



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN FLUJO  
MAGNETOHIDRODINÁMICO EN DUCTOS ANULARES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
ENERGÍA - SISTEMAS ENERGÉTICOS

P R E S E N T A:

JOSÉ NÚÑEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDUARDO RAMOS MORA



2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Cuevas García Sergio

Secretario: Dr. Ramos Mora Eduardo

Vocal: Dr. García Valladares Octavio

1er. Suplente: Dr. De la Cruz Salas Luis Miguel

2do. Suplente: Dr. Martinell Benito Julio Javier

Lugar donde se realizó la tesis:

Centro de Investigación en Energía

TUTOR DE TESIS:

Dr. Eduardo Ramos Mora

-----  
FIRMA

# AGRADECIMIENTOS

A todos mis amigos de la maestría, en especial a: Michel, Alberto, Alejandra, Maricruz, Mauricio, por tantas cosas que he aprendido de ellos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en especial al Centro de Investigación en Energía por permitirme realizar mis estudios de maestría en sus instalaciones.

A CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), por brindarme el financiamiento económico para realizar mis estudios de maestría.

En especial al Dr. Eduardo Ramos Mora y al Dr. Sergio Cuevas García por darme la oportunidad de trabajar con ellos, por todo su apoyo, tiempo y consejos.

# DEDICATORIA

A mi hija Liliana Geraldine, mi niña preciosa.

A mi esposa Marbella, mi amor, mi compañera y mi mas grande apoyo.

A mis padres Mario y Gregoria que siempre les dedicaré mis logros.

A mis hermanos, Leonel, Elizabeth y Ever por el apoyo incondicional que siempre me han dado.

# Índice General

Resumen	3
Introducción	5
<b>1 Ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica</b>	<b>7</b>
1.1 Ecuaciones de la dinámica de fluidos . . . . .	7
1.1.1 Conservación de masa . . . . .	7
1.1.2 Conservación de cantidad de movimiento . . . . .	8
1.1.3 Conservación de la energía . . . . .	9
1.2 Ecuaciones del campo electromagnético . . . . .	11
1.2.1 Ecuaciones de Maxwell . . . . .	11
1.2.2 Fuerza de cuerpo electromagnética . . . . .	13
1.2.3 Densidad de corriente eléctrica . . . . .	13
1.2.4 Conservación de la carga . . . . .	13
1.3 Ecuaciones fundamentales bajo la aproximación MHD . . . . .	13
1.4 Ecuaciones adimensionales . . . . .	15
1.4.1 Aproximación a bajos números de Reynolds magnético . . . . .	16
<b>2 Flujo magnetohidrodinámico de un fluido entre cilindros concéntricos</b>	<b>19</b>
2.1 Flujo MHD de un fluido entre cilindros concéntricos con un campo magnético axial y corriente eléctrica radial . . . . .	19
2.1.1 Configuración del problema hidrodinámico . . . . .	19
2.1.2 Escalas características . . . . .	21
2.1.3 Solución analítica del flujo para el caso completamente desarrollado	22
2.2 Flujo MHD oscilatorio de un fluido entre cilindros concéntricos . . . . .	29
2.2.1 Ecuaciones adimensionales para el caso oscilatorio . . . . .	29

2.2.2	Solución analítica con respuesta síncrona del sistema . . . . .	30
2.2.3	Solución numérica del flujo MHD . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Transferencia de calor en un flujo magnetohidrodinámico en cilindros concéntricos</b>	<b>39</b>
3.1	Configuración del problema térmico . . . . .	39
3.1.1	Escalamiento de las variables . . . . .	41
3.2	Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado . . .	42
3.2.1	Transferencia de calor por conducción . . . . .	42
3.2.2	Transferencia de calor con un flujo magnetohidrodinámico . . . . .	44
3.2.3	Transferencia de calor en la entrada térmica del ducto . . . . .	51
3.3	Transferencia de calor con un flujo MHD oscilatorio . . . . .	53
3.3.1	Ecuaciones adimensionales para el caso oscilatorio . . . . .	53
	<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Flujo MHD de un fluido en un canal rectangular</b>	<b>57</b>
A.1	Flujo de un fluido conductor de electricidad en un canal rectangular debido a una fuerza electromagnética . . . . .	57
<b>B</b>	<b>Discretización de las ecuaciones de balance</b>	<b>61</b>
B.1	Volumen Finito . . . . .	61
B.1.1	Condiciones de frontera . . . . .	64
B.2	Solución numérica de las ecuaciones de Navier - Stokes . . . . .	65
B.2.1	Acoplamiento presión velocidad . . . . .	66
B.2.2	Método SIMPLE . . . . .	67
B.2.3	Método SIMPLEC . . . . .	67
B.2.4	Resumen del proceso a seguir en el método SIMPLEC . . . . .	68
<b>C</b>	<b>Soluciones analíticas para la transferencia de calor</b>	<b>69</b>
C.1	Transferencia de calor por conducción . . . . .	69
C.1.1	Solución analítica por el método de separación de variables. . . . .	69
C.2	Transferencia de calor por convección con un flujo MHD . . . . .	72
C.2.1	Solución analítica aproximada por el método de Galerkin . . . . .	73
	<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>

---

---

# Resumen

---

En este trabajo se estudiará la transferencia de calor, en un régimen de convección forzada, de un fluido eléctricamente conductor entre dos cilindros concéntricos.

Se puede interpretar el movimiento del fluido entre los cilindros como compuesto por dos flujos; uno en la dirección azimutal y el otro en la dirección axial. El flujo en la dirección azimutal se produce por medio de una fuerza de electromagnética (fuerza de Lorentz), resultado de la interacción de un campo magnético uniforme orientado en la dirección axial y una corriente eléctrica radial originada por medio de una diferencia de potencial eléctrico entre las paredes de los cilindros. El flujo en la dirección axial es promovido por un gradiente de presión en esta misma dirección. La pared del cilindro exterior tiene una distribución de temperatura que varía angularmente en forma sinusoidal.

Los esfuerzos de esta investigación están encaminados a largo plazo, a plantear un diseño relacionado con estas geometrías para incrementar la transferencia de calor del fluido entre los cilindros. Este tipo de configuración es de interés considerable para aplicaciones prácticas en intercambiadores de calor, agitadores electromagnéticos, bombas MHD y otros.

Para estudiar este problema se plantean las ecuaciones de balance de masa, cantidad de movimiento y energía, acopladas con las ecuaciones del campo electromagnético, que constituyen el conjunto de ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica (MHD). Dada la complejidad del sistema de ecuaciones, en general no es posible encontrar una solución analítica para este tipo de problemas, por lo que en algunos casos se debe recurrir a una solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales asociadas.

El capítulo I es una breve descripción de la teoría básica de la magnetohidrodinámica, es aquí donde se presentan las ecuaciones básicas para resolver el problema.

En el capítulo II se plantea un modelo sencillo para describir el flujo en el canal. Se obtiene una solución analítica del flujo MHD para el caso completamente desarrollado, tratando el caso cuando la diferencia de potencial eléctrico entre las paredes de los cilindros es constante, como cuando varía el en tiempo de forma sinusoidal.

Partiendo del modelo propuesto para el flujo MHD, en el capítulo III se estudia la transferencia de calor del fluido entre los cilindros en un régimen de convección forzada. La temperatura del fluido se calcula resolviendo numéricamente la ecuación de balance de energía. Cuando la temperatura del fluido no depende de la coordenada axial, es posible obtener una solución analítica en el caso de transferencia de calor por conducción, al igual que para el caso de transferencia de calor con un flujo MHD en la dirección azimutal,



cuando la temperatura del fluido alcanza un estado permanente. Se calculó el flujo de calor en las paredes de los cilindros para analizar el cambio en la transferencia de calor debido movimiento del fluido.

---

# Introducción

---

La magnetohidrodinámica (MHD) es un área de la física que conjunta la dinámica de fluidos y el electromagnetismo y se aboca al estudio de la dinámica de fluidos conductores de electricidad en presencia de campos magnéticos. La MHD tiene aplicaciones tecnológicas importantes en áreas como la metalurgia, la ingeniería química, la ingeniería nuclear, la astrofísica y la medicina, entre otras.

En metalurgia se utilizan dispositivos MHD para mezclar, levitar y controlar el flujo de metales líquidos. Un aspecto importante es que mediante las técnicas de la MHD, estas aplicaciones pueden llevarse a cabo de manera eficiente, utilizando métodos que no involucran el uso partes móviles [1]. Para el crecimiento de cristales semiconductores, como los requeridos en los circuitos integrados, se utilizan campos magnéticos, lo que permite lograr un mejor control del tamaño, pureza y homogeneidad del cristal, mejorando así la calidad de los materiales elaborados [2].

La MHD se aplica en diversas tecnologías para la conversión y uso eficiente de la energía, por ejemplo en intercambiadores de calor en reactores de fusión nuclear. De hecho, la construcción de un reactor de fusión, seguro y eficiente, capaz de proveer electricidad a gran escala, es uno de los retos tecnológicos más importantes de nuestros días donde la magnetohidrodinámica juega un papel relevante.

Un intercambiador de calor es un dispositivo diseñado para transferir calor de un medio material a otro y los más comunes son los que utilizan fluidos como medios de intercambio. Estos aparatos son ampliamente utilizados en refrigeración, plantas de energía eléctrica, refinerías de hidrocarburos, etc. Uno de los intercambiadores de calor más sencillos se compone de tubos concéntricos por el que circulan fluidos a contracorriente con distinta temperatura. La eficacia de estos dispositivos depende de la geometría, las propiedades físicas de los tubos, los fluidos utilizados y las velocidades de los mismos.

Por su amplio espectro de aplicaciones, los intercambiadores de calor han sido profusamente estudiados y el reporte de su comportamiento se puede encontrar en múltiples monografías y aún libros de texto [3], [4]. Sin embargo, los estudios de transferencia de calor en intercambiadores de calor en los que los efectos magnetohidrodinámicos juegan un papel importante son escasos y relativamente modernos por sus aplicaciones a reactores de fusión nuclear.

El dispositivo que se propone estudiar en esta tesis es un intercambiador de calor en el que se utiliza una fuerza electromagnética para agitar el fluido, con el objetivo de incrementar la transferencia de calor. En tal caso, la fuerza electromagnética se generará mediante

la inyección de corrientes eléctricas y campos magnéticos externos, debiéndose explorar diversas configuraciones que permitan una agitación y transferencia de calor óptima.

Aquí presentamos los trabajos mas relevantes en el contexto de la presente investigación. El primero, es un estudio de un intercambiador de calor en un reactor fusión nuclear formado por dos cilindros concéntricos realizado por Kakarantzas y Grecos [5]. En las paredes de los cilindros tenían una diferencia de temperatura, mientras que se aplica un campo magnético transversal. Realizaron simulaciones numéricas para estudiar la transferencia de calor por convección natural a distintos valores de números de Rayleigh y Hartmann y se obtuvieron resultados interesantes como la supresión de la turbulencia debido al incremento del campo magnético. En su trabajo se puede ver la importancia que tiene un flujo magnetohidrodinámico para aplicaciones en intercambiadores de calor. El segundo, es un estudio del flujo de un fluido conductor entre dos cilindros concéntricos realizado por Chang y Chen [6]. El movimiento del fluido es originado por un gradiente de presión en la dirección azimutal producido por la interacción electromagnética de una corriente radial impuesta y campo magnético axial. Sus resultados proveen una visión general de las características de la estabilidad del flujo y la transición del comienzo del modo no axisimétrico, el cual corresponde a vórtices que viajan en la dirección azimutal.

El cuerpo de conocimiento sobre el tema, disponible en la literatura, es necesariamente fraccional por lo limitado del mínimo de los estudios y porque el conocimiento dinámico del flujo depende de la geometría del intercambiador de calor y de la disposición relativa entre el campo magnético la corriente eléctrica y las paredes rígidas.

El diseño de dispositivos MHD, requiere el desarrollo de métodos matemáticos precisos y eficientes para predecir el flujo del fluido en una aplicación dada. El conjunto de ecuaciones que describen los flujos magnetohidrodinámicos es una combinación de las ecuaciones de la dinámica de fluidos y las ecuaciones del electromagnetismo. Dada la complejidad del sistema de ecuaciones, en muchos problemas importantes de flujos MHD, no es posible encontrar una solución analítica. Si esto sucede existen diferentes estrategias numéricas con las que se pueden obtener soluciones numéricas aproximadas como: diferencias finitas, elemento finito, volumen finito, métodos espectrales, etc. Como parte de este trabajo de tesis se desarrollaron herramientas numéricas que permitan caracterizar la transferencia de calor en flujos MHD que son de relevancia práctica en sistemas de conversión o transporte de energía. El contar con estas herramientas podría ser de utilidad en el desarrollo de diseños ingenieriles en los que la transferencia de calor se lleva a cabo de manera óptima. Como la investigación experimental y los prototipos son costosos, la simulación numérica representa un método alternativo para el diseño de estos dispositivos.

---

# Ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica

---

Si un fluido conductor de electricidad se encuentra en presencia de un campo magnético, su movimiento induce corrientes eléctricas. Esto a su vez origina fuerzas sobre el fluido que pueden influir fundamentalmente sobre su movimiento. Subsecuentemente, las corrientes inducidas modifican el campo magnético original. La magnetohidrodinámica (MHD) es el estudio de la dinámica de fluidos conductores de electricidad en presencia de campos eléctricos y magnéticos.

El sistema de ecuaciones que describe la magnetohidrodinámica comprende al conjunto de las ecuaciones de la dinámica de fluidos y las ecuaciones del electromagnetismo. La derivación de las ecuaciones de la MHD se puede encontrar en numerosos libros [7], [8], [9] y no será repetida aquí. El objetivo de este capítulo es presentar solamente una breve exposición del marco teórico de la MHD para hacer de esta tesis un documento autocontenido.

## 1.1 Ecuaciones de la dinámica de fluidos

Un fluido es una sustancia que se deforma bajo la aplicación de cualquier fuerza cortante. La dinámica de fluidos estudia el comportamiento de un fluido cuando este se mueve a través de una región de un sistema. Se considera que las cantidades necesarias para caracterizar el fluido, como la velocidad, densidad, presión, temperatura, etc. están bien definidas en cada punto del espacio y que varían suavemente, ignorándose así la naturaleza discreta atómica (hipótesis del continuo). Las leyes que determinan la variación temporal y espacial de estas variables se obtienen de los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y de energía, de ecuaciones de estado y ecuaciones constitutivas.

### 1.1.1 Conservación de masa

El principio de conservación de masa indica que la masa de fluido  $M$  contenida en un volumen  $V$

$$M = \int_V \rho dV, \quad (1.1)$$

no cambia en el tiempo, es decir

$$\frac{d}{dt}(M) = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = 0, \quad (1.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido. Esta ecuación se transforma en una integral de volumen utilizando el teorema de transporte de Reynolds [7], obteniendo como resultado la siguiente expresión

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad (1.3)$$

donde  $\vec{u}$  es el campo de velocidades del flujo. Como el volumen  $V$  se escogió de manera arbitraria, la única forma de que la ecuación 1.3 se satisfaga para cualquier elección posible de  $V$ , es que el integrando de la ecuación sea igual a cero. De esta manera se obtiene el principio de conservación de masa en su forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.4)$$

En muchos casos, la variación de la densidad del fluido se considera despreciable. Si esto ocurre, el fluido se denomina incompresible y la ecuación 1.4 se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.5)$$

Los fluidos es el nombre genérico en que se agrupan los líquidos y gases. La mayoría de los líquidos son tratados como fluidos incompresibles. Los gases se pueden considerar como incompresibles cuando las velocidades son pequeñas respecto a la velocidad del sonido en el fluido.

### 1.1.2 Conservación de cantidad de movimiento

El principio de conservación de cantidad de movimiento es la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de un elemento de volumen de fluido (un volumen lo suficientemente pequeño para considerarse puntual y lo suficientemente grande para que contenga una gran cantidad de moléculas).

Las fuerzas externas que pueden actuar sobre la masa de fluido se clasifican como fuerzas superficiales (presión, esfuerzos viscosos, etc.) o fuerzas de cuerpo (gravedad, fuerzas electromagnéticas, etc.).

La segunda ley de Newton indica que la suma de fuerzas externas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento. Para el caso de un fluido se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_S \tilde{\sigma} \cdot \hat{n} dS + \int_V \vec{f} dV, \quad (1.6)$$

donde  $\tilde{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos,  $S$  es la superficie del volumen,  $\hat{n}$  es el vector normal a la superficie y  $\vec{f}$  representa las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen que actúan sobre el fluido.

El lado izquierdo de la ecuación 1.6 puede ser convertido en una integral de volumen utilizando el teorema de transporte de Reynolds. La integral de superficie del lado derecho puede ser convertida en una integral de volumen utilizando el teorema de la divergencia de Gauss [7]. Todas las integrales de volumen se agrupan para expresar esta ecuación en la forma  $\int_V \{\} dV = 0$ . Como se mencionó en la sección anterior, la elección arbitraria de volumen implica que el integrando de la ecuación es cero, de esta manera se obtiene la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en su forma diferencial

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \nabla \cdot \tilde{\sigma} + \vec{f}. \quad (1.7)$$

El tensor de esfuerzos  $\tilde{\sigma}$  puede ser expresado como la suma de otros dos tensores de esfuerzos

$$\tilde{\sigma} = -p\mathbb{I} + \mathbb{T}, \quad (1.8)$$

los esfuerzos normales son representados por  $-p\mathbb{I}$ , donde  $p$  es la presión termodinámica e  $\mathbb{I}$  que es el tensor identidad.  $\mathbb{T}$  es el tensor de esfuerzos desviatorios, el cual, para flujos incompresibles es solamente esfuerzos cortantes.

El tensor de esfuerzos desviatorios  $\mathbb{T}$  contiene muchas incógnitas, por esta razón se hacen hipótesis específicas sobre el comportamiento de los fluidos viscosos (basadas en observaciones naturales) y se utilizan con el fin de especificar esta cantidad en términos de variables familiares como la velocidad. La relación entre el tensor de esfuerzos y la velocidad (obtenida por medio de estas hipótesis) se denomina ecuación constitutiva.

### Ecuaciones de Navier-Stokes

Si se considera el caso de un fluido Newtoniano incompresible el tensor de esfuerzos desviatorios esta dado por la siguiente ecuación constitutiva

$$\mathbb{T} = \mu \nabla \vec{u}, \quad (1.9)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido. Sustituyendo 1.8 y 1.9, en 1.7, las ecuaciones resultantes se denominan ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}. \quad (1.10)$$

Nótese que estas ecuaciones contienen términos no lineales,  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ , denominados términos convectivos, lo que hace que en general sean difíciles de resolver analíticamente.

### 1.1.3 Conservación de la energía

El principio de conservación de la energía es una aplicación de la primera ley de la termodinámica a un elemento de volumen de fluido y su flujo, utilizando la hipótesis de equilibrio local [7].

Para un fluido incompresible, en el caso donde no se consideran efectos disipativos, ni flujos de calor por radiación, la ecuación de balance de energía es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = - \int_S \vec{q} \cdot \hat{n} dS, \quad (1.11)$$

donde  $e$  es la energía interna por unidad de volumen y  $\vec{q}$  es el vector de flujo de calor. Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de transporte de Reynolds, la ecuación de la energía en su forma diferencial es la siguiente

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) e \right) = -\nabla \cdot \vec{q}. \quad (1.12)$$

El vector de flujo de calor  $\vec{q}$  es proporcional a la magnitud del gradiente de temperatura con signo negativo

$$\vec{q} = -k \nabla T, \quad (1.13)$$

la constante  $k$  es llamada la conductividad térmica, esta relación es una ecuación constitutiva conocida como la ley de Fourier.

La energía interna se relaciona con la temperatura por medio de la siguiente ecuación de estado

$$e = \int c dT, \quad (1.14)$$

donde de  $c$  es la capacidad calorífica. Si las propiedades del fluido permanecen constantes

$$e = cT. \quad (1.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.13 y 1.15 en la ecuación 1.12 se obtiene la ecuación de balance de energía, escrita como una ecuación para la temperatura del fluido

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T, \quad (1.16)$$

donde  $\alpha = k/\rho c$  es la difusividad térmica del fluido

## Transferencia de calor

Cuando existe una diferencia de temperatura entre dos regiones del fluido siempre ocurre un proceso de transferencia de energía térmica, también conocido como transferencia de calor.

