



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

ESTADOS SUPERFICIALES DE
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
LONGITUDINALES EN SUPERREDES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

VICTOR MANUEL ORTEGA MONTIEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A G R A D E C I M I E N T O S

Al **Dr. Marcelo del Castillo Mussot** por haber propuesto el tema, por sus constantes ideas y discusiones para mejorar el presente trabajo.

Al **Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca** por haber dirigido este trabajo así como la confianza, la paciencia y la amistad cultivada durante estos largos años de trabajo para la conclusión de esta tesis.

Al **M. en C. Eduardo Javier Rodríguez Uribe** por haberme presentado con Marcelo y con Gerardo cuando no encontraba con quien hacer una tesis de maestría.

Al **M. en C. Jesús Manuel Ortega Rueda de León** quien contribuyó en gran medida a la conclusión de este trabajo a través de constantes discusiones durante estos últimos meses.

M. en C. Jesús Armando Lara Velásquez por las sugerencias para el mejoramiento del trabajo escrito y especialmente por facilitarme un espacio en su oficina durante estos últimos meses para la conclusión de este trabajo.

A los sinodales: **Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca, Dr. Gerardo García Naumis, Dr. Ariel Alberto Valladares Clemente, Dr. Raúl Valenzuela Monjaras, Dr. Héctor Octavio Murrieta Sánchez, Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes** y al **Dr. José Luis Ruvalcaba Sil**, quienes con su comentarios y sugerencias contribuyeron para el mejoramiento de esta tesis.

A los compañeros y amigos del Proyecto de Radio Astronomía de la Preparatoria 5 "José Vasconcelos" de la Universidad Nacional Autónoma de México: **M. en C. José Daniel Vázquez Hernández, M. en C. Sinhué García Flores, Ing. Geofís. Alfonso Florentino Castillo Ábrego, Fís. José de Jesús Ortega Piedras, Fís. José Alejandro Dozal Luce** y al **Fís. Rafael Moreno y Albarrán**.

A mis amigos: **Psic. Alejandro Martín del Toro Huerta, Lic. Alejandro Salido Orcillo, Arqlo. Antonio Porcayo Michellini, Dr. Fidel Casarrubias, Roberto Martín Domínguez Beltrán, Paris Álvarez Yslas** y al **Dr. Héctor Torres**, quienes a través de múltiples golpes y azotes me animaron a concluir esta tesis.

A **todas mis niñas** de la Preparatoria 5 de la Universidad Nacional Autónoma de México que con su frescura, alegría y ánimo contribuyeron para la conclusión de este trabajo.

Contenido

1	ABSTRACT	2
2	INTRODUCCIÓN	3
3	CASO CUÁNTICO	5
3.1	Modelo de Sommerfeld	5
3.2	Modelo de Kronig-Penney	8
4	CASO ELECTROMAGNÉTICO	12
4.1	Ondas en Medios	12
4.2	Modelo de Drude	14
4.3	Modelo Hidrodinámico	17
4.3.1	Funciones dieléctricas y relaciones de dispersión	17
4.3.2	Cálculo de la compresibilidad β^2	21
5	RESULTADOS	25
5.1	Sistema	25
5.2	Condiciones Adicionales a la Frontera (CAF's)	29
5.3	Propagación Transversal	32
5.4	Propagación Longitudinal	34
5.5	Estados de Superficie	36
5.6	Superred Semiperiódica GaAs/AlGaAs	39
6	CONCLUSIONES	46
7	BIBLIOGRAFÍA	47

1 ABSTRACT

Una herramienta importante en el desarrollo de la física es el uso de analogías entre diferentes campos[1], [2], [3]. Estas analogías han sido utilizadas para obtener una amplia variedad de resultados importantes en el área del estado sólido. Una de estas importantes analogías es la que se establece entre el comportamiento ondulatorio cuántico y el comportamiento ondulatorio electromagnético. Con el auxilio de esta analogía, se calcularán los estados superficiales longitudinales para una heteroestructura semi-infinita de multicapas aprovechando los resultados previos obtenidos para un sistema cuántico semi-infinito de pozos y barreras.

Estas ondas longitudinales pueden propagarse en heteroestructuras semiconductoras que pueden ser construidas, ya sea dopando las capas del semiconductor o reemplazándolas con capas metálicas. Cada capa semiconductor puede tener modos colectivos tales como ondas superficiales, ondas electromagnéticas o plasmones de bulto; lo que trae como consecuencia una rica estructura de modos normales para un sistema compuesto. Si la periodicidad de un sistema infinito se rompe, aparecen estados superficiales localizados en la interfase, tal y como fueron predichos por vez primera en la mecánica cuántica por Tamm[4]. Estos estados superficiales han sido observados experimentalmente en superredes finitas por Ohno *et al*[5]. Bloss[6] obtuvo una ecuación analítica para estos estados en un sistema de pozos y barreras semi-infinito.

En sistemas semiconductores las ondas electromagnéticas transversales y longitudinales pueden estar acopladas por las inhomogeneidades como en plasmones[7] y en plasmas fríos magnetizados[8]. Para el último caso, la propagación de ondas electromagnéticas intensas se estudia a través de una aproximación hidrodinámica relativista. Usando el formalismo de la matriz de transferencia de 4×4 para sistemas de multicapas semiconductoras, Mochán y del Castillo-Mussot[9] encontraron expresiones para los estados de bulto electromagnéticos similares a las que describen los estados de bulto cuánticos para sistemas de pozos y barreras. Sin embargo, el caso electromagnético es más complejo, en el sentido de que las ondas transversales y longitudinales están acopladas excepto para la propagación perpendicular en las interfases[9]. Para el caso cuántico, si la periodicidad se rompe con la adición de una interfase, como en el caso de una superred semi-infinita, entonces hay estados localizados superficiales en la interfase. Es importante hacer notar que para la propagación perpendicular a la interfase, no hay acoplamiento longitudinal-transversal, siendo ambas similares al modelo de Kronig-Penney para la propagación cuántica[9]. Las ondas electromagnéticas transversales se han estudiado más extensamente que las ondas electromagnéticas longitudinales, debido a que son más fáciles de generar mediante excitación y que además viajan en el vacío. Por ejemplo, Ramos-Mendieta y Halevi[10] investigaron las ondas superficiales electromagnéticas en cristales fotónicos en dos dimensiones.

Las ondas electromagnéticas longitudinales son el objeto de estudio del presente trabajo. Se utiliza el formalismo de Mochán y del Castillo-Mussot[9] y el modelo hidrodinámico[11] para describir las ondas electromagnéticas en un sistema de capas semiconductoras de diferentes materiales alternados y una frontera que constituye una interfase. Cuando hay acoplamiento transversal-longitudinal las conocidas condiciones a la frontera de las ondas transversales y las Condiciones Adicionales a la Frontera (CAF's)[9] deben de ser usadas para resolver 4 ecuaciones acopladas; pero para las ondas longitudinales sólo se necesitarán las CAF's. El correspondiente procedimiento matemático será análogo al utilizado por Bloss[6] para explicar la dinámica del electrón en sistemas de pozos y barreras semi-infinitos. Se obtendrá una ecuación de bulto para ambas propagaciones así como una ecuación que describe los estados superficiales para la propagación longitudinal electromagnética y, por completez, se presentará una ecuación para el caso de los estados superficiales transversales electromagnéticos.

2 INTRODUCCIÓN

Hoy en día, la mayor parte de los dispositivos electrónicos modernos están fabricados a partir de semiconductores. Para comprender el funcionamiento de estos dispositivos cuando se insertan en un circuito eléctrico, es necesario conocer el comportamiento de los componentes desde un punto de vista físico.

En la naturaleza se encuentran dos tipos de materiales: los conductores (metales) que disponen de electrones libres y los aislantes (cerámicas) que carecen de estos. En medio de estos materiales, se encuentran los semiconductores, que a la temperatura de 0 K se comportan como aislantes. Mediante una aportación de energía se puede alterar esta situación y aproximarse al comportamiento de los conductores.

Para poder entender el fenómeno de la conducción eléctrica en metales, consideramos la teoría clásica de la conductividad desarrollada por Drude. De acuerdo con su modelo, el mecanismo de la conductividad es provocado por la aceleración de los electrones debida al campo eléctrico externo que es balanceado por las fuerzas resistivas debido a las colisiones de los electrones con los iones en el metal. Otra aproximación al mismo fenómeno es el modelo del electrón libre o modelo de Sommerfeld. Este modelo es una aproximación semi-clásica en la que se toma en cuenta el principio de exclusión de Pauli. Los electrones no están libres, en realidad están debilmente ligados a los iones de la red cristalina que se consideran para todo fin práctico infinitamente masivos.

Para el caso de los materiales semiconductores metálicos, el espectro de energía forma bandas tanto permitidas como prohibidas. Un modelo sencillo que permite explicar la existencia de las bandas permitidas y prohibidas es el modelo de Kronig-Penney en el que se toma en cuenta la interacción electrón-ión a través del potencial producido por los iones de la red que han sido modelados como escalones. Esta interacción trae como resultado la aparición de bandas permitidas y de bandas prohibidas. Una característica importante de estos modelos es que las ecuaciones de movimiento presentan expresiones sencillas.

Existen varias posibilidades para la aparición de estas bandas permitidas y prohibidas en este tipo de materiales, una de ellas es que los electrones de una sustancia vayan llenando las capas permitidas dejando la última incompleta. Los electrones que estén en la última banda en el caso que no se encuentre llena, podrán desprenderse de los átomos con mucha facilidad por lo tanto podrán conducir muy bien la electricidad y la sustancia resulta ser un buen conductor de electricidad. A las bandas que se ocupan completamente se les llama bandas de valencia y a las que se ocupan parcialmente se les llama de conducción. También puede ocurrir que una vez llena la banda de valencia, ya no haya más electrones, con lo que la banda de conducción queda vacía y el material no conduce, es decir es un aislante. Una tercera posibilidad, es que aunque ocurra lo anterior, la diferencia de energía entre la banda de valencia y la de conducción no sea muy grande, y los electrones puedan pasar a esta última al recibir energía suficiente.

Otra manera de explicar el fenómeno de la conducción en este tipo de materiales es el modelo hidrodinámico que es un modelo más completo que el modelo de Drude y que describe adecuadamente la excitación de ondas electromagnéticas. Es en este marco en el que se realizará el presente trabajo.

En el capítulo 3 se hace una revisión de los modelos cuánticos de Sommerfeld y Kronig-Penney. En el capítulo 4 se revisan los conceptos básicos de las ondas electromagnéticas en medios. Se establecen las funciones dieléctricas y las relaciones de dispersión asociadas al modelo de Drude y al modelo hidrodinámico. Posteriormente,

se calcula la constante de compresibilidad β . En el capítulo 5 se aplican las ideas y conceptos usados en los capítulos 3 y 4 para el estudio de un sistema general de multicapas periódico con una interfase. En particular, se usa el formalismo del modelo hidrodinámico con el que se demuestra que las soluciones a la ecuación de movimiento en sistemas multicapas (superredes) presentan una gran similitud en el tratamiento matemático con el modelo de Kronig-Penney y se obtiene el espectro de energías, el cual presenta bandas permitidas y prohibidas. Posteriormente, se introduce una frontera con lo cual se rompe la periodicidad y que permite la obtención del espectro de energías para este sistema. Por último se aplican los resultados generales a un sistema multicapas hecho de GaAs/AlGaAs.

3 CASO CUÁNTICO

A continuación se presenta una breve exposición de algunas ideas y resultados cuánticos muy conocidos para describir las inhomogeneidades electrónicas en sólidos. Las ideas y los conceptos revisados en este capítulo se utilizarán posteriormente en el capítulo 5 para establecer, una analogía entre sistemas de pozos y barreras y sistemas de capas alternadas de diferentes materiales. Se describirá el modelo de Sommerfeld[12], haciendo énfasis en la periodicidad de las soluciones para luego generalizar este resultado en el modelo de Kronig-Penney[13],[14] el cual permite establecer que la periodicidad de las soluciones se reflejan en las bandas permitidas y prohibidas.

3.1 Modelo de Sommerfeld

En 1928 Sommerfeld[12] aplicó por vez primera la teoría cuántica a los electrones en sólidos. Para poder aplicar esta teoría utilizó un modelo simplificado en el cual considera al metal como un cubo de arista L en el que la energía potencial de cada electrón es constante, de manera que el potencial total que sienten los electrones es cero, es decir, los electrones se mueven libremente y el potencial fuera del cubo es infinito. Para describir un sistema con tales condiciones se usa la ecuación de Schrödinger en la que se conserva el término correspondiente a la energía cinética

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_k(\mathbf{r}) + \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) E_k \Psi_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.1.1)$$

Debido a que los electrones se encuentran confinados en el volumen $V = L^3$ del cubo, las soluciones son de la forma

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = A \operatorname{sen} \left(\frac{n_x \pi}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_y \pi}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_z \pi}{L} \right). \quad (3.1.2)$$

Sustituida la Ec. (3.1.2) en la Ec. (3.1.1), se encuentra que los niveles de energía son

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (3.1.3)$$

Para poder aplicar el modelo de Sommerfeld al problema de conducción, se propone como solución

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.1.4)$$

Al sustituir tal expresión en la Ec. (3.1.1) se obtiene que la energía es

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (3.1.5)$$

Imponiendo periodicidad a las soluciones en cada dirección

$$\Psi(x + L, y, z) = \Psi(x, y, z), \quad (3.1.6)$$

$$\Psi(x, y + L, z) = \Psi(x, y, z), \quad (3.1.7)$$

$$\Psi(x, y, z + L) = \Psi(x, y, z) \quad (3.1.8)$$

podemos escribir

$$e^{ik_i \cdot L} = 1, \quad i = x, y, z$$

y se encuentra que

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.1.9)$$

los cuales se representan en la Fig. (1).

