



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL SOLENOIDE COMO ATRACTOR DINÁMICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

PALOMA HERNÁNDEZ ZAPATA



DR. JEFFERSON EDWIN KING DÁVALOS

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Hernández

Zapata

Paloma

55506877

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

080146533

2. Datos del tutor

Dr.

Jefferson Edwin

King

Dávalos

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Héctor

Méndez

Lango

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Ana Margarita

Guzmán

Gómez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Guillermo Javier Francisco

Sienra

Loera

6. Datos del sinodal 4

Act.

Javier

Fernández

García

7. Datos del trabajo escrito.

El solenoide como atractor dinámico

55 p

2008

Contenido

Introducción	ii
1 Primeras definiciones	1
2 Funciones caóticas	11
2.1 Sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales	11
2.2 Transitividad topológica	13
2.3 Definición de Caos	18
2.3.1 ¿Puede sustituirse este par de condiciones por otro par de las propuestas por Devaney?	21
2.4 Conjugación topológica	22
3 El solenoide	30
3.0.1 <i>Anexo</i>	41
4 Límites inversos	42
4.1 Función inducida entre límites inversos	47
4.2 Funciones caóticas y límites inversos	48
5 El solenoide es un continuo indescomponible	52
5.1 Comentarios finales	57

Introducción

Hasta mediados del siglo pasado los científicos creían que, en la mayoría de los casos, para estudiar un fenómeno bastaba con conocer una buena aproximación a las condiciones iniciales y la ley natural que lo rige para calcular su comportamiento aproximado.

La idea era que, con el desarrollo de la tecnología, se tendrían cada vez mejores aproximaciones a las medidas reales de las condiciones iniciales y dada la capacidad de cálculo que ofrecían las computadoras, se podrían obtener predicciones cada vez mejores de los fenómenos naturales. Este optimismo se vino abajo por el descubrimiento de Edward Lorenz.

Mientras realizaba un trabajo sobre el clima en la Tierra, en el Instituto Tecnológico de Massachussets, Lorenz encontró unas ecuaciones sencillas para modelar el movimiento de grandes masas de aire, pero descubrió que con una pequeñísima variación de las condiciones iniciales obtenía resultados radicalmente diferentes. Llamó a este fenómeno sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.

A partir de este descubrimiento se encontró que hay muchos fenómenos que tienen sensibilidad y ya que es imposible medir con exactitud las condiciones iniciales esto nos deja sin la posibilidad de hacer predicciones.

Mientras los sistemas normales al pasar el tiempo se acercan a conjuntos sencillos, como un punto o un círculo, estos otros sistemas tienden a conjuntos extraordinariamente complicados. Estos conjuntos fueron bautizados con el nombre de *atractores extraños* y el primero de ellos es el conocido como mariposa de Lorenz.

En este trabajo abordaremos uno de estos atractores extraños conocido como *el solenoide* que se obtiene de una manera sencilla a partir de una función del toro sólido en sí mismo. El solenoide fue introducido por el topólogo austriaco Leopold Vietoris en 1927 y cuarenta años después fue retomado por Stephen Smale como atractor dinámico.

La intención original de este trabajo era utilizar el artículo de Richard M. Schori "Chaos: An Introduction to Some Topological Aspects" para presentar una introducción a los límites inversos y su relación con los sistemas dinámicos. La idea era "completar" el artículo, es decir agregar explicaciones, ejemplos, demostraciones, etcétera. Aunque me parecía interesante he de confesar que nunca me sentí realmente atraída por el tema.

Un curso sobre Sistemas Dinámicos Discretos que dieron Jeff y Héctor cambió totalmente el rumbo del trabajo, no sólo porque a partir de él decidimos centrarlo en el ejemplo del solenoide; sino porque como resultado de ese curso me enamoré de la temática, lo cual le dió un impulso muy grande.

La idea era ahora discutir la dinámica en el solenoide, el concepto de límite inverso y los resultados que lo relacionan con sistemas dinámicos. Me quedaba la sensación de que la discusión de límites inversos resultaba muy complicada en relación a la utilidad que presentaba, es decir, si se podía analizar la dinámica en el solenoide sin acudir a este concepto, concluir el trabajo usando límites inversos para demostrar que la dinámica en el solenoide es caótica era como matar moscas a cañonazos.

Héctor resolvió la cuestión cuando propuso incluir la demostración de que el solenoide es un continuo indescomponible, para la cual resultan muy útiles los límites inversos. El capítulo está basado en el artículo " La herradura de Smale es un continuo indescomponible" de Héctor Méndez.

El trabajo quedó conformado entonces de la siguiente manera:

En el primer capítulo se abordan algunas definiciones elementales y en particular el ejemplo de la dinámica de la función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z^2$ que será muy importante para el análisis de la dinámica en el solenoide.

En el segundo capítulo discutimos la definición de función caótica propuesta por Robert L. Devaney, demostramos que dos de las condiciones de la definición implican la tercera y algunas equivalencias para la transitividad topológica.

El tercer capítulo está dedicado a la discusión de la dinámica en el solenoide y algunas de las propiedades topológicas de este objeto parecido a una bobina, que se enreda infinitamente dentro del toro.

El cuarto capítulo trata el concepto de límite inverso, y estudia las propiedades topológicas que hereda este espacio de los espacios que lo originan, se estudia también la función inducida entre dos límites inversos y las propiedades dinámicas que hereda esta función de las funciones que le dan origen.

El quinto y último capítulo está dedicado a probar que el solenoide es un continuo indescomponible y a dar una idea de lo que esta propiedad significa.

Capítulo 1

Primeras definiciones

Los sistemas dinámicos discretos estudian cantidades que varían conforme pasa el tiempo. Se considera que el tiempo varía de manera discreta y además que el valor que toma una cantidad en cierto tiempo depende únicamente del valor que tomó en el tiempo anterior. De esta manera si tenemos un valor inicial y una función que nos diga cómo obtener el siguiente valor a partir del que tenemos, podemos obtener todos los valores que irá tomando la cantidad estudiada.

Para tener un sistema dinámico necesitamos entonces, un espacio métrico X donde la variable tomará valores y una función f definida del espacio X en sí mismo, que nos dirá cómo está relacionado un valor de la variable con el que tomó en el tiempo anterior. Si tomamos el punto $x_0 \in X$ como nuestro valor en el tiempo cero, en el tiempo uno tendremos el valor $f(x_0)$, en el tiempo dos $f(f(x_0))$, etcétera. Al "itinerario" del punto x_0 , es decir al conjunto de todos los valores que irá tomando la variable si partimos del punto x_0 le llamaremos la órbita de x_0 bajo la función f y la denotaremos por $O(x_0, f)$. En otras palabras la órbita de x_0 bajo f , es igual al conjunto:

$$O(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots\}$$

Para abreviar la notación se suele llamar f^n a la composición de f consigo misma n veces, escribiendo la órbita de x_0 bajo f de esta forma tenemos

$$O(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\}$$

De aquí en adelante X siempre representará un espacio métrico, d una distancia en X , y f una función continua de X en X .

El objetivo al analizar un sistema dinámico (X, f) es describir el comportamiento de todas las órbitas bajo la función f . Para hacer esto, es útil tener algunas definiciones que nos permitan clasificar las órbitas que tienen un comportamiento similar entre sí.

Para distinguir unas órbitas de otras, podemos preguntarnos, por ejemplo, ¿para qué puntos $x \in X$, la órbita de x bajo f es una sucesión convergente? En el caso de que la órbita no sea una sucesión convergente, ¿qué podemos decir sobre su comportamiento? ¿Qué puntos de X tienen una órbita finita bajo f ? ¿Para qué puntos de X la órbita bajo f tiene al menos una subsucesión convergente?

Distinguiremos, para empezar a los puntos cuya órbita consta de un solo punto: diremos que el punto $x \in X$ es un punto fijo de f , si $f(x) = x$. En ese caso, la órbita de x bajo f será el conjunto $\{x\}$.

Los puntos fijos de un sistema dinámico (X, f) tienen un papel muy importante debido a que si la órbita de un punto es una sucesión convergente, el límite de esta será precisamente un punto fijo, como se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 1.0.1 *Si la órbita de un punto $x \in X$ bajo la función f es una sucesión que converge a $x_0 \in X$, entonces x_0 es un punto fijo de f .*

Demostración

El argumento es el siguiente: Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$. Como f es una función continua y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x) = x_0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x)\right) = f(x_0),$$

por lo que x_0 es punto fijo de f . \square

Otro tipo de puntos que distinguiremos son los puntos cuya órbita es una sucesión convergente.

Definición 1.0.1 *Un punto x tiene órbita asintóticamente fija si existe un punto fijo x_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ y $f^n(x) \neq x_0$ para todo entero positivo n .*

Definición 1.0.2 *Un punto x es eventualmente fijo o prefijo, si existe un entero positivo n y un punto fijo x_0 , tales que $f^n(x) = x_0$.*

En algunos casos un punto fijo será el límite de todas las órbitas de los puntos cercanos a él, diremos entonces que es un punto fijo *atractor*, y a todos los puntos cuyas órbitas convergen a dicho punto fijo les llamaremos la *cuenca de atracción* del punto fijo atractor.

Definición 1.0.3 *Un punto fijo $x_0 \in X$ es atractor si existe una vecindad de radio $\delta > 0$ tal que $f^n(x)$ está definido para todo $x \in V_\delta(x_0)$ y todo $n \in \mathbb{N}$, y además, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.*

Sea x_0 un punto fijo atractor de f . Al máximo conexo abierto U que contiene a x_0 y en el cual $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ Para todo $x \in U$, se le llama la cuenca inmediata de atracción del punto x_0 .

Al conjunto

$$A = \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0 \right\}$$

se le llama la cuenca global de atracción de x_0 .

Definición 1.0.4 Un punto fijo $x_0 \in X$ se dice que es repulsor si existe una vecindad de radio $\delta > 0$ tal que para todo $x \in V_\delta(x_0)$, con $x \neq x_0$, hay un entero positivo n para el cual $f^n(x) \notin V_\delta(x_0)$.

Entre las órbitas que no son sucesiones convergentes podemos distinguir las que constan de un número finito de puntos. Llamaremos *periódicas* a las órbitas que después de pasar por cierto número de puntos regresen al valor original, y *preperiódicas* a las que en algún momento regresen a un valor que habían tomado antes.

Definición 1.0.5 El punto $x \in X$ es un punto periódico de f , o tiene órbita periódica, si existe un entero $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$. El menor entero positivo n para el cual se cumple lo anterior es llamado el periodo de x . En este caso la órbita de x bajo f es

$$O(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^{n-1}(x)\}.$$

El conjunto de los puntos periódicos de f se denota como $Per(f)$.

Definición 1.0.6 Un punto x es eventualmente periódico o preperiódico si x no es periódico pero existen una n y una m distintas tales que $f^n(x) = f^m(x)$.

Si m es el primer entero positivo para el cual $f^n(x) = f^m(x)$ con $n < m$ entonces la órbita de x es como sigue

$$O(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots, f^{m-1}(x)\}$$

a partir de $f^{m-1}(x)$ se repiten los valores $f^n(x), \dots, f^{m-1}(x)$. Se dice entonces que el punto x es eventualmente periódico de periodo $p = m - n$.

Como puede verse, los puntos periódicos de periodo n bajo una función f son puntos fijos de la función f^n ; esto habla de la importancia que tendrán los puntos periódicos, ya que si un punto tiene una órbita que converge bajo f^n , lo hace necesariamente a un punto fijo de f^n .

En otras palabras, si $\lim_{k \rightarrow \infty} (f^n)^k(x_0) = p$ entonces $f^n(p) = p$.

Si esto sucede, la órbita de p , $\{p, \dots, f^{n-1}(p)\}$ es el conjunto de puntos límite de la órbita de x_0 . En este caso decimos que la órbita de x_0 converge a la órbita de p .

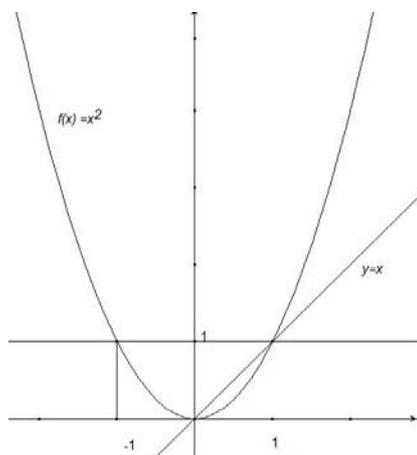
Diremos que un punto es *asintóticamente periódico*, si su órbita converge bajo f^n .

Definición 1.0.7 *El conjunto de puntos asintóticamente periódicos a p es llamado el conjunto estable asociado a p y se denota como $W^s(p)$.*

Nota: En particular, si p es un punto fijo atractor, el conjunto estable asociado a p es la cuenca global de atracción de p . Los conceptos de punto periódico atractor o repulsor son generalizaciones naturales de las definiciones 1.0.3 y 1.0.4.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 1.0.1 *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Los puntos fijos de f son las soluciones de la ecuación $x^2 = x$, es decir los puntos 0 y 1.*



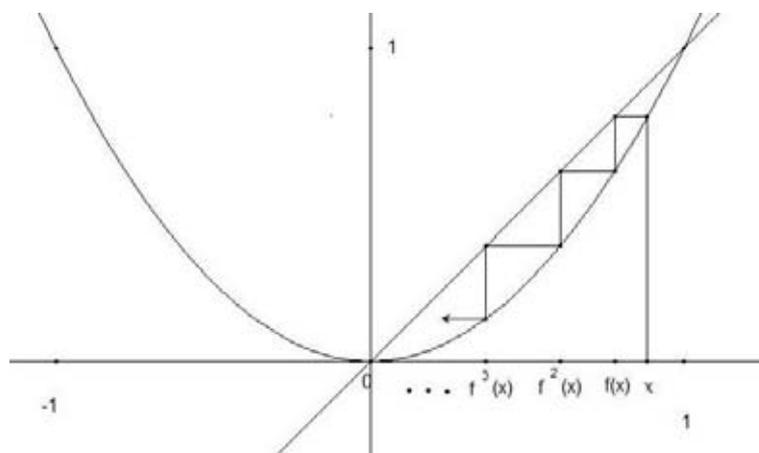
Como puede verse para el caso de un sistema dinámico determinado por una función $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$, podemos encontrar geoméricamente los puntos fijos, buscando los puntos en el dominio donde la gráfica de f interseca a la recta $y = x$.

En la figura puede observarse también que -1 es un punto prefijo pues $f(-1) = 1$ y que además no hay ningún otro punto del dominio que bajo la función vaya a dar a un punto fijo o a un punto prefijo.

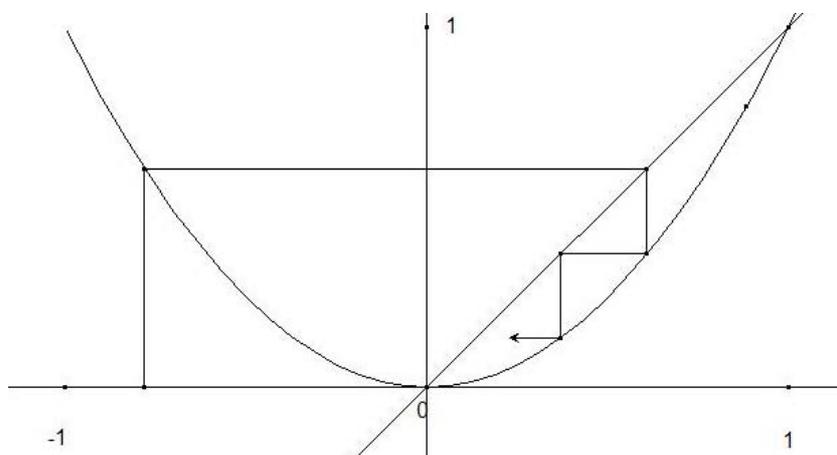
Para saber lo que sucede con las órbitas de los demás puntos del dominio usaremos un recurso que suele ser útil para analizar el comportamiento de las órbitas de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y consiste en seguir sobre la gráfica el "itinerario" del punto de la siguiente forma:

Si partimos del punto x en el dominio de la función, podemos encontrar usando la gráfica de f cuál es el siguiente punto de la órbita de x , $f(x)$. Para encontrar $f^2(x)$, hay que aplicar nuevamente la función f ahora al punto $f(x)$ en el dominio; encontrar la ubicación de este punto es fácil usando la recta $y = x$, de esta manera obtenemos otra vez usando la gráfica el valor $f^2(x)$, y los siguientes valores, f^3 , f^4 , etcétera. Esto nos permite tener una idea geométrica de cuáles serán los valores de la órbita de x bajo la función f .

En este caso, como puede verse en la figura, si tomamos cualquier punto x en el intervalo $(0, 1)$ su órbita será una sucesión que converge a cero.

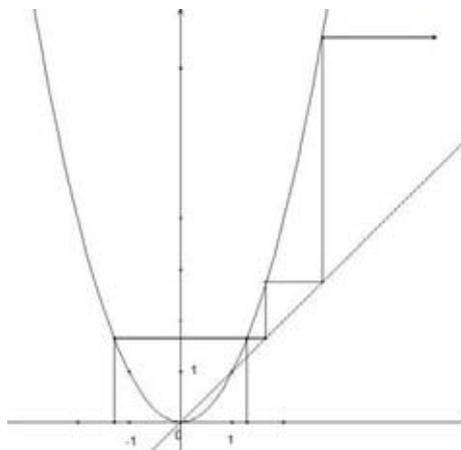


Para cualquier punto en el intervalo $(-1, 0)$, después de aplicar la función por primera vez, va a dar al intervalo $(0, 1)$, por lo que para las siguientes iteraciones correrá la misma suerte que los puntos del intervalo $(0, 1)$, es decir su órbita converge a cero.



La órbita de cualquier punto en $(1, \infty)$ tiende a infinito y todos los puntos del intervalo $(-\infty, -1)$, después de la primera iteración van a dar al $(1, \infty)$ por lo que su

órbita también tiende a infinito.

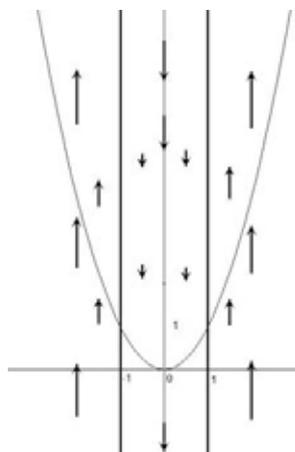


En resumen de lo anterior tenemos que 0 es un punto fijo atractor cuya cuenca de atracción es el intervalo $(-1, 1)$ y 1 es un punto fijo repulsor.

Ejemplo 1.0.2 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (-x, y + x^2 - 1)$.

Para analizar la dinámica generada por esta función observemos primero que, para toda constante $c \in \mathbb{R}$ los puntos que están sobre la recta $x = c$, bajo la función van a caer a puntos sobre la recta $x = -c$ y bajo la segunda iteración regresan a la recta original $x = c$.