La conducción es la transferencia de calor desde una región de alta temperatura a una región de temperatura más baja a través de energía cinética molecular en el interior del medio o por contacto físico entre dos medios, sin flujo del medio material.

La convección de calor es la situación en la cual se transfiere calor desde una superficie a través del movimiento de un fluido. Dependiendo de si el flujo del fluido es provocado artificialmente o no, se distinguen dos tipos:

- a) Convección forzada
- b) Convección natural

La convección forzada implica el uso de algún medio mecánico, como una bomba o un ventilador para provocar el movimiento del fluido. La convección natural es un movimiento debido a la no uniformidad de la temperatura del fluido ya que si un líquido o gas se encuentra un campo gravitatorio, el fluido más caliente y menos denso asciende, mientras que el fluido más frío y más denso desciende.

La cantidad de calor transferido de una superficie a un fluido en movimiento es proporcional a la diferencia de temperaturas superficie-fluido

$$q = h(T_s - T_f), \quad (1.17)$$

donde  $q$  es el flujo de calor y  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor,  $T_s$  y  $T_f$  son la temperatura de la superficie y del fluido respectivamente.

## 1.2 Ecuaciones del campo electromagnético

La magnetohidrodinámica estudia el comportamiento de sistemas combinados de campos electromagnéticos y fluidos conductores. Los campos eléctricos y magnéticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en un fluido conductor en movimiento obedecen las ecuaciones del electromagnetismo [10].

### 1.2.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos y a manera de resumen se pueden ver a continuación [11].

#### Ley de Gauss

Esta ley indica que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total que se encuentra en el volumen limitado por esta superficie, es decir

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_e dV. \quad (1.18)$$

donde  $\rho_e$  es la densidad carga eléctrica y  $\epsilon$  es la permisividad eléctrica del fluido. La forma diferencial de la ley de Gauss es

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (1.19)$$

Esta ley indica que las distribuciones de carga eléctrica son fuentes de campo eléctrico.



### Ley de Gauss para el campo magnético

Esta ley expresa que las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutras en el sentido de que posee un polo norte y un polo sur, por lo que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo, es decir

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (1.20)$$

En forma diferencial la de Gauss para el campo magnético se escribe de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.21)$$

Esta ley señala la inexistencia de cargas magnéticas o como se conocen habitualmente, monopolos magnéticos.

### Ley de Faraday

La ley de Faraday nos habla sobre la inducción electromagnética, la que origina una fuerza electromotriz en un campo magnético. Esta ley establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera con el circuito como frontera

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (1.22)$$

En forma diferencial la ley de Faraday se escribe de la siguiente manera

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.23)$$

Esta ley indica que un campo magnético dependiente del tiempo origina un campo eléctrico.

### Ley de Ampère-Maxwell

La ley de Ampère, relaciona un campo magnético estático con la causa que la produce, es decir, una corriente eléctrica estacionaria. Maxwell generalizó esta ley para poder considerar también que un campo eléctrico que varía con el tiempo produce un campo magnético y además ser consistente con el principio de conservación de la carga. La ley de Ampère-Maxwell es la siguiente

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS + \mu_0 \epsilon \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (1.24)$$

La forma diferencial de la ley de Ampère-Maxwell es la siguiente

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.25)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío. En general, para fluidos conductores su permeabilidad magnética es aproximadamente igual a la del vacío.

### 1.2.2 Fuerza de cuerpo electromagnética

En un medio continuo con una distribución de densidad carga eléctrica  $\rho_e$ , la fuerza electromagnética total que experimentan los portadores de carga al moverse en un campo magnético con una densidad de corriente  $\vec{j}$  es dada por

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (1.26)$$

cada unidad de volumen de fluido experimentará esta fuerza MHD  $\vec{f}$  conocida como la fuerza de Lorentz.

### 1.2.3 Densidad de corriente eléctrica

En un conductor en reposo se encuentra que la densidad de corriente eléctrica  $\vec{j}$  es proporcional a la fuerza experimentada por las cargas libres. Esto está reflejado en la forma convencional de la ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.27)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del fluido.

En un fluido conductor en movimiento aplica la misma ley, sólo que es necesario utilizar el campo eléctrico medido en un marco de referencia en movimiento con la velocidad local del conductor

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_r = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (1.28)$$

La ley de Ohm es una ecuación constitutiva.

### 1.2.4 Conservación de la carga

Este principio afirma que la carga eléctrica no se crea ni se destruye, ni global ni localmente y que si en una superficie cerrada está disminuyendo la carga contenida en su interior, debe haber un flujo de corriente neto hacia el exterior del sistema.

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.29)$$

es decir, la densidad de carga  $\rho_e$  y la densidad de corriente  $\vec{j}$  satisfacen una ecuación de continuidad.

## 1.3 Ecuaciones fundamentales bajo la aproximación MHD

En una gran cantidad de aplicaciones prácticas de importancia, las ecuaciones del campo electromagnético se pueden simplificar considerando las siguientes aproximaciones [12]

- No se consideran fenómenos relativistas. En el rango de velocidades que se trabaja, la velocidad del fluido es mucho menor que la de la luz  $|\vec{u}| \ll c$ . Este punto es importante porque las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía (Ecs. 1.10, 1.16) solamente son validas para velocidades no relativistas, por consecuencia sería inconsistente tomar la forma relativista de las ecuaciones de Maxwell.
- Se considera que los campos eléctricos inducidos son de orden  $\vec{u} \times \vec{B}$ , lo que es equivalente a suponer que el campo magnético inducido es mucho más pequeño que el campo externo aplicado. Esto implica que el campo magnético es el mismo en cualquier marco de referencia.
- No se consideran fenómenos que involucren altas frecuencias, esto implica que la corriente de desplazamiento  $\mu_0 \epsilon \partial \vec{E} / \partial t$  es despreciable comparada con la corriente eléctrica  $\vec{j}$  en la ley de Ampère-Maxwell.
- Los términos  $\partial \rho_e / \partial t$  en la ecuación de conservación de la carga y  $\rho_e \vec{E}$  en la ecuación de la fuerza de Lorentz se consideran despreciables como consecuencia de la neutralidad de la carga.

Tomando en cuenta las aproximaciones anteriores, las ecuaciones del campo electromagnético utilizadas en MHD tienen la siguiente forma

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Las expresiones para la fuerza de Lorentz y la ley de Ohm quedan de la siguiente manera

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (1.32)$$

Con estas ecuaciones del campo electromagnético, la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.33)$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (1.34)$$

se forma el conjunto de ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica (Ecs. 1.30-1.34).

Estas ecuaciones forman un conjunto completo y cerrado, cuya solución se puede calcular con las condiciones iniciales y de frontera del problema. Nótese que la velocidad del fluido  $\vec{u}$  y el campo magnético  $\vec{B}$  se deben resolver de forma acoplada.

## 1.4 Ecuaciones adimensionales

La adimensionalización es una técnica matemática en la cual las variables del modelo de interés se expresan sin dimensiones por medio de un reescalamiento en el que las magnitudes características del problema se incorporan de manera tácita. Esto permite obtener resultados más generales, al ser éstos independientes de las dimensiones particulares de un sistema. Con el fin de adimensionalizar las ecuaciones 1.16, 1.34 se definen las siguientes variables

$$p^* = \frac{p}{\rho u_c^2}, \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{u_c}, \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \quad (1.35)$$

$$t^* = \frac{t}{L/u_c}, \quad \vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_c}, \quad \vec{j}^* = \frac{\vec{j}}{\sigma u_c B_c} \quad (1.36)$$

donde  $L$ ,  $u_c$  y  $B_c$  son valores característicos para las variables de, longitud, velocidad y campo magnético. Las variables que aparecen en estas ecuaciones pueden ser normalizadas en varias maneras, *no hay un forma universal para adimensionalizar la ecuaciones o para determinar los valores característicos del sistema.*

Estas nuevas variables adimensionales deben substituirse en el modelo matemático dimensional para obtener el modelo adimensionalizado. Para las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nu}{u_c L} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{\sigma B_c^2 L}{\rho u_c} \vec{j}^* \times \vec{B}^*, \quad (1.37)$$

o bien

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{Ha_c^2}{Re} \vec{j}^* \times \vec{B}^* \quad (1.38)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido.  $Re$  es el número de Reynolds basado en la velocidad característica  $u_c$  y  $Ha_c$  es el número de Hartmann basado en campo característico  $B_c$

$$Re = u_c L / \nu, \quad Ha_c = B_c L \sqrt{\sigma / \rho \nu}. \quad (1.39)$$

La temperatura del fluido se escala de la siguiente forma

$$T^* \longrightarrow (T - T_0) / (T_{ref} - T_0). \quad (1.40)$$

Sustituyendo estas variables adimensionales en la ecuación 1.16, para la ecuación de la energía se obtiene

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) T^* = \frac{1}{Pe} \nabla^{*2} T^*, \quad (1.41)$$

donde  $Pe$  es el número de Péclet y es igual al producto del número de Reynolds y el número Prandtl

$$Pe = Re Pr, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (1.42)$$

En diversos problemas en transferencia de calor una escala de tiempo característico que puede ser conveniente es

$$t^* \longrightarrow t / (L^2 / \alpha). \quad (1.43)$$

Al término  $L^2/\alpha$  se le denomina tiempo difusivo. Tomando el tiempo difusivo como escala de tiempo característica la ecuación de la energía se escribe de la siguiente forma

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + Pe(\vec{u}^* \cdot \nabla^*)T^* = \nabla^{*2}T^*. \quad (1.44)$$

A continuación se presenta un resumen de los parámetros adimensionales que aparecen como coeficientes en estas ecuaciones

Nombre	Símbolo	Definición	Significado
Reynolds	Re	$u_c L / \nu$	fuerzas inerciales entre fuerzas viscosas
Hartmann	$Ha_c$	$B_c L \sqrt{\sigma / \rho \nu}$	fuerza de Lorentz entre fuerzas inerciales
Péclet	Pe	$\rho c_p u_c L / \kappa$	convección entre conducción de calor
Prandtl	Pr	$\nu / \alpha$	difusión de momentum entre difusión de calor

Tabla 1.1: Parámetros adimensionales

Estos parámetros adimensionales se obtienen mediante combinaciones adecuadas de los parámetros dimensionales y no son únicos. Los parámetros adimensionales miden la importancia relativa de ciertos efectos.

Se debe ser siempre cuidadoso con la elección de las escalas características cuando se construyen las ecuaciones en forma adimensional, pero al escoger las correctas se puede simplificar el problema.

### 1.4.1 Aproximación a bajos números de Reynolds magnético

Las ecuaciones del campo electromagnético también se tratan en forma adimensional, con el fin de llegar al conjunto adimensional de las ecuaciones de la MHD. La ley de Ampère en forma adimensional es la siguiente

$$\nabla^* \times \vec{B}^* = R_m \vec{j}^*, \quad (1.45)$$

donde  $R_m$  es el número de Reynolds magnético, el cual representa la magnitud del campo magnético inducido entre la magnitud del campo magnético aplicado

$$R_m = \frac{u_c L}{\eta}, \quad (1.46)$$

donde  $\eta = 1/(\sigma \mu_0)$  es la difusividad magnética.

Cuando  $R_m$  es pequeño el campo magnético inducido es despreciable en comparación con el campo aplicado, sin embargo su presencia tiene efectos muy importantes en el flujo. A la escala de laboratorio  $R_m$  es típicamente del orden de  $10^{-4}$  a  $10^{-2}$ . Si  $R_m \ll 1$  el campo magnético  $\vec{B}^*$  se puede escribir de la siguiente forma

$$\vec{B}^* = \vec{B}_0^* + R_m \vec{b}^*, \quad (1.47)$$

donde  $\vec{B}_0^*$  es el campo magnético aplicado adimensional y  $\vec{b}^*$  es el campo magnético inducido.

Suponiendo que  $R_m \ll 1$ , la ley de Faraday en forma adimensional se escribe de la siguiente manera

$$\nabla^* \times \vec{E}^* = 0, \quad (1.48)$$

esta ecuación indica que el campo eléctrico es irrotacional, esto quiere decir

$$\vec{E}^* = -\nabla^* \phi^*, \quad (1.49)$$

donde  $\phi^*$  es el potencial eléctrico adimensional que se define de la siguiente manera

$$\phi^* \longrightarrow \phi / u_c B_c L.$$

La corriente eléctrica en el fluido se expresa a través de la ley de Ohm, en forma adimensional se escribe como

$$\vec{j}^* = -\nabla^* \phi^* + \vec{u}^* \times \vec{B}^*. \quad (1.50)$$

El potencial eléctrico esta relacionado con la velocidad vía la ecuación de conservación de carga (Ec. 1.31), esto lleva a una ecuación de Poisson para el potencial eléctrico

$$\nabla^{*2} \phi^* = \nabla^* \cdot (\vec{B}^* \times \vec{u}^*). \quad (1.51)$$

Resumiendo, en el limite de  $R_m \ll 1$  las ecuaciones de la MHD en forma adimensional son las siguientes

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = 0, \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{Ha_c^2}{Re} \vec{j}^* \times \vec{B}_0^*, \quad (1.53)$$

$$\vec{j}^* = -\nabla^* \phi^* + \vec{u}^* \times \vec{B}_0^*, \quad (1.54)$$

$$\nabla^{*2} \phi^* = \vec{B}_0^* \cdot \nabla^* \times \vec{u}^*. \quad (1.55)$$

A este conjunto de ecuaciones se le denomina formulación  $\phi$  de las ecuaciones de la MHD. Se trata de un sistema de ecuaciones cerrado y completo cuya solución se puede calcular con las condiciones de frontera e iniciales del problema.

---

# Flujo magnetohidrodinámico de un fluido entre cilindros concéntricos

---

Un intercambiador de calor es un dispositivo diseñado para transferir calor de un medio material a otro. Los más comunes son los intercambiadores que utilizan fluidos como medios de intercambio. Estos aparatos son ampliamente utilizados en refrigeración, plantas de energía eléctrica, refinerías de hidrocarburos, etc.

Uno de los intercambiadores de calor más sencillos se compone de tubos concéntricos por el que circulan fluidos a contracorriente con distinta temperatura. La eficacia de estos dispositivos depende de la geometría, las propiedades físicas de los tubos, los fluidos utilizados y las velocidades de los mismos. En este tipo de intercambiadores no existe un mecanismo adicional que permita incrementar la transferencia de calor.

El dispositivo que se propone estudiar en esta tesis es un intercambiador de calor en el que una fuerza electromagnética controlada externamente permite modificar el movimiento del fluido (flujo MHD) y por tanto la transferencia de calor.

En este capítulo se estudia el flujo MHD del fluido entre dos cilindros concéntricos que forman un intercambiador de calor. Se obtuvieron soluciones analíticas del problema para el caso de flujo completamente desarrollado. Se desarrolló un programa que permite estudiar el problema de manera más general ya que resuelve numéricamente las ecuaciones del flujo MHD. En el siguiente capítulo se abordará el tema relacionado a la transferencia de calor.

## 2.1 Flujo MHD de un fluido entre cilindros concéntricos con un campo magnético axial y corriente eléctrica radial

### 2.1.1 Configuración del problema hidrodinámico

La configuración del dispositivo se puede ver en la figura 2.1. Consiste en dos cilindros concéntricos infinitamente largos, con el eje  $z$  como su eje en común

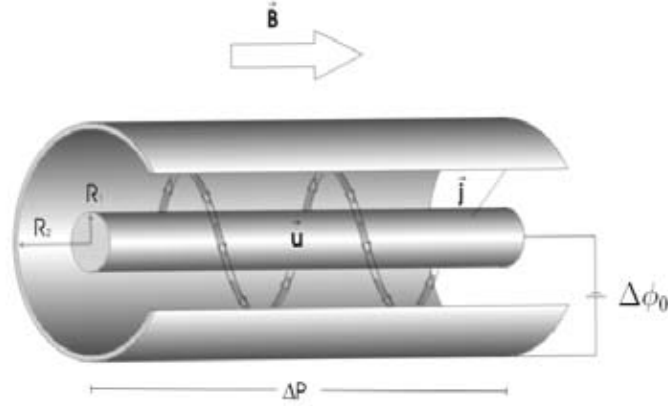


Fig. 2.1: Configuración del dispositivo, campo magnético axial, corriente eléctrica radial

$R_1$  y  $R_2$  son el radio interior y radio exterior respectivamente. En el espacio anular entre los cilindros se encuentra un fluido conductor de electricidad. Por todo este canal existe un campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$  orientado en la dirección axial, es decir perpendicular a la sección transversal circular de los cilindros. En la dirección radial se inyecta una corriente eléctrica  $\vec{j}$  por medio de una diferencia de potencial eléctrico  $\Delta\phi_0$  entre la pared en el radio interior y la pared en el radio exterior. Este arreglo ortogonal entre los campos, eléctrico y magnético, genera una fuerza de Lorentz que es perpendicular a ambos y actúa para inducir un movimiento en el fluido en la dirección azimutal. Aunado a esto, existe un gradiente de presión  $\Delta p$  que promueve un movimiento del fluido en la dirección axial.

El efecto MHD es eléctricamente controlable y reversible, es un método para controlar el flujo que no implica el uso de partes móviles, debido a la acción local sobre el fluido, explotando su naturaleza conductiva inherente.

El campo magnético inducido debido al movimiento del fluido se considera muy pequeño en comparación con el campo aplicado por lo que se utilizan las ecuaciones de la MHD con la aproximación a bajos números de Reynolds magnético (ver sec 1.4.1).

La forma de las ecuaciones 1.52, 1.53, 1.54 y 1.55 en el sistema de coordenadas cilíndricas, que es más conveniente para la geometría de interés, es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{Ha_c^2}{Re} (j_\theta B_z - j_z B_\theta), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{Ha_c^2}{Re} (j_z B_r - j_r B_z), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_z + \frac{Ha_c^2}{Re} (j_r B_\theta - j_\theta B_r), \quad (2.4)$$



$$\nabla^2\phi = \frac{B_z}{r} \left( \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (2.5)$$

$$j_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} + u_\theta B_z - u_z B_\theta \quad (2.6)$$

$$j_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} + u_z B_r - u_r B_z \quad (2.7)$$

$$j_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} + u_r B_\theta - u_\theta B_r \quad (2.8)$$

por simplicidad se omite el superíndice \* de las variables adimensionales.

Los operadores  $\vec{u} \cdot \nabla$  y  $\nabla^2$  se definen de la siguiente manera

$$\vec{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

y

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$r, \theta$  y  $z$  denotan las coordenadas cilíndricas,  $u_r, u_\theta, u_z, j_r, j_\theta, j_z$  y  $B_r, B_\theta, B_z$  y denotan las componentes de la velocidad, densidad de corriente eléctrica y campo magnético respectivamente, siendo todas estas variables adimensionales.

### 2.1.2 Escalas características

La adimensionalización del modelo matemático se puede ver en la sección 1.4. Para adimensionalizar estas ecuaciones se utilizaron ciertas magnitudes características de la longitud, velocidad y campo magnético. Estos parámetros se determinan a partir de un análisis físico del problema.

La longitud característica para este problema se elige como la diferencia de los radios de los cilindros

$$L = R_2 - R_1.$$

Con esta longitud característica el radio adimensional se define como  $r^* = R/L$  y la coordenada axial adimensional se define como  $z^* = z/L$ , donde  $R$  es el radio dimensional. Los radios adimensionales de los cilindros son:

$$r_1 = R_1/L, \quad r_2 = R_2/L.$$

Basados en el análisis del problema del flujo de un fluido conductor de electricidad en un canal rectangular debido a una fuerza electromagnética, descrito en detalle en el apéndice A, el campo magnético característico del problema se define de la siguiente manera

$$B_c = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}. \quad (2.9)$$

Debido a esta elección para el campo magnético característico, la definición del numero de Hartmann basado en el campo magnético característico (Ec. 1.39) queda de la siguiente manera

$$Ha_c = B_c L \sqrt{\sigma / \rho \nu} = 1.$$

En forma adimensional el campo magnético se define como

$$B_0^* = B_0 \hat{k} / B_c = B_z \hat{k},$$

donde

$$B_z = B_0 L \sqrt{\sigma / \rho \nu} \tag{2.10}$$

Si definimos el número de Hartmann basado en campo magnético  $B_0$  entonces

$$B_z = Ha_0 \tag{2.11}$$

La influencia del campo magnético aplicado se estudia en base a  $Ha_0$ .