Estas Ψ 's (Ec. 3.1.2) y (Ec. 3.1.4) llevan a resultados distintos para E_n ; sin embargo, la densidad de estados es la misma para ambos casos. En un sistema metálico el número de electrones es tan grande y el espacio entre niveles de energía es tan pequeño que la única cantidad de importancia es la densidad de niveles. Entonces, el uso de ondas viajeras y las condiciones de periodicidad conducen a las mismas propiedades de bulto que si se usan ondas estacionarias. Desde el punto de vista estrictamente matemático el uso de ondas viajeras es el apropiado para tratar el problema de la conducción en metales. En este modelo aproximado se considera que los electrones se comportan como un gas de Fermi; es decir, que no interaccionan entre ellos. La débil interacción de los electrones de conducción se debe a dos razones:

1. El principio de exclusión de Pauli en el que los electrones con espines paralelos tienden a estar alejados unos de otros.
2. A pesar de que los electrones tengan espines opuestos, estos tienden a estar alejados unos de otros, ya que si sucediese lo contrario la energía potencial se haría excesivamente grande y el sistema no alcanzaría el estado de mínima energía.

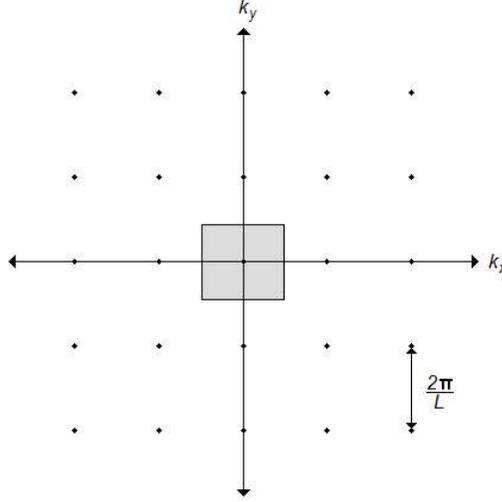


Fig. 1: Espacio \mathbf{k} en dos dimensiones. Los vectores onda permitidos son múltiplos de $2\pi/L$.

Se puede construir el estado base a temperatura $T = 0$ de los N electrones independientes. De acuerdo con el principio de exclusión de Pauli dos electrones no pueden tener los mismos números cuánticos, por lo que solamente se pueden acomodar 2 electrones en cada nivel.

Aunque el sistema esté en el estado base los electrones de conducción tienen energías de varios electron volt, lo que significa que los electrones son móviles a pesar de que el sistema se encuentre a $T = 0$. Si E_F es el nivel más alto que alcanzan los electrones después de estar acomodados en los niveles asociados al sistema, la energía de Fermi E_F [12] es

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}_F^2 \quad \text{donde} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2n_F\pi}{L}. \quad (3.1.10)$$

El número total de orbitales dentro de la esfera de volumen $\frac{4}{3}\pi k_F^3$ es

$$2 \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pi k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3 = N \quad (3.1.11)$$

donde N es el número de electrones. El vector de onda de Fermi que satisface la ecuación

$$\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}_F^2 = E_F \quad (3.1.12)$$

es

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \quad (3.1.13)$$

que depende solamente de la concentración de electrones. Por lo tanto la energía de Fermi es

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^3 N}{V} \right)^{1/3}. \quad (3.1.14)$$

Esta ecuación relaciona la energía de Fermi con la concentración de partículas, N/V , y su masa. Por último, la velocidad del electrón en la superficie de Fermi queda expresada como

$$v_F = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{3\pi^3 N}{V} \right)^{1/3}. \quad (3.1.15)$$

3.2 Modelo de Kronig-Penney

En el modelo anterior los electrones viajan libremente dentro de un cubo cuyas paredes tienen un potencial infinito. Aquí se complicará el problema pues los electrones están en una red cristalina periódica. A raíz de la interacción electrón-ión aparecen una serie de propiedades importantes que permiten establecer la diferencia entre un conductor y un aislante.

Desde el punto de vista cuántico y didáctico, el modelo de Kronig-Penney[13], [14] resulta ser un modelo simple para entender algunas propiedades físicas de los electrones en un sólido cristalino y eventualmente servirá para estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en superredes. En este modelo se considera un sólido cristalino en el que los iones se encuentran en los puntos de la red y los electrones se mueven por todo el sólido. Se toma un electrón como muestra representativa de los electrones del cristal, este electrón que está inmerso en un potencial aproximadamente periódico es consecuencia de la distribución de carga asociada a los iones de la red, más un potencial promedio aportado por todos los demás electrones. Esta aproximación toma en cuenta la interacción promedio de un sólo electrón con todos los demás. A este potencial periódico se le puede modelar en términos de pozos y barreras como se muestra en la Fig. 2.

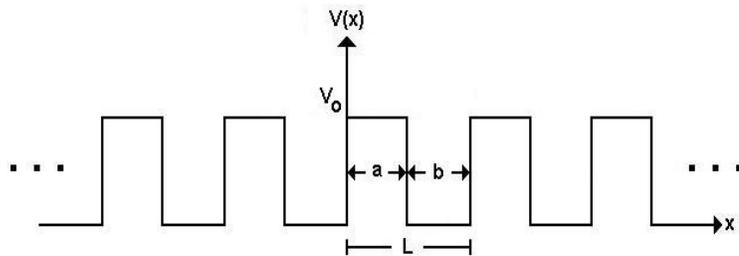


Fig. 2: Superred cuántica con ancho de barrera a , ancho de pozo b , periodo $L = a + b$ y altura V_0 .

Usando la ecuación de Schrödinger para un sólo electrón de masa m en una celda del potencial periódico unidimensional de la forma

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a \\ 0, & a < x < b \end{cases} \quad (3.2.1)$$

se tiene que la ecuación de Schrödinger se puede escribir como

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \Psi(x) = 0, \quad (3.2.2)$$

para la cual se propone que la solución sea de la forma

$$\Psi(x) = \begin{cases} J_n e^{Kx} + L_n e^{-Kx}, & 0 < x < a \\ M_n e^{ikx} + N_n e^{-ikx}, & a < x < b \end{cases}, \quad (3.2.3)$$

donde

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V_0(x) - E]} \quad \text{y} \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}. \quad (3.2.4)$$

Debido a la periodicidad del sistema las funciones propias se pueden escribir en términos de funciones de Bloch[12],[13],[14]

$$\Psi(x) = e^{i\bar{\mathbf{k}}x} u(x) \quad (3.2.5)$$

donde $\bar{\mathbf{k}}$ es el vector unidimensional de Bloch y $u(x)$ es una función que contiene la periodicidad del sistema. Se sustituye la Ec. (3.2.3) en la Ec. (3.2.2), usando la continuidad de $\Psi(x)$ y $\Psi'(x)$ en la frontera y la función de Bloch se encuentra la ecuación[13], [14]

$$\cos(\bar{\mathbf{k}}L) = \cosh(Kb) \cos(ka) + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{k} - \frac{k}{K} \right) \sinh(Kb) \sin(ka) \quad (3.2.6)$$

donde $L = a + b$, es el periodo. Esta ecuación, es una ecuación trascendente que se resuelve por métodos numéricos y de la cual se obtienen las bandas permitidas y prohibidas para un cristal, tal como lo muestra la Fig. 3.

El $\cos(\bar{\mathbf{k}}L)$ está definido entre 1 y -1, para esos valores se tiene que $|\bar{\mathbf{k}}L| = 2\pi$ la cual es la condición de máxima difracción de Bragg. La condición de máxima difracción establece que el producto escalar de un vector

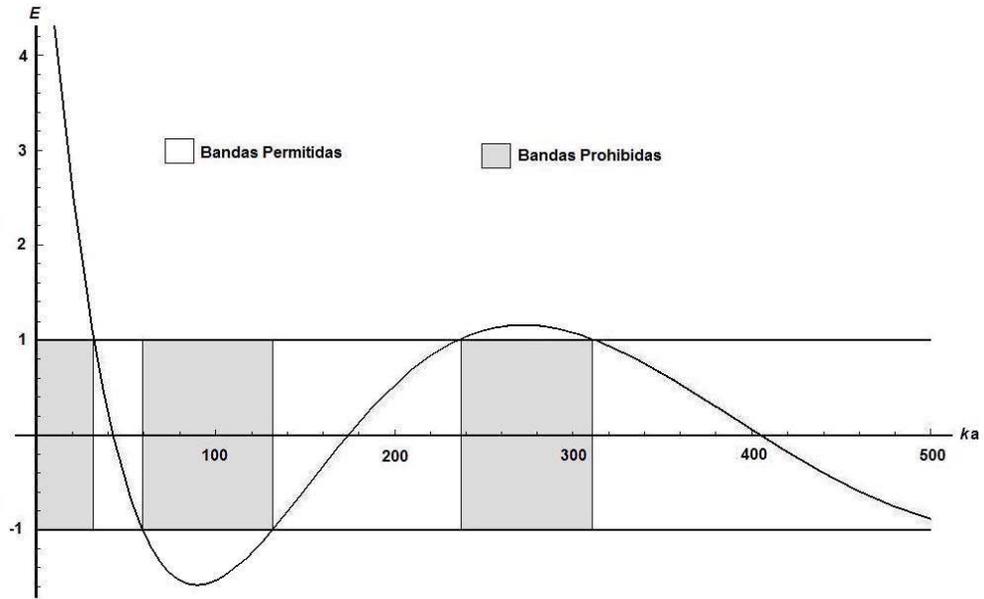


Fig. 3: Bandas prohibidas y permitidas de acuerdo al Modelo de Kronig-Penney.

de la red recíproca y un vector de la red directa es igual a 2π . El correspondiente valor del vector de la red recíproca es $|\bar{\mathbf{k}}| = 2\pi/L$ y los límites de la primera zona de Brillouin son $|\bar{\mathbf{k}}| = \pi/L$.

Si las soluciones a la ecuación de Schrödinger tienen la forma de ondas propagándose a la derecha y a la izquierda con $|\bar{\mathbf{k}}| = \pi/L$, se tiene que[13]

$$\Psi_+(x) = e^{i\pi x/L} + e^{-i\pi x/L}, \quad (3.2.7)$$

$$\Psi_-(x) = 2i \left(e^{i\pi x/L} - e^{-i\pi x/L} \right); \quad (3.2.8)$$

entonces la densidad de probabilidad para cada una de ellas es

$$|\Psi_+(x)|^2 \propto \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right), \quad (3.2.9)$$

$$|\Psi_-(x)|^2 \propto \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right). \quad (3.2.10)$$

Estas diferentes densidades de probabilidad dicen que para valores $x = 0, L, 2L, \dots$; $|\Psi_+(x)|^2$ se acumula electrones sobre o cerca de los iones positivos, regiones de menor energía potencial, y para valores $x = L/2$,

$3L/2, \dots; |\Psi_-(x)|^2$ acumula electrones entre los iones positivos, regiones de mayor energía potencial. Si los valores promedio de estas energías potenciales difieren en un valor E_g , entonces tenemos una banda prohibida de ancho E_g . Esta es una posible explicación física de la estructura de bandas permitidas y prohibidas en un cristal.

4 CASO ELECTROMAGNÉTICO

En este capítulo se estudiará el comportamiento de los electrones en un semiconductor sometido a una onda electromagnética. Los resultados se utilizan en el capítulo 5 para estudiar superredes.

4.1 Ondas en Medios

Cuando a un material se le aplica un campo eléctrico \mathbf{E} , la distribución electrónica interna se modifica. El campo eléctrico aplicado separa las cargas positivas y negativas (cada par forma un dipolo) que contribuyen con una componente de campo adicional.

Para un medio isotrópico, y debido a la invarianza translacional temporal, se puede escribir el vector de desplazamiento \mathbf{D} como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' \int dt' \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (4.1.1)$$

Para materiales infinitos homogéneos, existe invarianza translacional en el espacio, entonces $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = \epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t')$; es decir, depende de la distancia relativa entre \mathbf{r} y \mathbf{r}' . La transformada de Fourier espacial temporal de la Ec. (4.1.1) se expresa, empleando el teorema de la convolución[15], como

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) \quad (4.1.2)$$

donde

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = \int dt \int d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.1.3)$$

y

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) = \int dt \int d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.1.4)$$

Un concepto útil en la teoría de sistemas no locales es el alcance de la no localidad, definido como la distancia entre \mathbf{r} y \mathbf{r}' a partir de la cual $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ es despreciable (típicamente de algunos Angstroms). Si la escala de variación de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ comparada con el alcance de la no localidad es muy grande, lo podemos sacar de la integral sobre \mathbf{r} , y así obtener una relación de tipo local. Por lo tanto, la no localidad es importante solamente en situaciones en las que el campo eléctrico varía abruptamente como función de la posición. Tal es el caso en la

cercanía de una superficie donde incide luz con polarización \mathbf{P} para la componente normal del campo eléctrico \mathbf{E} , la cual es discontinua en la teoría local de Fresnel. Por lo tanto, sí se debe conservar para estudio de las superficies metálicas.

Las ecuaciones de Maxwell para medios con fuentes en unidades gaussianas[15] son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{ext} \quad \text{Ley de Gauss eléctrica,} \quad (4.1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss magnética,} \quad (4.1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad \text{Ley de Faraday,} \quad (4.1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_{ext} \quad \text{Ley de Ampère.} \quad (4.1.8)$$

Si se considera que no hay fuentes externas: $\rho_{ext} = 0$ y $J_{ext} = 0$, si el medio es lineal y homogéneo; es decir, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}$; las ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

A partir de este grupo de ecuaciones podemos obtener la ecuación de onda para el campo eléctrico \mathbf{E} y para la inducción magnética \mathbf{B} ; para posteriormente obtener la relación de dispersión entre la constante dieléctrica ϵ y el vector de onda \mathbf{k} .