Por otro lado la función $x^2 - 1$ que está sumada a la segunda coordenada vale cero para $x \in \{-1, 1\}$, por lo que los puntos en las dos rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$, regresan al mismo punto después de la segunda iteración. En cambio, para todos los demás puntos, la segunda iteración los regresa a la misma recta pero los desplaza hacia abajo si su abscisa está en el intervalo $(-1, 1)$ y hacia arriba si su abscisa se encuentra en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.



Ejemplo 1.0.3 Sea la función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z^2$.

Los puntos fijos son las soluciones de la ecuación $z^2 = z$, es decir el 0 y el 1.

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z^2$ tiene el doble del ángulo que z y su módulo es el cuadrado del módulo de z . De manera que para los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| < 1$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} |g^n(z)| = 0$, por lo que las órbitas de esos puntos convergen a cero. Cero es entonces un punto fijo atractor cuya cuenca de atracción es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

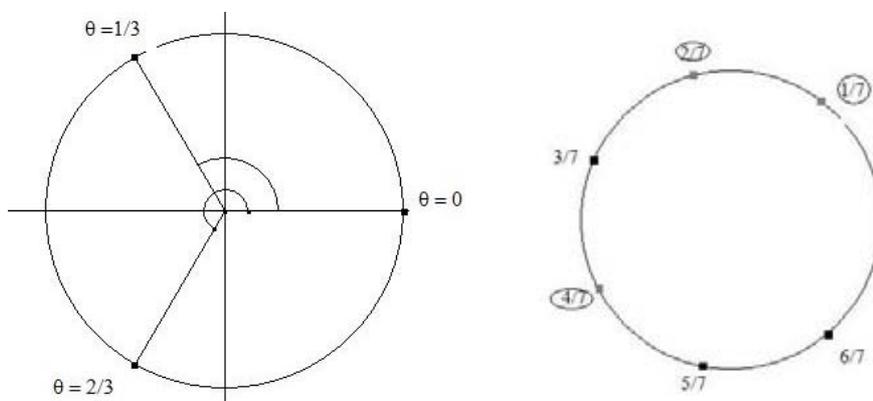
Analogamente, los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| > 1$ bajo la función van a dar a puntos con un módulo cada vez mayor por lo que sus órbitas se van a infinito.

Los puntos tales que $|z| = 1$, es decir los puntos que se encuentran sobre el círculo unitario S^1 , permanecen en S^1 para cualquier iteración.

Si restringimos la función g al círculo unitario S^1 , es decir a los puntos de la forma $z = e^{2\pi i \theta}$, $g(e^{2\pi i \theta}) = e^{2\pi i (2\theta)}$, podemos verla simplemente como una función del ángulo θ , con $\theta \in \mathbb{R} \pmod{1}$, definida por $g(\theta) = 2\theta$.

Como dijimos antes el punto $(0, 1)$ correspondiente al ángulo $\theta = 0 \pmod{1}$ es un punto fijo de g , pues $g(0) = 0$.

Los puntos con $\theta \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ forman una órbita de periodo 2, los puntos con $\theta \in \{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$ y los que tienen $\theta \in \{\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}\}$ forman órbitas de periodo 3.



En general, es fácil comprobar que existen puntos periódicos de todos los periodos. En efecto, un punto en S^1 es un punto periódico de periodo n de g , si su ángulo θ es una solución de la ecuación $g^n(\theta) = \theta + k$ con $\theta \in [0, 1)$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Como $g^n(\theta) = 2^n \theta \pmod{1}$, entonces, los puntos de periodo n son las soluciones de la ecuación $2^n \theta = \theta + k$, con k entero; es decir los puntos tales que $\theta = \frac{k}{2^n - 1}$. De aquí se concluye que la función g tiene puntos periódicos de todos los periodos. Para

ilustrar veamos cuáles son las órbitas de periodo $n \leq 5$;

periodo	$\theta = \frac{k}{2^n - 1}$	órbitas
2	$\frac{k}{3}$	$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$
3	$\frac{k}{7}$	$\left\{ \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right\}$ $\left\{ \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7} \right\}$
4	$\frac{k}{15}$	$\left\{ \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15} \right\}$ $\left\{ \frac{3}{15}, \frac{6}{15}, \frac{12}{15}, \frac{9}{15} \right\}$ $\left\{ \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, \frac{13}{15}, \frac{11}{15} \right\}$
5	$\frac{k}{31}$	$\left\{ \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31} \right\}$ $\left\{ \frac{3}{31}, \frac{6}{31}, \frac{12}{31}, \frac{24}{31}, \frac{17}{31} \right\}$ $\left\{ \frac{5}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{9}{31}, \frac{18}{31} \right\}$ $\left\{ \frac{7}{31}, \frac{14}{31}, \frac{28}{31}, \frac{25}{31}, \frac{19}{31} \right\}$ $\left\{ \frac{11}{31}, \frac{22}{31}, \frac{13}{31}, \frac{26}{31}, \frac{21}{31} \right\}$ $\left\{ \frac{15}{31}, \frac{30}{31}, \frac{29}{31}, \frac{27}{31}, \frac{23}{31} \right\}$

Más aún, puede verse que el conjunto de puntos periódicos de g forman un conjunto denso en S^1 .

El argumento es el siguiente: Los puntos para los cuales $\theta = \frac{k}{2^n - 1}$ con $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\}$ dividen al círculo S^1 en $2^n - 1$ arcos iguales de longitud $\frac{1}{2^n - 1}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n - 1} = 0$, si tomamos un arco en S^1 de longitud igual a $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un natural n tal que los puntos de la forma $\theta = \frac{k}{2^n - 1}$ distan entre sí menos que ε y por lo tanto habrá al menos uno de esos puntos en el arco de longitud ε que tomamos.

Por otro lado, los puntos en S^1 con $\theta \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$ son eventualmente fijos, pues en alguna iteración van a caer a $\theta = 0$ y los puntos cuyo ángulo $\theta \in \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \dots \right\}$ son eventualmente periódicos de periodo 2, pues en alguna iteración van a caer a $\theta = \frac{1}{3}$.

En general si tomamos cualquier punto con ángulo $\theta \in [0, 1]$, los puntos $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{4}, \dots, \frac{\theta}{2^n}, \dots$ y los puntos $\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\theta}{4} + \frac{1}{2}, \dots, \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}, \dots$ eventualmente, después de aplicar la función g cierto número de veces van a caer a θ . Esto junto con la existencia de una infinidad de puntos periódicos de g en S^1 , nos garantiza que el conjunto de puntos preperiódicos de g es también un conjunto denso en S^1 . Ya que, si tomamos un arco cualquiera de longitud $\varepsilon > 0$, cuyos extremos sean los puntos correspondientes a los ángulos θ_1 y θ_2 , el arco $\widehat{2\theta_1 2\theta_2}$ es un arco de longitud 2ε , en él podemos encontrar un punto periódico con ángulo p . Entonces el punto con ángulo $\frac{p}{2} \in \widehat{\theta_1 \theta_2}$.

Se puede probar que si el ángulo θ es un número racional el punto correspondiente en S^1 es periódico o preperiódico, y que todos los puntos periódicos o preperiódicos tienen ángulo θ racional.

Demostración

Sea un punto en S^1 correspondiente a un ángulo racional $\frac{p}{q}$. El conjunto de los puntos correspondientes a ángulos racionales con denominador q que son puntos diferentes en S^1 tiene cardinalidad finita igual a q . Entonces existen dos números n y $m \in \mathbb{N}$, tales que $g^n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{2^n p}{q} = \frac{2^m p}{q} = g^m\left(\frac{p}{q}\right) \pmod{1}$. Lo cual implica que el punto correspondiente al ángulo $\frac{p}{q}$ es periódico o preperiódico.

Ya probamos antes que un punto periódico tiene ángulo de la forma $\frac{k}{2^n - 1}$, por lo que todo punto periódico tiene ángulo racional. Tomemos ahora un punto preperiódico, sea p el ángulo correspondiente a este punto, entonces

$$\begin{aligned} g^n(p) &= g^m(p) \pmod{1} \\ 2^n p &= 2^m p + k \text{ con } k \text{ entero} \\ p(2^n - 2^m) &= k \\ p &= \frac{k}{2^n - 2^m} \end{aligned}$$

Por lo tanto p es racional. \square

Otra característica de la función g es que no tiene ningún punto que sea asintóticamente fijo o asintóticamente periódico, la demostración de lo anterior se basa en el siguiente lema.

Lema 1.0.1 *Sea x_0 un punto fijo repulsor; si $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ entonces existe un número natural N tal que $f^N(x) = x_0$.*

Demostración

Sea x_0 un punto fijo repulsor de la función $f : X \rightarrow X$ y $x \in X$ un punto tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.

Como x_0 es un punto fijo repulsor, existe una vecindad de x_0 , $V_\delta(x_0)$ tal que para toda $x \neq x_0$ en la vecindad $V_\delta(x_0)$, hay un número natural n tal que $f^n(x) \notin V_\delta(x_0)$.

Por otro lado, como $f^n(x)$ converge a x_0 , para la vecindad $V_\delta(x_0)$ existe un natural N , tal que para todo natural $n > N$, $f^n(x) \in V_\delta(x_0)$.

Sea $f^{N+1}(x) \in V_\delta(x_0)$

$$f^m(f^{N+1}(x)) = f^{m+(N+1)}(x) \in V_\delta(x_0) \text{ para todo número natural } m$$

Por lo tanto $f^{N+1}(x) = x_0$. \square

Como vimos antes no es complicado describir la dinámica para algunas funciones, como la del ejemplo 1.0.1 y la del ejemplo 1.0.2. Sin embargo, hay funciones como la del ejemplo 1.0.3, cuya dinámica no es sencillo describir.

En el siguiente capítulo trataremos de precisar a qué nos referimos cuando decimos que la dinámica de una función no es sencilla, pero por lo pronto la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos y de puntos periódicos de todos los periodos nos da ya una idea de las características de una función complicada desde el punto de vista dinámico.

Capítulo 2

Funciones caóticas

2.1 Sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales

Como decíamos en el capítulo anterior, trataremos de concretar lo que queremos decir con que algunas funciones tienen un comportamiento complicado. Una de las características que resultan más importantes es que para condiciones iniciales muy cercanas las órbitas pueden separarse dramáticamente. Se ha hecho popular llamar a esto "efecto mariposa", debido al título de una conferencia pronunciada por Edward N. Lorenz en 1972 en una reunión de la Sociedad Americana para el Avance de la Ciencia: "¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas?", con el que pretendía enfatizar este fenómeno.

Esta propiedad es particularmente importante pues en la práctica es imposible evitar pequeños errores en las mediciones, de manera que el valor inicial no puede conocerse con precisión y el comportamiento real no es nunca exactamente el calculado, pero debido a este fenómeno, no podemos asegurar siquiera que tendremos un comportamiento cercano o parecido al previsto. En consecuencia bajo estas condiciones resulta imposible realizar predicción alguna.

Esta noción que de alguna manera expresa la impredecibilidad de un fenómeno es lo que se llama *sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales*.

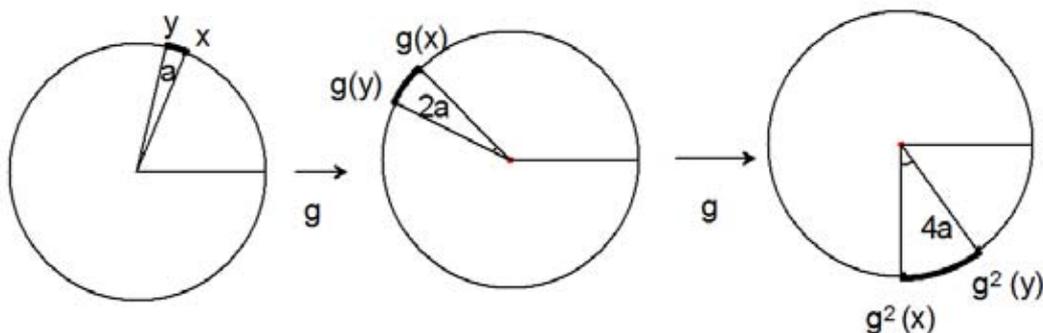
En términos matemáticos la definición se da a continuación.

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Se dice que f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, y para todo número $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ cuya distancia a x es menor que ε , tal que para algún entero n la distancia entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$ es mayor que δ .*

A la constante δ se le suele llamar la constante de sensibilidad.

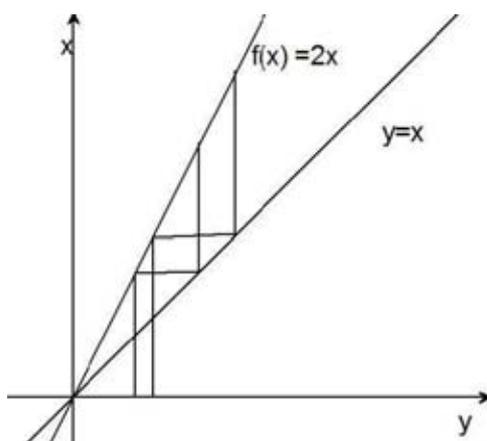
La función $g : S^1 \rightarrow S^1$, del ejemplo 1.0.3 definida por $g(\theta) = 2\theta \pmod{1}$ tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales

Es fácil ver que dados cualesquiera dos puntos x y y , después de aplicar la función g la amplitud del ángulo que abarca el arco \widehat{xy} se duplica, de modo que eventualmente, para algún entero positivo n , el ángulo que abarca al arco formado por $g^n(x)$ y $g^n(y)$ es mayor que $\frac{\pi}{4}$, de hecho existe un entero positivo m tal que, $S^1 = g^m(\widehat{xy})$. De manera que si tomamos cualquier $x \in S^1$ y $\varepsilon > 0$, y elegimos cualquier $y \in V_\varepsilon(x) \subseteq S^1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la distancia entre $g^n(x)$ y $g^n(y)$ será mayor que $\frac{\pi}{4}$.



Como decíamos, el hecho de que una función tenga sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales parece ser el comportamiento más "complicado" que pudiera ocurrírse nos, sin embargo esta condición en sí misma no es suficiente para que el comportamiento de una función sea efectivamente complicado.

Como ejemplo tomemos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$.



Como puede verse en la gráfica la función tiene un único punto fijo en $x = 0$ y si partimos de cualquier punto diferente de cero las órbitas correspondientes se van a infinito o a menos infinito.

Es decir, podemos saber fácilmente, qué pasa con las órbitas de todos los puntos en \mathbb{R} , a esto es a lo que hemos llamado aquí tener una dinámica sencilla.

Sin embargo, tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, pues las órbitas de cada pareja de puntos por muy cercanos que estén entre sí se separan cada vez más cuando n tiende a infinito.

2.2 Transitividad topológica

Otra propiedad que refleja que una función tiene un comportamiento complicado es la conocida como *transitividad topológica*.

La noción de transitividad topológica expresa de alguna manera que las órbitas de los puntos de X se "mezclan" bajo f , pues no es posible encontrar dos subconjuntos abiertos en X tales que las órbitas de los puntos de uno de ellos no caigan en algún momento en el otro.

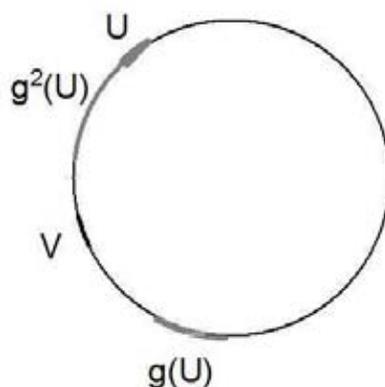
Matemáticamente se define como sigue:

Definición 2.2.1 Sea X un espacio métrico, $f : X \rightarrow X$ una función continua se dice que es **topológicamente transitiva** si para cada pareja de abiertos no vacíos U y V en X existe un número entero positivo n , tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Es decir, que para cada pareja de abiertos no vacíos U y V después de aplicar la función f cierto número de veces hay al menos un elemento del conjunto U que va a caer al conjunto V .

Como ejemplo de una función topológicamente transitiva, podemos citar nuevamente la función $g : S^1 \rightarrow S^1$, del ejemplo 1.0.3 definida por $g(\theta) = 2\theta \pmod{1}$.

Obsérvese que si elegimos dos conjuntos abiertos U y V en S^1 , eventualmente, después de aplicar cierto número de veces la función g , la imagen del conjunto U cubre a todo el círculo S^1 , por lo que interseca necesariamente al conjunto V .



La noción de transitividad topológica puede expresarse de varias formas equivalentes que pueden ser más fáciles de manejar según sea el caso.

Lema 2.2.1 Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) f es topológicamente transitiva.
- ii) Para todo abierto no vacío W en X , el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(W)$ es denso en X .
- iii) Para cualesquiera dos abiertos no vacíos U y V en X , existe un natural k , tal que $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$.
- iv) Si W es abierto no vacío en X , entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$ es denso en X .
- v) Cualquier subconjunto propio D de X cerrado e invariante, es decir tal que $f(D) \subseteq D$, tiene interior vacío.

Demostración

1) *i implica ii*

Sea W un conjunto abierto no vacío en X y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(W)$, queremos entonces demostrar que A es un conjunto denso en X .

Sea U un abierto; como f es topológicamente transitiva existe un número entero positivo n , tal que $f^n(W) \cap U \neq \emptyset$.

Sea $y \in f^n(W) \cap U$, como $y \in f^n(W) \subseteq A$, entonces A es denso en X .

2) *ii implica iii*

Sean U y V dos conjuntos abiertos no vacíos en X y sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V)$.

Como B es denso en X , entonces $U \cap B \neq \emptyset$. Sea $y \in U \cap B$, como $y \in B = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V)$ entonces, existen un entero positivo k y $v \in V$ tales que $f^k(v) = y \in U$. Esto es, $v \in f^{-k}(U) \cap V$.

3) *iii implica iv*

Sea W un conjunto abierto no vacío contenido en X y sea $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$. Queremos demostrar que C es denso en X .

Sea U un conjunto abierto en X , por hipótesis existe un número entero positivo k tal que $f^{-k}(W) \cap U \neq \emptyset$; pero $f^{-k}(W) \subseteq C$, de manera que C es denso en X .

4) *iv implica v*

Sea D un conjunto cerrado e invariante, es decir tal que $f(D) \subseteq D$, con interior no vacío contenido en X .

Sea $W = D^c$ y supongamos que $W \neq \emptyset$. Como W es abierto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$ es denso en X . Como D° es un abierto no vacío $f^{-n}(W) \cap D^\circ \neq \emptyset$ para algún $n \geq 0$, es decir existe $\bar{x} \in D^\circ \subseteq D$ tal que $f^n(\bar{x}) \in W = D^c$ lo que contradice el hecho de que D es invariante. Por lo tanto $W = \emptyset$ lo que implica que $D = X$.

5) *v implica i*

Sean U y V dos conjuntos abiertos no vacíos en X .