De igual manera que con el campo magnético característico, analizando el caso de un flujo MHD cartesiano descrito en el apéndice A, se propone como la velocidad característica del problema

$$u_c = \frac{\Delta \phi_0}{B_c L}.$$

Los valores característicos de las otras variables son combinaciones de la longitud, velocidad y campo magnético característicos, por ejemplo para el potencial eléctrico se obtiene

$$\phi^* = \frac{\phi}{u_c B_c L} = \frac{\phi}{\Delta \phi_0}.$$

Cabe recordar nuevamente que no hay una forma universal para adimensionalizar las ecuaciones o para determinar los valores característicos del sistema, para fines de este estudio esta propuesta resulta ser la más conveniente.

### 2.1.3 Solución analítica del flujo para el caso completamente desarrollado

El presente tratamiento involucra ciertas suposiciones con el fin de obtener soluciones directas de las ecuaciones de la MHD. Suponemos que se trata de un flujo completamente desarrollado; esto es que los cilindros son suficientemente largos como para despreciar las variaciones axiales, no hay variaciones angulares en el flujo y la velocidad del fluido no depende del tiempo.

Además por las condiciones externas supuestas, el campo magnético y la corriente eléctrica tienen las siguientes propiedades

$$B_r = B_\theta = 0$$

y

$$j_\theta = j_z = 0.$$

Considerando estas suposiciones, las ecuaciones que describen el flujo 2.1-2.5 quedan de la siguiente forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) = 0, \quad (2.12)$$

$$u_r \frac{du_r}{dr} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} \right), \quad (2.13)$$

$$u_r \left( \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) - \frac{Ha_0}{Re} j_r, \quad (2.14)$$

$$u_r \frac{du_z}{dr} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} \right). \quad (2.15)$$

De la ecuación 2.12 se obtiene que  $ru_r = cte$ , pero  $u_r$  debe ser cero a  $r_1$  y  $r_2$  que se encuentran en las superficies de los cilindros, por lo tanto

$$u_r = 0. \quad (2.16)$$

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones 2.13-2.15, las ecuaciones que describen el flujo MHD para el caso completamente desarrollado quedan de la siguiente manera

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} - Ha_0 j_r = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{Ha_0}{r} \frac{d}{dr} (ru_\theta), \quad (2.20)$$

$$j_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + u_\theta Ha_0. \quad (2.21)$$

Si el gradiente de presión axial es conocido, la componente axial de la velocidad  $u_z$ , se puede calcular de la ecuación 2.19 de manera *desacoplada* del resto del problema.

Si  $\partial p/\partial z \neq 0$  quiere decir que el fluido esta siendo empujado en la dirección axial. Considerando que  $\partial p/\partial z \neq f(r)$  y que la velocidad del fluido se anula en las paredes de los cilindros  $u_z(r_1) = u_z(r_2) = 0$ , entonces la solución de la ecuación 2.19 es

$$u_z(r) = -\frac{Re}{4} \frac{\partial p}{\partial z} \left( r_2^2 - r^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_2) \right). \quad (2.22)$$

Este tipo de flujo en la dirección axial es conocido como un flujo de Poiseuille [7].

La ecuación para la componente azimutal de la velocidad  $u_\theta$  (Ec. 2.18) y la ecuación del potencial eléctrico (Ec. 2.20) se tienen que resolver de forma *acoplada*, estas ecuaciones contienen el efecto de las fuerzas magnetohidrodinámicas en el flujo.

Para el potencial eléctrico, de la ecuación 2.20, tenemos

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = Ha_0 \frac{d}{dr} (ru_\theta), \quad (2.23)$$

esto implica

$$r \frac{d\phi}{dr} = Ha_0 ru_\theta + D_1, \quad (2.24)$$

o bien

$$\frac{d\phi}{dr} = Ha_0 u_\theta + \frac{D_1}{r}, \quad (2.25)$$

finalmente

$$\phi(r) = \int_{r_1}^r Ha_0 u_\theta dr + D_1 \ln(r) + D_2, \quad (2.26)$$

hasta aquí se llega a una expresión para el potencial eléctrico donde las constantes  $D_1$  y  $D_2$  quedan sin determinar por el momento. El siguiente paso es calcular la corriente eléctrica en la dirección radial. De las ecuaciones 2.21 y 2.26 se tiene que

$$j_r(r) = -(Ha_0 u_\theta + \frac{D_1}{r}) + Ha_0 u_\theta = -\frac{D_1}{r}, \quad (2.27)$$

sustituyendo esta expresión en la Ec. 2.18, la ecuación para la componente azimutal de la velocidad  $u_\theta$  queda de la siguiente forma

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} + \gamma \frac{1}{r} = 0, \quad (2.28)$$

donde

$$\gamma = D_1 Ha_0. \quad (2.29)$$

El flujo en la dirección azimutal se produce por la fuerza de Lorentz debida a la interacción de la corriente eléctrica radial impuesta y campo magnético axial aplicado. Puede interpretarse como una clase de flujo de Poiseuille debido a un gradiente de presión azimutal; esto si identificamos a la fuerza de Lorentz que actúa sobre el fluido en el canal circular con un gradiente de presión azimutal [6].

La solución de la ecuación 2.28 es

$$u_\theta(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} - \frac{\gamma}{2} r \ln(r),$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan a partir de las condiciones de frontera del problema

$$u_\theta(r_1) = 0 \quad y \quad u_\theta(r_2) = 0,$$

resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen  $c_1$  y  $c_2$ . Sustituyendo el valor de estas constantes, el perfil de velocidad en la dirección azimutal es el siguiente

$$u_\theta(r) = \gamma \left( \frac{r_1^2 \ln(r_1) - r_2^2 \ln(r_2)}{2(r_1^2 - r_2^2)} \right) r + \gamma \left( \frac{-r_1^2 r_2^2 \ln(r_1) + r_1^2 r_2^2 \ln(r_2)}{2(r_1^2 - r_2^2)} \right) \frac{1}{r} - \frac{\gamma}{2} r \ln(r), \quad (2.30)$$

o bien

$$u_\theta(r) = \gamma u_f(r), \quad (2.31)$$

donde

$$u_f(r) = \left( \frac{r_1^2 \ln(r_1) - r_2^2 \ln(r_2)}{2(r_1^2 - r_2^2)} \right) r + \left( \frac{-r_1^2 r_2^2 \ln(r_1) + r_1^2 r_2^2 \ln(r_2)}{2(r_1^2 - r_2^2)} \right) \frac{1}{r} - \frac{r \ln(r)}{2}. \quad (2.32)$$

La componente  $u_\theta$  de la velocidad del fluido se determina por completo cuando se conoce el valor de la constante  $D_1$  que aparece en la definición de la constante  $\gamma$ .

Procedemos a determinar la constante  $D_1$  de la siguiente manera: Regresando de nuevo a la solución del potencial eléctrico (Ec. 2.26). Al aplicar las condiciones de frontera del potencial eléctrico

$$\phi(r_1) = 0, \quad \phi(r_2) = 1,$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = D_1 \ln(r_1) + D_2 \quad (2.33)$$

y

$$1 = Ha_0 \int_{r_1}^{r_2} u_\theta(r) dr + D_1 \ln(r_2) + D_2. \quad (2.34)$$

sustituyendo 2.31, 2.29 en la ecuación anterior obtenemos

$$1 = Ha_0^2 D_1 \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr + D_1 \ln(r_2) + D_2. \quad (2.35)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen el valor de las constantes  $D_1$  y  $D_2$

$$D_1 = 1 / \left( Ha_0^2 \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr + \ln(r_2/r_1) \right). \quad (2.36)$$

La constante  $D_2$  se calcula de la ecuación 2.33.

Sustituyendo  $D_1$  y  $D_2$  en la ecuación 2.26, el potencial eléctrico queda de la siguiente forma

$$\phi(r) = Ha_0 \int_{r_1}^r u_\theta dr + (\ln(r/r_1)) / \left( Ha_0^2 \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr + \ln(r_2/r_1) \right) \quad (2.37)$$

Al encontrar  $D_1$  se obtiene la expresión completa de la componente azimutal de la velocidad

$$u_\theta(r) = \frac{Ha_0}{Ha_0^2 \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr + \ln(r_2/r_1)} \left\{ \left( \frac{r_1^2 \ln(r_1) - r_2^2 \ln(r_2)}{2(r_1^2 - r_2^2)} \right) r + \left( \frac{-r_1^2 r_2^2 \ln(r_1) + r_1^2 r_2^2 \ln(r_2)}{2(r_1^2 - r_2^2)} \right) \frac{1}{r} - \frac{r \ln(r)}{2} \right\}, \quad (2.38)$$

o bien

$$u_\theta(r) = \gamma u_f(r) \quad (2.39)$$

donde

$$\gamma = \frac{Ha_0}{Ha_0^2 \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr + \ln(r_2/r_1)} \quad (2.40)$$

y  $u_f(r)$  esta definido por la ecuación 2.32.

Sustituyendo  $D_1$  en la ecuación 2.27, la corriente eléctrica queda de la siguiente forma

$$j_r(r) = \frac{-1}{r \left( Ha_0^2 \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr + \ln(r_2/r_1) \right)}. \quad (2.41)$$

Las ecuaciones 2.37, 2.38 y 2.41 son la solución analítica del flujo MHD para el caso completamente desarrollado. Estas expresiones nos permiten hacer las siguientes observaciones:

a) La velocidad del fluido, la corriente eléctrica y el potencial eléctrico dependen de la magnitud del campo magnético aplicado, es decir del número de Hartmann, por lo tanto  $u_\theta = u_\theta(r, Ha_0)$ ,  $j_r = j_r(r, Ha_0)$  y  $\phi = \phi(r, Ha_0)$

b) De la ecuación 2.38

$$\text{si } Ha_0 = 0 \Rightarrow u = 0,$$

$$\text{si } Ha_0 \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0.$$

Esto implica que la velocidad del fluido tiene un máximo. El máximo de la velocidad del fluido se calcula encontrando  $r = r_{max}$  y  $Ha_0 = Ha_{max}$  tal que

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial Ha_0} = 0.$$

Como  $u_\theta(r, Ha_0) = \gamma(Ha_0)u_f(r)$  entonces  $r_{max}$  se obtiene encontrando  $du_f/dr = 0$  que es la solución de la ecuación trascendente

$$r_{max}^2 (-r_1^2 + r_2^2) (\ln(r_{max}) + 1) + r_1^2 (r_{max}^2 + r_2^2) \ln(r_1) - r_2^2 r_2^2 \ln(r_2) - r_1^2 r_2^2 \ln(r_2) = 0. \quad (2.42)$$

$Ha_{max}$  se obtiene encontrando  $d\gamma/dHa_0 = 0$ ,

$$Ha_{max} = \sqrt{\ln(r_2/r_1) / \int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr}. \quad (2.43)$$

c) De la ecuación 2.37

$$\text{si } Ha_0 = 0 \Rightarrow \phi(r, Ha_0 = 0) = \ln(r/r_1) / \ln(r_2/r_1), \quad (2.44)$$

$$\text{si } Ha_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \phi(r, Ha_0 \rightarrow \infty) = \frac{\int_{r_1}^r u_f(r) dr}{\int_{r_1}^{r_2} u_f(r) dr}. \quad (2.45)$$

Para todo  $Ha_0$  el potencial eléctrico satisface

$$0 < \phi < 1$$

es decir el potencial eléctrico está acotado

d) De la ecuación 2.41,

$$\text{si } Ha_0 \ll Ha_{max} \Rightarrow j_0 = 1/r \ln(r_2/r_1). \quad (2.46)$$

Para  $Ha_0 \gg Ha_{max}$  la corriente eléctrica es inversamente proporcional a  $Ha_0^2$ , esto implica

$$\text{si } Ha_0 \rightarrow \infty \Rightarrow j_r \rightarrow 0$$

esto quiere decir que en un campo magnético muy intenso el fluido opone una mayor resistencia al paso de la corriente eléctrica.

A continuación se pueden ver distintas gráficas de la velocidad del fluido en la dirección azimutal, la corriente eléctrica y el potencial eléctrico a distintos valores del número de Hartmann,  $Ha_0=1, 2, 4, 8$  y  $16$

La figura 2.2 muestra el perfil de velocidad del fluido en la dirección azimutal, que se calcula de la ecuación 2.38, a distintos valores del número de Hartmann

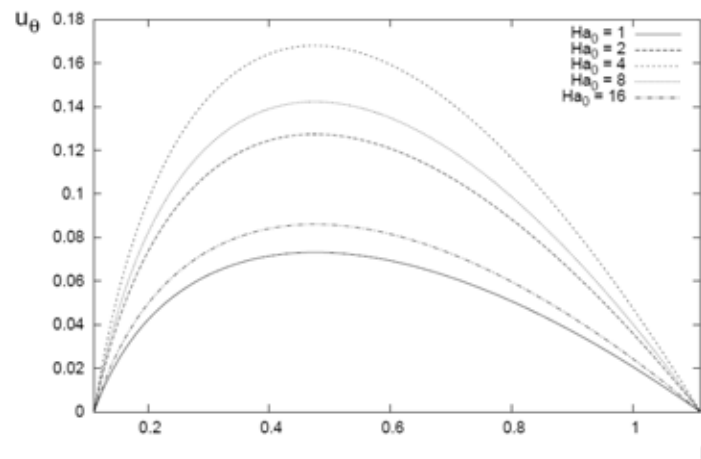


Fig. 2.2: Componente azimutal de la velocidad como función del radio a distintos valores de número de Hartmann

El máximo de cada perfil de velocidad a un valor de  $Ha_0$  dado es  $u_\theta(r_{max})$ . La figura 2.3 es la gráfica de  $u_\theta(r_{max})$  como función de  $Ha_0$

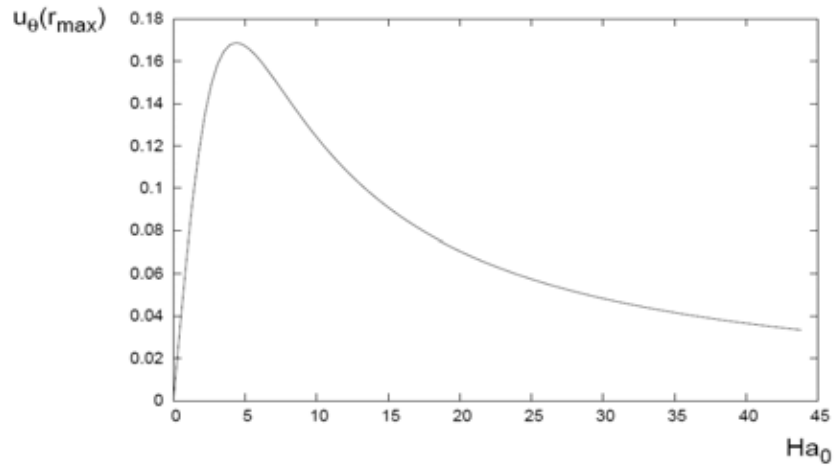


Fig. 2.3: Velocidad azimutal máxima como función del número de Hartmann

Si  $Ha_0 \ll Ha_{max}$  la velocidad se incrementa de manera proporcional con el número de Hartmann, el máximo ocurre en  $Ha_0 = Ha_{max}$ , después disminuye drásticamente y finalmente si  $Ha_0 \gg Ha_{max}$  cae de forma muy lenta.

La figura 2.4 es la gráfica de la distribución de potencial eléctrico, que se calcula de la ecuación 2.37, a distintos valores del número de Hartmann

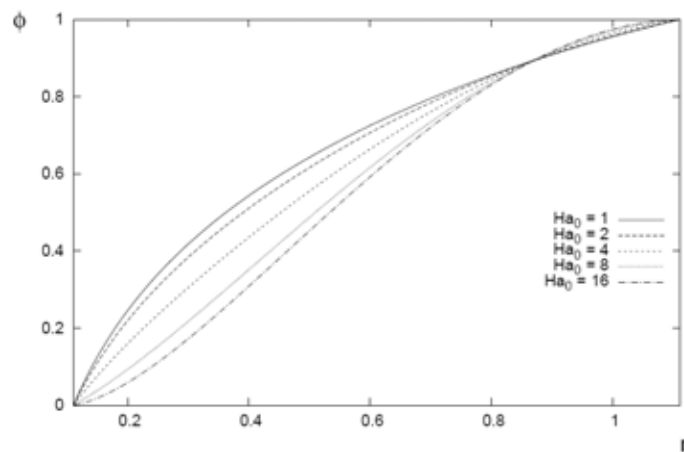


Fig. 2.4: Potencial eléctrico como función del radio a distintos valores de número de Hartmann

La figura 2.4 es la gráfica de la distribución de corriente eléctrica en el fluido que se calcula de la ecuación 2.41 a distintos valores del número de Hartmann



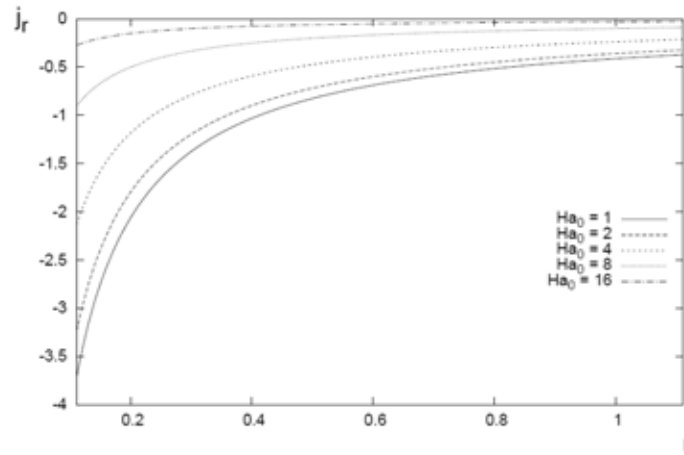


Fig. 2.5: Corriente eléctrica como función del radio a distintos valores de número de Hartmann

En esta gráfica podemos observar que la  $j_r \rightarrow 0$  si el número de Hartmann es muy grande, como se mencionó anteriormente.

## 2.2 Flujo MHD oscilatorio de un fluido entre cilindros concéntricos

En esta sección analizaremos el caso bidimensional de un flujo MHD del fluido entre cilindros concéntricos, con un campo magnético axial y corriente eléctrica radial cuando se impone una diferencia de potencial en las paredes de los cilindros que varía en el tiempo. La condición de frontera para el potencial eléctrico es la siguiente

$$\phi(r_1) = 0, \quad \phi(r_2) = f(t) \quad (2.47)$$

en este caso analizaremos

$$f(t) = \text{sen}(\omega t) \quad (2.48)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del potencial.

### 2.2.1 Ecuaciones adimensionales para el caso oscilatorio

Para esta clase de problemas la escala de tiempo característica que resulta más conveniente para obtener las ecuaciones de forma adimensional es la frecuencia de oscilación

$$t^* \longrightarrow \omega t,$$

entonces las ecuaciones de la MHD adimensionales en formulación  $\phi$  (Ecs. 2.1-2.5) en dos dimensiones se escriben de la siguiente manera

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{Re_w}{Re} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{Ha_0}{Re} j_\theta, \quad (2.50)$$

$$\frac{Re_w}{Re} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{Ha_0}{Re} j_r, \quad (2.51)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{Ha_0}{r} \left( \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (2.52)$$

con

$$j_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + u_\theta Ha_0 \quad (2.53)$$

$$j_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - u_r Ha_0 \quad (2.54)$$

donde  $Re_w = \omega L^2 / \nu$  es el número de Reynolds oscilatorio.

Las condiciones de frontera para la velocidad son de no deslizamiento en las paredes, es decir

$$u_\theta(r_1) = 0 \quad y \quad u_\theta(r_2) = 0.$$

La condición de frontera para el potencial eléctrico en forma adimensional es la siguiente

$$\phi(r_1) = 0, \quad \phi(r_2) = Sen(t) \quad (2.55)$$

Debido a que el modelo incluye flujos dependientes del tiempo, es necesario establecer condiciones iniciales. En este estudio consideramos

$$u_\theta(r, \theta, 0) = 0 \quad \phi(r, \theta, 0) = 0$$

Por la condición de frontera 2.55 potencial eléctrico varía en el tiempo. La interacción del campo magnético y la corriente eléctrica alterna origina una fuerza de Lorentz con un comportamiento oscilatorio. Para ciertos regímenes la velocidad del fluido oscila en el tiempo con la misma frecuencia pero posiblemente con una desplazamiento de fase relativa a las oscilaciones en el potencial eléctrico. La amplitud del movimiento y la fase relativa dependerán del valor de la condición de frontera sobre el potencial eléctrico.

