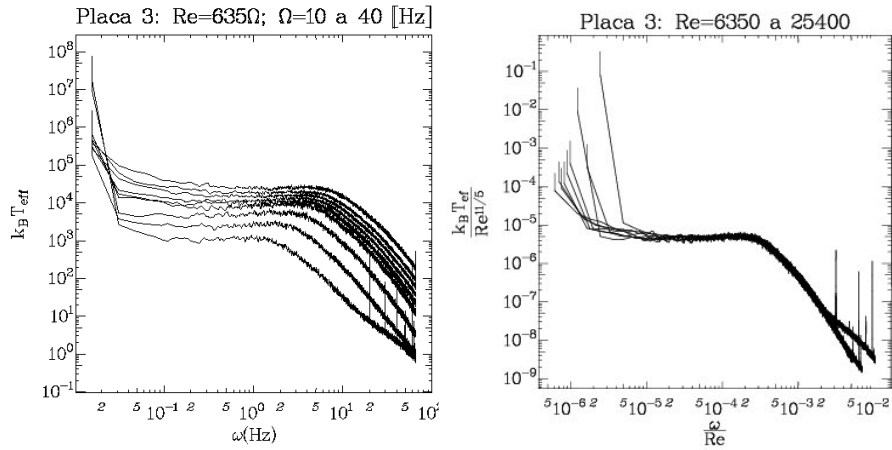


Figura 3.9: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 3. La figura superior, muestra las curvas de temperatura efectiva y en la figura inferior, podemos ver que las curvas quedan muy bien colapsadas al aplicar el exponente Re^{-p} , lo cual nos indica que se tiene un flujo turbulento completamente desarrollado y pocos errores técnicos al momento de realizar los experimentos.

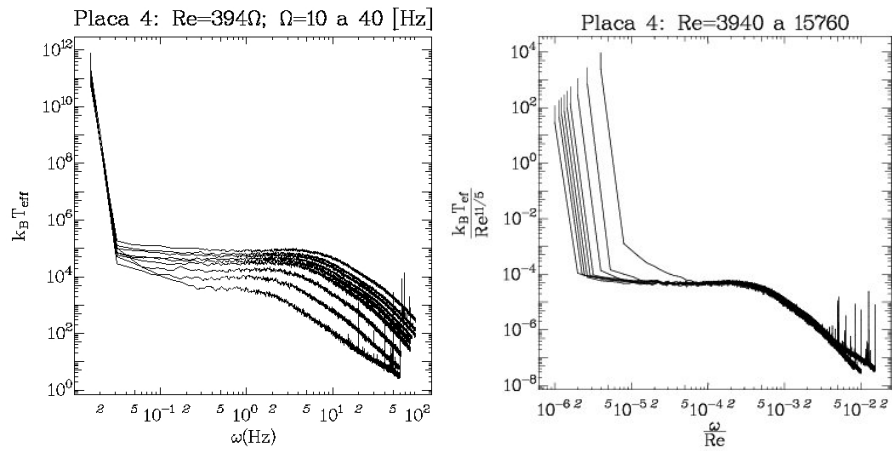


Figura 3.10: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 4. La figura superior nos muestra las curvas de la temperatura efectiva y la figura inferior, nos muestra el colapsamiento de éstas de lo cual podemos decir que se llevó con bastante éxito.