Sea $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$. Demostraremos primero que B es invariante bajo f , es decir que $f(B) \subseteq B$.

Sea $x \in B$ tenemos uno de los siguientes dos casos

a) $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$: en este caso es claro que $f(x) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) \subseteq B$.

b) $x \in \left\{ \text{puntos de acumulación de } \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) \right\}$. En este caso existe una sucesión de puntos de la forma $f^{k_n}(u_n)$, donde k_n es un número entero positivo y $u_n \in U$, tales que $\{f^{k_n}(u_n)\}$ converge a x cuando n tiende a infinito. Como la función es continua la sucesión $\{f^{k_n+1}(u_n)\}$ converge a $f(x)$ cuando n tiende a infinito. Esto implica que $f(x) \in \left\{ \text{puntos de acumulación de } \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) \right\} \subseteq B$.

De a) y b) se sigue que $f(B) \subseteq B$.

Ahora, el conjunto B es cerrado y tiene interior no vacío, pues $U \subseteq B$.

Por hipótesis, esto implica que $B = X$.

Sea $v \in V \subseteq X = B$ nuevamente hay dos posibilidades o bien $v \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ lo que implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$, o bien

$$v \in \left\{ \text{puntos de acumulación de } \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) \right\}$$

en este caso sea $V_\varepsilon(v)$ una vecindad de v contenida en V , el hecho de que v es punto de acumulación de $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ nos garantiza que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

□

Un conjunto X se dice que es *perfecto* si para cualquier $x \in X$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $y \neq x$ tal que $y \in V_\varepsilon(x) \cap X$. Demostraremos ahora que si X es perfecto y compacto, el hecho de que f sea topológicamente transitiva es equivalente a la existencia de un punto en X cuya órbita bajo f es un conjunto denso en X .

Antes de abordar la demostración de este resultado observemos que la hipótesis de que X sea perfecto no puede omitirse.

El siguiente es un ejemplo de una función $f : X \rightarrow X$ con una órbita densa en X que no es topológicamente transitiva.

Sea $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y sea $f : X \rightarrow X$ definida por $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ y $f(0) = 0$;

La órbita de $1 \in X$ bajo la función f es densa en X . Sin embargo, la función evidentemente no es topológicamente transitiva.

Teorema 2.2.1 *Si X es perfecto y compacto, entonces f es topológicamente transitiva si y sólo si existe un elemento $x \in X$ tal que $O(x, f)$ es un conjunto denso en X .*

La idea para demostrar que la existencia de un punto x cuya órbita bajo f es densa en X , garantiza la transitividad topológica, es la siguiente:

Como el conjunto $O(x, f)$ es denso en X , dada una pareja de conjuntos abiertos U y V , existen dos enteros positivos m y n tales que $f^m(x) \in U$ y $f^n(x) \in V$. Si pudiéramos elegir $n > m$ tendríamos que para el entero positivo $n - m$, al aplicar la función $n - m$ veces al punto $f^m(x) \in U$, obtendríamos un punto $f^{n-m}(f^m(x)) = f^n(x)$ en el conjunto V .

Para garantizar que si X es perfecto, podemos elegir n de manera que sea mayor que m , demostraremos primero que en V hay una infinidad de elementos de la órbita de x bajo f .

Demostración

Sean U y V dos conjuntos abiertos en X . Tomemos $x \in X$ tal que su órbita, $O(x, f)$, es un conjunto denso en X .

Como dijimos, demostraremos primero que en V hay una infinidad de elementos de $O(x, f)$.

Por ser V abierto, existe un número entero positivo k tal que $f^k(x) = x_k \in V$.

El hecho de que X es perfecto garantiza la existencia de una sucesión $\{y_n\} \subseteq X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_k$ y tal que $y_n \neq x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea \tilde{n} tal que $y_{\tilde{n}} \in V$. Ya que V es abierto, podemos elegir una vecindad $V_\delta(y_{\tilde{n}}) \subseteq V$ tal que $x_k \notin V_\delta(y_{\tilde{n}})$. Entonces existe un elemento de la órbita de x que está en $V_\delta(y_{\tilde{n}}) \subseteq V$. Por lo tanto en V hay un elemento de la órbita de x diferente de x_k , como para cada vecindad podemos encontrar $x_{k'} \neq x_k$ tomando vecindades cada vez más pequeñas concluimos que en V hay una infinidad de elementos de $O(x, f)$.

Demostraremos ahora que f es topológicamente transitiva.

Por ser $O(x, f)$ un conjunto denso en X , existe un entero positivo m tal que $f^m(x) \in U$. Por lo que hicimos en el párrafo anterior, existe un entero $n > m$ tal que $f^n(x) \in V$; entonces $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ y, por lo tanto, f es topológicamente transitiva.

Supongamos ahora que f es topológicamente transitiva.

Como X es compacto, para cada entero positivo n hay un número finito $m(n) = m_n$ de bolas de radio $\frac{1}{n}$ que cubre a X , y que denotamos por $U_{1n}, U_{2n}, \dots, U_{m_n n}$. Para cada número natural n , tomemos la correspondiente colección de bolas de radio $\frac{1}{n}$ que cubre a X : $U_{11}, U_{21}, \dots, U_{m_1 1}, U_{12}, U_{22}, \dots, U_{m_2 2}, \dots$. Esta colección es numerable, por lo que podemos renombrar a estos conjuntos como U_1, U_2, \dots .

Por el lema 2.2.1, para cada entero positivo k el conjunto $G_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U_k)$ es abierto y denso en X , y como X es completo, se sigue por un teorema de categoría de Baire¹, que existe un punto $x \in X$ que está en G_k para toda k .

Demostraremos ahora que la órbita de dicho punto x es un conjunto denso en X . Si U es un conjunto abierto en X , entonces existe un conjunto U_{k_1} de los que construimos antes que está contenido en U . Como $x \in G_{k_1}$ hay un elemento de la órbita de x en $U_{k_1} \subseteq U$. Por lo tanto la órbita de x es densa en X . \square

Para probar que la existencia de una órbita densa garantiza la transitividad topológica, otra posibilidad es demostrar primero que si $O(x, f)$ es denso en X , entonces la órbita de cualquier iteración de x bajo f , $O(f^n(x), f)$ es también un conjunto denso en X . Y tomar entonces un elemento de la órbita de x , $f^n(x) \in V$ y un elemento de la órbita de $f^n(x)$, $f^m(f^n(x)) = f^{m+n}(x) \in U$. Ver [9].

Observación 2.2.2 $g : S^1 \rightarrow S^1$ tiene una órbita densa en S^1 .

La existencia de una órbita densa, que queda garantizada por la transitividad topológica, por extraño que parezca, no es tampoco suficiente para garantizar que una función tiene un comportamiento complicado desde el punto de vista dinámico. Como ejemplo de esto presentamos el siguiente resultado, según el cual si r_α es una rotación de un ángulo α , irracional, del círculo S^1 , las órbitas de todos los puntos de S^1 bajo r_α son densas en S^1 . Claramente la función r_α no tiene un comportamiento complicado.

Teorema 2.2.3 de Jacobi Si $r_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$, es una rotación de S^1 con un ángulo α irracional, $O(\theta, r_\alpha)$ es un conjunto denso en S^1 para todo $\theta \in S^1$.

Demostración

Sea $\theta \in S^1$, demostraremos primero que $O(\theta, r_\alpha)$ tiene una infinidad de elementos. Supongamos que $r_\alpha^n(\theta) = r_\alpha^m(\theta) \pmod{1}$ entonces, $\theta + n\alpha = \theta + m\alpha \pmod{1}$, es decir $(n - m)\alpha \in \mathbb{Z}$ lo cual implica que $n = m$, en otras palabras, todos los elementos de la órbita de θ son distintos en S^1 y son por lo tanto una infinidad.

¹Teorema de categoría de Baire

Supongamos que X es un espacio métrico completo y $\{G_n\}$ es una sucesión de subconjuntos densos y abiertos de X entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un conjunto no vacío, (de hecho es denso en X).

Principles of Mathematical Analysis, Walter Rudin p.71

Sea $\theta_0 \in S^1$ y sea $\varepsilon > 0$ queremos encontrar un elemento de $O(\theta, r_\alpha)$ en la vecindad $V_\varepsilon(\theta_0)$.

Como S^1 es acotado, $O(\theta, r_\alpha)$ tiene un punto de acumulación. Entonces; para $\varepsilon > 0$, existen enteros k_1 y k_2 con $k_1 < k_2$, tales que $d(r_\alpha^{k_1}(\theta), r_\alpha^{k_2}(\theta)) < \varepsilon$. Como la función r_α preserva las distancias en S^1 , si tomamos $m = k_1 - k_2$, entonces $d(r_\alpha^m(\theta), \theta) < \varepsilon$; En consecuencia para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $d(r_\alpha^m(\theta), \theta) = d(r_\alpha^{2m}(\theta), r_\alpha^m(\theta)) = d(r_\alpha^{3m}(\theta), r_\alpha^{2m}(\theta)) = \dots = d(r_\alpha^{(n+1)m}(\theta), r_\alpha^{nm}(\theta))$. Por lo que tomando un número finito de elementos del conjunto $A = \{\theta, r_\alpha^m(\theta), r_\alpha^{2m}(\theta), r_\alpha^{3m}(\theta) \dots\}$ dividimos al círculo S^1 en arcos con longitud menor que ε . Necesariamente alguno de estos elementos de A está en $V_\varepsilon(\theta_0)$. \square

2.3 Definición de Caos

Es conveniente aclarar que no existe actualmente una definición de función caótica aceptada por todos. En este trabajo asumiremos la definición de función caótica propuesta por Devaney.

Definición 2.3.1 *Sea X un espacio métrico compacto y perfecto. Una función continua $f : X \rightarrow X$ es caótica si:*

- 1.- *El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X .*
- 2.- *f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.*
- 3.- *f es topológicamente transitiva.*

Haremos sin embargo algunos comentarios. Veremos que las tres condiciones propuestas por Devaney no son independientes; a pesar de que la sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, es en cierto sentido, la condición que más refleja la idea de que una función sea complicada, es decir, caótica, podemos prescindir de ella en la definición ya que es suficiente pedir que una función tenga un conjunto denso de puntos periódicos y que sea topológicamente transitiva para garantizar que tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Ver [4].

Teorema 2.3.1 *Si f tiene transitividad topológica y densidad de puntos periódicos, entonces f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.*

Dado $x \in X$ la idea es encontrar un punto s cercano a x tal que después de aplicar la función f un cierto número de veces $f^n(x)$ y $f^n(s)$ se separen más que una cierta distancia $\delta > 0$. Para hacerlo, encontraremos primero un punto periódico q tal que toda su órbita esté "lejos" de x , después encontraremos un punto periódico p muy cercano a x , podemos hacer esto ya que los puntos periódicos de f son un conjunto

denso en X . Encontraremos también otro punto y cercano a x , tal que su órbita se acerque a la órbita de q , es decir se "aleje" de x . Buscaremos entonces un punto de la órbita de y , $f^k(y)$, de manera que k sea múltiplo del periodo de p entonces $f^k(p) = p$, y como p está cerca de x y $f^k(y)$ está "lejos" de x , podemos concluir que $f^k(y)$ y $f^k(p)$ están "lejanos" entre sí, por lo que $f^k(x)$ debe estar lejos de alguno de los dos. Elegiremos entonces el punto s que busquemos como y ó como p .

Demostración

Demostraremos primero que existe una distancia $\delta_0 > 0$ tal que, para toda $x \in X$ hay un punto periódico q , cuya órbita $O(q, f)$ dista de x al menos $\frac{\delta_0}{2}$, es decir tal que $d(x, y) \geq \frac{\delta_0}{2}$ para todo $y \in O(q, f)$.

Sean q_1 y q_2 dos puntos periódicos con órbitas ajenas. Sea δ_0 la distancia entre dichas órbitas, es decir, sea $\delta_0 = \min \{d(x, y) \mid x \in O(q_1, f), y \in O(q_2, f)\}$. Sea $x \in X$, veamos que la distancia de x a alguna de las dos órbitas es mayor o igual que $\frac{\delta_0}{2}$.

Supongamos que existen $x_1 \in O(q_1, f)$ y $y_1 \in O(q_2, f)$ tales que $d(x, y_1) < \frac{\delta_0}{2}$ y $d(x, x_1) < \frac{\delta_0}{2}$ entonces la distancia de x_1 a y_1 sería menor que δ_0 lo cual no es posible. En consecuencia $d(x, O(q_i, f)) \geq \frac{\delta_0}{2}$ para alguna $i = 1, 2$.

Demostraremos ahora que f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales y que $\delta = \frac{\delta_0}{8}$ sirve como constante de sensibilidad.

Sean $x \in X$ y N vecindad de x ; Sea $U = N \cap B_\delta(x)$. Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X , existe un punto periódico $p \in U$. Supongamos que n es el periodo de p , es decir que $f^n(p) = p$.

Como ya demostramos en la primera parte existe un punto periódico de f cuya órbita dista de x más que $\frac{\delta_0}{2} = 4\delta$, llamémosle q .

Sea $V = B_\delta(q) \cap f^{-1}(B_\delta(f(q))) \cap \dots \cap f^{-n}(B_\delta(f^n(q)))$, es decir,

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

Evidentemente $q \in V$.

Los conjuntos U y V son abiertos en X . Como f es topológicamente transitiva, existe $y \in U$ y un entero positivo k , tal que $f^k(y) \in V$.

La idea ahora es ver que eventualmente la órbita de y se mantiene cerca de la órbita de q .

Tomemos $j = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1$ (con $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ igual al mayor entero menor o igual que $\frac{k}{n}$); entonces, $\frac{k}{n} < j \leq \frac{k}{n} + 1$, y por lo tanto, tenemos que $0 < nj - k \leq n$. Como $nj - k$ es un número entero mayor que cero, sabemos que es mayor o igual que 1 y menor o igual que n . Obsérvese que $f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V)$.

Como $V \subseteq f^{-(nj-k)}(B_\delta(f^{nj-k}(q)))$, entonces $f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q))$; de donde $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$. Además por ser n el periodo de p tenemos que $f^{nj}(p) =$

$p \in B_\delta(x)$.

Demostraremos entonces que la distancia entre $f^{nj}(y)$ y $f^{nj}(p)$ es mayor que 2δ :

$$d(x, p) + d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj}(y))$$

y

$$d(x, f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)),$$

entonces

$$d(x, p) + d(p, f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)).$$

Como p está en $B_\delta(x)$ y $f^{nj}(y)$ está en $B_\delta(f^{nj-k}(q))$, entonces $d(p, x) < \delta$ y $d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) < \delta$.

Como $f^{nj-k}(q)$ es un punto de la órbita de q su distancia a x es mayor o igual que 4δ , es decir, $d(x, f^{nj-k}(q)) \geq 4\delta$.

Entonces la distancia entre $f^{nj}(p)$ y $f^{nj}(y)$ es mayor que 2δ .

Por último demostraremos que p ó y se alejan de x en más que δ .

$$2\delta < d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y))$$

Por lo tanto una de las dos distancias es mayor que δ . \square

En consecuencia, la definición de caos propuesta por Devaney sólo requiere las condiciones 1 y 3. En este trabajo adoptaremos como definición de función caótica las condiciones 1 y 3 ó el equivalente de ésta última, que exista un punto cuya órbita sea un conjunto denso en X .

Ejemplo 2.3.1 El espacio $\Sigma = \{a_1a_2a_3... \mid a_i \in \{0,1\} \text{ para todo } i = 1 \in \mathbb{N}\}$, es un espacio métrico con la distancia definida de la siguiente manera: Sean $\bar{a} = a_1a_2a_3...$ y $\bar{b} = b_1b_2b_3...$ dos elementos de Σ . Supongamos que $a_i = b_i$ para todo $i < k$ y que $a_k \neq b_k$ entonces la distancia $d(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{k}$.

Sea la función $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida como $\sigma(a_1a_2a_3...) = a_2a_3a_4...$

La función así definida es continua. Demostraremos que es caótica:

1) σ tiene un conjunto de puntos periódicos denso en Σ .

Sea $\bar{a} = a_1a_2a_3... \in \Sigma$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea k tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. el elemento de Σ definido como $a_1a_2a_3...a_k a_1a_2a_3...a_k...$ es un punto periódico de periodo k que dista de \bar{a} menos que ε .

2) σ tiene un punto con una órbita densa en Σ

El punto

01000110110000010100111001011101110000...

formado por los dos símbolos 0 y 1 seguidos de todas las parejas formadas con los dos símbolos, seguidas a su vez por todas las ternas, etc. es un punto cuya órbita es densa en Σ .

Como Σ es perfecto las propiedades 1 y 2 implican que σ es caótica.

2.3.1 ¿Puede sustituirse este par de condiciones por otro par de las propuestas por Devaney?

En vista del teorema 2.3.1 resulta natural preguntarnos si podemos seleccionar cualquier par de condiciones de la definición y probar la tercera, es decir, si es o no cierto que las condiciones 1 y 2 implican la condición 3 o que las condiciones 2 y 3 implican la condición 1. Daremos ejemplos de que no es así:

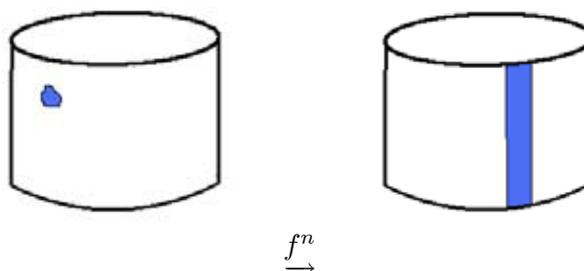
Ejemplo 2.3.2 1 y 2 no implica 3.

Tomemos el círculo unitario S^1 y el intervalo $[0, 1]$, consideremos el cilindro $Y = S^1 \times [0, 1]$. Definimos la función continua $f : Y \rightarrow Y$ por $f(e^{i\theta}, t) = (e^{i2\theta}, t)$. Obsérvese que la función f así definida es, para cada $t_0 \in [0, 1]$, nuestra conocida función del ejemplo 1.0.3, por lo que sabemos que los puntos periódicos de f son un conjunto denso en Y y además f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Sin embargo f no es topológicamente transitiva, pues si tomamos los conjuntos abiertos U y V como sigue $U = S^1 \times [0, \frac{1}{2})$ y $V = S^1 \times (\frac{1}{2}, 1]$ vemos que $f^n(U) \cap V = U \cap V = \emptyset$ para todo entero positivo n .

Ejemplo 2.3.3 2 y 3 no implica 1.

Tomemos nuevamente el cilindro $Y = S^1 \times [0, 1]$ definimos $f : Y \rightarrow Y$ como $f(\theta, t) = (g(\theta), T(t))$ donde $g(\theta) = \theta + \alpha$ con α irracional y $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función caótica. Es decir para cada $\theta_0 \in S^1$ la función f restringida a $\{(\theta_0, t) \mid t \in [0, 1]\}$ es caótica y es una rotación de un ángulo irracional restringida a $\{(\theta, t_0) \mid \theta \in S^1\}$.