### 2.2.2 Solución analítica con respuesta síncrona del sistema

Si suponemos que todas las magnitudes del problema sólo dependen de la coordenada radial y del tiempo, entonces las ecuaciones del flujo oscilatorio se transforman en

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.56)$$

$$\frac{Re_w}{Re} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) - \frac{Ha_0}{Re} j_r \quad (2.57)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{Ha_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \quad (2.58)$$

$$j_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + u_\theta \quad (2.59)$$

Una hipótesis muy común en este tipo de problemas es suponer que todas las variables del sistema oscilan con la misma frecuencia. Esto nos permite suponer que el potencial eléctrico, la corriente eléctrica y la velocidad se pueden escribir de la siguiente forma

$$\phi = Im(\hat{\phi} e^{it}) \quad (2.60)$$

$$j_r = Im(\hat{j}_r e^{it}) \quad (2.61)$$

$$u_\theta = Im(\hat{u}_\theta e^{it}) \quad (2.62)$$

Siempre que en los cálculos sólo intervengan operaciones lineales podemos omitir el signo  $Im$  y proceder como si  $\vec{u}$ ,  $\phi$  y  $j_r$  fueran complejos y tomar la parte imaginaria del resultado final. Sustituyendo 2.60-2.62 en 2.56-2.58 obtenemos

$$iRe_w \hat{u}_\theta = \frac{d^2 \hat{u}_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} - \hat{j}_r Ha_0 \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\hat{\phi}}{dr} \right) = \frac{Ha_0}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_\theta) \quad (2.64)$$

$$\hat{j}_r = -\frac{d\hat{\phi}}{dr} + \hat{u}_\theta Ha_0 \quad (2.65)$$

Estas ecuaciones para  $\hat{u}_\theta$ ,  $\hat{\phi}$  y  $\hat{j}_r$  son similares a las encontradas para la velocidad, corriente eléctrica y potencial en el problema estudiado en la sección anterior (Ecs 2.18, 2.20 y 2.21). Por analogía la solución de  $\hat{\phi}$  y  $\hat{j}_r$  son

$$\hat{\phi}(r) = \int_{r_1}^r Ha_0 \hat{u}_\theta dr + D_1 \ln(r) + D_2 \quad (2.66)$$

y

$$\hat{j}_r(r) = -(Ha_0 \hat{u}_\theta + \frac{D_1}{r}) + Ha_0 \hat{u}_\theta = -\frac{D_1}{r}. \quad (2.67)$$

sustituyendo 2.67 en 2.63 la ecuación para  $\hat{u}_\theta$  queda de la siguiente forma

$$\frac{d^2 \hat{u}_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}_\theta}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + iRe_w \right) \hat{u}_\theta + \frac{\gamma}{r} = 0, \quad (2.68)$$

donde

$$\gamma = D_1 Ha_0$$

La solución de esta ecuación diferencial es la siguiente

$$\hat{u}_\theta = \gamma w_f(r) \quad (2.69)$$

donde

$$w_f(r) = a_1 J_1(i^{3/2} \sqrt{Re_w} r) + a_2 Y_1(-i^{3/2} \sqrt{Re_w} r) + u_p(r) \quad (2.70)$$

y

$$u_p(r) = \frac{1}{2\sqrt{Re_w}} \left[ i^{1/2} \pi J_1 \left( i^{3/2} \sqrt{Re_w} r \right) Y_0 \left( -i^{3/2} \sqrt{Re_w} r \right) + i^{1/2} \pi I_0 \left( i^{1/2} \sqrt{Re_w} r \right) Y_1 \left( -i^{3/2} \sqrt{Re_w} r \right) - i^{1/2} \pi Y_1 \left( -i^{3/2} \sqrt{Re_w} r \right) \right]$$

$J_1$  es la función de Bessel de primer tipo,  $Y_1$  es la función de Bessel de segundo tipo ambas de orden uno, e  $I_0$  es la función de Bessel modificada de primer tipo de orden cero.

Las constantes  $a_1$  y  $a_2$  se determinan de las condiciones de frontera

$$a_1 = \frac{Y_1(-i^{3/2} r_1 \sqrt{Re_w}) u_p(r_2) - Y_1(-i^{3/2} r_2 \sqrt{Re_w}) u_p(r_1)}{J_1(i^{3/2} r_1 \sqrt{Re_w}) Y_1(-i^{3/2} r_2 \sqrt{Re_w}) - J_1(i^{3/2} r_2 \sqrt{Re_w}) Y_1(-i^{3/2} r_1 \sqrt{Re_w})} \quad (2.71)$$

$$a_2 = \frac{J_1(i^{3/2} r_1 \sqrt{Re_w}) u_p(r_2) - J_1(i^{3/2} r_2 \sqrt{Re_w}) u_p(r_1)}{J_1(i^{3/2} r_2 \sqrt{Re_w}) Y_1(-i^{3/2} r_1 \sqrt{Re_w}) - J_1(i^{3/2} r_1 \sqrt{Re_w}) Y_1(-i^{3/2} r_2 \sqrt{Re_w})} \quad (2.72)$$

La constante de  $D_1$  se obtiene de la solución de  $\hat{\phi}$  (Ec. 2.66). Por analogía con el problema de la sección anterior

$$D_1 = 1 / \left( H a_0^2 \int_{r_1}^{r_2} w_f(r) dr + \ln(r_2/r_1) \right). \quad (2.73)$$

La parte imaginaria de 2.66, 2.67 y 2.69 es la solución analítica del flujo MHD oscilatorio con respuesta síncrona del sistema.

A pesar de que se cuenta con una expresión analítica que describe a  $u_\theta$ ,  $\phi$  y  $j_r$  cuando se considera que la velocidad radial se anula y que  $f(t) = \text{sen}(t)$ , se construyó un método numérico que resuelve las ecuaciones 2.49-2.52 para relajar las condiciones de simetría y para cualquier función específica para  $\phi$  en la frontera.

### 2.2.3 Solución numérica del flujo MHD

En muchos casos de flujo entre cilindros concéntricos no es posible encontrar una solución analítica del problema, por lo que se debe buscar una solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales asociadas. Para lograr este objetivo se desarrolló un programa de computadora que resuelve las ecuaciones de la MHD en formulación  $\phi$  en canales de sección transversal circular.

La estrategia de solución numérica de estas ecuaciones diferenciales acopladas se presenta en detalle en el apéndice B. Las ventajas de tener un código numérico para resolver el

problema incluyen la posibilidad de estudiar el estado transitorio del flujo, su estabilidad y otras configuraciones de interés que en general no es posible resolver analíticamente.

Con el fin de validar los resultados obtenidos con el programa se resolvió el caso estudiado en la sección anterior, cuando las condiciones de frontera sobre el potencial eléctrico se consideran constantes. La figura 2.6 compara la velocidad azimutal como función del radio para  $Ha_0 = 1$  y  $4$  calculada con la solución analítica 2.38 y la solución numérica empleando el método de volumen finito (ver apéndice B). Se puede ver que la solución numérica y la solución analítica son indistinguibles

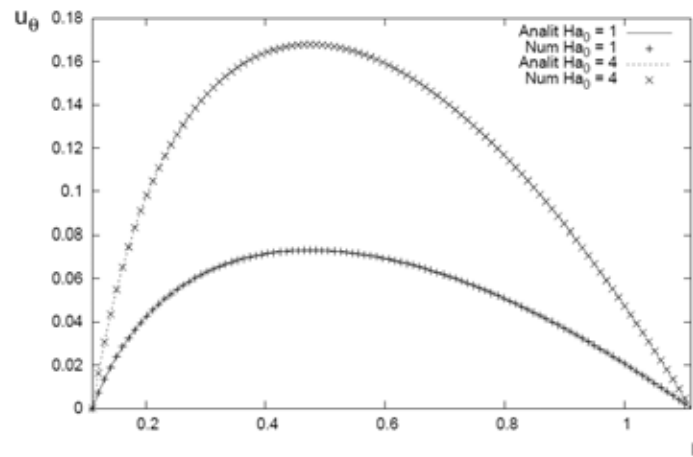


Fig. 2.6: Solución analítica y numérica de la velocidad azimutal con corriente eléctrica constante

Para otros valores de  $Ha_0$  también se obtiene una buena comparación entre solución numérica y la solución analítica. Esto indica que se puede tener confianza en cierto grado en el código numérico que se desarrolló para resolver las ecuaciones.

A continuación, como ejemplos de la solución numérica del flujo oscilatorio, se pueden ver distintas gráficas de la velocidad del fluido en la dirección azimutal, la corriente eléctrica y el potencial eléctrico como función del tiempo para un valor de  $Ha_0 = 1$  y un número de Reynolds  $Re=1$ .

El primer caso que se resuelve es cuando la condición de frontera del potencial eléctrico oscila con una frecuencia baja  $Re_w = 1$ . La figura 2.7 muestra la variación temporal de la velocidad del fluido  $u_\theta$  en un punto dado  $r=L/2$ ,  $\theta = \pi$

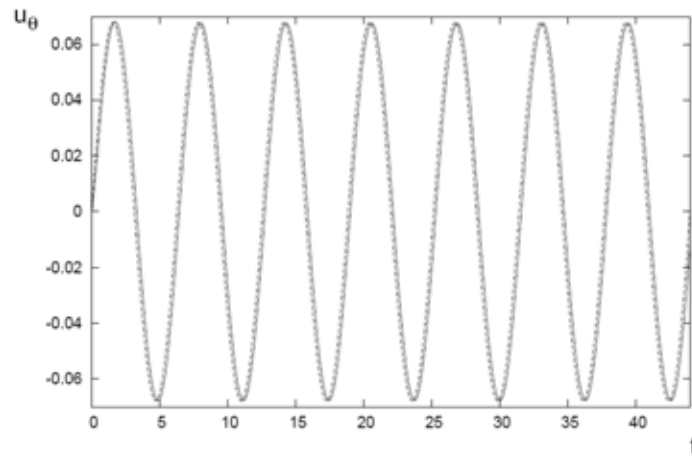


Fig. 2.7: Velocidad del fluido en un punto como función del tiempo a  $Re_w = 1$

La línea continua es la velocidad del fluido en el punto y la línea punteada es la variación temporal de la condición de frontera del potencial eléctrico.

Se puede ver que la frecuencia de oscilación de la velocidad del fluido y el potencial eléctrico es la misma. A números de Reynolds oscilatorios pequeños el transitorio del fenómeno es corto y la diferencia de fase es pequeña.

La figura 2.8 muestra los perfiles de velocidad del fluido en la dirección azimutal, calculados numéricamente durante un ciclo

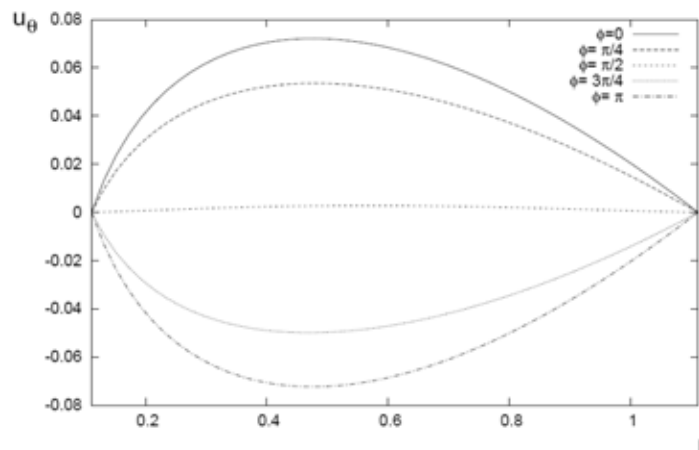


Fig. 2.8: Velocidad azimutal como función del radio durante un ciclo a  $Re_w = 1$

Se encuentra que el perfil de velocidad tiene un máximo. Se trata de una distribución asimétrica como es de esperarse para un flujo anular.

La figura 2.9 muestra la gráfica de la distribución de potencial eléctrico en el fluido calculado numéricamente durante un ciclo

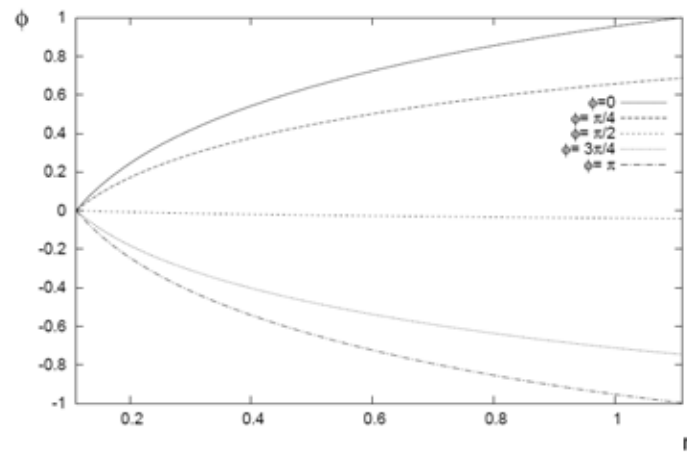


Fig. 2.9: Potencial eléctrico como función del radio en un ciclo a  $Re_w = 1$

La figura 2.10 muestra la gráfica de la corriente eléctrica en el fluido calculado numéricamente durante un ciclo

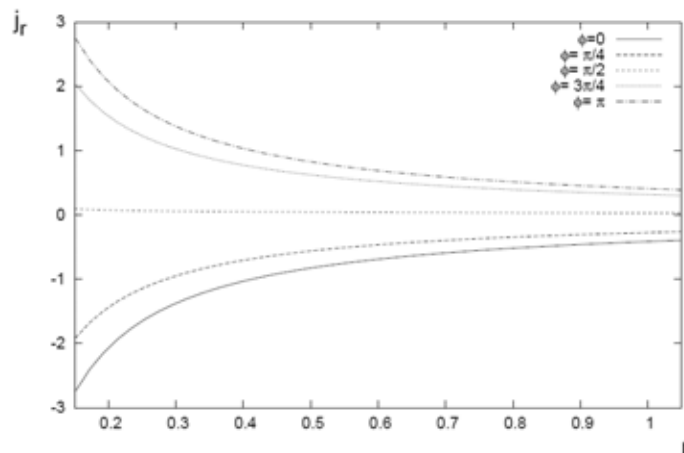


Fig. 2.10: Corriente eléctrica como función del radio en un ciclo a  $Re_w = 1$

El segundo caso que se estudia es un valor del número de Reynolds oscilatorio muy grande. La figura 2.11 muestra la variación temporal de la velocidad del fluido  $u_\theta$  en el punto  $r=L/2$ ,  $\theta = \pi$  calculada numéricamente tomando  $Re_w = 100$

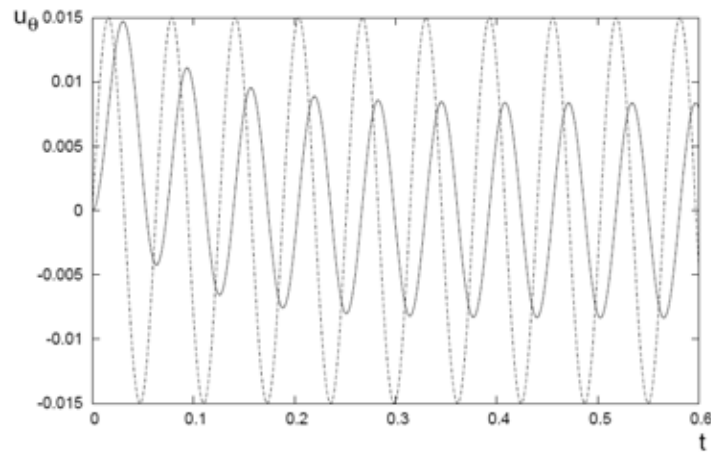


Fig. 2.11: Velocidad del fluido en un punto como función del tiempo a  $Re_w = 1$

La línea continua es la velocidad del fluido en un punto dado, la línea punteada es la variación temporal de la condición de frontera del potencial.

Al igual que en el caso anterior la frecuencia de oscilación de la velocidad del fluido y el potencial eléctrico es la misma. A números de Reynolds oscilatorios grandes, el transitorio tiene mayor duración, la amplitud del movimiento disminuye, y la diferencia de fase aumenta. En el caso de flujos oscilatorios la diferencia de fase  $\psi$  es función de la posición. La figura 2.12 es la gráfica de la diferencia de fase entre la velocidad del fluido y el potencial eléctrico como función de la coordenada radial

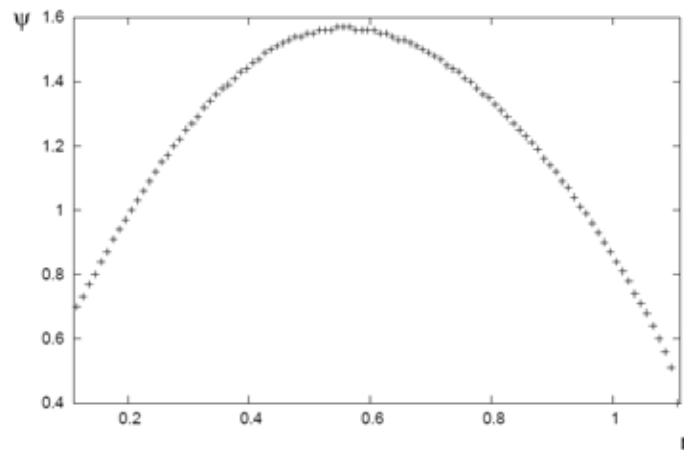


Fig. 2.12: Diferencia de fase entre la velocidad del fluido y el potencial eléctrico como función de la coordenada radial

La figura 2.13 muestra los perfiles de velocidad del fluido en la dirección azimutal durante un ciclo



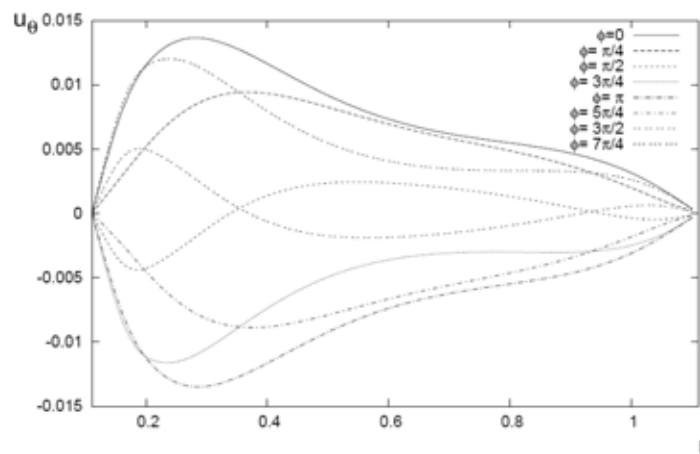


Fig. 2.13: Velocidad azimutal como función del radio durante un ciclo a  $Re_w = 100$

Se puede ver que la amplitud del movimiento cerca del radio interior es mayor que el de la región central de los cilindros y para ciertos tiempos hay fluido que se mueve en direcciones opuestas.

La figura 2.14 muestra la gráfica de la distribución de potencial eléctrico en el fluido calculado numéricamente durante un ciclo

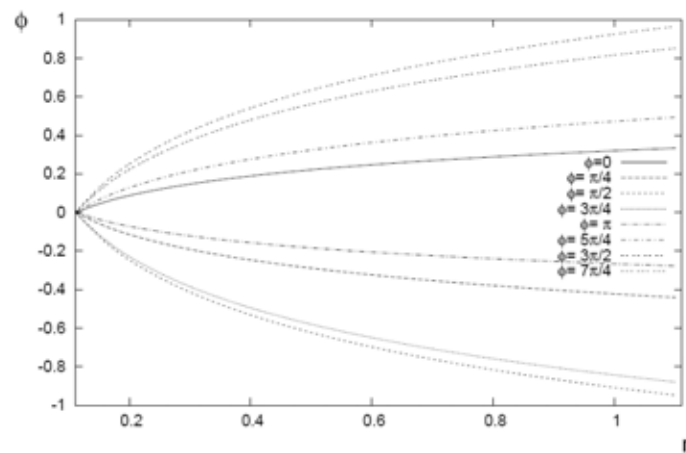


Fig. 2.14: Potencial eléctrico como función del radio durante un ciclo a  $Re_w = 100$

La distribución de potencial tiene una forma logarítmica que se desplace en función del tiempo.