Primero se obtiene el rotacional de $\nabla \times \mathbf{E}$, es decir:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}. \quad (4.1.10)$$

Si se separa \mathbf{D} en sus componentes transversal \mathbf{D}^t y longitudinal \mathbf{D}^l , se tiene que $\mathbf{D} = \mathbf{D}^t + \mathbf{D}^l = \epsilon^t\mathbf{E}^t + \epsilon^l\mathbf{E}^l$, entonces

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^t = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}^t = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon^t\mathbf{E}^t, \quad (4.1.11)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^l = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}^l = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon^l\mathbf{E}^l. \quad (4.1.12)$$

Por definición se tiene que $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^t = 0$ e $i\mathbf{k} \times \mathbf{E}^l = 0$. Ahora bien considerando la identidad vectorial $\nabla \cdot -\nabla^2 = \nabla \times \nabla \times$, obtenemos las ecuaciones de onda de las componentes transversales y longitudinales del campo eléctrico \mathbf{E} , estas son

$$\nabla^2 \mathbf{E}^t = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^t \mathbf{E}^t, \quad (4.1.13)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^l \mathbf{E}^l = 0. \quad (4.1.14)$$

Si se supone que las componentes del campo eléctrico se comportan como ondas planas $\mathbf{E}^t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0^t e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ y $\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0^l e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, y se sustituyen estas expresiones en las Ecs. (4.1.13) y (4.1.14) se obtiene la relación de dispersión transversal y longitudinal para la constante dieléctrica ϵ y el vector de onda \mathbf{k}

$$\epsilon^t = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}, \quad (4.1.15)$$

$$\epsilon^l = 0. \quad (4.1.16)$$

4.2 Modelo de Drude

En su forma más sencilla, la teoría cinética de gases describe el comportamiento de gases simples con partículas de una sola clase, como esferas sólidas idénticas, que se mueven en líneas rectas antes y después de chocar entre sí. Al tiempo entre colisiones se le considera despreciable y también se supone que el sistema no está sujeto a fuerzas externas. Drude propuso un modelo para un metal de tal manera que pudiera ajustarse al marco descrito por la teoría cinética de gases; es decir, consideró al metal compuesto por dos clases de partículas: partículas que se mueven libremente por el metal (electrones de conducción) y cargas positivas inmóviles (iones), Fig. (4), de manera tal que se mantiene la neutralidad del metal. Además, propuso que los electrones no interactúan entre sí (Aproximación del electrón independiente) y que la interacción ión-electrón (Aproximación del electrón libre) se daba de la misma forma que en la teoría cinética de los gases, las colisiones eran eventos instantáneos que alteraban abruptamente la velocidad del electrón. Es decir, debido a la ausencia de un campo electromagnético externo los electrones dispersados se mueven en líneas rectas. A través de estas colisiones el sistema alcanza el equilibrio térmico. Adicionalmente considera que entre colisiones hay un tiempo τ de relajación que contiene la información del electrón dispersado y que no es más que el tiempo promedio entre colisiones.

Tomando la ecuación de movimiento de los electrones de conducción en un sólido en la aproximación del tiempo de relajación[11]

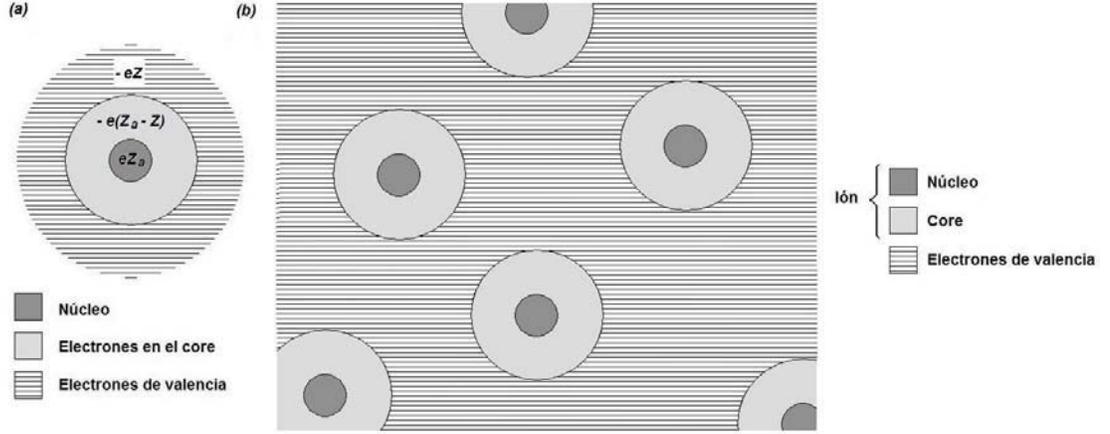


Fig. 4: **(a)** Un ión y los electrones de conducción. **(b)** El modelo de Drude. Los iones inmóviles y los electrones de conducción que se mueven prácticamente libres por el metal.

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}, \quad (4.2.1)$$

en la que el término $e\mathbf{E}$ es la fuerza que produce el campo eléctrico, $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$ es la fuerza producida por el campo magnético conocida como la fuerza de Lorentz y $m\mathbf{v}/\tau$ es la fricción producida por la interacción de los electrones con los iones de la red a la que se le conoce como la aproximación del tiempo de relajación, donde m , e y \mathbf{v} son la masa, la carga y la velocidad promedio respectivamente del electrón y τ es el tiempo de relajación o tiempo promedio entre colisiones.

Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, su derivada temporal se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \left[\frac{d}{dt} \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} \quad (4.2.2)$$

de donde la Ec. (4.2.1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + m [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}. \quad (4.2.3)$$

Ahora, para linealizar la Ec. (4.2.3) no se consideran los términos $[\mathbf{v} \cdot \nabla]$, ni la fuerza de Lorentz ya que esta contiene un término \mathbf{v}/c , donde \mathbf{v} es la velocidad promedio electrónica, que hace que sea menor que la debida al campo eléctrico \mathbf{E} . Aún con corrientes de 1 Amp/mm² se tiene una velocidad electrónica del orden 0.1 cm/seg con la que el campo magnético tiene una fuerza de 10^{-10} veces menor que la del campo eléctrico[12], por lo que la ecuación se puede escribir como

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = e \mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}. \quad (4.2.4)$$

Esta ecuación se obtiene suponiendo que el campo eléctrico no varía apreciablemente sobre distancias comparables al camino libre medio electrónico; es decir, la longitud de onda del campo eléctrico es mayor que el camino libre medio, esto trae como consecuencia que la fuerza que el campo ejerce sobre los electrones siempre sea la misma. Si la longitud de onda es más pequeña que el camino libre medio entonces se tiene que hacer uso de modelos que consideren la no-localidad.

Si \mathbf{E} y \mathbf{v} se comportan como ondas planas de la forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ se obtiene

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v} - i\omega m \mathbf{v} = e \mathbf{E} \quad (4.2.5)$$

de donde la velocidad \mathbf{v} resulta ser

$$\mathbf{v} = \frac{e \mathbf{E}}{m \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right)}. \quad (4.2.6)$$

Como $\mathbf{J} = ne\mathbf{v}$, con n la densidad de partículas se puede escribir

$$\mathbf{J} = \frac{ine^2}{m \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)} \mathbf{E}. \quad (4.2.7)$$

Si $\mathbf{J} = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)$ y si el medio es lineal, entonces

$$\sigma(\omega) = \frac{ine^2}{m \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)}. \quad (4.2.8)$$

Por otro lado, $\epsilon(\omega) = 1 + (4\pi i/\omega) \sigma(\omega)$ por lo que

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)}. \quad (4.2.9)$$

Definiendo $\omega_p^2 = 4\pi ne^2/m$ como la frecuencia de plasma para cada especie, entonces

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)}. \quad (4.2.10)$$

Como $\epsilon(\omega)$ no depende del vector de onda \mathbf{q} se dice que es una función dieléctrica local. De acuerdo con la Ec.(4.1.15) para $\tau \gg 1$, la relación de dispersión es

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2 + \omega_p^2. \quad (4.2.11)$$

4.3 Modelo Hidrodinámico

El modelo hidrodinámico[11],[20] ha sido utilizado frecuentemente para estudiar diversas propiedades físicas de los sistemas conductores, tales como la no-localidad de la respuesta electromagnética de un gas de electrones y el acoplamiento de los plasmones con las ondas transversales en sistemas no homogéneos[11]. Este modelo no toma en cuenta las excitaciones electrón-hueco, pero describe adecuadamente la excitación de ondas electromagnéticas longitudinales.

4.3.1 Funciones dieléctricas y relaciones de dispersión

El modelo hidrodinámico es una manera simple de incluir la dispersión espacial en la función dieléctrica. De la misma manera que en el modelo de Drude no se toma en cuenta la interacción entre iones y electrones. En la ecuación de movimiento de los electrones se considera un término de presión[11]

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} - \frac{\nabla p}{n} \quad (4.3.1.1)$$

donde τ es el tiempo promedio entre colisiones o tiempo de relajación, $\nabla p/n$ es la fuerza por unidad de volumen y n es la densidad de partículas. El último término de la ecuación describe la inhomogeneidad de la densidad electrónica n .

Se puede expresar al gradiente de presión ∇p como

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial p}{\partial n} \nabla n. \quad (4.3.1.2)$$

Se define

$$\beta^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.3.1.3)$$

como la velocidad característica relacionada a la velocidad aleatoria de la partícula, por lo que

$$\nabla p = m\beta^2 \nabla n. \quad (4.3.1.4)$$

Si se usa la ecuación de continuidad en la forma de conservación del número de partículas[15]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (4.3.1.5)$$

y definimos n_0 como la densidad de partículas en equilibrio, entonces en el término $\nabla \mathbf{p}/n$ de la Ec. (4.3.1.1) hacemos que $n = n_0$ para poder linealizarla. Por otro lado, si se considera en el término $\partial n/\partial t$ que

$$n = n_0 + n' e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (4.3.1.6)$$

donde n_0 es la densidad de equilibrio y $n' e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ es la contribución debida a las variaciones de la densidad, y en el término $\nabla \cdot (n\mathbf{v})$ de la Ec. (4.3.1.5) que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (4.3.1.7)$$

es la velocidad asociada a estas variaciones, se tendrá

$$-i\omega n' e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + i n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0,$$

$$-i\omega n' + i n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (4.3.1.8)$$

$$i n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 = i\omega n',$$

$$n' = \frac{n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega}.$$

Entonces, la Ec. (4.3.1.1) se puede escribir como

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = e\mathbf{E} + e \left(\frac{1}{c} \mathbf{v} \times B \right) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} - \frac{m\beta^2}{n_0} \nabla \frac{n_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \quad (4.3.1.9)$$

despreciando el término magnético

$$-im\omega \mathbf{v} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} - \frac{im\beta^2 \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})}{\omega}, \quad (4.3.1.10)$$

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v} + \frac{im\beta^2 \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})}{\omega} - im\omega \mathbf{v} = e\mathbf{E}. \quad (4.3.1.11)$$

Como \mathbf{v} y \mathbf{E} son vectores se escriben en términos de sus componentes transversales y longitudinales, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l$ y $\mathbf{E} = \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l$. Por lo que

$$\frac{m}{\tau} (\mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l) + \frac{im\beta^2 \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l))}{\omega} - im\omega (\mathbf{v}^t + \mathbf{v}^l) = e (\mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l). \quad (4.3.1.12)$$

Separando explícitamente las componentes transversal y longitudinal se tiene que

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^t + \frac{im\beta^2 \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^t)}{\omega} - im\omega \mathbf{v}^t = e \mathbf{E}^t, \quad (4.3.1.13)$$

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^l + \frac{im\beta^2 \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^l)}{\omega} - im\omega \mathbf{v}^l = e \mathbf{E}^l. \quad (4.3.1.14)$$

Por definición

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^t = 0, \quad \mathbf{q} \times \mathbf{v}^l = 0. \quad (4.3.1.15)$$

Para la componente transversal se usa la Ec. (4.3.1.15) en la Ec. (4.3.1.13) y se obtiene

$$\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^t - im\omega \mathbf{v}^t = e \mathbf{E}^t, \quad (4.3.1.16)$$

$$m \mathbf{v}^t \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = e \mathbf{E}^t. \quad (4.3.1.17)$$

Por lo que la velocidad transversal es

$$\mathbf{v}^t = \frac{e}{m \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right)} \mathbf{E}^t. \quad (4.3.1.18)$$

Si se usa la Ec. (4.3.1.15) en la Ec. (4.3.1.14) la componente longitudinal queda

$$m \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{v}^l + \frac{i\beta^2 \mathbf{v}^l}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega \mathbf{v}^l \right) = e \mathbf{E}^l, \quad (4.3.1.19)$$

$$m \mathbf{v}^l \left(\frac{1}{\tau} + \frac{i\beta^2}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega \right) = e \mathbf{E}^l; \quad (4.3.1.20)$$

por lo que la velocidad longitudinal es

$$\mathbf{v}^l = \frac{e}{m \left(\frac{1}{\tau} + \frac{i\beta^2}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega \right)} \mathbf{E}^l. \quad (4.3.1.21)$$