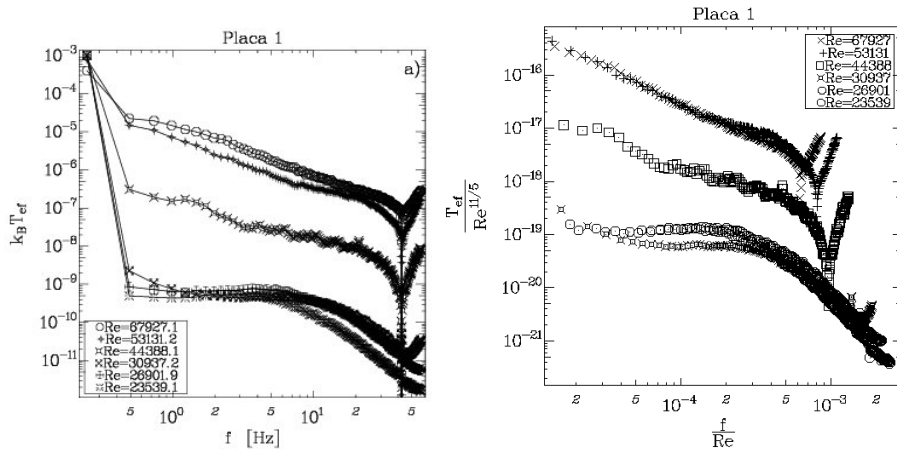


Figura 3.11: Temperatura efectiva y escalamiento en Re para la placa 1. En la figura superior, se observan tres niveles de intensidad de T_{ef} . La interpretación indica que para valores grandes de Re no se tiene un flujo turbulento completamente desarrollado, homogéneo e isotrópico, mientras que para las curvas de T_{ef} a valores pequeños de Re sí. El colapsamiento de las curvas de la temperatura efectiva se logra únicamente para el grupo de mayor intensidad y para donde hay turbulencia completamente desarrollado. Ver la figura inferior.

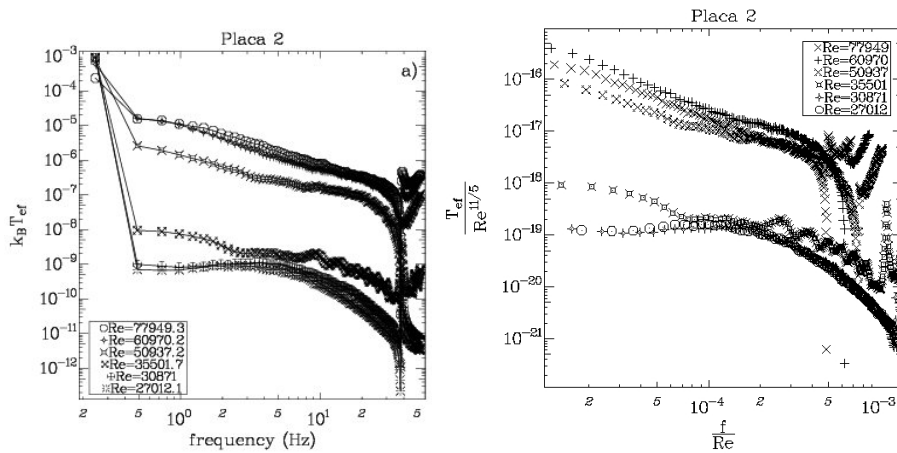


Figura 3.12: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 2. En la figura superior, nuevamente observamos la formación de tres grupos de curvas. Al realizarse el escalamiento de Re las curvas de T_{ef} se colapsan otra vez, el grupo con mayor intensidad de T_{ef} y las obtenidas por la excitación de un flujo turbulento completamente desarrollado.

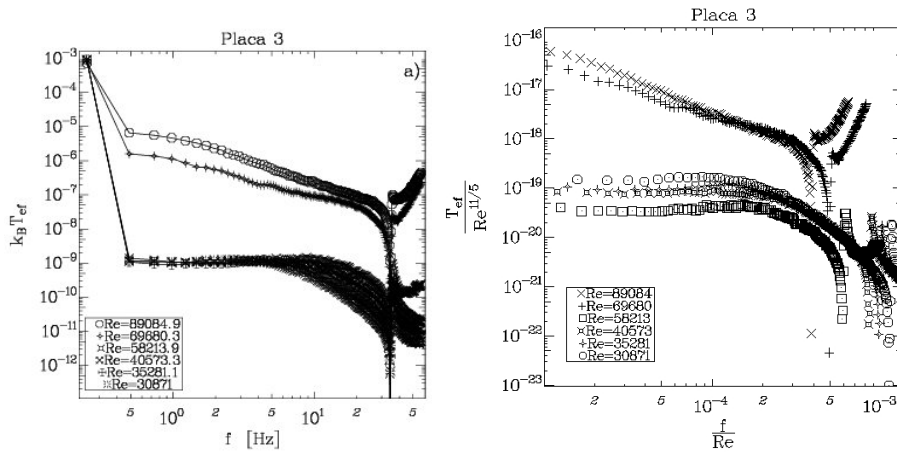


Figura 3.13: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 3. En la figura superior, se observan dos grupos de curvas, aunque pudiera pensarse que para el grupo inferior de curvas se ha excitado con el régimen de turbulencia adecuado para nuestros propósitos, resulta ser que al aplicar el escalamiento, nuevamente se colapsan las curvas de T_{ef} de mayor intensidad y las que representan valores pequeños de Re . Ver figura inferior.