La figura 2.15 muestra la gráfica de la corriente eléctrica en el fluido calculado numéricamente durante un ciclo

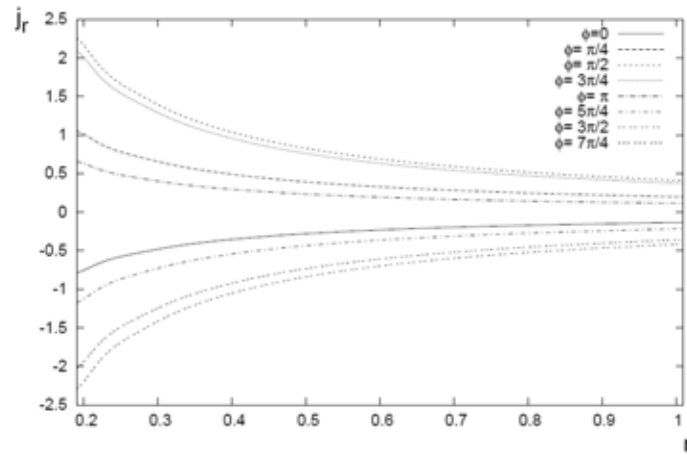


Fig. 2.15: Corriente eléctrica como función del radio durante un ciclo a  $Re_w = 100$

La corriente eléctrica tiene una forma hiperbólica que se desplaza en función del tiempo. Algunos de estos resultados son esperados debido a la solución analítica obtenida del flujo MHD oscilatorio Ecs. 2.66, 2.67 y 2.69. El método numérico nos permitió estudiar el transitorio del sistema. Como trabajo futuro se busca estudiar la estabilidad del flujo utilizando el código numérico con el que se resolvió este caso.

---

# Transferencia de calor en un flujo magnetohidrodinámico en cilindros concéntricos

---

La transferencia de calor en ductos anulares en un régimen de convección forzada, debida a flujo magnetohidrodinámico, es muy importante en el diseño de dispositivos ingenieriles como intercambiadores de calor, agitadores electromagnéticos, bombas MHD, entre otros. La teoría básica acerca de la transferencia de calor en un flujo MHD se puede ver en [13].

En este capítulo se estudiará el problema de la transferencia de calor, en un régimen de convección forzada, de un fluido eléctricamente conductor entre dos cilindros concéntricos que forman un intercambiador de calor. Si los coeficientes de transporte y las propiedades del fluido se consideran constantes y también se considera que los efectos relacionados a la polarización eléctrica y magnetización del medio son despreciables, es posible desacoplar la transferencia de calor del problema hidrodinámico.

El fluido entre los cilindros presenta un flujo MHD laminar y completamente desarrollado como el que se estudio en el capítulo anterior. Se considera que la pared del cilindro exterior tiene una distribución de temperatura que varía angularmente en forma sinusoidal.

El campo de temperaturas en el fluido se determinó analítica y numéricamente. La solución analítica para la temperatura del fluido se obtuvo por el método de separación de variables y por el método de Galerkin [14]. La solución numérica para la temperatura del fluido se calculó utilizando el método de volumen finito [15].

## 3.1 Configuración del problema térmico

La configuración del dispositivo se puede ver en la figura 3.1. Consiste en dos cilindros concéntricos infinitamente largos con el eje  $z$  como su eje en común

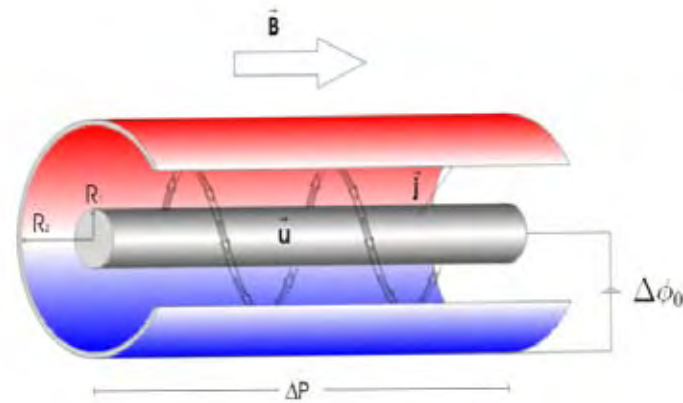


Fig. 3.1: Configuración del problema térmico, distribución de temperatura sinusoidal en la pared del cilindro exterior

$R_1$  y  $R_2$  son el radio interior y radio exterior respectivamente. En el espacio anular entre los cilindros se encuentra un fluido conductor de electricidad. El movimiento del fluido entre los cilindros se compone de dos flujos independientes; uno en la dirección azimutal y el otro en la dirección axial. El flujo en la dirección azimutal es originado por una fuerza electromagnética debida a un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  orientado en la dirección axial y una corriente eléctrica  $\vec{j}$  inyectada en la dirección radial por medio de una diferencia de potencial eléctrico  $\Delta\phi_0$  entre las paredes de los cilindros. El flujo en la dirección axial es promovido por un gradiente de presión  $\Delta p$  en esa misma dirección. Se considera que la pared del cilindro exterior tiene una distribución de temperatura que varía angularmente en forma sinusoidal.

Para modelar la transferencia de calor se consideran las siguientes suposiciones

- Las propiedades físicas del fluido permanecen constantes
- Los efectos de convección natural, disipación viscosa, disipación ohmica y radiación son despreciables
- La capacidad calorífica de las paredes de los cilindros es mucho mayor que la capacidad calorífica del fluido, de tal manera que la temperatura de las paredes permanece inalterada
- Los efectos relacionados a la polarización eléctrica y magnetización del medio son despreciables

La distribución de temperatura en el fluido se determina a partir solución de la ecuación de balance de energía (Ec. 1.16), que en coordenadas cilíndricas tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.1)$$

### 3.1.1 Escalamiento de las variables

El escalamiento de las variables para obtener el modelo adimensional se hizo de la siguiente manera:

- La longitud característica se elige como la diferencia de los radios de los cilindros

$$L = R_2 - R_1.$$

Con esta longitud característica el radio adimensional se define como  $r^* = R/L$  y la coordenada axial adimensional se define como  $z^* = z/L$ , donde  $R$  es el radio dimensional. Los radios adimensionales de los cilindros son:

$$r_1 = R_1/L; \quad r_2 = R_2/L.$$

- La temperatura del fluido se adimensionaliza usando  $T_{ref}$  como temperatura característica

$$T^* \longrightarrow T/T_{ref}.$$

- La escala de tiempo característico que se utiliza es el tiempo difusivo

$$t^* \longrightarrow t/(L^2/\alpha).$$

- La velocidad del fluido ( $0, u_\theta, u_z$ ) se adimensionalizó de la siguiente manera

$$u_\theta^* = \frac{u_\theta}{u_c}, \quad u_z^* = \frac{u_z}{w_0},$$

donde

$$u_c = \frac{\Delta\phi_0}{B_c L}, \quad w_0 = \frac{L^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Sustituyendo estas variables escaladas en 3.1, se obtiene la forma adimensional de la ecuación de la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Pe_\theta \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + Pe_z u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (3.2)$$

donde

$$Pe_\theta = Re_\theta Pr, \quad Pe_z = Re_z Pr, \quad (3.3)$$

$Re_\theta$  es el número de Reynolds basado en la velocidad característica  $u_c$  y  $Re_z$  es el número de Reynolds basado en la velocidad característica  $w_0$ . Por simplicidad se omite el superíndice \* de las variables adimensionales.

Nótese que esta ecuación considera un modelo de dos escalas para el número de Péclet; es decir, dos números de Péclet, uno para la dirección azimutal y el otro para la dirección axial, la ventaja que se obtiene con esta formulación es poner claramente en evidencia que en este caso el movimiento del fluido en la dirección azimutal es independiente del movimiento en la dirección axial.

## 3.2 Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado

En esta sección presentaremos el análisis de varias situaciones en orden creciente de complejidad.

Comenzaremos estudiando el problema de manera bidimensional, es decir, cuando la transferencia de calor se vuelve independiente de la coordenada longitudinal. Primero supondremos que la velocidad del fluido es cero, en este caso el calor sólo se transfiere por conducción. En seguida consideraremos el caso con un flujo MHD en la dirección azimutal.

Para finalizar, estudiaremos la variación longitudinal de la temperatura del fluido en una región muy cercana a la sección transversal inicial y analizaremos la influencia de la velocidad en la dirección axial.

### 3.2.1 Transferencia de calor por conducción

Si suponemos que la temperatura a lo largo del canal mantiene una distribución similar en cada sección transversal entonces la transferencia de calor se vuelve independiente de la coordenada longitudinal, esto implica

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

En ausencia de campo magnético no hay una fuerza de Lorentz que actúe sobre el fluido y no se induce un movimiento en la dirección azimutal

$$\vec{B} = 0 \Rightarrow u_\theta = 0.$$

Por las suposiciones anteriores, la transferencia de calor en el fluido no depende de la coordenada axial y sólo ocurre por conducción, entonces la ecuación de balance de energía (Ec. 3.2) se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}. \quad (3.4)$$

Las condiciones de frontera del problema son

$$T(r_1, \theta, t) = 0, \quad (3.5)$$

$$T(r_2, \theta, t) = \text{sen}(\theta) \quad (3.6)$$

y la condición inicial es

$$T(r, \theta, 0) = 0 \quad (3.7)$$

En este estudio se consideró que la distribución de temperatura en pared el cilindro exterior varía angularmente de manera sinusoidal, en general cualquier distribución de temperatura puede ser expandida en términos de series de Fourier, por este motivo es natural

### 3.2. Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado 43

emplear este tipo de condición de frontera. Debido a las suposiciones, las ecuaciones consideradas en este problema son lineales, esto permite que sea aplicable el principio de superposición, entonces los resultados pueden ser generalizados a condiciones de frontera más complicadas.

En el caso de transferencia de calor por conducción y con una distribución de temperatura en las paredes de los cilindros conocida (condiciones de frontera de primer tipo), es posible encontrar una solución analítica del problema. La obtención de la solución de la ecuación 3.4 se muestra con detalle en el apéndice B. Esta solución se encuentra utilizando el método de separación de variables.

La temperatura del fluido en el caso de transferencia de calor por conducción es la siguiente

$$T(r, \theta, t) = T^*(r, t) \text{sen}(\theta) \quad (3.8)$$

$$T^*(r, t) = T_t(r, t) + T_s(r) \quad (3.9)$$

$$T_s(r) = - \left( \frac{r_2}{r_1^2 - r_2^2} \right) r + \frac{r_1^2 r_2}{(r_1^2 - r_2^2)} \frac{1}{r} \quad (3.10)$$

$$T_t(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(\lambda_n(r - r_1)) e^{-\lambda_n^2 t} \quad (3.11)$$

$$c_n = \frac{- \int_0^a T_s(r + r_1) J_1 \left( \frac{\beta_{1n}}{a} r \right) r dr}{\frac{1}{2} a^2 [J_2(\beta_{1n})]^2} \quad (3.12)$$

$$\lambda_n = \frac{\beta_{1n}}{a} \quad (3.13)$$

donde  $a = r_2 - r_1$  y  $\beta_{1n}$  es la raíz n-esima de  $J_1(r)$ , el polinomio de Bessel de grado uno.

La temperatura del fluido se determina de las ecuaciones 3.8-3.13. De estas ecuaciones se puede ver que en el caso de transferencia de calor por conducción con una condición de frontera sinusoidal

- La temperatura del fluido es simétrica con respecto a  $\theta = \pi$
- La temperatura decae de manera exponencial hasta que alcanza un estado permanente
- Si  $t \rightarrow \infty$  entonces

$$T(r, \theta, t \rightarrow \infty) = T_s(r) \text{sen}(\theta) \quad (3.14)$$

- El calor que entra es igual al calor que sale del sistema, es decir

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r_2} d\theta = 0 \quad (3.15)$$

A continuación se puede ver la distribución de temperatura en el fluido a un tiempo dado, en forma de gráficas de isocurvas de temperatura y mapas de colores. El color rojo indica la zona de mayor temperatura y el azul la zona de menor valor, las isocurvas están separadas por un  $\Delta T = 0.125$

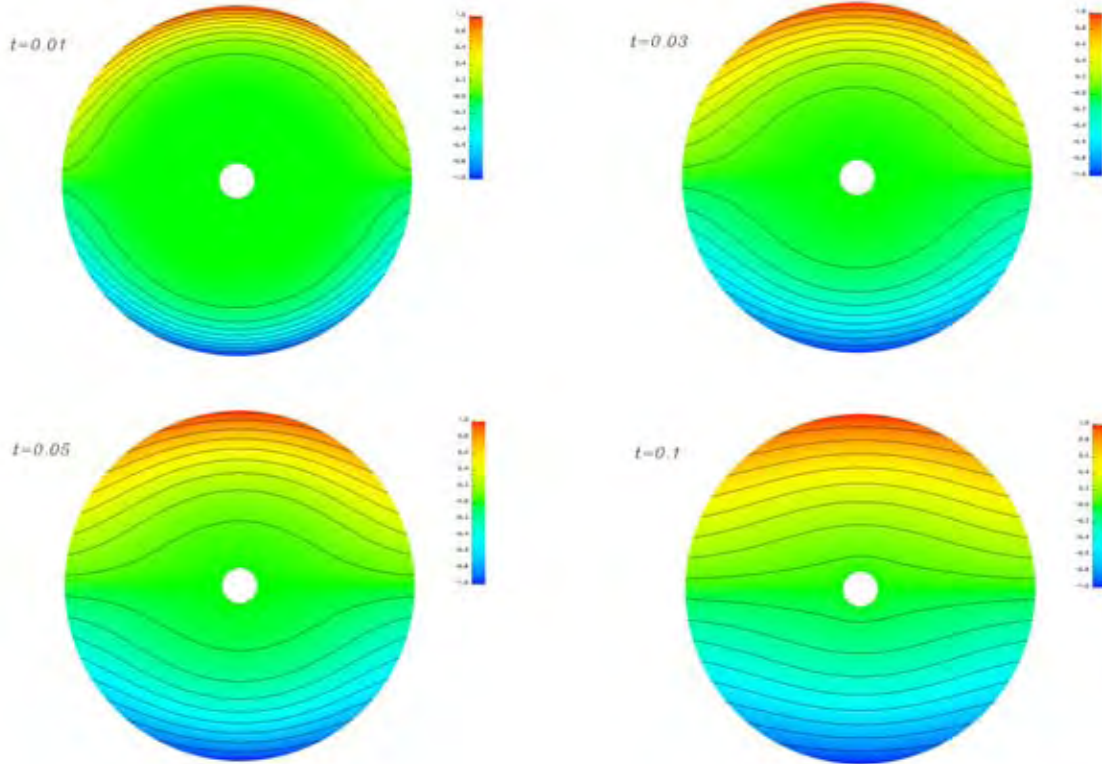


Fig. 3.2: Evolución de la temperatura del fluido para el caso de transferencia de calor por conducción

### 3.2.2 Transferencia de calor con un flujo magnetohidrodinámico

Si el fluido presenta un flujo MHD en la dirección azimutal y la transferencia de calor no depende de la coordenada axial, entonces la ecuación de la energía (Ec. 3.2) se escribe de la siguiente manera

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Pe_{\theta} \frac{u_{\theta}}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}, \quad (3.16)$$

donde  $u_{\theta}$  es la solución encontrada para el flujo MHD 2.38.

Las condiciones de frontera e inicial para la temperatura del fluido son las mismas que las que se consideraron en la sección anterior (Ecs. 3.5-3.7). La temperatura de la pared exterior es independiente del tiempo y mantiene su distribución sinusoidal.



### 3.2. Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado 45

Se desarrolló un programa de computadora que utiliza el método de volumen finito, con el cual se calculó numéricamente la temperatura del fluido. La estrategia de solución numérica para la ecuación de la energía (Ec. 3.2) se presenta en detalle en el apéndice A.

Los resultados obtenidos con este programa fueron validados con la solución analítica de la temperatura encontrada en el caso de transferencia de calor por conducción. A continuación se muestra la comparación entre la solución numérica y analítica de la temperatura del fluido a un tiempo  $t=0.03$  para el caso de transferencia de calor por conducción

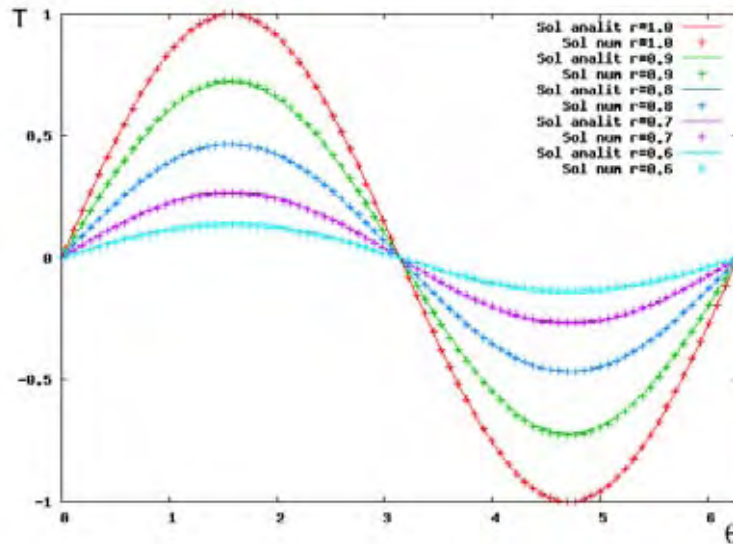


Fig. 3.3: Comparación entre la solución numérica y analítica para la transferencia de calor por conducción con una condición de frontera sinusoidal

Los resultados numéricos y analíticos son indistinguibles y el error entre la solución numérica con una malla de  $100 \times 80$  nodos y la solución analítica (Ec. 3.8) tomando 20 términos de la serie es menor de 2% .

En el caso de transferencia de calor con un flujo MHD no es posible obtener una solución analítica general del problema. La ecuación 3.16 se resolvió numéricamente para estudiar la evolución de la temperatura del fluido.

