UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

“FUNDAMENTOS DE MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE PLANES DE PENSIONES”

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA:

FERNANDO ROQUE MAYE

ASESOR:

M. en C. HARVEY SPENCER SÁNCHEZ RESTREPO

Naucalpan, Estado de México — Agosto del 2008

.
.
.

Dedico este trabajo a mi familia:
mis padres ***Demetrio*** *y* ***Angelica***
y mis hermanos ***Sergio*** *y* ***Miguel****.*

A ella, por como nunca la conocí,
y por como siempre la recordaré:
Abuela Paz*.*

.
.
.

Agradecimientos

Esta fué la parte más difícil de todo el trabajo. Tratar de mencionar a cada uno de aquellos que han hecho esto posible es difícil. Dicen que los agradecimientos deben ser cortos, esto es lo más corto que pude hacerlos. Espero no aburrirlos.

Antes que nada, quisiera agradecer a ese que es mi amigo y que me dió vida, **Dios**. Siempre he reconocido de que todo lo que tengo y lo que logro es gracias Él, y que a pesar de que siempre meto la pata Él sigue siempre ahi, aquí conmigo. *Gracias.*

A mis padres. A él, que siempre procuro desde un principio lo mejor para nosotros. Espero con esto regresarte un poco de lo mucho que me has dado. A ella, por siempre preocuparse por nosotros, estando lejos o cerca. A ellos, mis hermanos, por brindarle la alegría a mi vida, a pesar de todo.

A toda mi demás familia. A mis tias: Ana, Mari, Rufi, Cheli, Pau (lástima que te nos adelantaste) y a mis abuelos, porque cuando los visitaba, era el consentido. A mi tia Mati y mis primos Roberto, Jessica y Carlitos, admiro su paciencia al soportarme cada día que pasé con ustedes a lo largo de todo este tiempo.

A mis primos Emanuel, Moises, Adriana, Gil, Jeremias, Ivan, Edgar, Isrrael y Oralia por permitirme compartir y convivir no solo como familia, sino como amigos de infancia y complices de eternas locuras que ningún ser humano nos enseñó.

A mi escuela: la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, estoy orgulloso de formar parte de ella.

A aquellos con los que comparti cada momento en la escuela. A Mar, por ser quien eres, por ser como eres, por formar parte de mi vida, dejar huella en ella y *"enseñarme a ver el cielo más azul"*; a Viri, por darle ese toque alegre a mi vida, tanto en la ecuela como en el *msn*; a Lilian y Omar, por los consejos, compania y amistad; a Dulce, por brindarme un poco de tu compania y escucharme en momentos difíciles; A Jesús Guizar, por ser un gran amigo y por ayudarme a encontrar el camino perdido; también a los no menos importantes Ivan, Aldo y Edgar por su gran amistad y por lo importante que han sido.

En general quiero hacer mencion de todos aquellos amigos de la carrera: Lilian, Omar, Ruth, Aldo, Ivan, Edgar (Melon), Jesus Guizar, Raquel Alcantara, Ana, Lina, Carlos Peña, Ramses, Erick, Alberto. A ellas: Mar, Dulce, Viri, Gloria, Ale, Audry, Fab y Raquel Peña. A los cuates de estadística: Amilcar, Marco, Jair, Isaí, Juan (Rosa), Juan M. (Celestino), Felipe, Miguel M., Jesús, Gerardo, Víctor, Tom y Jerry.

A aquellos que compartieron un poco de su conocimiento en cada clase. A Harvey por asesorarme en este trabajo, por ser un gran amigo y por las clases recibias. A Mahil, por las clases pero sobre todo, por ayudarme a conocer un nuevo mundo. A los no menos importantes profesores de carrera: Alán, Eliud, Ricardo P, Beto, MariCarmen, Concepción, Robert, Patricio, Manuel Valadéz, Ignacio Arceo, Enrique Peña, Luna...

A los amigos de infancia: Federico, Adán, Héctor, Silvino, Beto, Gil. A ver cuando repetimos aquellos momentos de desvelo, risas e incluso lagrimas. A Lizbeth, Noemí, Araceli, Yolanda, Benancio, Benito, los *Amigos por Siempre*.

A los inolvidables amigos de la prepa: Denhi, Miriam, Paty, Araceli, Tlazantli, Ceci, Abril, Blanca, Yare, Ana, Belem, Karina, Pablo, Danny, Jesé Luis, Luis E., Ulises, Satu, Marino. Y si nos remontamos más hacia atrás, a los amigos de la secundaria: Alejandra, Maria del Mar, Elizabeth, Carmelina, Karina, Beatriz, Mapy, Arturo, Oscar, Alfonso, Jesús Miguel, Braulio, Samuel, Juan Carlos, Charly, Hugo y Omar, que de alguna forma u otra el convivir con ustedes me ha llevado a descubrir que en el camino de la existencia, el vivir es solo un momento, y el conocerlos es solo un instante, una fracción del tiempo, pero agradable ha sido. Si pudiese, lo volveria a vivir.

Este último párrafo de agradecimientos es muy especial, porque son personas que recien conocí y espero conocer aún más. De estas personas tengo muchísimo que aprender, y son estas personas que se han convertido mis en nuevos maestros. A Chris (ahora del otro lado del globo), Lety y Marco por darme la oportunidad de demostrar mis conocimientos y habilidades. Asimismo a mis compañeros de trabajo: *la Jefa* Carmelita, *doña* Ale, Miri, Yadhira, Mayra, César, Frank, Gonz (aunque ya no trabaje con nosotros), José, Poncho, Servando, Arturo y Salvador.

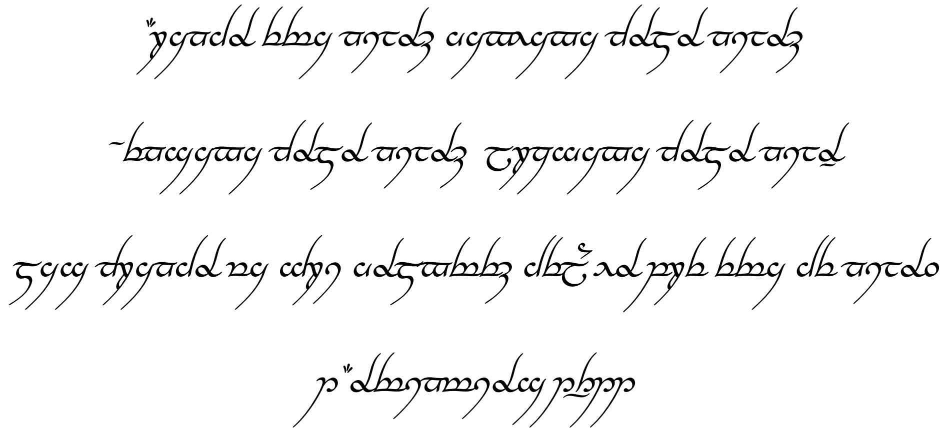
"Sólo se me ocurre decir GRACIAS,
y reconocer que no cabe en una vida mi gratitud."

F.R.M.

.

.

.



Cuando era niño, hablaba como niño,

pensaba como niño, juzgaba como niño;

mas cuando ya fui hombre, dejé lo que era de niño.

1 Corintios 13:11

.

.

.

Índice general

Introducción

Suponga que una compañía aseguradora promete pagar una determinada cantidad de dinero a una matrimonio adulto por el resto de sus vida sin importar el tiempo que estos vivan. Más aún, promete pagar dicha cantidad de dinero durante el tiempo en que al menos uno de los dos siga con vida. ¿Cómo es que alguien puede prometer algo así? Todo en esta vida tiene un precio, y la pregunta interesante es: ¿cuánto cuesta esta promesa el día de hoy?

Suponga que la compañía aseguradora en cuestión se compromete pagar \$1 anualmente mientras determinada persona siga con vida a una tasa de interés i por año. El valor presente actuarial de esta anualidad, denotada por $a_{\overline{K}|}$, es

$$a_{\overline{K}|} = \sum_{t=1}^{K} \frac{1}{(1+i)^t},$$

donde K es el número (entero aleatorio) de años de vida que le quedan a (x). La versión continua de esta expresión es

$$\bar{a}_{\overline{T(x)}|} = \int_0^{T(x)} e^{-\delta t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \ 1_{\{T(x) \geq t\}} \ dt,$$

donde $T(x)$ es la variable aleatoria que denota el tiempo futuro de vida de (x), la *función indicadora* $1_{\{T(x)\geq t\}}$ toma el valor de 1 cuando $T(x) \geq t$ y 0 en caso contrario[1] y δ es la fuerza de interés. Bajo estos supuestos $\bar{a}_{\overline{T(x)}|}$ es una variable aleatoria.

Imagine ahora que la companía aseguradora vende miles y miles de este tipo de planes de pensiones para individuos de edad x, por ejemplo. Algunos de estos individuos vivirán más de lo proyectado, en consecuencia la compañia aseguradora tendrá que

[1]En el Capítulo 1 se hace un estudio más a fondo de la variable aleatoria $T(x)$, además de algunas de sus propiedades, como por ejemplo $E[1_{\{T(x)\geq t\}}] = P[T(x) \geq t] = {}_tp_x$.

pagar más de lo inicialmente esperado. Otros individuos por el contrario vivirán menos de lo proyectado, por lo que el monto a pagar será menor. En promedio, la compañía aseguradora pagará un monto que puede ser calculado tomando la esperanza de la variable aleatoria $\bar{a}_{\overline{T(x)}|}$. La esperanza de esta variable aleatoria en su forma contínua es

$$\begin{aligned} E[\bar{a}_{\overline{T(x)}|}] &= E\left[\int_0^{T(x)} e^{-\delta t} dt\right] \\ &= E\left[\int_0^{\infty} e^{-\delta t} 1_{\{T(x) \geq t\}} \, dt\right] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} E[1_{\{T(x) \geq t\}}] \, dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_t p_x \, dt \\ &= \bar{a}_x. \end{aligned}$$

En este tipo de anualidad se garantiza un pago de \$1 durante determinado tiempo, a cambio de un pago por parte del individuo beneficiario de $\bar{a}_x$. Este es solo un ejemplo ilustrativo de como es que funcionan los planes de pensiones. Sin embargo, en la vida real las personas “no pagan” un monto inicial $\bar{a}_x$ para recibir una cantidad de dinero (pensión) por el resto de sus vidas. En vez de esto, se van haciendo aportaciones periódicas a un fondo, el cual se va acumulando durante el tiempo activo del individuo.

Una pregunta interesante para alguien interesado en contratar un plan de pensiones es: ¿quiere un plan de pensión que le pagué un 60 % o 70 % de su salario final por el resto de su vida, o prefiere un plan de pensión para el cual tenga usted que hacer aportaciones del 6 % de su salario anual y ponerlos en un fondo en el cual se vayan acumulando dichas aportaciones junto con los intereses que ésta genere mientras usted trabaja? Este es el principal dilema al escoger un plan de pensiones: ¿qué tipo de plan me conviene, el de Beneficios Definidos o uno con Aportaciones Definidas? Aunque el objetivo de este trabajo no es el de contestar esta pregunta, el Capítulo 3 define más formalmente estos tipos de planes de pensiones, además de exponer las principales ventajas y desventajas de cada tipo de plan.

Los modelos que se desarrollan en el presente trabajo son hechos bajo el esquema de Beneficios Definidos. El ejemplo ilustrativo dado anteriormente cae dentro de este esquema, ya que los pagos periódicos hechos al pensionado están definidos (\$1 cada año). Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, a cambio de estos pagos periódicos se debe hacer un pago por parte del pensionado de $\bar{a}_x$. Imagine a un recién jubilado de 65 años (que no se haya preocupado por formar un fondo de ahorro para el retiro) que quiera recibir beneficios definidos de, por ejemplo, \$4000 mensuales durante, digamos, 10 años. Si suponemos una tasa de interés mensual de 5 %, a cambio de dichos pagos el jubilado tendría que hacer un pago de casi \$80000! Este caso hipotético muestra dos situaciones: la importancia de preocuparse por formar un fondo para el retiro y que el modelo usado no es el adecuado, aún cuando el jubilado se haya preocupado por formar un fondo años antes. El problema es que se asumen bases netamente determinísticas. Por ejemplo, ¿Quién garantiza que el jubilado vivirá 10 años y no más?

Situaciones tales como el tiempo futuro de vida de un jubilado son considerados en los modelos a desarrollar. Los parámetros adicionales considerados en la valuación de un plan de Beneficios Definidos, entre otros, son:

- La tasa de interés
- La tasa de incremento salarial basada en información sobre prestaciones, antigüedad, salario, base de cotizaciones, etc.
- La tasa de inflación
- Las tablas de supervivencia, mortalidad e invalidéz.

Antes de abordar el tema de pensiones, en el Capítulo 1 se establecen los principios sobre los cuales es desarrollada la teoría actuarial. Asimísmo, se definen las variables involucradas en la modelación estocástica de las operaciones actuariales y como es que a partir de esta funciones se definen los Beneficios por decremento (Seguros de vida) y los Beneficios por permanencia (Anualidades). Muchas de las ideas del Capítulo 1, por ejemplo la función de supervivencia, son la base para la construcción de la Teoría Matemática de la Población que es tratada en el Capítulo 2. Asimísmo, se expone un método para representar la evolución de la población en el tiempo, se define una población estacionaria y como es que una población cambia a través de tiempo bajo determinados supuestos. Algunas de las ideas del Capítulo 2 se aplicarán en el Capítulo 3. Se parte de la definición de los tipos de planes de pensiones existentes y de su forma de financiamiento. Asimismo, se definen nuevas funciones tanto para vidas activas como para vidas retiradas y se analizan métodos de costeo individual y por grupo.

Antecedentes Históricos

Si bien los primeros indicios del pensamiento actuarial los encontramos en la ley romana en cuanto al sistema de justicia del valor del seguro, la historia de la ciencia actuarial comienza en el siglo XVII. Algunos tipos de seguros de vida se conocían con anterioridad pero las bases técnicas de dichos contratos eran normalmente arbitrarias. En el siglo XVII el seguro de vida era contemplado como un juego de azar en muchos casos; los contratos solían ser a corto plazo generalmente de duración inferior a un año. El problema de contratos de larga duración y el establecimiento de las reservas apropiadas requerían algo más que el juicio intuitivo y comercial de los primitivos aseguradores. Surge entonces la necesidad de establecer una teoría de la probabilidad, una estadística de la mortalidad y un instrumento matemático adecuado para ir confirmando, de esta forma, una nueva ciencia: la Ciencia Actuarial.

Uno de los principales pilares de la Ciencia Actuarial fue la Teoría de la Probabilidad. Las bases del análisis estadístico en el seguro fueron establecidos por pascal en 1654 en colaboración con el también matemático Pierre de Fermat. Fue, sin embargo, el inglés John Graunt el autor de las primeras tablas de mortalidad (1622), y surgen ya entonces ideas básicas, por ejemplo, el concepto de vida médica (Huygens).

Por su parte Halley (1693), elabora el primer trabajo conocido de tablas de mortalidad completas a partir de la hipótesis de estacionalidad de la población. Las tablas de Halley se utilizaron por la mayoría de las compañias inglesas creadas durante el siglo XVII.

Al aparecer el cálculo de probabilidades (siglo XVII), fundamenta matemáticamente el seguro. La existencia y estabilidad de las compañias de seguros durante dos siglos estuvo garantizada por el *modelo de Dodson*. Dicho modelo se basa en los siguientes principios:

a. La prima era función de la edad. Es decir, dos asegurados de la misma edad, en estado de salud normal, tenían la misma prima a igualdad de capitales asegurados.

b. En los contratos de duración plurianual se introducía el concepto de prima nivelada, es decir, el asegurado debía construir reservas matemáticas en función de la edad, capital garantizado y tiempo transcurrido de la operación.

c. En caso de recisión, el asegurado tenía derecho a la reserva matemática del contrato.

d. El cálculo de primas y reservas se basaba en un tipo de interés o interés técnico.

En las aplicaciones prácticas del modelo, Dodson hizo uso de las tablas de mortalidad de Halley.

La importante obra de Dodson fue publicada en tres volúmenes en los años 1747, 1753, 1755. En la línea de Dodson encontramos al galés Richard Price, constructor de la tabla de mortalidad conocida por Tabla de Northamton (1783) que fue ampliamente utilizada por las compañías aseguradoras británicas hasta bien entrado el siglo XIX en los seguros para caso de muerte, ya que las probabilidades de fallecimiento eran notoriamente altas debido a un cierto sesgo en la recogida de datos, y esta era la principal fuente de beneficios de los aseguradores en aquella época.

Posteriormente, Nicolás Titens, Jorge Barret y F. Bayly idearon los *símbolos de conmutación* que permitieron una agilización definitiva en el cálculo de las operaciones de seguro.

También en el siglo XIX la comprobación de la formación de beneficios sustanciales debida a la disminución de la mortalidad, de los gastos, al aumento de los rendimientos y a los derechos no reclamados, hizo surgir la institución de la *participación de beneficios.*

Pero es en la presente centuria cuando la Ciencia Actuarial se enriquece con las aportaciones de las matemáticas de los seguros no vida, la teoría estadístico-matemática de la estabilidad, la moderna teoría de la decisión y el enfoque sistémico en el seguro (sistema de información-decisión), que junto con la matemática de las operaciones del seguro de vida y pensiones, constituyen el contenido presente de nuestra disciplina.

En todo caso, los antecedentes históricos de la Matemática Actuarial no la presentan con auténtica autonomía sino, al igual que sucede con otras muchas ciencias, aparece como una aplicación de las Matemáticas y de la Estadística.

Concepción Interdisciplinaria

El objeto de la Matemática Actuarial lo constituye el estudio cuantitativo de las operaciones de seguros (y financieras, en general), a fin de optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, teniendo en cuenta que las citadas operaciones se llevan a cabo por un ente asegurador (o financiero) que desarrolla su actividad en un entorno económico-social.

En consecuencia, forma parte del objetivo de nuestra disciplina:

- El cálculo de las primas, reservas, valores garantizados, etc., en las operaciones de seguro de vida.
- El análisis cuantitativo de los sistemas actuariales en los seguros colectivos, sociales y planes de pensiones.
- Estudio de los problemas de tarifación y reservas técnicas en los seguros no vida.
- La determinación de las magnitudes de estabilidad del ente asegurador (reaseguro, etc.), y el análisis de su solvencia.

Lógicamente, los modelos y técnicas actuariales elaborados por nuestra disciplina son susceptibles de aplicación a todas aquellas operaciones e instituciones financieras (bancos, fondos de inversión, etc.) en donde se den los mismos principios científicos.

Fundamento económico de la Matemática Actuarial

El primer antecedente real de esta disciplina lo constituyen las *operaciones de seguro* cuya naturaleza es eminentemente económica. Estas operaciones tienen su origen en convenios (contratos) con lo cual adquieren una matiz que las diferencia de aquellos fenómenos cuyo acontecimiento es ajeno a la voluntad humana. En este sentido el antecedente real de las *operaciones* es de naturaleza económica-jurídica.

Pero estas operaciones no se pueden llevar a cabo en forma aislada (idea mutualista del seguro) y se necesita la constitución de un ente asegurador. Dicho ente, con independencia de su naturaleza jurídica (sociedad anónima, mutualidad, cooperativa de seguros) constituye una *unidad* económica u organización en funcionamiento. Es decir, aquí también aparece el aspecto económico del ente asegurador.

Por ora parte, no se puede concebir una empresa actuando sin un marco sobre el que desarrollar su actividad, que origine problemas (mercado del seguro directo, del reaseguro, etc.) que también son de naturaleza económica.

Fundamento Financiero

El mismo se presenta, en primer lugar, en el estudio de las operaciones actuariales ya que las mismas tiene su origen en contratos cuya duración marca una dimensión temporal durante la cual los capitales que intervienen están sometidos al principio de rentabilidad. Dentro de estas operaciones se tiene los *seguros ordinarios de vida* que, normalmente, son de larga duración y la valoración de los capitales se hacen aplicando la capitalización y actualización compuesta. En otros casos (como los seguros no vida), son operaciones a corto plazo por lo que se podrá utilizar la capitalización y el descuento simple.

También aparece el aspecto financiero al considerar la actividad del ente asegurador, especialmente en lo referente al cálculo de las reservas técnicas, en los sistemas de participación de beneficios por rentabilidad, etc.

Fundamento Estocástico

El aspecto aleatorio se presenta, en la Matemática Actuarial, en diferentes grados. En primer lugar, en el estudio de los fenómenos actuariales (supervivencia y mortalidad, siniestralidad en los seguros no vida) surgen problemas de elaboración y estimación de modelos de naturaleza estocástica.

En el estudio de las operaciones se presenta también el aspecto aleatorio ya que el pago de las prestaciones y aportaciones consiste en capitales financieros ligados al acaecimiento de sucesos. Las operaciones actuariales vienen modeladas por *procesos financiero-estocásticos*.

Al estudiar la estabilidad y solvencia del ente asegurador también se presenta el problema en términos aleatorios toda vez que la diferencia entre los ingresos (valores medios) y los gastos (siniestralidad) es una variable aleatoria. Es lo que va a dar lugar a la llamada Matemática de la estabilidad.

Cuando se contempla la actividad del empresario de seguros en relación en el mercado también se presenta un *grado de incertidumbre* que exige, en muchos casos, recurrir al concepto de probabilidad subjetiva para fundamentar lo que se llama Matemática de la Decisión.

En síntesis, se trata de una disciplina que se autonomiza por razón de su objetivo, por lo que, tanto en el planteamiento de los problemas como en su construcción unitaria se necesitan criterios económicos. Además, dentro de su ámbito inciden aspectos teóricos, técnicos y de decisión que exigen concepciones interdisciplinares para su estudio (de carácter financiero y estocástico principalmente, como acabamos de ver).

Capítulo 1
El Proceso de las Operaciones Actuariales

1.1. Principio de Equivalencia

La operación actuarial tiene un antecedente económico-jurídico ya que se origina por un convenio (en la esfera del Derecho, un contrato) gracias al cual podemos anticipar su desenvolvimiento futuro. Por eso hablamos de operaciones y no de fenómenos cuyo acaecimiento no depende de la voluntad humana.

Elementos esenciales de la operación

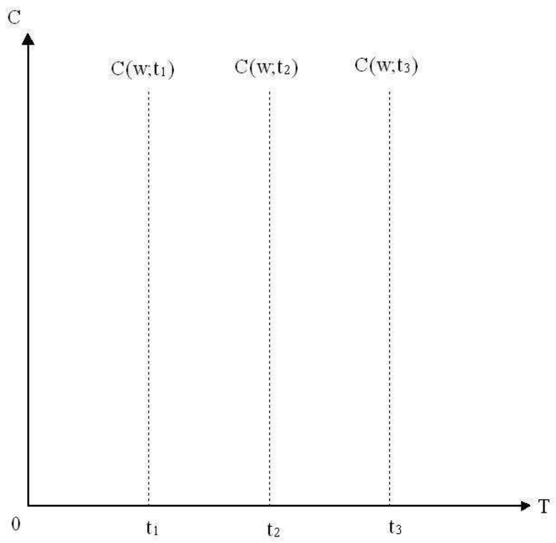
a. *Duración dividida en períodos o momentos (Temporalidad)*.- Esta división tiene también un origen jurídico para evitar que las voluntades estén ligadas para períodos excesivamente largos y puedan romper el vínculo contractual al final de cada período. No hay que confundir estos períodos (por ejemplo, años) con la duración total (por ejemplo, 20 años).

b. *Sucesos*.- Los sucesos que, de acuerdo con el convenio, dan lugar a las aportaciones (primas) y las prestaciones (pago del capital asegurado).

c. *Capitales financiero-dinámicos asociados a estos sucesos*.- Capital en dinero sometido al principio del rédito o interés.

Definición. Conjunto de capitales financieros dinámicos asociados a los sucesos que en los distíntos periodos o momentos de su duración dan lugar al pago de las prestaciones o aportaciones respectivas.

De esta definición se desprende que se trata de «procesos financiero-estocástico». Gráficamente resulta:



En el eje de las abscisas se representa la *dimensión temporal de la operación y su división de periodos.*

$$t_1 < t_2 < t_3 ... \qquad t_i \in (0, T).$$

Se consideran los *sucesos* $\boldsymbol{w}$ *de la operación formando un conjunto* Ω. Es decir:

$$w \in \Omega.$$

Por ejemplo,

$$w_1 \equiv \text{Supervivencia del asegurado}$$

$$w_2 \equiv \text{Fallecimiento del asegurado.}$$

El conjunto Ω constituye una clase completamente aditiva, o campo de Borel, sobre el que se define un álgebra σ. Además, Ω es un espacio medible ya que a cada $w \in \Omega$ le asignamos una medida que es precisamente su probabilidad, tenemos definida una estructura estructura estocástica (Ω, σ, P), donde

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv \text{Colección de sucesos} \\ \sigma &\equiv \text{Álgebra de los sucesos} \\ P &\equiv \text{Probabilidad de los citados sucesos} \end{aligned}$$

Los capitales asociados a cada suceso en t los representamos por:

$$C(w;t).$$

El proceso financiero estocástico al que se asocia la operación actuarial es:

$$\{C(w;t) \quad ; \quad t \in T\},$$

en donde aparecen los *dos elementos básicos*:

a. *el financiero* (capitales dinámicos)

b. *el estocástico* (probabilidades asociadas a los sucesos).

Cabe distinguir dos subprocesos:

1. el de las aportaciones o primas

$$\{P(w;t) \quad ; \quad t \in T\}\}$$

2. el de las aportaciones o pagos por siniestro

$$\{K(w;t) \quad ; \quad t \in T\}\}$$

siendo P primas y K capitales que constituyen las aportaciones.

Principio de equivalencia estática

Este principio considera a las operaciones en su total duración. Existe equivalencia actuarial cuando el valor actual de las aportaciones es igual al valor presente de las prestaciones, calculados estos valores presentes por medio de la esperanza matemática de los correspondientes capitales que definen el proceso financiero-estocástico. Es decir:

Valor presente actuarial del subproceso de aportaciones

$$P(0) = \sum_{t=t_1}^{t_n} E[P(w;t)] \cdot v^t,$$

donde

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t} \quad \text{y} \quad E[P(w;t)] = \sum_i P(w_i;t)p(w_i),$$

donde $p(w_i)$ es la probabilidad de ocurrencia del evento $w_i \in \Omega$.

En la valoración presente del proceso, como los capitales vienen asociados a sucesos aleatorios son también variables aleatorias, por lo que se usaran sus esperanzas matemáticas o valores medios.

Valor presente actuarial del subproceso de las aportaciones

$$K(0) = \sum_{t=t_1}^{t_n} E[K(w;t)] \cdot v^t,$$

siendo

$$E[K(w;t)] = \sum_i K(w_i;t)p(w_i).$$

El principio de equivalencia estática establece que

$$P(0) = K(0),$$

es decir,

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} E[P(w;t)] \cdot v^t = \sum_{t=t_1}^{t_n} E[K(w;t)] \cdot v^t.$$

Este principio ha servido de base en la matemática actuarial clásica y tiene su origen en la contemplación de la operación durante la total duración del contrato. De aquí la importancia que tuvo el cálculo y tabulación de los valores presentes (anualidades y seguros) para después estudiar las operaciones (cálculo de primas y reservas).