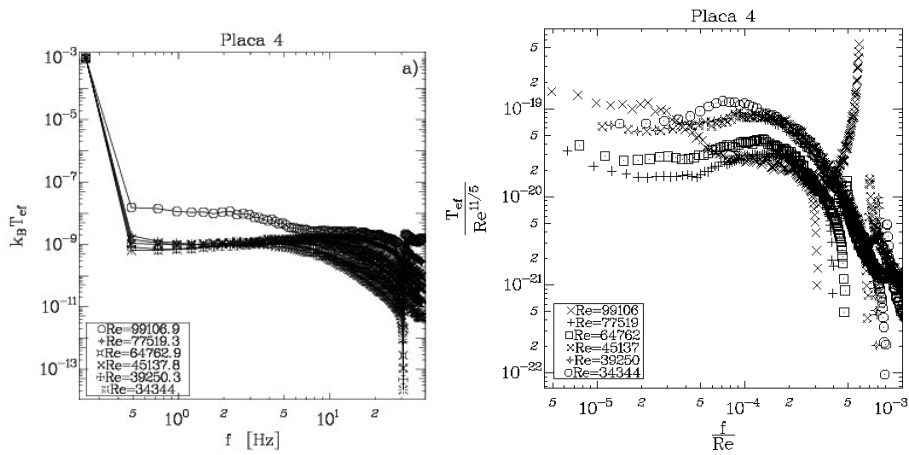


Figura 3.14: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 4. En la figura superior no se pueden ver grupos de curvas, sin embargo en la figura inferior, cuando se realiza el escalamiento, se forman dos grupos, el primero correspondiente a los valores grandes de Re y el segundo para los valores pequeños. Es sorprendente el orden con el que las curvas colapsadas deciden graficarse. Luego del colapsamiento de curvas el orden cambia y ahora, las curvas asociadas a valores de Re pequeños quedan por encima de las que tiene asociado un valor de Re grande.

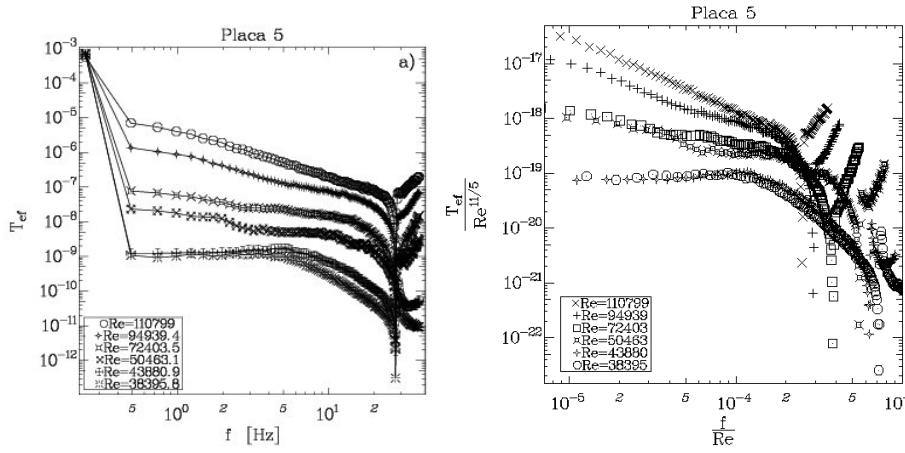


Figura 3.15: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 5. En la figura superior se observan tres grupos muy bien definidos (a diferencia de la figura 3.14) y podemos observar en la figura inferior que al aplicar el escalamiento, estos tres grupos se colapsan y se mantienen.

