



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“TRANSFERENCIA DE CALOR  
EN MICROCANALES”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**I N G E N I E R A M E C Á N I C A**

**P R E S E N T A:**

**PAULINA SOTO VILLASEÑOR**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE**

**CIUDAD UNIVERSITARIA  
2008**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ÍNDICE

<b>NOMENCLATURA.</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>SÍMBOLOS GRIEGOS.</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>RESUMEN.</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b>	
1.1. Generalidades. . . . .	<b>7</b>
1.2. Antecedentes. . . . .	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 2. PRESENTACIÓN Y DERIVACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO</b>	
2.1. Modelo Físico. . . . .	<b>18</b>
2.2. Modelo Matemático	
2.2.1. Ecuaciones y Condiciones de Frontera. . . . .	<b>20</b>
<b>CAPÍTULO 3. ADIMENSIONALIZACIÓN Y MÉTODO DE SOLUCIÓN</b>	
3.1. Ecuaciones Adimensionales. . . . .	<b>28</b>
3.2. Deducción del Modelo Matemático. . . . .	<b>35</b>
<b>CAPÍTULO 4. RESULTADOS</b>	
4.1. Temperatura. . . . .	<b>40</b>
4.2. Velocidad de deslizamiento. . . . .	<b>44</b>
<b>CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.</b> . . . . .	<b>51</b>

## NOMENCLATURA

$c_p$	Calor específico
$H$	Ancho del microcanal
$Kn$	Número de Knudsen, $Kn = \frac{\lambda}{H}$
$L$	Longitud del microcanal
$Pe$	Número de Peclet, $Pe = \frac{u_b H}{\alpha}$
$Pr$	Número de Prandtl, $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda_f}$
$q''$	Flujo de calor, $q'' = \lambda_f \frac{\partial T}{\partial y}$
$Re$	Número de Reynolds, $Re = \frac{\rho u_b 2H}{\mu}$
$T$	Temperatura del fluido en el microcanal
$T_i$	Temperatura a la entrada del microcanal
$T_p$	Temperatura del fluido en la pared
$U_M$	Velocidad de deslizamiento

**SÍMBOLOS GRIEGOS.**

$\alpha$	Difusividad térmica, $\alpha = \frac{\lambda_f}{\rho c_p}$
$\beta$	Parámetro adimensional, $\beta = \frac{q'' H^3}{\alpha^2 \mu}$
$\chi$	Coordenada adimensional
$\varepsilon$	Parámetro de perturbación, $\varepsilon = \frac{H}{L}$
$\gamma$	Parámetro adimensional, $\gamma = \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) Kn + \frac{1}{6}$
$\lambda$	Recorrido libre medio molecular
$\lambda_f$	Conductividad térmica del fluido
$\mu$	Coefficiente de viscosidad del fluido
$\nu$	Viscosidad cinemática del fluido
$\theta$	Temperatura adimensional, $\theta = \frac{T - T_i}{q'' H / \lambda_f}$
$\rho$	Densidad del fluido
$\sigma_v$	Momento tangencial

## RESUMEN

En el presente trabajo se realiza el estudio de un fluido que circula en un microcanal plano, considerando como objetivo principal la predicción teórica de la distribución de temperatura y velocidad de deslizamiento.

A partir de las ecuaciones que rigen dicho fenómeno, se realiza un análisis de orden de magnitud, obteniendo los siguientes parámetros adimensionales: el número de Knudsen,  $Kn$ , el número de Peclet,  $Pe$ , el número de Reynolds,  $Re$  y el número de Prandtl,  $Pr$ .

Para deducir el modelo matemático, se parte de las ecuaciones de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de la energía, y después de ciertas aproximaciones se obtiene una ecuación diferencial de segundo grado para determinar la temperatura. Una vez determinada la temperatura, se pueden conocer los perfiles de velocidad de deslizamiento.

Para obtener la solución analítica, se hacen consideraciones tales como la de despreciar los términos temporales con el fin de comprobar los resultados a partir de la solución numérica. Los resultados obtenidos predicen la temperatura a lo largo del microcanal para diferentes valores del número de Peclet, y de estos resultados se puede obtener la velocidad de deslizamiento.

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

# CAPÍTULO 1

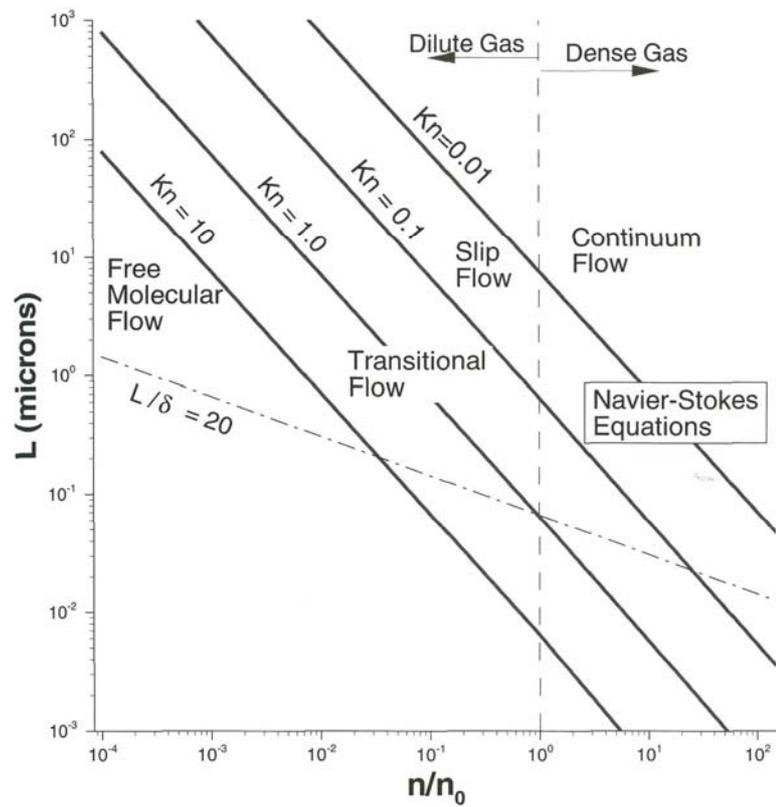
## INTRODUCCIÓN

### 1.1 GENERALIDADES

En este trabajo se presenta el estudio del movimiento de un fluido en un microcanal plano. Al hablar de microcanales, el flujo que entra al microcanal, se considera como un fluido newtoniano con propiedades constantes y debido al tamaño tan reducido, las propiedades de éste no se pueden considerar como un flujo continuo. Sin embargo, hay ciertos valores para la escala micrométrica en los que se pueden aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes con algunas modificaciones en las condiciones de frontera.

El flujo en estas condiciones es llamado flujo deslizable. El número de Knudsen  $Kn$ , cuantifica la velocidad de deslizamiento, y se define como el cociente del recorrido libre medio de las moléculas entre el espesor del microcanal. El rango para el número de Knudsen en el régimen de flujo deslizable es  $0.001 < Kn < 0.1$ ; la condición de no deslizamiento se presenta cuando  $Kn = 0$ . Para  $Kn > 0.1$ , se espera que el flujo continuo falle. Y el régimen de  $0.1 < Kn < 10$  hace alusión al régimen de transición porque el movimiento molecular experimenta una transición del flujo continuo en  $Kn \leq 0.1$  al flujo libre molecular en  $Kn \geq 10$ .

Esta clasificación está basada en información empírica y por lo tanto, los límites entre los diferentes regímenes de flujo pueden depender de la geometría del problema. La separación de los diferentes regímenes se muestra en la figura 1.1.1, donde las diferentes regiones de flujo están en función de la altura, la cual es de la escala micrométrica, y de la densidad normalizada [1].



**FIGURA 1.1.1. LÍMITES DE APROXIMACIÓN PARA MODELAR MICROFLUJOS. LOS VALORES DE ESTA GRÁFICA ESTÁN BAJO LAS CONDICIONES DE TEMPERATURA Y PRESIÓN ATMOSFÉRICAS.**

Dos de las características más importantes del flujo deslizable son la velocidad de deslizamiento, ec. (1.1) y el salto de temperatura en la superficie, ec. (1.2).

$$u_p = -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \lambda \left. \frac{du}{dy} \right|_p \quad (1.1)$$

$$T_p - T = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) \quad (1.2)$$

Otro efecto importante del flujo deslizable es el del arrastre térmico (thermal creep), el cual es despreciable en el análisis continuo [2].

Al hablar de microcanales, se deben considerar las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad, que han sido estudiadas desde el siglo XVIII y de las cuales se puede decir se desarrollaron mucho antes de que se estudiara la microtecnología, razón por lo cual no habían encontrado su aplicación en este campo, pese a que ya se contaba con su existencia.

El rápido desarrollo de la microelectrónica ha creado una necesidad de integración de los chips en dispositivos digitales. Los microdispositivos tienden a comportarse de manera diferente a los objetos de uso diario. Las fuerzas inerciales son demasiado pequeñas, y los efectos superficiales tienden a dominar el comportamiento de los sistemas pequeños. En general, las propiedades que están en función del área de contacto decrecen de manera más lenta que las propiedades que dependen del volumen. Estos dispositivos requieren capacidades de dirección de corriente-voltaje crecientes que conducen a un gran aumento de disipación de calor dentro de un espacio pequeño. Se busca usar microcanales en los aparatos electrónicos con el fin de evitar el incremento de la temperatura en éstos.