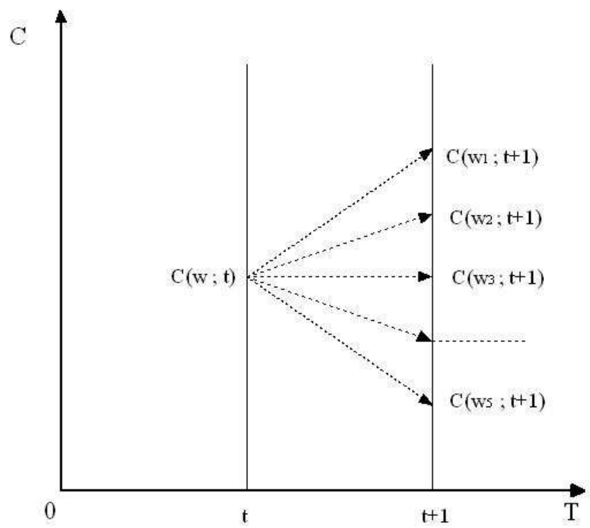
Más adelante, al tocar el tema de Primas sobre Beneficios, se redefinirá este principio partiendo de la variable aleatoria de pérdida L, por lo que el principio de equivalencia tomará la forma

$$E[L] = P(0) - K(0) = 0.$$

Principio de equivalencia dinámica

En este caso se considera la operación en los distintos períodos en que se va desenvolviendo. En la figura siguiente aparecen los capitales financieros $C(w';t)$ y $C(w;t)$ asociados al período $(t, t+1)$.

Situados en el *momento t* y en *un estado dado del proceso* (por ejemplo, que el asegurado viva) el primero será una *magnitud cierta* y el segundo una *variable aleatoria*. Siendo i el *tipo de interés en este período*, se tiene:



$$C(w';t)(1+i) = E[C(w;t+1)] = \sum_{i=1}^{n} C(w_i;t+1)p(w_i)$$

Dadas las condiciones iniciales (es decir, $C(w;t_0)$) podemos conocer la situación de la operación en función de su pasado (método retrospectivo). Si además, se dan las condiciones finales (es decir, $C(w;t_n)$) se puede conocer la situación en función del futuro (método prospectivo). Además se obtiene, como caso particular, el principio de equivalencia estática. Es decir, la equivalencia estática es un caso particular de la equivalencia dinámica cuando se dan, además, las condiciones de contorno, es decir, las condiciones iniciales y finales.

Dado que en este principio también se toma la esperanza matemática de los capitales financiero-estocástico, el asegurador debe dar entrada a las magnitudes de estabilidad (recargo técnico, etc.), para hacer frente al riesgo derivado de las fluctuaciones aleatorias de siniestralidad.

Como aplicación a este principio se tienen la valuación reservas matemáticas de un seguro. Los principales métodos, aunque no los únicos, son los ya mencionados: método prospectivo y retrospectivo. Dichos métodos se tratarán en el apartado correspondiente a Valuación de la Reserva Matemática.

1.2. Principios Actuariales

La Ciencia Actuarial, el fundamento de la profesión y la praxis actuarial, es una *ciencia aplicada* y, como tal, su teoría se desarrolla sobre ciertas observaciones del mundo real.

La práctica de la profesión actuarial se encuentra basada en:

- **Principios,** es decir, declaraciones fundamentadas en la observación y la experiencia. Los principios estarán sujetos a cambio sólo si ocurren cambios fundamentales en nuestro entendimiento respecto del mundo observable y han sido agrupados según su materia básica.

  Los principios estadísticos y los económicos y financieros se han tomado prestados de disciplinas relacionadas. La modelación actuarial y los principios de administración del riesgo delinean los fundamentos de la profesión que son comunes a todas las áreas de práctica.

- **Metodologías,** las cuales son descripciones de las aplicaciones de los Principios en áreas de práctica definidas. Dado que las Metodologías representan el estado del arte, estas son susceptibles al cambio constante de acuerdo a las nuevas técnicas desarrolladas en varias de dichas áreas.

- **Estándares de práctica** o reglas de conducta, incluyendo, en particular, recomendaciones de cómo y cuando debe emplearse el juicio profesional. Algunos estándares son prescripciones de conducta profesional y usualmente estas no se encuentran sujetas a cambio; algunos otros involucran los juicios necesarios para aplicar los Principios o las Metodologías en algún caso particular y van cambiando conforme lo hacen las circunstancias prácticas.

1.2.1. Principios Estadísticos

Definición: Los *fenómenos* son sucesos que pueden ser observados.

Definición: Un *experimento* es una observación de un fenómeno dado, realizado bajo condiciones específicas. Los datos que arroja un experimento son llamados *resultados*.

Definición: Un *evento* es un conjunto de uno o más posibles resultados.

Principio 1.1 (Regularidad Estadística). Los fenómenos existen como tales y, si una secuencia de experimentos independientes es realizada bajo las mismas condiciones particulares, la proporción de ocurrencias de un evento dado se estabiliza conforme el número de veces que se repite el experimento se va haciendo más grande.

Definición: Se dice que un fenómeno presenta *regularidad estadística* si en el mismo se aplica el principio 1.1.

Definición: La *Probabilidad* es una medida que toma valores entre cero y uno para expresar la posibilidad de ocurrencia de un evento.

Definición: Una relación definida sobre un conjunto de eventos que asigna un número real cada posible resultado es llamada *variable aleatoria*.

Definición: Al promedio ponderado de los valores numéricos que puede tomar una variable aleatoria se le llama *valor esperado* de la variable aleatoria.

Discusión. Si un fenómeno muestra regularidad estadística, una estimación de la probabilidad de un evento asociado con el fenómeno es la proporción de ocurrencias del evento en una larga secuencia de experimentos. Sin embargo, existe la posibilidad de evaluar la probabilidad de un evento subjetivamente usando otros criterios.

Definición: Un *modelo científico* es una abstracción y representación simplificada de un fenómeno dado.

Definición: Un *modelo matemático* es un modelo científico cuya representación está dada en términos matemáticos.

Principio 1.2 (Modelación Estocástica). Un fenómeno que muestra regularidad estadística puede ser descrito a través de un modelo matemático que puede estimar, dentro de cualquier grado de exactitud, la probabilidad de un evento dado en una secuencia de experimentos suficientemente grande.

Definición. Un modelo que satisface el principio 1.2 es llamado *modelo estocástico*.

Discusión. Un modelo estocástico no puede predecir con exactitud el resultado de un experimento antes de que este sea realizado, dicho modelo puede estimar el valor esperado de una variable aleatoria asociada al fenómeno, toda vez que se compruebe que los valores que resultan de la secuencia de experimentos son convergentes.

Definición: Un *modelo determinista* es un modelo estocástico simplificado en el cual la proporción de ocurrencia de un evento dado, estimada por el modelo estocástico, es supuesta con probabilidad uno.

Discusión. El aspecto estocástico de un modelo puede no ser relevante a la aplicación dada; en tales situaciones se puede utilizar un modelo determinista. Se puede decir entonces que un modelo determinista es un modelo estocástico con un grado de incertidumbre de cero.

La incertidumbre asociada con un modelo estocástico tiene dos fuentes distintas:

i) La variabilidad inherente al fenómeno, y

ii) El conocimiento incompleto y/o la imprecisa representación de la probabilidad de los conjuntos alternativos de resultados.

Algunas veces a estos conceptos también se les llama "proceso de riesgo" y "parámetro de riesgo", respectivamente. Los términos "riesgo" e "incertidumbre", también han sido usados para este fin. Sin embargo, aquí a estos términos se les ha asignado un significado distinto.

Los modelos estocásticos pueden estar basados en resultados obtenidos de experimentos previos o pueden utilizar suposiciones iniciales acerca de las probabilidades de varios conjuntos de resultados los cuales pueden ser sistemáticamente revisados conforme se va obteniendo más información sobre dichos experimentos.

Antes de que un modelo sea utilizado, el mismo debe ser verificado en cuanto a su consistencia con la información disponible. A este proceso comúnmente se le denomina "validación".

Definición: Se dice que un modelo matemático es *válido dentro de un grado específico de exactitud* relativo a ciertos resultados observados, si éste reproduce estos resultados dentro de dicho nivel de confianza.

Discusión. Los resultados observados, incluyendo el fenómeno representado por algún modelo, pueden no estar disponibles o no ser suficientemente cuantiosos como para permitirle al modelo ser validado dentro de algún grado específico de exactitud.

En este caso, la utilidad del modelo puede ser establecida inicialmente por comparación con los resultados observados de un fenómeno similar pudiendo además esperarse que estos "modelos aprobados" pudieran ser validados si se dispusiera de suficientes datos.

Por supuesto, no todos los aspectos observables del fenómeno modelado deben ser reproducidos para que éste sea válido, para efectos de validación basta con que los datos provenientes de las variables de interés sean reproducidos de manera eficiente.

Definición: Un modelo matemático es *potencialmente válido* si éste produce resultados que son consistentes con las observaciones disponibles del fenómeno modelado y de fenómenos similares y, además, tiene la capacidad de ser validado con respecto a los resultados observados cuando los datos disponibles son suficientes.

Discusión. Las definiciones estadísticas y principios de esta sección son importantes para los actuarios por dos razones:

i) En los fenómenos estudiados por los actuarios es usual suponer que los mismos muestran regularidad estadística. En el mundo real los experimentos no pueden ser reproducidos exactamente. Aún así, el modelo idealizado que sirve como una representación aproximada de algún fenómeno del mundo real posee la propiedad de regularidad estadística.

ii) Los modelos estocásticos (entre otros modelos matemáticos) se encuentran entre las herramientas actuariales más importantes, debido a que ellos son usados para obtener conclusiones acerca de los fenómenos del mundo real. Específicamente, un modelo estocástico puede ser usado para hacer declaraciones de naturaleza probabilista relacionadas con uno o múltiples experimentos.

1.2.2. Principios Económicos y Financieros

Definición: Un *bien económico* es algo que tiene valor para una persona y que puede ser intercambiado por alguna otra cosa.

Definición: El *dinero* es una medida de intercambio que puede ser negociado por bienes económicos.

Definición: La cantidad de dinero que una persona esta dispuesta a comerciar por un bien en un punto específico del tiempo es el *valor monetario actual* para dicha persona.

Principio 2.1 (Diversidad de Preferencias). Diferentes personas pueden asignar en un mismo momento distintos valores monetarios al mismo bien económico.

Principio 2.2 (Preferencia Temporal). El dinero tiene un valor en el tiempo implica que las personas tienden a preferir dinero en el presente que a recibir la misma cantidad de dinero en el futuro.

Discusión. La preferencia temporal es comúnmente representada por una tasa de interés, o un sistema de tasas de interés, usados para descontar pagos futuros o desembolsos de dinero de tal manera que estos puedan ser comparados con otros montos de dinero en el presente. Las representaciones apropiadas de las preferencias en el tiempo deberán ser cubiertas por alguna metodología.

Definición: Un *flujo de efectivo* es la recepción o desembolso de una cantidad de dinero (o de un bien económico con un valor monetario) en cierto punto en el tiempo. Se dice que un flujo de efectivo es *contingente* si el monto o la ocurrencia del mismo depende de la realización de un evento sobre el que no se tiene certidumbre.

Definición: Un *beneficio* es dinero o bienes económicos o un derecho para recibir en el futuro un flujo de efectivo; una *obligación* es el deber de proporcionar un flujo de efectivo.

Principio 2.3 (Modelación del Valor Presente). Existe un modelo matemático que puede ser utilizado para estimar el valor actual monetario que alguna persona asignaría a cualquier flujo futuro de efectivo.

Definición: Un modelo descrito por el principio 2.3 es llamado un *modelo de valor presente*. La estimación del valor monetario actual de un flujo futuro de efectivo, dado un modelo de valor presente bajo ciertas suposiciones respecto a las condiciones económicas futuras, es llamado el *valor presente* del flujo de efectivo relacionado con dichas hipótesis. Tal suposición, hecha con respecto a las condiciones económicas futuras, es llamada *escenario*.

Discusión. Si existe incertidumbre con respecto a las condiciones económicas futuras, la estimación hecha por un modelo de valor presente puede representar valores esperados. Tales valores esperados pueden ser pensados como promedios de valores presentes bajo distintos escenarios. En este caso, el valor presente puede verse como una variable aleatoria cuyo valor esperado es el valor monetario actual.

1.2.3. Principios de Modelación Actuarial

Definición: Un *riesgo actuarial* es un fenómeno que tiene consecuencias económicas y que está sujeto a la incertidumbre con respecto a una o más *variables actuariales de riesgo*: ocurrencia, frecuencia y severidad.

Principio 3.1 (Modelación de los Riesgos Actuariales). Los riesgos actuariales pueden ser modelados estocásticamente basándose en suposiciones con respecto a las probabilidades que afectarán a las variables actuariales de riesgo en el futuro, incluyendo suposiciones con respecto a los escenarios.

Definición: Un modelo de valor presente descrito por el principio 3.1 es llamado un *modelo actuarial*. Las suposiciones sobre las cuales esta basado un modelo actuarial se llaman *hipótesis actuariales*.

Discusión. Un modelo actuarial generalmente debe incluir un modelo de valor presente si el mismo intenta determinar valores económicos. Un modelo de valor presente incluido en un modelo actuarial esta basado en suposiciones concernientes a aspectos del entorno económico futuro, tales como tasas de interés y de inflación. El modelo de valor presente puede reflejar las preferencias del actuario que construye el modelo. Sin embargo, en ciertas situaciones, la opción del actuario queda restringida por regulaciones u otros estándares.

Históricamente, los actuarios han usado modelos actuariales deterministas. Tales modelos deterministas pueden, sin embargo, ser de naturaleza dinámica, reflejando las suposiciones del entorno futuro. Por ejemplo: las suposiciones para un seguro de vida y anualidades están a menudo en función de las tasas de interés del mercado.

En años recientes, se han vuelto indispensables los modelos basados en distribuciones de probabilidad no triviales para las variables actuariales de riesgo. Las metodologías actuariales no pueden eludir tales modelos estocásticos, al igual que los modelos deterministas. La elección del modelo y el grado de sensibilidad requerida están también sujetos a ciertos estándares.

Es valioso recordar que la validez de un modelo matemático depende de su capacidad para reproducir los datos observados. Al transcurrir el tiempo, el grado de exactitud del modelo puede cambiar conforme se vayan realizando más observaciones.

Principio 3.2 (Validación de Modelos Actuariales). El cambio a través del tiempo en el grado de exactitud de un modelo actuarial validado inicialmente depende de los cambios en:

a) la naturaleza del derecho para recibir o el deber para realizar un pago;

b) los diversos entornos (regularidad, social, financiero, económico, etc.) dentro de los cuales ocurre el evento modelado y

c) la suficiencia y calidad de los datos disponibles para validar el modelo.

Definición: El *valor actuarial* de un flujo de efectivo futuro que es contingente en las variables actuariales de riesgo es el valor presente desarrollado por un modelo actuarial asociado con dichas variables.

Discusión. Recuerde que el valor presente y el valor actuarial de un flujo futuro de efectivo son, en general, variables aleatorias. El valor actuarial de cualquier beneficio u obligación es determinado por el valor actuarial de los flujos de efectivo asociados, incluyendo dinero actualmente entregado. En general, el componente de los flujos de efectivo no sólo tiene valores inciertos sino que además no son independientes unos de otros.

Principio 3.3 (Combinaciones de Flujos de Efectivo). El grado de incertidumbre del valor actuarial de una combinación de flujos de efectivo refleja la incertidumbre que afecta a cada variable actuarial de riesgo y al proceso de combinación.

1.2.4. Principios de Administración del Riesgo

Definición: Una persona u objeto involucrado en un evento asociado con un riesgo actuarial es llamado *objeto de riesgo* o simplemente *riesgo*. La *identificación de riesgos* es un proceso que determina si una persona o un objeto es un riesgo sujeto a algún riesgo actuarial dado.

Definición: El *control de riesgos* es un proceso que reduce el impacto de una o más de las variables actuariales de riesgo asociadas con el riesgo actuarial.

Definición: La *transferencia o financiamiento de riesgos* es un mecanismo que provee flujos de efectivo que son contingentes respecto a la ocurrencia de un evento asociado con el riesgo actuarial y pretende resarcir las indeseadas consecuencias económicas.

Definición: Un *sistema de administración de riesgos* es un acuerdo que involucra una o más identificaciones de riesgo, control y transferencia o financiamiento del mismo.

Definición: Un *sistema de seguridad financiero* es un acuerdo para el financiamiento del riesgo en el cual una persona asume la obligación de hacer un pago (o una serie de pagos) llamado *beneficio* (o *beneficios*) y cuya intención es compensar a una segunda persona por las inconvenientes consecuencias económicas que pueda experimentar, a cambio de uno o más montos denominados *contribuciones*.

Discusión. El término persona puede indicar un ser humano, una sociedad u otra entidad. El término sistema de seguridad financiero aplica a los seguros, anualidades, jubilación y sistemas financieros para el cuidado de la salud.

En general, hay un periodo de tiempo entre la fecha en que una indemnización es recibida bajo el sistema de seguridad financiero y la fecha en que el beneficio se paga. Durante este periodo, al menos parte de las contribuciones pueden ser invertida en una o más tipos de inversiones.

Para las anualidades y sistemas de jubilación, se proporcionan los beneficios con la intención de reducir la incertidumbre con respecto a la disponibilidad de ingresos durante una parte o la totalidad del tiempo de vida de una o más personas. El evento referido en las definiciones anteriores es la supervivencia a una sucesión de edades especificadas al comienzo del ingreso o la fecha de jubilación.

Definición: Se dice que un evento es *asegurable* si:

a) se encuentra asociado con un fenómeno que exhibe regularidad estadística;

b) es contingente con respecto al número de ocurrencias, frecuencia y severidad;

c) el hecho de su ocurrencia es definitivamente determinable;

d) su ocurrencia produce consecuencias económicas indeseables para una o más personas; y

e) su ocurrencia futura, periodicidad y severidad no son conocidas ni controlables por las personas.

Se dice que una persona tiene un *interés asegurable* en un evento asegurable si la magnitud de la ocurrencia del evento crea una necesidad económica que involucra a dicha persona.

Discusión. Una póliza de seguros puede pagar beneficios relacionados con sucesos que no encajan con la definición de evento asegurable. Por ejemplo, un plan de salud de grupo puede pagar por cirugía o exámenes médicos anuales. En tales casos, se puede aplicar porque estos eventos se desprenden de otros que si son eventos asegurables, o puede ser que mientras el evento no es asegurable en un individuo, éste es asegurable en un grupo, siempre que el número de participantes que utilizarán el beneficio no sea conocido de manera precisa.

Mientras una póliza de seguros o contrato pueda combinar los pagos que son resultado de eventos asegurables y otros pagos, puede ser deseable distinguirlos entre ellos.

El término "necesidad económica" cubre una amplia gama. Por ejemplo: el bienestar futuro de la familia de una persona es una necesidad económica que involucra a la misma, de igual manera el incremento en la longevidad de un grupo de jubilados puede crear una necesidad económica para el responsable de un plan de pensiones.

Otro aspecto importante para los planes de seguros es la clasificación de los riesgos asociados con el riesgo actuarial. En este contexto, el término "riesgo" es comúnmente usado para referirse al asunto del riesgo.

Principio 4.1 (Clasificación del riesgo). Para un grupo de riesgos asociado con un riesgo actuarial dado, es posible identificar las características de los riesgos y establecer un conjunto de clases basado en dichas características para que:

a) Cada riesgo sea asignado en una y sólo una clase; y

b) las probabilidades de ocurrencia, frecuencia y severidad puedan asociarse con cada clase de manera que resulte en un modelo actuarial que, para algún grado de exactitud, es:

   1. válido con respecto a los resultados observados para cada clase o grupo de clases que tengan suficientes datos disponibles; y
   2. potencialmente válido para cada una de las clases.

Definición. Un conjunto de clases, características y reglas para usar las características asignadas a cada clase, de tal manera que las condiciones del principio 4.1 se satisfacen con respecto a un grupo dado de riesgos, es llamado *sistema de clasificación de riesgos*. Dichas clases son llamadas *clases de riesgos* y las reglas usadas para asignar una clase a cada uno de los riesgos son llamadas *reglas para suscripción*.

Discusión. Un sistema de clasificación que no puede ser asociado con un modelo actuarial que puede ser validado con respecto a los resultados observados, cuando dichos datos están disponibles, no es un sistema de clasificación de riesgos.

Un modelo actuarial asociado con un sistema de clasificación de riesgos reproducirá estrechamente cualquiera de los valores observados comparables, para grupos apropiados de clases, dentro de algún grado específico de exactitud. Por ejemplo: si el evento asegurable es la ocurrencia de muerte dentro de un año y las clases estaban determinadas por la edad actual, año de la póliza, sexo, estatus fumador/no fumador, estado de salud y ocupación, el resultado sería la asociación con cada edad (y quizás, año de la póliza) de la probabilidad de muerte dentro de un año. El modelo asociado con este sistema de clasificación es una tabla de mortalidad. Para ser un modelo válido, la tabla de mortalidad debe ser consistente con las tasas de muerte observadas para dichos grupos de clases para los cuales existen suficientes datos disponibles.

Un sistema de clasificación de riesgos se define en un punto dado del tiempo. Su continua adecuación para un uso específico depende de la disponibilidad continua de un modelo actuarial válido asociado. Debe notarse que diferentes eventos asegurables pueden requerir diferentes sistemas de clasificación de riesgos.

Definición: Un Sistema Asegurador es un sistema de seguridad financiero en el cual:

a) Los riesgos actuariales a ser financiados surgen de eventos asegurables;

b) Los objetos de riesgo se agrupan de acuerdo a un sistema de clasificación de riesgos;

c) Los beneficios pagables están relacionados con el interés asegurable;

d) El valor actuarial de los beneficios pagables, desarrollados por un modelo actuarial asociado con el sistema de clasificación de riesgos es finito; y

e) Las contribuciones son consistentes con el valor actuarial de los beneficios asociados.

Definición: Un sistema asegurador es *obligatorio* si todas las personas en un grupo o sociedad son requeridas, de manera legal o por otra vía, a participar; de otra manera se dice que es *voluntario*.

Definición: Un sistema de seguro es *personal* si la decisión de participar se lleva a cabo por cada asegurado de forma individual. Si la decisión es hecha en nombre de un grupo, entonces se trata de un *sistema de seguro de grupo*, aunque la participación puede ser obligatoria o voluntaria para los miembros del mismo; y se trata de un *sistema de seguridad social* si todos los miembros de la sociedad (o un subgrupo definido de la sociedad) son elegibles para participar.

Las entidades (privadas o gubernamentales) a las cuales son transferidos los riesgos actuariales mediante un sistema asegurador son llamadas *aseguradoras*.

Discusión. Decir que las contribuciones son consistentes con el valor actuarial de los beneficios, significa, en efecto, que son riesgos relacionados. Algunos programas que no encajan con la definición de sistema asegurador son, sin embargo, incluidas en la clase de sistemas de seguridad financiera. Algunos ejemplos incluyen programas en los cuales las indemnizaciones cobradas no están relacionadas con el riesgo, así como programas que hacen pagos que no están relacionados con los eventos asegurables.

En un sistema de seguro, las reglas de suscripción pueden ser formuladas para la mayoría de los riesgos actuariales con la intención de que el valor actuarial de los beneficios sea diferente para diferentes clases de riesgos. En algunos casos, sin embargo, el valor actuarial de los beneficios asociados con una clase de riesgo o la incertidumbre inherente en las variables actuariales de riesgo fundamentales es tan grande que los fenómenos se juzgan inadecuadamente.

Definición: Un *refinamiento de un sistema de clases de riesgos* es un sistema de clasificación de riesgos formado de otro al subdividirlo en una o más clases.

Si existen modelos actuariales asociados con el sistema de clasificación de riesgos original y con el de refinamiento, de tal forma que estos modelos asignan las mismas probabilidades de ocurrencia, frecuencia y severidad a las clases que no fueron subdivididas, sino que asignan diferentes probabilidades a una o más de las subdivisiones de por lo menos una clase, se dice que el refinamiento es *más homogéneo* que el sistema original.

Discusión. Para un conjunto dado de resultados observados, el modelo actuarial asociado con el sistema de clasificación de riesgos más homogéneo puede tener un grado reducido de exactitud debido a que están disponibles menos datos puntuales para cada clase del refinamiento. Para algunos casos, es necesario asegurar que se puede lograr un mínimo grado de exactitud.

Principio 4.2 (Agrupación). Si el riesgo actuarial asociado con un sistema de clasificación de riesgos muestra regularidad estadística, es posible combinar clases de riesgos así como asegurar que existe un modelo actuarial asociado con este nuevo conjunto de clases de riesgos que es válido dentro de un grado específico de exactitud.

Definición. El proceso de combinar clases de riesgos definido en el principio 4.2 es llamado *agrupación*.

Discusión. Del principio 4.2, claramente se observa que existe una compensación entre agrupar y homogeneizar en los sistemas de seguros. Además, el aumento en la homogeneidad generalmente lleva a incrementar el costo de información. Esto y otros factores prácticos tienden a limitar el grado de homogeneidad que se puede lograr.

La magnitud de la compensación elegida es un juicio basado en la situación específica. Las pautas para el ejercicio de un juicio caen en la categoría de los Estándares y se encuentran específicamente excluidas de estas contribuciones. Las técnicas estadísticas y conceptos económicos como la teoría de la utilidad pueden ser usados para ayudar en este tipo de juicios.

La compensación entre agrupar y homogeneizar es implementada por las reglas de suscripción. Algunas de las distinciones hechas por estas reglas resultan en clases para las cuales la diferencia en probabilidades permanece constante todo el tiempo.

Para otras distinciones, las probabilidades de dos o más clases pueden converger con el tiempo. La habilidad de hacer tales distinciones temporales (basadas en el estado de salud actual, etc.) es útil, debido a que el mismo disminuye el grado de incertidumbre con respecto al estado actual y les permite a los asegurados cobros más apropiados por sus contribuciones iniciales.

Así, el conocimiento de que todos los miembros de una clase tenían presión arterial normal en un cierto día permitiría ofrecer a dicha clase contribuciones menores para un seguro de vida y salud.

El criterio de selección típico es el resultado de un examen médico actual, el estado de empleo actual y cualquier historial de ocurrencias del evento asegurable.

En algunas formas de seguro, el proceso de selección se repite periódicamente, basado en la acumulación de información disponible para cada riesgo. Este proceso es llamado "renovación de la suscripción".

Definición: La *estructura de primas* de un sistema asegurador es un conjunto de contribuciones que reflejan la asignación de riesgos o varias clases de riesgos. Un refinamiento de una estructura de primas es una estructura de primas basada en un refinamiento de un sistema de clasificación de riesgos.

Discusión. Un sistema de seguros puede proporcionar dividendos o reembolsos que pueden ser pensados como compensaciones a las contribuciones. Las contribuciones que definen una estructura de primas para estos sistemas son entonces el precio neto de tales dividendos o reembolsos.

Principio 4.3 (Antiselección). Si la estructura de la prima de un sistema de seguro voluntario está basado en un sistema de clasificación de riesgos tal que un refinamiento del sistema pudiera resultar en diferencias significativas en las contribuciones consideradas para con los riesgos originalmente asignados a la misma clase, habrá una tendencia a aumentar la participación en aquellas clases cuyas contribuciones aumentarían si fuese hecho el refinamiento.

Discusión. Una implicación del principio 4.3 es que si un asegurador ofrece más clases de prima que otros, y si este resultado es significativamente diferente en contribuciones, es posible que ocurra antiselección, con los riesgos a los cuales se puede requerir pagar contribuciones más altas en la primera compañía tendiendo a atraer al asegurado con menos clases.

Una vez que la estructura de las primas ha sido determinada, surge otro concepto actuarial: el uso de experiencia emergente para modificar la estructura de la prima, en una medida aceptable para los nuevos y los ya asegurados.

Definición: La *experiencia* de un sistema de seguridad financiero es el dato obtenido en la operación del sistema.

Definición: Las estimaciones basadas en tales datos de proporciones de ocurrencia o cantidades de pagos relacionadas con un riesgo actuarial son llamadas *tasas de experiencia.*

Principio 4.4 (Experiencia Incluida). Las proporciones de experiencia para eventos asociados con un sistema de seguridad financiera tenderá a diferir de aquellos eventos carentes de tal sistema.

Principio 4.5 (Experiencia Asegurada). Las proporciones de experiencia para los eventos asegurables de un sistema de seguros tenderá a diferir de las tasas globales de ocurrencia de los mismos eventos entre todos aquellos sujetos a un riesgo actuarial dado.

