



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LEYES DE POTENCIAS BAJO LA MECÁNICA
ESTADÍSTICA NO EXTENSIVA:

LEY DE ZIPF Y LEY DE BENFORD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

CARLO ANDRÉS ALTAMIRANO ALLENDE



FACULTAD DE CIENCIAS

UNAM

TUTOR:

DR. ALBERTO ROBLEDO NIETO

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Alberto Robledo por todo el apoyo que me ha brindado en este tiempo, por sus consejos y enseñanzas tanto en el aspecto profesional como personal, que han dejado una profunda huella en mí.

Quiero agradecer a mis hermanos por su incondicional apoyo y amistad.

A mis padres por su confianza y por ser mi fuente de inspiración.

A mis grandes amigos y compañeros, que de alguna forma ayudaron a realizar este trabajo y que son un pilar fundamental en mi vida.

A mi familia en Chile, tan lejos pero tan presente.

A Nayla, Carlos Miguel, papá y mamá.

A Sara.

ÍNDICE

Prefacio	8
Sinopsis	10
1. Introducción	12
1.1. Una cuestión de simetría	13
1.2. Dimensión fractal	15
1.3. Sistemas complejos	16
1.4. Emergencia	20
1.5. Dinámica no lineal	22
1.6. Interdisciplinariedad	24
1.7. Leyes de potencias	26
1.8. Física Estadística	27
1.9. Mecánica Estadística No Extensiva	30
2. Leyes de potencias	32
2.1. Transición líquido – gas	32
2.2. Punto crítico magnético	33
2.3. Transición super fluida en ^4He	35
2.4. Leyes de potencias en la naturaleza	37
2.5. Criticalidad auto organizada	38

3. Ley de Zipf y Ley de Benford	39
3.1. Ley de Zipf	42
3.2. Ley de Benford	54
4. Mecánica Estadística No Extensiva	61
5. Ley de Zipf y Ley de Benford generalizadas	73
6. Conclusiones	79
7. Referencias	79

PREFACIO

El presente trabajo pertenece al área de estudio denominada *sistemas complejos*, sustentada por la teoría y herramientas fundamentales de la física estadística, y en particular, por avances realizados en el ramo durante los últimos veinte años.

La complejidad que se observa en los sistemas reales es altamente contrastada por la simplicidad que se observa en las leyes fundamentales de la física. Conceptos tales como *caos* o *fractales* surgen del estudio de este tipo de sistemas, los cuales, no importando el área del conocimiento donde estén enfrascados (física, biología, ecología, economía) exhiben un comportamiento tal que muchos de ellos comparten rasgos característicos que los hacen pertenecer a la misma clase de *universalidad*.

Un rasgo observado en una miríada de fenómenos en la naturaleza y es una característica fundamental en el estudio de los sistemas complejos es el concepto de *autosimilaridad* o invarianza ante cambios de escala. Esto quiere decir que no existen escalas características en el sistema, sino que todas las escalas (dentro de cierto rango) participan en la dinámica del mismo.

A raíz de esto surgen de manera natural *leyes de potencias* que describen o son características de la dinámica de estos sistemas complejos.

En particular, este trabajo se enfoca en dos leyes de potencias particulares denominadas *Ley de Zipf* y *Ley de Benford*. Estas leyes son conocidas desde hace muchos años por la diversidad de fenómenos en la que se encuentran.

La Ley de Zipf corresponde a un ordenamiento rango vs. frecuencia originalmente encontrado al tabular la distribución de frecuencias de aparición de palabras en textos pero comúnmente observada en distribuciones de naturaleza tan distinta como lo es la distribución de ciudades en términos del número de habitantes, intensidad de terremotos o visitas a sitios web, por mencionar unos pocos.

La Ley de Benford, en cambio, tiene un enfoque un tanto más particular en cuanto que trata sobre la distribución de probabilidad de aparición del primer dígito en series numéricas de una gran variedad de fuentes distintas. Es particularmente útil en la detección de datos fraudulentos.

Es el propósito de este trabajo relacionar estas dos leyes y brindar una estructura termodinámica de éstas, de tal forma que a partir de esta estructura, la aparición de la Ley de Zipf y la Ley de Benford en la naturaleza surja de manera natural.

En 1988 surgió una generalización de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs mediante el uso de una nueva forma de entropía denominada S_q . Dicha entropía recupera el valor original de Boltzmann-Gibbs para $q=1$. [1]

En las últimas dos décadas esta teoría, denominada *mecánica estadística no extensiva*, ha sido aplicada exitosamente en un número considerable de fenómenos físicos con cierto grado de

complejidad, abriendo una pauta para el estudio de sistemas que, por su naturaleza fuera de equilibrio o altamente compleja, anteriormente se carecía de herramientas para enfrentarlos de forma exitosa.

Es bajo este esquema de la mecánica estadística no extensiva en el que se fundamenta la principal aportación de este trabajo en el sentido de que se logra establecer una relación entre las leyes de Zipf y de Benford en términos de una transformada de Legendre; es decir, se llega a la conclusión de que estas leyes obedecen una estructura termodinámica fundamentada en la no extensividad que explica la abundancia en la aparición de dichas leyes de potencias en la naturaleza.

Sinopsis

Esta tesis comienza con una breve explicación acerca de la naturaleza de los sistemas complejos en la cual se introduce el concepto de *autosimilaridad* como una de las simetrías fundamentales en la naturaleza; se definen los conceptos de dimensión fractal y fenómenos característicos de los sistemas complejos como lo es la aparición de leyes de potencias y el fenómeno de emergencia.

Se hace especial énfasis en la importancia que tiene la *interdisciplina* en la comprensión y entendimiento de los sistemas complejos debido a las diversas áreas del conocimiento que confluyen en el estudio de estos sistemas. Sin embargo, se

menciona a la física estadística como base en el estudio de los sistemas complejos y en particular para los objetivos de este trabajo.

El capítulo 2 trata sobre la aparición de leyes de potencias en la naturaleza donde se recuerda que existen fenómenos fundamentales, estudiados a profundidad desde hace muchos años, denominados *transiciones de fase*, las cuales tienen esta propiedad de invarianza ante cambios de escala lo que da lugar de forma natural a la aparición de leyes de potencias. Se brindan ejemplos clásicos de transiciones de fase como los son la transición líquido-gas, el punto crítico magnético modelado por el modelo de Ising o la transición a la súper fluidez que experimenta el ^4He .

En el capítulo 3 se introducen las leyes de Zipf y de Benford. En la sección 3.1 se muestran una gran variedad de ejemplos en donde se ha observado la Ley de Zipf, mientras que la sección 3.2 trata enteramente sobre la aparición en la naturaleza de la Ley de Benford.

El capítulo 4 hace referencia a los fundamentos de la mecánica estadística no extensiva como una generalización de la mecánica estadística clásica de Boltzmann-Gibbs; tanto de su formulación como del álgebra necesaria para facilitar su comprensión. Basados en trabajos muy recientes, en la sección 4.2 se fundamenta esta teoría basándose en la idea de un *espacio fase restringido*.

En este trabajo se reconoce una estructura termodinámica asociada con las leyes de Zipf y de Benford. La mecánica

estadística que subyace a esta estructura corresponde con la *mecánica estadística no extensiva*; y, bajo este formalismo, se reconocen a estas leyes como inversas una de la otra. Es el propósito del capítulo 5 introducir esta estructura, la cual es la aportación principal de este trabajo.

I. INTRODUCCIÓN

Esta breve introducción a la teoría de los sistemas complejos tiene como objetivo general acercar al lector a ciertos conceptos generales y básicos para el entendimiento de la dinámica de estos sistemas, empezando por definir el concepto de fractal y su relación con la geometría de la naturaleza y de los fenómenos que moldean el paisaje de todos los días, para así poder pasar a las características principales de los sistemas complejos como lo es el fenómeno de la emergencia, y de las herramientas necesarias para enfrentarlos, las cuales entran en el ámbito de la dinámica no lineal y el caos.

Se hace especial énfasis en el rol fundamental que tiene la interdisciplina para el estudio de los sistemas complejos, los cuales en sí engloban fenómenos que pertenecen a áreas de estudio en apariencias disímiles entre sí tanto de las ciencias sociales como naturales.

La Física Estadística es la rama en la que se fundamenta este trabajo y se presenta un nuevo formalismo que pretende dar explicación a nuevos e interesantes fenómenos que se irán dilucidando a lo largo de este trabajo.

Uno de los pilares que une temas como fractales, caos y leyes de potencias, y el estudio de los sistemas complejos en general, es

el concepto de *autosimilaridad*, el cual se observa en una cantidad innumerable de fenómenos en la naturaleza. De hecho, en palabras de Manfred Schroeder, es una de las simetrías decisivas que moldean nuestro universo y nuestro esfuerzo para comprenderlo. [2]

1.1 Una cuestión de simetría

Las leyes de la naturaleza como se conocen hasta ahora han mostrado distintos tipos de simetría, es así como la naturaleza construye muchos de los organismos. De algún u otro modo, siempre existe simetría.

Los tres tipos básicos de simetría que existen son:

- simetría reflexiva o de espejo
- simetría traslacional
- simetría rotacional

Si se toma por ejemplo una flor, su simetría rotacional será siempre imperfecta; mientras que la isotropía exacta que se encuentra en las leyes fundamentales de la naturaleza es uno de los principios más poderosos en la búsqueda por conocer la estructura atómica, molecular y de cristales.

Una de las grandes matemáticas del siglo XX, Emma Noether, fue de las primeras en resaltar la conexión entre la simetría de las leyes fundamentales de la física con respecto a desplazamientos en el espacio, tiempo y rotaciones, por un lado,

y la conservación de momento lineal, energía y momento angular por el otro, lo que se conoce como *Teorema de Noether*.

Existen otras sorprendentes simetrías en este mundo tales como la pérdida de identidad de partículas elementales del mismo tipo así como la invarianza ante movimiento uniforme, que tuvo como consecuencia la relatividad especial.

Sin embargo, ante todas estas simetrías resalta una que ha traído la atención de tantos científicos en los últimos años. Es la llamada *autosimilaridad* o invarianza ante cambios de tamaño o de escala.

Dicha atención se ha debido principalmente a que esta invarianza ante cambios de escala se ha observado en todos los niveles, desde la distribución de átomos en la materia como la distribución de galaxias en el universo.

Aunque en las matemáticas fue donde se encontraron las primeras estructuras autosimilares, como el conjunto de Cantor o las funciones de Weierstrass, éstas se han encontrado también en innumerables ramas de la ciencia.

Aun cuando en la naturaleza nada es estrictamente periódico, el concepto de periodicidad ha sido de bastante utilidad para elucidar distintas leyes o mecanismos en diversos campos, utilidad que se ha basado en la linealidad del comportamiento de muchos sistemas.

Sin embargo, existen una infinidad de sistemas en los que se rompe esta linealidad y la periodicidad da lugar a un movimiento aperiódico o, en muchas ocasiones, caótico. En muchos sistemas reales esta es la situación donde, a pesar del caos, también se

observa una característica invariante respecto al escalamiento, la autosimilitud.

Una de las consecuencias de la invarianza ante escala es el surgimiento de estructuras cada vez más finas denominadas *fractales*. En el mundo real el escalamiento siempre tiene un límite, sin embargo, esto no es impedimento para usar esta herramienta, así como la falta de una periodicidad estricta en el mundo real nunca fue un impedimento para su análisis. Se puede ver a la autosimilitud como la periodicidad pero en una escala logarítmica.

1.2 Dimensión Fractal

La dimensión de un objeto es una medida que define las características topológicas del mismo. Es el número de coordenadas necesarias para especificar un punto del objeto. Esta noción de dimensión da una parametrización precisa de la complejidad visual o conceptual de cualquier objeto geométrico. El concepto de dimensión se entiende como la dimensión intrínseca de un espacio topológico.

A esta dimensión se le conoce normalmente como dimensión topológica de Lebesgue o simplemente como dimensión topológica. El ejemplo típico sería el n -espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , el cual tiene dimensión topológica n . Los autores de todas estas ideas fueron Poincaré, Brouwe, Lebesgue, Urysohn y Menger.

Bajo esta línea, entonces se entiende a la dimensión como una medida de cómo un objeto llena el espacio.

Los objetos autosimilares con parámetro N y s son descritos por una ley de potencias de la forma

$$N = s^d \quad [1.1]$$

Donde

$$d = \ln N / \ln s \quad [1.2]$$

es la dimensión de la ley de escalamiento, llamada comúnmente como *dimensión de Hausdorff* en honor al matemático alemán Felix Hausdorff, quien la formuló en 1919.

En términos matemáticos, sea A el subconjunto del espacio métrico X . Entonces la dimensión de Hausdorff $D(A)$ de A es el ínfimo de $d \leq 0$ tal que la medida de Hausdorff d -dimensional de A es cero, el cual no necesariamente es entero. [3]

Mientras que la dimensión topológica D_T siempre es un número entero, la dimensión de Hausdorff D_H no tiene porque serlo. De hecho, para las figuras euclidianas en general, se cumple que $D_H = D_T$, sin embargo, en el caso general se tiene que cumplir la desigualdad de Szpilrajn: [4]

$$D_H \geq D_T \quad [1.3]$$

Se denominan *fractales* a los objetos cuya dimensión de Hausdorff tiene un valor no entero. El término fractal fue acuñado por el francés Benoît Mandelbrot para definir a los objetos cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica, es decir, que cumplen con la desigualdad de Szpilrajn.

1.3 Sistemas Complejos

Al reflexionar sobre cómo se relacionan entre ellos los diferentes campos de la ciencia, uno está inclinado a pensar en el enfoque reduccionista, el cual se basa en la idea de que para entender cabalmente un sistema uno debe descomponerlo en sus elementos constitutivos e identificar sus propiedades fundamentales. Este ha sido el caso en gran parte de la historia de la ciencia debido a una razón fundamental: ha funcionado bastante bien.

En la introducción al suplemento especial de la revista *Science* dedicado enteramente al tema de la *complejidad* en abril de 1999, Gallagher y Appenzeller [5] encuentran lógico que cada vez con más frecuencia, se encuentren huecos y fallas en este enfoque reduccionista principalmente debido a una sobrecarga de información. Es decir, el flujo de la información encuentra en su camino ciertas barreras u obstáculos debido a la sub-especialización entre las ramas de la ciencia.

Esta tan grande especialización ha llevado a un aislamiento progresivo de las disciplinas científicas individuales. Sin embargo, cabría preguntarse entonces sobre la posibilidad de que campos de estudio tan diversos como la biología molecular, la química o la economía puedan de repente unificarse en una sola disciplina de estudio.

Aquí recae el principal interés para el estudio de los *sistemas complejos*, que, como veremos más adelante, encuentran propiedades tanto universales como locales en cada uno de estos

sistemas que pertenecían en principio al campo de estudio de una sola disciplina.

Cada disciplina desarrolla herramientas para encarar la complejidad de los sistemas que pertenecen a su campo de estudio, por lo que un hecho fascinante es que muchas de estas herramientas pueden ser adaptadas para un uso más general, reconociendo su universalidad o utilidad para un enfoque interdisciplinario en el estudio de los sistemas complejos.

Para entender el concepto de complejidad valdría la pena regresar a su raíz latina *complexus* que significa *abrazo, enlazamiento, rodeo*. [6] A partir de esto, se podría deducir que para poder tener algo complejo se necesitan por un lado, dos o más partes componentes, y por otro, que estén unidas de una forma no trivial.

Aquí queda más claro el hecho de que el método reduccionista clásico no es útil para estudiar sistemas de esta naturaleza dado que al tomar los componentes por separado se destruiría sus interconexiones y haciendo, por tanto, el comportamiento complejo difícil de describir.

Esta conexión entre componentes hace que un pequeño cambio en uno de ellos se propague a través de estas interacciones con los otros componentes afectando a éstos últimos, y éstos a su vez afectarán a otros, y así sucesivamente incluyendo al componente con el cual se inició este proceso. Esto hace que el comportamiento global del sistema sea en extremo difícil de estudiar en términos de sus elementos.

El concepto de *complejo* es en sí mismo un concepto ambiguo dado que no es tan fácil discernir entre un sistema simple de uno complejo. Se han propuesto distintas formas de medir el grado de complejidad de un sistema en contextos tan diversos como en las ciencias sociales, económicas, computacionales, biológicas, etc. Por esto mismo, no existe una medida universal de la complejidad de un sistema, sin embargo, al comparar dos o más sistemas, es ampliamente aceptada la afirmación de que “la complejidad de un sistema crece con el número de elementos que lo forman, la conexión entre ellos, la complejidad de estos componentes y la complejidad de estas conexiones”. [7]

Producto de las interacciones entre ellos mismos, de los elementos del sistema, surgen propiedades globales que no se encuentran en sí en los elementos individualizados. Se dice que estas propiedades *emergen* de dichas interacciones.