Una de las desventajas de los microcanales es el incremento de la temperatura del refrigerante debido a la gran cantidad de calor que es llevada fuera del canal por efecto del aumento del mismo refrigerante.

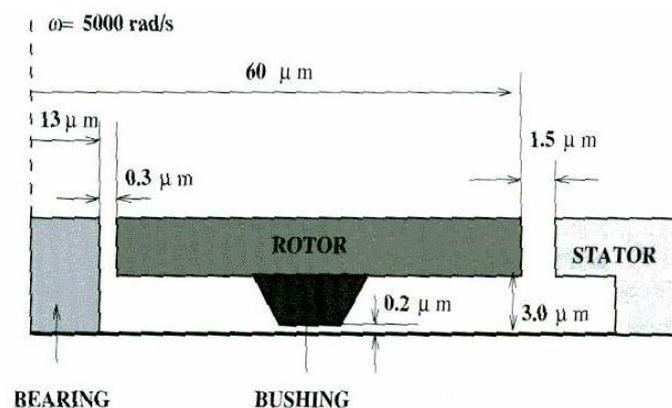
Los microcanales disipadores de calor son unos de los métodos propuestos que pueden ser usados para reducir el exceso de calor. Los microcanales tienen un coeficiente de transferencia de calor muy alto. En trabajos recientes se ha mostrado que los microcanales paralelos con  $50\mu\text{m}$  de ancho y  $302\mu\text{m}$  de profundidad tienen resistencias térmicas del orden de  $9 \times 10^{-6}$   $[\text{K}/\text{Wm}^2]$ . Este valor es más bajo que los disipadores de calor en canales convencionales [3].

## 1.2 ANTECEDENTES

Osborne Reynolds fue el primero en estudiar el arrastre térmico, e inventó el término de transpiración térmica en 1879 [4]. Al mismo tiempo, Maxwell desarrolló independientemente una teoría del arrastre térmico. A principios de 1900 Knudsen construyó un compresor molecular basado en la idea de la transpiración térmica, el cual constaba de una serie de tubos conectados entre sí y con una estrecha separación entre cada uno [5].

La investigación en la micromecánica en el contexto de los sistemas micro-electro-mecánicos (MEMS), comenzó a finales de 1980. Richard Feynman, describió nuevas perspectivas y originales aplicaciones en la ciencia e ingeniería de la microescala [6]. En una conferencia en 1983, anticipó algunas de las tecnologías de hoy como la fabricación de micromotores de silicio, el uso de la impulsión electrostática y la influencia del “golpeteo molecular” en dichos microsistemas.

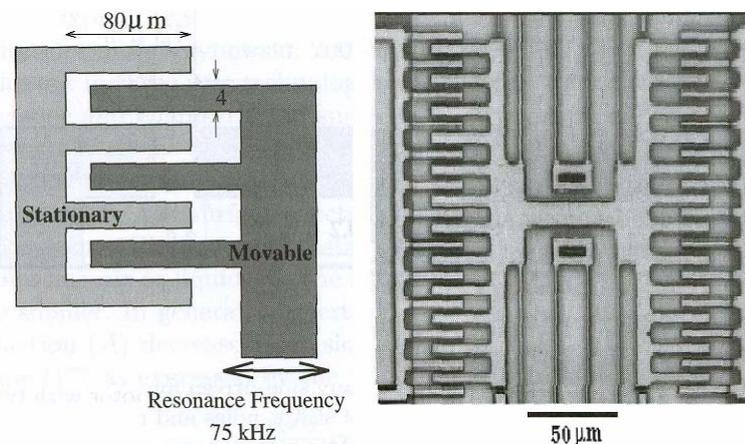
Uno de los primeros productos microfabricados fue un motor de polisilicio, cuya superficie y transmisión fueron micromaquinadas. (Fig. 1.2.1).



**FIGURA 1.2.1. DIAGRAMA DE UN MICROMOTOR DE TRANSMISIÓN ELECTROSTÁTICA CON DIMENSIONES TÍPICAS, DONDE LOS POLOS SON EXCITADOS PARA CREAR UN TORQUE DE IMPULSO ELECTROSTÁTICO.**

Las características de este motor eran un torque de 10 pNm, la fuerza axial era del orden de  $10^{-7}$  N, la cual era más grande que la carga del motor que era del orden de  $10^{-10}$  N.

Otro sistema MEMS clásico es el de microtransmisión electrostática, el cual es un excelente impulsor de resonancia que produce señales amplias a bajos voltajes (Fig. 1.2.2). Para condiciones típicas de operación, la frecuencia de resonancia es de 75 kHz.



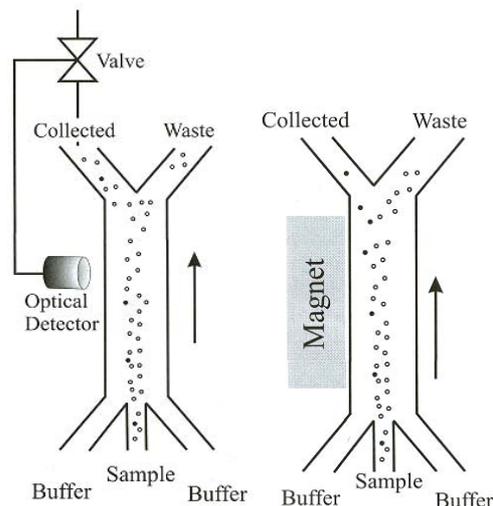
**FIGURA 1.2.2. DIAGRAMA DE UN MECANISMO DE MICROTRANSMISIÓN ELECTROSTÁTICA QUE CONSISTE DE UN BRAZO QUE SOSTIENE UN SISTEMA DE VIGAS EN CANTILEVER QUE SE MUEVEN HORIZONTALMENTE**

El flujo para los micromotores y la microtransmisión electrostática es suficiente debido al movimiento de una capa delgada de polisilicio a través del sustrato. En la forma simple, estos flujos pueden ser modelados por un flujo viscoso.

El análisis de flujo mostrado en la figura 1.2.2, fue obtenido por Freeman usando microvisión de computadoras [7]. Específicamente, se utilizó la iluminación estroboscópica para obtener imágenes de fases semejantes durante una excitación sinusoidal. Los desplazamientos entre las imágenes fueron obtenidos usando algoritmos originalmente desarrollados para máquinas de visión y subsecuentemente fueron integrados para producir una serie de períodos para los cuales la magnitud y fase del movimiento fueron determinadas.

Otra aplicación de los sistemas MEMS son los microaparatos que comprenden particularmente flujos para la separación y traslado de partículas o células de una muestra de microflujos líquidos y gaseosos. Dos ejemplos de aparatos para la separación de células se muestran en la figura 1.2.3. El dispositivo de la izquierda está basado en células microfluorescentes activadas en las cuales la dirección es marcada con anticuerpos fluorescentes, y cuando pasan a través de un sensor óptico, una válvula es activada para dejar pasar las células que se quieren y desechando las que no. El dispositivo de la derecha está basado en partículas micromagnéticamente activadas para las cuales el trayecto de las partículas es dirigido con anticuerpos paramagnéticos, y de igual manera que en el dispositivo anterior, solo las células que se van a usar pasan para ser almacenadas.

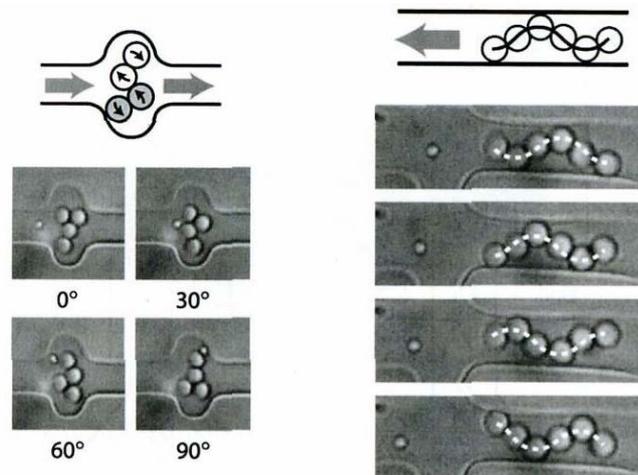
La medida típica del canal es de  $100\mu\text{m}$  y las partículas tienen dimensiones de aproximadamente 5 a  $10\mu\text{m}$ . Existen dispositivos similares para remover partículas de gases para aplicaciones ambientales.



**FIGURA 1.2.3. DIAGRAMAS DE SEPARADORES DE PARTÍCULAS MICROFLUORECENTES Y MICROMAGNÉTICOS**

Existen micropartículas de 20 nm a 3  $\mu\text{m}$  que pueden ser usadas para fabricar microaparatos, como bombas y válvulas, las cuales a su vez pueden ser usadas para el control microflúidico. Varios estudios se han enfocado en la fabricación de ensambles de estructuras, usando partículas paramagnéticas transportadas por líquidos en microcanales. La habilidad de formar estructuras mayores a las escalas anteriores y la posibilidad de controlar el movimiento de fluidos provocado por campos magnéticos podrían conducir a muchas aplicaciones novedosas como filtros microópticos, pero también para nuevos materiales y nuevos protocolos microfabricados.

Para el control activo en microfluidos, se han usado microbombas y microválvulas coloidales. Así mismo, se manipularon micro-esferas de látex por medio de trampas de fluidos de bombas. Estos dispositivos son del tamaño de las células de la sangre humana (Fig. 1.2.4).