Definición: Un *ajuste de experiencia* es un cambio en las contribuciones o beneficios aplicables a varias clases de riesgos para reflejar la experiencia de un sistema de seguridad financiero.

La credibilidad es la importancia asignada a la experiencia de una clase dada de riesgos (o grupo de clases de riesgos relativo a otras informaciones) con el propósito de ajustar la experiencia.

Discusión. La incapacidad para establecer tasas fundamentales verdaderas hace esencial el uso de ajustes de experiencia. Los ajustes de experiencia pueden reflejar sólo el periodo actual o pueden involucrar un recálculo de las contribuciones y beneficios basados en la suposición de que las tasas futuras de experiencia de los sistemas de seguridad financieros serán más parecidas a la experiencia pasada que aquellas previamente asumidas.

Definición: El valor actuarial de un sistema de seguridad financiero relativo a un modelo actuarial dado es el valor actuarial desarrollado por el modelo de la combinación de flujos de efectivo asociados con los recursos, las obligaciones y las contribuciones del sistema. El proceso de determinar tales valores actuariales es llamado *valuación actuarial*.

Si el valor actuarial puede ser expresado como una función de cualquier variable asociada con el sistema de seguridad financiero y es independiente del modelo actuarial, tal variable es llamada *parámetro financiero* del sistema de seguridad financiero.

Las cantidades por las que los valores de los parámetros financieros pueden ser cambiadas sin reducir el valor esperado actuarial del sistema de seguridad financiero se llaman márgenes bajo cero.

Discusión. Los actuarios son a menudo requeridos para asignar un valor a los flujos contingentes de efectivo relacionados con las operaciones de un sistema de seguridad financiero.

Debido a que el valor actuarial es, en general, una variable aleatoria, puede ser preferible declarar las condiciones bajo las cuales dicho valor puede estar dentro de un rango dado.

Los actuarios realizan las valuaciones en por lo menos tres contextos: tarificando, reservando y valorando. Típicamente, cuando el actuario realiza una valuación, el propósito es determinar uno o más parámetros financieros que producen valores actuariales en un rango específico. En la tarificación, los parámetros son el conjunto de contribuciones, mientras que en la reservación el parámetro es llamado "reserva". En la valoración, el parámetro financiero es el precio a ser pagado o recibido por el derecho a flujos de efectivo que están siendo valuados.

Un conjunto de parámetros financieros que son a menudo importantes es aquel de los valores contables de los recursos del sistema de seguridad financiero. El monto por el cual los valores contables de los recursos exceden la suma de las reservas y el valor contable de otras obligaciones es llamado "exceso".

Al fijar los parámetros financieros, los actuarios toman información de otras cuentas además del valor actuarial. Por ejemplo: el sistema de seguridad financiero puede tener que enfrentar ciertos criterios (provenientes de mecanismos reguladores, acreedores, accionistas, etc.) para poder continuar con sus operaciones. Más aún, los actuarios cuantifican la incertidumbre inherente a los valores actuariales.

Definición: Se dice que la *ruina* ocurre cuando un sistema de seguridad financiero falla primero en satisfacer todas las condiciones exigidas para permanecer en funcionamiento. La declaración de las condiciones bajo las cuales ocurre la ruina es llamado *criterio de ruina*. La probabilidad de que la ruina ocurra dentro de un periodo determinado de tiempo, calculada usando un modelo actuarial, se llama *probabilidad de ruina* del sistema de seguridad financiero relativo al modelo dentro de dicho periodo de tiempo.

Principio 4.6 (Prevención de Ruina). Para la mayoría de los criterios de ruina, existen combinaciones de los valores de los parámetros financieros que reducirán, por debajo de algún nivel positivo especificado, la probabilidad de ruina relativa a un modelo actuarial.

Definición: Una medida de la probabilidad de que un sistema de seguridad financiero sea capaz de pagar todos los beneficios como prometió es llamado el *grado de solidez actuarial* del sistema de seguridad financiero.

Principio 4.7 (Solidez Actuarial). Para varios sistemas de seguridad financiera, existen combinaciones de márgenes que producirán, relativo a algún modelo actuarial válido, un grado de solidez actuarial que excede cualquier nivel especificado menor a uno.

Discusión. Una manera de definir el grado de solidez actuarial es el complemento de la probabilidad de ruina, donde ruina es definida como el incumplimiento al pago de beneficios prometidos.

Nótese que la solidez actuarial es definida con relación al sistema de seguridad financiero. Por ejemplo, un plan de pensiones gubernamentales puede diseñarse para ser consolidado a través de las contribuciones de los participantes, pero puede disfrutar de una garantía de solvencia gubernamental. Este sistema puede analizarse con o sin tomar en cuenta la garantía, por lo que el grado de solidez actuarial puede diferir significativamente.

El principio 4.7 exige que el modelo actuarial sea válido, lo cual significa también que el modelo reproduce los resultados observados dentro de algún grado específico de exactitud. Este requisito se aplica tanto a la modelación de los activos como de las obligaciones. Ambos, recursos y obligaciones, deben ser modelados de una manera válida antes de emitir una conclusión respecto a la solidez actuarial de algún sistema de seguridad financiero.

En situaciones prácticas, tanto el nivel de márgenes como el de solidez actuarial asequible, pueden ser restringidos por las condiciones del mercado.

1.3. Modelación Estocástica de las Operaciones Actuariales

1.3.1. Variables Actuariales de Riesgo

Función de Supervivencia.

Sea X La variable aleatoria que denota la *edad de fallecimiento* de un recién nacido (dicha variable es del tipo continua). Más aún, sea $F_X(x)$ la distribución acumulada de X,

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad x \geq 0, \tag{1.3.1}$$

sea además

$$S(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x), \qquad x \geq 0. \tag{1.3.2}$$

Como la variable X representa la edad de fallecimiento de un recién nacido, es razonable decir que $F_X(0) = 0$, lo cual implica que $S(0) = 1$. La función $S(x)$ es llamada *función de supervivencia*. Para cualquier valor positivo x, $S(x)$ es la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x.

Usando las leyes de la probabilidad, es posible obtener resultados acerca de la edad de fallecimiento de un recién nacido en términos de la función de supervivencia o bien en términos de la función de distribución $F_X(x)$. Por ejemplo, la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades x y z es

$$P(x < X \leq z) = F_X(z) - F_X(x) = S(x) - S(z).$$

Sea ahora l_x el número de vivos a edad (x) en una población. Un caso especial se da cuando $x = 0$, es decir, l_0. A este valor en particular se le llama *radix* de la población, y representa el número inicial de personas en el estudio de una población. Es usual, cómodo y deseable poner a l_0 como potencia de 10. Existe una estrecha relación entre la variable l_x y la función de supervivencia $S(x)$. Si se tiene una población inicial de

l_0 sujetos la supervivencia definida por $S(x)$, entonces

$$l_x = l_0 S(x). \tag{1.3.3}$$

La variable l_x es usada en la elaboración de tablas de vida.

Existen varias condiciones que debe cumplir una función $S(x)$ para ser considerada como de supervivencia. El siguiente ejemplo ilustra esas condiciones.

Ejemplo 1. *Verifique que la función* $\frac{20{,}000-100x-x^2}{20{,}000}$ *satisface las condiciones de* $S(x)$.

Solución. *Primero se enuncian cuales son las condiciones que debe cumplir cualquier función de supervivencia para posteriormente se verificar si es que la función cumple dichas condiciones:*

- ***Función continua en un intervalo*** $0 \leq x \leq w$. *La función es un polinomio, por lo tanto es continua.*
- ***Función decreciente en*** x. *No hay mejor forma de determinar el comportamiento de la función, que utilizando el criterio de la primera derivada, esto es, si* $S'(x) < 0$ *en* $0 \leq x \leq w$ *entonces es decreciente en dicho intervalo.*

  $$S'(x) = \frac{-100 - 2x}{20,000} < 0 \qquad \forall x \in (0, w)$$

  por lo que se cumple que sea una función decreciente.
- $S(0) = 1$ **y** $S(w) = 0$. *Para obtener un valor apropiado para* w, *factorizamos la función* $S(x)$, *esto es*

  $$S(x) = \frac{20,000 - 100x - x^2}{20,000} = \frac{(100 - x)(x + 200)}{20,000}$$

  de aquí que $w = 100$. *Para* $S(0) = 1$ *el resultado es inmediato.*

$\diamondsuit$

Tiempo futuro de vida de una persona de edad x.

La probabilidad condicional de que una recién nacido muera entre las edades x y z, dado que ha sobrevivido a x, es

$$P(x < X \leq z | X > x) = \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}. \tag{1.3.4}$$

El símbolo (x) es usado para denotar a una persona de edad x. La variable aleatoria que representa el *tiempo futuro de vida de* (x), $X - x$, es denotado por $T(x)$.

Para hacer referencia a la variable aleatoria $T(x)$ se usa la notación

$$_tq_x = P[T(x) \leq t], \qquad t \geq 0 \tag{1.3.5}$$

$$_tp_x = 1 - {_tq_x} = P[T(x) > t], \qquad t \geq 0. \tag{1.3.6}$$

El símbolo $_tq_x$ puede ser interpretado como la probabilidad de que (x) fallezca en el transcurso de los siguientes t años, es decir, $_tq_x$ es la función de distribución de $T(x)$. Por otro lado, $_tp_x$ puede ser interpretado como la probabilidad de que (x) alcance la edad $x + t$, es decir, $_tp_x$ es la función de supervivencia de (x). Un caso especial se da cuando $x = 0$, es decir, el individuo en cuestión es un recién nacido, entonces $T(0) = X$ y

$$_xp_0 = S(x), \qquad x \geq 0. \tag{1.3.7}$$

Existe un símbolo para un evento más general: que (x) sobreviva t años y muera en el transcurso de los siguientes u años; esto es, (x) debe fallecer entre las edades $x + t$ y $x + t + u$. El símbolo está dado por

$$\begin{aligned} _{t|u}q_x &= P[t < T(x) \leq t + u] \\ &= {_{t+u}q_x} - {_tq_x} \\ &= {_tp_x} - {_{t+u}p_x}. \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Suponga ahora una población sujeta a la función de supervivencia $S(x)$, y que los recién nacidos han alcanzado la edad x. Usando (1.3.7) y (1.3.3) se tiene

$$_tp_x = \frac{_{x+t}p_0}{_xp_0} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_0 S(x+t)}{l_0 S(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \tag{1.3.9}$$

de aquí que

$$_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \tag{1.3.10}$$

Usando (1.3.9), (1.3.8) se convierte en

$$\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \frac{S(x+t)-S(x+t+u)}{S(x)} \\
&= \frac{l_{x+t}-l_{x+t+u}}{lx} \\
&= \left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+t}-l_{x+t+u}}{l_x}\right) \\
&= {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}. \qquad (1.3.11)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Usando la función del Ejemplo 1, calcule:*

a. *La probabilidad de que un recién nacido sobreviva a edad 20*

b. *La probabilidad de que una persona de edad 20 sobreviva a edad 40*

c. *La probabilidad de que una persona de edad 20 muera entre las edades 30 y 40.*

Solución. *Usando* (1.3.9) *y* (1.3.10) *se tiene*

a. *La probabilidad de que un recién nacido sobreviva a edad 20. Aquí lo que se busca es* ${}_0p_{20}$*, por lo que*

$$ {}_0p_{20} = \frac{S(20)}{S(0)} = \frac{(100-20)(20+200)}{(100-0)(0+200)} = 0{,}88. $$

b. *La probabilidad de que una persona en edad 20 sobreviva a edad 40. Aquí lo que se busca es la probabilidad de que (20) viva otros 20 años, es decir* ${}_{20}p_{20}$*, por lo que*

$$ {}_{20}p_{20} = \frac{S(40)}{S(20)} = \frac{(100-40)(40+200)}{(100-20)(20+200)} = \frac{9}{11}. $$

c. *La probabilidad de que una persona de edad 20 muera entre las edades 30 y 40. Esta es una probabilidad diferida, se busca la probabilidad de que (20) viva 10 años más, para después morir en el transcurso los siguientes 10 años* ${}_{10|10}q_{20}$*, por lo que*

$$_{10|10}q_{20} = \frac{S(30) - S(40)}{S(20)} = \frac{(100-30)(30+200) - (100-40)(40+200)}{(100-20)(20+200)} = \frac{17}{176}.$$

$\diamondsuit$

Fuerza de mortalidad.

La ecuación (1.3.4) expresa, en términos de la función de distribución $F_X(x)$ y de la función de supervivencia $S(x)$, la probabilidad condicional de que (0) fallezca entre las edades x y z, dado que ha llegado con vida a edad x. Usando (1.3.4) con $z = x + \Delta x$,

$$P(x < X \leq x + \Delta x | X > x) = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \cong \frac{f_X(x)\Delta x}{1 - F_X(x)}. \tag{1.3.12}$$

En esta expresión $F'_X(x) = f_X(x)$ es la densidad de la variable aleatoria que denota la edad de fallecimiento. La función

$$\frac{f_X(x)\Delta x}{1 - F_X(x)}$$

en (1.3.12) tiene una interpretación particular desde el punto de vista de la probabilidad condicional. Dicha expresión proporciona la probabilidad condicional de X a la edad x, dado que dicho individuo ha alcanzado la edad x. Dicho valor es denotado por $\mu(x)$, es decir

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{-S'(x)}{S(x)}. \tag{1.3.13}$$

Las propiedades de $f_X(x)$ y de $1 - F_X(x)$ implican que $\mu(x) \geq 0$. Dentro del cálculo actuarial y demografía $\mu(x)$ es llamada *fuerza de mortalidad.*

Es posible ahora demostrar a partir de la ecuación diferencial (1.3.13) que

$$_tp_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu(y)dy\right\}, \tag{1.3.14}$$

o bien, mediante el cambio de variable $s = y - x$

$$_tp_x = \exp\left\{-\int_0^t \mu(x+s)ds\right\}. \tag{1.3.15}$$

Por otro lado, dado que ${}_tp_x = F_{T(x)}(t)$, entonces

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x\ \mu(x+t). \tag{1.3.16}$$

La ecuación (1.3.16) es la base en la construcción de modelos continuos para los diferentes tipos de seguros, así como para las anualidades contingentes.

Ejemplo 3. *Expresar* ${}_{10}p_{28}$ *en términos de*

a. $S(x)$ b. $\mu(x)$

c. $T(x)$ d. X

Solución.

a. *Usando* (1.3.9) *se tiene*

$${}_{10}p_{28} = \frac{S(38)}{S(28)}.$$

b. *De* (1.3.14)

$${}_{10}p_{28} = e^{-\int_{28}^{38}\mu(x)dx}.$$

c. *De acuerdo con* (1.3.6) *se tiene*

$${}_{10}p_{28} = \mathrm{P}[T(28) > 10].$$

d. *Usando* (1.3.2) *y* (1.3.9) *se tiene*

$${}_{10}p_{28} = \frac{S(38)}{S(28)} = \frac{\mathrm{P}[X > 38]}{\mathrm{P}[X > 28]}.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 4. *Compruebe que la siguiente función puede ser usada como de supervivencia, en caso de serlo, encuentre las correspondientes* $\mu(x)$, $f_X(x)$ *y* $F_X(x)$.

$$S(x) = e^{-x^3/12} \qquad x \geq 0.$$

Solución. *Si las función cumple las 3 condiciones vistas en el Ejemplo 1, entonces puede considerarse función de supervivencia.*

- ***Continuidad.****La función exponencial es continua en $(-\infty, \infty)$, por lo que también es continua en $(0, w)$ cualquiera que sea el valor de w.*

- ***Función decreciente.*** *Usando en criterio de la primera derivada se tiene*

$$\frac{d}{dx}e^{-x^3/12} = -\frac{1}{4}x^2e^{x^3/12} \qquad \forall x \geq 0,$$

por lo que cumple esta segunda condición.

- $S(0) = 1$ y $S(w) = 0$. Es claro que $S(0) = 1$. *Tomando $w = \infty$, entonces $S(w) = 0$.*

Una vez comprobada la utilidad de la función como de supervivencia, es posible obtener lo que se pide. Para $F_X(x)$ se tiene

$$F_X(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-x^3/12}.$$

Ahora, para $f_X(x)$ tenemos

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x^3/12}) = \frac{x^2}{4}e^{-x^3/12}.$$

Por último

$$\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)} = \frac{\frac{1}{4}x^2e^{-x^3/12}}{e^{-x^3/12}} = \frac{x^2}{4}.$$

$\diamondsuit$

1.3.2. Fórmulas de Gram

En la teoría de las operaciones actuariales de seguros de vida pueden distinguirse los siguientes conceptos:

a. *Riesgo actuarial en sentido amplio*, derivado de la presencia de alguno de los tres elementos de carácter aleatorio de las operaciones de seguros: si acaece o no el siniestro; el importe del mismo y la fecha de su ocurrencia (elemento temporal).

b. *Riesgo actuarial en sentido estricto.* asociado a la dispersión de la variable aleatoria correspondiente a la diferencia entre los valores actuales de las prestaciones y aportaciones que definen el proceso financiero-estocástico que modela una determinada operación de seguro.

Para cuantificar el riesgo actuarial en su sentido estricto se harán uso de las fórmulas de Gram, es decir, las expresiones analíticas de la varianza de la variante definida en el párrafo anterior.

1.3.2.1. Beneficios por Decremento

En este apartado se desarrollaran modelos para los seguros de vida, que tienen el propósito de disminuir el impacto financiero de un evento aleatorio, el fallecimiento prematuro. Los modelos a desarrollar se construyen en términos de la distribución de la variable aleatoria T, el tiempo fututo de vida del asegurado.

Los modelos a desarrollar se hacen a partir de dos funciones: la *función de beneficios*, b_t y la *función de descuento*, v_t. Es posible ahora definir la *función valor presente*, z_t, como

$$z_t = b_t v_t. \tag{1.3.17}$$

De este modo, z_t, es el valor presente, a la emisión de la póliza, de los beneficios futuros. El periodo de tiempo desde la emisión de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado es la variable aleatoria del tiempo futuro de vida del asegurado, $T = T(x)$, definida en el apartado anterior. Así, el valor presente, a la emisión de la póliza, de los beneficios a pagar es la variable aleatoria z_T. De aquí en adelante denotaremos esta variable aleatoria como Z, es decir

$$Z = b_T v_T. \tag{1.3.18}$$

El primer paso en el análisis es definir b_t y v_t. El siguiente paso es determinar las características de la distribución de Z, que es consecuencia directa de la elección de la distribución de T.

Un *seguro de vida temporal a n años* proporciona un pago solo si el asegurado muere en el transcurso de los siguientes n años a partir de la emisión de la póliza. Si el beneficio por decremento es de una unidad pagadera al momento del fallecimiento de (x), entonces

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \leq n \\ 0 & t > n, \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t \geq 0,$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n. \end{cases}$$

Estas definiciones se basan en tres supuestos. Primero, dado que la variable aleatoria que denota el tiempo futuro de vida es nonegativa, entonces b_t, v_t y Z toman solo valores nonegativos. Segundo, para cualquier valor de t que haga que b_t sea 0, el valor de v_t ya no es relevante. Tercero, a menos que se diga lo contrario, la fuerza de interés se supondrá constante.

La esperanza del valor presente de la variable Z es llamada *valor presente actuarial* del seguro. El valor presente actuarial para un seguro temporal a n años que paga una unidad al momento del fallecimiento de (x), $E[Z]$, es denotado por $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$. Esta esperanza puede ser calculada si se toma a Z como función de la variable T, es decir $E[Z] = E[z_T]$. Por lo tanto, usando la distribución de T se obtiene

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = E[z_T] = \int_0^\infty z_t\, f_T(t)\, dt = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{1.3.19}$$

El j-ésimo momento de la variable Z es de la forma

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= \int_0^n (v^t)^j\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \\ &= \int_0^n e^{-(\delta j)t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \end{aligned}$$

La segunda integral muestra que el j-ésimo momento de Z es igual al valor presente actuarial para un seguro temporal a n años con beneficio de una unidad pagadera al momento del fallecimiento de (x), calculada a una fuerza de interés de j veces la fuerza de interés, δj.

Esta propiedad, llamada *regla de los momentos*, se da cuando el monto del beneficio es de una unidad y la fuerza de interés es determinística, constante o no. Más precisamente

$$E[Z^j] \;@\; \delta_t = E[Z] \;@\; j\delta_t$$

En consecuencia, la varianza de Z es

$$\mathrm{Var}[Z] = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2,$$

donde ${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ es la prima única de un seguro temporal calculado a la fuerza de interés 2δ.

Ejemplo 5. *Sea* $l_x = 100 - x$ *para* $0 \leq x \leq 100$ *y la fuerza de interés* $\delta = 0{,}05$.

a. *Calcule* $A^1_{40:\,\overline{25|}}$

b. *Determine el valor presente actuarial de un seguro temporal a 25 a nos con beneficio al tiempo de fallecimiento t,* $b_t = e^{0{,}005t}$*, para una persona de edad 40 a la emisión de la póliza.*

Solución. *Usando* (1.3.9) *y* (1.3.13) *se encuentran respectivamente* ${}_tp_x$ *y* $\mu(x)$*, esto es* ${}_tp_x = [100 - (x+t)]/(100-x)$ *y* $\mu(x) = 1/(100-x)$.

a. *Usando lo anterior se tiene*

$$\begin{aligned} A^1_{40:\,\overline{25|}} &= \int_0^{25} e^{-\delta t}\ {}_tp_{40}\ \mu(40+t)\,dt \\ &= \int_0^{25} e^{0{,}05t}\left(\frac{100-40-t}{100-40}\right)\left(\frac{1}{100-40-t}\right)dt \\ &= \frac{1}{60}\int_0^{25} e^{0{,}05t}dt = 0{,}237831. \end{aligned}$$

b. *Aquí también se busca* $A^1_{30:\,\overline{25|}}$*, solo que con beneficio variable, es decir*

$$\begin{aligned} A^1_{30:\,\overline{25|}} &= \int_0^{25} e^{-0{,}05t}\ e^{-\delta t}\ {}_tp_{40}\ \mu(40+t)\,dt \\ &= \frac{1}{60}\int_0^{25} e^{-0{,}05t}\ e^{0{,}05t}\,dt \\ &= \frac{1}{60}\int_0^{25} 1\,dt = 0{,}41667 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

De manera análoga, se define el *seguro vida entera o vitalicio*, el cual proporciona un pago al momento del fallecimiento de (x) en cualquier momento a partir de la emisión de la póliza. Si el beneficio es de una unidad, entonces

$$b_t = 1, \quad t \geq 0,$$

$$
\begin{aligned}
v_t &= v^t, \qquad t \geq 0, \\
Z &= v^T, \qquad T \geq 0.
\end{aligned}
$$

El valor presente actuarial correspondiente es

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{1.3.20}$$

La varianza o riesgo actuarial en sentido estricto es

$$\mathrm{Var}[Z] = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

Ejemplo 6. *Sea $\mu(x) = \mu$, una constante positiva y δ la fuerza constante de interés, para toda $x > 0$, muestre que $\bar{A}_x = \mu/(\mu + \delta)$.*

Solución. *Usando* (1.3.14) *se tiene*

$${}_tp_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu(y)\, dy\right\} = e^{-\mu t},$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \mu\, e^{-\delta t}\, e^{-\mu t}\, dt \\
&= \mu \int_0^\infty e^{-t(\delta+\mu)}\, dt \\
&= -\left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) e^{-t(\delta+\mu)}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{\mu}{\delta+\mu}
\end{aligned}
$$

◊

Otro tipo de seguro es el *Seguro Dotal a n años*, el cual proporciona un pago al final de n años si y solo si el asegurado sobrevive al menos n años a partir de la emisión de la póliza. Si el beneficio es de una unidad, entonces

$$b_t = \begin{cases} 0 & t \leq n \\ 1 & t > n, \end{cases}$$

$$v_t = v^n \qquad t \geq 0,$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

El único elemento de incertidumbre en un Seguro Dotal es si la reclamación ocurrirá o no. El monto y el momento del pago, si el reclamo ocurre, están totalmente predeterminados. En la expresión $Z = v^n Y$, donde Y es de la forma

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el asegurado vive a la edad } x+n \\ 0 & \text{si el asegurado fallece antes de dicha edad.} \end{cases}$$

El seguro dotal se denota con el símbolo $\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ (en término de anualidades, como se verá más adelante, el símbolo es ${}_nE_x$), es decir

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E[Z] = v^n E[Y] = v^n{}_np_x.$$

La varianza de este seguro es

$$\mathrm{Var}[Z] = (v^n)^2\ \mathrm{Var}[Y] = v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x = {}^2\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - (\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^2.$$

Ejemplo 7. *Usando los supuestos del Ejemplo 6, encuentre una expresión para* $\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$.

Solución.

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n{}_np_x = e^{-\delta n} \cdot e^{-\mu n} = e^{-n(\delta+\mu)}.$$

$\diamondsuit$

Un *seguro dotal mixto a n años* proporciona un pago si el asegurado fallece, o bien si sobrevive al terimno de n años a partir de la emisión de la póliza, lo que ocurra primero. Si el monto a pagar es de una unidad pagadera al momento del fallecimiento de (x), entonces

$$b_t = 1 \qquad t \geq 0,$$

$$v_t = \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n, \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

El valor presente actuarial de este seguro es denotado por $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$. Si Z_1, Z_2 y Z_3 denotan respectivamente a un seguro temporal a n años, un seguro dotal n años y un seguro dotal mixto a n años, es decir

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n, \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n, \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n, \end{cases}$$

entonces

$$Z_3 = Z_1 + Z_2.$$

Finalmente, sacando la esperanza en ambos lados

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{1.3.21}$$

La varianza de este seguro es

$$\mathrm{Var}[Z] = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2.$$

Ejemplo 8. *Usando los supuestos del Ejemplo 6, encuentre una expresión para* $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$.

Solución. *Para encontrar la expresión pedida se hara uso de* (1.3.21) *y el resultado del Ejemplo 7. El elemento faltante que se calcula enseguida es* $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$.

$$\begin{aligned} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt \\ &= \int_0^n \mu \, e^{-\delta t} \, e^{-\mu t} \, dt \\ &= \mu \int_0^n e^{-t(\delta+\mu)} \, dt \\ &= -\left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) e^{-t(\delta+\mu)} \Big|_0^n \\ &= \left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) [1 - e^{-n(\delta+\mu)}]. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = e^{-n(\delta+\mu)}\left[1 - \frac{\mu}{\delta+\mu}\right] + \frac{\mu}{\delta+\mu}.$$

$\diamondsuit$

Por último, un *Seguro Diferido m años* proporciona un pago solo si (x) fallece al menos m años después de la emisión de la póliza. Si el monto a pagar es de una unidad, entonces

$$b_t = \begin{cases} 1 & t > m \\ 0 & t \leq m, \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t > 0,$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T > m \\ 0 & T \leq m. \end{cases}$$

El valor presente actuarial de este tipo de seguro es denotado por el símbolo ${}_{m|}\bar{A}_x$ y es igual a

$$\int_m^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{1.3.22}$$

La varianza de este seguro es

$$\mathrm{Var}[Z] = {}^2_{m|}\bar{A}_{x:\overline{n}|} - ({}_{m|}\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2.$$

Ejemplo 9. *Usando los supuestos del Ejemplo 6, encuentre una expresión para* ${}_{n|}\bar{A}_x$.

Solución*. El procedimiento es análogo a los anteriores.*

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{A}_x &= \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \\
&= \int_n^\infty \mu\, e^{-\delta t}\, e^{-\mu t}\, dt \\
&= \mu \int_n^\infty e^{-t(\delta+\mu)}\, dt \\
&= -\left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) e^{-t(\delta+\mu)}\Big|_n^\infty \\
&= \left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) e^{-n(\delta+\mu)}.
\end{aligned}$$

Note que en efecto $\bar{A}_x = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{A}_x$.