Los sistemas complejos son sistemas en donde el conocimiento de los bloques elementales que lo forman no da una pauta evidente acerca del comportamiento global del sistema, es decir, se caracterizan por tener un comportamiento dinámico vasto a partir de elementos simples.

Ejemplos de sistemas complejos existen por doquier; para clarificar un poco este concepto se listan algunos de los más representativos tanto por su familiaridad como por la claridad con la que se pueden apreciar las propiedades emergentes. [8]

- **Célula.** Una célula está formada por proteínas y moléculas, las cuales no se considera que tengan vida. Estos elementos de la célula están organizados de tal forma que un

- observador externo considera esta célula como viva. En este sentido, la propiedad que emerge de las interacciones entre las diferentes proteínas y moléculas es la vida.
- **Cerebro.** Quizás uno de los ejemplos más espectaculares de un sistema complejo. Se sabe bastante bien cómo está formada una neurona, sin embargo estamos todavía muy lejos de comprender la *conciencia* y responder a la cuestión de si ésta es un fenómeno emergente del cerebro o no.
 - **Sociedad.** Entre las propiedades emergentes que se encuentran en una sociedad cuyos miembros por sí solos no poseen están el comportamiento colectivo, creencias, organización social, etc. Éstas son consecuencia de la simple interacción entre sus miembros.
 - **Autómatas celulares.** Como el ya conocido “juego de la vida”, que consiste en una matriz donde cada elemento se encuentra en un estado dado. Este estado se modifica a través del tiempo tomando en cuenta el estado en el que se encuentran los elementos vecinos en la matriz. Propiedades bastante interesantes emergen a partir de reglas muy simples para modificar el estado de cada elemento.

1.4 Emergencia

El fenómeno de emergencia surge a raíz del comportamiento colectivo del sistema, cuyos elementos que lo conforman, vistos

individualmente, no muestran relación alguna con esta propiedad emergente.

Es bajo el esquema de la termodinámica y la mecánica estadística donde se estudia este fenómeno a profundidad.

Pensando en un gas ideal como el sistema termodinámico más simple, inmediatamente surgen a la vista dos propiedades emergentes de este sistema, la *presión* y la *temperatura*. También llamadas variables intensivas del sistema, éstas no emergen de forma natural a partir de la descripción de una partícula individual que compone este gas, en cambio, la presión y la temperatura empiezan a tener sentido sólo cuando se forma ya un conglomerado de partículas.

Otro ejemplo sencillo del fenómeno de emergencia se observa en la formación de agua a partir de átomos de hidrógeno y oxígeno. Las propiedades del agua en sí no se observan en las propiedades que muestran los gases de oxígeno e hidrógeno; tampoco a partir de una molécula de agua se pueden deducir muchas de las propiedades del agua. Sin embargo, una cantidad microscópica de agua es suficiente para observar los fenómenos emergentes en su comportamiento. [9]

En el número inaugural de la revista *Emergence* en 1999, Jeffrey Goldstein se refiere al concepto de emergencia como el surgimiento de patrones, propiedades y estructuras nuevas y coherentes durante el proceso de autoorganización de un sistema complejo. [10]

Pareciera que el concepto de emergencia surgió a raíz del nuevo conocimiento científico que fue cimbrando al mundo a finales

del siglo XIX y principios del siglo XX; sin embargo, el término “emergente” fue usado por el psicólogo G.H. Lewis en su libro *Problems of Life and Mind* (1874 – 1879). Decía que ciertos fenómenos en la naturaleza producen lo que llamó una “novedad cualitativa”, es decir, cambios materiales que no pueden ser expresados en términos cualitativos simples.

Ciertamente, el concepto o la definición de *emergencia* han ido cambiando conforme se va entendiendo más este fenómeno. En este trabajo se usará la definición de emergencia dada por Tom De Wolf y Tom Holvoet [11], quienes establecen que “un sistema exhibe emergencia cuando hay propiedades resultantes a un nivel macro que surgen dinámicamente a partir de las interacciones de las partes que lo componen a un nivel micro”. Con nivel macro se quiere decir que se considera al sistema como un todo. Por el contrario, un nivel micro considera al sistema desde el punto de vista de las entidades individuales que lo forman.

En la definición anterior de emergencia se utiliza la palabra propiedades resultantes, que se refieren a propiedades, comportamiento, estructura o patrones que surgen a raíz de las interacciones a un nivel micro en el sistema, estas propiedades se conocen como *propiedades emergentes*.

1.5 Dinámica no lineal

La dinámica no lineal es parte fundamental en el estudio de los sistemas complejos dado que por lo general estos sistemas están

compuestos de muchas partes que interactúan entre ellas creando una dinámica para nada trivial que implica un comportamiento no lineal donde pueden existir regiones dominadas por la teoría del caos.

En el estudio del fenómeno de emergencia, por ejemplo, las interacciones no lineales forman parte esencial dado que la emergencia de estados cualitativamente diferentes a los iniciales no son simples combinaciones de los estados de las unidades individuales que componen el sistema.

El hecho de que exista caos quiere decir que sistemas en apariencia simples son capaces de producir un comportamiento complejo. Por citar un ejemplo, el mapa logístico unidimensional, que muestra una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales mostrando regiones o ventanas donde se observa claramente un caos determinista a partir de una ecuación tan simple como la logística.

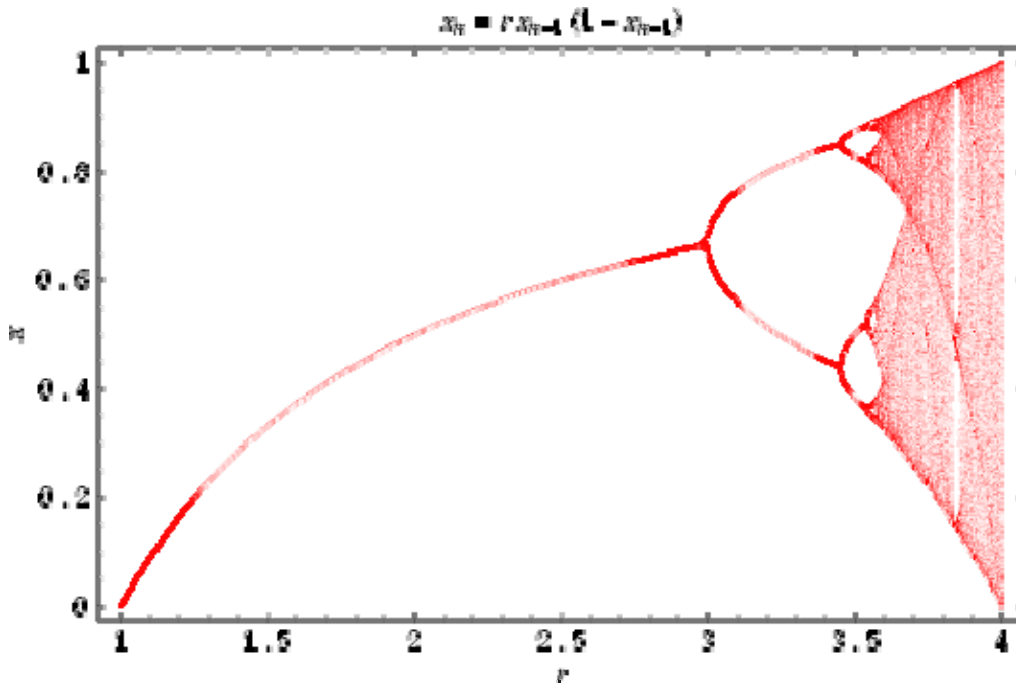


Fig. 1.1 Diagrama de bifurcación del mapeo logístico

Variando el parámetro de control r del mapeo logístico se encuentran tres rutas al caos: [12]

- **Bifurcación y duplicación de periodo.** El periodo de oscilación se duplica repetidamente variando el parámetro de control. El caos aparece arriba de un valor crítico del parámetro de control en donde el periodo de oscilación es 2^∞ .
- **Ruta quasi-periódica al caos.** Un periodo de oscilación en una frecuencia fundamental se bifurca en una órbita quasi-periódica la cuál, variando el parámetro de control, eventualmente bifurca en una órbita caótica.
- **Intermitencia.** Para ciertos valores del parámetro de control las oscilaciones periódicas experimentan una caída repentina.

Actualmente la dinámica no lineal está inmersa en multitud de campos de investigación, sus aplicaciones emergen en casi todas las ramas de la física y la ingeniería.

1.6 Interdisciplinariedad

En el mundo como lo conocemos actualmente se ha venido generando una creciente interconectividad global en las economías, tecnologías, cultura, así como en la ciencia. Cada vez es mayor el interés por explorar la naturaleza de los sistemas complejos desde una amplia gama de disciplinas tan diversas entre sí dentro de las ciencias físicas, biológicas, matemáticas e incluso en aspectos filosóficos.

A través del estudio de la complejidad cada vez la idea de que los sistemas en el mundo real tienen un comportamiento complejo, no lineal, fuera de equilibrio se vuelve cada vez más fuerte y se alejan más y más de los modelos idealizados que los preceden. De aquí la necesidad de implementar herramientas de estudio que propias de un área específica para el estudio de un fenómeno ajeno en apariencia a dicha área.

Klein y Newell (1997) [13] definen los estudios interdisciplinarios como “un proceso de responder a una cuestión, resolver un problema o referirse a un tema que es muy amplio o complejo para enfrentarlo dentro de una sola disciplina o profesión”. La colaboración interdisciplinaria es necesaria

cuando uno se enfrenta a problemas con un alto grado de complejidad, como es el caso de los sistemas complejos. A partir de esto surge la relación entre complejidad e interdisciplina en estudios tan diversos como literatura, ciencias físicas, ciencias biológicas, ciencias químicas, económicas o ambientales.

Robert Eisenstein, durante una conferencia sobre transdisciplinariedad en la solución de problemas, representa la situación actual de la investigación científica mediante las metáforas del microscopio y del caleidoscopio. El microscopio ha sido la imagen de investigación más dominante, representando el enfoque reduccionista de tomar las cosas separadamente en sus componentes. Aunque este enfoque ha funcionado eficazmente en la obtención de nuevo conocimiento, en la actualidad parece dominar la metáfora del caleidoscopio. Girando un caleidoscopio se crea una sucesión de diversas formas y colores, resultando en nuevos e impredecibles patrones. Un ejemplo de esto es la formación fractal que se observa en tan diversos fenómenos como el crecimiento de una red de ríos, la formación de hojas en un árbol o la distribución de galaxias en el universo. Y más propiamente lo que concierne a este trabajo patrones formados en la distribución de frecuencias de palabras en algún texto, distribución en la población de ciudades o la distribución en las frecuencias de terremotos de alguna región determinada. [14]

La naturaleza de los sistemas complejos provee una razón lógica para el estudio interdisciplinario unificando formas distintas de atacar un problema ofreciendo una explicación lo más completa y

global posible de lo que sucede en cualquier sistema complejo particular.

1.7 Leyes de Potencias

Una de las primeras evidencias de que el mundo no era tan simple como las distribuciones hasta entonces conocidas se dio en 1987 cuando el economista Wilfredo Pareto observó que la distribución en la riqueza de los individuos abarca muchos ordenes de magnitud, deduciendo de que la riqueza social no está controlada por el individuo promedio sino por una pequeña fracción de la población dueña de la mayor parte de esta riqueza. Por lo que en lugar de ajustarse este fenómeno a las típicas distribuciones como las gaussiana o la exponencial, la riqueza sigue lo que se conoce como una distribución en ley de potencias.

Este efecto fue observado posteriormente en una gran variedad de fenómenos tan diversos como la distribución en tamaños de meteoritos, terremotos, frecuencia de palabras en los textos, enlaces de la world wide web, por citar unos pocos, donde las leyes de potencias aparecen de forma ineludible.

Matemáticamente, se expresa a la ley de potencia como una función $f(x)$ de la forma

$$f(x) = cx^{\alpha} \quad [1.4]$$

donde c , α son constantes. Esta función es bastante conocida para diversos casos donde, por ejemplo, para $c < 0$ y $\alpha = 1$ describe la fuerza que siente un resorte lineal, o si $\alpha = -2$ se obtiene la ley de atracción gravitacional de Newton.

$f(x)$ es una ley de potencias simple la cual tiene la característica de ser autosimilar en el sentido de que si a x se le multiplica por una constante, o mejor dicho, se reescala, entonces $f(x)$ sigue siendo proporcional a x^α .

En general los fractales están caracterizados por distribuciones en leyes de potencia. Si tomamos el logaritmo en ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$\ln f(x) = \alpha \ln x \quad [1.5]$$

Asumiendo por simplicidad $c=1$. Esto nos muestra que al graficar $\ln f(x)$ vs. $\ln x$ obtenemos una recta con pendiente α . La invarianza ante cambios de escala se puede observar en el hecho de que la línea recta luce igual en cualquier lugar, es decir, no existe 'algo' a alguna escala que haga que esta escala particular quede fuera de la línea. Por supuesto que estudiando los fenómenos naturales, ésta eventualmente se quebrará para escalas tanto muy grandes como pequeñas. Sin embargo, dentro del rango de validez se pueden encontrar fenómenos de todas las escalas, como se verá más adelante, las leyes de potencia son increíblemente abundantes en la naturaleza.

1.8 Física Estadística

A finales del siglo XIX nacieron tres nuevas ramas de la física que vinieron a revolucionar las formas en que se hacía investigación hasta el momento, uno de ellas es la física estadística.

Esta rama de la ciencia cambió el concepto de predicción en muchos sistemas, atacó problemas de la mecánica clásica como el problema de los tres cuerpos al dar soluciones en términos de ensambles para el problema de muchos cuerpos, entre muchas otras. El ejemplo más clásico es el tratamiento del gas ideal. También introdujo conceptos como el de modelos discretos como lo es el modelo de Ising o incluso los autómatas celulares.

La complejidad de los problemas que estudia la física estadística permite, y al mismo tiempo demanda, del uso de métodos probabilísticos para describir la situación bajo estudio. Las bases de estudio están fundamentadas tanto en el terreno experimental, argumentos teóricos como en la evidencia empírica, lo que ha permitido conectar a la física estadística con el resto de las ciencias físicas.

En particular, se tiene a la mecánica estadística. Esta área de estudio describe el comportamiento a largo plazo de sistemas mecánicos cuya dinámica está descrita por la mecánica hamiltoniana. La mayoría de este tipo de sistemas, aun con un grado de complejidad alto, eventualmente desarrollará un comportamiento probabilístico relativamente simple dado un tiempo y un aislamiento lo suficientemente largo. Por tanto, la mecánica estadística describe el comportamiento de estos

sistemas, los cuales contienen muchas partículas, los cuales son aislados del resto el tiempo suficientemente largo para alcanzar el equilibrio. De este principio de equilibrio surge todo el formalismo canónico de esta disciplina.

Sin embargo, cuando entramos en terrenos donde el equilibrio no es tan fácilmente accesible o donde ocurren fenómenos críticos como las transiciones de fase, las cosas se vuelven más complejas e interesantes. Para estudiar este tipo de fenómenos uno tiene que estar al tanto del formalismo y la relación existente entre la física estadística y la termodinámica, lo cual se estudiará más adelante en este trabajo.

En particular, dos conceptos que se fueron desarrollando en las investigaciones sobre el tema en las décadas de los 60's y 80's son de particular trascendencia para el presente trabajo, el de *universalidad* y *escalamiento*. El descubrimiento, en los sistemas físicos, de propiedades universales que son independientes de la forma específica de las interacciones dio pie a la hipótesis de que leyes universales o resultados pueden también estar presentes en sistemas complejos sociales, económicos o biológicos.

De hecho, se ha observado en los últimos años que muchos sistemas complejos obedecen leyes universales que son independientes de la estructura microscópica, descubrimientos en un sistema particular sirven para comprender el comportamiento de muchos otros sistemas. Por citar un ejemplo, las fluctuaciones en los perfiles fisiológicos de individuos saludables muestran un

grado de correlación universal, al igual que lo hacen las acciones financieras.

Al estudiar fenómenos críticos surgió lo que se conoce como leyes de escalamiento, las cuales sirven para relacionar los diversos exponentes críticos de las transiciones de fase que caracterizan el comportamiento de los parámetros de orden y las funciones de respuesta.