**FIGURA 1.2.4. MICROBOMBAS DE INDUCCIÓN DE MOVIMIENTO DE 2 A 4  $\mu\text{m/s}$  CON UN RATE DE FLUJO DE 0.25 nl/h.**

Los trabajos en los microflujos se comenzaron años antes. Poiseuille publicó el primer artículo que describía el flujo en tubos de diámetros de alrededor de  $30\mu\text{m}$  a  $150\mu\text{m}$  [8]. Sus estudios con líquidos, llevaron a la bien conocida relación entre velocidad de flujo, caída de presión, y geometría del tubo, aunque en ese momento pareció no darse cuenta del efecto de la viscosidad.

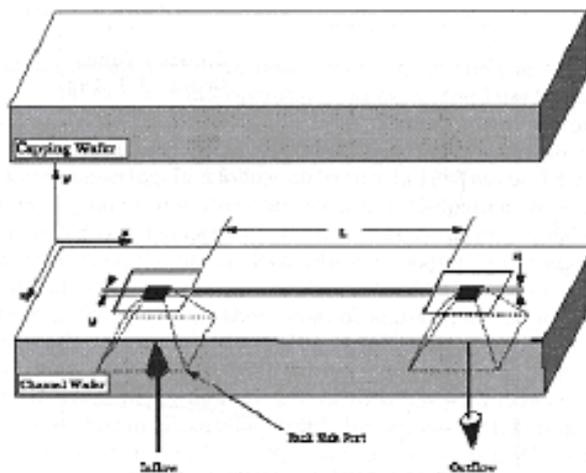
En 1909, Knudsen estudió los gases a través de tubos capilares de cristal en el régimen de transición y de flujo libre molecular [9]. En estos experimentos, el cociente entre la velocidad de flujo volumétrico y la diferencia de presiones a la entrada y la salida  $\left(\dot{Q}/(P_i - P_0)\right)$  mostró un  $Kn \approx 1$ , cuando se graficó contra la presión promedio en el tubo capilar. Este comportamiento se conoce como la paradoja de Knudsen o el mínimo de Knudsen.

El primer experimento conocido de flujo en un microcanal se realizó por Gaede en 1913, en el cual colocó dos placas paralelas de  $4\mu\text{m}$  de distancia [10]. Gaede encontró que la velocidad de flujo del hidrógeno disminuía un 50% del valor del recorrido libre molecular mientras pasaba a través un mínimo y después aumentaba con el incremento en los niveles de presión. En tubos capilares largos, la diferencia entre el mínimo y el valor del recorrido libre molecular era solamente de 5 a 8%. El mínimo de Knudsen también se mide en tubos capilares lisos, los tubos prensados no muestran este comportamiento. Por lo tanto los flujos en tubos y canales se comportan de manera diferente y las condiciones de la superficie pueden ser importantes en transporte del gas en los regímenes transitorios y de recorrido libre molecular del flujo.

A finales de 1980, se continuó con el desarrollo y estudio de las aplicaciones en microsistemas, tanto para gases como para líquidos. El primer estudio experimental de microflujos utilizando canales micromaquinados fue reportado en 1991 [11], con un Reynolds en el rango de  $0.50 \leq Re \leq 20$ . Para gases, el número de Knudsen fue  $0.001 \leq Kn \leq 0.363$  para canales hidráulicos

de diámetros  $D_H = 8\mu\text{m}$  y longitud de 1mm. La reducción reportada de la fricción debido al deslizamiento evidente del flujo fue confirmado en

otro estudio experimental con gases, en el cual se usaron diversas técnicas de microfabricación para hacer los microcanales [12]. En detalle, el artículo describió el primer microcanal fabricado con varios sensores de presión como parte integral del microcanal (Fig. 1.2.5).



**FIGURA 1.2.5. DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DEL MICROCANAL USADO POR BREUER. DIMENSIONES: LONGITUD  $L= 7.5$  mm, ANCHO  $W = 52.25\mu\text{m}$  , Y ALTURA  $H = 1.33\mu\text{m}$ .**

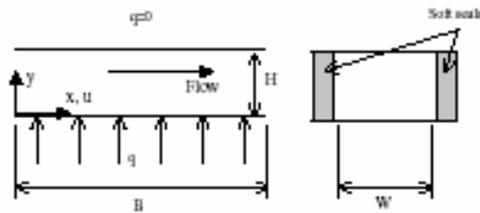
Un sistema del detalle de los datos altamente exactos, que se pueden utilizar para la validación de la teoría y de simulaciones en microflujos, fue obtenido por Breuer y sus colaboradores [13].

Un resultado importante en el lado experimental ha sido el desarrollo de las técnicas que pueden medir perfiles de la velocidad en microcanales, usando medidores de velocidad de micropartículas [14].

Nuevas tecnologías desarrolladas en los trabajos de Vafai y Zhu [15] y Khaled y Vafai [16] proporcionan nuevas soluciones para el enfriamiento de componentes electrónicos usando microcanales. El trabajo de Khaled y Vafai

está basado en el uso de sellos suaves y flexibles. Estos autores demostraron que se puede agregar refrigerante adicional si se utilizan microcanales flexibles

(Fig. 1.2.6). La expansión de la cámara flexible, incluyendo el microcanal flexible está directamente relacionada a la presión interna [17].



**FIGURA 1.2.6. DIAGRAMA DEL MICROCANAL DE PAREDES FLEXIBLES PROPUESTO. VISTAS LATERAL Y FRONTAL**

**CAPÍTULO 2  
PRESENTACIÓN Y  
DERIVACIÓN DEL  
MODELO MATEMÁTICO**

## CAPÍTULO 2 PRESENTACIÓN Y DERIVACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

### 2.1. MODELO FÍSICO

En el modelo físico se tiene un fluido laminar newtoniano a través de un microcanal plano de longitud  $L$ , la cual es mucho mayor que la altura  $H$ , cuyo orden de magnitud es semejante al del recorrido libre medio molecular ( $10^{-6}$ ). El eje  $x$  se encuentra alineado a lo largo de la longitud del canal, y el eje  $y$  en la dirección transversal de éste. El campo de velocidades a lo largo del canal se encuentra en la dirección del eje  $x$ .

En la parte inferior se encuentra un chip, en el cual hay disipación de calor, y la parte superior se considera adiabática (Fig. 2.1.1).

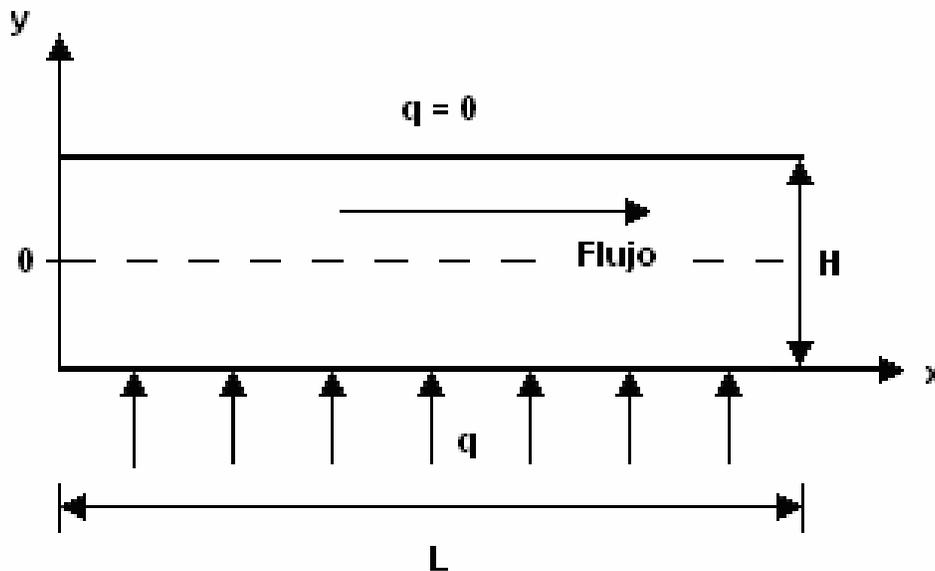


FIGURA 2.1.1. MICROCANAL PLANO UBICADO  
EN UN SISTEMA COORDENADO.

En la parte inferior del microcanal se suministra calor, el cual se disipa en el fluido por efecto de la velocidad.

En el presente trabajo se utilizan la ecuación de continuidad, las ecuaciones de cantidad de movimiento y la ecuación de energía para describir el comportamiento del fluido dentro del canal, con algunas modificaciones en las condiciones de frontera debido a que se trata de la escala micrométrica.

Se considera que las variaciones en la dirección transversal del canal son insignificantes comparadas con las variaciones longitudinales. Y por lo tanto, se considera que la temperatura no varía y es la misma tanto en la parte inferior como en la parte superior.

## 2.2. MODELO MATEMÁTICO

### 2.2.1. Ecuaciones y Condiciones de Frontera

El flujo que circula a través del microcanal se considera plano, laminar, completamente desarrollado, bidimensional y estacionario.