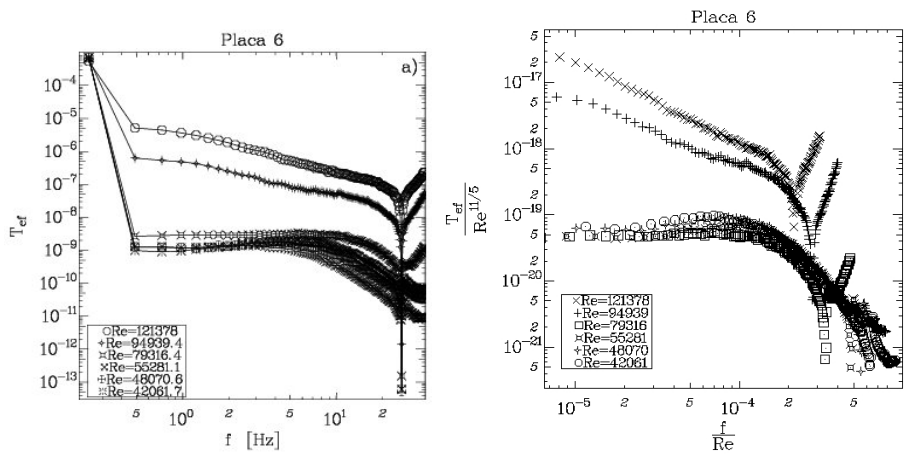


Figura 3.16: Temperatura efectiva y escalamiento de Re para la placa 6. En la figura superior se aprecia que se han formado dos grupos de curvas de T_{ef} y al colapsarlas, los grupos se preservan, pero no se logra colapsar las curvas asociadas a valores grandes de Re .

3.2.2. Análisis de la Frecuencia Crítica en T_{ef} .

Se ha mencionado que en las curvas de T_{ef} , la actividad del sistema se desarrolla sin una intervención notable de la disipación para valores de $\omega < \omega_c$. A continuación, se estima el cambio de esta región para distintos valores de la intensidad de la excitación y para los diferentes valores de las placas mediante $T_{ef}(Re, L, \omega_c)$. Se grafican los valores de la intensidad contra $T_{ef}(\omega_c)$ para cada placa. Con los resultados de éste análisis, es posible identificar qué tipo de configuración de los experimentos presenta mayor actividad al ser excitado. Esto puede ser visto en las Figuras 3.17, 3.18 y 3.19. Aplicando el mismo análisis para las frecuencias críticas obtenidas del cálculo de la

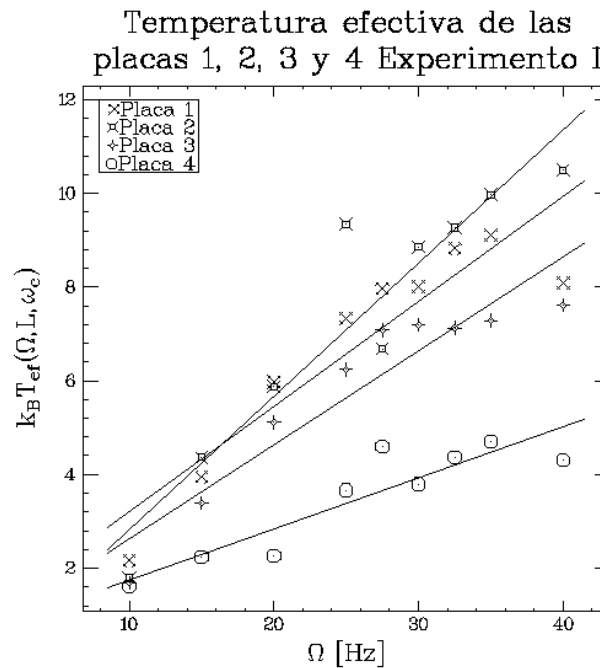


Figura 3.17: Se han determinado las frecuencias críticas ω_c para cada curva de T_{ef} correspondientes a las configuraciones del sistema del Experimento I encontrando la intersección entre dos rectas, una que se encuentra en la región donde no es relevante la disipación y la otra donde la actividad comienza a decrecer debida a la disipación. Se puede apreciar que $T_{ef}(\Omega, L, \omega_c)$ se incrementa linealmente respecto a Ω , además de que las pendientes de las rectas cambian según el valor de L . No es relevante indicar cuales son éstos valores de pendiente, debido a que esta gráfica es un paso intermedio en el análisis.