En cuanto al concepto de *universalidad*, también surgió del estudio de fenómenos críticos. Existen distintas clases de universalidad, donde los exponentes críticos y las funciones de escalamiento son las mismas en la vecindad del punto crítico. Este hecho sugiere que al estudiar un problema dado, uno toma un sistema particular y el resultado que el estudio de este arroje será válido para todos los demás sistemas que pertenezcan a la misma clase de universalidad dada.

La universalidad del comportamiento crítico motivó la búsqueda de características de las fuerzas microscópicas entre las partículas, fundamentales para determinar los exponentes del punto crítico y sus funciones de escalamiento. Este es uno de los objetivos de lo que se conoce como *grupo de renormalización*. Estos estudios llevaron a la idea de que las ecuaciones que describen al sistema cambiarán cuando ocurre un cambio en la escala, y en el límite macroscópico sólo unas cuantas características 'relevantes' permanecerán constantes.

Cuando uno descubre la universalidad en un sistema dado, significa que un mecanismo profundo pero a la vez simple está en funcionamiento. Este cuadro conceptual ha llevado a expandir

los horizontes de investigación en estudios más interdisciplinarios arrojando resultados similares entre una gran gama de disciplinas en apariencia distintas. [15]

1.9 Mecánica Estadística No Extensiva

Actualmente, dentro del campo de la física estadística se está dando una situación en la que los postulados clásicos no son suficientes para explicar una gran variedad de fenómenos críticos y fuera de equilibrio que abundan en la naturaleza. A pesar del enorme éxito de la formulación de Boltzmann-Gibbs de la mecánica estadística, se sabe que no es completamente universal. Cierta tipo de ensamblajes físicos que involucran interacciones de largo alcance o estructuras (multi) fractales difícilmente pueden ser tratados bajo el marco de la mecánica estadística tradicional. [16]

Han surgido diversas teorías tratando de extender la mecánica estadística a estos dominios de los sistemas complejos, sin embargo, una de las teorías con mayor validez en la actualidad es la llamada *mecánica estadística no extensiva*, iniciada y desarrollada por el físico Constantino Tsallis en 1988. Esta teoría permite enfrentarse con este tipo de sistemas mediante una generalización de la estadística clásica en términos de la generalización del axioma de la extensividad hacia una mecánica estadística no extensiva, la cual, en ningún momento se contrapone con lo ya descubierto y estudiado en el último siglo.

Más aún, se ha encontrado que se puede construir una termodinámica generalizada basada en la entropía de Tsallis.

En particular, uno de los objetivos de este trabajo es explorar el estudio de cierto tipo de leyes de potencias en la naturaleza bajo el formalismo generalizado que brinda la mecánica estadística no extensiva.

CAPÍTULO 2

Leyes de Potencias

Existe una gran clase de fenómenos en lo que toman lugar leyes de potencias. En física estadística ocurren naturalmente en la vecindad de los puntos críticos en las transiciones de fase. Aunque evidente no está restringida la aparición de leyes de potencias a estos fenómenos vale la pena revisar algunos casos. [17]

2.1 Transición líquido – gas

La siguiente es una gráfica en general muestra una porción del espacio fase para un fluido. A una presión constante, el plano muestra la temperatura en función de la densidad. Debajo de la temperatura crítica T_c se encuentra la curva de coexistencia la cual indica que a una temperatura $t < T_c$ conforme aumenta la densidad, no es posible pasar de una fase gaseosa a una líquida sin pasar a través de una región de coexistencia entre las dos fases, es decir, un estado en el que existe una mezcla de gas y líquido. Arriba del punto crítico es posible pasar continuamente de una fase gaseosa a líquida conforme crece la densidad a una temperatura constante.

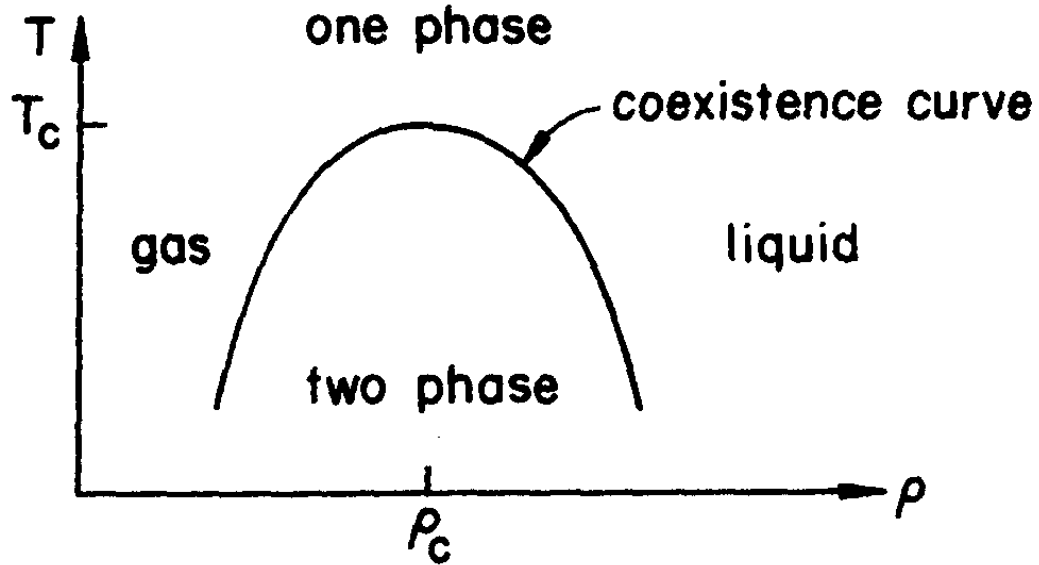


Fig. 2.1 Diagrama del plano fase de un fluido a presión constante

Experimentalmente se encuentra que en la vecindad del punto crítico, para el sulfurohexafluorido, la curva de coexistencia toma la forma de:

$$|\rho_+ - \rho_-| \propto |T - T_c|^{0.327 \pm 0.006} \quad [2.1]$$

Donde ρ_{\pm} son los valores de la densidad de la curva de coexistencia a ambos lados del punto crítico menos a T_c . El exponente 0.327 ± 0.006 es el exponente crítico, el cual no depende del fluido particular en estudio. Por ejemplo, experimentalmente también se ha encontrado que el exponente crítico para el ^3He es de 0.321 ± 0.006 .

2.2 Punto crítico magnético

Otro ejemplo interesante es el punto crítico de un ferromagneto. Considerando un magneto como un conjunto de dipolos magnéticos (espines) en los vértices de un arreglo cristalino, estos espines son capaces de intercambiar energía a través de las interacciones entre ellos. Para sistemas en equilibrio se define una temperatura T , la cual se alcanza si se espera el tiempo suficiente.

A altas temperaturas y sin campo externo, el sistema se encuentra en una fase paramagnética, es decir, al hacer un seguimiento de la evolución temporal de cualquier espín, se encontrará que apunta a todas direcciones con igual frecuencia, por lo que el momento magnético total del sistema es cero.

Sin embargo, debajo de una temperatura crítica T_c , los espines tienden a alinearse a lo largo de una dirección particular en el espacio, aún en ausencia de campo magnético externo. En este caso el sistema se encuentra en la fase ferromagnética con magnetización total $M(T)$. La magnetización es cero arriba de la transición y distinta de cero debajo de la temperatura crítica. Este tipo de imanes en su modo más simple son modelados por el modelo de Ising, por lo que se les llama ferromagnetos de Ising.

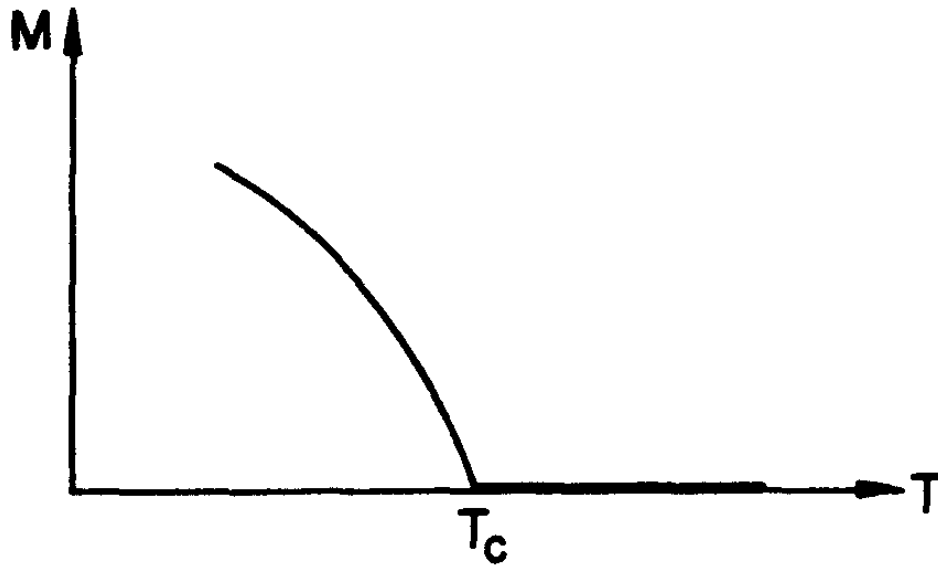


Fig. 2.2 Magnetización de un ferromagneto de Ising

La energía de interacción entre espines vecinos es menor cuando éstos apuntan en la misma dirección. Se ha encontrado experimentalmente que en la vecindad del punto crítico este tipo de sistemas (magneto DyAlO_3) exhibe el siguiente comportamiento cuando no existe campo magnético externo:

$$M \propto |T - T_c|^{0.311 \pm 0.005} \quad [2.2]$$

Como se puede ver, el exponente crítico es muy parecido al sistema gas líquido mencionado anteriormente, con una precisión experimental lo bastante certera.

2.3 Transición super fluida en ^4He

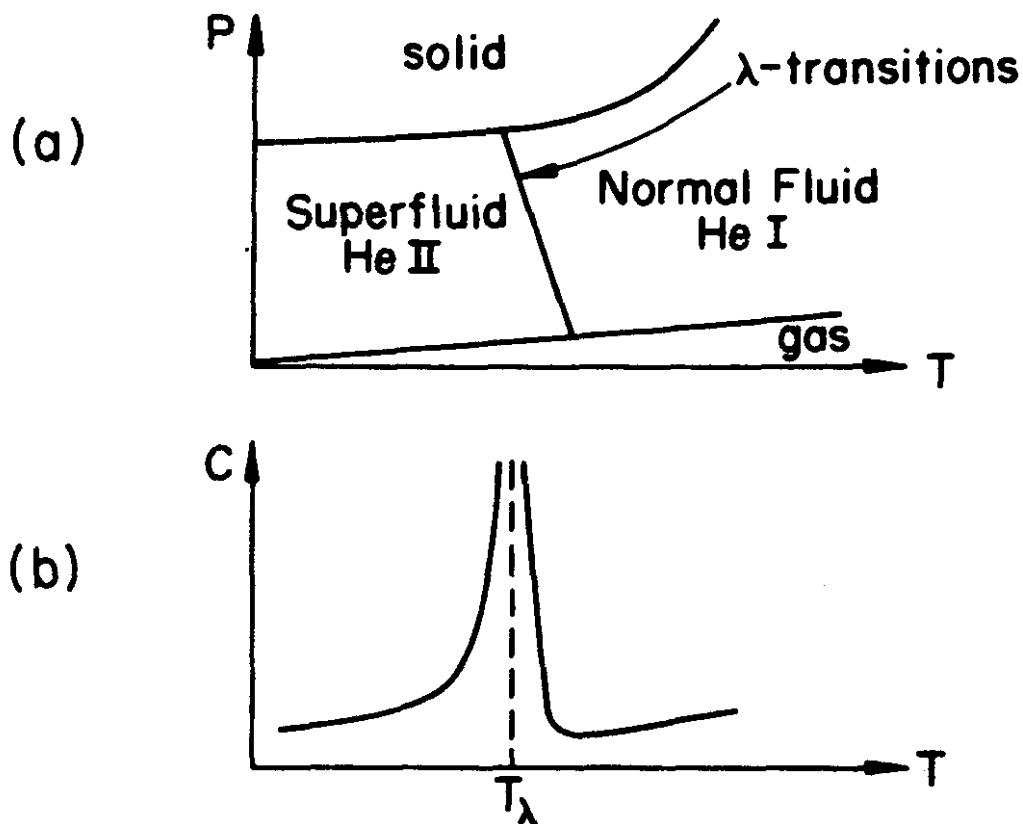


Fig. 2.3 (a) Diagrama de fase del ^4He

(b) Capacidad calorífica (C_p) como función de la temperatura en la transición λ , a una presión dada.

La figura anterior (a) ilustra parte del diagrama de fase para el ^4He . Para un rango de presiones desde cerca de cero hasta unas 25 atmósferas, el helio líquido atraviesa por una transición continua hacia un estado de superfluidez a una temperatura de alrededor 2K. Esta transición se le conoce como transición λ debido a la forma de la curva de la capacidad calorífica como función de la temperatura, como se muestra en la figura anterior (b). A temperatura de transición se le conoce como T_λ y depende del valor de la presión.

Un ajuste experimental preciso a la curva de capacidad calorífica encuentra que sigue un comportamiento del tipo:

$$C_p \propto |T_\lambda - T|^{0.013 \pm 0.003} \quad [2.3]$$

El comportamiento en ley de potencias en la vecindad de puntos críticos no está restringido a estos tres ejemplos, de hecho muchas cantidades observables exhiben un comportamiento de escalamiento y por tanto una ley de potencias. Sin embargo la aparición de leyes de potencias no está restringida a este tipo de fenómenos, como se verá más adelante.

El hecho de que dos sistemas físicos aparentemente distintos en su naturaleza compartan el mismo conjunto de exponentes críticos es lo que se conoce como universalidad. Se sabe que, en general, miembros que pertenecen a una misma clase de universalidad tienen tres cosas en común: el grupo de simetría del hamiltoniano que gobierna al sistema, la dimensionalidad y si las fuerzas son de largo o corto alcance.

2.4 Leyes de Potencias en la naturaleza

Regresando al tema de las leyes de potencias y profundizando en el estudio de los sistemas complejos, se tiene que distribuciones que se comportan en forma de ley de potencia se encuentran en situaciones y campos tan diversos como en física, biología, geografía, economía, lexicografía, internet, demografía, etc.

Distribuciones que siguen leyes de potencias son de la forma:

$$p(x) = Cx^{-\alpha} \quad [2.4]$$

Donde α es el exponente de la ley de potencia.

Las leyes de potencias muestran un comportamiento libre de escala y por lo tanto se puede esperar que se observe en muchos procesos que comprenden un comportamiento fractal o de escalamiento.

Ejemplos de leyes de potencias:

- Frecuencia de palabras: La frecuencia en la que las palabras en un texto aparecen siguen una distribución en ley de potencias, hecho que fue estudiado por Zipf. [18]
- Citas de papers científicos: Redner [19] estudió la estadística de las citas de papers de todas las publicaciones de Physical Review desde 1883 hasta 1993 permitiéndose así estudiar la evolución en el tiempo encontrando así que el número de citas a una publicación a lo largo del tiempo es consistente con una distribución en ley de potencias con exponente α cercano a -1 sobre un intervalo de tiempo de 2 – 20 años.
- Dinámica de la World Wide Web: Adamic y Huberman [20] obtuvieron que a partir de la dinámica evolutiva de la WWW mediante un planteamiento de variables estocásticas, el número de páginas por sitio de internet tiene una distribución libre de escala, es decir, de ley de potencias. De la misma forma, la distribución cumulativa del número de visitas a un sitio web sigue una ley de potencias.
- Riqueza de los estadounidenses más ricos: A partir de la lista de Forbes de la gente más rica de Estados Unidos, uno

- puede hacer una lista de rango-frecuencia, graficar, y encontrar que la distribución es una ley de potencias.
- Terremotos: Estudiando los intervalos de tiempo entre terremotos sucesivos tanto en California como en Japón, Abe y Suzuki [21] encontraron que los periodos de calma entre terremotos obedecen un comportamiento en forma de ley de potencia.
 - La distribución de tamaños de las firmas de Estados Unidos. Esta distribución es ampliamente estudiada por Axtell [22], donde muestra un claro comportamiento en ley de potencias sobre un rango bastante amplio de tamaños así como invariante en el tiempo.