$\diamondsuit$

1.3.2.2. Beneficios por Permanencia

En el apartado anterior se definieron varios tipos de seguros, los cuales proporcionan un pago al momento del fallecimiento del asegurado, conocidos también como beneficios por decremento. En este apartado se estudian los beneficios por permanencia en términos de anualidades de vida. Una *anualidad de vida* es una serie de pagos hechos continuamente o a intervalos iguales de tiempo (meses, trimestres, años) mientras el titular del contrato de dicha anualidad siga con vida (de ahí el nombre de beneficio por permanencia). Dicha anualidad puede ser temporal, es decir, mientras el individuo siga con vida por un periodo determinado de tiempo, o bien puede ser vitalicia.

Las anualidades son la base en la construcción de modelos para los planes de pensiones. De hecho, los planes de pensiones pueden ser considerados como un sistema de compra de anualidades diferidas (pagaderas después del retiro de un individuo) financiadas por contribuciones hechas durante el periodo activo del individuo. No solo la fuerza de mortalidad e interés son considerados al valuar un plan de pensiones. Factores tales como el incremento salarial, retiros por razones ajenas al fallecimiento también son considerados. En este apartado solo consideraremos las anualidades pagaderas continuamente a la tasa de 1 por año.

Una *anualidad vitalicia* proporciona pagos hasta el momento del fallecimiento. Por lo tanto, el valor presente de los pagos que se deberán hacer es $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ para todo $T \geq 0$ donde T es el tiempo futuro de vida de (x). El valor presente de una anualidad de este tipo es denotado por $\bar{a}_x$, donde el subíndice x indica que la anualidad deja de pagarse al momento del fallecimiento de (x). Análogamente a lo seguros de vida

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{1.3.23}$$

Integrando por partes (1.3.23) con $f(t) = \bar{a}_{\overline{t|}}$, $dg(t) = {}_tp_x\mu(x+t)dt$, $g(t) = -{}_tp_x$ y $df(t) = v^t dt$, se tiene

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty {}_tE_x\, dt. \tag{1.3.24}$$

La integral (1.3.24) puede considerarse como un pago de 1 dt hecho al tiempo t, traído a valor presente al multiplicarse por v^t y multiplicado por ${}_tp_x$ para considerar la posibilidad de que el pago se haga al tiempo t.

El valor presente de una *anualidad temporal a n años* de una unidad por año, pagadera continuamente mientras (x) está con vida durante los próximos n años, es

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T \geq n, \end{cases} \tag{1.3.25}$$

El máximo valor que Y puede tomar es $\bar{a}_{\overline{n}|}$, y existe una probabilidad asociada a que esto curra, $P(T \geq n) = {}_np_x$. El valor presente actuarial de esta anualidad es denotada por $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, es decir

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_x\ \ \mu(x+t)\,dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x. \tag{1.3.26}$$

Integrando por partes

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_x\,dt. \tag{1.3.27}$$

Este es el pago al que se tiene que incurrir por una anualidad temporal a n años.

El análisis para una *anualidad vitalicia diferida n años* es similar a los anteriores. En este caso, la variable aleatoria Y es definida como

$$Y = \begin{cases} 0 & 0 \leq T < n \\ v^n\ \bar{a}_{\overline{T-n}|} & T \geq n, \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $t = s + n$

$$\begin{aligned} {}_{n|}\bar{a}_x = E[Y] &= \int_n^\infty v^n\ \bar{a}_{\overline{t-n}|}\,{}_tp_x\ \mu(x+t)\,dt \\ &= \int_0^\infty v^n\ \bar{a}_{\overline{s}|}\ {}_{n+s}p_x\ \ \mu(x+s+n)\,ds \\ &= v^n{}_np_x \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s}|}\ {}_sp_x\ \mu(x+n+s)\,ds, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que

$${}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x\ \bar{a}_{x+n}. \tag{1.3.28}$$

Puede además demostrarse que

$${}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{1.3.29}$$

Si, en vez de hacer el cambio $t = s + n$, se integra por partes, se tiene

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\ {}_tp_x\,dt = \int_n^\infty {}_nE_x\,dt.$$

Una *anualidad cierta a n años* es un tipo de anualidad vitalicia, solo que aquí se tienen garantizados los pagos por los primeros n años, es decir, si (x) fallece antes de n años la anualidad se seguirá pagando hasta alcanzar los n periodos, pero si (x) alcanza la edad $x+n$ la anualidad se seguirá pagando hasta su fallecimiento, es decir, la anualidad sepagará hasta el máx$[T(x), n]$. El valor presente de esta anualidad, denotado por $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$, es

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & T \leq n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} & T > n. \end{cases}$$

Dado lo anterior

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = E[Y] &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \\ &= {}_tq_x\, \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. *Bajo el supuesto de fuerza constante de mortalidad, μ, y fuerza constante de interés, δ, encuentre una expresión para $\bar{a}_x$, $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, ${}_{n|}\bar{a}_x$ y $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$.*

Solución. *Para la anualidad vitalicia se tiene*

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, e^{-\mu t}\, dt = \frac{1}{\delta+\mu}.$$

análogamente para las expresiones restantes

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^n e^{-\delta t}\, e^{-\mu t}\, dt = \left(\frac{1}{\delta+\mu}\right)[1 - e^{-n(\delta+\mu)}].$$

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_n^\infty e^{-\delta t}\, e^{-\mu t}\, dt = \left(\frac{1}{\delta+\mu}\right) e^{-n(\delta+\mu)}.$$

Finalmente,

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{n}|} + \left(\frac{1}{\delta+\mu}\right) e^{-n(\delta+\mu)}.$$

Note además que $\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x$.

$\diamondsuit$

1.3.2.3. Relación entre beneficios

La relación básica entre los beneficios por decremento y permanencia se da a partir del siguiente resultado

$$1 = \delta\, \bar{a}_{\overline{t}|} + v^t.$$

Lo anterior puede ser interpretado como que una unidad invertida hoy producirá intereses anuales de δ pagaderos continuamente por t años, $\delta a_{\overline{t}|}$, momento en el cual se dejan de pagar dichos intereses y la unidad invertida es pagada, v^t. Esta relación es válida para todo valor de t, así como para la variable aleatoria T, es decir

$$1 = \delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T. \tag{1.3.30}$$

Sacando la esperanza se tiene

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x, \tag{1.3.31}$$

o bien

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}.$$

La interpretación de (1.3.31) es similar a la de (1.3.30). Una unidad invertida hoy producirá intereses anuales de δ pagaderos continuamente mientras (x) este con vida, y, al momento del fallecimiento de (x), los intereses cesan y la inversión de 1 es compensada.

En particular, si la variable Y definida en (1.3.25) es de la forma

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1-Z}{\delta} & 0 \leq T < n \\ \\ \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-Z}{\delta} & T \geq n, \end{cases} \tag{1.3.32}$$

donde Z es el valor presente de un seguro dotal mixto a n años

$$Z = \begin{cases} v^T & 0 \leq T < n \\ v^n & T \geq n, \end{cases} \tag{1.3.33}$$

se tiene

$$E[Y] = E\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] \quad \text{o bien} \quad \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}. \tag{1.3.34}$$

1.4. Primas sobre beneficios b_ξ

1.4.1. La función de pérdida $l(t)$

Para una prima $\bar{P}$ que se paga de forma contínua, se define la *función de pérdida* como

$$l(t) = v^t - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{t}|}, \tag{1.4.1}$$

que representa el valor presente de la pérdida por parte de la aseguradora si el fallecimiento ocurre al tiempo t.

La función $l(t)$ es una función decreciente con $l(0) = 1$ además de que $l(t)$ tiende a $-\bar{P}/\delta$ cuando $t \to \infty$. Si t_0 es el tiempo en el que $l(t_0) = 0$, el fallecimiento antes de t_0 resulta en una pérdida positiva, por el contrario, si el fallecimiento ocurre después de t_0 se produce una pérdida negativa, es decir, una ganancia.

1.4.2. La variable aleatoria $L[\xi(x)]$

Considere ahora la variable aleatoria

$$L[\xi(x)] = v^{\xi(x)} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{\xi(x)}|}. \tag{1.4.2}$$

La variable aleatoria L, en su contexto general, denota la diferencia entre el valor presente de las prestaciones, y el valor presente de las primas correspondientes a una determinada operación de seguro de vida. Dado el *principio de equivalencia*, el cual requiere que

$$E\{L[\xi(x)]\} = 0, \tag{1.4.3}$$

es decir, si $\xi(x) = T(x)$ (o bien $L = l(T)$) entonces para un seguro vitalicio se tiene

$$\begin{aligned} E[v^T - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T}|}] &= E[L] \\ \bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x &= 0, \end{aligned}$$

es decir

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}. \tag{1.4.4}$$

Ejemplo 11. *Suponga una fuerza de interés constante, δ, y fuerza constante de mortalidad, μ. Calcule $\bar{P}(\bar{A}_x)$.*

Solución. *De los apartados correspondientes a seguros y anualidades contingentes se tiene*

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta} \quad \text{y} \quad \bar{a}_x = \frac{1}{\mu+\delta},$$

por lo que, usando (1.4.4)*, se tiene*

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\mu(\mu+\delta)^{-1}}{(\mu+\delta)^{-1}} = \mu,$$

que no depende de la fuerza de interés ni de la edad inicial del asegurado.

$\diamondsuit$

Así como se obtuvo el valor de $\bar{P}$ para un seguro vitalicio, lo mismo puede hacerse para los demás tipos de seguro existentes usando el principio de equivalencia. El modelo general para la función de pérdida es

$$b_{\xi(x)}v_{\xi(x)} - \bar{P}Y = Z - \bar{P}Y \tag{1.4.5}$$

donde

- $b_{\xi(x)}$ es el monto del beneficio y $v_{\xi(x)}$ es el factor de descuento asociados a un tiempo $\xi(x)$
- $\bar{P}$ es un símbolo general para la prima neta anual
- Y es la variable aleatoria continua definida en, por ejemplo, (1.3.32)
- Z está definido en (1.3.18) y
- $\xi(x) > 0$ y puede ser cualquiera de las siguientes variables aleatorias: la variable asociada al tiempo futuro de vida de (x), $T(x)$; la variable asociada al los años completos de vida futuros de (x), $K(x)$; o bien, una función que dependa de cualquiera de estas variables.

Aplicando el principio de equivalencia con $\xi(x) = T(x)$ se tiene

$$E[b_T v_T - \bar{P}\,Y] = 0,$$

o bien

$$\bar{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[Y]}.$$

Resultados análogos a (1.4.4) pueden obtenerse a partir de la expresión anterior.

Con las igualdades (1.3.31) y (1.3.34) puede derivarse la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \delta\,\bar{a}_x + A_x &= 1 \\ \delta + \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{1}{\bar{a}_x}, \end{aligned}$$

es decir

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1-\delta\,\bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}. \tag{1.4.6}$$

Análogamente, usando (1.3.33) se tiene

$$\begin{aligned} \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} &= 1 \\ \delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}, \end{aligned}$$

es decir

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\delta\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}. \tag{1.4.7}$$

La distribución de la variable aleatoria L, con $\xi(x) = T(x)$, se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} F_L(u) &= P(L \leq u) \\ &= P\left[v^T - \bar{P}\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) \leq u\right] \\ &= P\left(v^T \leq \frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right) \\ &= P\left[T \geq -\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right)\right] \\ &= 1 - F_T\left(-\frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right) \qquad -\frac{\bar{P}}{\delta} < u. \end{aligned}$$

De esta manera, la densidad de L es

$$\frac{d}{du}F_L(u) = f_L(u) = f_T\left(-\frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right)\left(\frac{1}{\delta u + \bar{P}}\right) \qquad -\frac{\bar{P}}{\delta} < u.$$

Se observa que la distribución de L viene dada en función de la distribución del tiempo futuro de vida de (x), $T(x)$.

1.4.3. Momentos condicionales de $L[\xi(x)]$

El principio de equivalencia puede ser analizado de manera más general desde el punto de vista de la esperanza condicional, es decir,

$$E\{L[\xi(x)]|\xi(x)\} = 0.$$

Más aún

$$\operatorname{Var}\{L[\xi(x)]|\xi(x)\} = E\{L^2[\xi(x)]\},$$

es decir, el segundo momento condicional de $L[\xi(x)]$ es precisamente su varianza. Dicha varianza puede ser usada para medir la variabilidad de pérdida en un seguro vitalicio dada la naturaleza aleatoria del tiempo futuro de vida del asegurado.

Para la variable de pérdida (1.4.2) se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\{L[\xi(x)]|\xi(x) = T(x)\} &= \operatorname{Var}\left[v^{\xi(x)} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{\xi(x)}|}\middle|\xi(x) = T(x)\right] \\
&= \operatorname{Var}(v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}) \\
&= \left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right]\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2.
\end{aligned}$$

Usando (1.3.31) la expresión anterior se convierte en

$$\operatorname{Var}\{L[\xi(x)]|\xi(x) = T(x)\} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\bar{a}_x)^2}.$$

1.5. Valuación de la Reserva Matemática

1.5.1. Método Prospectivo

La *reserva matemática* asociada a un beneficio está definida como el valor presente actuarial de los beneficios adquiridos menos el valor presente actuarial del conjunto de primas que han de recibirse por la cobertura de las obligaciones futuras.

Existen tres métodos para evaluar una reserva matemática. El primero se basa en un enfoque prospectivo, el cual establece, bajo la esperanza condicional de la variable aleatoria de pérdida L, que la reserva de beneficios es la diferencia entre el valor presente actuarial de los beneficios futuros y las primas por dichos beneficios.

En otras palabras, la reserva matemática (prospectiva), denotada por ${}_t\bar{V}$, es la esperanza condicional de L dado que $\xi(x) = T(x) - t$, es decir $T(x) > t$, esto es

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V} &= E[L|\xi(x) = T(x) - t] \\ &= E[L|T(x) > t] \\ &= E\left[v^{T(x)-t} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|}\right] \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Considere la reserva para un seguro vitalicio de una unidad pagadera al momento del fallecimiento de (x), con prima neta anual $\bar{P}(\bar{A}_x)$. De acuerdo con (1.5.1), la reserva al tiempo t para este seguro es

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{x+t}. \tag{1.5.2}$$

La igualdad (1.5.2) tiene la siguiente interpretación:

(reserva matemática) = (valor presente actuarial para un seguro vitalicio de un individuo a edad $x + t$) $-$ (valor presente actuarial de los futuros beneficios pagaderos a una tasa anual de $\bar{P}(\bar{A}_x)$).

Ejemplo 12. *Suponga una fuerza de interés constante, δ, y fuerza constante de mortalidad, μ. Calcule ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$.*

Solución. *De acuerdo con los resultados anteriores, $\bar{A}_x$, $\bar{a}_x$ y $\bar{P}(\bar{A}_x)$ son independientes de la edad, x, entonces*

$$ {}_tV(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$$

se convierte en

$$ {}_tV(\bar{A}_x) = \bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0, \qquad t \geq 0.$$

En este caso, las primas futuras son siempre equivalentes a los beneficios futuros, pero el inverso no necesariamente se cumple. $\diamondsuit$

Alternativamente al desarrolo hasta ahora hecho, puede definirse la variable ${}_tL$ asociada a la diferencia entre valor presente de los beneficios y el valor presente de las primas correspondientes a un seguro emitido hace t años como

$$ {}_tL = v^{T(x)-t} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|}. \tag{1.5.3}$$

A partir de esta variable puede definirse también la reserva como una esperanza condicional, es decir, para un seguro vitalicio con una unidad como beneficio pagadero al momento del fallecimiento de (x) se tiene

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= E[{}_tL T(x) > t] \\ &= E[v^{T(x)-t}T(x) > t] + \bar{P}(\bar{A}_x)E[\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|}T(x) > t] \\ &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{x+t}, \end{aligned}$$

que es igual a (1.5.2).

Es razonable ahora suponer que existe una distribución asociada a la variable aleatoria ${}_tL$. De (1.5.3) se tiene

$$\begin{aligned} {}_tL &= v^{T(x)-t} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|} \\ &= v^{T(x)-t} - \bar{P}\left(\frac{1-v^{T(x)-t}}{\delta}\right) \\ &= v^{T(x)-t}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}. \end{aligned}$$

Si $\delta > 0$, ${}_tL$ es una función decreciente de $T(x) - t$ y cae en el intervalo

$$ -\frac{\bar{P}}{\delta} < {}_tL \leq 1. \tag{1.5.4}$$

Para cualquier y en el intervalo (1.5.4) se tiene

$$\begin{aligned}
F_{_tL}(y) &= P[_tL \leq y | T(x) > 0] \\
&= P\left[v^{T(x)-t}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta} \leq y \Big| T(x) > t\right] \\
&= P\left[v^{T(x)-t} \leq \frac{\delta y + \bar{P}}{\delta + \bar{P}} \Big| T(x) > t\right] \\
&= P\left[T(x) \geq t - \frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta y + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right] \Big| T(x) > t\right] \\
&= \frac{P\left[T(x) \geq t - \frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta y + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right]}{P[T(x) > t]} \\
&= \frac{1 - F_{T(x)}\left(t - \frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta y + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right)}{1 - F_{T(x)}(t)}.
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Diferenciando (1.5.5) respecto de y, se obtiene la densidad condicional de $_tL$ dado que $T(x) > t$:

$$f_{_tL}(y) = \left\{\frac{1}{[\delta y + \bar{P}][1 - F_{T(x)}]}\right\} f_{T(x)}\left(t - \frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta y + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right) \tag{1.5.6}$$

Se observa que la distribución de $_tL$ esta en función de la distribución de $T(x)$.

1.5.2. Método Retrospectivo

El segundo método de valuación de reservas es llamado *método retrospectivo*, el cual observa a la reserva de beneficios sobre el pasado.

A partir de (1.3.28) y (1.3.29), para $t < n - s$, se tiene

$$\bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} = \bar{A}^{\ 1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\ \bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}$$

y

$$\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} = \bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\ \bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula obtenida a partir de (1.5.3) para un seguro dotal mixto a n años,

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t < n \\ 1 & t = n, \end{cases} $$

se tiene

$$ \begin{aligned} {}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left(\bar{A}^{\ 1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\ \bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right) \\ &\quad - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\left[\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\ \bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\ &= \bar{A}^{\ 1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ \bar{a}_{x+s:\overline{t}|} \\ &\quad + {}_tE_{x+s}\left[\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ \bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\ &= \bar{A}^{\ 1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\ {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ \bar{a}_{x+s:\overline{t}|}. \end{aligned} \tag{1.5.7} $$

De esta manera, la reserva matemática al comienzo de la cobertura y al final de t años están relacionadas de acuerdo a (1.5.7), y tiene la siguiente interpretación

(la reserva matemática al comienzo del periodo de cobertura)	=	(el valor presente actuarial al inicio del periodo de cobertura de los beneficios pagaderos en este periodo)
		+ (el valor presente actuarial al comienzo del periodo de cobertura de un seguro dotal mixto a n años por el monto de la reserva matemática al termino de la cobertura)
		− (el valor presente actuarial de las primas pagaderas durante el periodo de cobertura.)

Reescribiendo (1.5.7),

$$ {}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ \bar{a}_{x+s:\overline{n-t}|} = \bar{A}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\ {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}), \tag{1.5.8} $$

lo que demuestra que el valor presente actuarial de los recursos de la empresa aseguradora y sus obligaciones son iguales.

La fórmula retrospectiva se obtiene de (1.5.8) haciendo $s = 0$. Note que ${}_0\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 0$ dado el principio de equivalencia, y despejando ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$. Así,

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{{}_tE_x}[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, \bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}]. $$

Como $\bar{s}_{x:\overline{t}|} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}/{}_tE_x$, la ecuación anterior se reduce a

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, \bar{s}_{x:\overline{t}|} - {}_t\bar{k}_x. $$

Donde

$$ {}_t\bar{k}_x = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} $$

es llamado *costo acumulado del seguro*. Observe que

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{k}_x &= \int_0^t \frac{v^s\ {}_sp_x\ \mu_x(s)}{v^t\ {}_tp_x} ds \\ &= \int_0^t \frac{(1+i)^{t-s}\ l_{x+s}\ \mu_x(s)}{v^t\ l_{x+t}} ds \end{aligned} $$

Esto puede ser interpretado como un gravamen contra cada uno de los l_{x+t} sobrevivientes para proporcionar el valor acumulado de los reclamos por decremento en el grupo de sobrevivientes entre las edades x y $x+t$. Así, la reserva puede ser vista como la diferencia entre las primas, acumuladas con intereses y compartido solamente entre los que alcanzaron la edad $x+t$, y el costo acumulado del seguro.

1.5.3. Método de diferencia de primas

El tercero es vía fórmula para diferencia de primas, la cual exhibe a la reserva de beneficios como el valor presente actuarial de la diferencia de primas pagable sobre el tiempo remanente de pago de primas. Este método parte de la fórmula (1.5.3) del método prospectivo. Para ilustrar este método usaremos el seguro dotal mixto a n años.

La *fórmula de diferencia de primas* para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ se obtiene factorizando $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}$ de la fórmula prospectiva para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$:

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right] \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \left[\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right] \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \end{aligned} \tag{1.5.9} $$

La fórmula (1.5.9) muestra la reserva matemática como el valor presente actuarial de una diferencia de primas. La diferencia se obtiene restando la prima anual original de la prima emitida para un seguro al alcanzar la edad $x+t$ por los beneficios restantes.

Una segunda fórmula puede obtenerse factorizando el valor presente actuarial de los beneficios futuros de la fórmula prospectiva. Así, para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ se tiene

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[1-\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \left[1-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (1.5.10) \end{aligned}$$

La fórmula (1.5.9) muestra la reserva matemática como el valor presente actuarial de una porción de los beneficios futuros restantes. El cociente de las primas es la porción de los beneficios futuros, referido a la prima de los beneficios futuros y exhibe el valor presente actuarial de los remanentes de los beneficios.

Para terminar esta sección, expresaremos la reserva matemática de un seguro vitalicio en términos de funciones actuariales anteriormente vistas. Fórmulas análogas pueden determinarse para la reserva matemática de un seguro dotal mixto a n años. Dado que se usó (1.3.31) para expresar $\bar{P}(\bar{A}_x)$ en términos de δ, $\bar{a}_x$ y $\bar{A}_x$, pueden asimismo usarse para expresar ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ en términos de $\bar{a}_x$, $\bar{A}_x$ ó $\bar{P}(\bar{A}_x)$ y δ.

Sustituyendo (1.4.6) y (1.3.31) en la fórmula retrospectiva (1.5.2) se tiene

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= 1-\delta\bar{a}_{x+t}-\left(\frac{1}{\bar{a}_x}-\delta\right)\bar{a}_{x+t} \\ &= 1-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}. \qquad (1.5.11) \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.4.6) en la fórmula de diferencia de primas se tiene

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t})-\bar{P}(\bar{A}_x)]\bar{a}_{x+t} \qquad (1.5.12) \\ &= \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t})-\bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t})+\delta}. \qquad (1.5.13) \end{aligned}$$

Finalmente, reescribiendo (1.5.11) usando $\bar{A}_{x+t}=1-\delta\bar{a}_{x+t}$ se obtiene

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1-\frac{1-\bar{A}_{x+t}}{1-\bar{A}_x} = \frac{\bar{A}_{x+t}-\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}. \qquad (1.5.14)$$

Las fórmulas (1.5.11), (1.5.12) y (1.5.14) dependen directamente de la relación (1.3.31).

1.6. Ecuación dinámica de la Reserva Matemática

Veamos ahora como cambia ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ respecto del tiempo. Para esto se usarán los siguientes resultados

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}_{x+t} = \bar{A}_{x+t}[\delta + \mu(x+t)] - \mu(x+t)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}_{x+t} = [\delta + \mu(x+t)]\bar{a}_{x+t} - 1.$$

Derivando parcialmente ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ respecto de t

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \frac{\partial}{\partial t}[\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}_{x+t} \\
&= \bar{A}_{x+t}[\delta + \mu(x+t)] - \mu(x+t) - \bar{P}(\bar{A}_x)\{[\delta + \mu(x+t)]\bar{a}_{x+t} - 1\} \\
&= [\delta + \mu(x+t)][\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}] - \bar{P}(\bar{A}_x) - \mu(x+t) \\
&= [\delta + \mu(x+t)]{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - \bar{P}(\bar{A}_x) - \mu(x+t),
\end{aligned}$$

es decir, se llega a una ecuación diferencial parcial. Para resolver dicha ecuación se escoge el factor integrante $\exp\{-\delta t\}$, el cual se multiplica en ambos lados de la expresión anterior, se despeja $\delta\exp\{-\delta t\}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ del lado derecho y se reconoce la derivada del producto de las funciones ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ y $e^{-\delta t}$, es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\cdot e^{-\delta t}\right] = e^{-\delta t}\left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\mu(x+t) - \bar{P}(\bar{A}_x) - \mu(x+t)\right].$$

Integrando de 0 a y

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\cdot e^{-\delta t}\Big|_0^y &= \int_0^y e^{-\delta t}\left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\mu(x+t)-\bar{P}(\bar{A}_x)-\mu(x+t)\right]dt\\
{}_y\bar{V}(\bar{A}_x)\cdot e^{-\delta y} &= \int_0^y e^{-\delta t}\left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\mu(x+t)-\bar{P}(\bar{A}_x)-\mu(x+t)\right]dt\\
{}_y\bar{V}(\bar{A}_x) &= \int_0^y e^{-\delta(t-y)}\left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\mu(x+t)-\bar{P}(\bar{A}_x)-\mu(x+t)\right]dt.
\end{aligned}
$$

Existe una expresión alternativa para la derivada parcial de ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ respecto de t. Para encontrar dicha expresión se hace uso de (1.3.31) y se parte del mismo razonamiento, es decir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \left\{\bar{A}_{x+t}[\delta+\mu(x+t)]-\mu(x+t)\right\}-\bar{P}(\bar{A}_x)\{[\delta+\mu(x+t)]\bar{a}_{x+t}-1\}\\
&= \left\{\delta\bar{A}_{x+t}-\mu(x+t)\left[1-\bar{A}_{x+t}\right]\right\}-\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}\left[\mu(x+t)\bar{a}_{x+t}+\delta\bar{a}_{x+t}-1\right]\\
&= \left\{\delta\bar{A}_{x+t}-\delta\bar{a}_{x+t}\mu(x+t)\right\}-\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}\left[\mu(x+t)\bar{a}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}\right]\\
&= \frac{\delta\bar{a}_x\left[\bar{A}_{x+t}-\mu(x+t)\bar{a}_{x+t}\right]+\bar{A}_x\left[\bar{A}_{x+t}-\mu(x+t)\bar{a}_{x+t}\right]}{\bar{a}_x}\\
&= \frac{\left[\delta\bar{a}_x+\bar{A}_x\right]\left[\bar{A}_{x+t}-\mu(x+t)\bar{a}_{x+t}\right]}{\bar{a}_x}\\
&= \frac{\bar{A}_{x+t}-\mu(x+t)\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}.
\end{aligned}
$$

Si ahora, en lugar de derivar respecto de t se deriva respecto de x la expresión cambia. Para demostrar esto, primero se deriva $\bar{P}(\bar{A}_x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{a}_x \frac{d}{dx}\bar{A}_x - \bar{A}_x \frac{d}{dx}\bar{a}_x}{\bar{a}_x^2} \\
&= \frac{\bar{a}_x \left\{\bar{A}_x[\delta + \mu(x)] - \mu(x)\right\} - \bar{A}_x \left\{[\delta + \mu(x)]\bar{a}_x - 1\right\}}{\bar{a}_x^2} \\
&= \frac{\bar{A}_x - \bar{a}_x\mu(x)}{\bar{a}_x^2} \\
&= \frac{\bar{P}(\bar{A}_x) - \mu(x)}{\bar{a}_x}.
\end{aligned}$$

Derivando ahora ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ respecto de x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\bar{A}_{x+t} - \left[\left(\bar{P}(\bar{A}_x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x+t}\right) + \left(\bar{a}_{x+t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\bar{P}(\bar{A}_x)\right)\right].
\end{aligned}$$

Se observa ahora que

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}_{x+t} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{A}_{x+t}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}_{x+t} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x+t},$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial x}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \frac{\partial}{\partial t}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) + \left(\bar{a}_{x+t}\cdot\frac{d}{dx}\bar{P}(\bar{A}_x)\right).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_{x+t} - \mu(x+t)\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} + \frac{\bar{a}_{x+t}[\mu(x) - \bar{P}(\bar{A}_x)]}{\bar{a}_x} \\
&= \frac{{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - \bar{a}_{x+t}[\mu(x+t) - \mu(x)]}{\bar{a}_x}.
\end{aligned}$$

Capítulo 2
Teoría de la Población

Al hablar de Teoría de la Población, la teoria de Malthus es un referente. A Carlos Marx se le conoce por muchas propuestas, pero muy poco por su teoría acerca del exceso relativo de la población. Su falta de proyección en este terreno frente a su brillante trayectoria política contribuyen a su desconocimiento. Mientras Malthus formula una teoría donde establece una ley general que explica el crecimiento total de la población en relación con la variable de disponibilidad de alimentos, Marx fué más modesto y concreto. Marx plantea la relación entre la clase que busca trabajo y la oferta de empleo. El desequilibrio que marcaría el exceso del número de personas buscando trabajo empleo se verificaría cuando la oferta de puestos de trabajo fuera insuficiente, o lo que es lo mismo, cuando los trabajadores que buscan empleo fueran más que los que se ofrecen. En otras palabras, los medios de subsistencia son a Malthus lo que los puestos de trabajo son a Marx[1].