Las ecuaciones que caracterizan al movimiento del fluido son las siguientes:

**Ecuación de continuidad.** La ecuación de continuidad para un flujo bidimensional y estacionario está dada como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

**Ecuaciones de cantidad de movimiento.** Las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cartesianas se escriben como:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

**Ecuación de la energía.** La ecuación de la energía en coordenadas cartesianas se escribe como:

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_f \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.4)$$

### Condiciones de Frontera

En  $y = 0$  se tiene la condición de simetría; esto es:

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad (2.5)$$

En  $y = \frac{H}{2}$  se tiene el régimen de flujo deslizable, en el cual las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven tomando en cuenta los efectos de la velocidad de deslizamiento y el arrastre térmico (thermal creep) [18], con lo que se obtiene:

$$u = -\left(\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v}\right) \lambda \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\frac{H}{2}} + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \left. \frac{\partial T_p}{\partial x} \right|_{y=\frac{H}{2}} \quad (2.6)$$

Se considera que el flujo en el canal está sujeto a un gradiente de presión. La temperatura en la entrada es igual a  $T_i$ . Se supone que la temperatura de la pared varía como una función lineal en la dirección  $x$ . Bajo estas condiciones, el gas empieza a fluir de la zona fría a la caliente. Este efecto es llamado el arrastre térmico.

En este estudio, se analiza el fenómeno del arrastre térmico en el canal donde el valor de la altura  $H$  es tan grande como el del recorrido libre medio, pero mucho más pequeña que la longitud  $L$  o del ancho del canal. Razón por la cual esta configuración puede ser considerada como dos placas paralelas infinitas. De acuerdo a la geometría del microcanal, los parámetros dependen solo de las coordenadas  $(x, y)$ . Por lo tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes usadas para describir el flujo estacionario son las ecs. (2.1), (2.2), (2.3), y (2.4).

En el régimen de flujo deslizable ( $0.01 \leq Kn \leq 0.1$ ), las condiciones de frontera que a menudo se asumen fallan, y una subcapa del orden del recorrido libre medio, conocida como capa de Knudsen, comienza a volverse dominante entre el volumen del fluido y la superficie en la pared. El flujo, en la capa de Knudsen no se puede analizar con las ecuaciones de Navier-Stokes y se requiere una solución especial de la ecuación de Boltzmann.

Para  $Kn \leq 0.1$ , la capa de Knudsen cubre menos del 10% de la altura del canal, y esta capa puede despreciarse. Esto tiene como consecuencia un valor de velocidad de deslizamiento en la pared, y el correspondiente régimen de flujo es llamado régimen de flujo deslizable [19].

Como consecuencia de considerar un flujo completamente desarrollado; esto es:

$$u = u(y) \text{ y}$$

$$v \approx 0$$

se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x)$$

Y las ecs. (2.2) y (2.3) se simplifican de la forma:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right) \quad (2.7)$$

Considerando a  $\mu$  como una constante, la ec. (2.7) se puede escribir como:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (2.8)$$

Integrando la ec. (2.8), se obtiene

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (2.9)$$

Y volviendo a integrar se tiene que:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (2.10)$$

Para determinar las constantes  $c_1$  y  $c_2$ , se consideran las condiciones de frontera definidas en las ecs. (2.5) y (2.6).

Tomando la primera condición de frontera, ec. (2.5) en la ec. (2.9) se tiene que

$$c_1 = 0 \quad (2.11)$$

Y aplicando la segunda condición de frontera ec. (2.6) y con el valor de  $c_1$  obtenido, ec. (2.11), en la ec. (2.10), se tiene que:

$$\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{H}{2}\right)^2 + c_2 = -\left(\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\right) \lambda \left[ \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{H}{2}\right) \right] + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} \quad (2.12)$$

Despejando la constante  $c_2$  de la ec. (2.12) se tiene que:

$$c_2 = -\left(\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\right) \lambda \left[ \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{H}{2}\right) \right] - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{H}{2}\right)^2 + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}}, \quad (2.13)$$

y sustituyendo  $c_2$  en la ec. (2.10) y simplificando se llega finalmente a que la velocidad  $u$  se puede escribir como:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} H^2 \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) \frac{\lambda}{H} \right] + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} \quad (2.14)$$

Debido a que la velocidad varía con la posición, ésta debe integrarse sobre la superficie  $dy$ , y considerando ahora que  $kn = \frac{\lambda}{H}$  y sustituyéndolo en la ec. (2.14), se tiene que la velocidad promedio se puede expresar como:

$$u_b = \frac{2 \int_0^{H/2} u_p dy}{2 \int_0^{H/2} p dy} = \frac{\int_0^{H/2} -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} H^2 \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} dy}{p \left( \frac{H}{2} \right)} \quad (2.15)$$

$$= -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2H^2}{H} \right) \int_0^{H/2} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] dy + \frac{2}{H} \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} \left( \frac{H}{2} \right).$$

Introduciendo el siguiente cambio de variable:

$$\eta = \frac{y}{\frac{H}{2}} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{H}{2} d\eta,$$

$$\frac{y}{H} = \frac{\eta}{2} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{y}{H} \right)^2 = \frac{\eta^2}{4};$$

las integrales en la ec. (2.15) se pueden llevar a cabo más fácilmente y el resultado es:

$$\begin{aligned}
 u_b &= -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{H^2}{2} \right) \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \frac{\eta^2}{4} + \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] d\eta + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} H^2 \left[ \frac{1}{6} + \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} .
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Despejando ahora de la ec. (2.16) el término siguiente:

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} H^2 = \frac{u_b - \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}}}{\frac{1}{6} + \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) kn} \tag{2.17}$$

se puede sustituir en la ec. (2.14), y la velocidad se puede reescribir como:

$$u = \frac{u_b - \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}}}{\frac{1}{6} + \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) kn} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{u}{2}} \tag{2.18}$$

La ec. (2.18) se puede simplificar con ayuda del siguiente parámetro:

$$\gamma = \left( \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) kn + \frac{1}{6} , \tag{2.19}$$

entonces la ec.(2.18) queda como:

$$u = \frac{u_b}{\gamma} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] - \frac{3}{2\pi\gamma} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) kn \right] \quad (2.22)$$

$$+ \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{y=\frac{H}{2}}.$$

**CAPÍTULO 3**  
**ADIMENSIONALIZACIÓN Y**  
**MÉTODO DE SOLUCIÓN**

## CAPÍTULO 3

### ADIMENSIONALIZACIÓN Y MÉTODO DE SOLUCIÓN

#### 3.1. ECUACIONES ADIMENSIONALES.

Considerando que el gradiente de temperatura se puede expresar como:

$$\left. \frac{\partial T_p}{\partial x} \right|_{y=\frac{H}{2}} = \frac{q'' H}{\lambda_f L} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{\eta=1}, \quad (3.1)$$

y despejando la temperatura en variables físicas:

$$\theta = \frac{T - T_i}{\frac{q'' H}{\lambda_f}} \Rightarrow \Delta T_f \approx \frac{q'' H}{\lambda_f} \quad (3.2)$$

$$T = T_i + \frac{q'' H}{\lambda_f} \theta \quad (3.3)$$

e introduciendo el siguiente cambio de variables:

$$\chi = \frac{x}{L} \Rightarrow x = L\chi$$

$$\eta = \frac{y}{\frac{H}{2}} \Rightarrow y = \frac{H\eta}{2}$$

Se tiene que la velocidad queda finalmente expresada como:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{u_b}{\gamma} \left[ \frac{1}{4} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma - \frac{1}{6} \right] - \frac{3}{2\pi\gamma} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{q'' H}{\lambda_f L} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \left[ \frac{1}{4} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma - \frac{1}{6} \right] + \\ & + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{q'' H}{\lambda_f L} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sustituyendo la ec. (3.4) en la ecuación de la energía ec. (2.4) y considerando que  $\bar{v} = 0$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left\{ \frac{u_b}{\gamma} \left[ \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right] - \frac{3}{2\pi\gamma} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{q'' H}{\lambda_f L} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \left[ \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right] + \right. \\ \left. \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\rho c_p}{\mu} \lambda^2 \frac{q'' H}{\lambda_f L} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \right\} \frac{q'' H}{\lambda_f L} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \lambda_f \frac{q'' H}{H^2 \lambda_f} \left[ \frac{H^2}{L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

y utilizando los siguientes parámetros físicos y adimensionales

$$\alpha = \frac{\lambda_f}{\rho c_p}$$

$$Pe = \frac{u_b H}{\alpha}$$

$$\varepsilon = \frac{H}{L}$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \frac{Pe}{\gamma} \varepsilon \left[ \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right] \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \right) \frac{(\rho c_p)^2}{\mu} \lambda^2 \frac{q'' H}{\lambda_f^2} \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right] \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \\ & + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{(\rho c_p)^2}{\mu} \lambda^2 \frac{q'' H}{\lambda_f^2} \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con el siguiente parámetro adimensional:  $\beta = \frac{q'' H^3}{\alpha^2 \mu}$ , la ec. (3.6) se puede

reescribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{Pe}{\gamma} \varepsilon \left[ \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right] \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \right) kn^2 \varepsilon^2 \beta \left[ \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right] \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \\ & + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) kn^2 \varepsilon^2 \beta \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La ecuación de la energía se puede simplificar y escribirse como:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{3(\gamma-1)}{2\pi Pe} \varepsilon kn^2 \beta \left[ \frac{\left( \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right)}{\gamma} - 1 \right] \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{\gamma}{\varepsilon Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{\varepsilon \gamma}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando que  $\theta \cong \theta_0(\chi)$  e introduciendo las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \eta = 1; \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{y en} \\ \eta = -1; \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

se integra la ec. (3.8):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} d\eta - \frac{3(\gamma-1)}{2\pi Pe} \varepsilon \beta k n^2 \int_{-1}^1 \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \bigg|_{\eta=1} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \left[ \frac{\frac{1}{12} - \frac{\eta^2}{4} + \gamma}{\gamma} - 1 \right] d\eta = \\ = \frac{\gamma}{\varepsilon Pe} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} d\eta + \frac{\varepsilon \gamma}{Pe} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} d\eta \end{aligned}$$

y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{2\varepsilon}{Pe} \frac{d^2 \theta_0}{d\chi^2} - 2 \frac{d\theta_0}{d\chi} = -\frac{1}{2\varepsilon Pe} \quad (3.10)$$