Como la densidad de corriente es $\mathbf{J} = ne\mathbf{v}$, con la Ec. (4.3.1.18) y la Ec. (4.3.1.21), las densidades de corriente transversal y longitudinal son[15]

$$\mathbf{J}^t = \sigma^t \mathbf{E}^t = \frac{ne^2}{m \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right)} \mathbf{E}^t, \quad (4.3.1.22)$$

$$\mathbf{J}^l = \sigma^l \mathbf{E}^l = \frac{ne^2}{m \left(\frac{1}{\tau} + \frac{i\beta^2}{\omega} \mathbf{q}^2 - i\omega \right)} \mathbf{E}^l \quad (4.3.1.23)$$

y las conductividades transversal y longitudinal son

$$\sigma^t(\mathbf{q}, \omega) = \frac{inq^2}{m \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)}, \quad (4.3.1.24)$$

$$\sigma^l(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i\omega ne^2}{m \left(\frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega^2 \right)}. \quad (4.3.1.25)$$

Se puede expresar la función dieléctrica[15] como $\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + (4\pi i/\omega) \sigma(\mathbf{q}, \omega)$, que con la Ec. (4.3.1.24) y la Ec. (4.3.1.25), permite obtener

$$\epsilon^t(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m \left(\frac{i\omega}{\tau} + \omega^2 \right)}, \quad (4.3.1.26)$$

$$\epsilon^l(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m \left(\frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega^2 \right)}. \quad (4.3.1.27)$$

Si $\omega_p^2 = 4\pi ne^2/m$ es la frecuencia de plasma, entonces

$$\epsilon^t(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\frac{i\omega}{\tau} + \omega^2}, \quad (4.3.1.28)$$

$$\epsilon^l(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega^2} \quad (4.3.1.29)$$

que es una función dieléctrica que depende de \mathbf{q} por lo que es una función no-local. Si se emplea la Ec. (4.1.15) y la Ec. (4.3.1.28) con $\tau \gg 1$, la relación de dispersión para la componente transversal del modelo hidrodinámico es

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{q}^2 + \omega_p^2, \quad (4.3.1.30)$$

que es igual a la del modelo Drude, Ec (4.2.11). Si se emplea la Ec. (4.1.16) y la Ec. (4.3.1.29) con $\tau \gg 1$, la relación de dispersión para ondas longitudinales es

$$\omega^2 = \beta^2 \mathbf{q}^2 + \omega_p^2. \quad (4.3.1.31)$$

4.3.2 Cálculo de la compresibilidad β^2

Es ampliamente conocido que para un proceso adiabático p es proporcional a n^κ , donde κ es la constante adiabática

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n}. \quad (4.3.2.1)$$

Por otro lado, la energía del estado base para un gas de electrones es[16]

$$E_0 = \frac{4\pi gV}{h^3} \int_0^{p_F} \left(\frac{p^2}{2m} \right) p^2 dp = \frac{2\pi gV}{5mh^3} p_F^5 \quad (4.3.2.2)$$

de donde se obtiene que

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3p_F^2}{10m} = \frac{3}{5}\varepsilon_F. \quad (4.3.2.3)$$

Entonces la presión para un gas de electrones en su estado base es

$$p = \frac{2}{3} \frac{3}{5} n E_F = \frac{2}{5} n E_F \quad (4.3.2.4)$$

por lo que

$$\nabla p = \gamma p \frac{\nabla n}{n} = \frac{2}{5} \gamma E_F \nabla n. \quad (4.3.2.5)$$

Por definición[17] se puede escribir

$$\frac{\nabla p}{\nabla n} = m\beta^2 \quad (4.3.2.6)$$

y entonces

$$\nabla p = m\beta^2 \nabla n. \quad (4.3.2.7)$$

Si se compara la Ec. (4.3.2.7) con la Ec. (4.3.2.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}\gamma E_F \nabla n &= m\beta^2 \nabla n, \\ \beta^2 &= \frac{2}{5m}\gamma E_F, \end{aligned} \quad (4.3.2.8)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{5}\gamma v_F^2;$$

donde γ depende del número de grados de libertad, a través de la fórmula

$$\gamma = \frac{f+2}{f}. \quad (4.3.2.9)$$

A frecuencias muy bajas los electrones que chocan con los iones se mueven en 3 dimensiones; es decir, $f = 3$. Para el caso de frecuencias muy altas la velocidad es determinística por lo que la velocidad con la que se mueven los electrones es paralela al campo eléctrico \mathbf{E} . Por lo tanto, $f = 1$ y γ es

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \omega \ll \nu \\ 3, & \omega \gg \nu \end{cases}. \quad (4.3.2.10)$$

Entonces el valor de β^2 es[17]

$$\beta^2 = \begin{cases} \frac{1}{3}v_F^2, & \omega \ll \nu \\ \frac{3}{5}v_F^2, & \omega \gg \nu \end{cases}. \quad (4.3.2.11)$$

5 RESULTADOS

En los capítulos anteriores se hizo una breve revisión de las ecuaciones de Maxwell, de los modelos de Sommerfeld, Drude y Kronig-Penney, de los cuales se usarán las principales ideas en esta sección para obtener el comportamiento de las ondas transversales y longitudinales en sistemas semiconductores multicapas semi-periódicos. En esta sección se estudiará un sistema de multicapas modelado como pozos y barreras desde el punto de vista electromagnético con especial énfasis en la propagación longitudinal.

Se considera un sistema de capas alternadas de diferentes materiales (metálicos o semiconductores altamente dopados). Esto se modela, como un sistema de pozos y barreras en la densidad electrónica. Se usan las Condiciones Adicionales a la Frontera (CAF's) para determinar que $\mu\mathbf{J}$ y $\nu\rho$ sean continuas, donde \mathbf{J} y ρ son la densidad de corriente y la densidad electrónica respectivamente; μ y ν son parámetros que pueden depender del material. Se usa el modelo hidrodinámico para encontrar la relación de dispersión para los modos electromagnéticos longitudinales de la superred periódica, que es una relación similar a aquella a la que se encuentra en el modelo de Kronig-Penney (bulto).

Un plasma está constituido por un conjunto de cargas positivas (iones) y negativas (electrones) que se mueve aleatoriamente entre átomos y/o moléculas neutras de forma que todas estas partículas forman un medio electricamente neutro. Una característica importante es su tendencia a mantener la neutralidad eléctrica en todo el espacio ocupado por él. Las cargas están homogéneamente distribuidas, de forma que cualquier ligero desequilibrio macroscópico en la densidad de carga positiva y negativa da lugar a la aparición de potentes fuerzas electrostáticas, entre las partículas de carga opuesta, que se encargan de restaurar la neutralidad eléctrica macroscópica. El exceso de carga negativa creada da lugar a que los electrones se repelan provocando la oscilación en el sistema. A estas oscilaciones longitudinales se les llama oscilaciones de plasma

5.1 Sistema

Se considera un sistema periódico de capas alternadas de diferentes materiales (metálicos o semiconductores altamente dopados) apiladas a lo largo del eje z . Cada capa tiene el siguiente conjunto de parámetros ε_j , μ_j , ν_j , σ_j , y densidad electrónica n_j , donde $j = \{a, b\}$, dependiendo del tipo de capa en la superred. Para romper la periodicidad se usa una interfase de otro material semiconductor en $z = 0$ con parámetros ε_c , μ_c , ν_c y σ_c , y densidad electrónica n_c , como se muestra en la Fig.5.

En las secciones 4.2 y 4.3, se encontró que en la aproximación hidrodinámica, el vector de onda asociado a la propagación transversal está dado por la Ec.(4.2.11),

$$\mathbf{q}^t = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

y el vector de ondas asociado a la propagación longitudinal está dado por la Ec.(4.3.1.31),

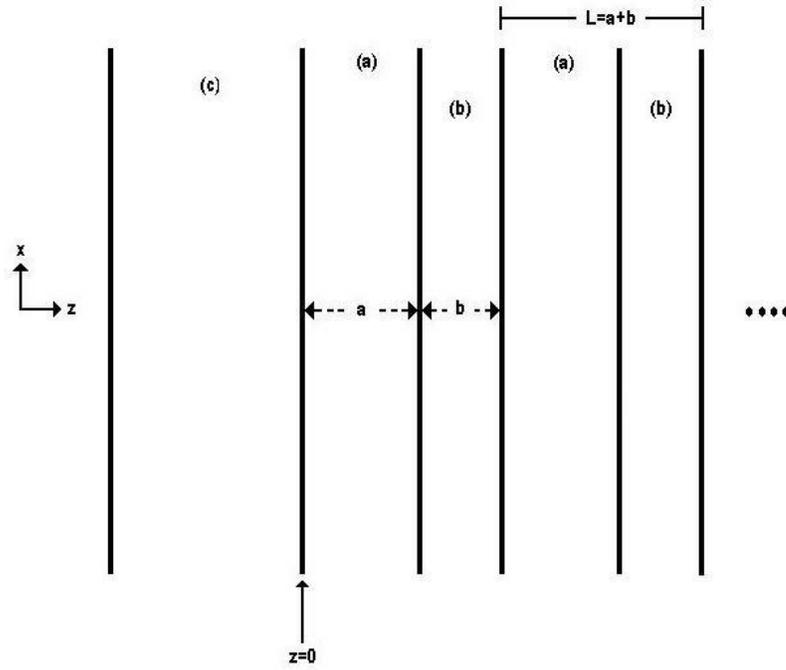


Fig. 5: Superred semi-infinita de capas alternadas hechas de materiales semiconductores (a) y (b). La interface en $z = 0$ está hecha de otro material semiconductor (c).

$$\mathbf{q}^l = \frac{1}{\beta} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

Estas ecuaciones para los vectores de onda transversal y longitudinal son similares al vector de onda que se usa en Mecánica Cuántica para el caso del pozo y la barrera de potencial

$$k = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{V_0 - E}. \quad (5.1.1)$$

Gracias a la similitud matemática entre la Ec. (4.2.11), la Ec. (4.3.1.31) y la Ec. (5.1.1) se puede modelar el sistema de capas alternadas como un sistema de pozos y barreras con diferentes frecuencias de plasma, las cuales son funciones de la densidad electrónica n característica de cada capa, como se muestra en la Fig. 6.

Se parte de las de las ecuaciones de Maxwell, en particular de la Ec. (4.1.6), para escribir \mathbf{B} en términos de un potencial vector \mathbf{A} como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

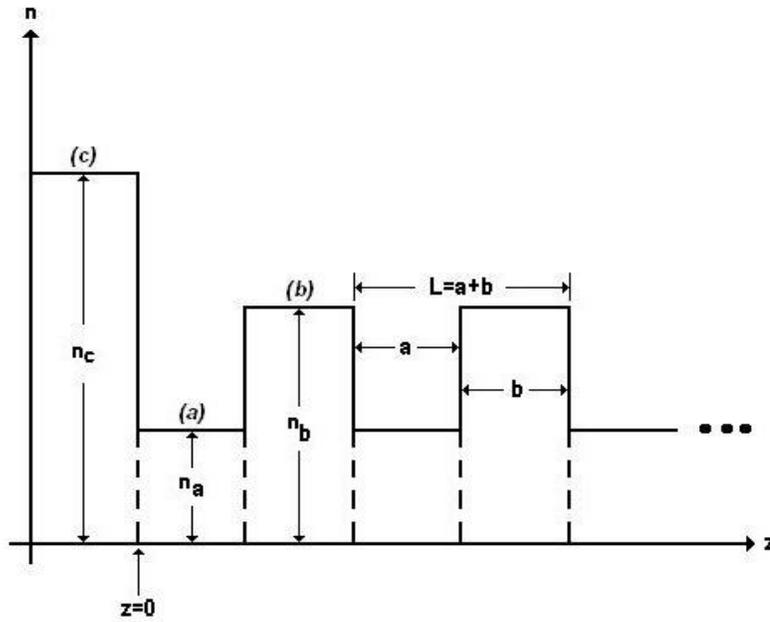


Fig. 6: Superred semi-infinita con ancho de pozo a y ancho de barrera b con alturas n_a y n_b respectivamente y periodicidad L . La interfase en $z = 0$ tiene una altura n_c .

que en la Ec. (4.1.7) queda

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0,$$

por lo que se puede decir que

$$-\nabla\phi = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A},$$

y por lo tanto el campo eléctrico \mathbf{E} se expresa como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (5.1.2)$$

donde ϕ es el potencial escalar. Si se sustituye en la Ec. (4.1.8), se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{ext} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right).$$

Se usa la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$, con la que se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{ext}.$$

Al término

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0, \quad (5.1.3)$$

se le conoce como la condición de Lorentz.

Por otro lado, si se sustituye $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ en la Ec. (4.1.5) y se emplea la Ec. (5.1.2), se obtiene

$$\epsilon \nabla^2 \phi + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -4\pi \rho_{ext}. \quad (5.1.4)$$

Si se considera la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ en la Ec. (5.1.4), se obtiene

$$\epsilon \nabla^2 \phi = -4\pi \rho_{ext}.$$

Dado que no hay fuentes externas, $\rho_{ext} = 0$, el potencial electrostático ϕ debe de satisfacer la ecuación de Laplace en todos los puntos del espacio

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0. \quad (5.1.5)$$

Se propone que el potencial ϕ tenga la forma

$$\phi(x, z, t) = \phi(z) \phi(x, t) = \phi(z) e^{i(qx - \omega t)}, \quad (5.1.6)$$

que al sustituirse en la Ec. (5.1.5), lleva a la ecuación de Helmholtz

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - q^2 \right] \phi(z) = 0. \quad (5.1.7)$$

De acuerdo con esto, el potencial en cada capa será

$$\phi_{n_a}(z) = A_{n_+} e^{iq_a z} + A_{n_-} e^{-iq_a z}, \quad 0 < z < a, \quad (5.1.8)$$

$$\phi_{n_b}(z) = B_{n_+} e^{qb(z-a)} + B_{n_-} e^{-qb(z-a)}, \quad a < z < L, \quad (5.1.9)$$

donde n es la unidad de la capa.