La sensibilidad de T implica que si tomamos un conjunto abierto $U \subset Y$, su imagen bajo f eventualmente cubrirá toda una franja, lo que implica que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.



Además por el teorema de Jacobi la primera coordenada de la función f , $g(\theta) = \theta + \alpha$ tiene transitividad topológica, por lo que la franja $f^n(U)$ intersecta eventualmente a cualquier otro abierto $V \subset Y$, es decir f es topologicamente transitiva, sin embargo f no tiene ningún punto periódico, pues $g^n(\theta) \neq \theta$ de manera que $f^n(\theta, t) = (g^n(\theta), T^n(t)) \neq (\theta, t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Conjugación topológica

Sean X y Y espacios topológicos y sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones. Una función continua y suprayectiva $\alpha : X \rightarrow Y$ es una *semi-conjugación* entre f y g si para todo $x \in X$ se tiene que $\alpha \circ f(x) = g \circ \alpha(x)$, esto es, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

En este caso se dice que f y g son semi-conjugadas. Si además α es un homeomorfismo entonces α es llamada una *conjugación topológica* y se dice que f y g son topológicamente conjugadas.

Como en ambos casos, $\alpha \circ f = g \circ \alpha$, $\alpha \circ f^2 = (g \circ \alpha) \circ f = g \circ (g \circ \alpha) = g^2 \circ \alpha$, etc, y en general $\alpha \circ f^n = g^n \circ \alpha$, la imagen de una órbita de f bajo una semi-conjugación, o bajo una conjugación topológica, va a dar a una órbita de g . En vista de esto, tiene sentido preguntarnos qué propiedades dinámicas de la función f se preservan bajo una semi-conjugación o bajo una conjugación topológica.

Lema 2.4.1 *Sean f y g dos funciones tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

con α una semi-conjugación.

Se cumple lo siguiente:

(a) *Si el conjunto de puntos periódicos de $f : X \rightarrow X$ es denso en X , entonces el conjunto de puntos periódicos de $g : Y \rightarrow Y$ es denso en Y .*

(b) *Si $f : X \rightarrow X$ es topológicamente transitiva, entonces $g : Y \rightarrow Y$ es topológicamente transitiva.*

Demostraremos que los puntos periódicos bajo f van a dar a puntos periódicos bajo g y que si un punto tiene una órbita densa en X bajo f va a dar a un punto con órbita densa en Y bajo g .

Demostración

(a) Sean $y \in Y$, y U una vecindad de y . Como α es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $\alpha(x) = y$. Entonces $\alpha^{-1}(U)$ es una vecindad de x . Como el conjunto de los puntos periódicos de f es denso en X , hay un punto periódico de f en la vecindad $\alpha^{-1}(U)$. Sea p ese punto y supongamos que n es su periodo. Observemos que $\alpha(p) \in U$, además $\alpha(p)$ es un punto periódico de g , ya que $g^n(\alpha(p)) = \alpha(f^n(p)) = \alpha(p)$. Por lo tanto el conjunto de puntos periódicos de g es un conjunto denso en Y .

(b) Sea x tal que su órbita bajo f es densa en X . Demostraremos que la órbita de $\alpha(x)$ bajo g es densa en Y , es decir, que $\overline{O(\alpha(x), g)} = Y$.

Sea $y \in Y$ y sea U una vecindad de y . Entonces $\alpha^{-1}(U)$ es un abierto en X , por lo que existe k tal que $f^k(x) \in \alpha^{-1}(U)$. Con ello $\alpha \circ f^k(x) \in U$, y entonces, $g^k(\alpha(x)) = \alpha \circ f^k(x) \in U$. Por lo tanto $\overline{O(\alpha(x), g)} = Y$. \square

El lema anterior demuestra que si f es semi-conjugada con g entonces, si f es caótica g también lo es. En consecuencia, si además f y g son topológicamente conjugadas, entonces f es caótica si y sólo si g es caótica.

El siguiente ejemplo muestra que la sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales no pasa de una función a otra bajo una conjugación.

Sean $X = (1, \infty)$; $Y = [0, \infty)$; $f : X \rightarrow X$, definida por, $f(x) = 2x$; $g : Y \rightarrow Y$, definida por $g(y) = \log 2 + y$. Sea $\alpha(x) = \log x$. Observemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{2x} & X \\ \log x \downarrow & & \log x \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\log 2 + y} & Y \end{array}$$

En efecto: $\alpha(f(x)) = \alpha(2x) = \log(2x) = \log 2 + \log x = \log 2 + \alpha(x) = g(\alpha(x))$.

Pero nótese que a pesar de que f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, g no.

El siguiente resultado muestra que si X y Y son compactos, la sensibilidad a las condiciones iniciales sí se preserva bajo una conjugación.

Lema 2.4.2 Sean X y Y son dos conjuntos compactos y sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones topológicamente conjugadas. Si f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, entonces g tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.

Supongamos que el siguiente diagrama conmuta y que α es una conjugación topoló

gica entre f y g .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Para demostrar este lema llamaremos δ_X a la constante de sensibilidad de la función f y construiremos el conjunto $M \subseteq X \times X$, de la siguiente manera

$$M = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid d(x_1, x_2) \geq \delta_X\}.$$

Como f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, para toda $x_1^* \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existen $x_2^* \in V_\varepsilon(x_1^*)$ y un número entero positivo n , tales que $(f^n(x_1^*), f^n(x_2^*)) \in M$. Llamaremos N a la imagen de M bajo la función continua $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow Y \times Y$ definida por $\bar{\alpha}(x_1, x_2) = (\alpha(x_1), \alpha(x_2))$.

Como $(\alpha \circ f^n(x_1^*), \alpha \circ f^n(x_2^*)) \in N$, completaremos la prueba demostrando que los elementos de N son parejas cuyas coordenadas están a una distancia mayor o igual que un número positivo al que tomaremos como constante de sensibilidad para la función g .

Demostración

Sean X y Y dos conjuntos compactos, sean $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$ dos funciones topológicamente conjugadas y supongamos que f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.

Sea δ_X la constante de sensibilidad correspondiente a la función f . Sea

$$M = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid d(x_1, x_2) \geq \delta_X\}.$$

Dada $x_1^* \in X$ y $\varepsilon > 0$, tomamos $x_2^* \in V_\varepsilon(x_1^*)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f^n(x_1^*), f^n(x_2^*)) \in M$. Como $X \times X$ es compacto, para demostrar que M lo es, basta demostrar que es cerrado.

Sea $p = (p_1, p_2)$ un punto de acumulación de M y sea $\{(x_k^1, x_k^2)\}$ una sucesión de elementos de M que converge a p ; entonces $\{x_k^1\} \rightarrow p_1$ y $\{x_k^2\} \rightarrow p_2$. Cuando k tiende a infinito. Para cada k la distancia $d(x_k^1, x_k^2) \geq \delta_X$, lo que implica que $d(p_1, p_2) \geq \delta_X$, por lo que $p \in M$, lo que implica que M es compacto.

Como la función $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow Y \times Y$ definida como $\bar{\alpha}(x_1, x_2) = (\alpha(x_1), \alpha(x_2))$ es continua, entonces el conjunto $N = \bar{\alpha}(M)$, es decir,

$$N = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid y_1 = \alpha(x_1), y_2 = \alpha(x_2) \text{ para } (x_1, x_2) \in M\},$$

es compacto.

Demostraremos que el ínfimo de $\{d(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) \in N\}$ es estrictamente mayor que cero.

Como $d: N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida de un conjunto compacto a los reales, entonces alcanza su mínimo.

Supongamos que existe $(y_1, y_2) \in N$ tal que $d(y_1, y_2) = 0$; entonces $y_1 = y_2$. Como $\bar{\alpha}(M) = N$, existe $(x_1, x_2) \in M$ tal que $\alpha(x_1) = y_1 = y_2 = \alpha(x_2)$, como α es un homeomorfismo esto implica que $x_1 = x_2$ lo cual contradice el hecho de que $(x_1, x_2) \in M$. Por lo tanto $\delta_Y = \min \{d(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) \in N\}$ es estrictamente mayor que cero.

Probaremos ahora que la función g tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales con δ_Y como constante de sensibilidad.

Sean $y_0 \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Como α es un homeomorfismo, existe $x_0 \in X$ tal que $\alpha(x_0) = y_0$ y $\alpha^{-1}(V_\varepsilon(y_0)) = U$ es un conjunto abierto con $x_0 \in U \subseteq X$. Como f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales existen $x_1 \in U$ y un número entero positivo n tales que $d(f^n(x_0), f^n(x_1)) \geq \delta_X$. Sea $y_1 = \alpha(x_1) \in V_\varepsilon(y_0)$.

Como $(f^n(x_0), f^n(x_1)) \in M$, entonces $(\alpha(f^n(x_0)), \alpha(f^n(x_1))) \in N$, es decir

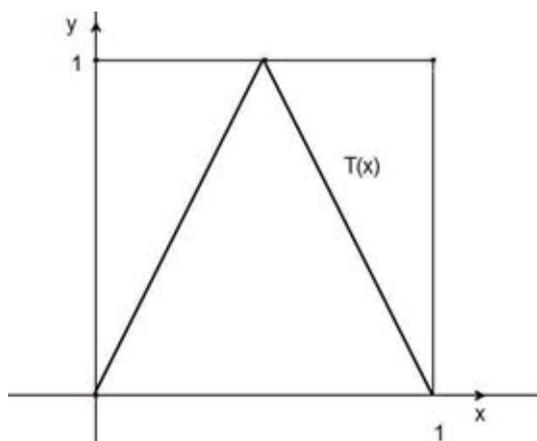
$$d(\alpha(f^n(x_0)), \alpha(f^n(x_1))) = d(g^n(\alpha(x_0)), g^n(\alpha(x_1))) = d(g^n(y_0), g^n(y_1)) \geq \delta_Y.$$

Por lo que g tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. \square

La función $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

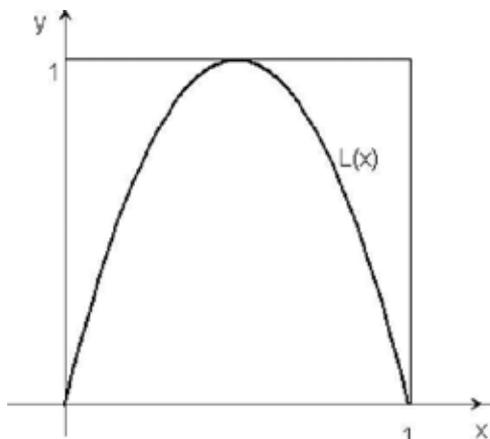
es conocida como la tienda.



La función $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$L(x) = 4x(1 - x).$$

Es conocida como la logística.



Estas dos funciones son topológicamente conjugadas con $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $\alpha(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Veamos:

$$\begin{aligned} L \circ \alpha(x) &= L\left(\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \\ &= 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \\ &= \text{sen}^2(\pi x) \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\alpha \circ T(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}2x\right) = \text{sen}^2(\pi x)$$

Y si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\alpha \circ T(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}(2 - 2x)\right) = \text{sen}^2(\pi - \pi x) = \text{sen}^2(\pi x)$$

Por lo que efectivamente el diagrama conmuta.

El hecho de que estas dos funciones son conjugadas se utiliza para estudiar aspectos de la dinámica de $L(x)$ a través del estudio de los aspectos dinámicos de $T(x)$ que son más fáciles de estudiar. Ver [1].

Ejemplo 2.4.1 Denotamos por $\widehat{\theta_1\theta_2}$, con θ_1 y θ_2 en $[0, 1)$, el arco en S^1 que va del ángulo θ_1 al ángulo θ_2 . Definimos en el círculo unitario S^1 los siguientes arcos

$$\begin{aligned} S_0 &= \widehat{0\frac{1}{2}} & S_1 &= \widehat{\frac{1}{2}1} \\ S_{00} &= \widehat{0\frac{1}{4}} & S_{01} &= \widehat{\frac{1}{4}\frac{1}{2}} & S_{10} &= \widehat{\frac{1}{2}\frac{3}{4}} & S_{11} &= \widehat{\frac{3}{4}1} \\ S_{000} &= \widehat{0\frac{1}{8}} & S_{001} &= \widehat{\frac{1}{8}\frac{1}{4}} & S_{010} &= \widehat{\frac{1}{4}\frac{3}{8}} & S_{011} &= \widehat{\frac{3}{8}\frac{1}{2}} \\ S_{100} &= \widehat{\frac{1}{8}\frac{5}{8}} & S_{101} &= \widehat{\frac{5}{8}\frac{3}{4}} & S_{110} &= \widehat{\frac{3}{4}\frac{7}{8}} & S_{111} &= \widehat{\frac{7}{8}1} \end{aligned}$$

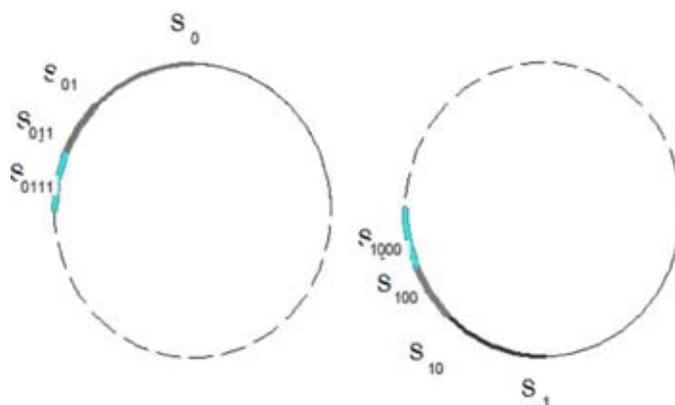
En general cada arco $S_{a_1 a_2 \dots a_k}$ se divide a la mitad dando lugar a los arcos $S_{a_1 a_2 \dots a_k 0}$ y $S_{a_1 a_2 \dots a_k 1}$.

Entre el espacio Σ definido en el ejemplo 2.3.1 y el círculo unitario S^1 definimos la función α de la siguiente manera:

$$\alpha(a_1 a_2 a_3 \dots) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_{a_1 a_2 a_3 \dots a_i}.$$

Como la longitud de cada arco $S_{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}}$ es la mitad de la de $S_{a_1 a_2 \dots a_k}$, la intersección que aparece del lado derecho de la anterior igualdad es sólo un punto, por lo que la función α está bien definida.

La función α es continua pero no es un homeomorfismo, pues por ejemplo, la imagen bajo α de los puntos 011111... y 100000... es el mismo punto en S^1 :

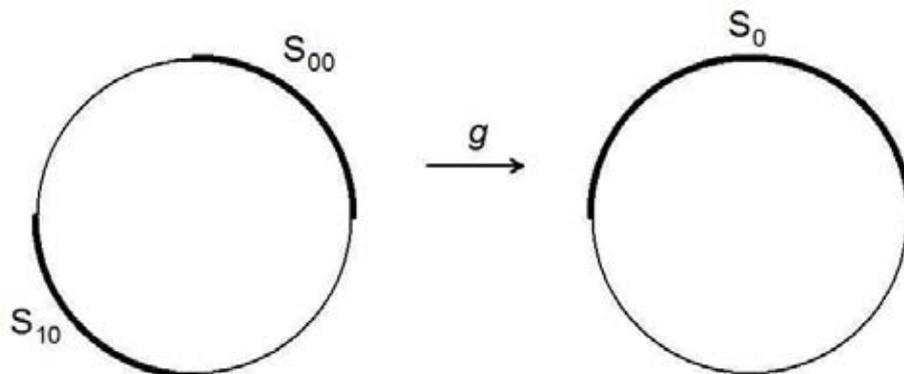


Tomemos la función del ejemplo 2.3.1 $\sigma(a_1 a_2 a_3 \dots) = a_2 a_3 a_4 \dots$ y la función del ejemplo 1.0.3 $g(\theta) = 2\theta \pmod{1}$ definida de S^1 en sí mismo.

Veremos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

Obsérvese primero que S_{00} y S_{10} van a dar bajo g a S_0



En general $S_{0a_2a_3\dots}$ y $S_{1a_2a_3\dots}$ van a dar bajo g a $S_{a_2a_3\dots}$.

Entonces

$$g \circ \alpha(a_1a_2a_3\dots) = g\left(\prod_{i=1}^{\infty} S_{a_1a_2a_3\dots}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} g(S_{a_1a_2a_3\dots}) = \prod_{i=1}^{\infty} S_{a_2a_3\dots}$$

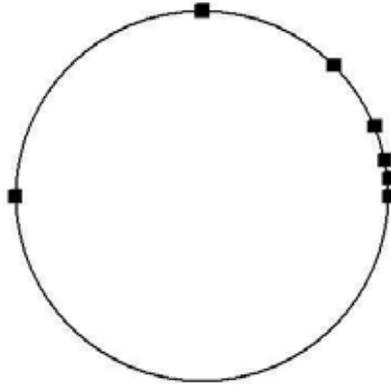
$$\alpha \circ \sigma(a_1a_2a_3\dots) = \alpha(a_2a_3\dots) = \prod_{i=1}^{\infty} S_{a_2a_3\dots}$$

Lo que muestra que σ y g son semi-conjugadas. Con esto podríamos demostrar una vez más que g es caótica, pero además podemos estudiar algunas otras características de la dinámica de g aprovechando el estudio de la dinámica de σ .

Por ejemplo, ya vimos antes que los ángulos racionales en S^1 son puntos periódicos o preperiódicos de g ; vimos además que en S^1 hay ángulos, evidentemente irracionales, con una órbita bajo g densa en S^1 . La pregunta que quedaría por responder es si todos los ángulos irracionales tienen órbita densa en S^1 bajo g . Lo siguiente muestra que no es así.

El punto $\bar{b} = 01001000100001\dots \in \Sigma$ tiene una órbita cuyos puntos de acumulación son los puntos de Σ formados por ceros y un sólo uno. En consecuencia la órbita de $\alpha(\bar{b}) \in S^1$ bajo g es un conjunto cuyos puntos de acumulación son el ángulo $\theta = 0$ y

todos los de la forma $\theta = \frac{1}{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

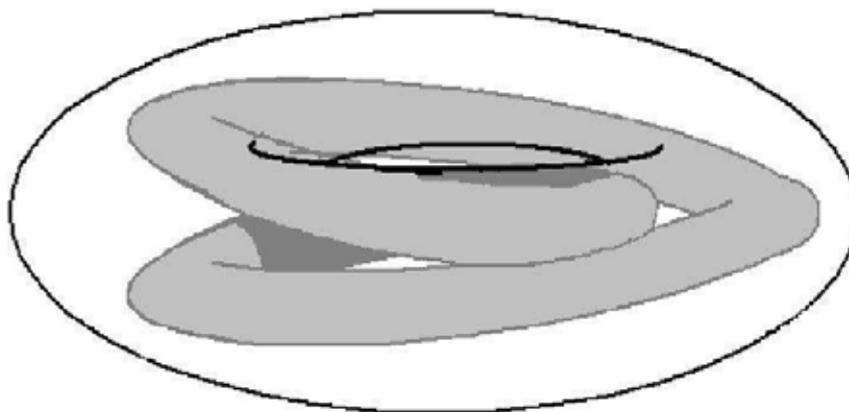


Capítulo 3

El solenoide

En este capítulo estudiaremos la dinámica de una función definida de un toro sólido en sí mismo.