Para simplificar la ec. (3.10), se considera lo siguiente:

$$\frac{\chi}{\varepsilon^n} = \zeta \quad \rightarrow \quad 2\varepsilon^{2-2n} \frac{d^2 \theta_0}{d\zeta^2} - 2\varepsilon^{1-n} \frac{d\theta_0}{d\zeta} = -\frac{1}{2}$$

$n = 1$ :

$$2 \frac{d^2 \theta_0}{d\zeta^2} - 2Pe \frac{d\theta_0}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \tag{3.10}$$

Haciendo el siguiente análisis de magnitud, se tiene que:

$$\varepsilon^2 \ll 1 \quad ; \quad (Kn\varepsilon)^2 \beta \approx 1$$

$$\beta \approx \frac{1}{(Kn\varepsilon)^2} \gg 1$$

$$Pe = \frac{u_b H}{\alpha}$$

Se toman valores reales, para demostrar que dichos parámetros adimensionales asumen los valores límites anteriores:

El flujo que se considera que entra al microcanal es aire, para lo cual se toma el valor de la difusividad térmica de  $\alpha = 2.01 \times 10^{-5} [m^2 / s]$  [20].

<b>H</b> [μ m]	<b>L</b> [μ m]	<b>ε</b>	<b>Kn</b>	<b>β</b>	<b>Pe</b>	<b>u<sub>b</sub></b> [m/s]
1	1x10 <sup>2</sup>	0.01	0.01	0.1x10 <sup>9</sup>	0.01	0.201
	2x10 <sup>2</sup>	0.005	0.1	4x10 <sup>6</sup>		0.201
	4x10 <sup>2</sup>	0.0025	1	0.16x10 <sup>6</sup>		0.201
1	1x10 <sup>2</sup>	0.01	0.01	0.1x10 <sup>9</sup>	0.005	0.1005
	2x10 <sup>2</sup>	0.005	0.1	4x10 <sup>6</sup>		0.1005
	4x10 <sup>2</sup>	0.0025	1	0.16x10 <sup>6</sup>		0.1005
1	1x10 <sup>2</sup>	0.01	0.01	0.1x10 <sup>9</sup>	0.0025	0.05025
	2x10 <sup>2</sup>	0.005	0.1	4x10 <sup>6</sup>		0.05025

	$4 \times 10^{-2}$	0.0025	1	$0.16 \times 10^6$		0.05025
--	--------------------	--------	---	--------------------	--	---------

**TABLA 1. VALORES REALES DE LOS PARÁMETROS  
ADMENSIONALES Y DE LAS VARIABLES FÍSICAS.**

Sabiendo que

$$q'' \approx \frac{\Delta T_{cy}}{H} \lambda$$

y despejando a  $\Delta T_{cy}$ , se obtiene

$$\Delta T_{cy} = \frac{Hq''}{\lambda}, \text{ el cual se sustituye en la siguiente ecuación:}$$

$$\rho c_p u \frac{\Delta T_{cx}}{L} \approx \frac{\lambda \Delta T_{cy}}{H^2}$$

despejando  $\frac{\Delta T_{cy}}{\Delta T_{cx}}$  se obtiene

$$\frac{\Delta T_{cy}}{\Delta T_{cx}} \approx \frac{\rho c_p u_c H^2}{\lambda L} \approx \frac{\rho c_p}{\lambda L \mu} \frac{\Delta p}{L} H^2 H^2$$

considerando los siguientes parámetros:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad \mu = \rho \nu \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

Se tiene que:

$$\frac{\Delta T_{cy}}{\Delta T_{cx}} \approx \frac{\varepsilon^2 \text{Re} \mu^2 L H^2}{\rho^2 H^3 \alpha \nu} \approx \varepsilon \text{Pr} \text{Re} \approx \varepsilon \text{Pe} \ll 1$$

Se toman valores reales para demostrar que las suposiciones hechas para los valores de la variación de temperatura y para los parámetros adimensionales son ciertas. Estos valores límites se muestran en la siguiente tabla

$\varepsilon$	<b>Pe</b>	$\varepsilon \text{Pe}$
0.01	0.01	$0.1 \times 10^{-3}$
0.005		$0.05 \times 10^{-3}$
0.0025		$0.025 \times 10^{-3}$
0.01	0.005	$0.05 \times 10^{-3}$
0.005		$0.025 \times 10^{-3}$
0.0025		$0.0125 \times 10^{-3}$
0.01	0.0025	$0.025 \times 10^{-3}$
0.005		$0.0125 \times 10^{-3}$
0.0025		$0.00625 \times 10^{-3}$

**TABLA 2. VALORES REALES DE NÚMEROS ADIMENSIONALES PARA EL ANÁLISIS DE ORDEN DE MAGNITUD.**

### 3.2. DEDUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Las correspondientes condiciones de frontera en forma adimensional son:

$\zeta = 0$  ;  $\theta_0 = 0$ , como se trata de un flujo estacionario, la condición a la entrada del microcanal es de valor cero.

$\zeta \rightarrow \infty$  ;  $\frac{d\theta_0}{d\zeta} \rightarrow 0$ , conforme avanza el fluido dentro del canal, va incrementando su temperatura, pero debido a la distribución de ésta a lo largo del canal, llega a un punto en el que no se puede calentar más, lo cual provoca una temperatura constante, por lo cual el gradiente tiende al valor de cero.

Normalizando la ec. (3.10) se obtiene:

$$\frac{d^2\theta_0}{d\zeta^2} - Pe \frac{d\theta_0}{d\zeta} = -\frac{1}{4} \quad (3.11)$$

El método a utilizar para resolver la ec.(3.11) es el método de coeficientes indeterminados para el cual se busca una solución general compuesta de una solución particular y de una solución homogénea.

Se toma  $g(x) = -\frac{1}{4}$ , y se considera que tiene un operador anulador con coeficientes constantes; es decir  $r = 0$ .

Para la solución homogénea se tiene:

$$\theta_0'' - Pe\theta_0 = 0$$

y aplicando operadores diferenciales, se obtiene una solución auxiliar

$$r^2 - Pe r = 0$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = 0 \quad y \quad r_2 = Pe,$$

con las cuales se obtiene

$$\theta_h = c_1 + c_2 e^{Pe\zeta}.$$

Para la solución particular se tiene que:

$$\theta_0'' - Pe\theta_0 = -\frac{1}{4},$$

y usando nuevamente operadores diferenciales, se obtiene una solución auxiliar

$$r(r^2 - Pe r) = 0$$

y sus raíces son:

$$r_1 = r_3 = 0 \quad \text{y} \quad r_2 = Pe$$

y se obtiene:

$$\theta_h = \underbrace{c_1 + c_2 e^{Pe\zeta}}_{\theta_h} + \underbrace{c_3 \zeta}_{\theta_p} . \quad (3.12)$$

Derivando  $\theta_p$  dos veces y sustituyéndolo en la ec. (3.11) se tiene que:

$$c_3 = \frac{1}{4Pe} .$$

Utilizando las condiciones de frontera para obtener las constantes  $c_1$  y  $c_2$ , tenemos que:

para la primera condición

$$0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2 .$$

Para la segunda condición de frontera, tenemos que:

$$\theta = c_1 + c_2 e^{\frac{Pe\chi}{\varepsilon}} + \frac{\chi}{4\varepsilon Pe}$$

$$\frac{d\theta}{d\chi} = \frac{c_2 Pe}{\varepsilon} e^{\frac{Pe\chi}{\varepsilon}} + \frac{1}{4\varepsilon Pe} \rightarrow 0$$

y despejando a  $c_2$  se tiene:

$$c_2 = -\frac{e^{-\frac{Pe}{\varepsilon}}}{4Pe^2} = -c_1.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ec. (3.12) se obtiene finalmente

$$\theta(\chi) = \frac{e^{-\frac{Pe}{\varepsilon}}}{4Pe^2} \left[ 1 - e^{\frac{Pe\chi}{\varepsilon}} \right] + \frac{\chi}{4Pe\varepsilon}. \quad (3.13)$$

Para la velocidad de deslizamiento se toma la ecuación (3.4) evaluada en  $\eta = 1$  y llamando a los últimos dos términos de ésta  $\tilde{\gamma}$ , queda:

$$u_p = \frac{u_b}{\gamma} \left( -\frac{1}{6} + \gamma \right) - \tilde{\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1}. \quad (3.14)$$

despejando  $\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1}$ , se obtiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} = U_M = \frac{u_p - \frac{u_b}{\gamma} \left( \gamma - \frac{1}{6} \right)}{\tilde{\gamma}}, \quad (3.15)$$

derivando parcialmente la solución para la temperatura, ec. (3.11), se llega a una ecuación para encontrar la velocidad de deslizamiento, utilizando la ec. (3.15):

$$U_M = \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} = \frac{1}{4} \left[ 1 - e^{-\frac{Pe(1-\chi)}{\varepsilon}} \right]. \quad (3.16)$$

# **CAPÍTULO 4**

## **RESULTADOS**

## CAPÍTULO 4 RESULTADOS

Los resultados obtenidos a partir del modelo matemático, son la temperatura y la velocidad de deslizamiento. Los cuales están en términos de la coordenada adimensional  $\chi$ , del número de Peclet,  $Pe$  y de  $\varepsilon = \frac{H}{L}$ .