5.2 Condiciones Adicionales a la Frontera (CAF's)

Para estudiar la propagación y el comportamiento de los campos en un sistema como el descrito anteriormente, se necesitan 4 condiciones a la frontera. Las condiciones a la frontera del electromagnetismo se obtienen a partir de una integración de contorno de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell a partir de las cuales se concluye que la componente perpendicular del campo de inducción magnética \mathbf{B} es continua y la componente tangencial del campo eléctrico \mathbf{E} también lo es.

Es ampliamente conocido que a partir del cálculo de las energías eléctrica y magnética se llega al teorema de la energía electromagnética[15]

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.2.1)$$

El primer término de la izquierda es el flujo de la energía almacenada en volumen V , el segundo término es el cambio en el tiempo de la energía electromagnética. El término de la derecha se asocia con el trabajo que hace el sistema.

La ecuación de movimiento en la aproximación hidrodinámica (4.3.1.1), en términos de la densidad de corriente \mathbf{J} es

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E} - \frac{1}{\tau} \mathbf{J} - \beta^2 \nabla n. \quad (5.2.2)$$

Tomando el producto punto de \mathbf{J} con la ecuación anterior se puede escribir

$$\mathbf{J} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} - \beta^2 \mathbf{J} \cdot \nabla n, \quad (5.2.3)$$

que en términos de $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, quedaría de la forma

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + \frac{4\pi}{\omega_p^2 \tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} \mathbf{J} \cdot \nabla n, \quad (5.2.4)$$

pero $\mathbf{J} \cdot \nabla n = \nabla \cdot n\mathbf{J} - n\nabla \cdot \mathbf{J}$ y con la ecuación de continuidad del número de partículas $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} n$, se encuentra que

$$\mathbf{J} \cdot \nabla n = \nabla \cdot n\mathbf{J} + n \frac{\partial}{\partial t} n = \nabla \cdot n\mathbf{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} n^2. \quad (5.2.5)$$

Sustituyendo esta expresión para $\mathbf{J} \cdot \nabla n$ en la Ec. (5.2.4) para $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, se tiene que

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left(\mathbf{J} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + \frac{1}{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \beta^2 \left\{ \nabla \cdot n\mathbf{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} n^2 \right\} \right), \quad (5.2.6)$$

como $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 2\mathbf{J} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \implies \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^2$, entonces se obtiene

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^2 + \frac{1}{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \beta^2 \left\{ \nabla \cdot n\mathbf{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} n^2 \right\} \right). \quad (5.2.7)$$

Esta expresión se puede sustituir en el teorema de la energía

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^2 + \frac{1}{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \beta^2 \left\{ \nabla \cdot n\mathbf{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} n^2 \right\} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Reacomodando términos, se encuentra

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} n\mathbf{J} \right\} + \frac{4\pi}{\tau\omega_p^2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B}^2) + \frac{2\pi}{\omega_p^2} \mathbf{J}^2 + \frac{2\pi\beta^2}{\omega_p^2} n^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

En las ecuaciones anteriores aparecen, además de los términos de energía eléctrica y magnética los términos $\frac{2\pi}{\omega_p^2} \mathbf{J}^2$ y $\frac{2\pi\beta^2}{\omega_p^2} n^2$, el primer término se asocia a la energía cinética del gas de electrones libres y el segundo término se asocia a la densidad de energía potencial debida a la inhomogeneidad introducida en el gas por la onda de plasma longitudinal. Además del vector de Poynting se tiene el término $\frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} n\mathbf{J}$, que es una contribución extra al flujo de energía. Es decir, la densidad de energía en un volumen dado disminuye debido al flujo de energía hacia el exterior, más la pérdida de energía en forma de calor. Entonces se puede separar \mathbf{S} en componentes de manera tal que,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^t + \mathbf{S}^l, \quad (5.2.10)$$

donde

$$\mathbf{S}^t = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (5.2.11)$$

y

$$\mathbf{S}^l = \frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} n\mathbf{J}, \quad (5.2.12)$$

son las energías de flujo transversal y longitudinal.

Se considera la ley de Ampère-Maxwell, escrita de la siguiente manera

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}.$$

Si $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, entonces la ecuación anterior se escribe como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} - \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{J} \right).$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0,$$

y si se considera en la ecuación anterior que $\rho = \rho_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{J} - i\omega\rho = 0 \implies \rho = \frac{1}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{J},$$

que al substituirse en la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{J} \implies \nabla \cdot \left(\mathbf{E} - \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{J} \right) = 0.$$

En óptica esta ecuación establece la continuidad de \mathbf{D}^t si $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}^t$ se tiene una discontinuidad en \mathbf{E}^t y en \mathbf{J}^t . Una discontinuidad en el campo eléctrico es equivalente a una densidad infinita de carga, consecuencia de $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, algunas veces llamada densidad de carga superficial. Por lo tanto, las ecuaciones macroscópicas con las que estamos trabajando requieren que todos los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , y las densidades ρ , \mathbf{J} y \mathbf{P} sean finitas.

Esto nos da la condición a la frontera: \mathbf{E}^t continua y de $\mathbf{E} - \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{J}^t$, \mathbf{J}^t continua. Si se observa el término $\left[\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} n \mathbf{J}^t \right]$ de la Ec. (5.2.9), el vector de Poynting es continuo debido a que las componentes \mathbf{E}^t y \mathbf{E}^l del campo eléctrico \mathbf{E} son continuas. La continuidad de $\frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} n \mathbf{J}$ es una nueva condición a la frontera. Como \mathbf{J}^t es continua se requiere que $\frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} n$ sea continua para asegurar que el flujo de energía sea continuo.

5.3 Propagación Transversal

Para estudiar la propagación transversal en un sistema no periódico se considera primero el problema periódico para obtener una ecuación para el bulto similar a la del modelo de Kronig-Penney.

Como se vio anteriormente, el potencial escalar se puede expresar como en las Ecs. (5.1.8) y (5.1.9). Para el caso transversal los potenciales se escriben como

$$\phi_{n_a}(z) = A_{n_+} e^{iq_a^t z} + A_{n_-} e^{-iq_a^t z}, \quad 0 < z < a, \quad (5.3.1)$$

$$\phi_{n_b}(z) = B_{n_+} e^{q_b^t(z-a)} + B_{n_-} e^{-q_b^t(z-a)}, \quad a < z < L, \quad (5.3.2)$$

donde q^t es el vector de onda asociado a la propagación transversal electromagnética. Se considera primero el sistema periódico con las siguientes condiciones a la frontera para el potencial escalar.

Las condiciones a la frontera que se utilizarán en este caso son: la continuidad del potencial escalar ϕ y la continuidad de la componente normal del vector de desplazamiento \mathbf{D} , que se puede escribir como $\mathbf{D}^t = \epsilon^t \mathbf{E}^t = -\epsilon^t \nabla \phi$.

Con estas condiciones a la frontera se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$A_{n_+} + A_{n_-} = B_{(n-1)_+} e^{q_b^t L} + B_{(n-1)_-} e^{-q_b^t L}, \quad (5.3.3)$$

$$i\epsilon_a q_a^t (A_{n_+} - A_{n_-}) = \epsilon_b q_b^t (B_{(n-1)_+} e^{q_b^t L} - B_{(n-1)_-} e^{-q_b^t L}), \quad (5.3.4)$$

$$A_{n+} e^{iq_a^t a} + A_{n-} e^{-iq_a^t a} = B_{n+} e^{q_b^t a} + B_{n-} e^{-q_b^t a}, \quad (5.3.5)$$

$$i\epsilon_a q_a^t (A_{n+} e^{iq_a^t a} - A_{n-} e^{-iq_a^t a}) = \epsilon_b q_b^t (B_{n+} e^{q_b^t a} - B_{n-} e^{-q_b^t a}). \quad (5.3.6)$$

Usando la condición de Bloch se encuentra una expresión similar a la que se encuentra en el modelo de Kronig-Penney[Ec. (3.2.6)] para las bandas permitidas y prohibidas donde $k = ip$

$$\cosh(pL) = \cos(q_a^t a) \cosh(q_b^t b) + \frac{(\epsilon_b q_b^t)^2 - (\epsilon_a q_a^t)^2}{2\epsilon_a q_a^t \epsilon_b q_b^t} \sin(q_a^t a) \sinh(q_b^t b). \quad (5.3.7)$$

Se suponen que las amplitudes del potencial se comportan como

$$\begin{aligned} A_{n+} &= e^{-pnL} A_{0+}, & A_{n-} &= e^{-pnL} A_{0-}, \\ B_{n+} &= e^{-pnL} A_{0+}, & B_{n-} &= e^{-pnL} A_{0-}; \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

sustituyendo las expresiones anteriores en las Ecs. (5.3.3 - 5.3.6), y si además $A_{0-} = \gamma A_{0+}$, se encuentra una expresión para γ

$$\gamma = \frac{\left\{ (i\epsilon_a q_a^t + \epsilon_b q_b^t) e^{pL} - (i\epsilon_a q_a^t - \epsilon_b q_b^t) e^{pL} e^{-2q_b^t b} \right\} - 2\epsilon_b q_b^t e^{iq_a^t a - q_b^t b}}{2\epsilon_b q_b^t e^{iq_a^t a - q_b^t b} + (i\epsilon_a q_a^t - \epsilon_b q_b^t) e^{pL} - (i\epsilon_a q_a^t + \epsilon_b q_b^t) e^{pL} e^{-2q_b^t b}}. \quad (5.3.9)$$

Se considera ahora el caso de la superred y una interfase en $z = 0$ para romper la periodicidad del sistema. Si se supone una función de onda que decae lejos de $z = 0$

$$\phi(z) = C e^{q_c^t z}, \quad z < 0, \quad (5.3.10)$$

las condiciones a la frontera que se utilizarán para este caso son: la continuidad del potencial escalar ϕ y la continuidad de la componente normal de el vector de desplazamiento D . Si $z = 0$, con $n = 0$ y $A_{0-} = \gamma A_{0+}$, se encuentra que

$$q_c^t = \frac{i\epsilon_a q_a^t}{\epsilon_c} \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right). \quad (5.3.11)$$

Usando la Ec. (5.3.9) en la Ec. (5.3.11) se encuentra la expresión para el parámetro de decaimiento p en la propagación transversal, es decir

$$e^{pL} = \frac{1}{\cos(q_a^t a) \cosh(q_b^t b) - \frac{\epsilon_a q_a^t}{\epsilon_b q_b^t} \operatorname{sen}(q_a^t a) \operatorname{senh}(q_b^t b) + \frac{\epsilon_c q_c^t}{\epsilon_b q_b^t} \cos(q_a^t a) \operatorname{senh}(q_b^t b) + \frac{\epsilon_c q_c^t}{\epsilon_a q_a^t} \operatorname{sen}(q_a^t a) \cosh(q_b^t b)}. \quad (5.3.12)$$

Con la Ec. (5.3.9) y la Ec. (5.3.11) encontramos la ecuación para los estados de superficie transversales

$$\frac{\epsilon_b q_b^t \left[(\epsilon_a q_a^t)^2 + (\epsilon_c q_c^t)^2 \right] - \epsilon_c q_c^t \left[(\epsilon_a q_a^t)^2 + (\epsilon_b q_b^t)^2 \right] \tanh(q_b^t b)}{\left[(\epsilon_b q_b^t)^2 - (\epsilon_c q_c^t)^2 \right] \tanh(q_b^t b)} = \epsilon_a q_a^t \cot(q_a^t a). \quad (5.3.13)$$

5.4 Propagación Longitudinal

Siguiendo el mismo formalismo que se usó para el estudio de la propagación transversal en un sistema no periódico, tomamos en cuenta primero el sistema periódico para obtener una ecuación del bulto similar a la del modelo de Kronig-Penney.

Si se considera que la densidad electrónica tiene la forma

$$\rho(z, t) = \rho_n(z) e^{-i\omega t} \quad (5.4.1)$$

y que la densidad de corriente tiene la forma

$$J(z, t) = j_z(z) e^{-i\omega t} \quad (5.4.2)$$

por lo que ambas cumple con la condición de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = i\omega \rho(z, t). \quad (5.4.3)$$

Se toma $J(z)$ de la siguiente manera

$$j_z(z) = \begin{cases} A_{n+} e^{iq_a^l z} + A_{n-} e^{-iq_a^l z}; & 0 < z < a \\ B_{n+} e^{q_b^l z} + B_{n-} e^{-q_b^l z}; & a < z < L \end{cases}, \quad (5.4.4)$$

y para $\rho_n(z)$ se tendrá

$$\rho_n(z) = \begin{cases} \frac{q_a^l}{\omega} [A_{n+}e^{iq_a^l z} - A_{n-}e^{-iq_a^l z}]; & 0 < z < a \\ \frac{q_b^l}{\omega} [B_{n+}e^{q_b^l z} - B_{n-}e^{q_b^l z}]; & a < z < L \end{cases}, \quad (5.4.5)$$

con $L = a + b$.