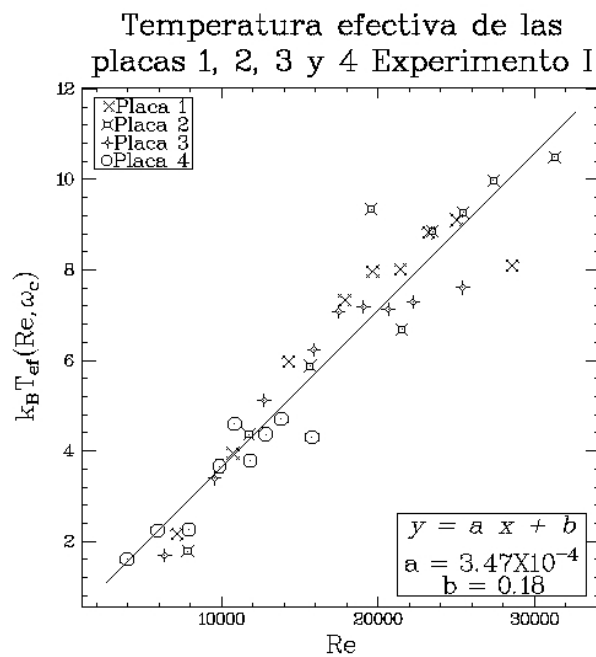


Figura 3.18: Sustituyendo los valores de Ω por los valores de Re de la Figura 3.17, se identifica el alcance de excitación de todas las configuraciones del sistemas probadas en el Experimento I. La excitación mayor corresponde a las placas con superficie grandes y que el sistema fue menos excitado para placas con valores pequeños de superficie.

temperatura efectiva del Experimento **II**. Comparando las Figuras 3.18 y 3.19 que corresponden a los dos experimentos realizados, podemos ver que la configuración asociada a la menor actividad es asociada a las placas con menor longitud transversal y las que tienen mayor sección transversal desarrollan mayor actividad.

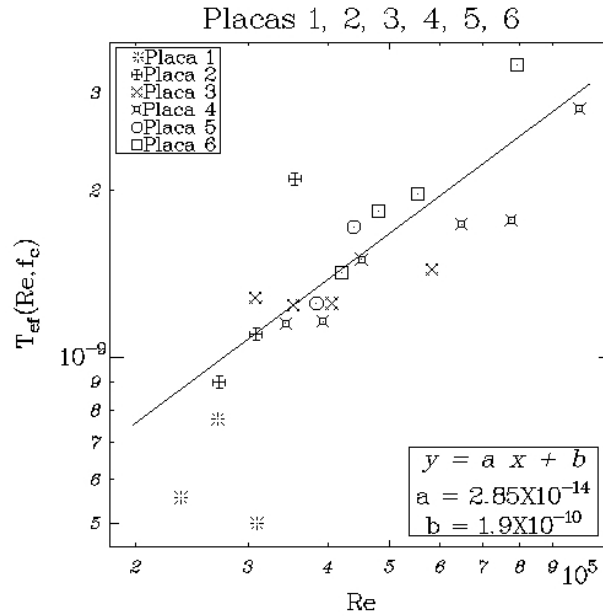


Figura 3.19: En el experimento **II**, el punto que representa el valor más pequeño de cada placa, se puede observar un incremento del valor de $T_{ef}(Re, f_c)$ respecto a Re y así mismo, la tendencia hacia valores mayores de Re .

Capítulo 4

Conclusiones

En el Capítulo 1 se estudió la teoría del movimiento Browniano desde el punto de vista de la Ecuación de Langevin

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a \frac{dx}{dt} + X$$

y mediante la correlación cuadrada de la posición, con la hipótesis de que una partícula interactúa con fuerza del tipo aleatorio, se dedujeron las dos formas del Teorema de Fluctuación Disipación

$$kT\mu(\omega) = \int_0^\infty \langle u(t_0)u(t_0 + t) \rangle e^{-i\omega t} dt$$

y

$$kTm\gamma[\omega] = \int_0^\infty \langle R(t_0)R(t_0 + t) \rangle e^{-i\omega t} dt,$$

que relaciona una función de la disipación con la temperatura absoluta. Se estudió el caso para sistemas totalmente fuera de equilibrio y estacionarios, en donde la relación con la disipación está dada por

$$\int_0^\infty \langle u(t)u(0) \rangle e^{i\omega t} dt = kT\mu(\omega) = -\frac{\omega^2}{2} \int_0^\infty \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle e^{i\omega t} dt.$$