A continuación se puede ver la distribución de temperatura en el fluido a un tiempo dado, en forma gráficas de isoclinas de temperatura y mapas de colores. Los cálculos fueron hechos para un número de Péclet  $Pe_\theta = 300$  y se utiliza una velocidad del fluido  $u_\theta$  calculada para un  $Ha_0 = 5$

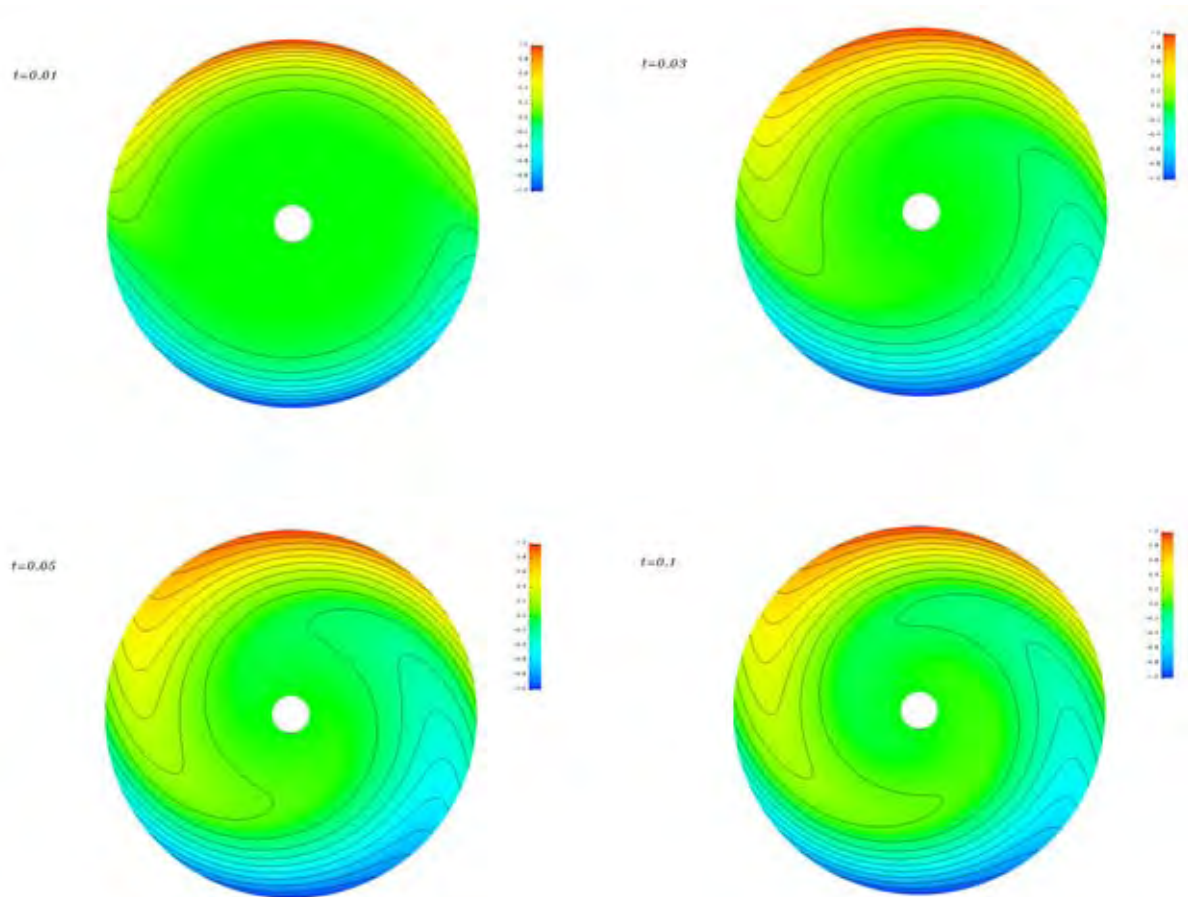


Fig. 3.4: Evolución de la temperatura del fluido para el caso de transferencia de calor con un flujo MHD

Las isoclinas del fluido presentan una deformación debido al movimiento del fluido en el caso de transferencia de calor con un flujo MHD. La deflexión de las isoclinas es en la dirección del movimiento del fluido.

A continuación se puede ver el perfil de temperatura, en el caso de transferencia de calor por conducción y en el caso de transferencia de calor por convección, para distintos radios como función de la coordenada azimutal a un tiempo  $t=0.03$

### 3.2. Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado 47

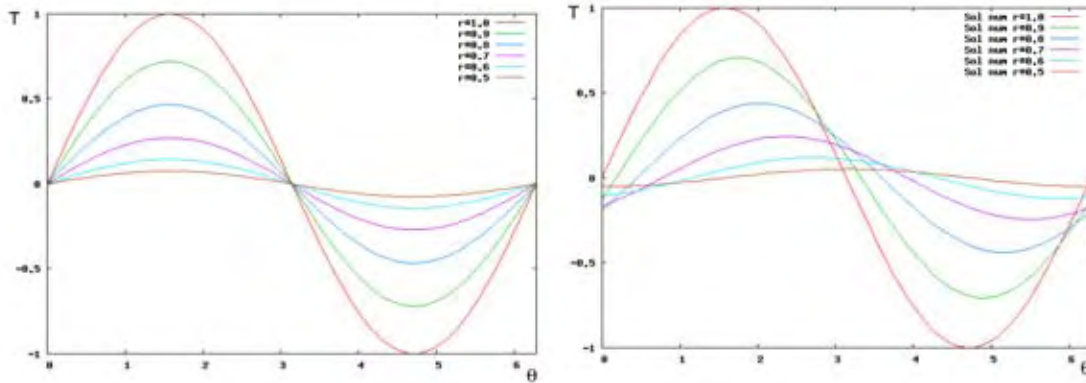


Fig. 3.5: Comparación del perfil de temperatura en el caso de transferencia de calor por conducción y convección

El perfil de temperaturas ya no simétrico con respecto a  $\theta = \pi$  como sucede en el caso de transferencia de calor por conducción. El máximo y el mínimo del perfil de temperatura a un radio dado varía su posición angular, a diferencia del caso conductivo que se encuentra en  $\theta = \pi/2$

Para tiempos muy grandes el perfil de temperatura alcanza un estado permanente, entonces la ecuación 3.16 se reduce a

$$Pe_\theta \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}. \quad (3.17)$$

Si suponemos que

$$T = \Gamma(r)e^{i\theta} \quad (3.18)$$

sustituyendo 3.18 en 3.17 obtenemos

$$iPe_\theta \frac{u_\theta}{r} \Gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) - \frac{\Gamma}{r^2}. \quad (3.19)$$

Aunque la ecuación 3.17 admite separación de variables y existen métodos aproximados con los que se podría encontrar una solución analítica para 3.19, al final este camino se vuelve muy engorroso, por lo que en este caso el método de separación de variables no es de mucha utilidad.

La ecuación 3.17 se resolvió por medio de un método de solución aproximado llamado *método de Galerkin*. El procedimiento se puede ver en detalle en el apéndice B. Para el caso  $Pe_\theta = 300$  donde  $u_\theta$  es para un  $Ha_0 = 5$ , la temperatura del fluido en estado permanente calculada por el método de Galerkin tiene la siguiente expresión

$$T(r, \theta) \approx T_6(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^6 a_n \Phi_n(r, \theta) \quad (3.20)$$

donde

$$\Phi_0(r, \theta) = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \text{sen}(\theta) \quad (3.21)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = (r - r_1)(r - r_2)\text{sen}(\theta), \quad \Phi_2(r, \theta) = (r - r_1)(r - r_2)\text{cos}(\theta), \quad (3.22)$$

$$\Phi_3(r, \theta) = (r - r_1)^2(r - r_2)\text{sen}(\theta), \quad \Phi_4(r, \theta) = (r - r_1)(r - r_2)^2\text{cos}(\theta), \quad (3.23)$$

$$\Phi_5(r, \theta) = (r - r_1)^2(r - r_2)^2\text{sen}(\theta), \quad \Phi_6(r, \theta) = (r - r_1)^2(r - r_2)^2\text{cos}(\theta), \quad (3.24)$$

los coeficientes  $a_n$  se pueden ver en la siguiente tabla

$a_1=-0.0769041$	$a_2=2.63815$	$a_3=1.9093$	$a_4=2.89607$	$a_5=-5.41928$	$a_6=3.048$
------------------	---------------	--------------	---------------	----------------	-------------

Tabla 3.1: Coeficientes de la solución por el método de Galerkin para la temperatura

A continuación se pueden ver gráficas de isocurvas y mapas de colores de la distribución de temperatura en el fluido en estado permanente. Los cálculos fueron hechos para valores de  $Pe_\theta=0, 50, 150, 300$  y  $u_\theta$  para  $Ha_0 = 5$ . En cada caso se puede encontrar una solución analítica por el método de Galerkin

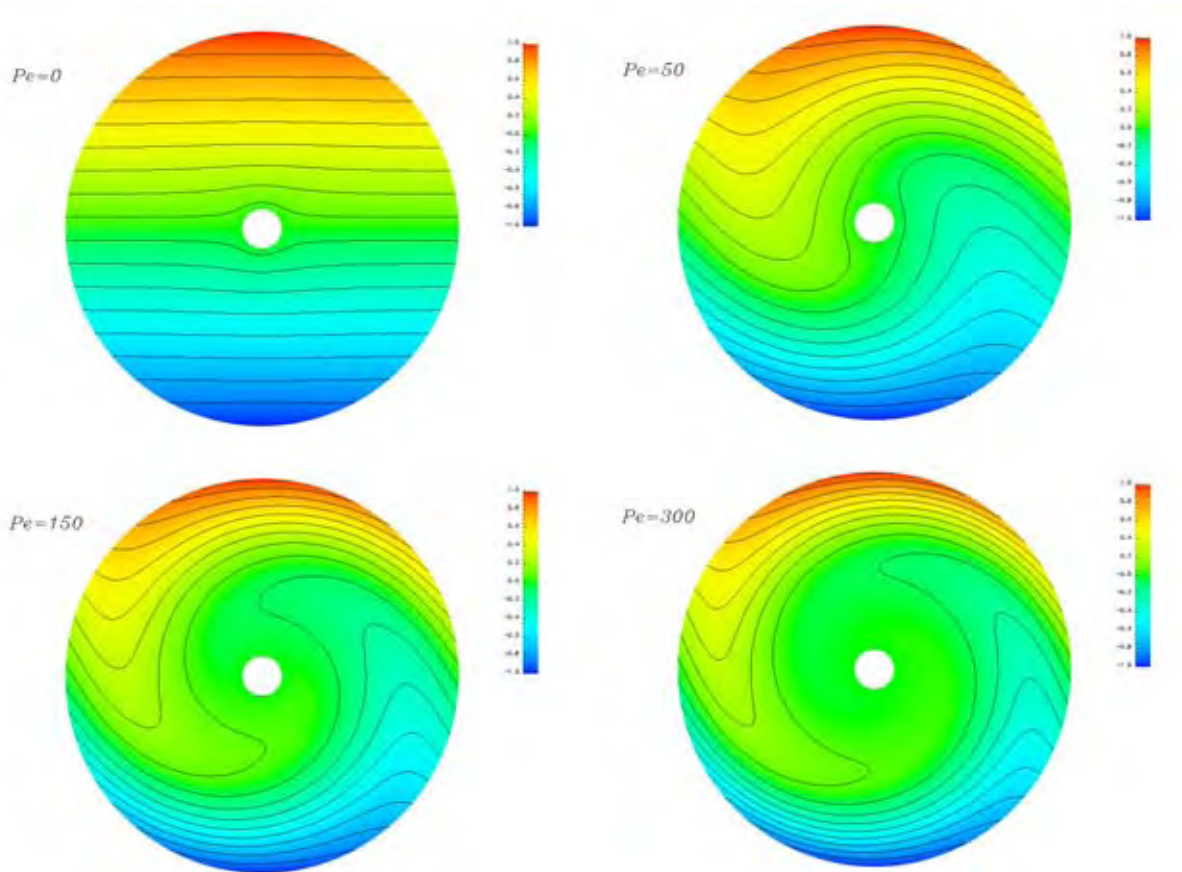


Fig. 3.6: Distribución de temperatura en fluido para el caso de transferencia de calor con un flujo MHD en función del número de Péclet

Péclet grandes son regímenes donde la convección es dominante y Péclet pequeños es el caso donde la difusión predomina.

### 3.2. Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado 49

A números de Péclet grandes puede verse que se forma una capa límite térmica. La capa límite es la región de fluido que se ve perturbada por la presencia de la pared con la que está en contacto. Fuera de la capa límite la temperatura del fluido es prácticamente isotérmica.

El número de Nusselt es un número adimensional que mide el aumento de la transferencia de calor por convección comparada con la transferencia de calor como si ésta ocurriera solamente por conducción. El número de Nusselt puede verse como un gradiente adimensional de temperatura y se define de la siguiente manera

$$Nu = - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r_i} \quad (3.25)$$

A continuación se puede el número de Nusselt, para la temperatura en estado permanente, calculado en la pared del cilindro exterior y en la pared del cilindro interior, para el caso de transferencia de calor por conducción  $Pe_\theta = 0$  y para el caso de transferencia de calor por convección con  $Pe_\theta = 300$ . La línea roja es el número de Nusselt cuando hay convección y la verde es el número de Nusselt cuando sólo ocurre conducción.

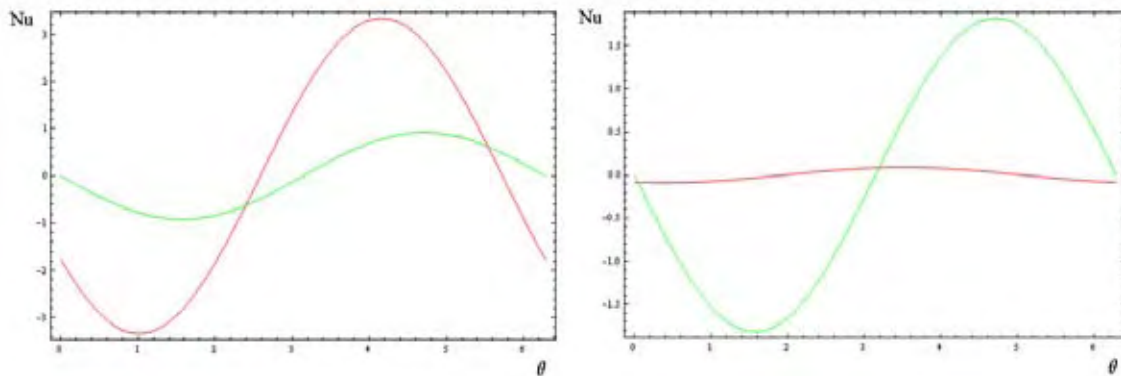


Fig. 3.7: Comparación entre el número de Nusselt para la transferencia de calor por conducción y la transferencia de calor por convección en el radio exterior e interior

El movimiento del fluido contribuye a una mayor transferencia de calor en el fluido por lo que se puede observar un incremento en la número de Nusselt en la pared del cilindro exterior cuando hay convección. En la pared del cilindro interior ocurre una disminución del número de Nusselt en el caso convectivo. Lo que sucede es que se está absorbiendo y liberando más calor en la pared del cilindro exterior por la convección en el fluido, dejando aislado la región cercana al cilindro interior.

A continuación se pueden ver gráficas de isocurvas y mapas de colores de la distribución de temperatura en el fluido calculada a un  $Pe_\theta = 300$  fijo y  $u_\theta$  se calcula a distintos valores del número de Hartmann  $Ha_0=0, 1, 5, 15$ .

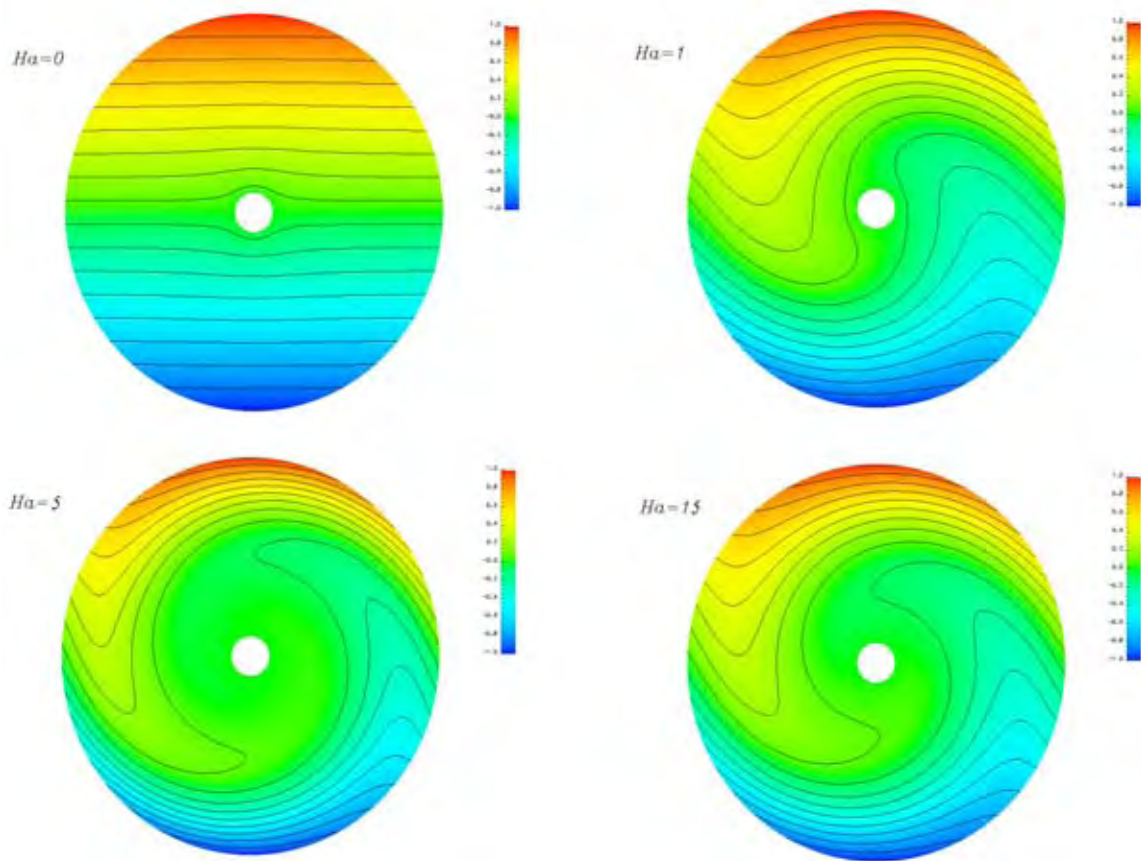


Fig. 3.8: Distribución de temperatura en fluido para el caso de transferencia de calor con un flujo MHD en función del número de Hartmann

La siguiente figura es el número de Nusselt calculado en la pared del cilindro exterior y en la pared del cilindro interior, para las distribuciones de temperatura anteriores

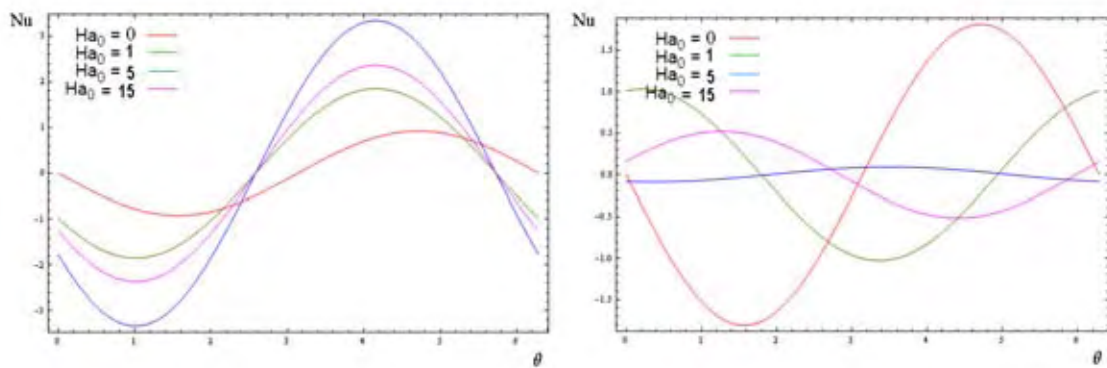


Fig. 3.9: Número de Nusselt en el radio exterior e interior a distintos números de Hartmann

## 3.2. Transferencia de calor con un flujo MHD completamente desarrollado 51

Se puede ver que la transferencia de calor es máxima en la pared del cilindro exterior cuando la velocidad azimutal es máxima con respecto al número de Hartmann. Lo contrario sucede en la pared del cilindro interior, cuando la velocidad es máxima, la transferencia de calor es un mínima.

### 3.2.3 Transferencia de calor en la entrada térmica del ducto

En esta sección se estudiará la transferencia de calor en los cilindros cuando la temperatura del fluido depende de la coordenada longitudinal, por lo tanto entra en juego la velocidad del fluido en la dirección axial.

La temperatura del fluido se determina de la ecuación de balance de energía (Ec. 3.2). Para resolver esta ecuación se requieren, las condiciones térmicas en las paredes de los cilindros, en la sección transversal en la entrada del fluido y en la sección trasversal final, que son las siguientes

$$T = 0 \quad \text{en} \quad r = r_1, \quad T = \text{sen}(\theta) \quad \text{en} \quad r = r_2,$$

$$T = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, \quad \partial T / \partial z = 0 \quad \text{en} \quad z = z_L,$$

la distribución inicial de temperatura es

$$T(r, \theta, z, t = 0) = 0$$

Debido a las condiciones de frontera impuestas, la temperatura del fluido varía axialmente cerca de la entrada del ducto. En esta zona ocurre un proceso de desarrollo térmico donde la temperatura adimensional del fluido cambia del perfil de la sección transversal inicial, hasta alcanzar una forma invariante aguas abajo. Esta región se denomina entrada térmica y se analiza comúnmente para problemas semi-infinitos. La región de entrada térmica existe solamente para ciertas condiciones de frontera térmicas estándares [16].