Se aplican las condiciones de frontera (es decir, $\mu J_z = \mu j_z(z)e^{-i\omega t}$ y $\nu \rho = \nu \rho_n(z)e^{-i\omega t}$, además de pedir que J_z y ρ sean continuos) en $z = L$ para la celda $n - 1$ y $z = 0$ para la celda n , se tiene

$$\mu_a A_{n+} + \mu_a A_{n-} = \mu_b B_{(n-1)+} e^{q_b^l L} + \mu_b B_{(n-1)-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.4.6)$$

$$\frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n+} - \frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n-} = \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{(n-1)+} e^{q_b^l L} - \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{(n-1)-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.4.7)$$

y para $z = a$ se tendrá

$$\mu_a A_{n+} e^{iq_a^l a} + \mu_a A_{n-} e^{-iq_a^l a} = \mu_b B_{n+} e^{q_b^l a} + \mu_b B_{n-} e^{-q_b^l a}, \quad (5.4.8)$$

$$\frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n+} e^{iq_a^l a} - \frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n-} e^{-iq_a^l a} = \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{n+} e^{q_b^l a} - \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{n-} e^{-q_b^l a}. \quad (5.4.9)$$

Si se considera una superred infinita se podrá aplicar la condición de Bloch, $\Psi_n(z) = e^{n\kappa L} \Psi_0(z)$, y se tendrán las igualdades

$$A_{n+} = e^{n\kappa L} A_{0+}, \quad A_{n-} = e^{n\kappa L} A_{0-}, \quad (5.4.10)$$

$$B_{n+} = e^{n\kappa L} B_{0+}, \quad B_{n-} = e^{n\kappa L} B_{0-}. \quad (5.4.11)$$

Sustituyendo los valores de las Ecs. (5.4.10) y (5.4.11) en las Ecs. (5.4.6)-(5.4.9) tendremos

$$A_{0+} + A_{0-} = \frac{\mu_b}{\mu_a} e^{-\kappa L} B_{0+} e^{q_b^l L} + \frac{\mu_b}{\mu_a} e^{-\kappa L} B_{0-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.4.12)$$

$$A_{0+} - A_{0-} = \frac{\nu_b q_b^l}{\nu_a q_a^l} e^{-\kappa L} B_{0+} e^{i q_b^l L} - \frac{\nu_b q_b^l}{\nu_a q_a^l} e^{-\kappa L} B_{0-} e^{-i q_b^l L}, \quad (5.4.13)$$

$$A_{0+} e^{i q_a^l a} + A_{0-} e^{-i q_a^l a} = \frac{\mu_b}{\mu_a} B_{0+} e^{q_b^l a} + \frac{\mu_b}{\mu_a} B_{0-} e^{-q_b^l a}, \quad (5.4.14)$$

$$A_{0+} e^{i q_a^l a} - A_{0-} e^{-i q_a^l a} = \frac{\nu_b q_b^l}{\nu_a q_a^l} B_{0+} e^{q_b^l a} - \frac{\nu_b q_b^l}{\nu_a q_a^l} B_{0-} e^{-q_b^l a}. \quad (5.4.15)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se llega finalmente a una ecuación de bulto para la propagación longitudinal análoga a la de Kronig-Penney [Ec. (3.2.6)]

$$\cosh(\kappa L) = \cos(q_a^l a) \cosh(q_b^l b) - \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_a \nu_b q_b^l}{\mu_b \nu_a q_a^l} + \frac{\mu_b \nu_a q_a^l}{\mu_a \nu_b q_b^l} \right] \sin(q_a^l a) \sinh(q_b^l b). \quad (5.4.16)$$

5.5 Estados de Superficie

Para poder obtener los estados de superficie es necesario romper la periodicidad de la superred infinita introduciendo una interfase de un material diferente por lo cual se propone $J(z)$ de la siguiente manera,

$$j_z(z) = \begin{cases} A_{n+} e^{i q_a^l z} + A_{n-} e^{-i q_a^l z}; 0 < z < a \\ B_{n+} e^{q_b^l z} + B_{n-} e^{-q_b^l z}; a < z < L \\ C e^{-q_c^l z}; z < 0 \end{cases}, \quad (5.5.1)$$

y $\rho_n(z)$ de la misma manera

$$\rho_n(z) = \begin{cases} \frac{q_a^l}{\omega} [A_{n+} e^{i q_a^l z} - A_{n-} e^{-i q_a^l z}]; 0 < z < a \\ \frac{q_b^l}{\omega} [B_{n+} e^{q_b^l z} - B_{n-} e^{-q_b^l z}]; a < z < L \\ -\frac{q_c^l}{\omega} [C e^{q_c^l z}]; z < 0 \end{cases}, \quad (5.5.2)$$

con $L = a + b$.

Aplicando condiciones de frontera continuas ($\mu J_z = \mu j_z(z)e^{-i\omega t}$ y $\nu \rho = \nu \rho_n(z)e^{-i\omega t}$) en $z = 0$ se tiene

$$\mu_c C = \mu_a A_{0+} + \mu_a A_{0-}, \quad (5.5.3)$$

y

$$-\frac{\nu_c q_c^l}{\omega} C = \frac{\nu_a q_a^l}{\omega} [A_{0+} - A_{0-}]. \quad (5.5.4)$$

Si se toma $A_{0-} = cA_{0+}$ en las Ecs. (5.5.3) y (5.5.4) tendremos

$$q_c^l = -\frac{\mu_c \nu_a}{\mu_a \nu_c} q_a^l \frac{[1 - c]}{[1 + c]}. \quad (5.5.5)$$

Aplicando condiciones de frontera ($\mu J_z = \mu j_z(z)e^{-i\omega t}$, $\nu \rho = \nu \rho_n(z)e^{-i\omega t}$ y continuas) en $z = L$ para la celda n se tiene

$$\mu_a A_{n+} + \mu_a A_{n-} = \mu_b B_{(n-1)+} e^{q_b^l L} + \mu_b B_{(n-1)-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.5.6)$$

$$\frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n+} - \frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n-} = \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{(n-1)+} e^{q_b^l L} - \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{(n-1)-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.5.7)$$

y para $z = a$

$$\mu_a A_{n+} e^{iq_a^l a} + \mu_a A_{n-} e^{-iq_a^l a} = \mu_b B_{n+} e^{q_b^l a} + \mu_b B_{n-} e^{-q_b^l a}, \quad (5.5.8)$$

$$\frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n+} e^{iq_a^l a} - \frac{\nu_a q_a^l}{\omega} A_{n-} e^{-iq_a^l a} = \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{n+} e^{q_b^l a} - \frac{\nu_b q_b^l}{\omega} B_{n-} e^{-q_b^l a}. \quad (5.5.9)$$

Aplicando la condición de Bloch $\Psi_n(z) = e^{-pnL} \Psi_0(z)$ se tienen las igualdades

$$A_{n+} = e^{-pnL} A_{0+}; \quad A_{n-} = e^{-pnL} A_{0-}, \quad (5.5.10)$$

$$B_{n+} = e^{-pnL} B_{0+}; \quad B_{n-} = e^{-pnL} B_{0-}, \quad (5.5.11)$$

$$B_{(n-1)+} = e^{-p(n-1)L} B_{0+}; \quad B_{(n-1)-} = e^{-p(n-1)L} B_{0-}.$$

Sustituyendo los valores de las Ecs. (5.5.10) y (5.5.11) en las Ecs. (5.5.6)-(5.5.9) se tiene que

$$\frac{\mu_a}{\mu_b} A_{0+} + \frac{\mu_a}{\mu_b} A_{0-} = e^{pL} B_{0+} e^{q_b^l L} + e^{pL} B_{0-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.5.12)$$

$$\frac{\nu_a q_a^l}{\nu_b q_b^l} A_{0+} - \frac{\nu_a q_a^l}{\nu_b q_b^l} A_{0-} = e^{pL} B_{0+} e^{q_b^l L} - e^{pL} B_{0-} e^{-q_b^l L}, \quad (5.5.13)$$

$$\frac{\mu_a}{\mu_b} A_{0+} e^{iq_a^l a} + \frac{\mu_a}{\mu_b} A_{0-} e^{-iq_a^l a} = B_{0+} e^{q_b^l a} + B_{0-} e^{-q_b^l a}, \quad (5.5.14)$$

$$\frac{\nu_a q_a^l}{\nu_b q_b^l} A_{0+} e^{iq_a^l a} - \frac{\nu_a q_a^l}{\nu_b q_b^l} A_{0-} e^{-iq_a^l a} = B_{0+} e^{q_b^l a} - B_{0-} e^{-q_b^l a}. \quad (5.5.15)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones tomando $A_{0-} = cA_{0+}$ por lo que el valor de c es

$$c = \frac{\left[\frac{\mu_a}{\mu_b} q_b^l + \frac{\nu_a}{\nu_b} q_a^l \right] e^{2iq_a^l a} e^{pL} + \left[\frac{\mu_a}{\mu_b} q_b^l - \frac{\nu_a}{\nu_b} q_a^l \right] e^{2iq_a^l a} e^{-2iq_b^l b} e^{pL} - 2 \frac{\mu_a}{\mu_b} q_b^l e^{iq_a^l a} e^{-iq_b^l b}}{2 \frac{\mu_a}{\mu_b} q_b^l e^{iq_a^l a} e^{-iq_b^l b} - \left[\frac{\mu_a}{\mu_b} q_b^l - \frac{\nu_a}{\nu_b} q_a^l \right] e^{pL} - \left[\frac{\mu_a}{\mu_b} q_b^l + \frac{\nu_a}{\nu_b} q_a^l \right] e^{-2iq_b^l b} e^{pL}}, \quad (5.5.16)$$

que si se sustituye en la Ec. (5.5.5) y se resuelve para $x = e^{pL}$ se obtiene

$$x = \frac{1}{\cos(q_a^l a) \cosh(q_b^l b) + \frac{\mu_b \nu_c q_c^l}{\mu_c \nu_b q_b^l} \cos(q_a^l a) \sinh(q_b^l b) - \frac{\mu_b \nu_a q_a^l}{\mu_a \nu_b q_b^l} \sin(q_a^l a) \sinh(q_b^l b) + \frac{\mu_a \nu_c q_c^l}{\mu_c \nu_a q_a^l} \sin(q_a^l a) \cosh(q_b^l b)}, \quad (5.5.17)$$

que es la ecuación para el parámetro de decaimiento p .

En la Ec. (5.4.16) se sustituye κ por ip , que además se puede reescribir usando $x = e^{pL}$, para obtener

$$\cosh(pL) = \frac{e^{-pL} + e^{pL}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + x \right] = \cos(q_a^l a) \cosh(q_b^l b) - \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_a \nu_b q_b^l}{\mu_b \nu_a q_a^l} + \frac{\mu_b \nu_a q_a^l}{\mu_a \nu_b q_b^l} \right] \sin(q_a^l a) \sinh(q_b^l b). \quad (5.5.18)$$

Desarrollando la ecuación anterior, se obtiene la ecuación para los estados de superficie para la propagación longitudinal electromagnética

$$\frac{\mu_b \nu_b q_b^l [\mu_c^2 \nu_a^2 q_a^{l2} + \mu_a^2 \nu_c^2 q_c^{l2}] - \mu_c \nu_c q_c^l [\mu_b^2 \nu_a^2 q_a^{l2} + \mu_a^2 \nu_b^2 q_b^{l2}] \tanh(q_b^l b)}{[\mu_c^2 \nu_b^2 q_b^{l2} - \mu_b^2 \nu_c^2 q_c^{l2}] \tanh(q_b^l b)} = \mu_a \nu_a q_a^l \cot(q_a^l a). \quad (5.5.19)$$

Se resuelve la Ec. (5.5.19) para el caso general del modelo de Kronig-Penney arbitrario con $\mu = 1$ y $\nu = \beta/\omega_{p\alpha}$, $\alpha = \{a, b, c\}$ [18] por medios numéricos, de la cual se obtienen las frecuencias ω para los estados superficiales. Estas frecuencias se sustituyen en la Ec. (5.5.17) de la cual se obtiene la validez física de dichos estados superficiales.

Expandiendo la Ec. (5.5.19) en el parámetro $y = e^{-2q_b^l b}$ en el límite en el que $q_b^l b \gg 1$ se llega a la siguiente ecuación para la frecuencia ω de los estados superficiales

$$f(\omega) = 2g(\omega)y = 0, \quad (5.5.20)$$

donde

$$2g(\omega) = -\frac{\nu_b q_b^l [\nu_a^2 q_a^{l2} + \nu_c^2 q_c^{l2}] \operatorname{sen}(q_a^l a) + \nu_c q_c^l [\nu_b^2 q_b^{l2} + \nu_a^2 q_a^{l2}] \operatorname{sen}(q_a^l a) + \nu_a q_a^l [\nu_b^2 q_b^{l2} - \nu_c^2 q_c^{l2}] \cos(q_a^l a)}{[\nu_b q_b^l - \nu_c q_c^l]}, \quad (5.5.21)$$

y

$$f(\omega) = [\nu_a^2 q_a^{l2} - \nu_b \nu_c q_b^l q_c^l] \operatorname{sen}(q_a^l a) - \nu_a q_a^l [\nu_b q_b^l + \nu_c q_c^l] \cos(q_a^l a). \quad (5.5.22)$$

Si la Ec. (5.5.22) se iguala a cero se encuentran las frecuencias para los estados superficiales en el límite mencionado para en un sistema asimétrico de pozos y barreras (Fig. 8 y Fig. 9). Si se considera $q_c^l = q_b^l$ en la Ec. (5.5.22) se define

$$h(\omega) = [\nu_a^2 q_a^{l2} - \nu_b^2 q_b^{l2}] \operatorname{sen}(q_a^l a) - 2\nu_a \nu_b q_a^l q_b^l \cos(q_a^l a), \quad (5.5.23)$$

que al igualarla a cero se obtienen las frecuencias ω para las bandas permitidas en el mismo límite para un sistema simétrico de pozos y barreras (Fig. 10).