En el Capítulo 2, fueron reportados los parámetros de la Ecuación de Langevin más un término de restauración del sistema. Para ello fue necesario calibrar transductores y caracterizar los

componentes de los experimentos. La información más relevante obtenida del sistema corresponde a la determinación de los parámetros disipativos para cada configuración experimental. Esto condujo a determinar una curva de ajuste sobre el balance de interacciones $|x_S(\omega) - x_{SB}(\omega)|/x_B(\omega)$ como

$$\Re\{H(\omega_r)^{-1}\} = \Re\{k - m\omega^2 + i\alpha\},$$

a partir de esta relación se determina el ancho de pico de resonancia del sistema

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 \pm \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\sqrt{km}}\right),$$

donde de despejar α se determina la algebraicamente la disipación.

En el Capítulo 3, el cálculo de la función de la temperatura efectiva $T_{ef}(\omega)$ fue hecho a través de la relación

$$4K_B T_{ef} = \frac{\langle x_S(\omega)^2 \rangle}{\alpha |H(\omega)|^2},$$

en donde se propone una equivalencia entre las dos Ecuaciones anteriores. En las curvas obtenidas de T_{ef} se encontraron dos regiones: una definida en un intervalo de frecuencias pequeñas, en donde la disipación no determina el comportamiento del sistema y otra región, en donde la disipación se vuelve un parámetro muy importante. Entre estas regiones se encontró un valor de temperatura efectiva crítica $T_{ef}(\omega)$. Al estudiar este valor con respecto a variables de conjunto como Re , mediante una ley de potencia

$$T_{ef}(Re, \omega) = T_{ef} Re^{-p},$$

en donde $p = -11/5$. El resultado de este análisis muestra la dependencia que tiene el sistema a variables de conjunto. Esto es muy importante, pues se puede establecer una relación clara entre las variables que rigen los valores medios de la intensidad de las interacciones y la actividad del sistema. Se puede observar que al aplicar $T_{ef}(\omega \cdot Re^{-1})Re^{-11/5}$ en cada temperatura efectiva calculada, todas las curvas tienden a juntarse en una sola curva. Esto puede ser visto como si se retirará la variable que describe la intensidad media. Sin embargo, para los datos computados en el Experimento II, se

puede notar que no en todas las gráficas este escalamiento se cumple. Para valores grandes de Re no se grafican las regiones antes mencionadas. En la Figura 4.1 se muestra una comparación entre los dos experimentos realizados. Se observa que para números de Reynolds grandes, pero para los cuales la turbulencia homogénea e isotrópica no se ha desarrollado, no se obtenga una representación de T_{ef} para una interacción del tipo aleatoria. Algo similar sucede en el Experimento I para números de Reynolds muy pequeños; el flujo tiene un perfil laminar y la interacción con el sistema es demasiado débil, sin embargo, la forma de la curva de T_{ef} aparenta tener una frecuencia crítica, pero al aplicar el exponente de escalamiento en Re , estas curvas no colapsan con las otras que corresponden a Re más grandes.