La región de entrada térmica en flujo interno, es la región donde la capa límite está desarrollándose. En esta región del ducto, la temperatura del fluido se ve afectada por la condición de frontera mientras que el resto permanece inalterado. La extensión de esta zona se denomina longitud de desarrollo. Cuando ésta existe por definición la longitud de la entrada térmica es finita. El criterio bien establecido para definir el desarrollo térmico es

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

En la siguiente figura se puede observar la distribución de temperatura en el fluido sobre una sección transversal a distintas posiciones cerca de la entrada térmica para números de Péclet  $Pe_\theta = 300$   $Pe_z = 10$

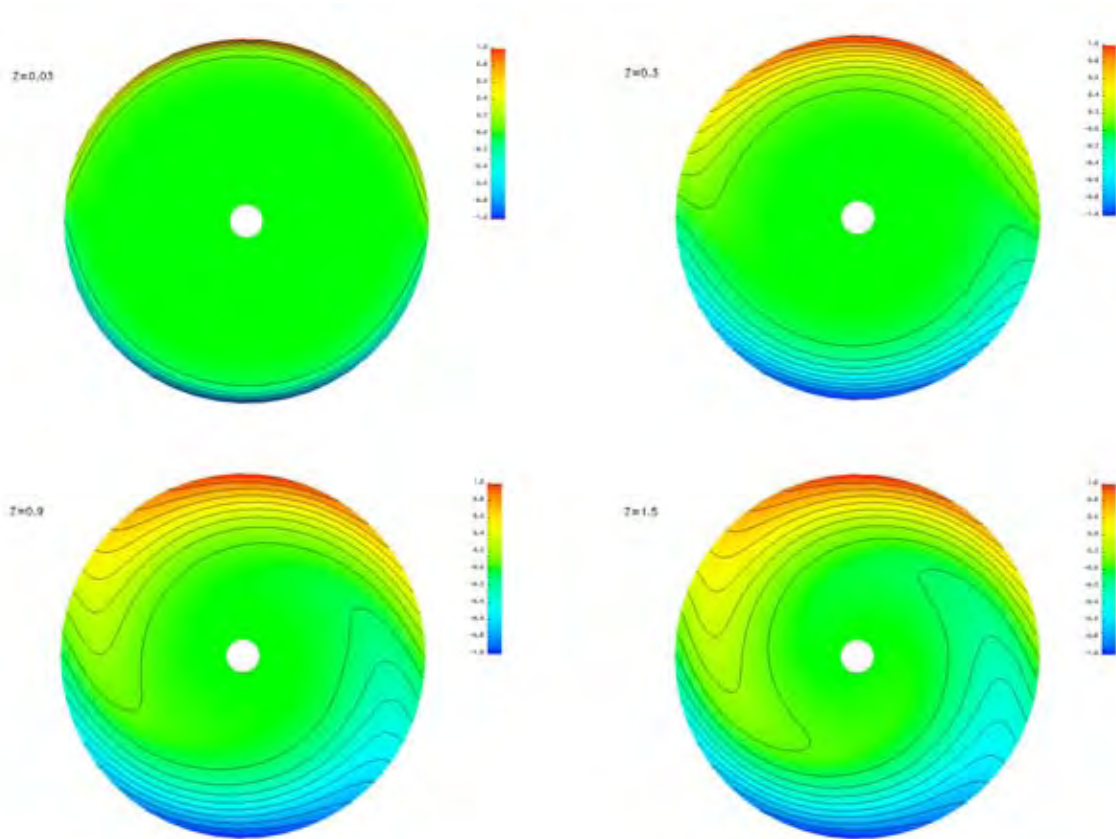


Fig. 3.10: Variación longitudinal de la distribución de temperatura en el fluido

Para mayores longitudes sobre el ducto, la temperatura a lo largo del canal mantiene una distribución de temperatura similar en cada sección transversal por lo tanto la transferencia de calor se vuelve independiente de la coordenada axial. La transferencia de calor en esta región se estudió en la sección anterior.

El efecto de la condición de frontera se difunde a lo largo de la entrada térmica, entonces la temperatura del fluido sobre una sección transversal varía a lo largo del flujo.

La figura 3.11 muestra la variación axial de la temperatura promedio sobre la zona caliente de la sección transversal, para distintos valores de  $Pe_z$ .



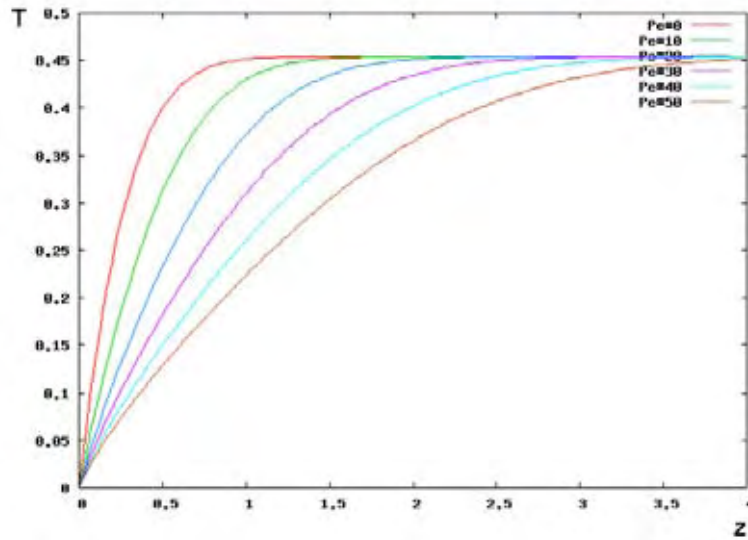


Fig. 3.11: Variación axial de la temperatura

La temperatura promedio del fluido se incrementa hasta llegar a un valor constante, la distancia que le toma lograr esto es la longitud de desarrollo. A mayor valor de Péclet axial mayor longitud de desarrollo. La longitud de desarrollo no depende del número de Péclet azimutal.

### 3.3 Transferencia de calor con un flujo MHD oscilatorio

#### 3.3.1 Ecuaciones adimensionales para el caso oscilatorio

El objetivo de esta sección es analizar la transferencia de calor en régimen de convección forzada debida a un flujo MHD oscilatorio.

La escala de tiempo característica que se utiliza para obtener la ecuación de la energía en forma adimensional es la frecuencia de oscilación de la velocidad del fluido

$$t^* \longrightarrow \omega t.$$

En este caso la forma adimensional de la ecuación 3.1 es la siguiente

$$Re_w Pr \frac{\partial T}{\partial t} + Pe_\theta \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (3.26)$$

donde  $Re_w$  es el número de Reynolds oscilatorio y  $u_\theta$  es la solución encontrada para un flujo MHD oscilatorio (Ec.2.69).

Las condiciones de frontera e inicial para la temperatura del fluido son las mismas que las que consideraron en el problema anterior (Ecs. 3.5-3.7). La ecuación 3.26 se resolvió numéricamente utilizando el método de volumen finito.

La figura 3.12 muestra la distribución de temperatura en el fluido durante un ciclo, calculada para un número de Péclet  $Pe_\theta = 300$ , donde  $u_\theta$  es para un  $Ha_0 = 5$  y  $Re_w = 100$

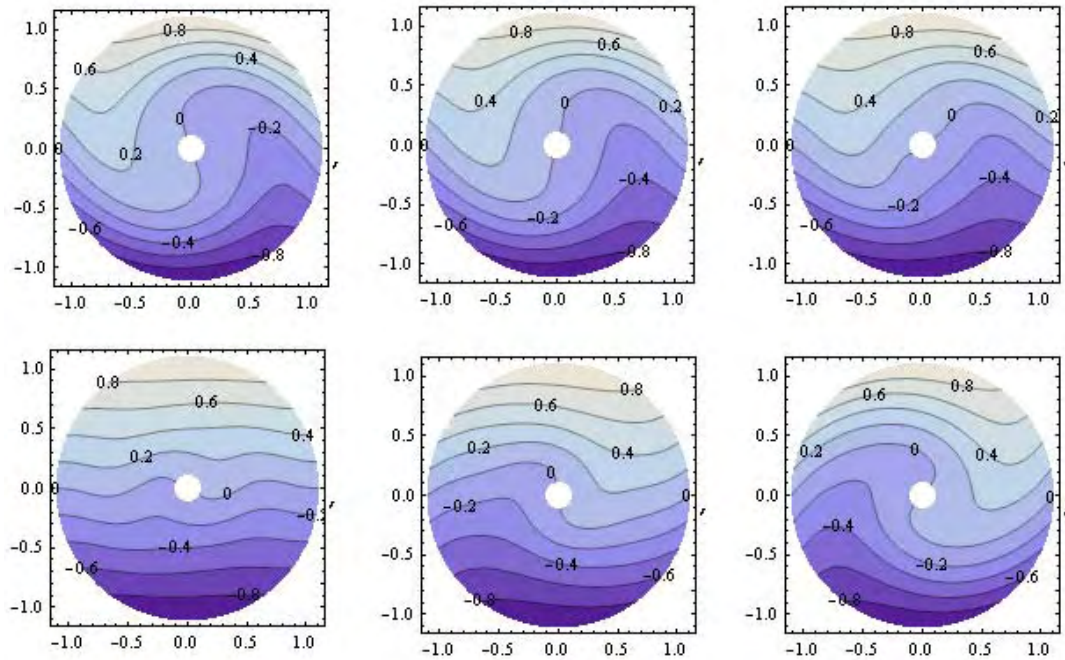


Fig. 3.12: Distribución de temperatura en el fluido en el caso de transferencia de calor por convección con un flujo MHD oscilatorio

En este caso, la transferencia de calor tiene un comportamiento oscilatorio, que se puede observar en la variación temporal de la distribución de temperatura.

El flujo de calor en las paredes de los cilindros varía debido al comportamiento oscilatorio de la velocidad del fluido. Cuando la velocidad alcanza su perfil máximo en una dirección, sucede la mayor transferencia de calor por convección, e incluso se llega a formar una capa límite térmica en la pared del cilindro exterior. Mientras disminuye la velocidad, la conducción comienza a dominar y la capa límite crece. A mitad del ciclo la velocidad del fluido es pequeña y su máximo está cerca de la pared del cilindro interior, entonces la convección ocurre cerca del cilindro interior mientras que en el resto del fluido domina la conducción. Cuando comienza a incrementarse la velocidad en la otra dirección, la capa límite térmica comienza a hacerse más delgada dejando de nuevo aislado al cilindro exterior. Este proceso se repite de manera cíclica.

---

---

# Conclusiones

---

En este trabajo se estudió la transferencia de calor, en un régimen de convección forzada, de un fluido eléctricamente conductor entre dos cilindros concéntricos. El fluido entre los cilindros presenta un flujo MHD laminar y completamente desarrollado. La pared del cilindro exterior tiene una distribución de temperatura que varía angularmente en forma sinusoidal. El flujo MHD se produce por una fuerza de Lorentz debida a la interacción de una corriente eléctrica radial impuesta y campo magnético axial aplicado lo que origina un movimiento del fluido en la dirección azimutal. En la dirección axial ocurre un movimiento del fluido debido a un gradiente de presión.

Se obtuvo una solución analítica del flujo MHD para caso completamente desarrollado para dos configuraciones, primero cuando la diferencia de potencial eléctrico en las paredes de los cilindros es constante (Ec. 2.38) y segundo cuando la diferencia de potencial eléctrico en las paredes de los cilindros varía en el tiempo de forma sinusoidal (Ec. 2.69). Se analizó la influencia del campo magnético aplicado en base al número de Hartmann, encontrando que la velocidad del fluido tiene un máximo (Ec. 2.43). Esto sucede porque la corriente eléctrica depende del campo magnético aplicado y cuando éste se incrementa mucho, la corriente eléctrica disminuye más rápido, lo que origina que el movimiento del fluido sea menor. En el caso del flujo MHD oscilatorio, se estudió la influencia de la frecuencia de oscilación en base al número de Reynolds oscilatorio. A números de Reynolds oscilatorio grandes el centro del fluido tiene una velocidad baja y se forma una capa límite cerca de las paredes de los cilindros, la velocidad del fluido es mayor cerca de la región del cilindro interior.

Se obtuvieron soluciones analíticas para la temperatura del fluido en el caso transferencia de calor por conducción (Ec. 3.8) y en el caso de transferencia de calor con un flujo MHD en la dirección azimutal cuando la temperatura del fluido alcanza un estado permanente (Ec. 3.20).

La transferencia de calor es gobernada por la magnitud del gradiente de presión axial y de la fuerza de Lorentz. Los resultados que se obtuvieron indican un mayor incremento de la transferencia de calor debido al flujo MHD. Se analizó la influencia de los números de Péclet axial, Péclet azimutal y la variación de número de Nusselt. A un número de Péclet azimutal grande se forma una capa límite térmica cerca del cilindro exterior, de tal manera que en esta zona se concentra la mayor transferencia de calor, dejando aislada a la región cercana al cilindro interior. La energía del sistema se conserva; cuando se observa un incremento en la transferencia de calor en la pared del cilindro exterior ocurre una disminución en la pared del cilindro interior. Debido a la convección y las condiciones

de frontera del problema, la zona caliente no siempre funciona como suministro de calor al sistema, ocurre un desfasamiento en el número de Nusselt cuando hay movimiento del fluido. Se estudió la entrada térmica del ducto y se encontró que a mayor Péclet axial, mayor longitud de desarrollo.

Se desarrollaron herramientas numéricas que permiten caracterizar la transferencia de calor en flujos MHD que son de relevancia práctica en sistemas de conversión o transporte de energía.

# Flujo MHD de un fluido en un canal rectangular

## A.1 Flujo de un fluido conductor de electricidad en un canal rectangular debido a una fuerza electromagnética

En este apartado se analizará el flujo en un canal rectangular de un fluido conductor de electricidad debido a una fuerza electromagnética originada por la interacción de un campo magnético aplicado externamente y una corriente eléctrica inyectada. La configuración del problema se puede ver en la siguiente figura

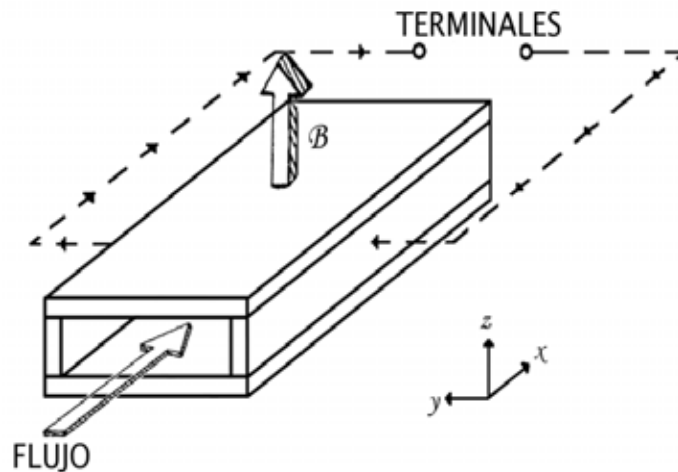


Fig. A.1: Diagrama del flujo en un canal rectangular debido a una fuerza electromagnética

Consiste en un canal rectangular infinitamente largo. Por todo este canal existe un campo magnético constante  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{k}$ . Las paredes horizontales del canal son aislantes eléctricos, mientras que las paredes verticales del canal son electrodos conductores. Debido a una diferencia de potencial en las paredes verticales del canal  $\Delta\phi_0$ , se origina una corriente eléctrica  $\vec{j} = j_y \hat{j}$  que atraviesa el fluido. La interacción del campo magnético externo y la corriente eléctrica inyectada genera una fuerza de Lorentz que induce un movimiento en el fluido.

A continuación se describen las suposiciones del problema

- Flujo completamente desarrollado
- Se considera que el canal es infinitamente largo y las paredes superiores están muy lejos
- El campo magnético aplicado es mucho mayor que el campo magnético inducido
- El movimiento sólo es debido a la fuerza electromagnética

Por las suposiciones del problema, la velocidad del fluido sólo tiene una componente en la dirección axial  $\vec{u} = u(y)\hat{i}$ .

La corriente eléctrica se origina debido a la diferencia de potencial entre las paredes del canal, pero de la ley de conservación de carga, la corriente eléctrica satisface

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{dj_y}{dy} = 0, \quad (\text{A.1})$$

esto implica

$$j_y = cte = j_0,$$

entonces la fuerza electromagnética que impulsa al fluido queda de la siguiente manera

$$\vec{j} \times \vec{B}_0 = j_0 B_0 \hat{i}. \quad (\text{A.2})$$

La velocidad del fluido se calcula de la ecuación 1.34 que en este caso se reduce a

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + j_0 B_0 = 0. \quad (\text{A.3})$$

Las condiciones de frontera para la velocidad son

$$u(0) = 0 \quad y \quad u(h) = 0,$$

donde h es el ancho del canal. La solución de la ecuación A.3 es la siguiente

$$u(y) = -\frac{j_0 B_0}{2\mu} y(y - h). \quad (\text{A.4})$$

La velocidad del fluido  $u(y)$  se puede expresar de la siguiente forma

$$u(y) = \gamma u_f(y)(y), \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\gamma = \frac{j_0 B_0}{\mu}$$

y

$$u_f(y)(y) = -\frac{y(y - h)}{2}$$

La corriente eléctrica se determina de la ley de Ohm y la ley de conservación de carga, que dan origen a la siguiente ecuación para el potencial eléctrico

$$\nabla^2 \phi = \vec{B}_0 \cdot \nabla \times \vec{u}, \quad (\text{A.6})$$

Para este problema esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} = -B_0 \frac{du}{dy}, \quad (\text{A.7})$$

esto implica

$$\frac{d\phi}{dy} = -B_0 u + D_1, \quad (\text{A.8})$$

finalmente

$$\phi = -B_0 \int_0^y u dy + D_1 y + D_2. \quad (\text{A.9})$$

Las constantes  $D_1$  y  $D_2$  se determinan de las condiciones de frontera del potencial que son las siguientes

$$\phi(0) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\phi(h) = \phi_0. \quad (\text{A.11})$$

De la ecuación A.10

$$D_2 = 0. \quad (\text{A.12})$$

De la ley de ohm

$$j_0 = \sigma \left( -\frac{d\phi}{dy} - uB_0 \right) = \sigma \left( -(-B_0 u + D_1) - uB_0 \right) = -\sigma D_1. \quad (\text{A.13})$$

Aplicando la condición de frontera para  $\phi$  en  $y=h$  (Ec. A.11) se obtiene

$$\phi_0 = -B_0 \int_0^h \gamma u_f(y) dy + D_1 h = -\frac{j_0 B_0^2}{\mu} \int_0^h u_f(y) dy + D_1 h, \quad (\text{A.14})$$

sustituyendo  $j_0 = -\sigma D_1$

$$\phi_0 = D_1 \frac{\sigma B_0^2}{\mu} \int_0^h u_f(y) dy + D_1 h, \quad (\text{A.15})$$

despejando  $D_1$  se tiene

$$D_1 = \phi_0 / \left( \frac{\sigma B_0^2}{\mu} \int_0^h u_f(y) dy + h \right). \quad (\text{A.16})$$

Al encontrar la constante  $D_1$  se determinan por completo, el potencial eléctrico, la corriente eléctrica y la velocidad del fluido

$$\phi(r, B_0) = -B_0 \int_0^y u dy + \phi_0 y / \left( \frac{\sigma B_0^2}{\mu} \int_0^h u_f(y) dy + h \right), \quad (\text{A.17})$$

$$j_y(B_0) = -\sigma\phi_0 / \left( \frac{\sigma B_0^2}{\mu} \int_0^h u_f(y) dy + h \right), \quad (\text{A.18})$$

y

$$u(r, B_0) = \left( \sigma\phi_0 B_0 / \left( \frac{\sigma B_0^2}{\mu} \int_0^h u_f(y) dy + h \right) \right) \frac{y(y-h)}{2}, \quad (\text{A.19})$$

Las ecuaciones A.17, A.18 y A.19 son la solución analítica del flujo MHD en el canal.

Nótese que la velocidad del fluido, la corriente eléctrica y el potencial eléctrico dependen de la magnitud del campo magnético aplicado. Dos límites importantes de esta dependencia de  $u$  con el campo magnético aplicado  $B_0$  son los siguientes:

$$\text{Si } B_0 = 0 \Rightarrow u = 0, \quad \text{Si } B_0 \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0.$$

Esto implica que la velocidad del fluido tiene un máximo, el cual se calcula encontrando  $r = r_{max}$  y  $B_z = B_{max}$  tal que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial B_0} = 0.$$

La distribución de velocidad tiene su máximo en

$$r_{max} = h/2$$

y a

$$B_{max} = \frac{\sqrt{12}}{h} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \quad (\text{A.20})$$

teniendo como valor

$$u_{max} = \frac{3}{4} \frac{\phi_0}{B_{max} h} \quad (\text{A.21})$$

Este ejercicio será de utilidad porque sirvió para determinar valores característicos para el campo magnético y la velocidad del fluido, estos pueden ser definidos como campo magnético máximo  $B_{max}$  y la velocidad máxima  $u_{max}$  respectivamente.