2.5 Criticalidad auto organizada

. Una forma de explicar este comportamiento, la cual es ampliamente aceptada es mediante la teoría de *Criticalidad Auto-Organizada* (CAO) propuesta por Per Bak, la cual explica que este comportamiento es natural en la naturaleza; es decir, muchas propiedades ‘complejas’ que se observan en muchos y distintos fenómenos naturales emergen naturalmente a raíz de la dinámica de todo el sistema, es decir a partir de las interacciones entre todos los agentes se da pie a la formación de patrones, o diversas propiedades emergentes haciendo eco de la frase “El sistema es más que la suma de sus partes”. La tesis de la teoría de la CAO es que a través de estados metaestables, todo sistema disipativo en la naturaleza evoluciona naturalmente hacia un estado crítico,

en donde las correlaciones espaciales y temporales se vuelven cada vez más grandes. [23]

Las distribuciones en leyes de potencias aparecen en los estados críticos del sistema donde las correlaciones son de esta forma, análogas a una transición de fase de segundo orden. Según Bak, estos estados críticos son estados auto-organizados en el sentido que sus correlaciones temporales y espaciales tienen la forma de leyes de potencias.

Si se toma en cuenta un estado totalmente ordenado como el arreglo de átomos en un cristal así como un estado de total desorden donde no existe correlación alguna entre eventos que están separados espacial o temporalmente; entonces, es intuitivo que este estado crítico auto-organizado, propiedad de los sistemas complejos, estará situado en esta frágil frontera entre el orden y el desorden. Los estados caóticos pertenecen al lado de completo desorden por lo que no tiene sentido hablar de un comportamiento complejo en su totalidad, es decir, solo se puede entender en términos de sus propiedades locales. Únicamente en este borde es donde se observa un comportamiento puramente complejo en el sentido de que existen correlaciones muy largas que hacen que no se puedan reducir los grados de libertad infinitos del sistema. Es en este hecho lo que convierte a los estados críticos en un sistema complejo.

CAPÍTULO 3

Ley de Zipf y Ley de Benford

3.1 Ley de Zipf

Cómo se ilustra anteriormente, las leyes de potencias aparecen en muchos sistemas en la naturaleza. Un caso muy particular de estas es el ordenamiento rango-frecuencia, que, en muchos casos tiene un comportamiento de ley de potencia. A este tipo de comportamiento se le llama *Ley de Zipf* en honor al lingüista y filólogo estadounidense George Kingsley Zipf (1902-1950), quien en 1949 publica su libro “Human Behaviour and the Principle of Least Effort” en donde encuentra un cierto orden entre la frecuencia en que aparecen las palabras en corpus de textos de la lengua inglesa y el rango que ocupan según esta frecuencia.

Ilustrando el párrafo anterior, si se toman las palabras de algún texto en algún lenguaje específico y se le asigna a cada una un rango según su frecuencia, es decir, la más frecuente tendrá el rango 1, la segunda más frecuente el rango 2, y así sucesivamente, entonces, la distribución resultante será de la forma:

$$y = ax^{-\alpha} \quad [3.1]$$

Al obtener el logaritmo en ambos lados de la ecuación:

$$\ln(y) = \ln(a) - \alpha \ln(x) \quad [3.2]$$

Este es un resultado empírico, donde el exponente α tiene un valor cercano a la unidad.

Esto mismo sucede al hacer el ordenamiento rango-frecuencia de las ciudades más pobladas de cualquier país. Al hacer la gráfica del logaritmo del rango vs. logaritmo de la frecuencia o tamaño de la ciudad (población de cada ciudad) la resultante será una línea recta.

Y así como se habla de ciudades, también se puede observar este fenómeno en distintas áreas como las mencionadas anteriormente, en campos tan diversos como la economía, biología, lingüística, geología, etc.

Xavier Gabaix [24] esboza una posible explicación de la Ley de Zipf en términos estadísticos al mostrar que si distintas ciudades crecen aleatoriamente con la misma tasa de crecimiento esperada y la misma varianza, entonces la distribución límite de tamaño de ciudades va a converger automáticamente como obedeciendo a la Ley de Zipf. A dicha homogeneidad en el proceso de crecimiento se le conoce como Ley de Gibrat.

A partir de los datos de las poblaciones de las principales ciudades de Estados Unidos [25] con una población mayor a los cien mil habitantes, se obtuvieron las siguientes gráficas, donde se encuentra, al ajustar la curva más adecuada, la recta esperada. La ciudad con el rango 1 es Nueva York con una población de 8,143,197 habitantes, y la última es Cambridge, Massachussets, en el lugar 261 con una población de 100,135 habitantes.

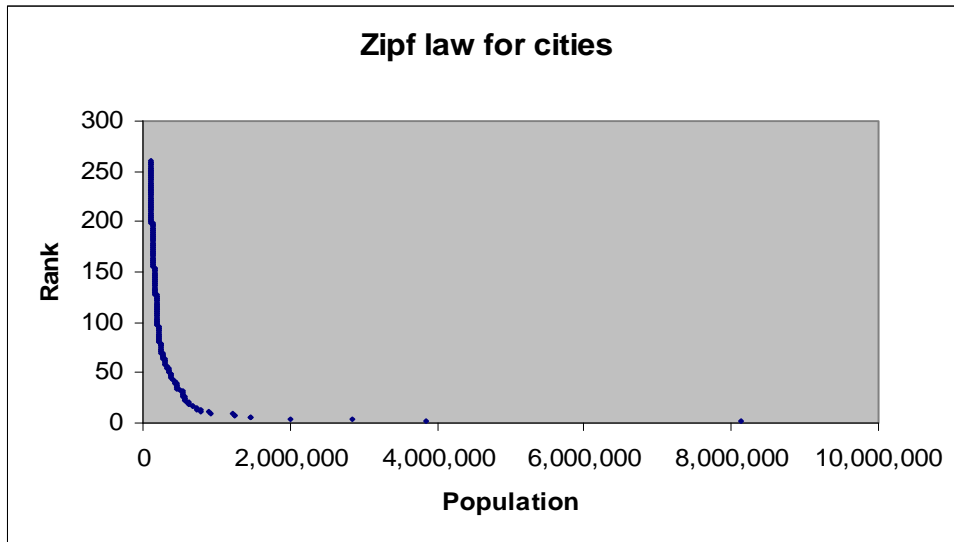


Fig. 3.1. Ley de Zipf

Gráfica de rango vs. Ciudades más pobladas. Cada punto de la gráfica representa una ciudad de Estados Unidos. El eje horizontal es la población de cada ciudad y en el eje vertical se observa el rango respectivo que ocupa.

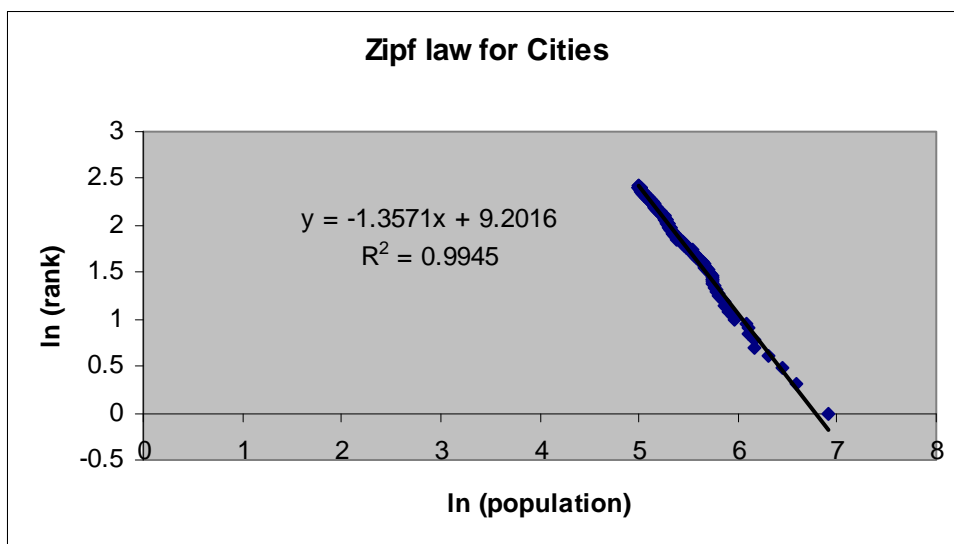


Fig 3.2. Zipf para ciudades

Misma gráfica anterior pero en escala logarítmica donde se aprecia claramente la recta que se forma al ajustar los puntos a una curva.

El exponente α resulta ser para este caso 1.35, valor cercano a la unidad.

De la misma forma, se hace el mismo análisis para la frecuencia de aparición de palabras en un texto. En este caso, se tomó una lista de rango-frecuencia para todo el corpus inglés donde la palabra más frecuente resulta ser 'the' y la menos frecuente (utilizando las palabras que aparecían un mínimo de 75 veces) es Mr. [26]

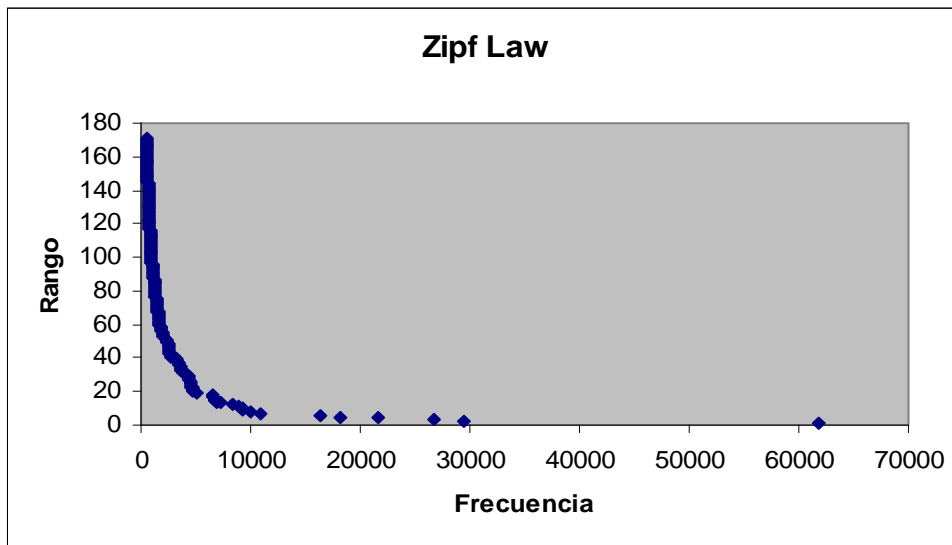


Fig. 3.3. Ley de Zipf para palabras

Cada punto de la gráfica representa una palabra ordenada por la frecuencia por cada millón de palabras que aparece en el Corpus contra su respectivo rango, donde el rango 1 corresponde con la palabra más frecuente, y así sucesivamente.

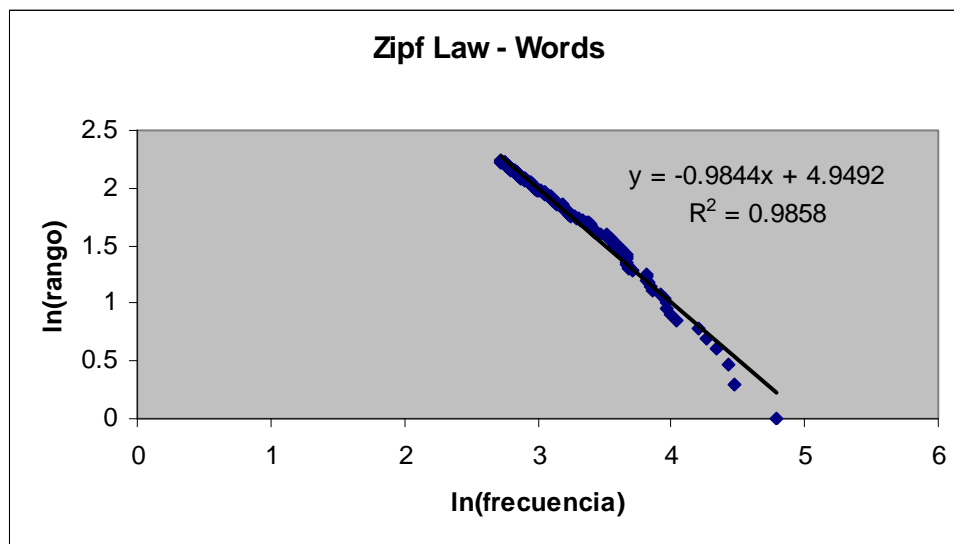


Fig. 3.4. Zipf para palabras en escala logarítmica

Esta gráfica representa el ordenamiento rango-frecuencia de las palabras en el Corpus inglés en escala logarítmica y la recta que se ajusta a los puntos con una gran precisión.

En la segunda gráfica se observa la ecuación de la recta ajustada por el método de mínimos cuadrados, con un exponente α de 0.98, es decir, una vez más muy cercano a la unidad.

En la literatura existe una amplia variedad de artículos acerca de la aparición de leyes de potencias en la naturaleza y su relación con la Ley de Zipf, como muestra de su popularidad a continuación se cita distintos ejemplos.

Abe y Suzuki [27] estudiaron el fenómeno de terremotos asociándole una naturaleza libre de escala en relación con los

tiempos de calma entre terremotos sucesivos tanto en California como en Japón.

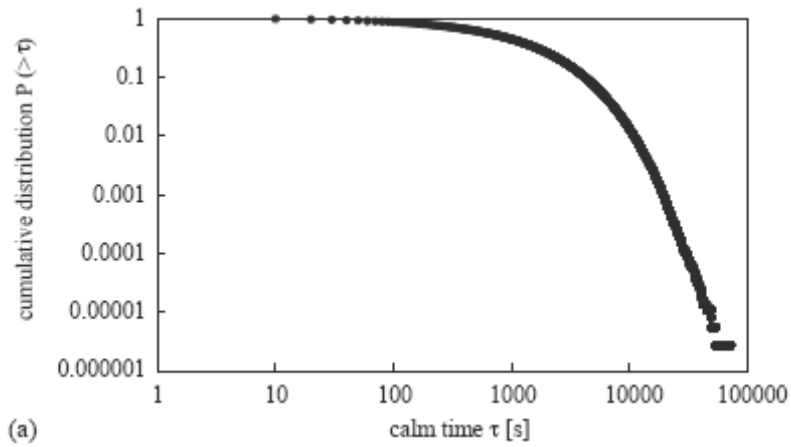


Fig. 3.5. Distribución acumulativa de los tiempos de calma entre terremotos en California

La gráfica log-log de los tiempos de calma en California. El histograma fue realizado a partir de intervalos iguales de tiempo de 10s.

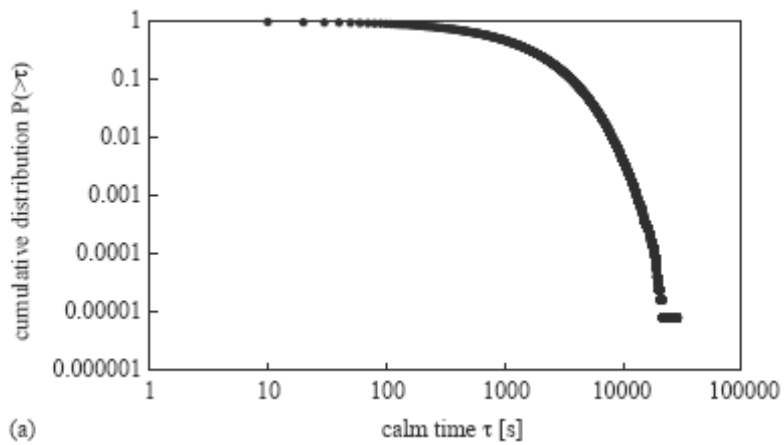


Fig. 3.6. Distribución acumulativa de los tiempos de calma entre terremotos en Japón

La gráfica log-log de los tiempos de calma en Japón. El hisograma fue realizado a partir de intervalos iguales de tiempo de 10s. Se observa claramente que la curva obedece la ley de Zipf.

Robledo y Baldovin [28] al estudiar la dinámica en el borde del caos para el mapeo logístico encuentran que consiste de trayectorias hechas de leyes de potencia iterconectadas.