5.6 Superred Semiperiódica GaAs/AlGaAs

Se aplican los resultados teóricos a un sistema semiconductor de capas alteradas de GaAs/Al_xGa_{1-x}As en la que la masa efectiva m^* tanto para la capa GaAs y para la capa AlGaAs es de 0.067 veces la masa del electrón[6]. Esta masa efectiva trae como resultado que la densidad electrónica sea $n_a = 2.33 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ [9], [19], [20]. Con estos valores se pueden calcular entonces las frecuencias de plasma

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_\alpha e^2}{m^*},$$

y la constante de rigidez β de

$$\beta_\alpha^2 = \frac{3\hbar^2}{5m^{*2}} (3\pi^2 n_\alpha)^{2/3},$$

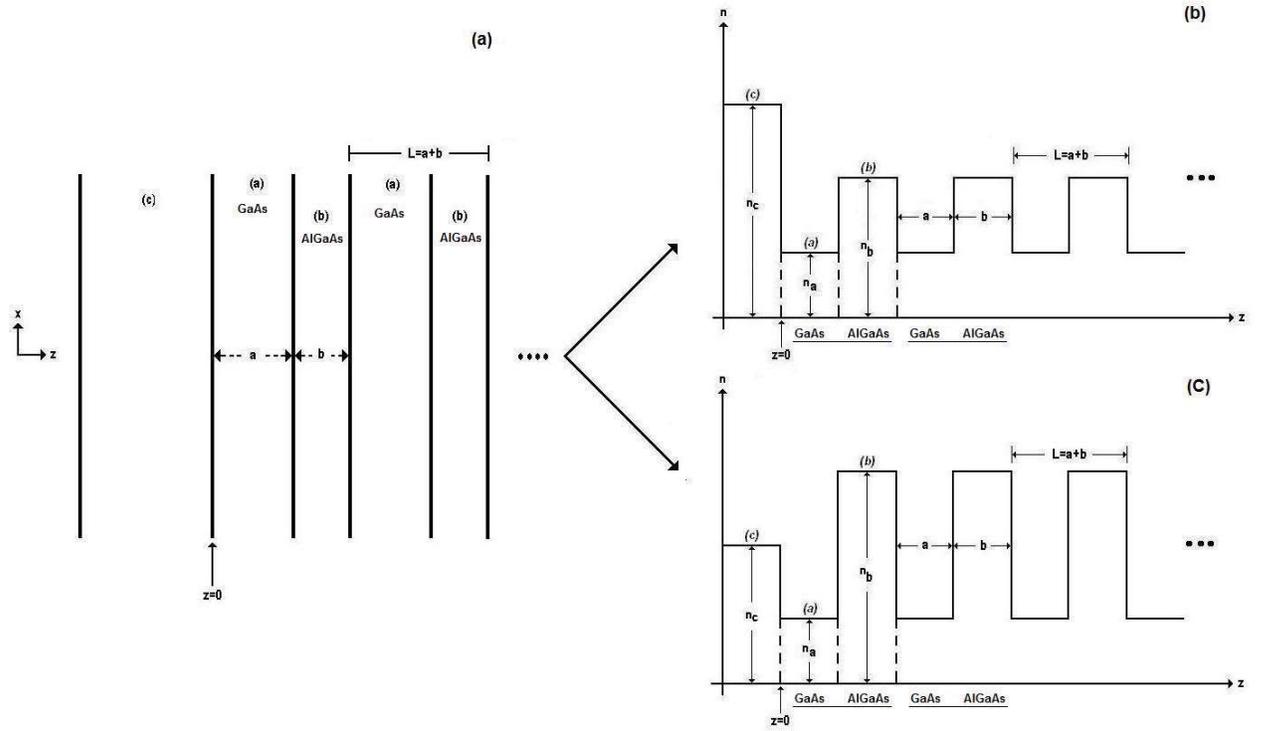


Fig. 7: (a) Superred semi-infinita de capas alternadas semiconductoras construida a partir de una superred periódica infinita de capas alternadas hecha de GaAs/AlGaAs y una interfase; (b) y (c) modelada como pozos y barreras en función de la densidad electrónica n_a (GaAs), n_b (AlGaAs) y n_c .

donde e es la carga eléctrica y $\alpha = \{a, b, c\}$ establece la correspondiente capa, de acuerdo con la Fig. (7).

Se consideran dos superredes con las siguientes densidades electrónicas: $n_b = 10n_a$, $n_c = 15n_a$ (Fig. 7b) y $n_b = 10n_a$, $n_c = 5n_a$ (Fig. 7c) y los anchos de pozo: $a = 10a_0$, $a = 50a_0$, y $a = 100a_0$, respectivamente, y el radio de Bóhr es $a_0 = 0.529 \times 10^{-8}$ cm. Para cada una de las superredes sólo se presentan el primer estado superficial y la primera banda permitida. A partir de la solución exacta a la Ec. (5.5.19) se grafica el estado superficial (línea punteada) y de la Ec. (5.4.16) la banda permitida (línea continua) para cada una de las 6 superredes (Figs. 11-16) en función del ancho de la barrera b/a_0 .

Cuando el ancho de la barrera b/a_0 crece los valores a los que se aproximan los estados superficiales son:

Tabla 1

$$n_b = 10n_a, n_c = 15n_a$$

¹ a	² ω_b	³ ω_s	⁴ b_i	⁵ Fig.
$10a_0$	$1.321\omega_{p_a}$	$1.262\omega_{p_a}$	6.057	11
$50a_0$	$1.054\omega_{p_a}$	$1.044\omega_{p_a}$	6.101	13
$100a_0$	$1.020\omega_{p_a}$	$1.017\omega_{p_a}$	6.013	15

¹ncho del pozo, ²Frecuencia de la banda permitida cuando el ancho de la barrera crece, ³Frecuencia del estado superficial cuando el ancho de la barrera crece, ⁴Ancho de la barrera asociada a la intersección del estado superficial y la banda permitida,

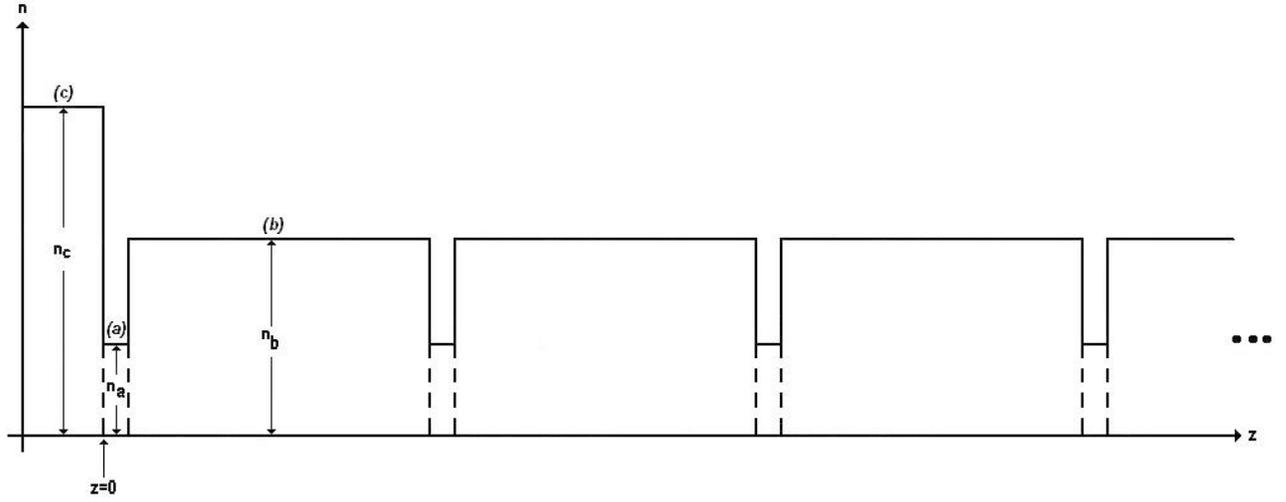


Fig. 8: Sistema de pozos y barreras en el límite $q_b^2 b \gg 1$ donde la densidad electrónica n_c de la interfase es mayor que las densidades n_a y n_b de la superred periódica.

⁵Gráfica correspondiente.

Tabla 2

$$n_b = 10n_a, \quad n_c = 5n_a$$

¹ a	² ω_b	³ ω_s	⁴ b_i	⁵ Fig.
$10a_0$	$1.321\omega_{p_a}$	$1.471\omega_{p_a}$	$3.564a_0$	12
$50a_0$	$1.054\omega_{p_a}$	$1.069\omega_{p_a}$	$3.624a_0$	14
$100a_0$	$1.020\omega_{p_a}$	$1.024\omega_{p_a}$	$3.500a_0$	16

¹Ancho del pozo, ²Frecuencia de la banda permitida cuando el ancho de la barrera crece, ³Frecuencia del estado superficial cuando el ancho de la barrera crece, ⁴Ancho de la barrera asociada a la intersección del estado superficial y la banda permitida,

⁵Gráfica correspondiente.

que están en total concordancia con los valores obtenidos para el estado superficial al resolver la Ec. (5.5.22) y para la banda permitida al resolver la Ec. (5.5.23).

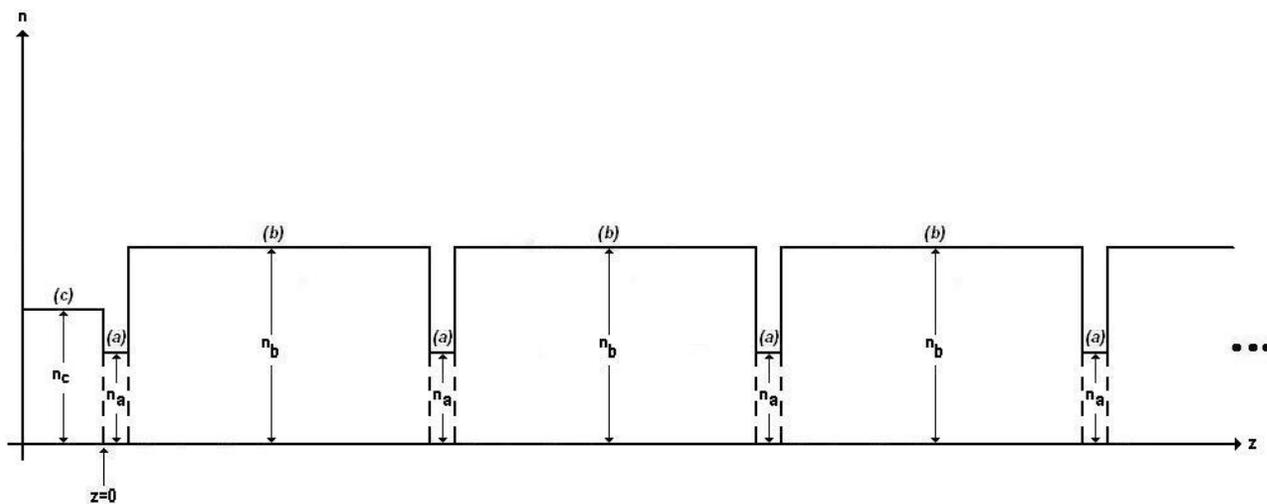


Fig. 9: Sistema de pozos y barreras en el límite $q_b^l b \gg 1$ donde la densidad electrónica n_c de la interfase es menor que las densidades n_a y n_b de la superred periódica.

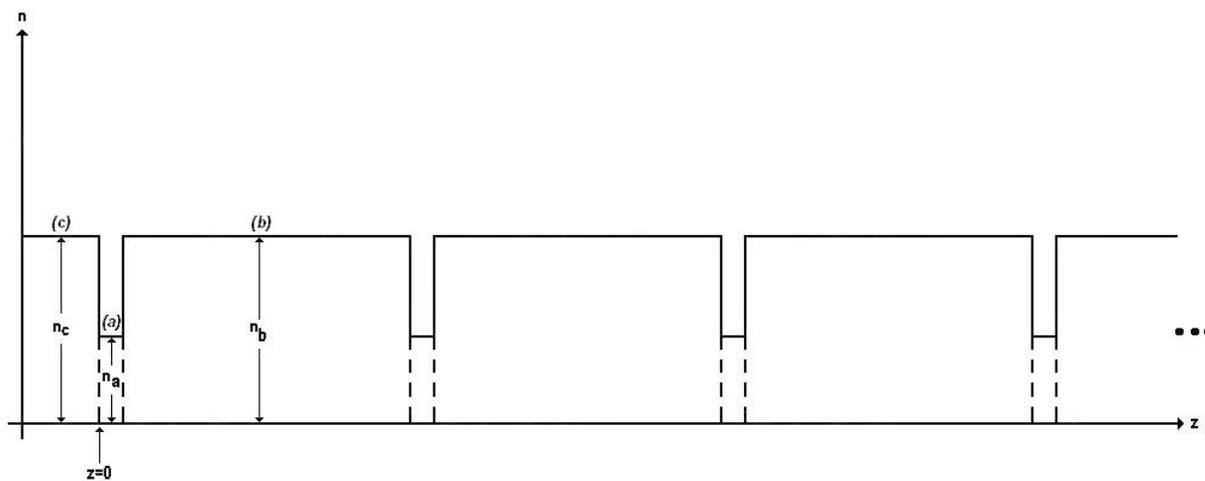


Fig. 10: Sistema de pozos y barreras para el caso límite en el que $q_c^l = q_b^l$.

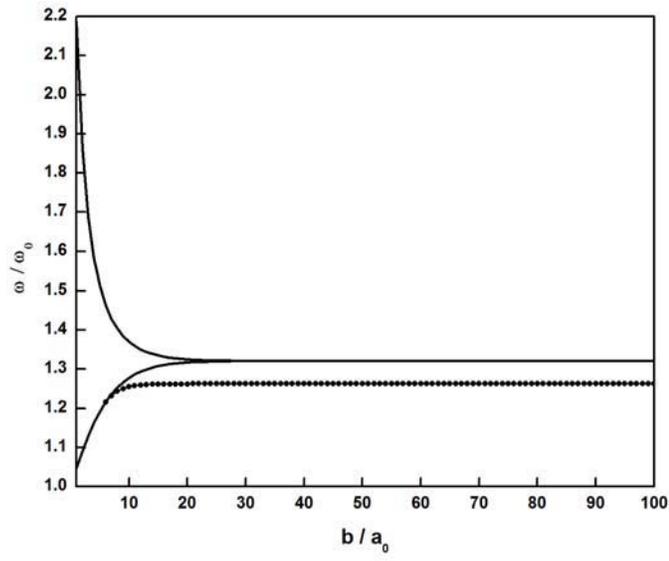


Fig. 11: Gráfica del estado superficial (línea punteada) y la banda permitida (línea continua) de una superred semiperiódica GaAs/AlGaAs con densidad electrónica $n_b = 10n_a$, $n_c = 15n_a$ y ancho de pozo $a = 10a_0$.