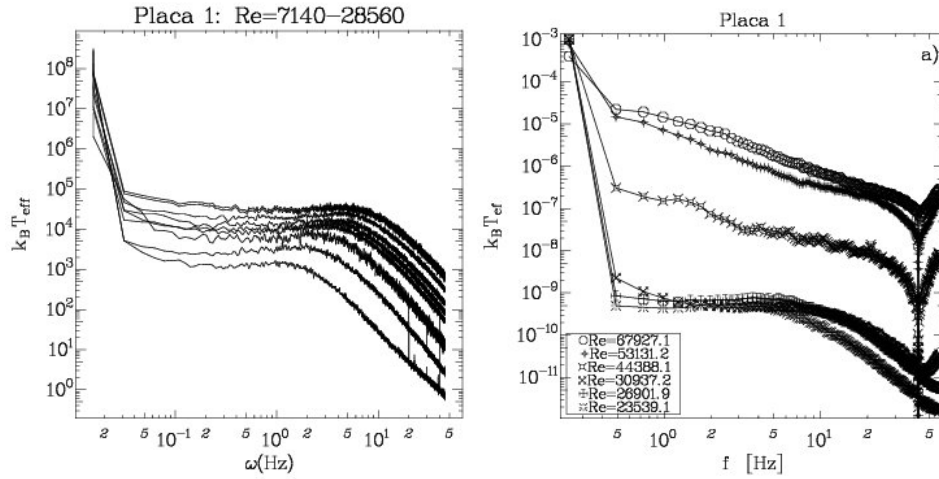


Figura 4.1: La gráfica que se encuentra del lado derecho corresponde a los valores de T_{ef} del Experimento I. En ella se puede observar que las curvas de T_{ef} se incrementan conforme lo hace el número de Reynolds. La frecuencia crítica que divide la región donde la disipación no influye en el comportamiento y donde sí. En cambio en la gráfica del lado izquierdo que corresponde al Experimento II, las curvas que corresponden a las interacciones más intensas no desarrollan una región en donde se pueda afirmar que la interacción en cierto intervalo de frecuencias fue aleatoria, tampoco es obvio que exista una frecuencia crítica que diferencie el comportamiento del sistema ante la disipación.

Otro resultado importante es que la función $T_{ef}(Re, \omega_c)$ mantiene una relación lineal con Re , exhibiendo en una misma curva que, para las placas de longitud transversal grande, se obtuvo que la T_{ef} computada fue mayor. Esto determina el termómetro para sistemas fuera de equili-

brío estacionarios que se mencionó en la Introducción de este trabajo de tesis. El termómetro de temperaturas efectivas muestra los máximos de excitación presentados en cada experimento.

Para concluir este trabajo de investigación, se debe decir que la temperatura efectiva es una función dependiente de la frecuencia, resultado del balance de tres interacciones que conforman un sólo sistema. Se puede pensar en una analogía con la Ley Cero de la Termodinámica, que relaciona pero que en cambio, las interacciones entre las partes del sistema no están en equilibrio. Sin embargo, la temperatura efectiva no tiene escalas de temperatura absoluta en Kelvin ni en otras escalas conocidas. El concepto de temperatura efectiva es ampliamente utilizado en sistemas de envejecimiento y sistemas microscópicos en donde la intensidad de fuerzas internas y externas aleatorias son determinantes en el deterioro o cambio de variables dinámicas. El uso de mediciones de las contribuciones de fuerzas aleatorias o que estén en función de alguna frecuencia en específico, en contacto con sistemas que presenten caos o aleatoriedad en su comportamiento es ampliamente extendido; otro ejemplo lo viene a dar la resonancia magnética con la cual, se conoce la composición química y las propiedades estructurales de la materia que está compuesto sistema de estudio. Conocer y poder cuantificar la actividad lograda al aplicar fuerzas que pudieran tener la naturaleza de $x_B(\omega)$, puede ser de gran ayuda para entender los mecanismos por los cuales, la disipación determina la evolución de una variable. El experimento presentado, pretende mostrar cómo el la variación de algunos parámetros determina el estado de la actividad del sistema.

4.1. Trabajo por realizar

En primer lugar, se deben mejorar los dispositivos experimentales para obtener mejores mediciones y así, relacionar las variables experimentales con mayor sencillez. Queda pendiente estudiar sistemas totalmente fuera de equilibrio influenciados por variables de conjunto dependientes del tiempo; una propuesta que se tiene, es hacer que la intensidad del chorro de aire que interactúa con el brazo de palanca, dependa del tiempo. Este tipo de estudios, deben ser aplicados a sistemas que

queden descritos en términos de variables microreológicas. Algunos de estos sistemas podrán ser modelados en el ordenador, posibilitando así, la creación de modelos comparativos que puedan marcar curvas de evolución y describan de forma aproximada, sistemas reales con estas características. Al respecto de experimentos donde intervienen flujos turbulentos, queda estudiar exhaustivamente cantidades como el campo magnético de interacción con el sistema, aún más, poder encontrar características del sistemas capaces de describir modelos universales basados en variables de conjunto. Esto podría determinar, una relación más evidente entre, sistemas totalmente fuera de equilibrio y parámetros de disipación.