No es la intención de este capítulo discutir estas ideas. El propósito central de este capítulo es el de presentar un modelo matemático para representar a la población y su dinámica respecto del tiempo, definiendo para esto nuevas funciones del tipo probabilístico usando algunos conceptos usados en el capítulo anterior.

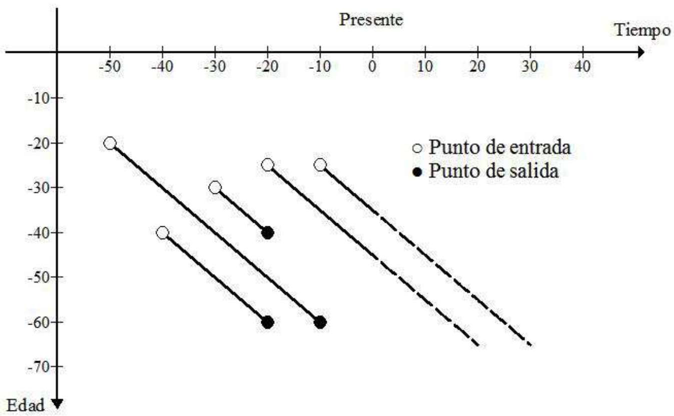
2.1. El Diagrama de Lexis

En esta sección se introducirá un método para visualizar gráficamente la evolución de una población. Por ejemplo, la evolución del personal laboral de una empresa puede

[1]Una discusión más s fondo puede consultarse en *Teoría de la Población* de Graciela D. Sarrible (Ver referencias).

ser representada por segmentos de líneas paralelas en un diagrama de dos dimensiones llamado *Diagrama de Lexis*. (Ver Dibujo 2.1) El diagrama presenta el punto de entrada de un trabajador a la población laboral, sus coordenadas de referencia son el tiempo de entrada y la edad de entrada. El segmento de línea sigue un comportamiento diagonal hasta el punto de salida del trabajador de la población laboral, cuyas coordenadas de referencia son el tiempo de salida y la edad de salida.

El Dibujo 2.1 muestra que a tiempo -25 habían 3 trabajadores activos, mientras que a tiempo 0 (en el presente) hay solo dos trabajadores activos. Uno podría estar interesado en hacer afirmaciones acerca del tiempo futuro de trabajo de los trabajadores actualmente activos. Los segmentos de línea punteada en el Dibujo 2.1 denotan el posible tiempo futuro de trabajo de dichos trabajadores.



Dibujo 2.1 Diagrama de Lexis.

Con base en la grafica anterior podemos hacer las siguientes tres afirmaciones:

1. La edad promedio de los empleados al tiempo -25 es 40.

2. Dos miembros de la población han alcanzado la edad 50 como empleados.

3. De los tres empleados que hubo a tiempo -25, uno alcanzó la edad 50, otro la alcanzó 5 años después y el último no llegó a edad 50 como empleado.

Las siguientes observaciones resumen las características de un Diagrama de Lexis.

Observaciones:

1. Un punto fijo en el tiempo es representado por una línea vertical. El número de miembros de una población a ese tiempo está dado por el número de segmentos de línea (cada uno representa un individuo) que intercepta dicha línea vertical.

2. Una edad fija es representada por una línea horizontal. Si un segmento de línea asociado a la edad de un individuo intercepta una línea horizontal a la edad x_0, entonces ese individuo alcanzó la edad x_0 como miembro de la población.

3. Si un miembro alcanza la edad x al tiempo t, el tiempo de nacimiento de dicho miembro es $u = t - x$. Mientras que x y t son usados como coordenadas en un diagrama de Lexis, frecuentemente se usan las variables x y u en el desarrollo de la teoria matemática de la población. Una de las razones para esto es que mientras u es constante para cada miembro de la población, no lo es así para toda la población.

Existen muchas aplicaciones de estas ideas. Por ejemplo, el diagrama de Lexis es usado también para representar la evolución de vidas en un determinado grupo, en lugar de individuos por separado. Los individuos de dicho grupo tienen en común la edad de nacimiento. En un modelo donde la población en cuestión son trabajadores, varias formas de salida de dicha población pueden presentarse y las entradas pueden ocurrir a diferentes edades.

Los modelos demográficos desarrollados en las siguientes secciones sólo consideran una forma de retiro, el fallecimiento del individuo. Del mismo modo, el nacimiento de un individuo es considerado como la única forma de entrada a la población. El enfoque en el que se desarrolla la teoría es, por su puesto, probabilístico.

2.2. Poblaciones Estacionarias

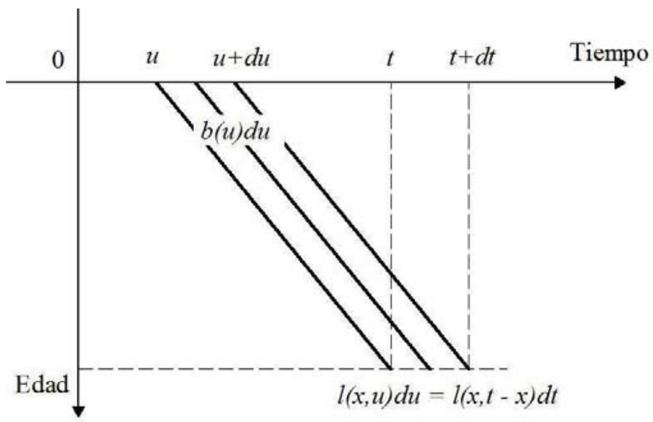
Para el resto de este capítulo se usará el modelo contínuo para poblaciones en lugar del discreto donde cada miembro de la población es representado por una segmento de línea, así como lo muestra el Dibujo 2.1. Este cambio nos permite hacer cálculos usando las herramientas vistas en el capítulo anterior. El desarrollo es totalmente análogo bajo el enfoque discreto.

Como ya se mencionó, el nacimiento es la única forma de entrada a la población y el fallecimiento la única forma de salida. El modelo no considera la emigración. Como los nacimientos ocurren continuamente, $b(u)$ denotará la *función del número de nacimientos* al tiempo u. Es decir, $b(u)du$ es el número de nacimientos entre los tiempos u y $u + du$. Definimos también la función $s(x, u)$ como la función de supervivencia de aquellos que nacieron al tiempo u, llamada *función de supervivencia de la generación.* Dado lo anterior, definimos ahora

$$l(x, u) = b(u)s(x, u). \tag{2.2.1}$$

La función denotada por $l(x, u)$ es llamada *función de densidad de poblacíon.*

Para interpretar la función $l(x, u)$ haremos referencia a la versión continua del diagrama de Lexis. (Ver Dibujo 2.2). Los dibujos fueron diseñados para interpretar $l(x, u)$ en términos de diferenciales, así como para visualizar las regiones de integración.



Dibujo 2.2 Interpretación de $l(x, u)$.

De los $l(0, u)du = b(u)du$ nacidos entre los tiempos u y $u + du$, $l(x, u)du$ sobrevivieron a edad x. Como $t = x + u$, entonces $dt = du$, y la expresión correspondiente puede ser reescrita e interpretada como

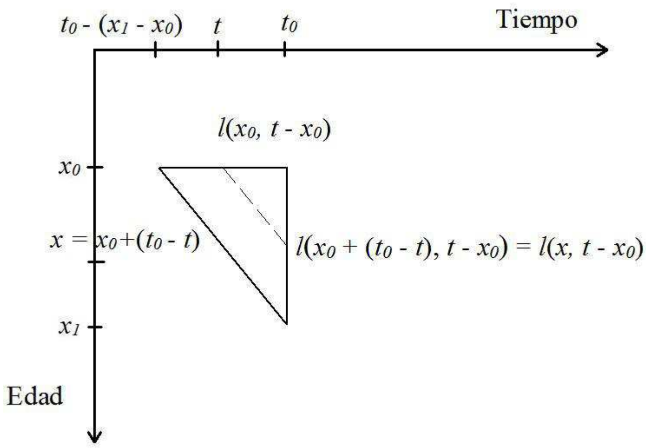
$$
\begin{aligned}
l(x, t-x)dt \;&=\; (\text{numero de individuos que alcanzaron la} \\
&\quad\ \text{edad } x \text{ entre los tiempos } t \text{ y } t+dt).
\end{aligned} \tag{2.2.2}
$$

De aquí se sigue que el número de individuos que alcanzaron la edad x entre los tiempos t_0 y t_1 es

$$\int_{t_0}^{t_1} l(x, t-x)\, dt. \tag{2.2.3}$$

Sean ahora $x_0 < x_1$ dos edades y t_0 un tiempo dado. Una pregunta interesante sería: ¿cuántos vivos entre las edades x_0 y x_1 hay al tiempo t_0?

Esos vivos debieron haber alcanzado la edad x_0 entre los tiempos $t_0 - (x_1 - x_0)$ y t_0 y sobrevivir al tiempo t_0, así como lo indica el Dibujo 3.2. La línea diagonal punteada representa el conjunto de vidas que alcanzaran las edades x_0 y x_1 al tiempo t_0.



Dibujo 3.2. Número de vidas entre las edades x_0 y x_1 al tiempo t_0.

Por lo tanto, el número buscado es

$$\int_{t_0-(x_1-x_0)}^{t_0} l(x_0, t-x_0)\, \frac{s(x_0+t_0-t, t-x_0)}{s(x_0, t-x_0)}\, dt \tag{2.2.4}$$

Al evaluar la ecuación anterior hacemos uso de (2.2.1) para escribir el integrando como

$$b(t-x_0)\cdot s(x_0+t_0-t,t-x_0)=l(x_0+t_0-t,t-x_0).$$

Ahora, si $x=x_0+(t_0-t)$, entonces (2.2.4) puede escribirse también como

$$-\int_{x_1}^{x_0} l(x,t_0-x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} l(x,t_0-x)\,dx. \tag{2.2.5}$$

De (2.2.5) podemos hacer la siguiente afirmación:

$$\begin{aligned} l(x,t_0-x)\,dx &= (\text{numero de vivos entre las edades} \\ &\qquad x \text{ y } x+dx \text{ al tiempo } t_0). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Por lo tanto, la función de densidad de población tiene dos interpretaciones: la primera está dada por (2.2.2) y (2.2.3) con las que se calcula el número de individuos que alcanzaron la edad x entre los tiempos t y $t+dt$; la segunda esta dada por (2.2.5) y (2.2.6) con las que se calcula el número de vivos entre las edades x y $x+dx$ al tiempo t_0. Las dos interpretaciones corresponden a cortes en el diagrama de Lexis. Los cortes hechos por las líneas t y $t+dt$ corresponden a la primer interpretación, y los cortes hechos por las líneas x y $x+dx$ corresponden a la segunda.

Para incorporar las muertes a nuestro modelo, se define

$$\mu(x,u)=-\frac{1}{s(x,u)}\frac{\partial}{\partial x}s(x,u)=-\frac{1}{l(x,u)}\frac{\partial}{\partial x}l(x,u) \tag{2.2.7}$$

como la *fuerza de mortalidad de la generación* a edad x para aquellos que nacieron al tiempo u.

Si, por otro lado, $l(x,u)$ es independiente de u se tiene una *población estacionaria.* Para una población de este tipo, (2.2.1) se convierte en

$$l(x,u)=bs(x) \tag{2.2.8}$$

donde b es la tasa constante de nacimientos y $s(x)$ es la función de supervivencia que no depende del tiempo de nacimiento. Para poblaciones de personas, b comúnmente expresa el número de nacimientos por año, y la variable edad es medida en años. De este modo, la expresión (2.2.8) puede ser reescrita como

$$l(x,u)=bs(x)=l_x \tag{2.2.9}$$

donde b juega el papel del *radix* l_0 visto en el capítulo anterior.

Para poblaciones estacionarias podemos escribir (2.2.5) como

$$\int_{x_0}^{x_1} l_x \, dx = T_{x_0} - T_{x_1} \tag{2.2.10}$$

donde T_x está definido como

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} \, dt. \tag{2.2.11}$$

Dado lo anterior, el número de vivos en una población estacionaria entre las edades x_0 y x_1 en cualquier tiempo t puede ser expresado en términos de la función T_x. Puede demostrarse además que para $l_x\mu(x)$ se cumple

$$\int_{x_0}^{x_1} l_x\mu(x) \, dx = l_{x_0} - l_{x_1},$$

que es la frecuencia de muertes entre las edades x_0 y x_1 en cualquier tiempo t. En particular, la frecuencia de muertes a edad mayor o igual a x_0 es igual a la frecuencia del número de vivos que alcanzan la edad x_0 en cualquier tiempo t. De aqui el nombre de población estacionaria.

Si, por otro lado, la función de densidad de población es de la forma

$$l(x, u) = e^{Ru} bs(x) = e^{Ru} l_x \tag{2.2.12}$$

donde $b > 0$, R es una constante y $s(x)$ es la función de supervivencia, independiente del tiempo de nacimiento, la población resultante es llamada *población estable*. Por lo que la frecuencia de nacimientos al tiempo u en una población de este tipo es $e^{Ru}b = e^{Ru}l_0$. En particular, cuando $R = 0$ la población estable se convierte en estacionaria.

Usando (2.2.5) vemos que la población total al tiempo t, denotada por $N(t)$, para una población estable está dada por

$$N(t) = \int_0^{\infty} l(x, t - x) \, dx = e^{Rt} \int_0^{\infty} e^{-Rx} \, l_x \, dx. \tag{2.2.13}$$

Por lo tanto, si $R > 0$, la población crece exponencialmente, por otro lado, si $R < 0$, la población decrece exponencialmente.

Usando nuevamente (2.2.5) vemos que la proporción del total de población estable que se encuentra entre las edades x_0 y x_1 al tiempo t es

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} l(x,t-x)dx}{\int_0^\infty l(x,t-x)dx} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} e^{-Rx} l_x dx}{\int_0^\infty e^{-Rx} l_x dx}, \tag{2.2.14}$$

que es independiente de t. Así, mientras el tamaño de la población estable puede cambiar a través del tiempo, la distribución de las edades de los individuos en la población es constante.

Para una población estable, puede calcularse el número de individuos entre las edades x_0 y x_1 usando (2.2.5), es decir

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} l(x,t-x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)} l_x dx \\ &= e^{R(t-x_0)} l_{x_0} \bar{a}_{x_0:\overline{x_1-x_0}|\delta=R}. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Tomando el límite cuando $x_1 \to \infty$ en la expresión anterior, el número de individuos vivos en edad mayor a x_0 al tiempo t en una población estable es $e^{R(t-x_0)} \bar{a}_{x_0 @ \delta=R}$.

Para una población estable, tomando como referencia a (2.2.12), la fuerza de mortalidad dada en (2.2.7) se convierte en

$$\mu(x,u) = -\frac{1}{l(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} l(x,u) = \mu(x).$$

Por otro lado, la frecuencia de muertes al tiempo t para una población estable entre las edades x_0 y x_1 puede expresarse como

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)}\, l_x\, \mu(x)\, dx = l_{x_0}\, e^{R(t-x_0)}\, \bar{A}^{\,1}_{x_0:\overline{x_1-x_0}|\delta=R} \tag{2.2.16}$$

y la frecuencia de muertes al tiempo t para individuos de edad mayor a x_0 es $e^{R(t-x_0)} \bar{A}_{x_0} l_0$.

Lo anterior puede ser usado para confirmar las propiedades de una población estacionaria, es decir, para una población de individuos de edad mayor a x_0 al tiempo t, la tasa de cambio correspondiente es

$$\begin{aligned}
\textit{Tasa de cambio} &= \frac{\overbrace{e^{R(t-x_0)}l_{x_0}}^{(1)} - \overbrace{e^{R(t-x_0)}l_{x_0}\bar{A}_{x_0}}^{(2)}}{\underbrace{e^{R(t-x_0)}l_{x_0}\bar{a}_{x_0}}_{(3)}} \\
&= \frac{1-\bar{A}_{x_0}}{\bar{a}_{x_0}} = R,
\end{aligned}$$

donde (1) es la frecuencia de aquellos que alcanzan la edad x_0, (2) es la frecuencia de los que mueren a edad mayor a x_0 al tiempo t y (3) es el número total de miembros de edad mayor a x_0 al tiempo t. El paso final se sigue ya que las funciones son calculadas a la fuerza de interés R.

A modo de ejemplo, considere una población estacionaria cuya esperanza completa de vida a edad 0, derivada de la función de supervivencia, puede ser obtenida dividiendo el número de la población al tiempo t entre la frecuencia de los nacimientos. Esto es,

$$\mathring{e}_0 = \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty \frac{l_x}{l_0}dx = \frac{T_0}{l_0}.$$

La pregunta sería: ¿Cuál es el resultado al efectuar un cálculo similar en una población estable? De acuerdo con (2.2.13)

$$\frac{N(t)}{e^{Rt}l_0} = \frac{\int_0^\infty l(x,t-x)dx}{e^{Rt}l_0} = \frac{\int_0^\infty e^{R(t-x)}l_x dx}{e^{Rt}l_0} = \bar{a}_0 \quad \text{a la tasa} \quad \delta = R.$$

Si $R > 0$ entonces $\bar{a}_0 < \mathring{e}_0$, por otro lado, si $R < 0$ entonces $\bar{a}_0 > \mathring{e}_0$, finalmente, si $R = 0$ se tiene una población estacionaria. Este ejemplo demuestra que las esperanzas de vida no pueden ser observadas directamente de una población estable a menos que $R = 0$.

2.3. Dinámica de Poblaciones

En el desarrollo matemático de un modelo para la frecuencia de los nacimientos, será necesario definir una nueva función: la *función fuerza de natalidad*, denotada por $\beta(x,u)$. Así, $\beta(x,t-x)dt$ representa el número de mujeres que nacieron entre los tiempos t y $t+dt$ donde la edad de la madre es x, mismas que nacieron al tiempo $t-x$. La función fuerza de natalidad es una tasa de natalidad instantánea a una edad especifica.

El número total de mujeres que nacieron entre t y $t + dt$ es

$$b_f(t)\, dt = \left[\int_0^\infty l_f(x, t-x)\, \beta(x, t-x)\, dx \right] dt \tag{2.3.1}$$

En (2.3.1) el subíndice f denota que la función esta relacionada a la vida de personas del sexo femenino.

Si se divide (2.3.1) por dt y si, a partir de (2.2.1), se define $l_f(x, t-x) = b_f(t - x)s_f(x, t-x)$, entonces la función de densidad de los nacimiento para las mujeres satisface la ecuación integral

$$b_f(t) = \int_0^\infty b_f(t-x)\, s_f(x, t-x)\, \beta(x, t-x)\, dx. \tag{2.3.2}$$

El problema ahora es encontrar $b_f(t)$ dadas las funciones $s_f(x, t-x)$ y $\beta(x, t-x)$. La función $s_f(x, t-x)\beta(x, t-x)$ es de particular importancia y es llamada *función de maternidad*, la cual es denotada por $\phi(x, t-x)$.

El resto de esta sección se supondrá que la función de maternidad no depende del año de nacimiento de la madre. Esto es, $s_f(x, t-x)\beta(x, t-x) = \phi(x)$. Con este supuesto, (2.3.2) satisface ahora la ecuación integral

$$b_f(t) = \int_0^\infty b_f(t-x)\, \phi(x)\, dx \tag{2.3.3}$$

Una solución particular de la ecuación (2.3.3) es

$$b_f(t) = b\, e^{Rt} \tag{2.3.4}$$

donde b es una constante positiva y R la solución real única de la ecuación

$$H(r) = 1 \tag{2.3.5}$$

donde

$$H(r) = \int_0^\infty e^{-rx}\, \phi(x)\, dx.$$

Para demostrar lo anterior, se sustituye (2.3.4) en (2.3.3), es decir

$$b\, e^{Rt} = \int_0^\infty b\, e^{R(t-x)}\, \phi(x)\, dx,$$

dividiendo la expresión anterior por $b\, e^{Rt}$

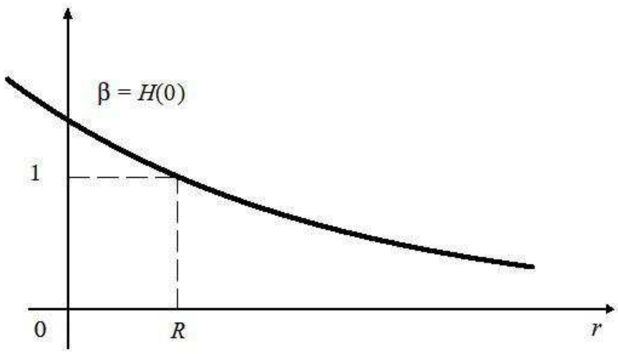
$$1 = \int_0^\infty e^{-Rx}\, \phi(x)\, dx = H(R).$$

Para demostrar que en efecto que $H(r) = 1$ tiene una solución real única, se hacen las siguientes tres observaciones:

1. $H'(r) = -\int_0^\infty xe^{-rx}\, \phi(x)\, dx < 0$
2. $H(0) = \int_0^\infty \phi(x)\, dx > 0$
3. $\lim_{r\to\infty} H(r) = 0$
4. $\lim_{r\to-\infty} H(r) = \infty$.

Estas observaciones se resumen en la siguiente figura junto con el hecho de que la función $H(x)$ es convexa, es decir

$$H''(r) = \int_0^\infty x^2\, e^{-rx}\, \phi(x)\, dx > 0.$$



Dibujo 3.1. Función $H(r)$, y (2.3.5)

En la figura anterior se puede apreciar que hay una solución real única R (mostrada como positiva, pero que también puede tomar valores negativos)

Si $b_f(t) = b\, e^{Rt}$, entonces $l_f(x, t-x) = b\, e^{R(t-x)}\, s_f(x)$, y la población de mujeres es estable. Nuevamente, cuando $R = 0$ la población de mujeres es estacionaria, es decir, es independiente de $u = t - x$, la edad de nacimiento.

Para verificar si R es positivo, cero o negativo será necesario analizar el número β donde

$$\beta = H(0) = \int_0^\infty \phi(x)dx.$$

Examinando la figura de la función $H(r)$ podemos decir que

- Si $\beta > 1$, R es positivo, y la población es estable y creciente
- Si $\beta = 1$, R es cero, y la población es estacionaria
- Si $\beta < 1$, R es negativo, y la población es estable y decreciente.

Cuando $H(0) = \beta$ puede interpretarse como el número de mujeres que cada madre parió, y es llamada *tasa de reproducción*. El parámetro R es comúnmente llamado *tasa intrínseca de crecimiento de población.*

Considere ahora la función de maternidad

$$\phi = x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Usando (2.3.5) puede encontrarse el valor de R, esto es

$$\begin{aligned} H(r) &= \int_0^\infty e^{-rx}\,\phi(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty e^{-rx}\,x^{\alpha-1}\,e^{\beta x}\,dx \\ &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,e^{-x(r+\beta)}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(r+\beta)^\alpha} = 1, \end{aligned}$$

de donde

$$R = [\Gamma(\alpha)]^{1/\alpha} - \beta.$$

Comentarios:
Las poblaciones no son estables, como puede ser deducido de esta sección. Varios aspectos de nuestro modelo pueden no concordar con la experiencia de hoy. Nuestro modelo básico, dado por (2.3.2), es construido bajo el supuesto de que la función de supervivencia y la fuerza de natalidad no cambian conforme el tiempo. En (2.3.3) restringimos aún más el modelo asumiendo que la función de natalidad depende de

la edad, pero no del año de nacimiento de las madres. Sin embargo, las estadísticas revelan cambios muy importantes en las funciones de supervivencia y en la fuerza de natalidad a través del tiempo.

Por otro lado, al resolver la ecuación integral (2.3.3) obtuvimos solo la solución real de la ecuación $H(r) = 1$. Dentro del campo de los números complejos una infinidad de soluciones pueden determinarse, además de la real. Esas soluciones adicionales de $H(r) = 1$ nos lleva a definir una solución general de (2.3.3) de la forma

$$\sum_j c_j b_f^j(t)$$

donde cada $b_f^j(t)$ está asociado a cada solución de $H(r) = 1$. Las raíces complejas, que están dadas en pares conjugados, pueden servir para suavizar la estructura de la función de densidad de los nacimientos.

La Teoría de Población es una colección de elegantes ideas matemáticas. Sin embargo, existen problemas del tipo estadístico a la hora estimar algunos de los componentes involucrados en el modelo (la función de supervivencia y la función fuerza de natalidad) con los datos que se disponen. Lo anterior se debe a que se ha observado que estas funciones cambian conforme el tiempo, lo cual refleja la naturaleza de la dinámica de la población humana.

Como en todos los modelos que tratan de representar fenómenos naturales, los modelos matemáticos de población consideran solo una pequeña parte de la dinámica total y de la distribución real de la población. Incluso si el modelo de población estable fuera una buena aproximación en un determinado tiempo, no puede ser apropiado usarlo en el largo plazo. La constante R no puede ser mayor que cero en un planeta finito en un periodo largo de tiempo. De manera análoga, si R es menor que cero en un periodo largo de tiempo, la población estable tendería a la extinción.

Capítulo 3
Teoría de Pensiones

3.1. Clases de planes y fondo de pensiones

Un *plan de pensiones* define el derecho de las personas a cuyo favor se constituye un fondo para percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, orfandad o invalidez y las obligaciones de contribución al mismo. De esta manera, se constituye un *fondo de pensiones* como un patrimonio creado al exclusivo objeto de dar cumplimiento al plan de pensiones adscrito a él y cuya gestión y control se realiza por las entidades gestoras y la custodia se encomienda a una entidad depositaria (banco, cajas de ahorro), cuya misión fundamental es la custodia y depósito de los valores mobiliarios y demás activos financieros integrados en el fondo de pensiones.

Existen dos clases de pensiones:

1. Según la naturaleza de su promotor:
   - *Sistema de empleo.* Es promovido por una empresa en favor de sus empleados
   - *Sistema asociado.* La promueve un colectivo en favor de sus miembros
   - *Sistema individual.* Promovido por entidades financieras (bancos, compañías de seguros) para que cualquier persona física que lo desee se adhiera.
2. Según las obligaciones estipuladas:
   - *Planes de beneficios definidos.* Definen la cuantía los beneficios a recibir por el jubilado y las aportaciones se calculan con base en ellas

- *Planes de contribución definidas.* Donde se define la cuantía de aportación del plan
- *Plan mixto.* Define la cuantía de las aportaciones para algunos beneficios, y la cuantía de los beneficios para otras, o bien, define simultáneamente las contribuciones y beneficios.