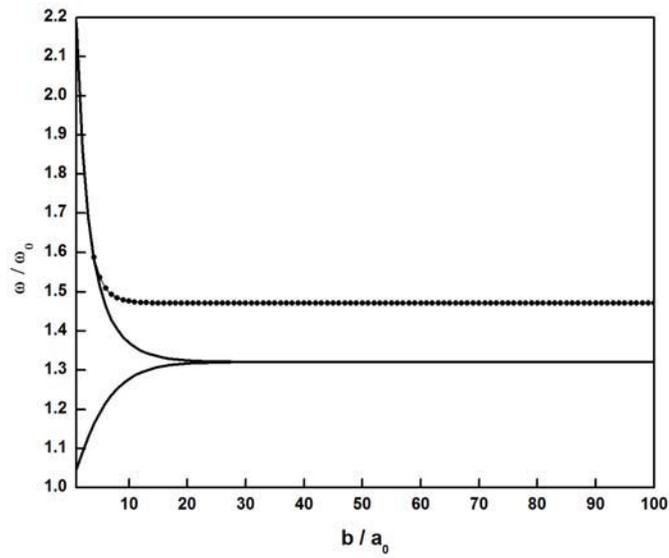


Fig. 12: Gráfica del estado superficial (línea punteada) y la banda permitida (línea continua) de una superred semiperiódica GaAs/AlGaAs con densidad electrónica $n_b = 10n_a$, $n_c = 5n_a$ y ancho de pozo $a = 10a_0$.

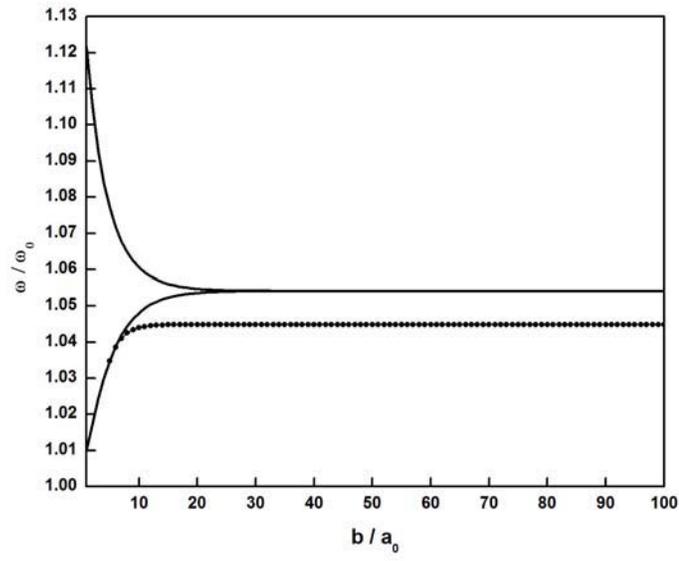


Fig. 13: Gráfica del estado superficial (línea punteada) y la banda permitida (línea continua) de una superred semiperiódica semiconductor GaAs/AlGaAs con densidad electrónica $n_b = 10n_a$, $n_c = 15n_a$ y ancho de pozo $a = 50a_0$.

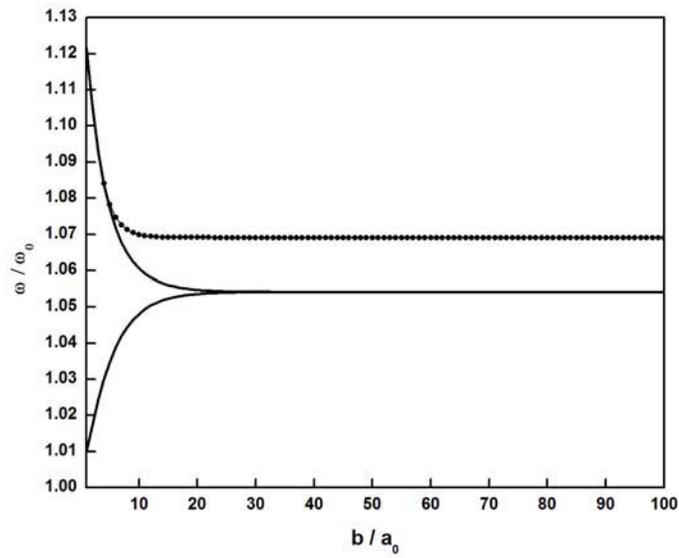


Fig. 14: Gráfica del estado superficial (línea punteada) y la banda permitida (línea continua) de una superred semiperiódica semiconductor GaAs/AlGaAs con densidad electrónica $n_b = 10n_a$, $n_c = 5n_a$ y ancho de pozo $a = 50a_0$.

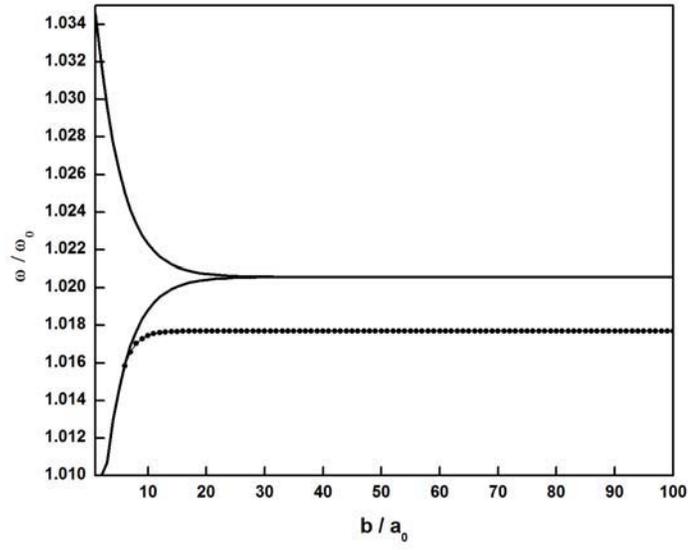


Fig. 15: Gráfica del estado superficial (línea punteada) y la banda permitida (línea continua) de una superred semiperiódica semiconductor GaAs/AlGaAs con densidad electrónica $n_b = 10n_a$, $n_c = 15n_a$ y ancho de pozo $a = 100a_0$.

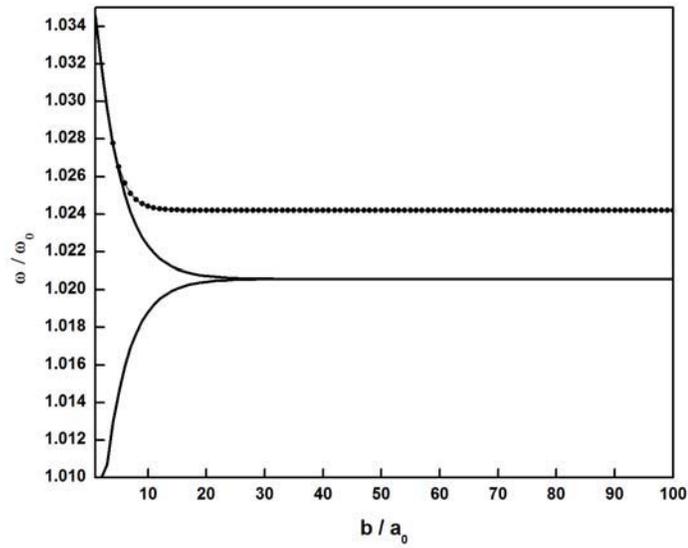


Fig. 16: Gráfica del estado superficial (línea punteada) y la banda permitida (línea continua) de una superred semiperiódica semiconductor GaAs/AlGaAs con densidad electrónica $n_b = 10n_a$, $n_c = 5n_a$ y ancho de pozo $a = 100a_0$.

6 CONCLUSIONES

El objetivo principal en este trabajo fue establecer una analogía entre la teoría desarrollada para superredes semi-infinitas periódicas cuánticas de pozos y barreras con superredes semi-infinitas de capas alternadas. Dichas superredes se lograron modelar como pozos y barreras.

En el marco del modelo hidrodinámico se obtuvieron ecuaciones explícitas generales que describen los estados de superficie y las bandas permitidas en la propagación transversal y longitudinal para sistemas de capas alternadas. Se demostró que para el caso transversal y longitudinal estas ecuaciones generales son análogas a las ecuaciones que se encuentran en la mecánica cuántica para sistemas de pozos y barreras.

Para un sistema de capas alternadas, hecho de GaAs/AlGaAs, se aplicaron las ecuaciones exactas longitudinales y se demostró que en el límite cuando el ancho de la barrera se hace muy grande las ecuaciones generales aproximadas reproducen los resultados obtenidos por medio de las ecuaciones exactas.

A continuación se enumeran los resultados obtenidos en el marco del modelo hidrodinámico para un sistema semiperiódico de capas alternadas de diferentes materiales análogos a los que se conocen en la mecánica cuántica para un sistema de pozos y barreras.

1. Se demostró que los vectores de onda electromagnéticos [Ec. (4.3.1.30) y Ec. (4.3.1.31)] son análogos al vector de onda que se usa en la mecánica cuántica [Ec. (5.1.1)].
2. Las ecuaciones que describen las bandas permitidas en la propagación electromagnéticas [Ec. (5.3.7) y Ec. (5.4.16)] son análogas al modelo de Kronig-Penney[13], [14].
3. El parámetro de decaimiento p para un sistema de capas alternadas semiperiódicas infinito en la propagación electromagnética [Ec. (5.3.12) y Ec. (5.5.17)] es análogo al que se encuentra en la mecánica cuántica[6].
4. Las ecuaciones que describen los estados superficiales electromagnéticos [Ec. (5.3.13) y Ec. (5.5.19)] son análogas a aquella para los estados de Tamm cuánticos[6].
5. Se aplicaron las ecuaciones longitudinales electromagnéticas exactas [Ec. (4.3.1.31), Ec. (5.4.16), Ec. (5.5.17) y Ec. (5.5.19)] a un sistema de capas alternadas hecho de GaAs/AlGaAs encontrándose que los valores para las bandas permitidas y para los estados superficiales son iguales a los que se obtuvieron a partir de las ecuaciones aproximadas [Ec. (5.5.22) y Ec. (5.5.23)]. Es decir, en el límite cuando el ancho de la barrera se hace grande, se recuperan los valores obtenidos por las ecuaciones exactas tal y como se esperaba.

Una posibilidad a futuro sería tratar de generalizar este método para sistemas de 3 o más capas alternadas con una interfase. Otra posibilidad sería fabricar estas películas para probar la veracidad de los resultados teóricos obtenidos en este trabajo.

7 BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. M. Vetter, A. Haibel, and G. Nimtz, Phys. Rev. E, 63, (2001).
- [2] I. Vorobeichik, E. Narevicius, G. Rosenblum, M. Orenstein, and N. Moiseyev, Phys. Rev. Lett. 90-17, (2003).
- [3] M. Vranicar, M. Barth, G. Veble, M. Robnik and H.-J. Stöckmann, J. Phys. A: Math. Gen. 35, 4929-4947, (2002).
- [4] I. Tamm, Phys. Z. Sowjet Union 1, 733, (1932)
- [5] H. Ohno, E. E. Méndez, J. A. Brum, J. M. Hong, F. Argulló-Rueda, L. L. Chang and L. Esaki, Phys. Rev. Lett. 64, 2555, (1990).
- [6] W. L. Bloss, Phys. Rev. B, 44-15, 8035, (1991)
- [7] M. Singh , P. Aghamkar , P. K. Sen, Chinese Physics Letters 24 (8): 2245-2248, (2007).
- [8] D. Teychenne, E. Besuelle, A. Oloumi, R. R. E. Salomaa, Phys. Rev. Lett. 85 (26): 5571-5574 Part 1, (2000).
- [9] W. L. Mochán and M. del Castillo-Mussot, Phys. Rev. B, 37-12, 6763, (1988).
- [10] F. Ramos-Mendieta, P. Halevi, Phys. Rev. B, 59, 15112-15120, (1999).
- [11] Ronald Fuchs y Peter Halevi, *Spatial Dispersion in Solids and Plasma*, Editado por Peter Halevi, Electromagnetic Waves-Recent Development in Research Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [12] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin, *Solid State Physics*, Sounders College, Philadelphia, 1976. p. 29, 35, 133, 16.
- [13] Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Willey & Sons, New York, 1996, p. 180, 185, 177, 174.
- [14] John P. McKelvey, *Física del Estado Sólido y de Semiconductores*, Editorial Limusa, México, 1996. p. 235, 232.
- [15] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [16] Charles Kittel, *Thermal Physics*, Second Edition, H. Freeman & Co, New York, 1980, p. 193.
- [17] P. Halevi, Phys. Rev. B, 51-12, 7497, (1995).
- [18] F. Fortsmann and H. Stenschke, Phys. Rev. Lett. 38, 1365, (1977); Phys. Rev. B 17, 1489, (1978)
- [19] G. Elliason, G. E. Giuliani, J. J. Queen, Phys. Rev. B, 33, 1405, (1986).
- [20] Marcelo del Castillo-Mussot, W. Luis Mochán, Phys. Rev. B, 36, 1799, (1987).