Consideremos un toro sólido D y una función continua $F : D \rightarrow D$ que manda a D en otro "toro" que da dos vueltas dentro de D como se ve en la figura.



Nuestro interés es estudiar la dinámica de la función F en D y además, la topología del conjunto invariante asociado a esta dinámica, que describimos a continuación.

Si aplicamos dos veces la función F , $F^2(D)$ será un toro que da dos vueltas dentro de $F(D)$ y, por lo tanto, cuatro vueltas dentro de D . Después de iterar n veces tenemos que $F^n(D)$ es un toro que da 2^n vueltas dentro de D .

Consideremos entonces el conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(D).$$

Demostraremos que este conjunto es un compacto no vacío, que es conexo y veremos también otras de sus propiedades topológicas.

Consideremos el conjunto D definido como $S^1 \times B^2 \subseteq \mathbb{R}^4$ donde S^1 es el círculo unitario y B^2 es un disco de radio 1; este conjunto en \mathbb{R}^4 es homeomorfo a un toro sólido en \mathbb{R}^3 (ver anexo al final de este capítulo).

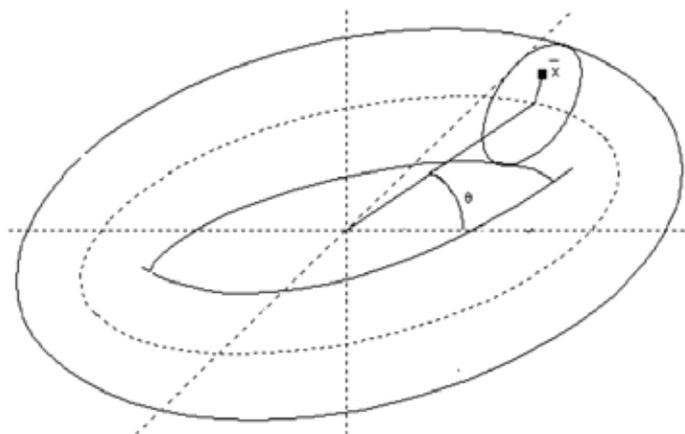
Hay muchas formas de definir analíticamente una función que mande al toro D en otro toro que da dos vueltas dentro de D , de la manera que describimos antes.

Aquí utilizaremos la siguiente fórmula para F :

$$F(\theta, p) = \left(2\theta, \frac{1}{10}p + \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta} \right),$$

donde $p \in B^2$ y $\theta \in [0, 1]$.

Para dar una idea geométrica de la función F tomemos un punto $\bar{x} \in D$, es decir una pareja $\bar{x} = (\theta, p)$ donde $\theta \in [0, 1]$ de manera que $e^{2\pi i\theta} \in S^1$ y $p \in B^2$ el punto \bar{x} en el toro se localiza en la siguiente figura.

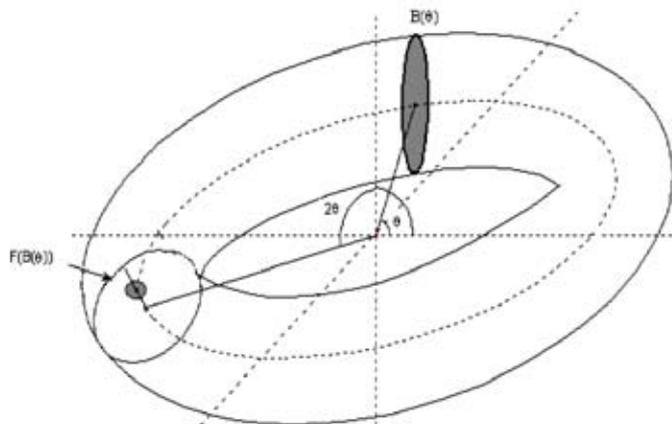


Tomemos un ángulo fijo θ_1 y consideremos todos los puntos en D que tienen $\theta = \theta_1$ y p en B^2 . El resultado será el siguiente disco que llamamos $B(\theta_1)$:

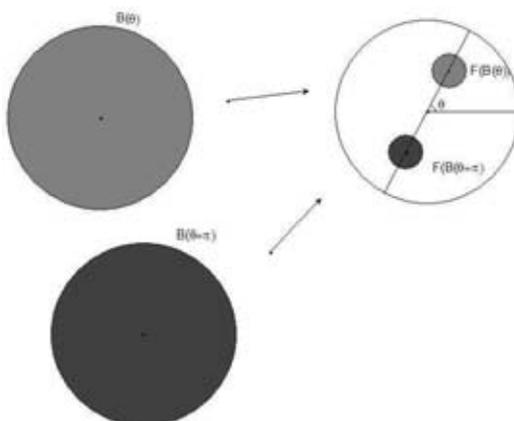
$$B(\theta_1) = \{ \bar{x} = (\theta, p) \in D \mid \theta = \theta_1; p \in B^2 \}.$$

Observemos que la imagen bajo F del disco $B(\theta_1)$, $F(B(\theta_1))$, es un disco con radio

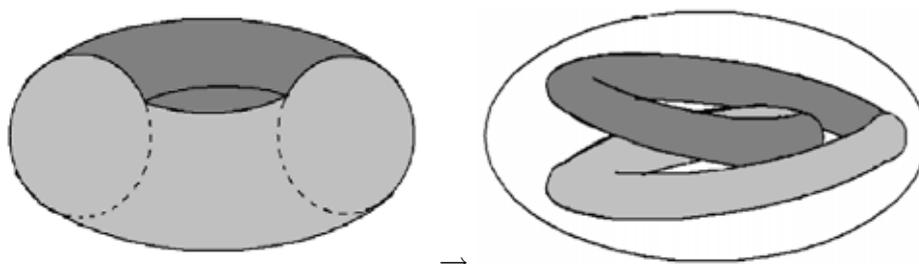
$\frac{1}{10}$ y centro en el punto $\frac{1}{2}e^{2\pi i\theta_1}$, contenido en el disco $B(2\theta_1)$.



Además, el disco $B(\theta + \frac{1}{2})$ se transforma, bajo la función F , también en un disco de radio $\frac{1}{10}$ contenido en el disco $B(2\theta_1)$, pero cuyo centro es diametralmente opuesto al centro del disco $F(B(\theta_1))$.



Cuando θ toma valores en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, la imagen de D bajo F da una vuelta completa dentro de D y cuando θ toma valores en $[\frac{1}{2}, 1]$, $F(D)$ da una segunda vuelta dentro de D . Consideremos ahora al conjunto Λ .



Para cualquier función f inyectiva se cumple que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Como

nuestra función F es inyectiva, tenemos que

$$F(\Lambda) = F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(D)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^{n+1}(D) = \Lambda.$$

Esto implica que si aplicamos la función F a puntos de Λ e iteramos seguimos siempre en Λ ; dicho de otra forma, Λ es totalmente invariante bajo F . Además $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ es un homeomorfismo.

Por otro lado, si tomamos cualquier punto x en D que no esté en Λ , al aplicar la función e iterar, $F^n(x)$ está cada vez más cerca de Λ cuando n tiende a infinito, si bien es posible que la órbita de x bajo F , $O(x, F)$, no sea una sucesión convergente a un punto en Λ . Por esta razón se dice que Λ es un atractor.

De aquí que estudiaremos la dinámica de F restringida a Λ , pues éste es el conjunto interesante desde el punto de vista dinámico.

Pero empecemos por estudiar algunas de las propiedades topológicas de este conjunto.

Proposición 3.0.1 Λ es un compacto no vacío.

Demostración

Ya que D es compacto, y F^n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $F^n(D)$ es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$. Además

$$F^n(D) \supset F^{n+1}(D) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Como la intersección de compactos anidados no vacíos es un compacto no vacío, Λ es un compacto no vacío. \square

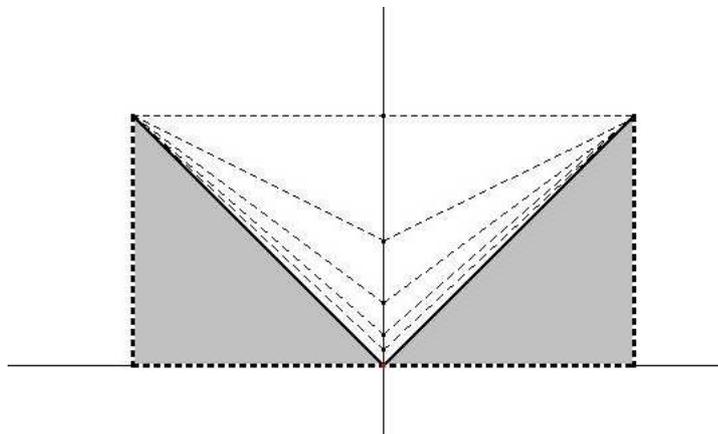
Proposición 3.0.2 Λ es conexo.

Demostración

Como D es conexo y compacto y F^n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, cada $F^n(D)$ es conexo y compacto. Para demostrar que Λ es conexo demostraremos en general que la intersección de conexos compactos anidados es un conjunto conexo de lo cual se sigue la proposición. \square

Antes de enunciar el teorema observemos que la hipótesis de que los conjuntos sean

compactos no puede omitirse, consideremos la siguiente colección de conexos anidados.



Sea C_n el interior del pentágono con vértices $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, \frac{1}{2^n})$ claramente el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ es un conjunto desconexo.

Teorema 3.0.1 *En un espacio métrico X , la intersección de conjuntos conexos compactos anidados es un conjunto conexo.*

Demostración

Sea $\{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos conexos y compactos tales que $C_i \supseteq C_{i+1}$ para todo número natural i . Sea $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$.

Sean A y B abiertos tales que $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$.

Supondremos que $C \subseteq A \cup B$, es decir que A y B son una desconexión de C . Y llegaremos a una contradicción.

Para cualquier $i \in \mathbb{N}$, $A \cap C_i \neq \emptyset$, $B \cap C_i \neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$. Como C_i es conexo, no puede estar contenido en $A \cup B$ por lo que para cada i existe $x_i \in C_i$ tal que $x_i \notin A \cup B$.

Si $\{x_i\}$ es un conjunto finito, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, esto es $x_j \in C \subseteq A \cup B$ lo cual es contradictorio con la construcción del conjunto $\{x_i\}$.

Si la sucesión $\{x_i\} \subseteq C_1$ es infinita tiene al menos un punto de acumulación $\bar{x} \in C$. Además \bar{x} es punto de acumulación de C_i para toda $i \in \mathbb{N}$, porque $x_j \in C_i$ si $j \geq i$, lo que implica que $\bar{x} \in C_i$ para todo natural i ; esto es $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \subseteq A \cup B$.

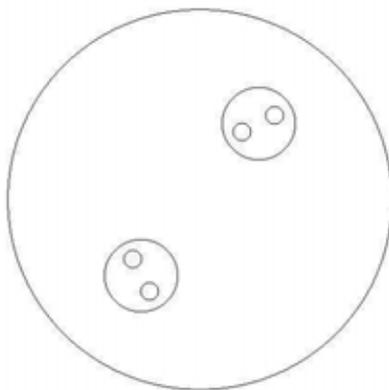
Entonces existe un conjunto abierto U tal que $\bar{x} \in U \subseteq A \cup B$, pero como \bar{x} es punto de acumulación de $\{x_i\}$, existe una infinidad de elementos de $\{x_i\}$ que son elementos de U y por lo tanto, de $A \cup B$ lo cual es una contradicción.

Por lo que C es conexo. \square

Es sabido que todo conjunto métrico compacto, perfecto y totalmente desconexo es homeomorfo al conjunto de Cantor clásico, por esta razón, a un conjunto que cumple

con estas cuatro propiedades se le llama un conjunto de Cantor. Demostraremos ahora que $\Lambda \cap B(\theta_1)$ es un conjunto de Cantor para cada θ_1 fijo.

Recuérdese que por definición un espacio métrico $X \neq \emptyset$ es totalmente desconexo, si ninguno de sus subconjuntos conexos tiene más de un punto, es decir, si sus componentes conexas son puntos.



Proposición 3.0.3 *Para cada $\theta_1 \in [0, 1)$, $B(\theta_1) \cap \Lambda$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, es decir es compacto, perfecto y totalmente desconexo.*

Demostración

Por ser $B(\theta_1) \cap \Lambda$ intersección de compactos anidados sabemos que es compacto.

Para demostrar que es perfecto, tomemos cualquier punto $x \in B(\theta_1) \cap \Lambda$ y un número $\varepsilon > 0$.

El disco $B(\theta_1)$ intersecciona a $F(D)$ en dos discos de radio $\frac{1}{10}$, a $F^2(D)$ en cuatro discos contenidos en $F(D) \cap B(\theta_1)$ de radio $\frac{1}{10^2}$, y en general, a $F^n(D)$ en 2^n discos de radio $\frac{1}{10^n}$ contenidos en $F^{n-1}(D) \cap B(\theta_1)$.

Podemos encontrar un entero positivo n , tal que el disco de la colección que forma $F^n(D) \cap B(\theta_1)$ que contiene a x esté contenido en $V_\varepsilon(x)$, en ese disco $F^{n+1}(D) \cap B(\theta_1)$ tiene dos discos, en uno de ellos está x . En el otro podemos tomar un punto $y \in B(\theta_1) \cap \Lambda$, así $y \in V_\varepsilon(x)$ con $y \neq x$. Lo que demuestra que $V_\varepsilon(x) \cap B(\theta_1) \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Demostraremos ahora que $B(\theta_1) \cap \Lambda$ es totalmente desconexo.

Sea $C \subseteq B(\theta_1) \cap \Lambda$ un subconjunto distinto del vacío, sea $a \in C$, supondremos que existe $b \in C$, $b \neq a$ y demostraremos que entonces C no es conexo.

Sea $d = d(a, b)$ y sea n un número entero positivo tal que $\frac{1}{10^n} < d$, como dijimos antes $B(\theta_1) \cap F^n(D)$ consta de 2^n discos cerrados de radio $\frac{1}{10^n}$, llamémoslos U_1, U_2, \dots, U_{2^n} , supongamos que $a \in U_k$, como $\frac{1}{10^n} < d$, b no puede estar en el mismo disco U_k .

Sean los conjuntos cerrados $A = U_k$ y $B = \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} U_i \right) - U_k$.

El conjunto $B(\theta_1) \cap \Lambda \subseteq B(\theta_1) \cap F^n(D) = A \cup B$; además $a \in A \cap C$ y $b \in B \cap C$ por lo que ambas intersecciones son distintas del vacío, y $A \cap B = \emptyset$ por lo que la pareja de conjuntos A y B forma una desconexión de C .

Por lo tanto cualquier subconjunto conexo de $B(\theta_1) \cap \Lambda$ consta de sólo un punto. \square

Hasta aquí la idea que puede uno hacerse de Λ es la de una curva continua que da una infinidad no numerable de vueltas dentro del toro D .

La siguiente proposición muestra que Λ es un objeto bastante más complicado.

Proposición 3.0.4 *El conjunto Λ no es arcoconexo.*

Antes de demostrar la proposición anterior nos será de utilidad probar la siguiente afirmación:

Proposición 3.0.5 *No es posible dividir un segmento $[a, b]$ en una colección no numerable de segmentos ajenos.*

Demostración

Supongamos que se divide al segmento $[a, b]$ en un conjunto no numerable de segmentos ajenos. Tomemos un racional en cada uno de dichos segmentos ajenos, tendríamos entonces una colección no numerable de racionales, lo cual es evidentemente contradictorio. \square

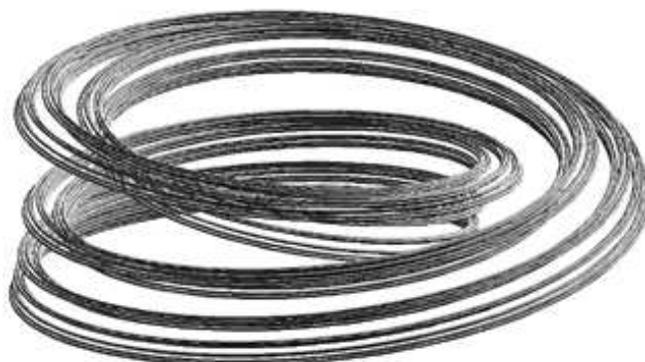
La afirmación anterior implica a su vez que una curva continua no puede dividirse en una colección no numerable de segmentos ajenos. Demostremos ahora sí la proposición 3.0.4.

Demostración

Tomemos un punto cualquiera $\hat{x} = (\theta, p)$ en Λ . Hay una curva de Λ que contiene a \hat{x} ; prolonguemos esta curva dentro de Λ tanto como sea posible. Por la proposición 3.0.5 dicha curva sólo puede pasar por un conjunto numerable de puntos de $B(\theta) \cap \Lambda$. Como el conjunto $B(\theta) \cap \Lambda$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, es en particular un conjunto no numerable, por lo que existe un punto en $B(\theta) \cap \Lambda$ que no puede unirse con \hat{x} por medio de una curva continua contenida en Λ . \square

El conjunto Λ es conocido como *Solenoide*, la idea de este nombre surgió de una

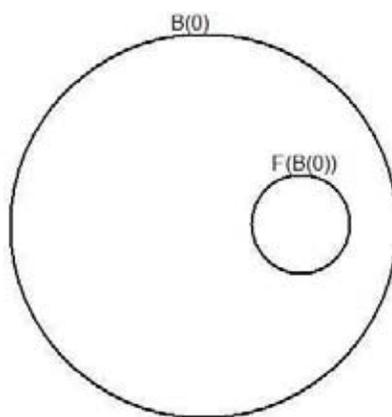
pieza mecánica que se llama precisamente solenoide y que es parecida a una bobina.



Estudiaremos ahora las propiedades dinámicas de F restringida al Solenoide Λ . Para empezar analizaremos las conclusiones que podamos obtener a partir del análisis de la dinámica de la primera coordenada de la función F , que está dada por la función:

$$g(\theta) = 2\theta \quad g : S^1 \rightarrow S^1.$$

Como vimos, la función g tiene un punto fijo para $\theta = 0$. En consecuencia, al aplicar la función F a puntos de $B(0)$ caemos nuevamente en $B(0)$; es decir, $F(B(0)) \subset B(0)$, como puede verse $F : B(0) \rightarrow F(B(0))$ es una contracción, pues manda al disco $B(0)$ en un disco de radio diez veces menor que está dentro de $B(0)$.