### 4.1. TEMPERATURA

#### Temperatura – Desplazamiento

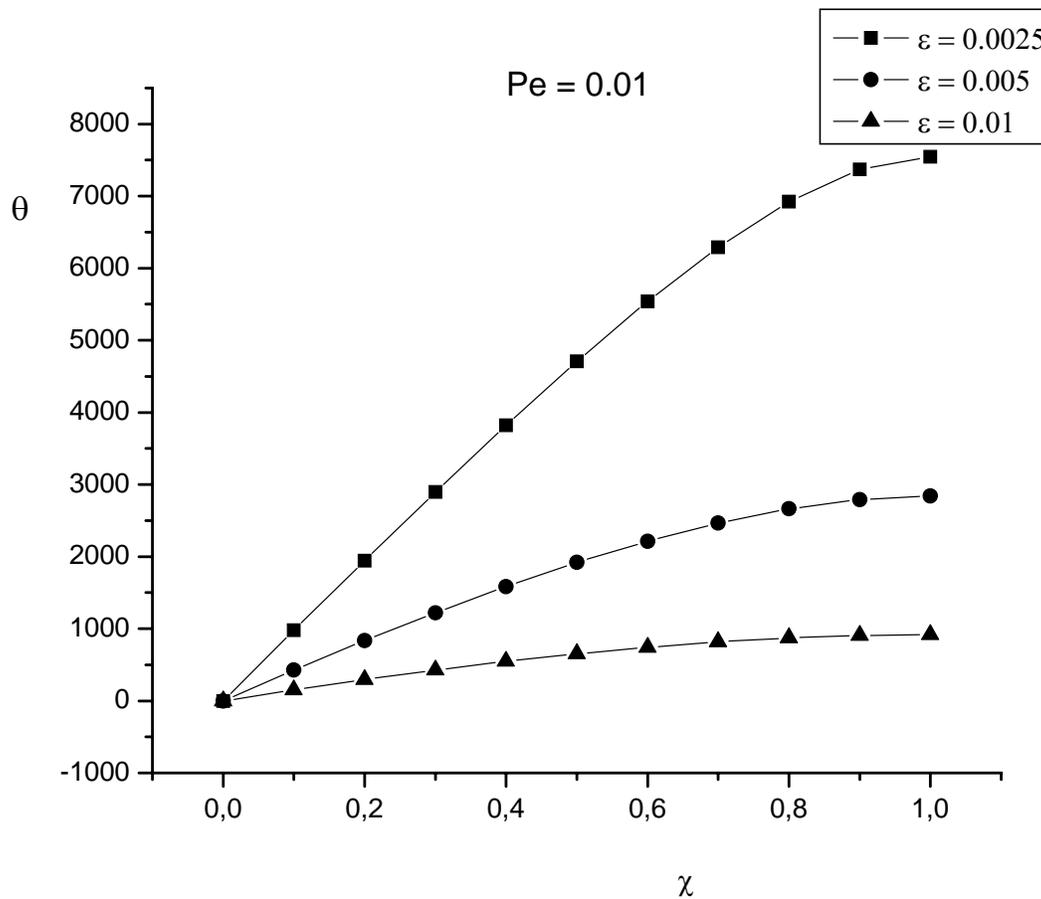
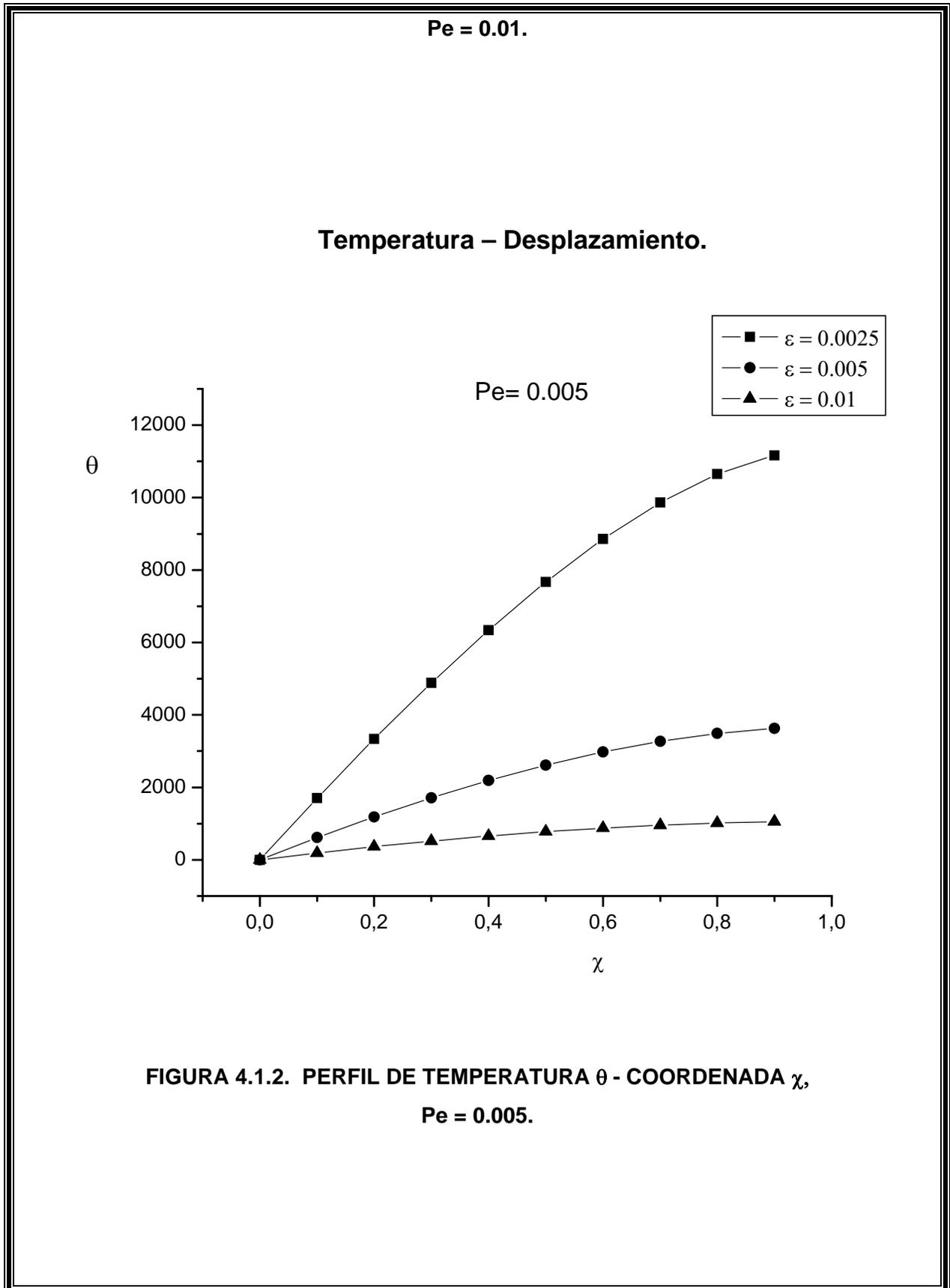
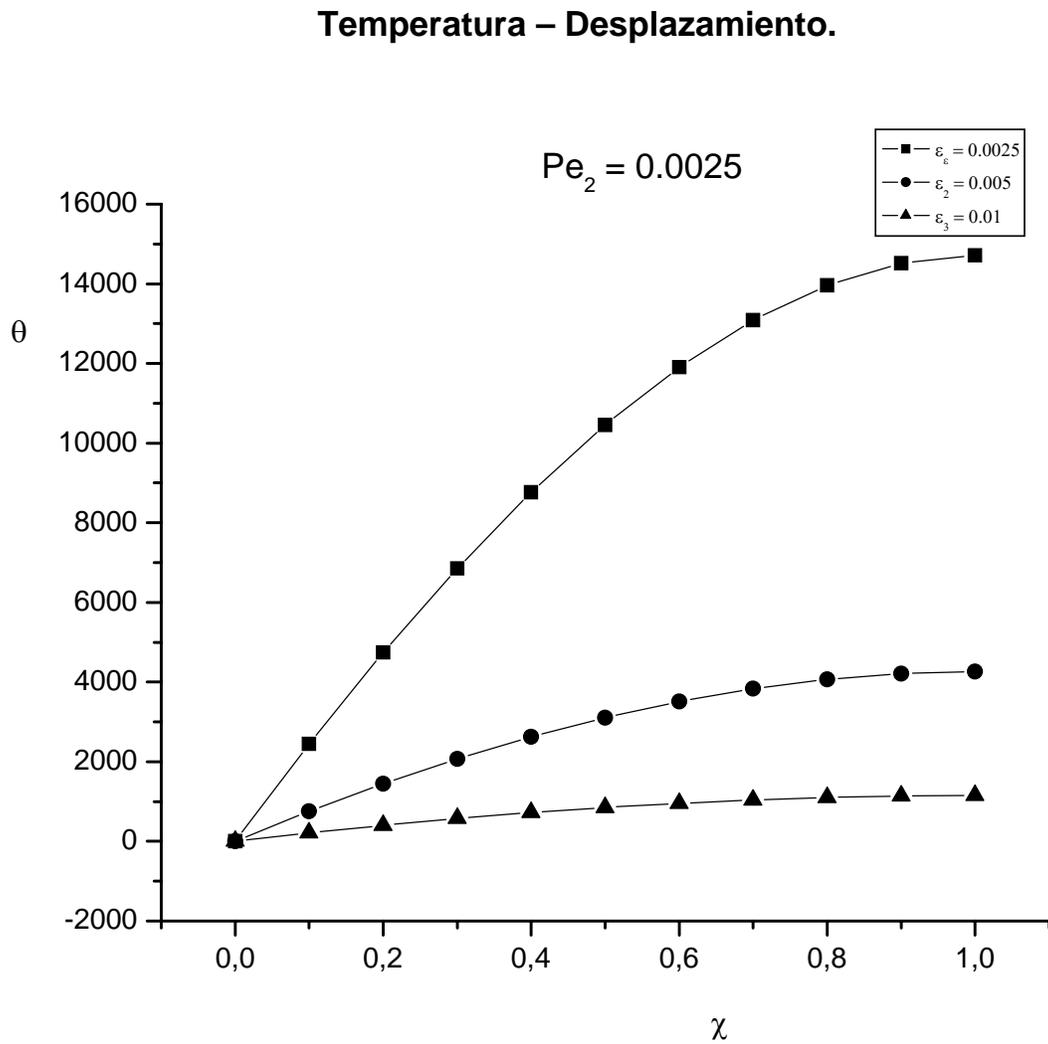