3.1.1. Beneficios Definidos

Un *plan de beneficios definidos* es un plan de beneficios por retiro en el que los montos a pagar por concepto de beneficios se determinan por medio de una fórmula, la cual se establece en el contrato, normalmente basada en los sueldos de los empleados, en los años de servicio o en ambas cosas a la vez. Este tipo de plan define el monto del beneficio que se pagará al propietario de la cuenta. Dicho beneficio es generalmente pagado en un periodo de tiempo predeterminado, por ejemplo, al alcanzar la edad de retiro. Algunos planes proveen beneficios antes de que el trabajador alcance la edad de retiro, ya sea por muerte o discapacidad.

Este tipo de plan usualmente paga los beneficios en forma de una anualidad vitalicia. Esta anualidad comienza a ser pagadera a la edad que el contrato establece y termina cuando el jubilado fallece. Por ejemplo, un plan puede establecer pagos mensuales del 30 % de la compensación media del jubilado. Estos pagos comienzan cuando el participante alcanza la edad de jubilación, 65 por ejemplo, y continua hasta que este fallece.

A diferencia del plan de contribuciones definidas, el cual definiremos en la siguiente sección, el empleador corre los riesgos de inversión del fondo, es decir, las ganancias o pérdidas no afectan los montos contratados en el plan de pensión para cada trabajador.

Las ventajas y desventajas de este tipo de plan son las siguientes:

Ventajas:

- Garantiza beneficios a los trabajadores
- No hay riesgos de inversión para los participantes

- No requiere conocimiento de inversiones por parte de los trabajadores.

Desventajas:

- Algunos trabajadores no comprenden bien la estructura del plan dada la estructura actuarial del cálculo de las aportaciones
- No hay beneficios para los trabajadores que se retiran antes de alcanzar la edad de jubilación.

Aún cuando el beneficio de un plan de pensiones sea el mismo, existen diferentes métodos actuariales para evaluar *a priori* su coste anual. La elección de este método no afecta el coste *a posteriori* del plan, pero sí supone una distinta distribución anual de la cuantía de las aportaciones a lo largo de los años en que también debe tenerse en cuenta la capacidad real de financiamiento del colectivo afiliado.

Además, aquellos métodos que determinan unas aportaciones iniciales más elevadas pueden de hecho reducir el coste final del plan, ya que en estos casos la cuantía del fondo crece con mayor rapidez y se pueden obtener, en consecuencia, rendimientos financieros más elevados de los que se obtendrían con menores importes.

Los métodos de costeo actuarial que discutiremos en las siguientes secciones giran en torno a este tipo de plan.

3.1.2. Contribuciones Definidas

Un *plan de contribuciones definidas* es un plan de beneficios por retiro, en el que los montos a pagar como beneficios se determinan en función de las contribuciones al fondo y de los rendimientos de la inversión que el mismo haya generado. Los montos de las contribuciones que cada participante aporta al fondo son estipulados en los contratos de pensiones. Por ejemplo, un plan puede establecer aportaciones anuales al fondo del 10 % del salario total anual de un trabajador, o bien puede hacer contribuciones mensuales al fondo proveniente de su pago mensual. Las aportaciones que los trabajadores hacen al fondo pueden ser invertidos en acciones, bonos o en otro tipo de valores. Al momento del retiro del trabajador, el monto acumulado representa el valor total de las contribuciones hechas al fondo más las ganancias de inversión sobre dichas contribuciones.

Las inversiones hechas en este tipo de plan, a diferencia del Plan de Beneficios Definidos, no garantizan un pago al momento del retiro. Los trabajadores que optan por este tipo de plan recibirán una declaración de cuenta anual, en la cual se indicarán las ganancias (o pérdidas) y el valor actual de su fondo.

Las ventajas y desventajas de este tipo de plan son las siguientes:

Ventajas:

- Los participante tienen cierto grado de conocimiento de cuánto quieren ahorrar
- Pueden ser financiados a través de deducciones a la nómina de los participantes
- Los participantes pueden beneficiarse de los buenos resultados de inversión
- Es fácil de entender por los trabajadores.

Desventajas:

- Dificultad de formar una reserva para aquellos que se incorporan al plan a edad avanzada
- Los trabajadores asumen los riesgos de inversión.

3.1.3. Amortización del coste adicional o suplementario

Cuando la fecha de implantación de un plan de pensiones no coincide con la fecha en que se comienzan a devengar los beneficios estipulados en el reglamento propio del plan (esta última coincide con la fecha de entrada del empleado a la empresa), es necesario establecer un coste adicional o suplementario para evaluar estos beneficios de carácter, de cierto modo, retroactivos. También puede surgir este coste adicional a consecuencia de incorporación de mejoras en la prestaciones previstas inicialmente en la normativa del plan.

Esto significa que el plan de pensiones, y por consiguiente, el fondo que lo instrumenta, comienza su funcionamiento con unas obligaciones de partida de carácter suplementario que habrá que ir amortizando de acuerdo con un método actuarial a lo largo de los años que dure el plan de pensiones. Se denomina «coste suplementario» del plan aquella fracción de la aportación total anual realizada al fondo que se dedica precisamente a efectuar esta amortización.

Existen tres enfoques generales para determinar la amortización del costo adicional o suplementario para un año concreto en un Plan de Pensiones:

1. **Amortización del interés generado por el coste adicional**. Este es el método más sencillo y normalmente el menos costoso durante los primeros años. La intención no es amortizar el coste suplementario, sino únicamente el interés que este genera. El principal inconveniente de este método es que el plan nunca está completamente financiado, por lo que, en el supuesto de conclusión del plan, las prestaciones devengadas por los participantes no podrían ser completamente satisfechas.

2. **Amortización constante del Coste Suplementario**. Es el método que más se utiliza en la práctica. Consiste en determinar la cantidad anual constante necesaria para amortizar completamente la obligación adicional por el coste suplementario en un número determinado de años, tratando este gasto como un valor descontado y, por ello, generador de un tipo de interés.

   El cuadro de amortización es análogo a la devolución de un préstamo. Es decir, cada parte anual se compone de una parte principal y una parte de interés, siendo más importante el componente de interés en los primeros años. La parte de cuota anual que representa la devolución del principal aumenta cada año.

3. **Amortización del Coste Suplementario mediante un porcentaje de salario.** Consiste en determinar el salario necesario para amortizar el coste suplementario durante un determinado número de años. Para ello hay que determinar el valor presente de los salarios futuros que se espera pagar durante el periodo de amortización. Pueden efectuarse estimaciones sobre los ingresos y salidas del colectivo en el caso de que se considere abierto. Para determinar el porcentaje del salario necesario para financiar el coste suplementario basta dividir éste entre el valor presente de los salarios futuros esperados durante el periodo de amortización.

Si los salarios reales fueran menores que los proyectados, el coste suplementario nunca podría ser completamente amortizado sin un ajuste al alza de porcentaje del salario destinado a dicha amortización. Por el contrario, si los salarios reales crecieran más de lo previsto, el coste suplementario se amortizaría en un período más corto que el inicialmente previsto. Dado que los salarios se incrementan a lo largo del tiempo, la anualidad de amortización del costo suplementario que resulta mediante este método será menor que la obtenida mediante el método de amortización constante durante los primeros años del periodo de amortización, y mayor durante los últimos años.

3.1.4. Portabilidad

La portabilidad de pensiones ha sido considerada como la habilidad de un trabajador de llevar una pensión de un plan de pensiones a otro. Más recientemente, los analistas de política han ampliado su significado para incluir la habilidad de los trabajadores de mantener el valor de su pensión de jubilación en el cambio de trabajo.

En el contexto de planes de beneficio definido, la portabilidad es definida como la habilidad de un participante de mantener actualizados y trasladar pensiones de jubilaciones acumuladas cuando cambia de trabajo.

Para comprender los posibles beneficios que otorga la portabilidad de derechos, es importante destacar sus más importantes objetivos:

1. Reconocer el cumplimiento de requisitos parciales cuando un trabajador cambia de un plan de pensiones a otro

2. Cuantificar de forma justa y transparente los derechos vinculados al grado de cumplimiento de requisitos en proporción al tiempo cotizado

3. Transferir los derechos adquiridos de un plan a otro.

Un hecho importante es que para que la portabilidad sea factible, es necesario que los requisitos para obtener una pensión sean de la misma naturaleza (edad y/o tiempo de cotización), que haya disponibilidad de recursos para liquidar las transferencias entre los sistemas y que exista una base de información eficiente de las cotizaciones del trabajador.

Otras características que son deseables, aunque no estrictamente necesarias, son:

1. Organización de los sistemas bajo el modelo de cuentas individuales
2. Establecimiento de requisitos similares para la jubilación (edad y antigüedad)
3. Bases de contribución homogénea (porcentajes y salarios bases)
4. Beneficios congruentes con el tipo de cotización entre diferentes planes, especialmente cuando estos son de beneficio definido.

3.2. Método de fondeo (Financiamiento Final)

En los modelos que se veran a lo largo del resto de este tercer y último capítulo, se supondrá una población donde los miembros entran a edad a y salen a edad r, sujetos a una función de supervivencia $s(x)$ con $s(a) = 1$. Para $a < x < r$, los decrementos pueden ocurrir por causa de muerte u otras causas, pero para $x > r$ la muerte es la única causa de decremento. La frecuencia con la que nuevos miembros ingresan al plan a edad a a tiempo u está dada por $n(u)$, y la frecuencia de aquellos que alcanzaron la edad x a tiempo t esta dada por

$$n(u)\, s(x) \tag{3.2.1}$$

donde $u = t - (x - a)$ es el tiempo de entrada al plan. La expresión (3.2.1) está relacionada con (2.2.1), excepto que los "nacimientos" ocurren a edad a al ingresar al plan.

Además de lo anterior, se supondrá que la tasa de ingreso (salarial) de los miembros a edad x a tiempo 0 es $w(x)$, $a < x < r$. La función $w(x)$ expresa la experiencia individual y otros componentes en el cambio salarial. La función salarial también cambia por el factor *años-de-experiencia* que se refleja en la inflación y en los cambios en la productividad de todos los miembros. El factor de experiencia que se usará es $e^{\tau t}$. Como es evidente, este factor no depende de la edad de los individuos. De este modo, la tasa salarial anual esperada a tiempo t por un miembro de edad x está dada por

$$w(x)\, e^{\tau t} \qquad a < x < r. \tag{3.2.2}$$

Comparando este último resultado con (2.2.5), es claro que la tasa salarial total a tiempo t para los $n(t-x+a)s(x)dx$ miembros entre las edades x y $x+dx$ es

$$n(t-x+a)\; s(x)\; w(x)\; e^{\tau t}\, dx,$$

y la tasa salarial anual de todos los individuos que han alcanzado la edad r a tiempo t es

$$W_t = \int_a^r n(t-x+a)\; s(x)\; w(x)\; e^{\tau t}\, dx. \tag{3.2.3}$$

La igualdad anterior es interpretada, o bien definida como la *tasa de pago nominal total a tiempo t.*

El modelo de pensiones bajo estudio proporciona anualidades por concepto de jubilación pagaderas anualmente solo después de haber alcanzado la edad de jubilación r. La tasa inicial anual de pagos es una fracción f de la tasa salarial final. De este modo, para un miembro que se jubila a tiempo t, la tasa de pagos proyectados es

$$f\; w(r)\; e^{\tau t}. \tag{3.2.4}$$

Por otro, lado para un miembro jubilado a edad $x \geq r$, la tasa anual de pagos por concepto de jubilación es de la forma

$$f\; w(r)\; e^{\tau(t-x+r)}\; h(x)$$

donde $h(x)$ representa un factor de ajuste aplicado a la tasa inicial de pagos, $f\; w(r)\; e^{\tau(t-x+r)}$, para aquellos jubilados hace $x-r$ años. Es claro que $h(r)=1$. A manera de ejemplo, $h(x)$ puede ser la función exponencial $\exp\{\beta(x-r)\}$ donde β es una tasa de incremento constante (posiblemente relacionada con la tasa de inflación esperada, es decir, se asume un cambio salarial acorde a la inflación esperada después del retiro).

Bajo el *método de financiamiento final* las pensiones no son financiadas por contribuciones hechas por los trabajadores mientras trabajan, en vez de eso, contribuciones únicas son hechas por los trabajadores al momento del retiro. La tasa de contribuciones requerida, o bien, la *tasa de costos normales* a tiempo t, denotado por ${}^TP_t$, es el valor presente actuarial de las futuras pensiones para los miembros que han alcanzado la edad r. Para determinar ${}^TP_t$ se supondrá que los intereses son ganados a una fuerza anual δ, y denotaremos por $\bar{a}_x^h$ al valor presente actuarial de la anualidad vitalicia pagadera continuamente a una persona de edad r, con tasa de ingresos anuales $h(x)$

cuando (r) alcanza la edad x. Por lo tanto

$$\bar{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-\delta(x-r)}\, h(x)\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx \tag{3.2.5}$$

De acuerdo con (2.2.2), se tienen $n(t-r+a)\, s(r)\, dt$ miembros que alcanzaron la edad r entre los tiempos t y $t+dt$, y por (3.2.4) ellos acumularan pensiones a una tasa promedio inicial de $f\, w(r)\, e^{\tau t}$. Por lo tanto,

$$^{T}P_t = f\, w(r)\, e^{\tau t}\, n(t-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h. \tag{3.2.6}$$

Más adelante veremos que $^{T}P_t$ es un componente básico para definir varias funciones que se usarán para describir operaciones de financiamiento.

Para ilustrar la teoría, a menudo se recurre al *caso exponencial*, el cual posee las siguientes características:

- $n(u) = ne^{Ru}$. Dado que hemos asumido que la función de supervivencia es independiente del tiempo, se aprecia de (2.2.12) y de la forma de $n(u)$ que el tamaño de la población esta cambiando exponencialmente a la tasa R, pero con una distribución estable de edades dentro de la población.
- $h(x) = e^{\beta(x-r)}$, esto es, las pensiones son ajustadas a una tasa constante anual β.

Antes de adentrarnos más en el caso exponencial, debemos entender sus limitaciones. Es claro que las condiciones para el crecimiento o decremento exponencial no pueden ser de forma indefinida, es decir, la población no puede crecer o decrecer indefinidamente. Cuando el caso exponencial puede darse, los tres factores económicos fundamentales, interés δ, sueldo τ, y el factor de ajuste a las pensiones β, están relacionadas. Por ejemplo, si β esta relacionada con la inflación, es conveniente suponer que $\delta > \beta$ aún cuando hayan habido periodos inesperados donde $\delta < \beta$. Si $\beta > \tau$, como consecuencia se puede dar una mejora en la situación de aquellos trabajadores activos en relación a los trabajadores ya jubilados, es por eso que usualmente se asume $\beta \leq \tau$.

Ejemplo 13. *Para el caso exponencial, muestre que* $^{T}P_{t+u} = e^{\rho u}\, {}^{T}P_t$, *donde* $\rho = \tau + R$.

Solución. *De la definición del caso exponencial se tiene*

$$n(t+u-r+a) = n\, e^{R(t+u-r+a)},$$

y de (3.2.5)

$$\bar{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-(\delta-\beta)(x-r)}\,\frac{s(x)}{s(r)}dx = \bar{a}'_r \tag{3.2.7}$$

donde $\bar{a}'_x$ *está evaluada a una tasa de interés* $\delta-\beta$. *Usando* (3.2.6) *se obtiene*

$$\begin{aligned} {}^TP_{t+u} &= f\, w(r)\, e^{\tau(t+u)}\, n\, s(r)\, e^{R(t+u-r+a)}\, \bar{a}'_r \\ &= e^{(\tau+R)u}\, f\, w(r)\, e^{\tau t}\, n\, s(r)\, e^{R(t-r+a)}\, \bar{a}'_r \\ &= e^{\rho u}\cdot {}^TP_t, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

donde $\rho = \tau + R$.

$\diamondsuit$

Los términos involucrados en la expresión anterior pueden ser interpretados por separado. La tasa $\rho = \tau + R$ puede ser interpretado como la tasa total del crecimiento o decaimiento de la economía. El término $ns(r)$puede ser interpretado como el número de supervivientes a edad r, l_r, de los n miembros que ingresaron al grupo a edad a bajo la función de supervivencia $s(x)$, $a \le x \le r$.

Para el caso exponencial, la tasa salarial total anual a tiempo t, definida por (3.2.3) es

$$\begin{aligned} W_t &= \int_a^r n\, e^{R(t-x+a)}\, s(x)\, w(x)\, e^{\tau t}\, dx \\ &= n\, e^{R(t+a)+\tau t} \int_a^r e^{-Rx}\, s(x)\, w(x)\, dx,. \end{aligned}$$

Suponga ahora que la tasa inicial de ingreso por concepto de jubilación para una vida retirada a tiempo t está dada por

$$\frac{f}{b}\int_{t-b}^t w(r-t+y)\, e^{\tau y}\, dy \qquad 0 < b < r-a.$$

Haciendo el cambio de variable $z = t-y$, la integral anterior queda de la siguiente manera:

$$\frac{f}{b}\int_0^b w(r-z)\, e^{\tau(t-z)}\, dz.$$

Con base en lo anterior y usando (3.2.6), la tasa de costos por concepto de financiamiento final queda como

$$^{T}P_t = n(t-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h \left(\frac{f}{b}\right) \int_0^b w(r-y)\, e^{\tau(t-y)}\, dy.$$

De esta manera, para el caso exponencial

$$\begin{aligned} ^{T}P_{t+u} &= n(t+u-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h \left(\frac{f}{b}\right) \int_0^b w(r-y)\, e^{\tau(t+u-y)}\, dy \\ &= n\, e^{R(t+u-r+a)}\, s(r)\, \bar{a}_r' \left(\frac{f}{b}\right) \int_0^b w(r-y)\, e^{\tau(t+u-y)}\, dy \\ &= e^{\rho u} \cdot {}^{T}P_{t+u}, \end{aligned}$$

donde $\rho = \tau + R$ y $\bar{a}_r'$ está definido en (3.2.7).

Si, por ejemplo, la tasa inicial de ingreso por concepto de jubilación para una vida retirada a tiempo t está dada por $c(r-a)\, w\, e^{\tau t}$, entonces la tasa de costos por concepto de financiamiento final queda como

$$^{T}P_t = c(r-a)\, w\, e^{\tau t}\, n(t-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h.$$

Asimismo, para el caso exponencial

$$\begin{aligned} ^{T}P_{t+u} &= c(r-a)\, w\, e^{\tau(t+u)}\, n(t+u-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h \\ &= c(r-a)\, w\, e^{\tau(t+u)}\, n\, e^{R(t+u-r+a)}\, s(r)\, \bar{a}_r' \\ &= e^{\rho u} \cdot {}^{T}P_t. \end{aligned}$$

Ejemplo 14. *Suponga que* $s(x) = e^{-\mu(x-a)}$, $a \leq x \leq r$, *muestre* $^{T}P_t$ *para el caso exponencial.*

Solución. *Usando* (3.2.6) *y* (3.2.7)

$$\begin{aligned} ^{T}P_t &= f\, w(r)\, e^{\tau t}\, n\, e^{R(t-r+a)}\, e^{-\mu(r-a)} \bar{a}_r' \\ &= f\, w(r)\, n\, e^{\rho t}\, e^{-(R+\mu)(r-a)}\, \bar{a}_r'. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 15. *Considere un modelo con población estacionaria activa junto con los siguientes supuestos:* $a = 25$; $r = 65$; $n(t) = 0$ *para* $t < -40$ *y* $n(t) = 75$ *para* $t > -40$; $s(x) = (100 - x/75)$ *para* $25 < x < 100$; $\delta = 0{,}06$; $w(x) = 525/(100 - x)$; $\tau = 0{,}02$; $f = 0{,}6$, $h(x) = 1$. *Encuentre* $\bar{a}^h_x$, *en particular* $\bar{a}^h_{65}$ *y muestre* ${}^TP_t$.

Solución. *Usando* (3.2.5)

$$\begin{aligned}
\bar{a}^h_x &= \int_x^{100} e^{-\delta(y-x)} h(y) \frac{s(y)}{s(x)} dy \\
&= \frac{1}{100 - x} \int_x^{100} e^{-\delta(y-x)} (100 - y) dy \\
&= \frac{1}{(100 - x)\delta^2} \left[e^{-\delta(y-x)} \cdot [1 - \delta(y - 100)] \right]_x^{100} \\
&= \frac{1}{(100 - x)\delta^2} \left[e^{-\delta(y-x)} + \delta(100 - x) - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-\delta(100-x)}}{(100 - x)\delta^2},
\end{aligned}$$

para $25 < x < 100$. *En particular* $\bar{a}^h_{65}$ *=9.702. Por otro lado, usando* (3.2.6) *se obtiene el siguiente resultado:*

$${}^TP_t = \begin{cases} 34175{,}71 & 0 \leq t \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

◊

3.3. Funciones básicas para vidas retiradas

En esta sección se discutirán varias funciones básicas necesarias para definir varios conceptos relevantes en la teoría de financiamiento de pensiones relacionados a un grupo retirado. El prefijo r es usado en la notación para hacer referencia a un grupo retirado.

3.3.1. Valor presente actuarial de beneficios futuros, $(rA)_t$

Analogamente a lo visto con anterioridad, la expresión $n(t-x-a)\, s(x)\, dx$ es el número de miembros entre las edades x y $x+dx$ a tiempo t jubilados hace $x-r$ años con pensión a tasa anual inicial $f\, w(r)\, e^{\tau(t-x+r)}$. Por cada unidad de pensión inicial de un jubilado, el valor presente actuarial sigue siendo

$$\bar{a}_x^h = \int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\, h(y)\, \frac{s(y)}{s(x)}\, dy \tag{3.3.1}$$

donde $s(y)$ es una función de decremento basado solo en la mortalidad. Por lo tanto, de (3.2.6),

$$(rA)_t = \int_r^\infty n(t-x+a)\, s(x)\, f\, w(r)\, e^{\tau(t-x+r)}\, \bar{a}_x^h\, dx. \tag{3.3.2}$$

Sustituyendo (3.3.1) en la expresión anterior, podemos escribir una integral doble para $(rA)_t$, esto es

$$(rA)_t = \int_r^\infty n(t-x+a)\, f\, w(r)\, e^{\tau(t-x+r)} \left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\, h(y)\, s(y)\, dy\right] dx. \tag{3.3.3}$$

3.3.2. Tasa de pago de beneficios, B_t

Para los miembros ya jubilados, se definirá una nueva función: B_t, la tasa de pago beneficios a tiempo t. En (3.3.2), para el valor presente actuarial de los beneficios futuros para las vidas retiradas, vimos que las pensiones para los que se retiran con edades entre x y $x+dx$ fueron pagados a una tasa inicial de $n(t-x+a)\, s(x)\, f\, w(r)\, e^{\tau(t-x+r)}\, dx$. A edad x, esta tasa fue ajustada por el factor $h(x)$. Por lo tanto

$$B_t = \int_r^\infty n(t-x+a)\, s(x)\, f\, w(r)\, e^{\tau(t-x+r)}\, h(x)\, dx. \tag{3.3.4}$$

Puede demostrarse que para toda función diferenciable g se cumple

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t-x+r) = -\frac{\partial}{\partial x} g(t-x+r).$$

Derivando B_t y usando lo anterior tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g(t-x+r) &= \int_r^{\infty} f\, w(r)\, s(x)\, h(x)\, \frac{\partial}{\partial t}\left[n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)}\right] dx. \\
&= -\int_r^{\infty} f\, w(r)\, s(x)\, h(x) \frac{\partial}{\partial x}\left[n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)}\right] dx \\
&= -f\, w(r)\, s(x)\, h(x)\, n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)}\Big|_{x=r}^{x=\infty} \\
&\quad + \int_r^{\infty} f\, w(r)\, n(t-r+a)\, e^{\tau(t-x+r)}[s'(x)h(x)+s(x)h'(x)]dx \\
&= \Bigg[f\, w(r)\, n(t-r+a)\, s(r)\, e^{\tau t} \\
&\quad - \int_r^{\infty} f\, w(r)\, n(t-r+a)\, s(x)\, \mu(x)\, e^{\tau(t-x+r)}\, h(x)\, dx \Bigg] \\
&\quad + \int_r^{\infty} f\, w(r)\, n(t-r+a)\, s(x)\, e^{\tau(t-x+r)}\, h'(x)\, dx \qquad (3.3.5)
\end{aligned}
$$

El término entre corchetes de la expresión anterior mide el *efecto reemplazo*. El primer término es la tasa a la cual las pensiones iniciales de los recién jubilados está aumentando la tasa de pago de los beneficios. El segundo término es la tasa a la cual la tasa de pago de beneficios está siendo reducida por las muertes a tiempo t. El término fuera de los corchetes es conocido como el *efecto de ajuste*. Dicho factor mide el monto por el cual la tasa de pago de beneficios está siendo ajustado a tiempo t.

Si se asume el caso exponencial, (3.3.4) queda de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
B_t &= \int_r^{\infty} n\, e^{R(t-x+a)}\, s(x)\, f\, w(r)\, e^{\tau(t-x+r)}\, e^{\beta(r-x)}\, dx \\
&= f\, w(r)\, s(r)\, n\, e^{R(t-r+a)} \int_r^{\infty} e^{R(t-x+a)}\, e^{-R(t-r+a)}\, e^{\tau(t-x+r)}\, e^{\beta(r-x)}\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx \\
&= f\, w(r)\, s(r)\, n\, e^{R(t-r+a)}\, e^{\tau t} \int_r^{\infty} e^{R(r-x)}\, e^{\tau(r-x)}\, e^{\beta(r-x)}\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx \\
&= f\, w(r)\, s(r)\, n\, e^{R(t-r+a)}\, e^{\tau t} \int_r^{\infty} e^{-(\rho+\beta)(x-r)}\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx,
\end{aligned}
$$

donde $\rho = \beta + \tau$. Si de la expresión anterior se define

$$
\bar{a}'^{h}_{r} = \int_r^{\infty} e^{-(\rho+\beta)(x-r)}\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx
$$

y si se usa (3.2.6), entonces

$$B_t = {}^T P_t \left(\frac{\bar{a}'^h_r}{\bar{a}^h_r} \right).$$

3.3.3. Ecuación Dinámica

Es posible ahora establecer la siguiente fórmula básica para las vidas retiradas:

$${}^T P_t + \delta (rA)_t = B_t + \frac{d}{dt}(rA)_t. \tag{3.3.6}$$

Esta ecuación puede ser discutida desde el enfoque de la teoría del interés considerando a $(rA)_t$ como un fondo en el cual los intereses y el costo final de financiamiento son pagados y de los cuales las pensiones son pagadas. La diferencia entre la tasa total de ingresos y la tasa de pagos determina la tasa de cambio del tamaño del fondo.

La prueba de (3.3.6) puede realizarse diferenciando $(rA)_t$ a partir de (3.3.3), esto es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(rA)_t &= \int_r^\infty f\, w(r)\, \frac{d}{dt}\left[n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)}\right] \left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\, h(y)\, s(y)\, dy\right] dx \\
&= -f\, w(r) \int_r^\infty \left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\, h(y)\, s(y)\, dy\right] \frac{d}{dx}\left[n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)}\right] dx \\
&= -f\, w(r) \Bigg\{ n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)} \int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\, h(y)\, s(y)\, dy \Bigg|_{x=r}^{x=\infty} \\
&\qquad - \int_r^\infty \left[\delta \int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\, h(y)\, s(y)\, dy - s(x)\, h(x)\right] n(t-x+a)\, e^{\tau(t-x+r)}\, dx \Bigg\} \\
&= {}^T P_t + \delta (rA)_t - B_t
\end{aligned}$$

donde usamos (3.3.4) para definir el término B_t.