Como la función F es continua, podemos afirmar por el teorema de contracción¹

¹Sea un espacio métrico, $f : X \rightarrow X$ es una contracción si existe $\lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todos $x, y \in X$.

Teorema de contracción

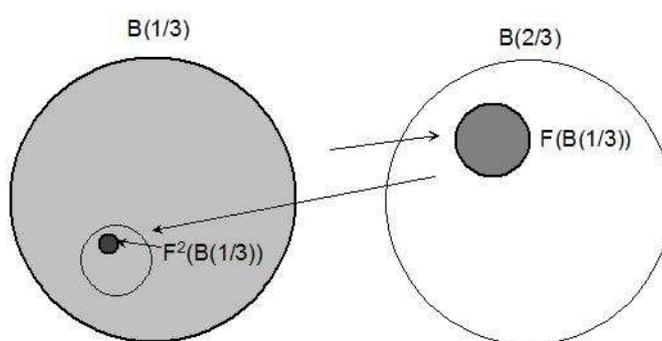
Si X es completo y f es una contracción entonces existe un único punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Más aún $d(f^n(x), x_0)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito para todo $x \in X$.

que F tiene un único punto fijo en $B(0)$.

Es fácil ver que dicho punto pertenece al Solenoide Λ .

Además, como dijimos antes $B(0)$ es parte del conjunto estable asociado a x para cualquier $x = (0, p)$, por lo que, en particular, todos los demás puntos de $\Lambda \cap B(0)$, se acercan asintóticamente al punto fijo. Como $g : S^1 \rightarrow S^1$ tiene un único punto fijo, entonces $F|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ tiene sólo un punto fijo.

La función g tiene también dos puntos periódicos de periodo dos, $\theta = \frac{1}{3}$ y $\theta = \frac{2}{3}$, por lo tanto, los puntos de $B(\frac{1}{3})$ caen bajo F en $B(\frac{2}{3})$, y a su vez, estos caen en $B(\frac{1}{3})$.



Como $F^2(B(\frac{1}{3})) \subset B(\frac{1}{3})$, aplicando de nuevo el teorema de contracción, se sigue que F^2 tiene exactamente un punto fijo en $B(\frac{1}{3})$, es decir que F tiene un punto de periodo dos en $B(\frac{1}{3})$. Análogamente puede verse que F tiene un punto de periodo dos en $B(\frac{2}{3})$. Igual que antes, es fácil ver que esos puntos están en el Solenoide Λ y que los puntos de $B(\frac{1}{3})$ y los de $B(\frac{2}{3})$ que no pertenecen a la órbita periódica, se acercan asintóticamente a ella. Esto es, F tiene exactamente dos puntos periódicos de periodo 2, o lo que es lo mismo, F tiene una única órbita de periodo 2.

Mediante un análisis similar se puede ver que por cada punto de periodo k que tiene la función g , la función F tiene un único punto periódico de periodo k . Como la función g tiene puntos periódicos de todos los periodos, sucede lo mismo con la función F .

Podemos afirmar además, que estos son los únicos puntos periódicos de F . Para demostrarlo tomemos $x = (\theta, p) \in B(\theta)$ tal que θ no sea un punto periódico de g , es decir para el cual no exista un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(\theta) = \theta$, esto implica que $B(g^n(\theta)) \cap B(\theta) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por otro lado $F^n(x) \in B(g^n(\theta))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in B(\theta) \cap \Lambda$ de manera que no hay forma de que $F^n(x)$ sea igual a x .

Otra cosa que sabemos de la función g es que el conjunto de sus puntos periódicos

es denso en S^1 .

Como dijimos, para cada $\theta^* \in S^1$ tal que θ^* es un punto periódico de g , existe un único punto periódico de F en $B(\theta^*)$; sabemos, entonces, que hay un conjunto denso de ángulos $\theta^* \in S^1$ para los cuales existe un único punto periódico de F en $B(\theta^*)$.

A primera vista pudiera parecer que este hecho no puede garantizarnos, por sí solo, la densidad de los puntos periódicos de F en el solenoide. Parece difícil que, con un sólo punto periódico de F por cada disco $B(\theta^*)$, y siendo $B(\theta^*) \cap \Lambda$ un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor, el conjunto de puntos periódicos de F resulte ser denso en Λ ; es decir, es difícil imaginar que siendo así la situación, podamos acercarnos con puntos periódicos a todos los puntos de Λ .

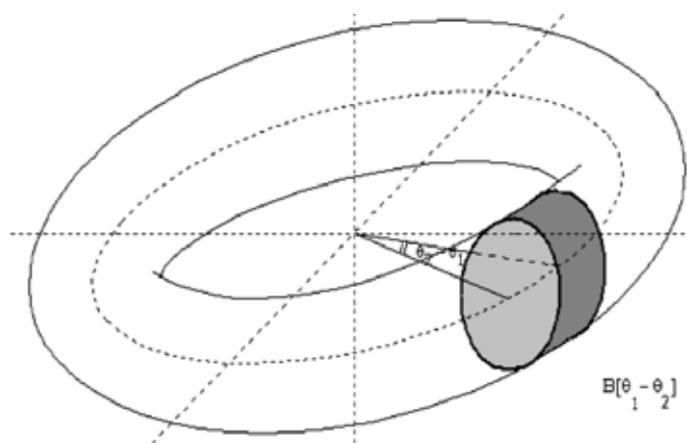
Lo sorprendente es que, a pesar de las apariencias, es posible deducir que el conjunto de puntos periódicos de F es denso en Λ , a partir de que el conjunto de puntos periódicos de g lo es en S^1 .

Antes de probar esto hagamos la siguiente observación.

Consideremos todos los puntos (θ, p) del toro para los cuales θ se mueve entre dos ángulos fijos dados θ_1 y θ_2 .

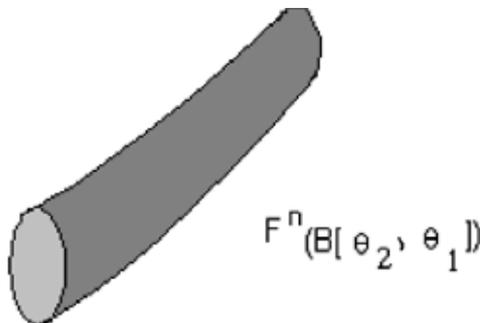
Llamemos $B[\theta_1, \theta_2]$ a dicho conjunto, es decir:

$$B[\theta_1, \theta_2] = \{(\theta, p) \in D \mid \theta \in [\theta_1, \theta_2], p \in B^2\}$$



Sea $\delta > 0$. Si $|\theta_2 - \theta_1| < \delta$, la imagen de $B[\theta_1, \theta_2]$ bajo F es un "tubo" contenido en $F(D)$, de radio $\frac{1}{10}$ y de longitud menor que 2δ ; $F^2(B[\theta_1, \theta_2])$ es un "tubo" de radio $\frac{1}{10^2}$ y de longitud menor que $2^2\delta$ contenido en $F^2(D)$ y, en general, $F^n(B[\theta_1, \theta_2])$ es

un "tubo" de radio $\frac{1}{10^n}$ y de longitud menor que $2^n\delta$, contenido en $F^n(D)$.



Teorema 3.0.2 *El conjunto de puntos periódicos de F es denso en Λ .*

Demostración Sea $x = (\theta, p) \in \Lambda$, sea U una vecindad del punto x . Existen números $n \in \mathbb{N}$, y $\delta > 0$, tales que el tubo C en $F^n(D)$, definido por $C = F^n(B[\theta_1, \theta_2])$ con $|\theta_2 - \theta_1| < \delta$, está completamente contenido en U . Como el conjunto de puntos periódicos de g es denso en S^1 , existe un punto periódico de g , digamos $\theta^* \in [\theta_1, \theta_2]$. Como vimos antes, eso implica que existe un punto periódico de F , digamos x^* , contenido en $B(\theta^*) \subset B[\theta_1, \theta_2]$. Pero entonces, $F^n(x^*) \in C \subset U$ y éste es también un punto periódico de F . Por lo tanto, $PerF$ es denso en Λ . \square

Usando el hecho de que existe un punto en S^1 cuya órbita bajo g es densa en S^1 podemos probar también que hay un punto de Λ cuya órbita bajo F es densa en Λ .

Teorema 3.0.3 *Existe un punto \bar{x} en Λ tal que $\overline{O(\bar{x}, F)} = \Lambda$*

Demostración Como vimos existe un punto $\bar{\theta}$ en S^1 tal que su órbita bajo g es densa en S^1 . Sea $\bar{x} \in B(\bar{\theta}) \cap \Lambda$; vamos a demostrar que \bar{x} tiene órbita densa en Λ bajo F .

Sea $x = (\theta, p)$ un punto cualquiera en Λ , y sea U una vecindad de x . Como antes, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que el tubo $C \subset F^n(D)$ definido como $C = F^n(B[\theta_1, \theta_2])$, con $|\theta_2 - \theta_1| < \delta$, está completamente contenido en U . Como la órbita de $\bar{\theta}$ bajo g es densa en S^1 , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(\bar{\theta}) \in [\theta_1, \theta_2]$; entonces $F^m(\bar{x}) \in B(\bar{\theta}) \subset B[\theta_1, \theta_2]$ y $F^n(F^m(\bar{x})) \in C \subset U$ lo que implica que $F^{m+n}(\bar{x}) \in U$, es decir existe un punto de la órbita de \bar{x} en U . Por lo tanto la órbita de \bar{x} es densa en Λ . \square

Como corolario de los últimos dos resultados tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.0.4 *La función F es caótica en el Solenoide Λ .*

3.0.1 Anexo

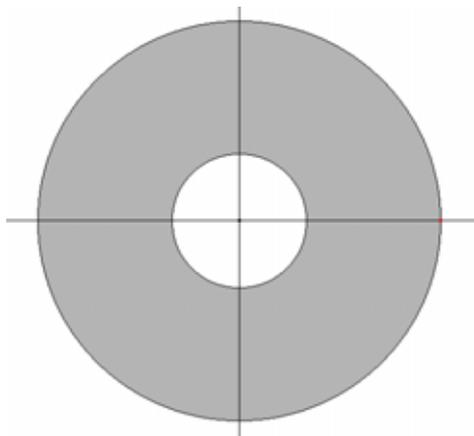
En este trabajo hemos identificado el conjunto $D = S^1 \times B^2$ con el toro sólido, sin embargo este conjunto en realidad está contenido en \mathbb{R}^4 , esto no es un problema pues

$$D = \{(x, y, u, v) = (\cos \theta, \text{sen} \theta, u, v) \mid \theta \in [0, 2\pi] \text{ y } u^2 + v^2 \leq 1\}$$

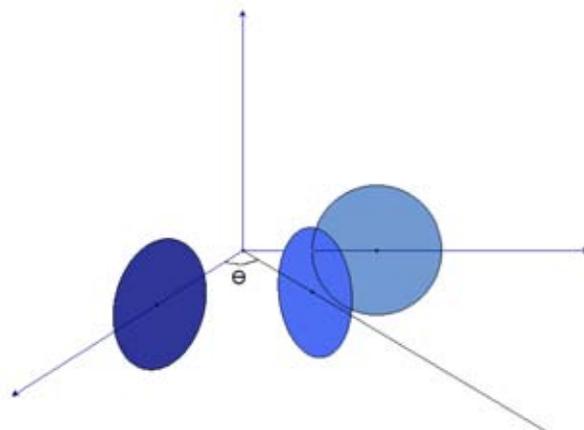
es homeomorfo a un toro sólido en \mathbb{R}^3 con el siguiente homeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, u, v) &= ((2 + u) \cos \theta, (2 + u) \text{sen} \theta, v) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + u \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para $v = 0$ obtenemos $((2 + u) \cos \theta, \text{sen} \theta, 0)$ con $u \in [-1, 1]$ que es un anillo en el plano xy



Para $\theta = 0$ tenemos $((2 + u), 0, v)$ que es un disco de radio 1 en el plano xz con centro en $(2, 0, 0)$, para $\theta = \frac{\pi}{2}$ tenemos $(0, (2 + u), v)$ que es un disco de radio 1 en el plano yz con centro en $(0, 2, 0)$ y en general para $\theta \in S^1$ fija tenemos un disco de radio 1 con centro en $(2 \cos \theta, 2 \text{sen} \theta, 0)$.



Capítulo 4

Límites inversos

En el estudio de sistemas dinámicos se ha observado que el concepto de *límites inversos* resulta de mucha utilidad.

El uso de esta noción topológica constituye una relación interesante entre la topología y los sistemas dinámicos.

La idea es la siguiente: Frecuentemente un sistema dinámico "complicado" tiene la característica de que la mayoría de las órbitas tienden, asintóticamente, no a un punto o a una órbita periódica sino a un conjunto infinito de puntos. Bajo ciertas condiciones, ese conjunto se llama *un atractor*. Los límites inversos dan, también bajo ciertas condiciones, una poderosa herramienta, ideal para describir la dinámica en un "atractor" y la naturaleza topológica de éste.

Empezaremos por precisar el concepto topológico y posteriormente estudiaremos las relaciones entre sistemas dinámicos y límites inversos.

Definición 4.0.1 Sean X_0, X_1, X_2, \dots una colección de espacios métricos y para cada entero $i \geq 0$, sea $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ una función continua

$$X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \dots$$

El límite inverso de la sucesión $\{X_i, f_i\}$, $i \geq 0$, es el conjunto

$$\left\{ \hat{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n : \forall n \geq 0, f_n(x_{n+1}) = x_n \right\},$$

que se denota por $\overline{(X_i, f_i)}$ o por X_{∞} .

El conjunto X_{∞} , que por definición es un subconjunto del producto cartesiano $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, es un espacio topológico con la topología inducida por el producto cartesiano.

Ejemplos

1) Consideremos la sucesión $\{X_i, f_i\}$ donde $X_i = \mathbb{N}$ y $f_i(n) = n + 1$ para todo $i \geq 0$, entonces $\overline{(\mathbb{N}, f_i)} = \emptyset$. Obsérvese que en este caso las funciones f_i son inyectivas pero no suprayectivas.

2) Sea $X_n = \{(x, y) \mid x \geq n\}$ para cada entero $n \geq 0$ y sea $i_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ la inclusión. Ya que para cada $p \in X_0$ existe un número n para el cual $p \notin X_n$, también en este caso el límite inverso $\overline{(X_n, i_n)}$ es vacío.

Los ejemplos anteriores sugieren que para que el límite inverso $\overline{(X_i, f_i)}$ no sea vacío es necesario que las funciones f_i sean suprayectivas. En efecto puede demostrarse (ver [7]) que si $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ es continua y suprayectiva para todo entero $i \geq 0$ el límite inverso $\overline{(X_i, f_i)}$ es no vacío.

Sin embargo puede garantizarse también que $\overline{(X_i, f_i)} \neq \emptyset$ si se pide que f_i sea continua y X_i sea un espacio métrico compacto para todo entero positivo i .

Teorema 4.0.5 (Ver [7]) *Si la función $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ es continua y X_i es un espacio métrico compacto para todo entero $i \geq 0$, entonces $\overline{(X_i, f_i)} \neq \emptyset$.*

En general supondremos que los espacios X_i son compactos para todo entero $i \geq 0$.

Para cada $n \geq 0$ definimos la n -ésima proyección $\pi_n : \prod_{i=0}^{\infty} X_i \rightarrow X_n$ como:

$$\pi_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = x_n$$

Cada una de estas funciones es continua y suprayectiva.

En general, dado un espacio topológico (X, τ) , una base β para la topología τ es una subcolección de τ tal que si $U \in \tau$ y $p \in U$, entonces existe $B \in \beta$ tal que $p \in B \subset U$. La topología del producto $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ se define en términos de la base que consiste en todos los conjuntos de la forma: $\pi_{n_0}^{-1}(U_{n_0}) \cap \dots \cap \pi_{n_k}^{-1}(U_{n_k})$, $k \geq 0$, y cada U_{n_i} es abierto en X_{n_i} .

Un hecho interesante es que cuando restringimos la topología del espacio producto a la del subespacio $\overline{(X_i, f_i)}$, obtenemos una importante simplificación.

Lema 4.0.3 *La colección $\{\pi_k^{-1}(U_k) : k \geq 0, \text{ y } U_k \text{ abierto en } X_k\}$ es una base para la topología de $\overline{(X_i, f_i)}$.*

Demostración

Sea U abierto en $\overline{(X_i, f_i)}$. Sea $\hat{p} \in U$, existe un conjunto de la forma $\pi_{n_0}^{-1}(U_{n_0}) \cap \dots \cap \pi_{n_m}^{-1}(U_{n_m})$ con U_{n_i} abierto en X_{n_i} , $i = 0, \dots, m$, que contiene a \hat{p} y tal que está contenido en U .

Tenemos que exhibir U_k abierto en X_k tal que $\hat{p} \in \pi_k^{-1}(U_k) \subset U$ para algún entero positivo k .

Supongamos que \hat{p} está en un básico de la forma $\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(U_j) \subseteq U$ con $U_i \subset X_i$ y $U_j \subset X_j$ abiertos, supongamos que $i < j$.

Sea $f_{i,j}$ la función continua definida por $f_{i,j} = f_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow X_i$

$$X_0 \leftarrow \dots \leftarrow X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \leftarrow \dots \leftarrow X_{j-1} \xleftarrow{f_{j-1}} X_j \leftarrow \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f_{i,j}}$$

Nótese que $\pi_i = f_{i,j} \circ \pi_j$. En efecto: Sea $\hat{x} \in \overline{(X_i, f_i)}$,

$$f_{i,j}(\pi_j(\hat{x})) = f_{i,j}(x_j) = x_i = \pi_i(\hat{x}).$$

Sea $V = f_{i,j}^{-1}(U_i) \cap U_j$; Observemos que V es abierto en X_j . Vamos a demostrar que $\hat{p} \in \pi_j^{-1}(V) \subset U$.

Como $f_{i,j}(p_j) = p_i$ entonces $p_j \in f_{i,j}^{-1}(p_i) \cap U_j \subseteq f_{i,j}^{-1}(U_i) \cap U_j = V$, lo que implica que $\hat{p} \in \pi_j^{-1}(V)$.

Mostrar que $\pi_j^{-1}(V) \subseteq U$ es muy fácil ya que si tomamos $\hat{x} \in \pi_j^{-1}(V)$ entonces $x_j \in V = f_{i,j}^{-1}(U_i) \cap U_j$ y esto implica que $\hat{x} \in \pi_j^{-1}(U_j)$; pero si $x_j \in f_{i,j}^{-1}(U_i)$ entonces $x_i = f_{i,j}(x_j) \in U_i$ y entonces $\hat{x} \in \pi_i^{-1}(U_i)$. Por lo tanto $\hat{x} \in U$. \square

Si cada uno de los espacios X_i es un espacio métrico, con d_i la respectiva distancia, entonces el espacio $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$ es también un espacio métrico con la distancia definida de

la siguiente manera: si \hat{x} y $\hat{y} \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i$, $d(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)} \right) \left(\frac{1}{2^i} \right)$; es fácil ver que la serie converge pues $\left(\frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)} \right)$ es menor que 1.