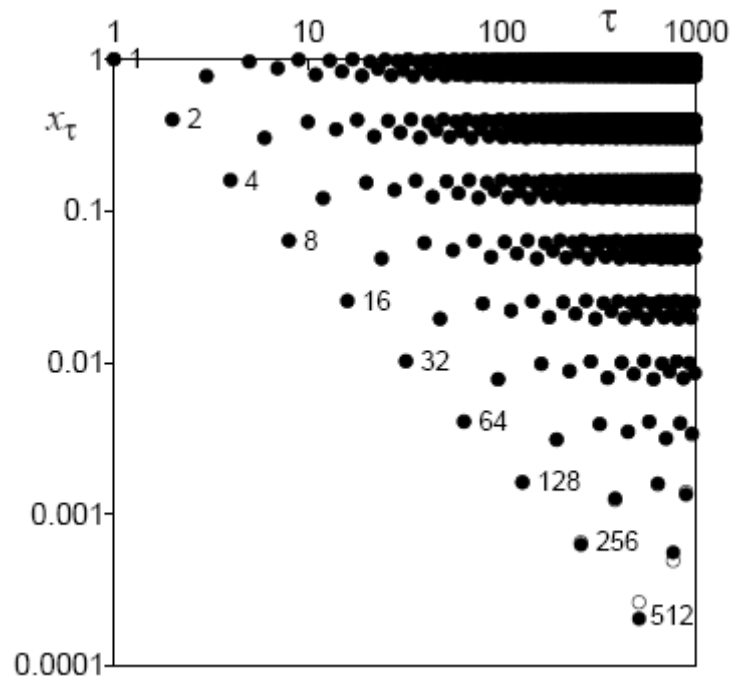


Fig. 3.7. Dinámica del mapeo logístico en el borde del caos

Se grafican los valores absolutos de las posiciones para las primeras 1000 iteraciones para dos trayectorias del mapeo logístico con condición inicial $x_0=0$ (círculos vacíos) y $x_0=10^{-4}$ (círculos negros) en escala logarítmica. Se aprecia claramente el decaimiento en ley de potencias de tiempos subsecuentes.

Newman y Eble [29] demuestran, a partir de datos fósiles conocidos, que la tasa de extinción durante la Fanerozoico se

puede parametrizar de forma precisa por una escala logarítmica a la extinción total acumulativa.

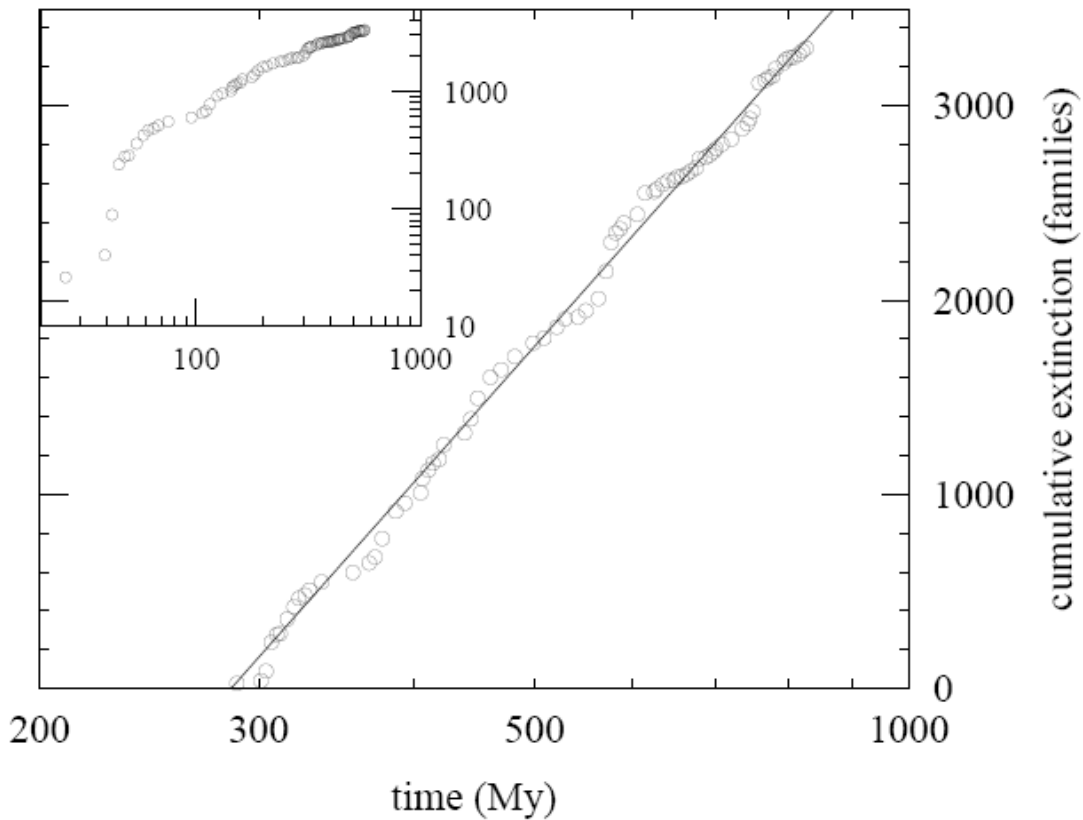


Fig. 3.8. La intensidad acumulativa de extinciones como función del tiempo en el Fanerozoico.

En escala lineal-log se observa la extinción acumulativa de familias de especies durante el Fanerozoico como función del tiempo en unidades de millones de años. La curva que mejor se ajusta a los datos es la línea recta observada.

Una aplicación de la ley de Zipf a la geología la brindan Merriam et al. [30] Al estudiar los depósitos de petróleo para tabular una gráfica de rango contra el tamaño de los depósitos como una forma de determinar cuantos depósitos permanecen sin descubrir.

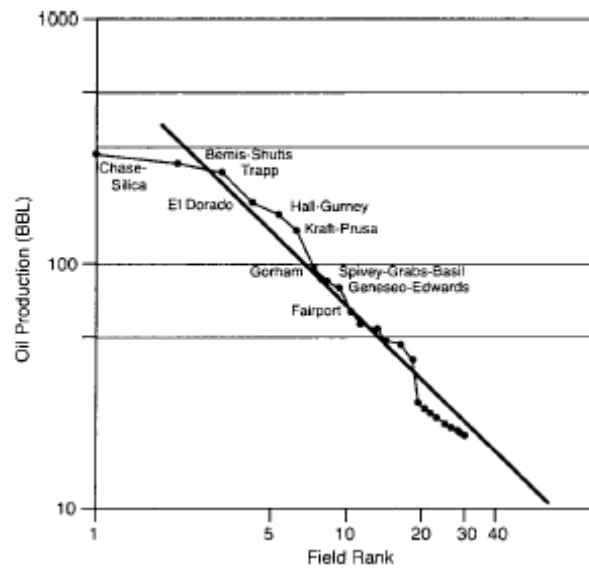


Fig. 3.9. Producción acumulativa de petróleo por yacimiento

La gráfica muestra, en escalas logarítmicas, la producción acumulativa de petróleo por yacimiento en la zona de Kansas y Texas, en los Estados Unidos. La producción de petróleo es medida en barriles (BBL). La recta ajustada sigue un patrón acorde con la Ley de Zipf.

Klass et al. [31] Estudian la lista de las 400 personas más ricas en los Estados Unidos de acuerdo a la revista Forbes durante 1988-2003. Encuentran regularidades estadísticas acordes con una distribución en ley de potencias.

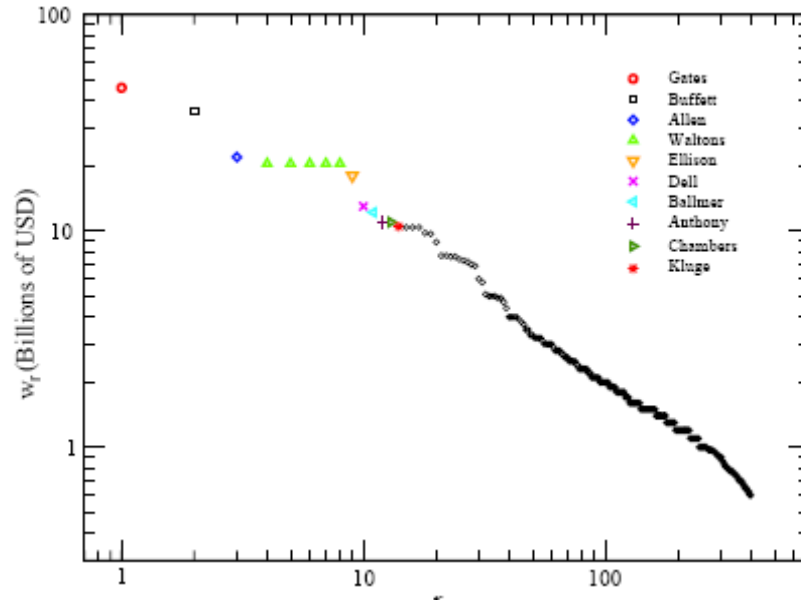


Fig. 3.10. Las 400 personas más ricas de Estados Unidos

En un ordenamiento rango-frecuencia, se grafican las riquezas de las 400 personas más ricas de Estados Unidos en 2003 lideradas por Bill Gates. Al ajustar una curva a estos datos se encuentra un exponente de $\alpha=1.22$ para la ley de potencias obtenida.

Robert Axtell [32] estudia el tamaño de firmas en Estados Unidos, encontrando que la Ley de Zipf describe el fenómeno observado, la aparición de leyes de potencias.

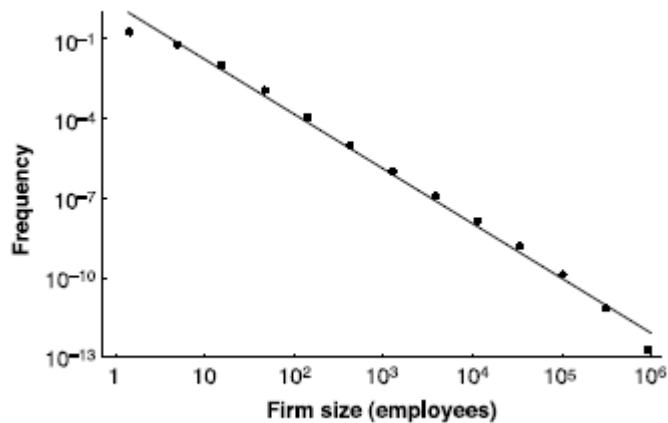
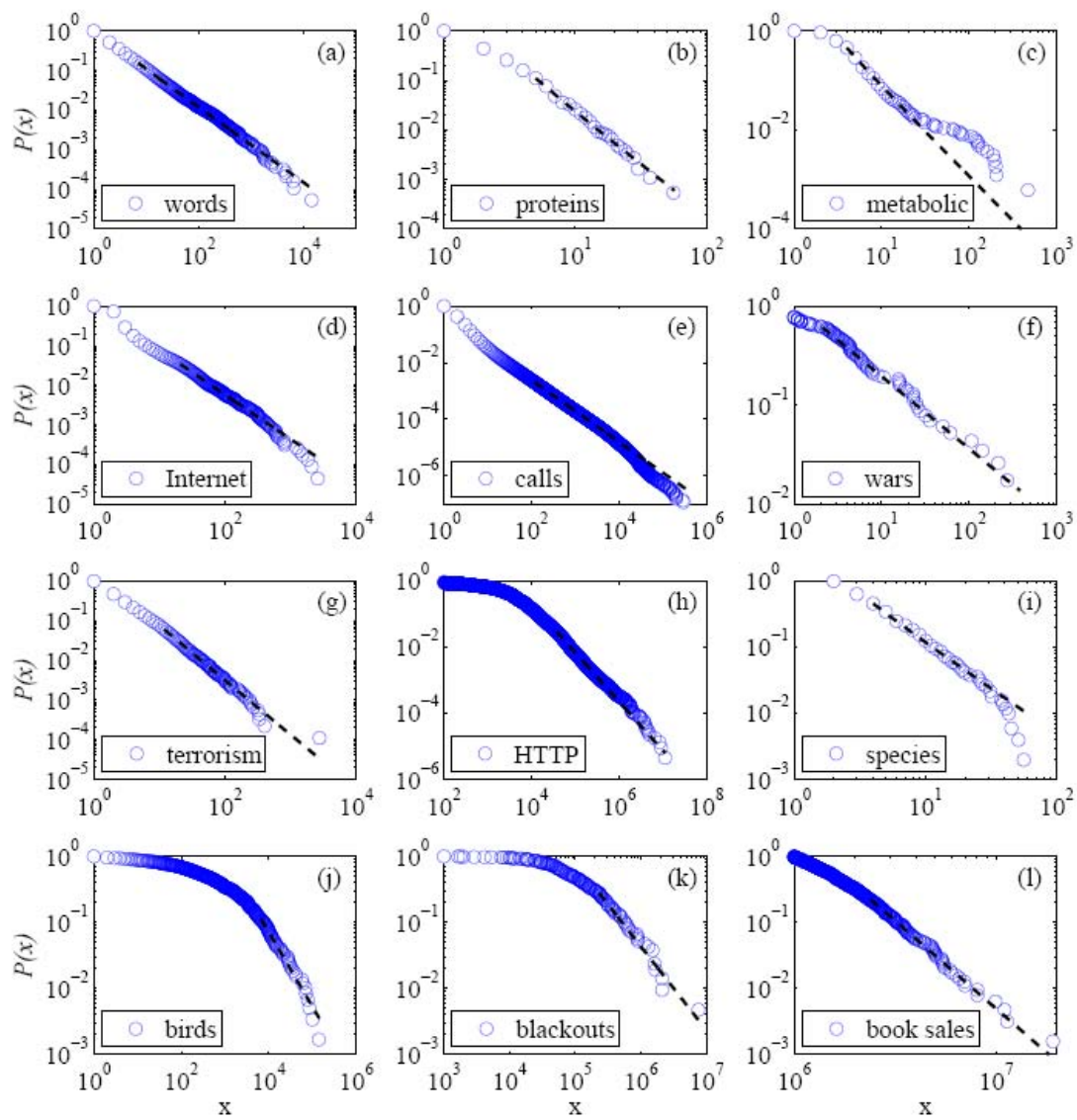


Fig. 3.11. Tamaño de firmas en E.U. en un ordenamiento rango-frecuencia

Se mide el tamaño de una firma con base en el número de empleados. Esta curva se ajusta de forma espectacular a una recta en escalas logarítmicas. Los datos son de la Oficina de Censos de Estados Unidos correspondientes a 1997.

El exponente correspondiente a la ley de potencias es de $\alpha=1.059$.

Finalmente, Aaron Clauset et al. [33] Realizaron recientemente un extenso análisis acerca de la aparición de leyes de potencias empíricas en la naturaleza estudiando una gran cantidad de fenómenos.