Ejemplo 16. *Para el caso exponencial muestre lo siguiente:*

a.

$$B_{t+u} = e^{\rho u} B_t, \qquad \rho = \tau + R. \tag{3.3.7}$$

b.

$$(rA)_{t+u} = e^{\rho u}(rA)_t. \tag{3.3.8}$$

c.

$${}^TP_t + \theta(rA)_t = B_t, \qquad \theta = \delta - \rho \tag{3.3.9}$$

d.

$$\begin{aligned} {}^TP_t < B_t &\quad \text{si} \quad \theta > 0 \\ {}^TP_t = B_t &\quad \text{si} \quad \theta = 0 \\ {}^TP_t > B_t &\quad \text{si} \quad \theta < 0. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Solución.

a. *Para demostrar este inciso se usará* (3.3.4)*, esto es*

$$\begin{aligned} B_{t+u} &= \int_a^\infty n(t+u-x+a)\; s(x)\; f\; w(r)\; e^{\tau(t+u-x+r)}\; h(x)\; dx \\ &= \int_r^\infty n\; e^{R(t+u-x+a)}\; e^{\tau(t+u-x+a)}\; s(x)\; f\; w(r)\; e^{\beta(x-r)}\; dx \\ &= e^{(R+\tau)u} \int_r^\infty n\; e^{R(t-x+a)}\; e^{\tau(t-x+a)}\; s(x)\; f\; w(r)\; e^{\beta(x-r)}\; dx \\ &= e^{\rho u}\; B_t. \end{aligned}$$

b. *Análogamente al inciso anterior se usará* (3.3.2)*, esto es*

$$\begin{aligned} (rA)_{t+u} &= \int_r^\infty n(t+u-x+a)\; s(x)\; f\; w(r)\; e^{\tau(t+u-x+r)}\; \bar{a}_x^h\; dx. \\ &= \int_r^\infty n\; e^{R(t+u-x+a)}\; e^{\tau(t+u-x+r)}\; s(x)\; f\; w(r)\; \bar{a}_x^h\; dx. \\ &= e^{(R+\tau)u} \int_r^\infty n\; e^{R(t-x+a)}\; e^{\tau(t-x+r)}\; s(x)\; f\; w(r)\; \bar{a}_x^h\; dx. \\ &= e^{\rho u}\; (rA)_t. \end{aligned}$$

c. *Para demostrar este inciso, será necesario reescribir* (3.3.8) *como*

$$\frac{(rA)_{t+u} - (rA)_t}{u} = \frac{e^{\rho u} - 1}{u}(rA)_t.$$

Tomando el límite cuando $u \to 0$, *se obtiene*

$$\frac{d}{dt}(rA)_t = \rho(rA)_t, \tag{3.3.11}$$

sustituyendo ahora (3.3.11) *en* (3.3.6), *esto es*

$$^T P_t + \delta(rA)_t = B_t + \rho(rA)_t.$$

El resultado final es evidente.

d. *Se sigue directamente de* (3.3.9).

$\diamondsuit$

Por otro lado, si se considera una población estacionaria con salarios fijos y pensiones niveladas, (3.3.9) se convierte en

$$(rA)_t = f\ w(r)\ \frac{T_r - l_r \bar{a}_r}{\delta}. \tag{3.3.12}$$

La igualdad anterior se da bajo los supuestos $h(x) = 1$, $\tau = 0$, $\theta = \delta$, $B_t = fw(r)T_r$ y $^T P_t = fw(r)l_r\bar{a}_r$. Para darle una interpretación a este resultado, observamos primero que las pensiones de $fw(r)$ por año son pagadas continuamente a todas las personas de edad mayor o igual a r en la población estacionaria. Esto incluye pensiones para los futuros jubilados quienes adquieren este status a la tasa de l_r por año. Esos futuros pagos por concepto de pensiones forman una perpetuidad con valor presente igual a $f\ w(r)\ l_r\ \bar{a}_r/\delta$. La diferencia en el valor presente de esas dos perpetuidades es el valor presente de las futuras pensiones para el grupo de personas de edad mayor o igual a r, $(rA)_t$.

3.4. Funciones básicas para vidas activas

En esta sección definiremos varias funciones básicas relacionadas con el financiamiento de beneficios de planes de pensiones. Las funciones están relacionadas a los grupos de vidas activas y simbólicamente son denotadas con el prefijo a.

3.4.1. Valor presente actuarial de beneficios futuros, $(aA)_t$

Los $n(t-x+a)s(x)$ miembros entre las edades x y $x+dx$ a tiempo t, después de $r-x$ años, incurrirán en el costo de financiamiento final ${}^TP_{t+r-x}\,dx$. Por tanto,

$$(aA)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^TP_{t+r-x}\,dx. \tag{3.4.1}$$

Se observa que

$$\frac{\partial}{\partial t}{}^TP_{t+r-x} = -\frac{\partial}{\partial x}{}^TP_{t+r-x}. \tag{3.4.2}$$

Diferenciando (3.4.1) respecto de t se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(aA)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,\frac{\partial}{\partial t}{}^TP_{t+r-x}\,dx \\
&= -\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\,{}^TP_{t+r-x}\,dx \\
&= -e^{-\delta(r-x)}\cdot{}^TP_{t+r-x}\Big|_{x=a}^{x=r} + \delta\int_a^r {}^TP_{t+r-x}\,e^{-\delta(r-x)}\,dx \\
&= e^{-\delta(r-a)}\cdot{}^TP_{t+r-a} - {}^TP_t + \delta(aA)_t.
\end{aligned}$$

Lo anterior puede interpretarse como que la tasa de cambio en el valor presente de las futuras pensiones es igual al valor presente del pago futuro por financiamiento final para los nuevos miembros (quienes se jubilaran después de $r-a$ años), $e^{-\delta(r-a)}.{}^TP_{t+r-a}$, menos los pagos por financiamiento final de los miembros activos ahora jubilados, ${}^TP_t$, más los interés acreditados sobre los beneficios futuros a tiempo t, $\delta(aA)_t$.

Ejemplo 17. *Muestre que*

$$(aA)_t = \int_t^{t+r-a} e^{-\delta(y-t)}\cdot{}^TP_y\,dy$$

y derive dicha expresión para obtener una solución alternativa a la encontrada anteriormente.

Solución. *Para obtener el primer resultado se hace el cambio de variable* $y = t+r-x$ *y se ajustan los limites de integración en* (3.4.1). *Ahora, se deriva la igualdad* *resultante como el producto de dos funciones, esto es*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(aA)_t &= \frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}\cdot\int_t^{t+r-a} e^{-\delta y}\cdot {}^{T}P_y\,dy\right)\\
&= e^{\delta t}\left(\frac{d}{dt}\int_t^{t+r-a} e^{-\delta y}\cdot {}^{T}P_y\,dy\right)+\int_t^{t+r-a} e^{-\delta y}\cdot {}^{T}P_y\,dy\cdot\left(\frac{d}{dt}e^{\delta t}\right)\\
&= e^{\delta t}\cdot\left(e^{-\delta(t+r-a)}\cdot {}^{T}P_{t+r-a}-e^{-\delta t}\cdot {}^{T}P_t\right)+\delta\int_t^{t+r-a} e^{-\delta(y-t)}\cdot {}^{T}P_y\,dy\\
&= {}^{T}P_{t+r-x}\cdot e^{-\delta(r-x)}-{}^{T}P_t+\delta(aA)_t.
\end{aligned}$$

♢

3.4.2. Tasa de costos normales, P_t

Antes de tocar el tema principal de este apartado será necesario definir una nueva función, la cual llamaremos *función de responsabilidad acumulada* y que denotaremos por $M(x)$. Esta función representa la acumulación de la responsabilidad actuarial para una pensión que comienza a edad r. Más específicamente, $M(x)$ representa esa fracción del valor actuarial de las futuras pensiones acumuladas como responsabilidad actuarial a edad x bajo el método de costeo actuarial. La función $M(x)$ se define como nocreciente, continua por la derecha respecto a la variable edad con $0 \leq M(x) \leq 1$ para todo $x \geq a$. Bajo financiamiento inicial, toda la responsabilidad para las futuras pensiones empiezan cuando el individuo llega a edad a; así, $M(x) = 0$ para $x < a$ y $M(x) = 1$ cuando $x \geq a$. Para el método de financiamiento final la función $M(x)$ es de la forma

$$M(x) = \begin{cases} 0 & x < r \\ 1 & x \geq r. \end{cases}$$

La función $M(x)$ puede también ser definida en términos de la *función de densidad acumulada de pensiones*, denotada por $m(x)$, tal que

$$M(x) = \int_a^x m(y)\,dy \qquad x \geq a. \tag{3.4.3}$$

En general supondremos que $m(x)$ es continua en $a < x < r$, continua por la derecha en a, y por la izquierda en r, y que $m(x) = 0$ para $x > r$. De (3.4.3) se sigue que

$$m(x) = M'(x). \tag{3.4.4}$$

Una vez definida la función $M(x)$, será posible ahora desarrollar una función, para nuestro modelo contínuo, que asigne el valor presente actuarial de los beneficios futuros por concepto de pensiones a los diferentes tiempos de valuación durante el servicio activo de un participante.

En (3.4.1) el costo futuro por financiamiento final para los miembros entre x y $x+dx$ a tiempo t es ${}^{T}P_{t+r-x}\,dx$. En la función de costos normales, esta responsabilidad comienza a hacerse efectiva a una tasa acumulada $m(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} P_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}P_{t+r-x}\, m(x)\, dx \\ &= e^{\tau t}\, f\, w(r)\, s(r)\, \bar{a}_r^h \int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)}\, n(t-x+a)\, m(x)\, dx. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Uno puede observar como es que la tasa de costos normales, P_t, $u \leq t \leq u+r-a$, financia totalmente el beneficio por concepto de pensión de un miembro que entra a edad a a tiempo u y que se jubila $r-a$ años después. El costo por financiamiento final de los miembros que entraron entre u y $u+du$ será entonces ${}^{T}P_{u+r-a}$. a tiempo t, el monto de las contribuciones de este grupo al total P_t es

$$e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}P_{t+r-x}\, m(x)$$

donde $x = a+t-u$. En los $r-x$ años hasta la jubilación, debido a los intereses ganados, este monto incrementará a

$${}^{T}P_{t+r-x}\, m(x). \tag{3.4.6}$$

La expresión anterior puede reescribirse en términos de u como ${}^{T}P_{u+r-a}\, m(a+t-u)$. Integrando esas contribuciones acumuladas, se obtiene

$$\int_u^{u+r-a} {}^{T}P_{u+r-a}\, m(a+t-u)\, dt = {}^{T}P_{u+r-a},$$

el costo por financiamiento final.

Si en (3.4.5) $\tau = 0$ y $n(t) = l_a$ entonces

$$\begin{aligned} P_t &= f\, w(r)\, \bar{a}_r^h \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, l_a\, s(r)\, m(x)\, dx \\ &= f\, w(r)\, \bar{a}_r^h \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, l_x\, \frac{l_r}{l_x}\, m(x)\, dx \\ &= f\, w(r)\, \bar{a}_r^h \int_a^r l_x\, e^{-\delta(r-x)}\, {}_{r-x}p_x\, m(x)\, dx \\ &= f\, w(r)\, \bar{a}_r^h \int_a^r l_x \cdot {}_{r-x}E_x \cdot m(x)\, dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 17. *Usando los supuestos del Ejercicio 14 con $m(x) = 1/(r-a)$ determine P_t para el caso exponencial.*

Solución. *Usando* (3.4.5) *y el resultado del Ejemplo 14 se tiene*

$$\begin{aligned} P_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \overbrace{f\, w(r)\, n\, e^{\rho(t+r-x)}\, e^{-(R+u)(r-a)}\, \bar{a}'_r}^{{}^T P_{t+r-x}} \frac{1}{r-a}\, dx \\ &= f\, w(r)\, n\, e^{-(R+u)(r-a)}\, e^{\rho t}\, \bar{a}'_r\, \frac{1}{r-a} \int_a^r e^{-(\delta-\rho)(r-x)}\, dx \\ &= f\, w(r)\, n\, e^{-(R+u)(r-a)}\, e^{\rho t}\, \bar{a}'_r\, \frac{1}{r-a} \left[\frac{e^{-(\delta-\rho)(r-x)}}{\delta-\rho} \right]_a^r \\ &= f\, w(r)\, n\, e^{-(R+u)(r-a)}\, e^{\rho t}\, \bar{a}'_r\, \frac{1}{r-a} \left[\frac{1-e^{-(\delta-\rho)(r-a)}}{\delta-\rho} \right] \\ &= f\, w(r)\, n\, e^{-(R+u)(r-a)}\, e^{\rho t}\, \bar{a}'_r\, \frac{\bar{a}_{\overline{r-a|}\theta}}{r-a}, \end{aligned}$$

donde $\theta = \delta - \rho$.

◇

Con base en (3.2.8) se tiene

$$\begin{aligned} P_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x} \cdot m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+[X(\theta)-x]+r-X(\theta)} \cdot m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot e^{-\rho[X(\theta)-x]} \cdot {}^T P_{t+r-X(\theta)} \cdot m(x)\, dx \\ &= e^{[-\delta r+\rho X(\theta)]} \cdot {}^T P_{t+r-X(\theta)} \int_a^r e^{(\delta-\rho)x}\, m(x)\, dx. \end{aligned}$$

Si se define

$$e^{\theta X(\theta)} = \int_a^r m(x)\, e^{\theta x}\, dx, \tag{3.4.7}$$

y si además se sustituye $\delta - \theta$ por ρ, entonces

$$\begin{aligned} P_t &= e^{[-\delta r+(\delta-\theta)X(\theta)]} \cdot {}^T P_{t+r-X(\theta)} e^{\theta X(\theta)} \\ &= e^{-\delta[r-X(\theta)]} \cdot {}^T P_{t+r-X(\theta)} \end{aligned}$$

Lo anterior puede interpretarse como que la tasa anual de costos normales a tiempo t es suficiente, junto con los intereses que esta genere, para proporcionar el costo de financiamiento final $r - X(\theta)$ años después. El teorema del valor medio para las integrales garantiza la existencia del número $X(\theta)$, el cual puede ser interpretado como la edad media del pago de los costos normales asociado con la función $m(x)$, en el caso exponencial con $\theta = \delta - \tau - R$. Por tanto, $X(\theta)$ depende de la tasa de interés, del salario y de la tasa de cambio poblacional.

3.4.3. Ecuación dinámica

Análogamente a (3.4.5) tenemos que la *responsabilidad actuarial acumulada* para vidas activas a tiempo t está dada por

$$(aV)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x}\, M(x)\, dx. \tag{3.4.8}$$

En la integral se aplico el concepto de que una fracción $M(x)$ del valor presente actuarial de la futura pension se ha acumulado como responsabilidad actuarial a edad x.

Reescribiendo (3.4.5) de la forma

$$P_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x} \, dM(x),$$

integrando por partes y usando (3.4.2) se obtiene

$$\begin{aligned} P_t &= e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x} \, M(x) \Big|_{x=a}^{x=r} - \delta \int_a^r M(x) \, e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x} \, dx \\ &\quad + \int_a^r M(x) \, e^{-\delta(r-x)} \, \frac{\partial}{\partial t} {}^T P_{t+r-x} \, dx \\ &= {}^T P_t - \delta (aV)_t + \frac{d}{dt}(aV)_t \end{aligned}$$

ó

$$P_t + \delta(aV)_t = {}^T P_t + \frac{d}{dt}(aV)_t \tag{3.4.9}$$

La ecuación (3.4.9) puede interpretarse desde el punto de vista de la teoría del interés compuesto. Consideremos la responsabilidad actuarial acumulada, $(aV)_t$, como un fondo en el cual la tasa de costos normales, a la tasa P_t, son pagadas y del cual los costos de financiamiento final, a la tasa ${}^T P_t$, son transferidos cuando los miembros activos se jubilan. El lado izquierdo de (3.4.9) es la tasa de ingresos al fondo proveniente de costos normales e intereses. El lado derecho representa la asignación de esta tasa de ingresos a la tasa de financiamiento final y la tasa de cambio en el monto del fondo.

Ejemplo 19. *Para el caso exponencial muestre que*

a.

$$P_{t+u} = e^{\rho u} p_t, \qquad \rho = \tau + R \tag{3.4.10}$$

b.

$$(aV)_{t+u} = e^{\rho u} (aV)_t \tag{3.4.11}$$

c.

$$P_t + \theta(aV)_t = {}^T P_t \qquad \theta = \delta - \rho \tag{3.4.12}$$

d.

$$\begin{array}{lll} P_t < {}^T P_t, & \text{si} & \theta > 0 \\ P_t = {}^T P_t, & \text{si} & \theta = 0 \\ P_t > {}^T P_t, & \text{si} & \theta < 0 \end{array} \quad , \tag{3.4.13}$$

Solución.

a. *Sustituyendo* (3.2.8) *en* (3.4.5)

$$
\begin{aligned}
P_{t+u} &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+u+r-x} \cdot m(x)\, dx \\
&= e^{\rho u} \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x} \cdot m(x)\, dx \\
&= e^{\rho u} \cdot P_t.
\end{aligned}
$$

b. *Análogamente al inciso anterior, se usará* (3.4.8)*, esto es*

$$
\begin{aligned}
(aV)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+u+r-x} \cdot M(x)\, dx \\
&= e^{\rho u} \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^T P_{t+r-x} \cdot M(x)\, dx \\
&= e^{\rho u} \cdot (aV)_t.
\end{aligned}
$$

c. *Para este inciso será necesario reescribir* (3.4.11) *como*

$$\frac{(aV)_{t+u} - (aV)_t}{u} = \frac{e^{\rho u} - 1}{u}(aV)_t,$$

se toma el límite cuando $u \to 0$ *se obtiene*

$$\frac{d}{dt}(aV)_t = \rho(aV)_t. \tag{3.4.14}$$

Por último, sustituyendo (3.4.14) *en* (3.4.9) *se obtiene* (3.4.12).

d. *Las desigualdades se siguen directamente de* (3.4.12).

$\diamond$

En el supuesto de que $M(x) = 1$ para $x \geq r$, no hay costo normal futuro refiriéndose al grupo de jubilados a tiempo t. Por lo tanto, la responsabilidad actuarial acumulada, $(rV)_t$, para miembros jubilados es igual al valor presente actuarial de sus futuras pensiones, esto es,

$$(rV)_t = (rA)_t. \tag{3.4.15}$$

Como consecuencia de lo anterior, se tiene una ecuación diferencial para la responsabilidad actuarial acumulada para vidas retiradas, la cual es

$${}^T P_t + \delta(rV)_t = B_t + \frac{d}{dt}(rV)_t. \tag{3.4.16}$$

Ejemplo 20. *Para el caso exponencial, muestre que*

a. $P_t = {}^TP_t \cdot \exp\{-\theta[r - X(\theta)]\}$

b. $(aV)_t = {}^TP_t \cdot \bar{a}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta} = P_t \cdot \bar{s}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta}$.

Solución. *Para el primer inciso se usó el resultado del Ejercicio 13, la definición* (3.4.5) *y* (3.4.7)*, es decir*

$$\begin{aligned} P_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^TP_{t+r-x} \cdot m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot e^{\rho(r-x)} \cdot {}^TP_t \cdot m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\theta(r-x)} \cdot {}^TP_t \cdot m(x)\, dx \\ &= {}^TP_t \cdot e^{-\theta r} \int_a^r e^{\theta x}\, m(x)\, dx \\ &= {}^TP_t \cdot e^{-\theta[r-X(\theta)]}. \end{aligned}$$

Para la primer igualdad del segundo inciso se usó (3.4.8) *y* (3.4.7)*, es decir, lo que se busca es*

$$(aV)_t = {}^TP_t \int_a^r e^{-\theta(r-x)}\, M(x)\, dx. \tag{3.4.17}$$

Integrando por partes con $u = M(x)$, $du = m(x)dx$, $dv = e^{-\theta(r-x)}dx$ *y* $v = (1/\theta)e^{-\theta(r-x)}$*, entonces*

$$\begin{aligned} (aV)_t &= {}^TP_t \cdot \frac{1}{\theta}\left[e^{-\theta(r-x)}\, M(x)\Big|_a^r - \int_a^r e^{-\theta(r-x)}\, m(x)\, dx \right] \\ &= {}^TP_t \cdot \frac{1}{\theta}\left[1 - e^{-\theta(r-X(\theta))}\right] \\ &= {}^TP_t \cdot \left[\frac{1 - e^{-\theta(r-X(\theta))}}{\theta}\right] \\ &= {}^TP_t \cdot \bar{a}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta}. \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad, se aplicó el resultado del primer inciso, es decir

$$\begin{aligned}(aV)_t &= {}^TP_t \cdot \left[\frac{1-e^{-\theta(r-X(\theta))}}{\theta}\right] \\ &= P_t \cdot e^{\theta[r-X(\theta)]} \cdot \left[\frac{1-e^{-\theta(r-X(\theta))}}{\theta}\right] \\ &= P_t \cdot \left[\frac{e^{\theta(r-X(\theta))}-1}{\theta}\right] \\ &= P_t \cdot \bar{s}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta}.\end{aligned}$$

◊

Si en el Ejemplo anterior la población que se maneja es estacionaria, es decir $R = 0$ y además $\tau = 0$, entonces

$$(aV)_t = {}^TP_t \cdot \bar{a}_{\overline{r-X(\delta)}|\delta} = P_t \cdot \bar{s}_{\overline{r-X(\delta)}|\delta}.$$

Por otro lado, si $\theta = 0$, entonces $P_t = {}^TP_t$, más aún, (3.4.17) se transforma en

$$(aV)_t = {}^TP_t \int_a^r M(x)\, dx.$$

Usando (3.4.3) se tiene

$$(aV)_t = {}^TP_t \int_a^r \int_a^x m(y)\, dy\, dx.$$

Haciendo un cambio en el orden de integración

$$\begin{aligned}(aV)_t &= {}^TP_t \int_a^r \int_y^r m(y)\, dx\, dy \\ &= {}^TP_t \int_a^r (r-y)\, m(y)\, dy \\ &= {}^TP_t \left[\int_a^r r\, m(y)\, dy - \int_a^r y\, m(y)\, dy\right] \\ &= {}^TP_t (r-\mu),\end{aligned}$$

donde

$$\mu = \int_a^r y\, m(y)\, dy \tag{3.4.18}$$

y

$$\int_a^r m(x)\, dx = 1.$$

En la sección 3.4.1 se vio que $n(t-x+a)s(x)$ miembros entre las edades x y $x+dx$ a tiempo t tendrán un costo de financiamiento final ${}^{T}P_{t+r-x}$ cuando se jubilen $r-x$ años después. Dado que esos miembros pasarán de la edad y a $y+dy$, $x \leq y < r$, el costo normal $e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,dx\,m(x)\,dy$ será pagadero. El valor presente de este costo normal es

$$e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,dx\,m(y)\,dy, \tag{3.4.19}$$

y el valor presente de los futuros costos normales, denotado por $(Pa)_t$, para todos las vidas activas es

$$(Pa)_t = \int_a^r \int_x^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,m(y)\,dy\,dx. \tag{3.4.20}$$

ó bien

$$(Pa)_t = e^{\tau t}\,f\,w(r)\,s(r)\,\bar{a}_r^h \int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)}\,n(t-x+a)[1-M(x)]\,dx. \tag{3.4.21}$$

De (3.4.20), (3.4.1) y (3.4.8) se sigue que

$$(Pa)_t = (aA)_t - (aV)_t$$

ó

$$(aV)_t = (aA)_t - (Pa)_t. \tag{3.4.22}$$

Lo anterior puede interpretarse como sigue: la responsabilidad actuarial a tiempo t para las vidas activas es igual al valor presente actuarial de las futuras pensiones para las vidas activas, menos el valor presenta actuarial de los costos normales futuros.

3.5. Método de costeo individual

El método general de costeo actuarial definido por la función acumulada $M(x)$, es un método individual en el sentido de que $m(x)$ y $M(x)$ pueden ser aplicados para medir la tasa de costos normales y la responsabilidad actuarial acumulada para cada participante. La tasa de costo normal total y la responsabilidad actuarial acumulada para las vidas activas pueden ser determinados sumando los componentes respectivos de cada participante.