Además si existe $M > 0$ tal que para todo $i \geq 0$ el diametro de X_i definido de la siguiente manera $diam(X_i) = \max \{d_i(x, y) \text{ con } x, y \in X_i\}$ es menor que M , podemos definir la siguiente métrica $d(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$. El espacio $\overline{(X_i, f_i)}$ es también un espacio métrico con la distancia inducida.

Las siguientes dos proposiciones muestran casos particulares de interés, que pueden ayudar a tener una idea intuitiva del límite inverso $\overline{(X_i, f_i)}$ en ciertas condiciones.

Proposición 4.0.6 Si $X_i \supseteq X_{i+1}$ para toda $i \geq 0$ y las funciones $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ son inclusiones, es decir, $f_i(x) = x$ para $x \in X_{i+1}$, entonces el límite inverso $\overline{(X_i, f_i)}$ es homeomorfo a la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$.

Demostración

La función $h : \overline{(X_i, f_i)} \rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ definida por $h(x, x, x, \dots) = x$ nos da un homeomorfismo.

La función h está bien definida pues $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ está en el límite inverso si y sólo si $f_j(x_j) = x_{j-1}$ para todo entero j , esto es $\hat{x} \in \overline{(X_j, f_j)}$ si y sólo si es de la forma $\hat{x} = (a, a, a, \dots)$ para alguna $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$.

La función h es biyectiva pues para cada elemento $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ hay uno y sólo un elemento de la forma $\hat{x} = (x, x, x, \dots) \in \overline{(X_i, f_i)}$ y es continua porque es una proyección. \square

Como consecuencia de la proposición anterior el conjunto de Cantor puede verse como un límite inverso. Para ello introducimos la siguiente notación en la construcción del conjunto de Cantor: $\in \in \in$

Sean

$$\begin{aligned} A_0 &= [0, 1], \\ A_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ A_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \end{aligned}$$

y en general, A_{n+1} se obtiene quitando la tercera parte de enmedio (un intervalo abierto) de cada uno de los 2^n intervalos que forman A_n .

Como es sabido $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ es el conjunto de Cantor que denotamos por C . Si consideramos las inclusiones $i_n : A_{n+1} \rightarrow A_n$; entonces el conjunto de Cantor C es homeomorfo al límite inverso $\overline{(A_n, i_n)}$.

Proposición 4.0.7 *Si todos los espacios X_i , $i \geq 0$, son homeomorfos a X_0 y además, todas las funciones $h_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ son homeomorfismos, entonces el límite inverso es también homeomorfo a los espacios X_i . En otras palabras, considérese el siguiente diagrama:*

$$X_0 \xleftarrow{h_0} X_1 \xleftarrow{h_1} X_2 \xleftarrow{h_2} \dots$$

Si cada X_n es homeomorfo a X_0 y cada h_n es un homeomorfismo, entonces $h : \overline{(X_n, i_n)} \rightarrow X_0$ definida por $h(x_0, x_1, x_2, \dots) = x_0$ es un homeomorfismo.

Demostración

Como h es una proyección, es continua y suprayectiva ya que cada h_i es suprayectiva, sólo falta demostrar que es inyectiva.

Si \hat{x} y \hat{y} están en el límite inverso $\overline{(X_i, h_i)}$, $h(\hat{x}) = h(\hat{y})$ implica que $x_0 = y_0$ y entonces, como cada h_i es un homeomorfismo, $h_i^{-1}(x_i) = h_i^{-1}(y_i)$ para cada entero positivo i , por lo que $h(\hat{x}) = (x_0, h_0^{-1}(x_0), h_1^{-1}(h_0^{-1}(x_0)), \dots) = h(\hat{y})$, con lo que queda demostrado que h es inyectiva.

Por lo tanto h es un homeomorfismo. \square

Un conjunto compacto y conexo no vacío es llamado un *continuo*. La siguiente proposición establece que el límite inverso de continuos es, a su vez, un continuo.

Para demostrarla necesitaremos el hecho de que si para cada $i \geq 0$, X_i es compacto, entonces $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$ es compacto¹.

Proposición 4.0.8 *Supongamos que para cada $i \geq 0$ X_i es un espacio métrico compacto y conexo no vacío, es decir un continuo, y que $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ es continua y suprayectiva para todo entero positivo i . Entonces $\overline{(X_i, f_i)}$ es un continuo.*

Demostración

Demostraremos primero que $\overline{(X_i, f_i)}$ es un conjunto cerrado.

Sea $\hat{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i \right) - \overline{(X_i, f_i)}$. Existe un entero positivo i tal que $y_i \neq f_i(y_{i+1})$. Entonces, ya que f_i es continua existen dos abiertos $U \subseteq X_i$ y $V \subseteq X_{i+1}$, tales que $y_i \in U$ y $y_{i+1} \in V$, y tales que para toda $x \in V$ tenemos que $f_i(x) \notin U$.

Sea $W = \pi_{i+1}^{-1}(V) \cap \pi_i^{-1}(U)$. Claramente W es un conjunto abierto tal que $\hat{y} \in W$. Además si $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in W$ entonces $f(x_{i+1}) \neq x_i$, por lo tanto $W \subseteq \left(\prod_{i=0}^{\infty} X_i \right) - \overline{(X_i, f_i)}$ por lo que $\overline{(X_i, f_i)}$ es un conjunto cerrado contenido en un compacto, por lo que es a su vez compacto.

Demostraremos ahora que $\overline{(X_i, f_i)}$ es conexo.

Sean A y B dos conjuntos cerrados en $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$. Supongamos que $A \cap \overline{(X_i, f_i)} \neq \emptyset$, que $B \cap \overline{(X_i, f_i)} \neq \emptyset$, y que $\overline{(X_i, f_i)} \subseteq A \cup B$.

Demostraremos que $A \cap B$ no puede ser vacío con lo que habremos demostrado que $\overline{(X_i, f_i)}$ es conexo.

Para $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos $A_k = \pi_k(A)$ y $B_k = \pi_k(B)$, son cerrados en X_k . La existencia de $\hat{x} \in A \cap \overline{(X_i, f_i)}$ y de $\hat{y} \in B \cap \overline{(X_i, f_i)}$, garantiza la existencia de $x_k \in A_k$ y de $y_k \in B_k$.

Tomemos $p_k \in X_k$, ya que cada f_i es suprayectiva, existe $\hat{p} \in \overline{(X_i, f_i)}$ que tiene a p_k como su k -ésima coordenada.

Ya que el límite inverso está contenido en la unión de A y B entonces $\hat{p} \in A \cup B$ de manera que $p_k \in A_k \cup B_k$. Lo que implica $X_k \subseteq A_k \cup B_k$.

¹El teorema de Tychonoff afirma que el producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto. Una demostración para el caso particular del producto numerable de espacios métricos compactos puede verse en [6]

Como cada X_k es conexo, para cada entero positivo k existe $z_k \in A_k \cap B_k$, y por lo tanto existen $\widehat{a}_k \in A$ y $\widehat{b}_k \in B$ que tienen a z_k como k -ésima coordenada.

Ya que $\overline{(X_i, f_i)}$ es un compacto, cada una de las sucesiones $\{\widehat{a}_k\}$ y $\{\widehat{b}_k\}$ tiene una subsucesión convergente, y como coinciden en sus primeras k coordenadas, ambas subsucesiones convergen al mismo punto \widehat{c} . Además por ser A y B cerrados $\widehat{c} \in A \cap B$. Por lo tanto $\overline{(X_i, f_i)}$ es conexo. \square

4.1 Función inducida entre límites inversos

Bajo ciertas condiciones, se puede establecer una función natural entre los límites inversos $\overline{(X_i, f_i)}$ y $\overline{(Y_i, g_i)}$.

Teorema 4.1.1 Sean X_i y Y_i espacios métricos y f_i y g_i funciones continuas y suprayectivas para todo $i \geq 0$. Supongamos que existen $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ continuas, tales que $h_i \circ f_i = g_i \circ h_{i+1}$ para todo $i \geq 0$, es decir, tales que los diagramas del siguiente esquema conmutan

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xleftarrow{f_0} & X_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & X_i & \xleftarrow{f_i} & X_{i+1} & \leftarrow & \dots \\ h_0 \downarrow & & h_1 \downarrow & & & & h_i \downarrow & & \downarrow h_{i+1} & & \\ Y_0 & \xleftarrow{g_0} & Y_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & Y_i & \xleftarrow{g_i} & Y_{i+1} & \leftarrow & \dots \end{array} \quad (4.1.1)$$

Entonces la función $h_\infty : \overline{(X_i, f_i)} \rightarrow \overline{(Y_i, g_i)}$ definida por

$$h_\infty(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots) = (h_0(x_0), h_1(x_1), \dots, h_i(x_i), \dots)$$

es continua.

Demostración

Sea $\widehat{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ en $\overline{(X_i, f_i)}$. Vemos primero que $(h_0(x_0), h_1(x_1), \dots)$ está en $\overline{(Y_i, g_i)}$ pues $g_i(h_{i+1}(x_{i+1})) = h_i(f_i(x_{i+1})) = h_i(x_i)$.

Para demostrar que h_∞ es continua, tomemos U abierto en $\overline{(Y_i, g_i)}$ y demostremos que $h_\infty^{-1}(U)$ es abierto en $\overline{(X_i, f_i)}$.

Sea $\widehat{x} \in h_\infty^{-1}(U)$. Necesitamos encontrar un básico $\pi_k^{-1}(V_k)$ tal que $\widehat{x} \in \pi_k^{-1}(V_k) \subseteq h_\infty^{-1}(U)$.

Sea $\widehat{y} = h_\infty(\widehat{x})$. Por estar \widehat{y} en el abierto U existe un básico $\pi_j^{-1}(U_j)$ tal que $\widehat{y} \in \pi_j^{-1}(U_j) \subseteq U$, con U_j abierto en Y_j . Ahora $h_j^{-1}(U_j)$ es un conjunto abierto en X_j , y entonces, $\pi_j^{-1}(h_j^{-1}(U_j))$ es un básico en $\overline{(X_i, f_i)}$.

Como $y_j = h_j(x_j) \in U_j$, entonces $x_j \in h_j^{-1}(U_j)$; esto es, $\widehat{x} \in \pi_j^{-1}(h_j^{-1}(U_j))$.

Sea $\widehat{x}_0 \in \pi_j^{-1}(h_j^{-1}(U_j))$ y sea $\widehat{y}_0 = h_\infty(\widehat{x}_0)$ entonces $x_{0j} \in h_j^{-1}(U_j)$, esto es, $h_j(x_{0j}) = y_{0j} \in U_j$ y por lo tanto, $\widehat{y}_0 \in \pi_j^{-1}(U_j) \subseteq U$ por lo que $\widehat{x}_0 \in h_\infty^{-1}(U)$. \square

Teorema 4.1.2 *Si en el diagrama 4.1.1 cada h_i es un homeomorfismo, entonces h_∞ es un homeomorfismo.*

Demostración

La continuidad de h_∞ se obtiene como consecuencia del teorema 4.1.1 y la continuidad de h_∞^{-1} de la compacidad de $\overline{(X_i, f_i)}$; demostraremos entonces que h_∞ es biyectiva.

1) h_∞ es inyectiva: Tomemos $h_\infty(\hat{x}) = h_\infty(\hat{y})$. Entonces $h_i(x_i) = h_i(y_i)$, por lo que $x_i = y_i$, lo que implica que $\hat{x} = \hat{y}$.

2) h_∞ es suprayectiva: Sea $\hat{y} \in (Y_i, g_i)$. Como h_i es suprayectiva, existe $x_i \in X_i$ tal que $h_i(x_i) = y_i$ para todo entero positivo i . El punto $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ está en el límite inverso (X_i, f_i) , pues $f_i(x_{i+1}) = h_i^{-1}(g_i(h_{i+1}(x_{i+1}))) = h_i^{-1}(y_i) = x_i$. Entonces $h_\infty(\hat{x}) = \hat{y}$. \square

Analicemos ahora el caso particular en el que todos los espacios X_i son el mismo espacio X , y todas las funciones f_i son también la misma función f .

Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ continua y sobre, consideremos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{f} & X & \xleftarrow{f} & X & \xleftarrow{f} & \dots \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ X & \xleftarrow{f} & X & \xleftarrow{f} & X & \xleftarrow{f} & \dots \end{array}$$

La función $\tilde{f} : \overline{(X, f)} \rightarrow \overline{(X, f)}$ inducida naturalmente por el esquema anterior está dada por la siguiente regla:

$$\tilde{f}(x_0, x_1, x_2, \dots) = (f(x_0), x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Es decir, la función consiste en recorrer todas las coordenadas un lugar y agregar como primera coordenada a $f(x_0)$.

4.2 Funciones caóticas y límites inversos

Veamos ahora algunas consecuencias que tiene la dinámica de la función $f : X \rightarrow X$ sobre la dinámica de la función $\tilde{f} : \overline{(X, f)} \rightarrow \overline{(X, f)}$.

Puede verse fácilmente que si $p_1 \in X$ es un punto fijo de f , entonces el punto $\hat{p}_1 = (p_1, p_1, p_1, \dots)$ pertenece al límite inverso $\overline{(X, f)}$, y además que es un punto fijo bajo la función \tilde{f} .

Supongamos que f tiene un punto periódico de periodo m , digamos p_m . Entonces, el punto

$$\hat{p}_m = (p_m, f^{m-1}(p_m), f^{m-2}(p_m), \dots, f(p_m), p_m, f^{m-1}(p_m), f^{m-2}(p_m), \dots)$$

es claramente un punto del límite inverso $\overline{(X, f)}$ y es además un punto periódico de periodo m bajo la función \tilde{f} .

Hemos visto entonces que todo punto periódico de la función f da lugar a un punto periódico de la función \tilde{f} . Resulta natural preguntarnos si la presencia de un conjunto denso de puntos periódicos para la función f da lugar a un conjunto de puntos periódicos para la función \tilde{f} denso en $\overline{(X, f)}$.

Proposición 4.2.1 *Si el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X , entonces el conjunto de puntos periódicos de \tilde{f} es denso en $\overline{(X, f)}$.*

Demostración

Sea $U \subseteq \overline{(X, f)}$ un conjunto abierto, entonces existe un conjunto abierto $U_k \subseteq X$ tal que $\pi_k^{-1}(U_k) \subseteq U$. Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X , entonces hay un punto $p \in U_k$ que es punto periódico de periodo m bajo f .

El punto $\hat{p} = (f^{k-1}(p), \dots, f^2(p), f(p), p, f^{k-1}(p), f^{k-2}(p), \dots) \in \overline{(X, f)}$ es un punto periódico bajo \tilde{f} , además $\hat{p} \in \pi_k^{-1}(U_k) \subseteq U$. \square

En vista de la proposición anterior, podríamos también preguntarnos si el hecho de que $f : X \rightarrow X$ sea caótica, puede garantizarnos que $\tilde{f} : \overline{(X, f)} \rightarrow \overline{(X, f)}$ también lo es.

Para probar que efectivamente así es, necesitamos probar que si f es topológicamente transitiva, entonces \tilde{f} también lo es. Para ello usaremos los siguientes lemas.

Lema 4.2.1 *Si $\tilde{f} : \overline{(X, f)} \rightarrow \overline{(X, f)}$ es inducida por $f : X \rightarrow X$, entonces para $U \subseteq X_k = X$ tenemos que $\tilde{f}^n(\pi_k^{-1}(U)) \subseteq \pi_k^{-1}(f^n(U))$ para todo entero positivo n .*

Demostración

Demostraremos primero el caso en el que $n = 1$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{(X_i, f_i)} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \overline{(X_i, f_i)} \\ \downarrow \pi_k & & \downarrow \pi_k \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Sea $\hat{y} \in \tilde{f}(\pi_k^{-1}(U))$ entonces $\hat{y} = \tilde{f}(\hat{x})$ para algún $\hat{x} \in \pi_k^{-1}(U)$, es decir, $\hat{y} = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k), \dots)$ con $x_k \in U$.

Por lo tanto, la k -ésima coordenada $y_k = f(x_k) \in f(U)$, lo que implica que $\hat{y} \in \pi_k^{-1}(y_k) \subseteq \pi_k^{-1}(f(U))$.

Tomemos ahora $\hat{y} \in \tilde{f}^n(\pi_k^{-1}(U))$. Entonces existe $\hat{x} \in \pi_k^{-1}(U)$, $\hat{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ tal que $\hat{y} = \tilde{f}^n(\hat{x})$, es decir $\hat{y} = (f^n(x_0), f^n(x_1), \dots, f^n(x_k), \dots)$ por lo que $y_k = f^n(x_k)$ y esto implica que $\hat{y} \in \pi_k^{-1}(f^n(U))$. \square

Lema 4.2.2 Si $k < r$ y $U_k \subset X_k$, entonces $\pi_k^{-1}(U_k) = \pi_r^{-1}(U_r)$, donde $U_r = (f^{r-k})^{-1}(U_k) \subset X_r$.

Demostración

Sea $\hat{y} \in \pi_k^{-1}(U_k)$ entonces $y_k \in U_k$, y como \hat{y} está en el límite inverso, $y_r \in (f^{r-k})^{-1}(y_k) \subseteq (f^{r-k})^{-1}(U_k) = U_r$. Lo que implica que $\hat{y} \in \pi_r^{-1}(U_r)$.

Sea $\hat{x} \in \pi_r^{-1}(U_r)$ entonces $x_r \in U_r$. Como \hat{x} está en el límite inverso $f^{r-k}(x_r) = x_k$ y como U_r es la imagen inversa de U_k tenemos que $x_k \in U_k$ lo cual implica que $\hat{x} \in \pi_k^{-1}(U_k)$. \square

Probaremos, como dijimos antes, que si f es topológicamente transitiva, también \tilde{f} lo es.

Proposición 4.2.2 Si $f : X \rightarrow X$ es topológicamente transitiva, entonces

$$\tilde{f} : \overline{(X, f)} \rightarrow \overline{(X, f)}$$

es también topológicamente transitiva.

Demostración

Sean U y V conjuntos abiertos en $\overline{(X, f)}$, podemos asumir que son dos conjuntos abiertos básicos $\pi_m^{-1}(U_m) = U$ y $\pi_k^{-1}(V_k) = V$, respectivamente. Si $m < k$, sea $U_k = (f^{k-m})^{-1}(U_m)$. Entonces por el lema anterior $\pi_k^{-1}(U_k) = \pi_m^{-1}(U_m)$ (si $k < m$, hacemos lo análogo). Ya que f es topológicamente transitiva, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$. Esto implica que

$$\begin{aligned} & \tilde{f}^n(U) \cap V \\ &= \tilde{f}^n(\pi_m^{-1}(U_m)) \cap V \\ &= \tilde{f}^n(\pi_k^{-1}(U_k)) \cap V \\ &\subseteq \pi_k^{-1}(f^n(U_k)) \cap \pi_k^{-1}(V_k) \\ &= \pi_k^{-1}(f^n(U_k) \cap V_k) \neq \emptyset \end{aligned}$$

De manera que \tilde{f} es topológicamente transitiva. \square

De lo anterior se desprende entonces el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 Si $f : X \rightarrow X$ es caótica, entonces $\tilde{f} : \overline{(X, f)} \rightarrow \overline{(X, f)}$ es caótica.