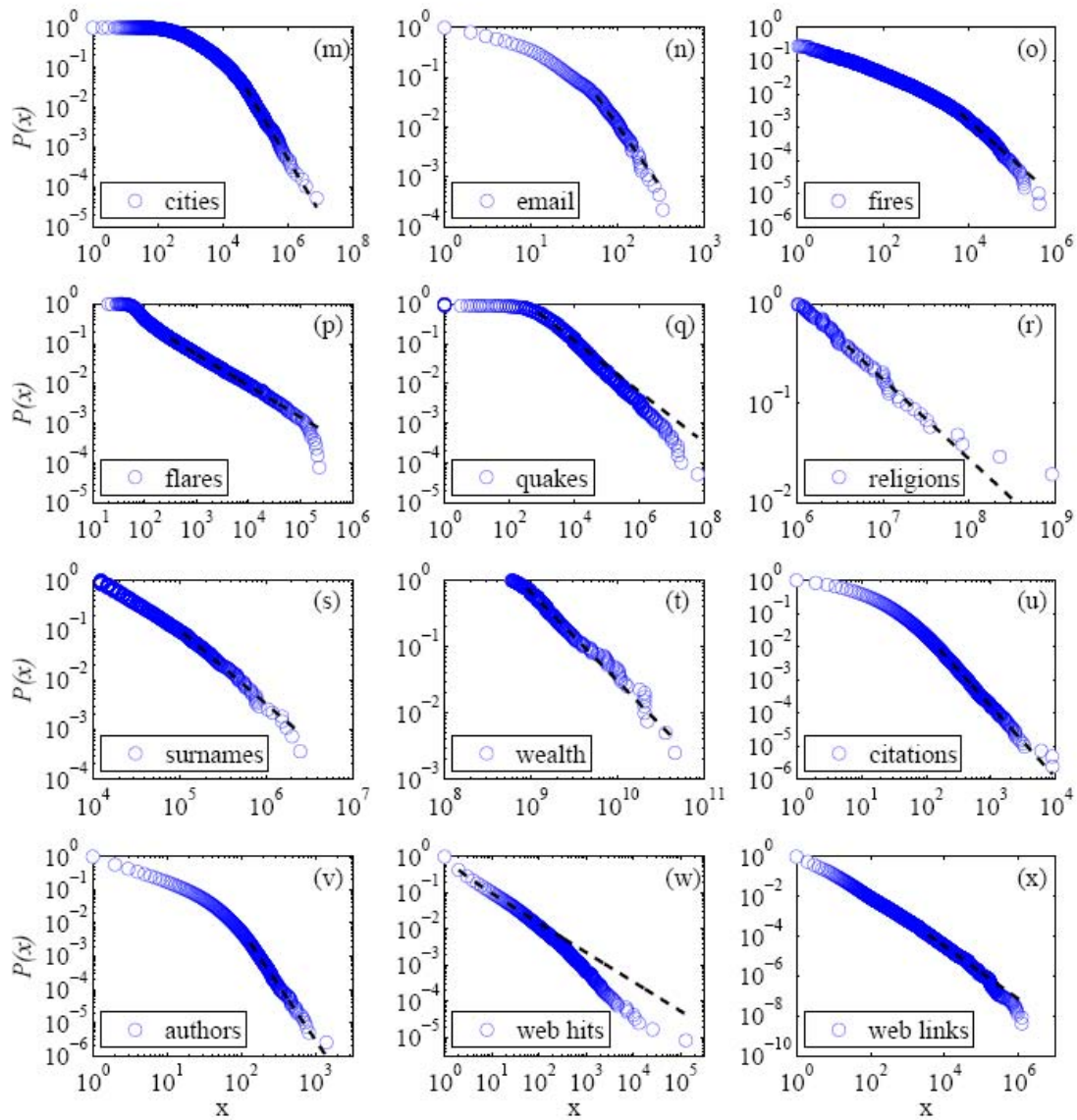


Fig. 3.12. Leyes de Potencias en la naturaleza

En estas gráficas se observan las funciones de distribución acumulativas $P(x)$ con la ley de potencias que mejor se ajusta a los datos. (a) La frecuencia de ocurrencia de palabras únicas en la novela *Moby Dick* de Herman Melville. (b) El grado de distribución de proteínas en la red de interacción de proteínas de la levadura *S. cerevisiae*. (c) La distribución de metabolitos en la red metabólica de la bacteria *E. coli*. (d) El grado de distribución de sistemas autónomos (grupos de computadoras bajo un control administrativo independiente) en internet. (e) El número de llamadas recibidas por clientes en

Estados Unidos del servicio de AT&T de larga distancia. (f) La intensidad de guerras en el mundo de 1816 a 1980 medidas como el número de muertes en batalla por cada 10000 individuos de las poblaciones conjuntas de las naciones en conflicto. (g) La intensidad de ataques terroristas en todo el mundo desde febrero de 1968 a junio de 2006 medido en función del número de muertes causadas. (h) El tamaño en bits de conexiones http de un laboratorio de investigación. (i) El número de especies por género de la clase de los mamíferos durante el periodo Cuaternario. (j) La frecuencia de avistamientos de especies de aves en los Estados Unidos. (k) El número de clientes afectados por interrupciones eléctricas masivas en Estados Unidos. (l) Volumen de ventas de los libros más vendidos en Estados Unidos. (m) Población de ciudades en Estados Unidos. (n) Registro de flujo de e-mails en una universidad. (o) Número de acres afectados por los incendios en California. (p) Intensidad de manchas solares. (q) Intensidad de terremotos. (r) Número de miembros en sectas religiosas. (s) Frecuencias de nombres propios en Estados Unidos. (t) Riqueza neta (en USD) de los ciudadanos estadounidenses más ricos. (u) Número de citas recibidas por artículos científicos publicados. (v) El número de autores de artículos científicos publicados. (w) El número de visitas a sitios web de los usuarios de AOL. (x) El número de hipervínculos a sitios web. □

3.2 Ley de Benford

Otra Ley de Potencias con un gran interés es la llamada *Ley de Benford* o también conocida como la “Ley del primer dígito”. El nombre viene del físico estadounidense Frank Benford quién la formuló en 1938, aunque ya había sido conocida por el astrónomo y matemático canadiense Simon Newcomb desde 1881. Sin embargo, la primera formulación y prueba rigurosa se le atribuye a Theodore P. Hill en 1988. [34]

Esta ley establece que la distribución en la que aparecen los primeros dígitos en series numéricas (en notación decimal) de una gran variedad de fuentes distintas muestra una marcada asimetría en el sentido de que existe una fuerte disposición sobre los dígitos pequeños sobre los más grandes. Esto quiere decir que, en general, se encuentra que los primeros tres enteros 1 al 3 tienen una frecuencia de 60% mientras que los seis dígitos restantes (4-9) aparecen en sólo un 40% de los casos. [35]

Esta ley se encuentra en una gran variedad de casos de series numéricas en la naturaleza, y se utiliza especialmente para detectar datos fraudulentos. Ian Gent y Toby Walsh demostraron que la Ley de Benford describe también una gran variedad de fenómenos computacionales. [36]

La distribución a la que condujo las observaciones de Benford para la ocurrencia del primer dígito es:

$$P(n) = \log [(n+1)/n] \quad [3.3]$$

Donde $n=1,2,\dots,9$ es el primer dígito.

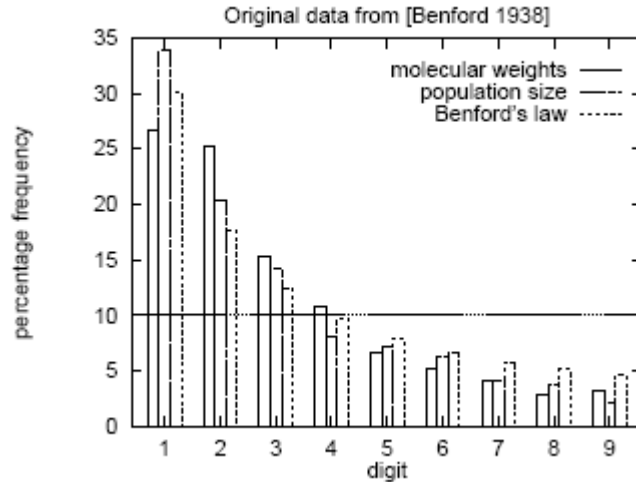


Fig. 3.13. Distribución de primeros dígitos recabada por Benford (1939) Distribución de primeros dígitos a partir de los datos obtenidos en el artículo original de Benford en 1938. Los datos correspondientes a pesos moleculares (molecular wights) es una muestra de 1800 pesos moleculares distintos. Tamaño de población (population size) corresponde a datos obtenidos a partir de 3 259 poblaciones distintas.

La gráfica anterior, obtenida del artículo de Get y Walsh muestra una clara tendencia de la distribución de primeros dígitos en acomodarse en forma de una ley de potencia. Los datos originales que recabó Benford en 1938 en su artículo original se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.1. Distribución de primeros dígitos tomados por Benford (1938) para distintos tipos de datos [37]

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Muestras
Área de ríos	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
Poblaciones	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
Constantes	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
Periódicos	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
Calores específicos	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
Presión	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
Pérdoda de H.P.	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
Pesos moleculares	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800

Drenajes	27. 1	23. 9	13. 8	12. 6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
Pesos atómicos	47. 2	18. 7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
n^{-1}, \sqrt{n}	25. 7	20. 3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
Diseños	26. 8	14. 8	14. 3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
Reader's Digest	33. 4	18. 5	12. 4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
Costos	32. 4	18. 8	10. 1	10. 1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
Voltaje de rayos X	27. 9	17. 5	14. 4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
Liga America na de Béisbol	32. 7	17. 6	12. 6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Cuerpo negro	31. 0	17. 3	14. 1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165

Direcciones	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
$n^1, n^2, \dots, n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
Tasa de defunción	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
Promedio	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
Error	± 0.8	± 0.4	± 0.4	± 0.3	± 0.2	± 0.2	± 0.2	± 0.2	± 0.3	

Las aplicaciones de la Ley de Benford son vastas, siendo una de las más importantes la creación de software de detección de fraudes basando en esta ley y usado para agencias de recaudación de impuestos tanto gubernamentales como bancarias.

Hill [38], matemático, en 1995 demostró la Ley de Benford, así como sus aplicaciones a datos del mercado de valores y de acciones, estadística de censos, entre otros datos. Notó que, al igual que la distribución normal, la distribución de Benford es un fenómeno empírico observable. Su demostración se basa en que los números de los conjuntos que forman la distribución de

Benford son distribuciones de segunda generación, es decir, combinaciones de otras distribuciones. Si los datos de muestreo fueran elegidos aleatoriamente de distribuciones que a su vez son aleatorias, entonces, las frecuencias de aparición del primer dígito obedecería la ley de Benford aun cuando las distribuciones individuales puedan no obedecer dicha ley.

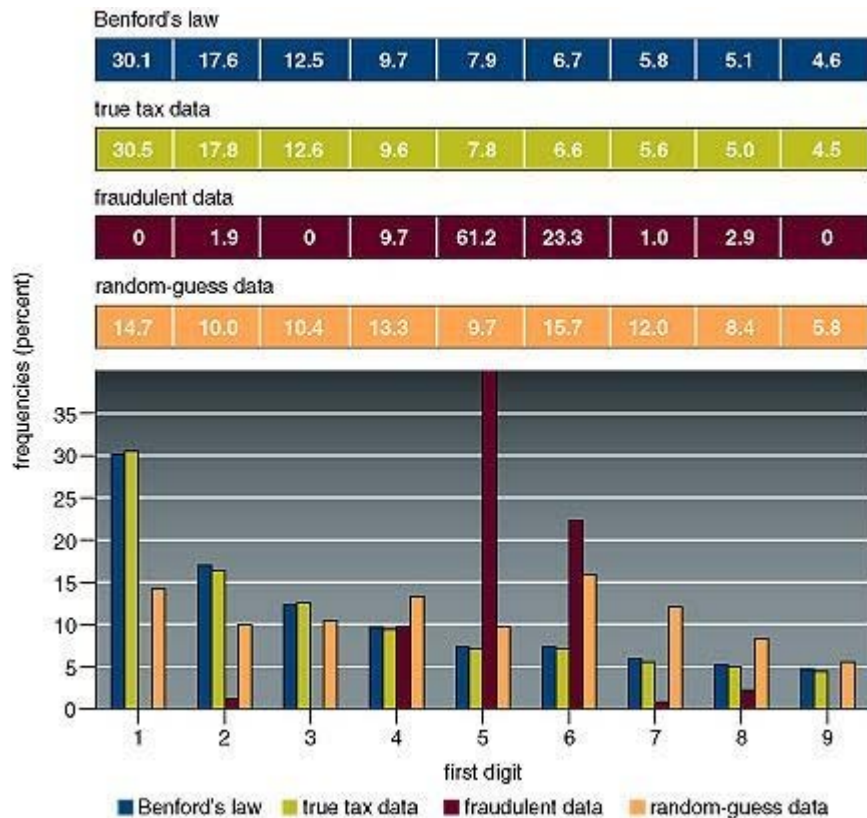


Fig. 3.14. La ley de Benford es usada para detectar datos fraudulentos en reportes fiscales. [39]

Esta gráfica nos muestra la precisión con la que la Ley de Benford es asociada con datos verídicos de recabación de impuestos; haciendo clara su utilidad como método de detección de fraudes.

En la gráfica 3.14 se observa una clara aplicación de la Ley de Benford, donde se aprecia la frecuencia en porcentajes de aparición del primer dígito. Los datos verdaderos de impuestos fueron tomados por Mark Nigrini de los archivos IRS en Estados Unidos. Los datos de declaración de impuestos fraudulentos ilustrados en la figura corresponden a datos de una oficina de gobierno del condado Kings en Nueva Cork. De la misma forma, datos tomados por Hill de manera aleatoria, los cuales claramente no obedecen la ley de Benford.

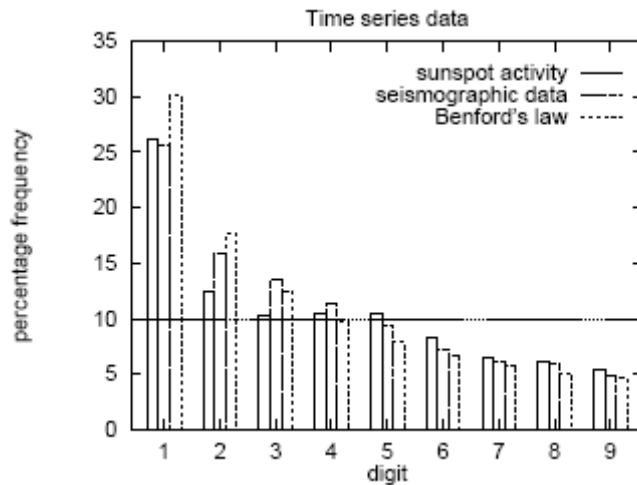


Fig. 3.15. Ley de Benford en series de tiempo.

Gent y Walsh, de la misma forma estudiaron datos de series de tiempo. La gráfica correspondiente a la actividad de manchas solares (sunspot activity) corresponde a 2,820 datos obtenidos mensualmente en Zúrci de 1749 a 1983. Los datos sismográficos corresponden a datos de la actividad sísmica en la región australiana de Tasmania de un terremoto con multitud de réplicas ocurrido el 16 de enero de 1995.

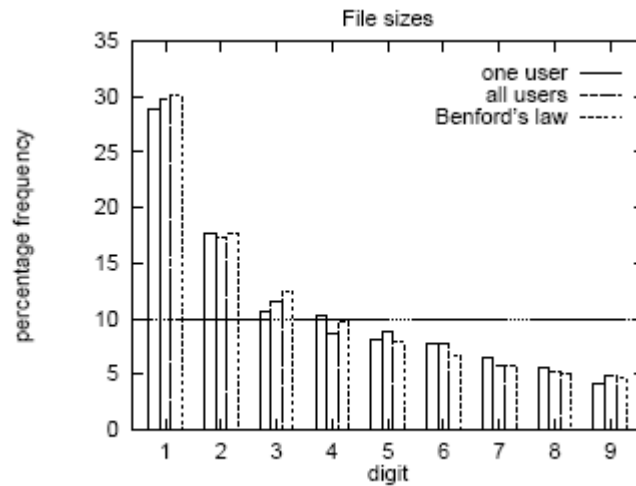


Fig. 3.16. Primeros dígitos en la distribución de archivos computacionales
 Distribución de primeros dígitos hecha por Gent y Walsh en el tamaño de los
 archivos de una computadora Sun Ultra 10 corriendo el sistema operativo
 Solares. Se observan los datos correspondientes a los archivos de un solo
 usuario de la computadora como de todos los usuarios, y se compara con la ley
 de Benford observando una clara tendencia a obedecerla.

Mecánica Estadística No Extensiva

La mecánica estadística se fundamenta en una descripción probabilística de sistemas macroscópicos que reflejan una dinámica basada en el comportamiento microscópico. Si en el espacio fase se conserva el supuesto de ergodicidad, entonces tenemos la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs.

Cuando es violado el principio de ergodicidad, se tiene que el espacio fase está ocupado de forma incompleta, dando lugar a una estructura fractal del mismo en donde ya no tiene cabida la estadística clásica de Boltzmann-Gibbs dando lugar a nuevas y posibles formas de describir estas situaciones.

La *mecánica estadística no extensiva* es un formalismo creado como una generalización de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs fundamentado, como su nombre lo indica, en una cierta entropía que resulta ser no extensiva. Este formalismo fue propuesto como una forma para tratar sistemas que presentar un comportamiento en cierta forma anómalo como lo son los sistemas no ergódicos; sistemas que exhiben interacciones de largo alcance, caos espacio-temporal en donde la estadística de Boltzmann-Gibbs presenta un gran problema o simplemente es inaplicable.

Esta teoría, nacida en 1988 a partir de las ideas de Constantino Tsallis [40] y la cual se enfoca en el concepto de entropía y la manera apropiada de tratar sistemas complejos, ha gozado de un relativo éxito en una variedad de sistemas en áreas como la biología, economía, lingüística, la física de turbulencias, entre otros campos. [41]

La mecánica estadística clásica está basada en el principio de Boltzmann:

$$S = k \ln W$$

Donde la optimización de esta entropía nos arroja la distribución de probabilidad correcta para los estados microscópicos del estado macroscópico estacionario del sistema. Esta entropía entonces toma la forma de:

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad [4.1]$$

donde,

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad [4.2]$$

Para un número de microestados W , cada uno con probabilidad de ocupación p_i . En el caso de tener probabilidades iguales, es decir, $p_i = 1/W \quad \forall i$, esta entropía alcanza su valor máximo. Para sistemas ergódicos esta forma de entropía resulta totalmente correcta.