FIGURA 4.1.1. PERFIL DE TEMPERATURA  $\theta$  - COORDENADA  $\chi$ ,





**FIGURA 4.1.3. PERFIL DE TEMPERATURA  $\theta$  - COORDENADA  $\chi$ ,  
 $Pe = 0.0025$ .**

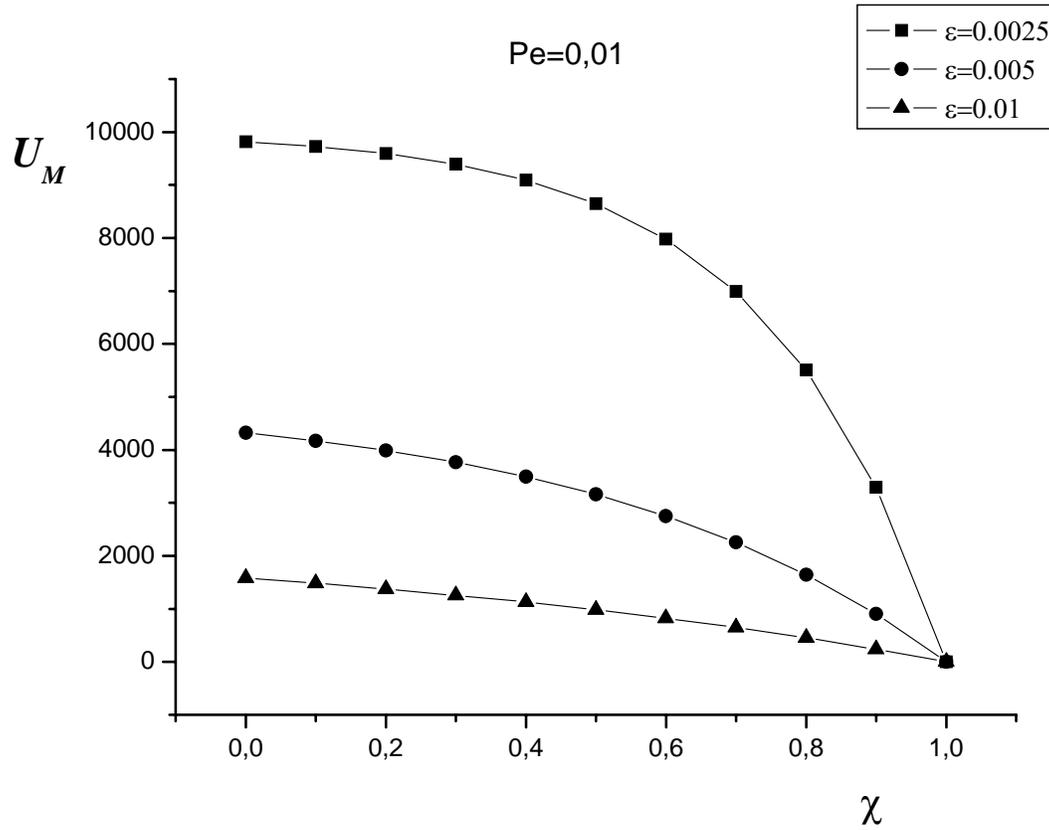
Se considera un número de Peclet del orden del parámetro de perturbación, tomando los valores de  $Pe = 0.01, 0.005$  y  $0.025$ .

En las tres gráficas se observa al inicio un incremento en la temperatura, para posteriormente mostrar constancia en el punto en el que el dispositivo no se puede calentar más y alcanza el equilibrio.

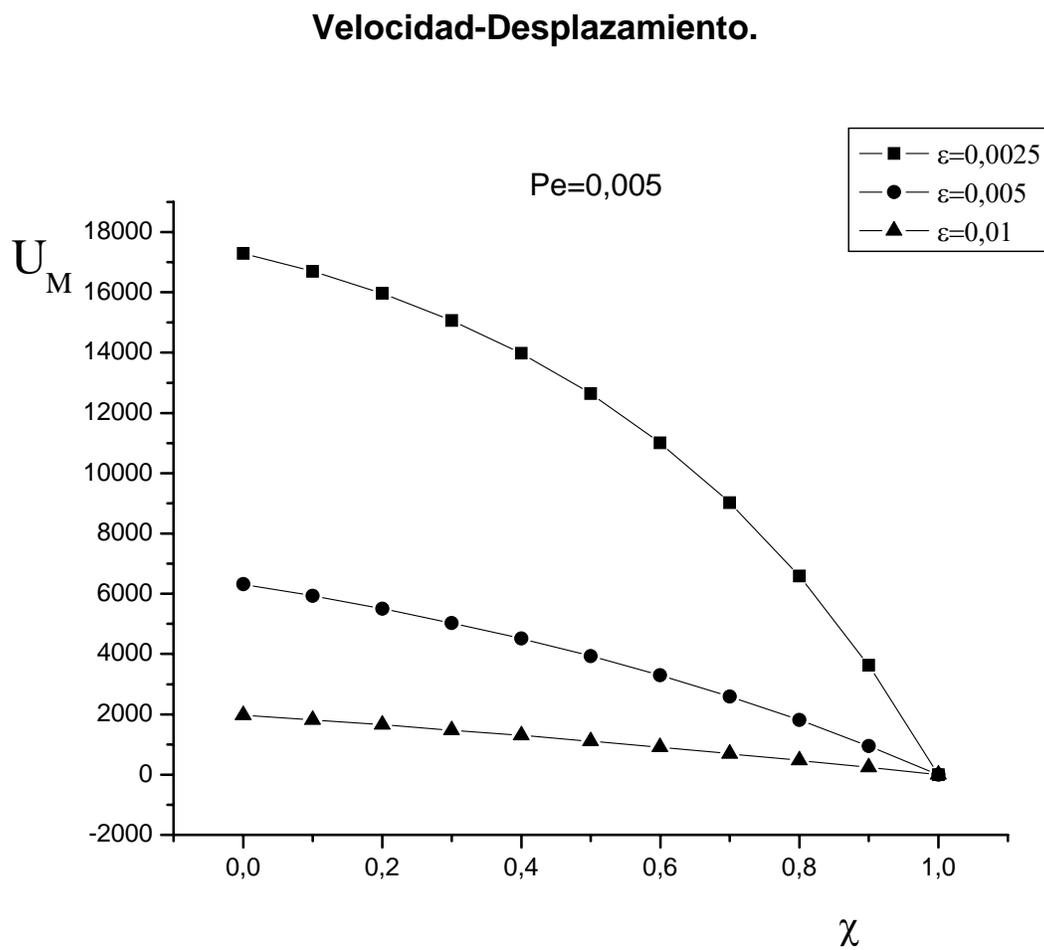
El mayor incremento de temperatura se presenta para el valor más pequeño del número de Peclet, así como para el valor menor de  $\varepsilon$ , ya que para estas condiciones, el canal es más pequeño, con lo cual se deduce que el volumen también lo es y por lo tanto al tener un espacio más pequeño que calentar, la distribución de temperatura presenta valores grandes.