Bibliografía

- [1] Jabbari-Farouji Sara, Daisuke M., Atakhomarrami M., Mackintosh F. , Schmidt F., Eiser E., Wegdam G. H., and Bonn D., *Fluctuation-Dissipation Theorem in an Aging Colloidal Glass*, Phys. Rev. Lett. PRL 98, 108302 (2007).
- [2] Lemons Don S. and Gythiel Anthony, *Paul Langevin's 1908 paper "Sur la Théorie du Mouvement Brownien"*, C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530-533 (1908).<http://emntserver.unl.edu/Mechanics-Pages/Scott-Whitney/>
- [3] Gallavotti Giovanni, *Fluctuation relation, fluctuation theorem, thermostats and entropy creation in non equilibrium statistical Physics*, I. N. F. N. and Fisica, Università di Roma 1. arXiv:cond-mat/0612061 v1 3 Dec 2006.
- [4] Louvet Antonin, *Mesures spectrales de la dissipation dans un écoulement turbulent*, M1 DSM, Stage 2006.
- [5] Mauger Alain, *Brownian motion in an aging medium*, Phys. RevE. 71.011109 (2005).
- [6] Löwe Henning, Müller Peter and Zippelius Annette, *Rheology of gelling polymers in the Zimm model*, J. Chemical Phys. 122, 014905 (2005).
- [7] Huber David E., *Computer simulation of the Rouse model*, University of Maryland, 2002.
- [8] Goldschmidt Yadin Y., *Large-time dynamics and aging of a polymer chain in a random potential*, Phys. Rev. E 74.021804 (2006).

-
- [9] R. Kubo M. Toda and, N. Hashitsume, *Statistical Physics Vol. II None equilibrium Statistical Mechanics*, Springer-Verlag. 1985.
- [10] Bleistein and Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, Inc. N. Y., 1986.
- [11] Marq and Naert, *Phys. of Fluids*, Vol 13 2001, p.105.
- [12] Edmond James D., *Thermodynamic work on a harmonic oscillator*, Am. J. Phys. 46 (3), Mar. (1978).
- [13] Wihtney Scott, *Vibrations of cantilever beams*, April 23, 1999, <http://emntserver.unl.edu/Mechanics-Pages/Scott-Whitney/>
- [14] Méndez Hugo, *Electrónica2000*. <http://www.electronica2000.com/>.
- [15] Blanchard Paul, Denavey Robert L. and, Hall Glen R., *Differential Equations*, Boston University, 1998.
- [16] Manual de Calibración **Buster**, *Tension-Compression Load Cells*, Modelos 8523/31, www.buster.com.
- [17] Guadarrama José M., *Entropía ϵ en Flujos Turbulentos*, Tesis para obtener el grado de Físico. Facultad de Ciencias UNAM, 2005.
- [18] Jonscher A. K., *Nature (London)* 267, 673 (1977).
- [19] Grenard V., Garnier N. and Naert A., *Effective Temperature of a stationary dissipative system: fully-developed turbulence*, arXiv:0704.0325v1, cond-mat.stat-mech 3 Apr 2007.
- [20] Laguës Michel and Lesne A., *Invariances d'échelle, Des changements d'états á la turbulence* Collection Échelles, Belin 75278 Cedex 06, 2003.
- [21] Lemons Don S., *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2002.

- [22] Naragajan Murali and Krishnan V.V., *A Primer for Nuclear Magnetic Relaxation in Liquids*, Wiley Periodicals, Concepts Magn Reson Part A 17A: 86 - 116, 2003.
- [23] *Basis Principles of FT NMR*, Gerd Gemmecker, 1999.
- [24] Cugliandolo L. F. and Kurchan J., *Analytical Solution of the Off-Equilibrium Dynamics of a Long-Range Spin-Glass Model*, Phys. Rev. Lett. Vol. 71 1993, p. 173-176.