Aunque no se ha encontrado una forma sistemática para determinar la forma entrópica necesaria para sistemas no ergódicos, se ha propuesto la generalización del formalismo de

Boltzmann-Gibbs basado en una estructura fractal del espacio base con la siguiente forma:

$$S_q = \sum_j p_j \ln_q(1/p_j) \quad [4.3]$$

Donde se introdujo el q-logaritmo, definido como:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad \text{para } x > 0. \quad [4.4]$$

Por lo que:

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} \quad [4.5]$$

De igual forma, se puede derivar la función q-exponencial: [42]

$$e_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad [4.6]$$

Cabe recordar que por razones de simplicidad se iguala la constante de Boltzmann a la unidad. Esta teoría ha sido probada para una gran cantidad de fenómenos y ajustada exitosamente a ellos, ejemplos van desde la física, biología, sistemas económicos y sociales, además de muchos desarrollos teóricos como los resultados analíticos exactos dados por Robledo y Baldovin estudiando la dinámica en el borde del caos del mapa logístico. [43]

De igual manera, es particularmente exitosa para sistemas con interacciones de gran alcance, como por ejemplo en el modelo de Ising para ferromagnetos en una dimensión con interacción a gran escala. Dado que propiedades no extensivas aparecen de forma natural en este tipo de sistemas, Salazar y Toral [44] encontraron que la energía interna, magnetización, entropía y la energía libre obedecen leyes de escalamiento no triviales con la

temperatura T y el número de elementos N . Dichas leyes dependen del valor del parámetro q .

Cuando $q=1$ la ecuación (4.5) reproduce exactamente el resultado clásico conocido de BG (ecuación (4.1)). Esto se puede verificar fácilmente de la siguiente manera:

Expresamos p_i^q como:

$$\begin{aligned} p_i^q &= e^{q \ln p_i} (p_i p_i^{-1}) \\ &= e^{q \ln p_i} p_i (e^{-\ln p_i}) \\ &= p_i e^{(q-1) \ln p_i} \end{aligned}$$

expandiendo la exponencial en su serie de Taylor alrededor de $q=1$ se llega a que:

$$p_i^q \approx p_i [1 + (q-1) \ln p_i] \xrightarrow{q \rightarrow 1} p_i$$

Lo cuál es en correspondencia con la ecuación (4.1).

Se observa también que para valores grandes de x la función q -exponencial exhibe un comportamiento en ley de potencias de forma asintótica:

$$e_q(x) \approx \frac{1}{x^{1/(q-1)}} \quad [4.7]$$

La forma no negativa de S_q alcanza su valor extremo cuando existe equiprobabilidad, obteniéndose así:

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{q-1} \quad [4.8]$$

Lo cuál, para $q > 0$ corresponde a un máximo. En cambio, se obtiene un valor mínimo para $q < 0$.

También se puede verificar la no extensividad de esta nueva forma de entropía en el sentido de que, basado en la teoría de

probabilidades se sabe que para dos sistemas independientes A y B tal que $p_{il}^{A+B} = p_i^A p_j^B$, entonces:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad [4.9]$$

Con lo que se observa que en el caso en que $q=1$, se cumple que la entropía es extensiva. En otros términos, se está ante una generalización de los resultados clásicos. Cabe mencionar, sin embargo, que en los casos en los que A y B no son independientes no necesariamente se cumple la ecuación (4.9).

Regresando al caso de interacciones a gran escala entre los componentes del sistema, la cual es una característica de muchos sistemas físicos e implica correlaciones globales, implica que la composición de sistemas no puede seguir adelante bajo la suposición de independencia de probabilidades; por lo que la aparición de la no extensividad parece esencial para dar una descripción precisa de muchos fenómenos naturales.

García-Morales y Pellicer [45] demuestran como, a partir de la fractalidad del espacio fase, se obtiene la teoría no extensiva de forma natural como una generalización de la termo-estadística estándar de Boltzmann-Gibbs.

Si se considera un sistema de N partículas aisladas del exterior por paredes rígidas, impermeables y adiabáticas. Sea un espacio fase de volumen Ω que contiene todas las configuraciones posibles en las que el sistema puede estar. Dichas configuraciones son pequeñas celdas de volumen $\sim h^{3N}$ en las que está subdividido el espacio fase.

Sean $Q_i(t)$ y $P_i(t)$ las posiciones y momentos generalizados que son soluciones de las ecuaciones de las $6N$ ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i}\end{aligned}\quad [4.10]$$

Entonces, el número total de celdas visitada por una trayectoria de movimiento dada en un intervalo de tiempo T se puede obtener de manera exacta con la siguiente cantidad:

$$\int_0^T dt \int_{\Omega} \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}} \left| \dot{Q}_i \right| \left| \dot{P}_i \right| \delta(H(\omega) - E) \delta(p_i - P_i) \delta(q_i - Q_i) \quad [4.11]$$

Dado que el sistema se encuentra perfectamente aislado, el espacio fase disponible será una superficie de energía constante Γ dentro del volumen Ω ; por lo que el espacio fase visitado por la trayectoria estará inmerso en Γ . Las deltas de Dirac de la ecuación (4.11) señalan que únicamente los puntos a lo largo de la trayectoria mecánica contribuyen a las integrales.

García-Morales y Pellicer definen lo que llaman *microestados reales* $\tilde{\Gamma}$ como:

$$\tilde{\Gamma} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \int_{\Omega} \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}} \left| \dot{Q}_i \right| \left| \dot{P}_i \right| \delta(H(\omega) - E) \delta(p_i - P_i) \delta(q_i - Q_i) \quad [4.12]$$

E introducen la medida microcanónica suave Γ , o, a palabras de los autores, los *microestados de Boltzmann*:

$$\Gamma = \int_{\Omega} \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}} \delta(H(\omega) - E) \quad [4.13]$$

Comparando las ecuaciones (4.12) y (4.13), se observa que el sistema es ergódico si $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. En otras palabras, el sistema será ergódico cuando:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}} \left| \dot{Q}_i \right| \left| \dot{P}_i \right| \delta(p_i - P_i) \delta(q_i - Q_i) = 1 \quad [4.14]$$

Esto quiere decir que, en el límite de tiempos muy grandes, la trayectoria llena densamente la superficie de energía constante. Para comprender este razonamiento debe entenderse claramente que el límite $T \rightarrow \infty$ se refiere a un tiempo lo suficientemente grande como para hacer de un punto en el espacio fase (la descripción *microscópica* del sistema) una trayectoria lo suficientemente larga para ser considerada como un objeto geométrico *macroscópico* (pensándolo como un sistema de muchas partículas a una temperatura finita). Este tiempo se aplica para cuando la trayectoria se ha esparcido en su máximo sobre la superficie del espacio fase.

La ergodicidad es la propiedad que nos permite pasar de una descripción mecánica del sistema a una descripción estadística, por lo que es interesante preguntarse que es lo que sucede cuando se pierde la ergodicidad; es decir, cuando $\tilde{\Gamma} \neq \Gamma$. Si es posible encontrar $\tilde{\Gamma}$ como función de Γ , de la forma $\tilde{\Gamma} = \mathcal{N}(\Gamma)$ se puede, todavía, dar una descripción estadística relativamente simple, siempre y cuando la trayectoria sea una curva fractal. Si la dimensión de dicha curva es $d (\equiv D/6N$ tal que $0 \leq d \leq 1$) y dado que el volumen Δ ($\propto 1/\Gamma$) de cada celda del espacio fase es infinitesimalmente pequeña, se tiene:

$$\mathcal{N}(\Gamma) \propto \Gamma^d \quad [4.15]$$

Por lo que el espacio fase disponible es un objeto fractal dentro del espacio fase de dimensión $6N$ que sigue una estadística de Boltzmann. La ergodicidad se recupera cuando $d=1$.

En el aspecto termodinámico, se tiene que cuando se está fuera de equilibrio, el cambio en el número de microestados suaves de un sistema es directamente proporcional al número de microestados reales de la trayectoria. En otras palabras, la superficie de energía y la trayectoria del sistema que se esparce en dicha superficie están inexorablemente relacionadas. Dado que no se sabe en que microestado se encuentra el sistema, uno se ve forzado a decir que cada uno de estos microestados, fuera de equilibrio, se comporta como una fuente para nuevos microestados; y dichos microestados hacen que la superficie de energía se incremente. Matemáticamente, esto se puede expresar como:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sigma \mathcal{N}(\Gamma) \quad [4.16]$$

Donde σ es la tasa de producción de microestados. García-Morales y Pellicer establecen aquí, la relación termodinámica al dar la equivalencia entre σ y la tasa de producción de entropía:

$$\sigma = \frac{d\mathcal{S}}{dt} \quad [4.17]$$

Donde $\mathcal{S} = S/k$ es la entropía adimensional. Si se sustituye la ecuación (4.17) en la (4.16), se obtiene

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\Gamma} = \frac{1}{\mathcal{N}(\Gamma)} \quad [4.18]$$

Y, al integrar,

$$S = \int_1^{\Gamma} \frac{d\Gamma'}{\mathcal{N}(\Gamma')} \quad [4.19]$$

Donde se considero que la entropía se anula para $\Gamma_0=1$. Esto constituye una definición general de entropía, que se reduce a las formas conocidas al conocer $\mathcal{N}(\Gamma)$.

Por ejemplo, en el caso ergódico, donde $\mathcal{N}(\Gamma)=\Gamma$, después de realizada la integración se obtiene

$$S = \ln(\Gamma) \quad [4.20]$$

Es decir, la entropía clásica de Boltzmann.

Si ahora se considera un espacio fase fractal, $\mathcal{N}(\Gamma) \propto \Gamma^d$, después de integrar se obtiene:

$$S = \frac{\Gamma^{1-d} - 1}{1-d} \quad [4.21]$$

Esta expresión es claramente similar a la entropía de Tsallis (ecuación 4.8) con $q \equiv d$. El hecho de hacer válida esta conexión implica que el parámetro q es igual a la dimensión $d=D/6N$ del espacio fase fractal disponible.

Este tratamiento se puede generalizar para el ensamble canónico dado que se puede caracterizar al espacio en el cual yace una trayectoria por un número dado de configuraciones $\mathcal{N}(\Gamma^*)$ donde Γ^* denota el número total de configuraciones en la superficie compuesta del espacio fase dada por las diferentes energías que tienen las distintas regiones de dicha superficie.

Siguiendo el mismo análisis, se tiene que

$$\frac{d\Gamma^*}{dt} = \sigma^* \mathcal{N}(\Gamma^*) \quad [4.22]$$

Donde, tomada en cuenta la transformada de Legendre para la energía libre de Helmholtz,

$$F = E - Tks \quad [4.23]$$

se define la tasa de cambio para el potencial entrópico natural para el ensamble canónico como:

$$\sigma^* = \frac{d(-F/kt)}{dt} \quad [4.24]$$

Definiendo ahora $F \equiv -F/kT$ y sustituyendo la ecuación (4.24) en la ec. (4.22), se obtiene:

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \frac{1}{\mathcal{N}(\Gamma^*)} \quad [4.25]$$

Análogamente, se integra esta ecuación

$$F = \int_1^{\Gamma^*} \frac{d\Gamma^*}{\mathcal{N}(\Gamma^*)} \quad [4.26]$$

Para el caso ergódico, a pesar de que las regiones del espacio fase están cargadas por diferente energía, todas son accesibles en el límite de tiempos largos, por lo que $\mathcal{N}(\Gamma^*) = \Gamma^*$ y al integrar (4.26):

$$F = \ln(\Gamma^*) \quad [4.27]$$

Lo cual se reduce a la conocida función de partición del sistema. Para un espacio de fase fractal, aun cuando los microestados están cargados por su propia energía, se sigue el mismo razonamiento y se obtiene después de integrar:

$$F = \frac{\Gamma^{*1-d} - 1}{1-d} \quad [4.28]$$

Ahora, se obtendrá el peso de cada uno de estos microestados Γ^* para poder hacer una relación con la región del espacio fase fraccionado. Para regiones de energía constante E_i se tiene:

$$\begin{aligned}\Gamma^* &= \sum_i \Gamma_i^* \\ \Gamma &= \sum_i \Gamma_i\end{aligned}\quad [4.29]$$

Esto implica que para cada región del espacio fase de energía constante se cumple que

$$F_i = S_i - \beta E_i \quad [4.30]$$

Por lo que sustituyendo las expresiones (4.19) y (4.26) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\int_1^{\Gamma_i^*} \frac{d\Gamma_i^*}{\mathcal{N}(\Gamma_i^*)} = \int_1^{\Gamma_i} \frac{d\Gamma_i}{\mathcal{N}(\Gamma_i)} - \beta E_i \quad [4.31]$$

De aquí se sigue que para un sistema ergódico, al realizar la integración y despejar Γ_i^* :

$$\Gamma_i^* = \Gamma_i e^{-\beta E_i} \quad [4.32]$$

Y, para un sistema no ergódico con un espacio de dimensión fractal donde $\mathcal{N}(\Gamma_i^*) = \Gamma_i^{*d}$, después de integral se obtiene:

$$\Gamma_i^* = \Gamma_i (1 - (1-d)\beta E_i / \Gamma_i^{1-d})^{1/(1-d)} \quad [4.33]$$

Lo cual, recordando la definición de la función q-exponencial (ecuación 4.6):

$$e_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}$$

Se rescribe la expresión (4.33) en estos términos (siendo $q \equiv d$):

$$\Gamma_i^* = \Gamma_i \exp_q(-\beta E_i / \Gamma_i^{1-q}) \quad [4.34]$$

Lo que se ha hecho hasta ahora es desarrollar una teoría generalizada en el límite termodinámico válida tanto para espacios fase suaves como fractales; donde en un caso se conduce a la estadística clásica conocida de Boltzmann-Gibbs y en el otro, de forma natural se obtiene el formalismo de la teoría no extensiva de Tsallis.

Sin embargo, aun cuando la estadística- q es capaz de describir una gran cantidad de sistemas físicos con las leyes de potencias generalizadas de las funciones logaritmo y exponencial; mucho trabajo se está realizando en la actualidad para vislumbrar una respuesta sobre si la estadística- q constituye una explicación fundamental del comportamiento de escalamiento y en leyes de potencias observado tan comúnmente en la naturaleza.

Optimizando S_q en este formalismo, bajo las constricciones adecuadas, se obtiene la distribución q -Gaussiana, una generalización de la distribución Gaussiana, dada por:

$$f(x) \propto e_q^{-\beta x^2} \quad [4.35]$$

Donde β caracteriza al ancho de la distribución y la q -exponencial dada por la ecuación (4.6). Como ya se mencionó anteriormente, esta q -exponencial se reduce a la función exponencial conocida para $q=1$. Desde esta perspectiva, se espera que esta q -Gaussiana aparezca en la naturaleza asociada con sistemas complejos fuertemente correlacionados. Es un hecho que existe bastante evidencia sobre el origen del comportamiento en ley de potencias tanto en sistemas naturales como sociales, por lo que el formalismo no extensivo resulta, en cierta forma,

muy atractivo para asociarle un sentido fundamental al surgimiento de estas leyes.

Actualmente se está trabajando en un desarrollo de un posible Teorema del Límite Central generalizado para sustentar el peso de la estadística no-extensiva sobre bases fundamentales. [46]

CAPÍTULO 5

Ley de Zipf y Ley de Benford generalizadas

Pietronero et al. [47] Mostraron que siendo que la distribución de Benford es independiente de la escala adoptada, es decir, invariante ante escala, lo cual corresponde a la siguiente relación:

$$P(N') = p(bN) = A(b)P(N) \quad [5.1]$$

Donde $A(b)$ corresponde al factor de escalamiento. La solución general de esta ecuación es un comportamiento en ley de potencias con un exponente α :

$$P(N') = N'^{-\alpha} = b^{-\alpha} N^{-\alpha} \quad [5.2]$$

Por lo que, aplicado a la Ley de Benford, podemos obtener la probabilidad del primer dígito integrando para cada caso ($n=1,2,..,9$):

$$P(n) = \int_n^{n+1} N^{-\alpha} dN = \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{(1-\alpha)} - (n)^{(1-\alpha)}] \quad [5.3]$$

Esto es para $\alpha \neq 1$. En el caso $\alpha=1$, tenemos:

$$P(n) = \int_n^{n+1} N^{-1} dN = \int_n^{n+1} d(\log N) = \log\left(\frac{(n+1)}{n}\right) \quad [5.4]$$

La cual es la Ley de Benford tal cual era conocida.