Las funciones de financiamiento individual para una anualidad que empieza a edad r con una tasa de beneficio inicial anual de una unidad para una vida activa de edad

x, $a \geq x \geq r$, son definidas como sigue:

El valor presente actuarial de los beneficios está dado por

$$(aA)(x) = e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(r)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h. \tag{3.5.1}$$

La tasa de costos normales está dado por

$$P(x) = (aA)(x) \cdot m(x), \tag{3.5.2}$$

y la responsabilidad actuarial acumulada está dada por

$$(aV)(x) = (aA)(x) \cdot M(x). \tag{3.5.3}$$

El valor presente actuarial de los costos futuros normales es definido como

$$(Pa)(x) = (aA)(x) - (aV)(x) = (aA)(x)[1 - M(x)]. \tag{3.5.4}$$

Si suponemos que la tasa inicial de beneficios por concepto de pensiones para una vida en edad x a tiempo t es $f\,w(r)\,e^{\tau(t+r-x)}$ y que el número de vidas en edad x y $x + dx$ a tiempo t es $n(t - x + a)\,s(x)\,dx$, entonces se dan los siguientes cuatro resultados:

1. Usando (3.2.6), (3.4.1) y (3.5.1)

$$\begin{aligned}
(aA)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,f\,w(r)\,e^{\tau(t+r-x)}\,n(t+r-x-r+a)\,s(r)\,\bar{a}_r^h\,dx \\
&= \int_a^r f\,w(r)\,e^{\tau(t+r-x)}\,n(t-x+a)\,s(x)\,e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(r)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h\,dx \\
&= \int_a^r f\,w(r)\,e^{\tau(t+r-x)}\,n(t-x+a)\,s(x)\,(aA)(x)\,dx.
\end{aligned}$$

2. Usando (3.2.6), (3.4.5) y (3.5.2)

$$\begin{aligned}
(aA)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,f\,w(r)\,e^{\tau(t+r-x)}\,n(t+r-x-r+a)\,s(r)\,\bar{a}_r^h\,m(x)\,dx \\
&= \int_a^r f\,w(r)\,e^{\tau(t+r-x)}\,n(t-x+a)\,s(x)\,e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(r)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h\,m(x)\,dx \\
&= \int_a^r f\,w(r)\,\,e^{\tau(t+r-x)}\,n(t-x+a)\,s(x)\,P(x)\,dx.
\end{aligned}$$

3. Usando (3.2.6), (3.4.8) y (3.5.3)

$$\begin{aligned}
(aA)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, f\, w(r)\, e^{\tau(t+r-x)}\, n(t+r-x-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h\, M(x)\, dx \\
&= \int_a^r f\, w(r)\, e^{\tau(t+r-x)}\, n(t-x+a)\, s(x)\, e^{-\delta(r-x)}\, \frac{s(r)}{s(x)}\, \bar{a}_r^h\, M(x)\, dx \\
&= \int_a^r f\, w(r)\, e^{\tau(t+r-x)}\, n(t-x+a)\, s(x)\, (aV)(x)\, dx.
\end{aligned}$$

4. Usando (3.2.6), (3.4.20) y (3.5.4)

$$\begin{aligned}
(aA)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, f\, w(r)\, e^{\tau(t+r-x)}\, n(t+r-x-r+a)\, s(r)\, \bar{a}_r^h\, [1-M(x)]\, dx \\
&= \int_a^r f\, w(r)\, e^{\tau(t+r-x)}\, n(t-x+a)\, s(x)\, e^{-\delta(r-x)}\, \frac{s(r)}{s(x)}\, \bar{a}_r^h\, [1-M(x)]\, dx \\
&= \int_a^r f\, w(r)\, e^{\tau(t+r-x)}\, n(t-x+a)\, s(x)\, (Pa)(x)\, dx.
\end{aligned}$$

En los *métodos de costeo de beneficios acumulados* $M(x)$ está directamente relacionado con los beneficios acumulados proporcionados por el plan que un participante ha adquirido a edad x. Veremos dos posibilidades. Si los beneficios proyectados crecen uniformemente durante el tiempo activo de servicio entonces

$$m(x) = \frac{1}{r-a}. \tag{3.5.5}$$

Si la acumulación de los beneficios esta en proporción al salario total donde se presenta una tendencia exponencial respecto a tiempo entonces

$$m(x) = k\, w(x)\, e^{\tau x} = \frac{w(x)\, e^{\tau x}}{\int_a^r w(y)\, e^{\tau y}\, dy}. \tag{3.5.6}$$

Un caso especial se da cuando los beneficios acumulados están en proporción al total de los salarios pero sin tendencia respecto a tiempo, esto es $\tau = 0$, entonces

$$m(x) = k\, w(x) = \frac{w(x)}{\int_a^r w(y)\, dy}. \tag{3.5.7}$$

Para el *método de costeo actuarial edad-entrada*, el beneficio proyectado es financiado por una serie de pagos nivelados desde la edad a la que se entra al plan y durante el tiempo de servicio activo restante. Nuevamente, vemos dos posibilidades. Si definimos la tasa de costos normales dado por (3.5.2) como una constante, es decir, $P(x) = k = (aA)(x) \cdot m(x)$, entonces

$$m(x) = \frac{k}{(aA)(x)} = \frac{k\ s(x)}{e^{-\delta(r-x)}\ s(r)\ \bar{a}_r^h} = k_{_1}\ s(x)\ e^{-\delta x}.$$

Ahora, dado que $m(x)$ debe integrar a 1 de a a r,

$$m(x) = \frac{s(x)\ e^{-\delta x}}{\int_a^r s(y)\ e^{-\delta y}\ dy}. \tag{3.5.8}$$

Si, por otro lado, la tasa de aportaciones es una fracción nivelada, π, del salario donde existe tendencia exponencial que afecta a todos lo salarios, se tiene

$$P(x) = \pi\ w(x)\ e^{\tau x} = m(x)(aA)(x)$$

entonces, usando (3.5.1)

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{\pi\ w(x)\ e^{\tau x}}{(aA)(x)} \\ &= \frac{\pi\ w(x)\ e^{\tau x}}{e^{-\delta(r-x)}\ \frac{s(r)}{s(x)}\ \bar{a}_r^h} \\ &= \frac{\pi}{e^{-\delta r}\ s(r)\ \bar{a}_r^h}\ e^{-\delta x}\ s(x)\ e^{\tau x}\ w(x), \end{aligned}$$

donde definimos

$$k = \frac{\pi}{e^{-\delta r -}\ s(r)\ \bar{a}_r^h}. \tag{3.5.9}$$

Ahora, como $m(x)$ debe integrar a 1 entre a y r, es decir

$$\int_a^r k\ e^{-\delta x}\ s(x)\ e^{\tau x}\ w(x)\ dx = 1, \tag{3.5.10}$$

entonces

$$m(x) = \frac{e^{-\delta x}\ s(x)\ e^{\tau x}\ w(x)}{\int_a^r e^{-\delta y}\ s(y)\ e^{\tau y}\ w(y)\ dy}. \tag{3.5.11}$$

De este modo, y confirmando (3.5.3), la responsabilidad actuarial acumulada para un individuo de edad x, que es la diferencia entre el valor presente actuarial de los beneficios y las futuras aportaciones, es

$$\begin{aligned}(aV)(x) &= e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(y)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h - \pi\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\,\frac{s(y)}{s(x)}\,e^{\tau y}\,w(y)\,dy\\ &= e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(y)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h\left\{1-\left[\frac{\int_x^r e^{-\delta y}\,s(y)\,e^{\tau y}\,w(y)\,dy}{\int_a^r e^{-\delta y}\,s(y)\,e^{\tau y}\,w(y)\,dy}\right]\right\}\\ &= (aA)(x)\cdot M(x).\end{aligned}$$

Lo anterior se da a partir de (3.5.9) y (3.5.10), es decir

$$\frac{\pi}{e^{-\delta r}\,s(r)\,\bar{a}_r^h} = \frac{1}{\int_a^r e^{-\delta y}\,s(y)\,e^{\tau y}\,w(y)\,dy},$$

de donde

$$\pi = \frac{e^{-\delta r}\,s(r)\,\bar{a}_r^h}{\int_a^r e^{-\delta y}\,s(y)\,e^{\tau y}\,w(y)\,dy}.$$

Análogamente puede demostrarse que cuando no hay tendencia exponencial en los salarios respecto del tiempo, la función de densidad de la pensión es

$$m(x) = \frac{s(x)\,w(x)\,e^{-\delta x}}{\int_a^r s(y)\,w(y)\,e^{-\delta y}\,dy}. \tag{3.5.12}$$

Observe que la fracción de de los beneficios proyectados acumulados como responsabilidad actuarial en el método de costeo actuarial edad-entrada difiere de la definición de beneficios acumulados en la mayoría de los planes. Por lo anterior, una definición de beneficios acumulados es necesaria para propósitos regulatorios y para comunicar a los participantes acerca de los beneficios que han estado acumulando. La diferencia es similar a la diferencia entre la reserva y los beneficios por no pérdida en un seguro común.

Observe también que la tasa de contribuciones pagadas por un plan que sigue un método de costeo actuarial, diferirá de la tasa total de costos normales especificada por este método. Hay dos razones para esto. Primero, al comienzo de un plan o en el momento en que el plan es modificado, las responsabilidades actuariales acumuladas para el servicio original pueden cambiar. Segundo, los supuestos actuariales pueden no darse en su totalidad, por eso el financiamiento puede generar ganancias o pérdidas. La decisión de como ajustar la tasa de aportaciones para financiar esos cambios en la responsabilidad actuarial acumulada es importante cuando se es sujeto a regulaciones.

3.6. Método de costeo grupal

En esta sección consideraremos los métodos actuariales de costeo grupal o agregado para los cuales las contribuciones son determinadas a partir de una base colectiva y no como la suma de aportaciones individuales. Con el fin de definir los métodos actuariales de costeo grupal, será necesario definir tres nuevas funciones:

1. $(aF)_t$, el fondo asignado a los miembros activos a tiempo t
2. $(aC)_t$, la tasa de contribuciones anuales a tiempo t
3. $(aU)_t$, la responsabilidad actuarial acumulada no financiada respecto a los miembros activos a tiempo t.

Así,

$$(aU)_t = (aV)_t - (aF)_t. \tag{3.6.1}$$

El fondo para miembros activos a tiempo t puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(aF)_t = (aC)_t + \delta(aF)_t - {}^{T}P_t \tag{3.6.2}$$

con valor inicial $(aF)_0$. El lado derecho de (3.6.2) indica las dos fuentes de ingresos al fondo y una por causa de egreso, esto es, la transferencia del costo de financiamiento final a un fondo para miembros jubilados.

En relación al método de costeo actuarial, según lo determinado por una función acumulada, que implica una tasa de costo normal P_t [ver (3.4.5)] y las responsabilidades acumuladas no financiados de los miembros activos $(aU)_t$, [ver (3.4.8) y (3.6.1)], una forma natural de la tasa de contribuciones es

$$(aC)_t = P_t + \lambda(t)(aU)_t. \tag{3.6.3}$$

En (3.6.3) $\lambda(t)$ define el proceso para amortizar $(aU)_t$.

La ecuación (3.6.3) destaca una característica del método actuarial de costeo grupal que hasta ahora no se ha tocado. Estos métodos definen una tasa de aportaciones, $(aC)_t$, que depende de $(aU)_t$. Aquí los ajustes requeridos por cambio de planes, o bien o por ganancias y pérdidas, pueden ser hechos siguiendo el método de costeo actuarial partiendo del hecho de que el valor de $(aU)_t$ refleja tales cambios.

Consideremos ahora el proceso de amortización definido por

$$\lambda(t) = \frac{1}{\bar{a}_{P_t}} \tag{3.6.4}$$

donde

$$\bar{a}_{P_t} = \frac{(Pa)_t}{P_t}. \tag{3.6.5}$$

Así $(Pa)_t = P_t \cdot \bar{a}_{P_t}$, es el valor presente de una anualidad temporal tal que dicha anualidad, con tasa de ingresos nivelados P_t, es igual al valor presente actuarial de los costos futuros normales de los miembros activos, $(Pa)_t$.

Ejemplo 21. *Obtenga una expresión para $\bar{a}_{P_t}$ en el caso exponencial.*

Solución. *Sustituyendo* (3.4.5) *y* (3.4.21) *en* (3.6.5) *se tiene*

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{P_t} &= \frac{\int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)}\, n(t-x+a)\, [1-M(x)]\, dx}{\int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)}\, n(t-x+a)\, m(x)\, dx} \\
&= \frac{\int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)}\, n\, e^{R(t-x+a)}\, [1-M(x)]\, dx}{\int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)}\, n\, e^{R(t-x+a)}\, m(x)\, dx} \\
&= \frac{\int_a^r e^{\theta x}\, [1-M(x)]\, dx}{\int_a^r e^{\theta x}\, m(x)\, dx}.
\end{aligned}$$

Integrando por partes el numerador de la expresión anterior con $u = M(x)$, $du = m(x)dx$, $dv = e^{\theta x}dx$ y $v = (1/\theta)e^{\theta x}$ se tiene

$$\int_a^r e^{\theta x}[1-M(x)]dx = \frac{1}{\theta}\left[e^{\theta X(\theta)} - e^{\theta a}\right],$$

por lo que, usando (3.4.7) *se tiene*

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{P_t} &= \frac{\frac{1}{\theta}\left[e^{\theta X(\theta)} - e^{\theta a}\right]}{e^{\theta X(\theta)}} \\
&= \frac{1 - e^{-\theta[X(\theta)-a]}}{\theta} \\
&= \bar{a}_{\overline{X(\theta)-a|}\theta}.
\end{aligned}$$

Si $\theta = 0$, *entonces*

$$\bar{a}_{P_t} = \frac{\int_a^r [1 - M(x)]dx}{\int_a^r m(x)dx} = \int_a^r [1 - M(x)]dx,$$

es decir

$$\bar{a}_{P_t} = (r - a) - (r - \mu) = \mu - a$$

donde μ *está definido en* (3.4.18).

$\diamondsuit$

La fórmula (3.6.3) puede ser reescrita para el proceso de amortización (3.6.4) como

$$\begin{aligned} (aC)_t &= P_t + \frac{(aV)_t - (aF)_t}{\bar{a}_{P_t}} \\ &= \frac{(Pa)_t + (aV)_t - (aF)_t}{\bar{a}_{P_t}} \\ &= \frac{(aA)_t - (aF)_t}{\bar{a}_{P_t}} \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

donde se usó (3.4.22). Así, con $\lambda(t)$ dado por (3.6.4), se tiene

$$(aC)_t \cdot \bar{a}_{P_t} = (aA)_t - (aF)_t. \tag{3.6.7}$$

La interpretación de (3.6.7) es que una anualidad temporal a la tasa $(aC)_t$ es equivalente al valor presente actuarial de los beneficios futuros de los miembros activos menos el fondo destinado para ellos.

Para $\lambda(t)$ dado por (3.6.4), (3.6.2) se convierte en

$$\frac{d}{dt}(aF)_t = P_t + \frac{(aU)_t}{\bar{a}_{P_t}} + \delta(aF)_t - {}^TP_t. \tag{3.6.8}$$

Asimismo, puede escribirse (3.4.9) como

$$\frac{d}{dt}(aV)_t = P_t + \delta(aV)_t - {}^TP_t. \tag{3.6.9}$$

Restando (3.6.8) de (3.6.9) y usando (3.6.1)

$$\frac{d}{dt}(aU)_t = -\frac{(aU)_t}{\bar{a}_{P_t}} + \delta(aU)_t. \tag{3.6.10}$$

La ecuación diferencial (3.6.10) puede ser resuelta cambiando t por u, integrando de 0 a t y aplicando la función exponencial, con lo cual queda

$$(aU)_t = (aU)_0 \cdot \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{P_t}} - \delta\right) du\right]. \tag{3.6.11}$$

De (3.6.1) y (3.6.11) se obtiene

$$(aF)_t = (aV)_t - [(aV)_0 - (aF)_0] \cdot \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{P_u}} - \delta\right) du\right]. \tag{3.6.12}$$

Lo anterior prueba que $\bar{a}_{P_u}$ es menor que $\bar{a}_{\overline{\infty}|} = 1/\delta$, por lo que $1/\bar{a}_{P_u} - \delta \geq \epsilon > 0$,

$$\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{P_u}} - \delta\right) du\right] \to 0$$

cuando $t \to \infty$, por lo tanto $(aF)_t \to (aV)_t$.

Aquí el método de costeo grupal con $\lambda(t) = \frac{1}{\bar{a}_{P_t}}$ es asintóticamente equivalente al método de costeo individual definido por la función acumulada usada para evaluar $(aV)_t$ y P_t. Pueden existir muchas funciones acumuladas que generen funciones tales que $(Pa)_t/P_t$ sea suficientemente pequeña para garantizar la convergencia $(aF)_t \to (aV)_t$. Cada una de esas funciones puede producir diferentes montos de aportaciones al fondo, así como un fondo final diferente. Siempre que se refiera a un método actuarial de costeo grupal se especificará la función acumulada usada.

Existen muchas opciones al seleccionar $\lambda(t)$ para determinar la tasa de amortización $(aU)_0$. Si el objetivo es completar la amortización al término de n años de un tiempo inicial 0, una opción para $\lambda(t)$ es

$$\lambda(t) = \frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-t}|}}, \qquad 0 < t < n. \tag{3.6.13}$$

Entonces, de acuerdo con (3.6.11), se obtiene

$$\begin{aligned} (aU)_t &= (aU)_0 \cdot \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-u}|}} - \delta\right) du\right] \\ &= (aU)_0 \cdot \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-u}|}}\right) du\right] \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

Dos resultados útiles son los siguientes:

$$-\int_0^t \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-y}|}}dy = \ln\left(\frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}\right) \tag{3.6.15}$$

y

$$-\int_0^t \frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-y}|}}dy = \ln\left(\frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}\right). \tag{3.6.16}$$

Lo primero se da ya que

$$\begin{aligned}
-\int_0^t \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-y}|}}dy &= -\delta\int_0^t \frac{1}{v^{y-n}-1}dy \\
&= -\delta\left[\frac{\ln(v^{-n}) - \ln(v^{-n}-1) - \ln(v^{t-n}) + \ln(v^{t-n}-1)}{\ln(v)}\right] \\
&= \ln\left[\frac{(v^{t-n}-1)/v^{t-n}}{(v^{-n}-1)/v^{-n}}\right] \\
&= \ln\left[\frac{v^{t-n}-1}{v^{t-n}-v^{t}}\right] \\
&= \ln\left[\frac{(v^{-n}-1)-(v^{-t}-1)}{v^{-n}-1}\right] \\
&= \ln\left(\frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}\right).
\end{aligned}$$

Nóte que se usó el hecho de que $-\delta = \ln(v)$. Para la segunda expresión el procedimiento es totalmente análogo, esto es

$$\begin{aligned}
-\int_0^t \frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-y}|}}dy &= -\delta\int_0^t \frac{1}{1-v^{n-y}}dy \\
&= -\delta\left[\frac{\ln(v^{n}) - \ln(v^{n}-1) - \ln(v^{n-t}) + \ln(v^{n-t}-1)}{\ln(v)}\right] \\
&= \ln\left[\frac{(v^{n-t}-1)/v^{n-t}}{(v^{n}-1)/v^{n}}\right] \\
&= \ln\left[\frac{v^{n}-v^{t}}{v^{n}-1}\right] \\
&= \ln\left[\frac{(1-v^{t})-(1-v^{n})}{v^{n}-1}\right] \\
&= \ln\left(\frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}\right).
\end{aligned}$$

Usando (3.6.15), (3.6.14) queda de la siguiente manera

$$(aU)_t = (aU)_0 \cdot \left(\frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}} \right). \tag{3.6.17}$$

Sustituyendo (3.6.13) y (3.6.17) en (3.6.3) se tiene

$$(aC)_t = P_t + \frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-t}|}} \left[(aU)_0 \cdot \left(\frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}} \right) \right]. \tag{3.6.18}$$

Una de las relaciones básicas en Matemáticas Financieras es

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = v^{-n}\, \bar{a}_{\overline{n}|}.$$

Usando esta relación en (3.6.18) se tiene

$$(aC)_t = P_t + \frac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}} \left[(aU)_0 \cdot \left(\frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{v^{-n}\, \bar{a}_{\overline{n-t}|}} \right) \right].$$

Manipulando algebraicamente el denominador del término entre paréntesis de la expresión anterior

$$\begin{aligned} v^{-n}\, \bar{a}_{\overline{n-t}|} &= v^{-n} \left(\frac{1 - v^{n-t}}{\delta} \right) \\ &= \frac{v^{-n} - v^{-t}}{\delta} \\ &= \frac{v^{-n} - 1}{\delta} - \frac{v^{-t} - 1}{\delta} \\ &= \bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}, \end{aligned}$$

es decir

$$(aC)_t = P_t + \frac{(aU)_0}{\bar{a}_{\overline{n}|}}.$$

a tiempo n, el objetivo final del financiamiento será alcanzada cuando $(aU)_n = 0$, y $(aC)_t$ caerá a P_t.

En la práctica, una elección común para la estructura de la amortización es definir $\lambda(t)$ como el reciproco del valor medio de una anualidad para los salarios futuros de las vidas activas. Definimos lo anterior como

$$\bar{a}_{W_t} = \frac{(Wa)_t}{W_t},$$

donde $(Wa)_t$ está dado por

$$\begin{aligned}(Wa)_t &= \int_a^r n(t-x+a)\, s(x)\, w(x) \left[\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\, \frac{s(y)}{s(x)}\, \frac{w(y)}{w(x)}\, e^{\tau(t+y-x)}\, dy\right] dx \\ &= \int_a^r n(t-x+a) \left[\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\, s(y)\, w(y)\, e^{\tau(t+y-x)}\, dy\right] dx. \qquad (3.6.19)\end{aligned}$$

Haciendo uso de (3.2.3) y (3.6.19) se tiene

$$\bar{a}_{W_t} = \frac{\int_a^r n(t-x+a) \left[\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\, s(y)\, w(y)\, e^{\tau(t+y-x)}\, dy\right] dx}{\int_a^r n(t-x+a)\, s(x)\, w(x)\, dx}. \qquad (3.6.20)$$

Si en (3.6.5) se usa (3.5.11), es decir, si se sustituye (3.5.11) en (3.4.5) y en (3.4.21) y, posteriormente se sustituyen las expresiones resultantes en (3.6.5) entonces, mediante pasos algebraicos que se omiten, se llega a que

$$\bar{a}_{P_t} = \frac{\int_a^r n(t-x+a) \left[\int_x^r e^{-(\delta-\tau)(y-x)}\, s(y)\, w(y)\, dy\right] dx}{\int_a^r n(t-x+a)\, s(x)\, w(x) dx},$$

es decir, bajo (3.5.11)

$$\bar{a}_{P_t} = \bar{a}_{W_t}.$$

A modo de ejemplo, asumamos una población estacionaria, esto es, $n(a) = l_a$, $\tau = 0$ y $h(x) = 1$, con $M(x) = \bar{a}_{a:\overline{x-a}|}/\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$. Con (3.2.6) y los supuestos hechos para una población estacionaria se tiene

$${}^{T}P_t = f\, w(r)\, l_r\, \bar{a}_r$$

para todo t. Ahora, de (3.4.21)

$$(Pa)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, f\, w(r)\, l_r\, \bar{a}_r \left(1 - \frac{\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}}\right) dx.$$

Ahora, $M'(x) = m(x) = {}_{x-a}E_a/\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}$, entonces por (3.4.5)

$$P_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, f\, w(r)\, l_r\, \bar{a}_r\, \frac{{}_{x-a}E_a}{\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}}\, dx.$$

Así, de (3.6.5) se tiene

$$\bar{a}_{P_t} = \frac{(Pa)_t}{P_t} = \frac{\int_a^r e^{\delta x}\ {}_{x-a}E_a\ \bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}{\int_a^r e^{\delta x}\ {}_{x-a}E_a\, dx}$$

$$= \frac{\int_a^r l_x\ \bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}{\int_a^r l_x\, dx},$$

y $\lambda = 1/\bar{a}_{P_t}$. Por otro lado, sustituyendo (3.4.1) en (3.6.6),

$$(aC)_0 = \frac{\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\ f\ w(r)\ l_r\ \bar{a}_r\, dx}{\bar{a}_{P_t}}$$

$$= \frac{f\ w(r)\ l_r\ \bar{a}_r\ \bar{a}_{\overline{r-a}|} \int_a^r l_x\, dx}{\int_a^r l_x\ \bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}.$$

En las secciones 3.3 y 3.4 se desarrollaron por separado funciones básicas para vidas activas y retiradas. Sin embargo, existen diferentes razones por las cuales es usual considerar dichas funciones básicas de manera combinada, las vidas activas y retiradas.

Las funciones básicas actuariales para el grupo combinado son simplemente la suma de las funciones básicas para miembros activos y miembros retirados. La siguiente tabla resume dicha relación.

Funciones actuariales para miembros activos, retirados y grupos combinado.

Función	**Activo**	**Retirado**	**Combinado**
Valor presente actuarial a tiempo t de las futuras pensiones[a,b]	$(aA)_t$	$(rA)_t$	$A_t = (aA)_t + (rA)_t$
Tasa de costos normales[c]	P_t	0	P_t
Responsabilidad actuarial acumulada[d,e]	$(aV)_t$	$(rV)_t$	$V_t = (aV)_t + (rV)_t$
Valor presente actuarialde los futuros costos normales[f]	$(Pa)_t$	0	$(Pa)_t$

[a] $(aA)_t$ está dado en (3.4.1)
[b] $(rA)_t$ está dado en (3.3.2)
[c] P_t está dado en (3.4.5)
[d] $(aV)_t$ está dado en (3.4.8)
[e] $(rV)_t$ está dado en (3.4.15)
[f] $(Pa)_t$ está dado en (3.4.20)

Asímismo, pueden usarse las ecuaciones dinámicas para los miembros retirados (3.4.9) y activos (3.3.6) para obtener la ecuación dinámica del grupo combinado. Esto es

$$P_t + \delta\, V_t = B_t + \frac{d}{dt} Vt. \tag{3.6.21}$$

Para obtener fórmulas para el grupo combinado bajo el método de costeo grupal se supondrá que las pensiones para miembros retirados esta completamente financiados, es decir, $(rV)_t = (rF)_t$. Entonces, (3.6.1) puede reescribirse como la responsabilidad actuarial no financiada para todos los miembros como

$$\begin{aligned} U_t &= V_t - F_t \\ &= (aV)_t + (rV)_t - (aV)_t - (rF)_t \\ &= (aU)_t. \end{aligned} \tag{3.6.22}$$

Por tanto, dado que no se requieren contribuciones para los miembros retirados, la tasa de contribuciones C_t para todos los miembros es igual a $(aC)_t$, la tasa de contribuciones para miembros activos. En este caso (3.6.3) puede ser reescrita como

$$C_t = P_t + \lambda(t) U_t. \tag{3.6.23}$$

Si $\lambda(t) = 1/\bar{a}_{P_t}$, la tasa de contribuciones toma la forma

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{P_t\ \bar{a}_{P_t} + V_t - F_t}{\bar{a}_{P_t}} \\ &= \frac{A_t - F_t}{\bar{a}_{P_t}}. \end{aligned} \tag{3.6.24}$$

De este modo, cuando $(rF)_t = (rV)_t$, los resultados del método de costeo grupal para miembros activos a tiempo t definidos por (3.6.6) son equivalentes a los resultados para todos los miembros definidos por (3.6.24).

Discusión

Los métodos tradicionales han sido muy útiles a lo largo de la historia de la praxis actuarial y han facilitado prácticamente todos los valores necesarios para el cálculo de cualquier seguro común. Sin embargo, las necesidades actuales, tanto por el lado de la solvencia como por el de la variedad y flexibilidad del mercado de seguros y pensiones, nos obligan a dar un paso más. Antes de la llegada de las computadoras, los logaritmos se calculaban con las viejas reglas de cálculo y antes de éstas, con tablas; sin embargo, a nadie se le ocurre hoy en día recurrir a estos métodos. De ahí la necesidad de crear modelos de carácter estocástico que incorporen de manera funcional aspectos como la tasa de incremento salarial, la tasa de inflación, la supervivencia, invalidez o mortalidad en la modelación de pensiones.

Para llegar a comprender la modelación estocástica de las pensiones es necesario partir de los Principios de la ciencia actuarial y de la definición de las varibles actuariales, usadas a lo largo del primer capítulo. Finalmente una pensión viene siendo un tipo de anualidad. Este primer capítulo puede ser también usado como material de apoyo para los estudiantes de la materia de Calculo Actuarial I (conocida ahora como Matemáticas Actuariales I), ya que se desarrollan los elementos básicos e importantes de la materia.

La teoria de la población desarrollada puede no solamente ser usada para modelar poblaciones de personas. Los fundamentos de este modelo fueron construidos por Lotka. La teoría básica es desarrollada en *World Population: An Analysis of Vital Data* de Keyfitz (1968), y sus aplicaciones fueron publicadas en *Applied Mathematical Demography* junto con una serie de ejercicios. Además de lo anterior, es posible encontrar diferentes publicaciones en la red sobre temas relacionados a la demografía. Por ejemplo, en el sitio www.demographic-research.org se publican trabajos de investigacion, los cuales pueden consultarse de manera libre.

Charles Trowbridge aplicó los modelos de población estacionaria en el estudio de los métodos de financiamiento en el sistema de pensiones y seguro de vida. Puede decirse que Trowbridge es el precursor de la modelación estocástica de los planes de pensiones. Además, se han hecho trabajos por parte de Bowers, Hickman y Nesbitt (1976,1979). Por otro lado, Allison y Winklevoss (1975) en *Pension Mathematics With Numerical Illustrations* han estudiado el efecto de la inflación en las pensiones, las tasa de interes y los beneficios. Constantes publicaciones son hechas por la *Society of Actuaries*, que también pueden ser consultadas en la página web correspondiente.

El objetivo primordial de este trabajo fue el de presentar una manera de modelar las pensiones desde una perspectiva estocástica. A pesar de que no se hace ninguna aplicación práctica de los modelos desarrollados, espero en un futuro puedan aterrizarse más estas ideas utilizando datos reales para comprobar de manera práctica su aplicación y posteriormente su implementación.

Bibliografía

[1] Bowers, N. L., & Gerber: *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, 1997.

[2] Jordan W.C.: *Life Contingency*. Society of Actuaries, 1967.

[3] Kellison, S.: *Theory of Interest (Second Edition)*, Irwin/McGraw-Hill, 1991.

[4] U. Nieto de Alba y J. Vegas Asensio: *Matemática Actuarial*, Editorial Mapfre, España.

[5] Morales Hdz. Ivan. Tesina: *Modelo de portabilidad de beneficios entre sistema de pensiones*. UNAM-Acatlán Edo. de México, 2006.

[6] Ricote Gil Fernando: *Los métodos actuariales en la implementación de compromisos de pensiones a través de planes de pensiones*. Cuaderno de Estudios Empresariales, Vol II (2001) 231-269.

[7] Llorente M. Juan Manuel. *Planes y fondos de pensiones de empleo*. Comisión de control del plan y Fondo de Pensiones.

[8] Moshe A. Milevsky. *The calculus of Retirement Income - Financial Models for Pension Annuities and life Insurance*. Cambridge University Press - Schulich School of Business, 2006.

[9] Arnold A. Dicke, Chairperson, Wayne Bergquist, Robert P. Clancy, Robert A. Miller II1, Harry H. Panjer, Donald M. Peterson, Charles Barry H. Watson, and Warren Luckner. *Society of Actuaries Commitee on Actuarial Principles* SOA Staff Liaison.

[10] Sarrible P. Graciela. *Teoría de la Población*. Ediciones de la Universidad de Barcelona, España, 1996.