## 4.2. VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO.

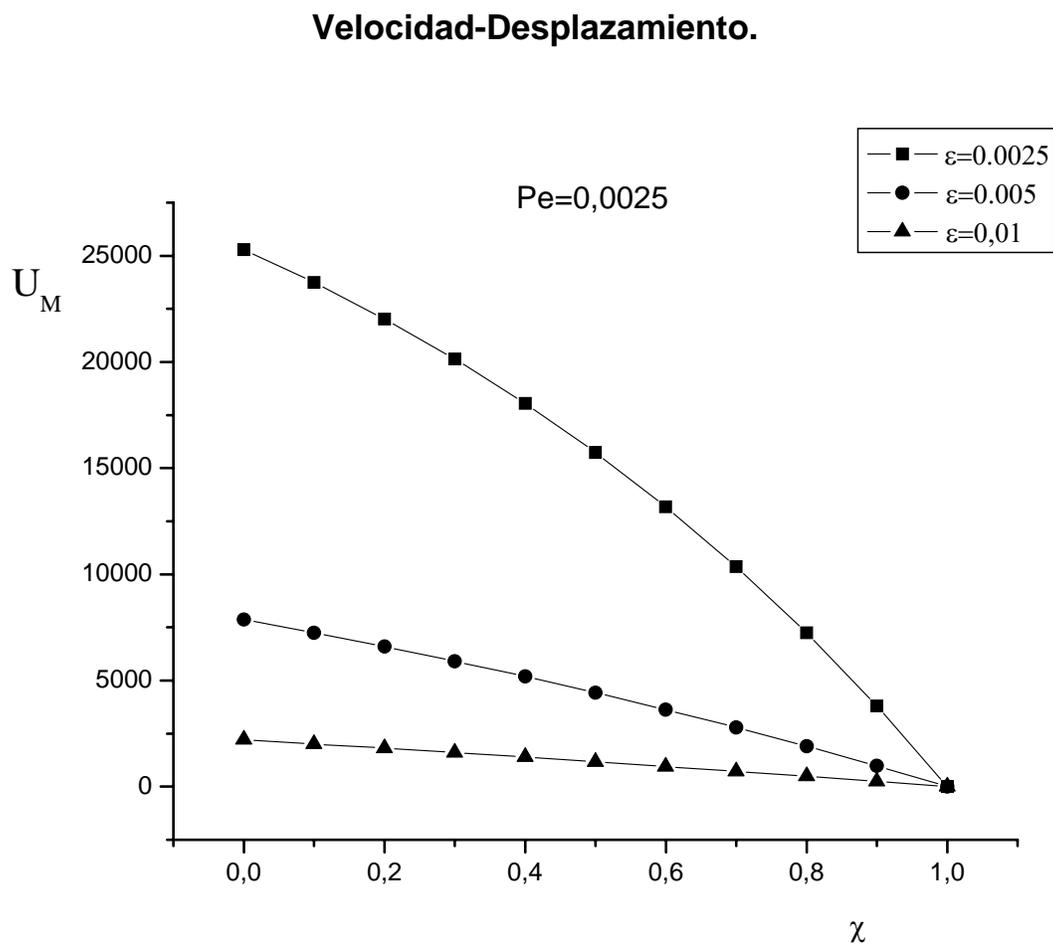
## Velocidad-Desplazamiento.

FIGURA 4.2.1. VELOCIDAD  $U_M$  - COORDENADA  $\chi$ ,

Pe = 0.01.



**FIGURA 4.2.2. VELOCIDAD  $U_M$  - COORDENADA  $\chi$ ,**  
**Pe = 0.005.**



**FIGURA 4.2.3. VELOCIDAD  $U_M$  - COORDENADA  $\chi$ ,**  
**Pe = 0.0025.**

Las consideraciones para el número de Peclet son también del orden del parámetro de perturbación, cuyos valores son:  $Pe = 0.01, 0.005$  y  $0.025$ .

En las tres gráficas se observa que se parte de un punto máximo para posteriormente decrecer hasta cero. Este efecto se presenta debido a la condición inicial en la frontera, el cual involucra a la velocidad de deslizamiento, que es la que se observa al inicio de la gráfica y el arrastre térmico (thermal creep), el cual provoca que la velocidad caiga hasta cero.

La velocidad es mayor cuando el Peclet también lo es, ya que éste número involucra a la velocidad promedio. Y en cuanto a los valores de velocidad tomando como referencia el parámetro de perturbación,  $\varepsilon$  son mayores cuando  $\varepsilon$  toma valores pequeños.

# **CAPÍTULO 5**

## **CONCLUSIONES**

## CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES

En los resultados de la temperatura-desplazamiento se observa que a la entrada del microcanal, la temperatura parte desde cero, para posteriormente alcanzar el valor máximo, presentándose después una línea constante, lo cual representa la disipación de calor al inicio y la distribución de éste a lo largo del canal.

El efecto del arrastre térmico influye en los resultados de temperatura al observarse que la temperatura va aumentando conforme se va avanzando a lo largo del microcanal, es decir que el flujo en el canal, gracias al gradiente de presión hace que fluya de la zona fría a la caliente.

Al hablar de microescalas, es importante mencionar que el aumento de la temperatura es muy grande. Ya que al tratarse de un espacio tan reducido y obtener valores de tal magnitud, nos da una idea de lo importante que es buscar alternativas para mantener a una temperatura adecuado los microcanales, y que si éstos son parte de un dispositivo, no ocasionen daños debido al calentamiento excesivo.

Para los valores observados en las gráficas de velocidad-deslizamiento, se tiene que no inicia desde cero, sino de un punto máximo de ésta para posteriormente decrecer hasta llegar a cero. La causa del inicio diferente de cero se atribuye al efecto de deslizamiento, y el descenso de la velocidad es debido al arrastre térmico, el cual frena al fluido dentro del microcanal.

La gran ventaja de considerar el efecto del arrastre térmico es que tomando en cuenta que las temperaturas son muy elevadas, al entrar el fluido en el microcanal a una velocidad diferente de cero con el fin de enfriarlo, éste permanecerá más tiempo dentro debido a que se irá frenando, con lo cual la temperatura, si bien no disminuye en gran medida, al menos se mantendrá en un valor adecuado, dependiendo de la función del microcanal.

Los efectos anteriores, destacan el hecho de que hablar de microescalas significa considerar efectos despreciados a nivel macroscópico, los cuales toman un papel importante al ser notables y significativos microscópicamente hablando.

Una desventaja de la microescala es el constante cambio con respecto a la macroescala, por lo cual un estudio de algunos años atrás no puede ser considerado para uno posterior.

En la actualidad no se cuenta con mucha literatura acerca de microcanales, y la documentación encontrada hace referencia al mismo círculo de investigadores, pero es un hecho que no tardará en ampliarse, ya que cada vez son más las personas que los están estudiando y conforme avanza el tiempo el número de artículos publicados va aumentando con el paso de los años.

El desarrollo tecnológico va creando la necesidad de reducir cada vez más los dispositivos electrónicos con el fin de hacer más cómodo el manejo de éstos, razón por la cual se tiene que trabajar a niveles microscópicos y abrirle más el campo de estudio a los microcanales, los cuales están presentes siempre que se haga mención de la microescala.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.**

[1] Karniadakis, George. *Micro flows and Nano. Fundamentals and Simulation*. Springer, United States of America, 2005

[2] Hadjiconstantinou, Nicolas, Simek, Olga. *Constan-Wall-Temperature Nusselt Number in Micro and Nano-Channels*. Journal of Heat Transfer; 124(2002): 356-364.

[3] Vafai, K., Khaled, A.-R.A. *Analysis of flexible microchannel heat sink systems*. International Journal of Heat and Mass Transfer; 48(2005): 1739-1746.

[4] Reynolds, O. *Certain dimensional properties of matter in the gaseous state*. Royal Society London;170 (1879): 727-845.

[5] Knudsen, M. *Thermischer Molekulardruck der Gase in Rohren*. Annalen der Physik; 33(1910): 1435-1448.

[6] Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1977.

[7] Freeman, D. M., Aranyosy, A.J., Gordon, M.J. and Hong, S. S. *Multidimensional Motion analysis of MEMS using computer microvision*. Hilton Head, 1998.

[8] Poiseuille, J. M. *Experimental investigations upon the flow of liquids in tubes of very small diameters*. Sciences Mathématique et Physiques; 9(1846): 433-545.

- [9] Knudsen, M. *Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase*. Annalen der Physik; 28(1909): 75-130.
- [10] Gaede, W. *Die äussere Reibung der Gase*. Annalen der Physik; 41(1913): 289.
- [11] Pfahler, J. N., Harley, J. C., Bau, H. H., and Zemel, J. N. *Gas and liquid flow in small channels*. ASME; 32(1991): 49-59.
- [12] Liu, J. Q., Tai, Y. C., Pong, K. C., and Ho, C. M. *Micromachined channel, pressure sensor systems for microflow studies*. 1993.
- [13] Arkilic, E., and Breuer, K. *Gaseous flow in small channels*. AiAA Shear Flow Conference, Orlando, FL; (1993): 93-3270.
- [14] Meinhart, C. D., Wereley, S. T., and Santiago, J. G. *PIV measurements of a microchannel microflow*. Exp. In Fluids; 27(1999): 414-419.
- [15] Vafai, K., Zhu, L. *Analysis of a two-layered micro channel heat sink concept in electronic cooling*. Heat Mass Transfer; 42(1999): 2287-2297.
- [16] Khaled, A.-R.A., Vafai, K. *Flow and heat transfer inside thin films supported by soft seals in the presence of internal and external pressure pulsations*. Heat Mass Transfer; 45(2002): 5107-5115.
- [17] Khaled, A.-R.A., Vafai, K. *Control of exit flow and thermal conditions using two-layered thin films supported by flexible complex seals*. Heat Mass Transfer; 4(2004): 1599-1611.

[18] van Rij, Jenifer, Harmn, Todd, Ameer, Timothy. *The effect of creep on two-dimensional isoflux microchannels*. International Journal of Thermal Sciences; 46 (2007): 1095-103.

[19] Méolans, J. G., Graur, I. A. *Continuum analytical modelling of thermal creep*. European Journal of Mechanics B/Fluids: 2008.

[20] Incropera, Frank, de Witt, Davis. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley, Canada, 1990.