El caso $\alpha=1$ corresponde a una distribución uniforme en el espacio logarítmico (dada la ecuación 5.4). Pietronero et al. Encuentran este exponente como el que describe los datos del mercado de valores. Sin embargo, para $\alpha>1$, la ecuación (5.3) define una *Ley de Benford generalizada* en la que para mayores valores de α , la probabilidad de que el primer dígito sea $n=1$ es cada vez más grande, haciendo la distribución cada vez más desigual. En el caso particular de la distribución de magnitudes de terremotos en sur del estado de California en Estados Unidos, el primer dígito de la distribución de estos datos corresponde con una Ley de Benford generalizada con un $\alpha \approx 2$. Cabe notar en este análisis que el valor $\alpha=1$ es el más frecuente hasta ahora observado en la naturaleza.

Por otro lado, y retomando la Ley de Zipf, tenemos que la relación empírica de ésta es de la forma:

$$W(k) = \frac{A}{k} \quad [5.5]$$

Donde $W(k)$ es la frecuencia encontrada para el rango k . En el caso de las ciudades más pobladas, $W(k)$ corresponde a la población de las ciudades asociadas a su rango k . La constante A corresponde al valor de $W(k=1)$, es decir, al valor de la frecuencia asociada al primer lugar o $k=1$.

Siguiendo el análisis de Pietronero et al, se tiene que al observar las propiedades del rankgo k de un conjunto de números dados \mathcal{N} extraídos de una distribución general $P(N) \sim N^{-\alpha}$, y considerando

un valor finito N_{\max} que corresponde al valor del rango $k=1$, es decir, al valor máximo de los números que conforman el conjunto \mathcal{N} , encontraron que el rango k de los $N(k)$ números está dado por todos los números (dentro del conjunto \mathcal{N}) cuyo valor se encuentra entre $N(k)$ y N_{\max} .

Es decir,

$$k = \mathcal{N} \int_{N(k)}^{N_{\max}} P(N) dN \sim N(k)^{1-\alpha} \quad [5.6]$$

o, invirtiendo esta relación,

$$N(k) \sim k^{1/\alpha} \quad [5.7]$$

Lo cual, a palabras de Pietronero y sus colegas, nos da una Ley de Zipf generalizada.

Esto a su vez nos lleva a una conexión entre la Ley de Benford generalizada y la Ley de Zipf con las siguientes tres propiedades:

- i. La Ley de Benford original ($\alpha=1$) no conlleva a una Ley de Zipf o parecida dado que el valor de N_{\max} diverge.
- ii. Cualquier distribución en ley de potencias con $\alpha>1$ corresponde a una Ley de Zipf generalizada con un exponente $1/(1-\alpha)$.
- iii. La Ley de Zipf estándar corresponde solamente a distribuciones con $\alpha=2$.

Aquí termina el análisis de Pietronero et al. Sin embargo, uno puede ir más allá aún. Recordando la ecuación (5.6):

$$\frac{k}{\mathcal{N}} = \int_{N(k)}^{N_{\max}} P(N) dN \quad [5.8]$$

Y sustituyendo el valor de la distribución P(N), se obtiene:

$$\frac{k}{\mathcal{N}} = \frac{1}{1-\alpha} \left(N_{\max}^{1-\alpha} - N(k)^{1-\alpha} \right) \quad [5.9]$$

Lo cual, mediante el conocido truco de sumarle un cero a la ecuación, se puede ver como:

$$\frac{1}{1-\alpha} \left(N_{\max}^{1-\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{1-\alpha} \left(N(k)^{1-\alpha} - 1 \right) = \frac{k}{\mathcal{N}} \quad [5.10]$$

Aquí es donde entra la relación con la mecánica estadística no-extensiva.

Recordando la definición del q-logaritmo (Ecuación 4.6) vista en el capítulo 4:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}$$

La ecuación (5.10) presenta una situación en la que resulta muy práctico transformarla de la siguiente forma:

$$\ln_\alpha N_{\max} - \ln_\alpha N(k) = \mathcal{N}^{-1} k \quad [5.11]$$

O, de la misma manera:

$$\ln_\alpha N(k) = \ln_\alpha N_{\max} - \mathcal{N}^{-1} k \quad [5.12]$$

Por otro lado, recordando la definición de entropía como función del logaritmo de la función de partición o del número de configuraciones posibles que puede adoptar el sistema: [48]

$$S = \ln \Omega \quad [5.13]$$

(Donde $K_B=1$).

Por lo tanto, se puede ver la ecuación (5.12) en términos de entropías, ¿qué entropías? Más adelante se dará una interpretación, por el momento se deja como un postulado.

$$S_{\alpha}(N(k)) = S_{\alpha}(N_{\max}) - \mathcal{N}^{-1}k \quad [5.14]$$

Donde,

$$S_{\alpha}(N(k)) = \ln_{\alpha} N(k) \quad [5.15]$$

y,

$$S_{\alpha}(N_{\max}) = \ln_{\alpha} N_{\max} \quad [5.16]$$

Es decir, se representa en términos de entropías generalizadas o de q -entropías (en este caso α -entropías).

La energía libre de un sistema se define en términos de su entropía y su energía interna como:

$$F = U - TS \quad [5.17]$$

o,

$$\frac{1}{T}F = \frac{1}{T}U - S \quad [5.18]$$

Se define a \hat{S} como:

$$\hat{S} \equiv -\frac{1}{T}F \quad [5.19]$$

\hat{S} se le llama el *potencial de Massieu*. Entonces,

$$\hat{S} = S - \beta U \quad [5.20]$$

Y, por otro lado, se define a la energía libre como:

$$F = -kT \ln Z \quad [5.21]$$

Se obtiene:

$$\hat{S} = -\beta F = \ln Z \quad [5.23]$$

Entonces, si se tiene que $\hat{S} = \ln Z$ y $S = \ln \Omega$. Se puede definir en sus versiones no extensivas o q -termodinámicas:

$$\begin{aligned}\hat{S}_q &= \ln_q Z \\ S_q &= \ln_q \Omega\end{aligned}\quad [5.24]$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (5.20):

$$\ln_q Z = \ln_q \Omega - \beta U \quad [5.25]$$

Y, sustituyendo la definición del q -logaritmo:

$$\frac{1}{1-\alpha} (Z^{1-q} - 1) = \frac{1}{1-\alpha} (\Omega^{1-q} - 1) - \beta U \quad [5.26]$$

Recordando la ecuación (5.10):

$$\frac{1}{1-\alpha} (N_{\max}^{1-\alpha} - 1) - \frac{1}{1-\alpha} (N(k)^{1-\alpha} - 1) = \frac{k}{\mathcal{N}}$$

Se encuentra un tremendo parecido entre estas dos ecuaciones, de hecho, son ecuaciones similares, por lo que podemos encontrar una relación entre la Ley de Zipf y este formalismo, obteniendo así una Ley de Zipf generalizada. Llevando esta relación hasta últimos términos se escribe que:

$$\ln_\alpha N(k) = \ln_\alpha N_{\max} - \mathcal{N}^{-1}k \quad [5.26]$$

O,

$$S_\alpha(N(k)) = S_\alpha(N_{\max}) - \mathcal{N}^{-1}k \quad [5.27]$$

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se mostró la importancia que tienen la Ley de Zipf y la Ley de Benford dentro del área de los sistemas complejos debido a su enorme abundancia en los fenómenos que se observan en la naturaleza. Se brindaron ejemplos ilustrativos de dichas leyes tan diversos como los mostrados en el capítulo 3. Sin embargo, la importancia fundamental de esta tesis reside en el hecho de que se reconoció en las leyes de Zipf y Benford a una estructura termodinámica sustentada y fundamentada en una mecánica estadística subyacente correspondiente a una generalización de la mecánica estadística clásica de Boltzmann-Gibbs conocida con el nombre de mecánica estadística no extensiva.

Como se mostró en el capítulo 4, esta teoría generalizada cuenta también con una álgebra generalizada. Y es a partir de esta álgebra donde se reconoce en el capítulo 5 que las leyes de Zipf y Benford están íntimamente relacionadas; es decir, expresan la misma relación. En el caso de la Ley de Zipf, muestra esta propiedad en término de la función exp_q , mientras que la Ley de Benford hace lo propio con la función inversa, es decir, con el ln_q . Las ecuaciones que resumen este trabajo son las 5.26 y 5.27, en donde se representan típicamente a las leyes de Zipf y Benford pero representadas como una relación de función de partición o energías libres.

Las leyes de Zipf y Benford presentan una restricción del espacio fase, es decir, una estructura fractal del mismo. Como se observó en la sección 4.2, esta característica es la que da lugar a la validez de la mecánica estadística no extensiva. Es decir, el índice q de cada sistema es igual a la dimensión fractal del espacio fase del mismo dada por el artículo de Pellicer et al.

Hasta ahora, no se tenía registro de algún trabajo que relacionara estas leyes mediante una transformada de Legendre. Esta expresión termodinámica que se observa arroja una explicación que fundamenta la aparición tan común en la naturaleza de estas leyes de potencias.

El rasgo más visible de las leyes de Zipf y de Benford es, sin lugar a dudas, su ubicuidad en el enorme número de situaciones donde se ha observado, situaciones radicalmente diferentes unas de otras, tal como se muestra en el capítulo 3, donde se describe una variedad de ejemplos.

Clásicamente, los sistemas que se encuentran en equilibrio termodinámico obedecen unívocamente la primera, segunda y tercera ley de la termodinámica. Se sabe y se entiende que si se encuentra algún sistema que viole estas leyes, entonces algo no funciona bien en el sistema y/o en la descripción del mismo y se procede al análisis exhaustivo del mismo hasta encontrar que es imposible violar las leyes de la termodinámica.

En el mismo sentido, era de todos sorprendente que una y otra vez y en situaciones tan disímiles se encontraran sistemas que obedecían leyes de potencias sin una razón clara del porqué de este comportamiento. Ahora, al contar con una sólida estructura

termodinámica generalizada que fundamenta en particular las leyes de Zipf y Benford, uno se inclina a pensar que no es de extrañarse la aparición tan natural de dichas leyes debido a esta base termodinámica fundamentada en una mecánica estadística generalizada.

REFERENCIAS

- [1] C. Tsallis, *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988)
- [2] Schroeder, M. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*. Freeman, 1992. p. xiii
- [3] Weisstein, Eric W. *Hausdorff Dimension*. From MathWorld-A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/HausdorffDimension.html>
- [4] Mandelbrot, B. *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Ed. Tusquets. 2002. p. 32
- [5] *Science* 2 April 1999: Vol. 284. no. 5411, p. 79
- [6] Pimentel Álvarez, Julio, *Diccionario latín-español, español-latín*. 4a edición, México: Porrúa, 1996.
- [7] Gershenson, C. and F. Heylighen (2005). *How can we think the complex?* in: Richardson, Kurt (ed.) *Managing the Complex* Vol. 1: Philosophy, Theory and Application.(Institute for the Study of Coherence and Emergence/Information Age Publishing), p.47-62
- [8] Gershenson, Carlos (2002) *Complex Philosophy*. In Sotolongo, Pedro, Eds. *Proceedings The First Biennial Seminar on the Philosophical, Methodological and Epistemological Implications of Complexity Theory*, La Habana, Cuba.
- [9] Bar-Yam. *Dynamics of Complex Systems*. The Advanced Book *Studies in Nonlinearity* series, Addison – Wesley, 1997.

- [10] Goldstein, Jeffrey (1999), *Emergence as a Construct: History and Issues*, *Emergence: Complexity and Organization* 1: 49-72
- [11] De Wolf, T. and Holvoet, T. *Emergence Versus Self-Organisation: Different Concepts but Promising When Combined*. Engineering Self-Organising Systems. Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [12] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Wiley-VCH. 4th edition. 2005
- [13] Thomson Klein, J. *Interdisciplinarity and complexity: An evolving relationship*. E:CO Special Double Issue Vol. 6 Nos. 1-2 2004 pp. 2-10
- [14] Thomson Klein, J. *Interdisciplinarity and complexity: An evolving relationship*. E:CO Special Double Issue Vol. 6 Nos. 1-2 2004 pp. 2-10.
- [15] L.A.N. Amaral and J.M. Ottino. *Complex networks*. Eur. Phys. J. B **38**, 147–162 (2004)
- [16] *Nonextensive entropy : interdisciplinary applications /* editors, Murray Gell-Mann, Constantino Tsallis. Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity, Proceedings, Oxford University Press, 2004
- [17] Goldenfeld N. *Lectures on phase transition and critical phenomena*. Addison Wesley, New York, 1992
- [18] M.E.J. Newman. *Power laws, Pareto Distribution and Zipf's Law*. Contemporary Physics, Vol. 46, No. 5, Sept-Oct 2005, 323-351
- [19] S. Redner. *Citation Statistics From More Than a Century of Physical Review*. Phys. today. 2005, vol. 58, n°6, pp. 49-54.

- [20] B. A. Huberman, L.A. Adamic. *Evolutionary Dynamics of the World Wide Web*. cond-mat/9901071
- [21] S. Abe, N. Suzuki. *Scale-free statistics of time interval between successive earthquakes*. cond-mat/0410123
- [22] R. Axtell. *Zipf Distribution of U.S. Firm Sizes*. Science 7 September 2001:Vol. 293. no. 5536, pp. 1818 – 1820
- [23] P. Bak, M. Paczuski. *Self-Organization of Complex Systems*. arXiv:cond-mat/9906077v1
- [24] X. Gabaix. *Zipf's Law for Cities: An Explanation*. The Quarterly Journal of Economics. August 1999, Vol. 114, No. 3, Pages 739-767
- [25] <http://www.citypopulation.de/USA-Cities.html> (12/2006)
- [26] *Rank frequency list for the whole corpus*.
<http://www.comp.lancs.ac.uk/ucrel/bncfreq/samples/120.pdf#search=%22rank%20frequency%20list%22>
- [27] S. Abe, N. Suzuki, Physica A 350 (2005) 588–596
- [28] A. Robledo, F. Baldovin. Arxiv:cond-mat/0205371 v2 11 sept 2002
- [29] M.E.J. Newman, G.J. Eble. *Decline in extinction rates and scale invariances in the fossil record*.
- [30] D.F. Merriam, L.J. Drew, J.H. Shuenemeyer, *Natural Resources Research*, Vol. 13, No. 4, December 2004 (C_2004)
- [31] O.S. Klass, O. Biham, M. Levy, O. Malcai, S. Solomon, *Economics Letters* 90 (2006) 290–295
- [32] R.L. Axtell, *Zipf's distribution of U.S. firm sizes*. Science 7 September 2001:Vol. 293. no. 5536, pp. 1818 - 1820
- [33] A. Clauset, C.R. Shalizi, M.E.J. Newman, ArXiv:0706.1062v1 [physics.data-an] 7 jun 2007
- [34] http://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law (01/2007)

- [35] L. Pietronero, E. Tosatti, V. Tosatti, A. Vespignani. *Explaining the uneven distribution of numbers in nature: the laws of Benford and Zipf*. Physica A **293** (2001) 297-304
- [36] I. Gent, T. Walsh. *Benford's Law*.
<http://citeseer.ist.psu.edu/658734.html>
- [37] Weisstein, Eric W. *Benford's Law*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html>
- [38] Hill, T. P. 1995. *A statistical derivation of the significant digit law*. Statistical Science. 10(4):354-363
- [39] T.P. Hill, *The first digit phenomon*. American Scientist, July-August 1998
- [40] C. Tsallis, J. Stat. Phys. 52 (1988) 479.
- [41] *Nonextensive entropy : interdisciplinary applications /* editors, Murray Gell-Mann, Constantino Tsallis. Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity, Proceedings, Oxford University Press, 2004
- [42] E.K. Lenzi, E.P. Borges, R.S. Mendes. J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 8551
- [43] F. Baldovin, A. Robledo. 2003. <http://arXiv.org/cond-mat/0304410>
- [44] R. Salazar, R. Toral, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4233
- [45] V. García-Morales, J. Pellicer. Physica A 361 (2006) 161-172
- [46] J.A. Marsh, M.A. Fuentes, L.G. Moyano, C. Tsallis, Physica A 372 (2006) 183-202
- [47] L. Pietronero, E. Tosatti, V. Tosatti, A. Vespignani. *Explaining the uneven distribution of numbers in nature: the laws of Benford and Zipf*. Physica A **293** (2001) 297-304

[48] H. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2a. edicion, Wiley, Nueva York,. 1985.