Veamos como ejemplo lo siguiente, que será muy importante en nuestro estudio del solenoide.

Ejemplo 4.2.1 Sea S^1 el círculo unitario y $g : S^1 \rightarrow S^1$ la función con la que hemos trabajado definida por $g(\theta) = 2\theta \pmod{1}$. Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} S^1 & \xleftarrow{g} & S^1 & \xleftarrow{g} & S^1 & \xleftarrow{g} & \dots \\ g \downarrow & & g \downarrow & & g \downarrow & & \\ S^1 & \xleftarrow{g} & S^1 & \xleftarrow{g} & S^1 & \xleftarrow{g} & \dots \end{array}$$

induce la función \tilde{g} en $\overline{(S^1, g)}$ dada por $\tilde{g}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots) = (g(\theta_1), \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots)$.

Por lo anterior, $\tilde{g} : \overline{(S^1, g)} \rightarrow \overline{(S^1, g)}$ es caótica.

Capítulo 5

El solenoide es un continuo indescomponible

En este capítulo mostraremos que el límite inverso de $g : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $g(\theta) = 2\theta \pmod{1}$ será una ayuda importante para el estudio de algunas propiedades del solenoide Λ .

Para ello demostraremos primero que el límite inverso de g , $\overline{(S^1, g)}$, es homeomorfo a Λ y que la función $\tilde{g} : \overline{(S^1, g)} \rightarrow \overline{(S^1, g)}$, definida en el ejemplo 4.2.1, es topológicamente conjugada con la función $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$.

Antes de demostrar formalmente este hecho, observemos que todo punto en el solenoide $x = (t_0, p) \in \Lambda$, es la intersección de una sucesión anidada de discos de la forma:

$$B(t_0) \supset F(B(t_1)) \supset F^2(B(t_2)) \supset \dots$$

Donde $t_i = g(t_{i+1})$ para toda $i \geq 0$, por lo que naturalmente se puede establecer una función uno a uno entre $\overline{(S^1, g)}$ y Λ .

Definimos $H : \Lambda \rightarrow \overline{(S^1, g)}$ como $H(\bar{x}) = (t_0, t_1, t_2, \dots)$, donde $F^{-i}(\bar{x}) \in B(t_i)$ para toda $i \geq 0$. Como $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ es un homeomorfismo, $F^{-i}(\bar{x})$ está bien definido.

La función H puede verse como la composición $H = \hat{P} \circ h$ de dos funciones $h : \Lambda \rightarrow \overline{(\Lambda, F)}$ y $\hat{P} : \overline{(\Lambda, F)} \rightarrow \overline{(S^1, g)}$, de manera que h asigna a cada punto $\bar{x} \in \Lambda$ el punto $(\bar{x}, F^{-1}(\bar{x}), F^{-2}(\bar{x}), \dots) \in \overline{(\Lambda, F)}$ y la función \hat{P} es la inducida por el siguiente diagrama, donde P es la proyección que manda a cada punto de Λ en su primera coordenada.

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda & \xleftarrow{F} & \Lambda & \xleftarrow{F} & \Lambda & \xleftarrow{F} & \dots \\ P \downarrow & & P \downarrow & & P \downarrow & & \\ S^1 & \xleftarrow{g} & S^1 & \xleftarrow{g} & S^1 & \xleftarrow{g} & \dots \end{array}$$

Como $g(P(x_{k+1})) = P(F(x_{k+1}))$, la función \hat{P} inducida por el diagrama anterior

está definida por:

$$\widehat{P}(x_0, x_1, x_2, \dots) = (P(x_0), P(x_1), P(x_2), \dots)$$

En la proposición 4.0.7 demostramos que h es un homeomorfismo, por lo que para mostrar que $H = \widehat{P} \circ h$ es un homeomorfismo sólo hace falta mostrar que \widehat{P} lo es.

Proposición 5.0.3 $\widehat{P} : \overline{(\Lambda, F)} \longrightarrow \overline{(S^1, g)}$ es un homeomorfismo.

Demostración

Sabemos, por el teorema 4.1.1, que \widehat{P} es continua. Tomemos un punto $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$ en $\overline{(S^1, g)}$; para probar que \widehat{P} es biyectiva encontraremos un punto $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ en $\overline{(\Lambda, F)}$, tal que $\widehat{P}(\bar{x}) = \bar{\theta}$. Y probaremos que ese punto es único.

Sea $n \geq 0$; para que el punto \bar{x} sea tal que $\widehat{P}(\bar{x}) = \bar{\theta}$ cada x_n debe estar en $B(\theta_n)$. Además, para que el punto \bar{x} esté en $\overline{(\Lambda, F)}$ debe cumplirse que $F^k(x_{n+k}) = x_n$, esto es, x_n debe estar en $F^k(B(\theta_{n+k}))$ para toda $k \geq 0$.

Sabemos que $F^k(B(\theta_{n+k})) \subset F^{k-1}(B(g(\theta_{n+k}))) = F^{k-1}(B(\theta_{n+k-1}))$. Consideremos la siguiente sucesión de discos encajados:

$$B(\theta_n) \supset F(B(\theta_{n+1})) \supset F^2(B(\theta_{n+2})) \supset \dots$$

La siguiente intersección consta de un único punto:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(B(\theta_{n+k})).$$

A partir de lo anterior definimos $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ de forma que

$$\{x_n\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(B(\theta_{n+k})).$$

Para confirmar que este punto está efectivamente en $\overline{(\Lambda, F)}$ observemos que

$$\begin{aligned} F(\{x_{n+1}\}) &= F\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(B(\theta_{n+1+k}))\right) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(F(B(\theta_{n+1+k}))) \\ &\subset \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(B(g(\theta_{n+1+k}))) = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(B(\theta_{n+k})) = \{x_n\}. \end{aligned}$$

De manera que \bar{x} , definido como antes, es el único elemento de $\overline{(\Lambda, F)}$ que bajo \widehat{P} va a dar a $\bar{\theta}$, con lo que la función \widehat{P} es biyectiva.

La continuidad de \widehat{P}^{-1} se sigue del hecho de que $\overline{(\Lambda, F)}$ es compacto. \square

Teorema 5.0.2 *La función H es una conjugación topológica entre $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ y $\tilde{g} : (\overline{S^1}, g) \rightarrow (\overline{S^1}, g)$.*

Demostración

Como vimos antes, la función H es un homeomorfismo, por lo que sólo nos resta probar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{F} & \Lambda \\ H \downarrow & & H \downarrow \\ \overline{(S^1, g)} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \overline{(S^1, g)} \end{array}$$

Es decir que $\tilde{g}(H(\bar{x})) = H(F(\bar{x}))$ para todo $\bar{x} \in \Lambda$.

Supongamos que \bar{x} es tal que $F^{-i}(\bar{x}) \in B(t_i)$ para toda $i \geq 0$; entonces $H(\bar{x}) = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ y $\tilde{g}(H(\bar{x})) = (g(t_0), g(t_1), g(t_2), \dots) = (g(t_0), t_0, t_1, t_2, \dots)$.

Por otro lado $F(\bar{x}) \in B(g(t_0))$ y además $F^{-i}(F(\bar{x})) \in B(t_{i-1})$ para toda $i \geq 1$; por lo que $H(F(\bar{x})) = (g(t_0), t_0, t_1, t_2, \dots)$. \square

Como dijimos antes usaremos este hecho para mostrar otras propiedades del solenoide.

Definición 5.0.1 *Un continuo X es descomponible si tiene dos subcontinuos propios, G y H , tales que $X = G \cup H$. Decimos que X es indescomponible si no es descomponible.*

Cuando pensamos en un ejemplo de un conjunto continuo generalmente imaginamos un continuo descomponible, un intervalo, un arco, un polígono, etc. De manera que a primera vista pudiera pensarse que los únicos continuos indescomponibles son los conjuntos que constan de un solo punto, el siguiente ejemplo muestra que no es así.

Sean x, y , y z tres puntos en \mathbb{R}^2 y sea $n \geq 0$.

Llamaremos una cadena simple que va de x a z pasando por y a una colección $\mathcal{C}^n = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ de discos de diámetro $d < \frac{1}{2^n}$ que cumplen lo siguiente:

- 1) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.
- 2) $x \in A_i$ si y sólo si $i = 1$.
- 3) $z \in A_i$ si y sólo si $i = m$.
- 4) $y \in A_i$ para algún $i = 1, \dots, m$.

Llamaremos eslabones de la cadena a los conjuntos A_i .

Construiremos ahora un continuo indescomponible X en el plano \mathbb{R}^2 .

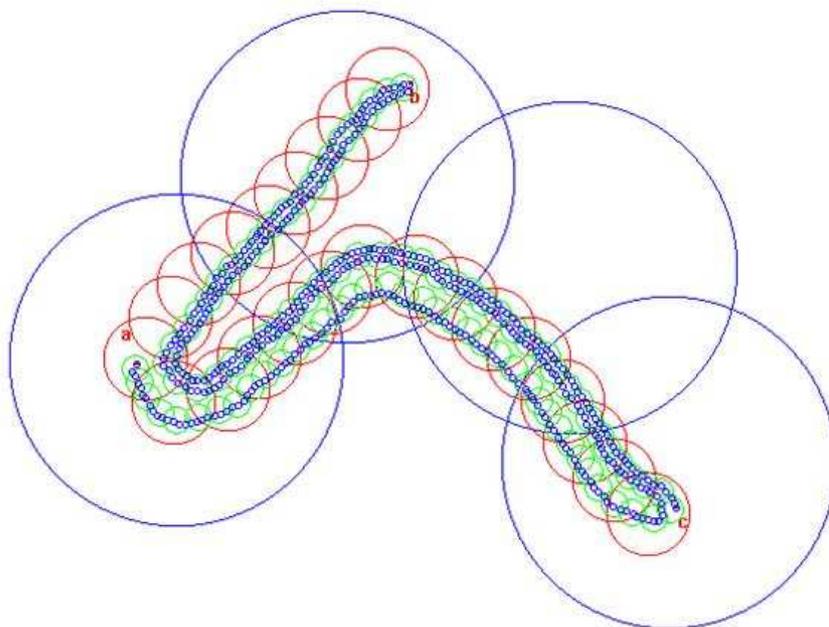
Dados tres puntos diferentes a, b y $c \in \mathbb{R}^2$, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ construimos cadenas \mathcal{C}^n tales que:

- a) Si n es de la forma $n = 3k + 1$ con $k = 0, 1, 2, \dots$, \mathcal{C}^n es una cadena que va de a a c pasando por b , si $n = 3k + 2$ con $k = 0, 1, 2, \dots$, \mathcal{C}^n es una cadena que va de b a

c pasando por a y si $n = 3k + 3$ con $k = 0, 1, 2, \dots$, \mathcal{C}^n es una cadena que va de a a b pasando por c .

b) Para cada $n = 1, 2, \dots$, $\widehat{\mathcal{C}}^n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ contiene a $\widehat{\mathcal{C}}^{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$.

Esta construcción se muestra en la siguiente figura



Demostraremos que el conjunto X definido por $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{\mathcal{C}}^n$ es un continuo indescomponible. Por ser intersección de compactos anidados X es compacto y por el teorema 3.0.1 es conexo, de manera que sólo resta probar que es indescomponible.

Demostraremos que ningún subcontinuo propio de X puede contener un par de elementos del conjunto $\{a, b, c\}$.

Supongamos que existe $Y \subset X$ un subcontinuo propio que contiene a $\{a, c\}$. Como Y está contenido propiamente en X existe $p \in X - Y$. Por ser Y compacto p no puede ser punto de acumulación de Y , esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(p) \cap Y = \emptyset$.

Sea $n = 3k + 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, la cadena $\mathcal{C}^n = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ va de a a c pasando por b . El punto p que tomamos en $X - Y$ está en a lo más dos eslabones digamos A_j y A_{j+1} . La unión de estos dos eslabones $A_j \cup A_{j+1} \subseteq V_\varepsilon(p)$ por lo que $(A_j \cup A_{j+1}) \cap Y = \emptyset$.

Consideremos los conjuntos $A = \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ y $B = \bigcup_{i=j+2}^m A_i$, es fácil ver que los conjuntos cerrados A y B forman una disconexión de Y . Los conjuntos $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son no vacíos pues $a \in A_1 \subseteq A$ y $c \in A_m \subseteq B$. Además por construcción $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B \supseteq Y$. Lo anterior contradice la hipótesis de que Y es un continuo.

En consecuencia ningún subcontinuo propio de X contiene un par de elementos de $\{a, b, c\}$ por lo que es imposible que la unión de dos subcontinuos propios sea igual a X .

Lo cual implica que el conjunto X es indescomponible. \square

El ejemplo anterior muestra que existen continuos indescomponibles no degenerados, es decir formados por más de un punto, sorprendentemente además, el hecho de que un continuo tenga la propiedad de ser indescomponible es mucho más frecuente de lo que pudiera imaginarse (ver [5]).

En las proposiciones 3.0.1 y 3.0.2 probamos que el solenoide Λ es un continuo, probaremos ahora que es indescomponible.

Para ello probaremos primero que $\overline{(S^1, g)}$ es un continuo indescomponible y después que si dos continuos son homeomorfos y uno de ellos es indescomponible, el otro también lo es.

Proposición 5.0.4 $\overline{(S^1, g)}$ es un continuo indescomponible.

Demostración

Como Λ es un continuo, el hecho de que $\overline{(S^1, g)}$ sea homeomorfo a Λ nos garantiza que es también un continuo, por lo que sólo nos resta demostrar que es indescomponible.

Sean G y H dos subcontinuos de $\overline{(S^1, g)}$ tales que $\overline{(S^1, g)} = G \cup H$. Demostraremos que $G = \overline{(S^1, g)}$ o que $H = \overline{(S^1, g)}$.

Sabemos que para cada $n \geq 0$, $\pi_n(\overline{(S^1, g)}) = S^1$. Entonces $\pi_n(G) = G_n$ y $\pi_n(H) = H_n$ son dos subcontinuos de S^1 y ya que $\pi_n(\overline{(S^1, g)}) = S^1$, G_n y H_n son tales que su unión es todo S^1 .

Como la unión de G_n y H_n contiene a S^1 uno de los dos contiene al menos medio círculo, entonces $g(G_n) = S^1$ o $g(H_n) = S^1$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que para un conjunto infinito $\Omega \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que $g(G_k) = S^1$ para todo $k \in \Omega$.

Demostraremos que para toda $n \geq 0$ se tiene que $G_n = S^1$.

Sea $n \geq 0$. Sea $\gamma \in \Omega$ tal que $n < \gamma$. Entonces:

$$G_n = \pi_n(G) = g^{\gamma-n}(\pi_\gamma(G)) = g^{\gamma-n-1}(g(\pi_\gamma(G))) = S^1$$

Demostraremos ahora que G es denso en $\overline{(S^1, g)}$.

Sean $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) \in \overline{(S^1, g)}$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Como $G_N = \pi_N(G) = S^1$, existe un $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \in G$ tal que $\alpha_N = \pi_N(\bar{\alpha}) = \theta_N$.

$\bar{\theta}$ y $\bar{\alpha}$ coinciden en las primeras $N + 1$ coordenadas, y entonces la distancia entre estos dos puntos de $\overline{(S^1, g)}$ es $d(\bar{\theta}, \bar{\alpha}) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$.

La compacidad de G y su densidad en $\overline{(S^1, g)}$, implican que $G = \overline{(S^1, g)}$.

Por lo tanto (S^1, g) es un continuo indescomponible. \square

La intención del siguiente lema, es mostrar que la cualidad de ser indescomponible es invariante bajo homeomorfismos.

Lema 5.0.3 *Si X y Y son dos continuos homeomorfos y X es indescomponible, entonces Y es indescomponible.*

Demostración

Sean G y H dos subcontinuos de Y tales que $Y = G \cup H$. Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Los conjuntos $h^{-1}(G)$ y $h^{-1}(H)$ son dos subcontinuos de X tales que $X = h^{-1}(G) \cup h^{-1}(H)$.

Esto implica, por ser X indescomponible, que $h^{-1}(G) = X$ o $h^{-1}(H) = X$, lo cual a su vez implica que $G = Y$ o que $H = Y$.

Por lo tanto Y es también un continuo indescomponible. \square

De los dos resultados anteriores se sigue el siguiente teorema:

Teorema 5.0.3 *El solenoide Λ es un continuo indescomponible.*

5.1 Comentarios finales

El comportamiento de la función $F : D \rightarrow D$ en donde $D = S^1 \times B^2$ definida por $F(\theta, p) = (2\theta, \frac{1}{10}p + \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta})$ que estudiamos en este trabajo, puede pensarse intuitivamente como dividido en dos componentes:

Un estiramiento, en una dimensión, pues $F(D)$ da dos vueltas dentro de D . Y una contracción, en dos dimensiones, pues F manda al toro D en un toro de diámetro diez veces menor.

Como vimos en este trabajo, el comportamiento de estiramiento provoca que la función F sea caótica en Λ , la contracción provoca que Λ sea un atractor y como consecuencia de ambos comportamientos tenemos que Λ es un continuo indescomponible y que cualquier corte $\Lambda \cap B(\theta_0)$ es un Cantor.

Resultados similares a los aquí obtenidos se presentan en la herradura de Smale.

Queda abierto reflexionar sobre un problema más general, es decir preguntarnos si siempre que una función presente estos dos comportamientos, un estiramiento por un lado y por otro una contracción tendremos el mismo tipo de resultados.

Bibliografía

- [1] Héctor Méndez: *Iteración de funciones (Notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos)*, Vinculos Matemáticos #4, Facultad de Ciencias UNAM (2000).
- [2] Robert L Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, USA (1999).
- [3] Richard M. Schori: *Chaos: An introduction to Some Topological Aspects*, Contemporary Mathematics Vol. 117, American Mathematical Society, (1991), 149-161..
- [4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, y P. Stacey: *On Devaney's Definition of Chaos* American Mathematical Society, 99, (1992), 332-334.
- [5] S. B. Nadler: *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker, USA, (1992).
- [6] Raúl Escobedo, Sergio Macías, Héctor Méndez: *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, Nivel Medio No. 31, Sociedad Matemática Mexicana, (2006).
- [7] J. G. Hocking, G. S. Young: *Topology*, Courier Dover Publications, USA (1998).
- [8] C. Robinson: *Dynamical Systems Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, CRC Press, USA (1998).
- [9] L. S. Block, W. A. Coppel: *Dynamics in One Dimension*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1992).