# Discretización de las ecuaciones de balance

---

En general, las ecuaciones de balance 1.52, 1.53, 1.54 y 1.55 no pueden ser resueltas en forma analítica. En la actualidad, existen diferentes estrategias numéricas con las que se pueden obtener soluciones numéricas aproximadas como son: diferencias finitas, elemento finito, volumen finito, métodos espectrales, entre otros. Estos métodos se encuentran descritos en [14] y [17].

La idea básica del método de volumen finito o volumen de control es la siguiente: Primero el dominio de estudio se divide en un número de volúmenes de control no sobrepuestos, lo siguiente es integrar la ecuación que nos interesa sobre cada uno de los volúmenes de control, finalmente se utilizan diferentes aproximaciones o esquemas numéricos para cada uno de los términos resultantes. De esta manera se llega a la forma discreta de la ecuación, representada por un sistema de ecuaciones y al resolverlo se obtiene una solución aproximada del problema.

En las secciones siguientes se describe brevemente la forma en que se aplica el método de volumen finito a las ecuaciones de balance para obtener su forma discreta. Para más detalles del método se recomienda revisar [15], [18].

## B.1 Volumen Finito

Para comenzar las ecuaciones de balance se escriben de una manera general como una ecuación de advección - difusión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S, \quad (\text{B.1})$$

donde

- $\phi$  = variable dependiente generalizada
- $\Gamma$  = Coeficiente de difusión generalizado
- $S$  = Termino fuente

Desarrollando la ecuación B.1 en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r u_r \phi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r u_z \phi)}{\partial z} \right] = \frac{\Gamma}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + S. \quad (\text{B.2})$$

Con la definición adecuada de los parámetros, las ecuaciones de conservación 1.52, 1.53, 1.54 y 1.55 tiene la forma requerida, como se puede ver en la siguiente tabla

Ecuación	$\phi$	$\Gamma$	S
Masa	1	0	0
r-Momentum	$u_r$	1/Re	$\frac{u_\theta^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( -\frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{Ha^2}{Re} (j_\theta B_z - j_z B_\theta)$
$\theta$ -Momentum	$u_\theta$	1/Re	$-\frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left( -\frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{Ha^2}{Re} (j_z B_r - j_r B_z)$
z-Momentum	$u_z$	1/Re	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{Ha^2}{Re} (j_r B_\theta - j_\theta B_r)$
Energía	T	1/Pe	0

Tabla B.1: Coeficientes y parámetros de la ecuación general en cilíndricas

La discretización de las ecuaciones se obtiene integrando sobre el volumen de control cada uno de los términos de la ecuación B.1.

La integral del termino temporal es la siguiente

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = (\phi_P - \phi_P^0) \frac{\delta V}{\delta t}. \quad (\text{B.3})$$

La integral del termino convectivo es

$$\int \nabla \cdot (\vec{u} \phi) dV = \int (\vec{u} \phi) \cdot \hat{n} dS = (u_\theta)_e A_e \phi_e - (u_\theta)_w A_w \phi_w + (u_r)_n A_n \phi_n - (u_r)_s A_s \phi_s + (u_z)_f A_f \phi_f - (u_z)_b A_b \phi_b.$$

La integral del termino difusivo es

$$\int \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int (\Gamma \nabla \phi) \cdot \hat{n} dS = \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e A_e - \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w A_w + \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n A_n - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s A_s + \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_f A_f - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b A_b.$$

La integral del termino fuente es

$$\int S dV = \bar{S}_P \delta V. \quad (\text{B.4})$$

Los términos convectivos de la ecuación general deben de tratarse con mayor cuidado, debido a que representan la parte no lineal de las ecuaciones. Para poder calcular el valor de  $\phi$  en las caras del volumen se utilizo un valor promedio central que provee una aproximación de segundo orden

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}, \quad (\text{B.5})$$

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}, \quad \phi_s = \frac{\phi_S + \phi_P}{2}, \quad (\text{B.6})$$

$$\phi_f = \frac{\phi_F + \phi_P}{2}, \quad \phi_b = \frac{\phi_B + \phi_P}{2}, \quad (\text{B.7})$$

La discretización de la parte difusiva de la ecuación general se hizo mediante diferencias centrales que proveen una aproximación de segundo orden

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}\right)_e = \frac{\Gamma}{r_p} \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta \theta}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}\right)_w = \frac{\Gamma}{r_p} \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta \theta}, \quad (\text{B.8})$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_n = \Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta r}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_s = \Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta r}, \quad (\text{B.9})$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_f = \Gamma \frac{\phi_F - \phi_P}{\delta z}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_b = \Gamma \frac{\phi_P - \phi_B}{\delta z}. \quad (\text{B.10})$$

El volumen de control para la malla cilíndrica es

$$\delta V = \frac{(r_n^2 - r_s^2)}{2} \delta \theta \delta z = r_p \delta r \delta \theta \delta z; \quad r_p = \frac{(r_n + r_s)}{2}.$$

El área de las superficies del volumen de control son

$$A_n = r_n \delta \theta \delta z; \quad A_s = r_s \delta \theta \delta z; \quad A_e = A_w = \delta r \delta z; \quad A_f = A_b = r_p \delta r \delta \theta.$$

Sustituyendo todas estas aproximaciones se obtiene la forma discreta de la ecuación B.1

$$\begin{aligned} & (\phi_P - \phi_P^0) \frac{\delta V}{\delta t} + (u_\theta)_e A_e \left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2}\right) - (u_\theta)_w A_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2}\right) + (u_r)_n A_n \left(\frac{\phi_N + \phi_P}{2}\right) - \\ & (u_r)_s A_s \left(\frac{\phi_S + \phi_P}{2}\right) + (u_z)_f A_f \left(\frac{\phi_F + \phi_P}{2}\right) - (u_z)_b A_b \left(\frac{\phi_B + \phi_P}{2}\right) = \\ & \left(\frac{\Gamma}{r_p} \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta \theta}\right) A_e - \left(\frac{\Gamma}{r_p} \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta \theta}\right) A_w + \left(\Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta r}\right) A_n - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta r}\right) A_s + \\ & \left(\Gamma \frac{\phi_F - \phi_P}{\delta z}\right) A_f - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_B}{\delta z}\right) A_b + \bar{S}_P \delta V. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Al final de aplicar el método de volumen de control llegamos a un sistema de ecuaciones como el siguiente

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_F \phi_F + a_B \phi_B + S_P. \quad (\text{B.12})$$

Este sistema representa la forma discreta de las ecuaciones de balance, donde los coeficientes  $a_P$ 's son los siguientes

$$a_E = \frac{\Gamma A_e}{r_p \delta\theta} - \frac{(u_\theta)_e A_e}{2}, \quad (\text{B.13})$$

$$a_W = \frac{\Gamma A_w}{r_p \delta\theta} + \frac{(u_\theta)_w A_w}{2}, \quad (\text{B.14})$$

$$a_N = \frac{\Gamma A_n}{\delta r} - \frac{(u_r)_n A_n}{2}, \quad (\text{B.15})$$

$$a_S = \frac{\Gamma A_s}{\delta r} + \frac{(u_r)_s A_s}{2}, \quad (\text{B.16})$$

$$a_F = \frac{\Gamma A_f}{\delta z} - \frac{(u_z)_f A_f}{2}, \quad (\text{B.17})$$

$$a_B = \frac{\Gamma A_b}{\delta z} + \frac{(u_z)_b A_b}{2}, \quad (\text{B.18})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_F + a_B + \frac{\delta V}{\delta t}, \quad (\text{B.19})$$

$$S_P = \phi_P^0 \frac{\delta V}{\delta t} + \bar{S} \delta V. \quad (\text{B.20})$$

La ecuación de continuidad en su forma discreta es la siguiente

$$(u_\theta)_e A_e - (u_\theta)_w A_w + (u_r)_n A_n - (u_r)_s A_s + (u_z)_f A_f - (u_z)_b A_b = 0. \quad (\text{B.21})$$

Con las condiciones de frontera del problema implementadas en las ecuaciones discretizadas, el sistema de ecuaciones puede ser resuelto y se logra tener la solución numérica de la ecuación.

### B.1.1 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera del problema generalmente son representadas por una cierta distribución de temperatura o velocidad en las paredes (condiciones de frontera de primer tipo, llamadas condiciones tipo Dirichlet) o una distribución de flujo de calor (condiciones de frontera de segundo tipo, llamadas condiciones tipo Neumann). La forma discreta de aplicar las condiciones de frontera en el método de volumen finito es la siguiente

#### Condiciones tipo Dirichlet

Consideremos el caso de una distribución de temperatura uniforme sobre la frontera norte  $\phi_n$ . Al aplicar la discretización en el nodo adyacente el valor de  $\phi_N$  se interpola utilizando el valor de frontera  $\phi_n$

$$\phi_n = \phi_b \approx \frac{\phi_N + \phi_P}{2} \Rightarrow \phi_N = 2\phi_b - \phi_P. \quad (\text{B.22})$$

Sustituyendo en la ecuación B.12 se obtiene

$$a_P^* \phi_P = a_N^* \phi_N + a_S \phi_S + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_F \phi_F + a_B \phi_B + S_P^*, \quad (\text{B.23})$$

donde

$$a_P^* = a_P + a_N; \quad a_N^* = 0; \quad S_P^* = S_P + 2a_N \phi_b$$

### Condiciones tipo Neumann

En esta caso la razón de cambio de la variable en la frontera es conocida  $\phi'_b$ . El valor de  $\phi_N$  se interpola de la siguiente forma

$$\phi'_b = \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n \approx \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta r} \Rightarrow \phi_N = \phi_P + \delta r \phi'_b. \quad (\text{B.24})$$

Sustituyendo en la ecuación B.12 se obtiene

$$a_P^* \phi_P = a_N^* \phi_N + a_S \phi_S + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_F \phi_F + a_B \phi_B + S_P^*, \quad (\text{B.25})$$

donde

$$a_P^* = a_P - a_N; \quad a_N^* = 0; \quad S_P^* = S_P + a_N \delta r \phi'_b$$

## B.2 Solución numérica de las ecuaciones de Navier - Stokes

Las componentes de la velocidad  $u_i$  satisfacen las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento, las cuales son casos particulares de la ecuación B.1. El campo de velocidades puede ser obtenido resolviendo la ecuación general con  $\phi$  definida como la componente de la velocidad  $u_r, u_\theta$  o  $u_z$ , en ese sentido el procedimiento de calculo ha sido descrito. Los coeficientes de la discretización dependen del campo de velocidades creando una manera de no linealidad que deberá ser manejada en cada iteración.

Existen otras dificultades relacionadas con el manejo de la ecuación de cantidad de movimiento. Un hecho conocido es que si las componentes de la velocidad y la presión son calculadas en el mismo punto se pueden obtener soluciones no realistas físicamente. Un remedio para esto son las mallas desfasadas, usando este método las componentes de las velocidades se calculan en las caras de los volúmenes de control y las variables escalares se calculan en los centros

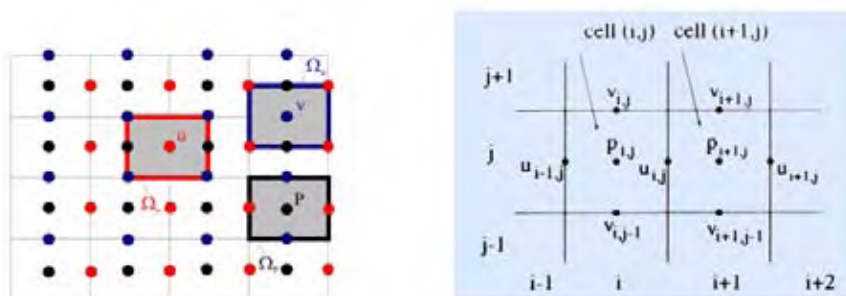


Fig. B.1: Arreglo de mallas desfasadas

Otro detalle es que la ecuación de balance de cantidad de movimiento contiene el gradiente de presión como parte del término fuente y este término no es expresable en términos de  $u_i$  o de  $\phi$ , entonces no pueden ser resueltas hasta que el gradiente de presión sea especificado. La restricción que determina el gradiente de presión es la ecuación de continuidad. El enunciado empleado para referir esto es el siguiente:

*Se obtiene el gradiente de presión correcto cuando al resolver la ecuación de cantidad de movimiento resulta que el campo de velocidad satisface la ecuación de continuidad*

Entonces es necesario un método para determinar la presión. El proceso que se realiza para calcular la presión se describe en la siguiente sección

### B.2.1 Acoplamiento presión velocidad

La ecuación B.12 puede ser escrita como

$$a_n u_n = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_n (p_P - p_N), \quad (\text{B.26})$$

donde  $b$  incluye los términos fuente adicionales y  $A_e$  es el área sobre la cual actúa la fuerza de presión. Las expresiones de los coeficientes  $a_{nb}$  y  $b$  son idénticas a las expresiones de la ecuación discretizadas excepto que la geometría de la malla desfasada debe considerarse en el cálculo de los coeficientes. Ecuaciones similares se pueden escribir para las otras direcciones.

Es posible resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento para un campo de presión dado. Sea  $u^*$  el campo de velocidades basado en la presión estimada  $p^*$ , esto implica

$$a_n u_n^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_n (p_P^* - p_N^*). \quad (\text{B.27})$$

En general la componente de la velocidad  $u^*$  no satisface la ecuación de continuidad y la estrategia que se sigue es calcular correcciones de la presión que resultan en correcciones de la velocidad asegurándonos que satisface la ecuación de continuidad.

Sea  $p'$  la corrección de la presión, la corrección correspondiente de  $u^*$  es  $u'$ , entonces

$$p = p^* + p', \quad (\text{B.28})$$

$$u = u^* + u'. \quad (\text{B.29})$$

Restando la ecuación B.26 y B.27 se obtiene

$$a_n u'_n = \sum a_{nb} u'_{nb} + A_n (p'_P - p'_N). \quad (\text{B.30})$$

Las simplificaciones razonablemente elegidas del termino  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  definen una serie de métodos con raíz genérica SIMPLE.

### B.2.2 Método SIMPLE

La ecuación B.30 se simplifica despreciando el termino  $\sum a_{nb} u'_{nb}$ , entonces la ecuación se escribe como

$$u_n = u^* + d_n (p'_P - p'_N), \quad (\text{B.31})$$

donde

$$d_n = \frac{A_n}{a_n}. \quad (\text{B.32})$$

La ecuación B.31 es llamada ecuación de corrección de la velocidad. Formas similares pueden ser escritas para las otras componentes de la velocidad. Sustituyendo las formulas de la corrección de la velocidad en la ecuación de continuidad en su forma discreta obtenemos una ecuación para la corrección de la presión

$$a_P p'_P = a_N p'_N + a_S p'_S + a_W p'_W + a_E p'_E + a_F p'_F + a_B p'_B + er, \quad (\text{B.33})$$

donde

$$\begin{aligned} a_E &= (\rho A d)_e; \quad d_e = \frac{A_e}{a_e} \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_F + a_B \\ er &= (u_\theta^*)_e A_e - (u_\theta^*)_w A_w + (u_r^*)_n A_n - (u_r^*)_s A_s + (u_z^*)_f A_f - (u_z^*)_b A_b \end{aligned}$$

### B.2.3 Método SIMPLEC

En este caso la ecuación B.30 se simplifica restando el termino  $\sum a_{nb} u'_n$  y despreciando  $\sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_n)$ , entonces la ecuación se escribe como

$$(a_n - \sum a_{nb}) u'_n = \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_n) + A_n (p'_P - p'_N), \quad (\text{B.34})$$

$$u_n = u^* + d_n (p'_P - p'_N), \quad (\text{B.35})$$

donde

$$d_n = \frac{A_n}{a_n - \sum a_{nb}}. \quad (\text{B.36})$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad obtenemos la ecuación de corrección de la presión.

### B.2.4 Resumen del proceso a seguir en el método SIMPLEC

- a) Se inicia con valores aproximados para todas las variables relevantes  $u_r^*$ ,  $u_\theta^*$ ,  $p^*$ ,  $T^*$  y  $\phi^*$
- b) Se calculan los coeficientes en la ecuación de balance de cantidad de movimiento
- c) Se resuelven las ecuaciones de las componentes de la velocidad
- d) Se calculan los coeficientes de la ecuación de corrección de la presión
- e) Se resuelve la ecuación de corrección a la presión  $p'$
- f) Se corrige la presión mediante  $p = p' + p^*$
- g) Se corrige la velocidad
- h) Se resuelven las ecuaciones para las demás variables  $T^*$  y  $\phi^*$
- i) Se itera hasta alcanzar la convergencia



# Soluciones analíticas para la transferencia de calor

---

## C.1 Transferencia de calor por conducción

En el caso de transferencia de calor por conducción y la temperatura del fluido no depende de la coordenada axial, la ecuación de balance de energía Ec. 3.2 se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}. \quad (\text{C.1})$$

Las condiciones de frontera del problema son

$$T(r_1, \theta, t) = 0,$$

$$T(r_2, \theta, t) = \text{sen}(\theta),$$

$$T(r, 2\pi, t) = T(r, 0, t),$$

la condición inicial es la siguiente

$$T(r, \theta, 0) = 0.$$

En este caso y con una distribución de temperatura en las paredes de los cilindros conocida (condiciones de frontera de primer tipo), es posible encontrar una solución analítica del problema aplicando el método de separación de variables

### C.1.1 Solución analítica por el método de separación de variables.

Primero se considera que la temperatura del fluido puede escribirse de la forma

$$T(r, \theta, t) = T^*(r, t) \text{sen}(\theta), \quad (\text{C.2})$$

sustituyendo en la ecuación C.1

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} \text{sen}(\theta) = \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) \text{sen}(\theta) - \frac{T^*}{r^2} \text{sen}(\theta), \quad (\text{C.3})$$

o bien

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} - \frac{T^*}{r^2}. \quad (\text{C.4})$$

De esta manera se llega a una ecuación para  $T^*$ . Las condiciones de frontera de la ecuación son las siguientes

$$\begin{aligned} T^*(r_1, t) &= 0, \\ T^*(r_2, t) &= 1, \end{aligned}$$

y la condición inicial

$$T^*(r, 0) = 0.$$

Después suponemos que  $T^*(r, t)$  se puede escribir de la siguiente forma

$$T^*(r, t) = T_t(r, t) + T_s(r),$$

donde  $T_s(r)$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} - \frac{T_s}{r^2} = 0, \quad (\text{C.5})$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} T_s(r_1) &= 0, \\ T_s(r_2) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces  $T_t(r, t)$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_t}{\partial r} - \frac{T_t}{r^2}, \quad (\text{C.6})$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} T_t(r_1, t) &= 0, \\ T_t(r_2, t) &= 0 \end{aligned}$$

y la condición inicial

$$T_t(r, 0) = -T_s(r),$$

a  $T_s(r)$  se le denomina la parte estacionaria de la solución y a  $T_t(r, t)$  se le denomina la parte transitoria de la solución. La solución de la parte estacionaria (Ec. C.5) es la siguiente

$$T_s(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}. \quad (\text{C.7})$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan de las condiciones de frontera. La solución de la parte estacionaria es

$$T_s(r) = -\frac{r_2}{r_1^2 - r_2^2} r + \frac{r_1^2 r_2}{(r_1^2 - r_2^2)} \frac{1}{r}. \quad (\text{C.8})$$

Para la solución de la parte transitoria se aplica el método de separación de variables de nueva ocasión. Suponemos que  $T_t(r, t)$  se puede escribir de la siguiente forma

$$T_t(r, t) = R(r)\Gamma(t),$$

sustituyendo en C.6 obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right). \quad (\text{C.9})$$

La única forma de que esta ecuación se satisfaga es que las partes izquierda y derecha de la ecuación sean iguales a una constante. Para el lado derecho

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\lambda^2. \quad (\text{C.10})$$

La solución de esta ecuación diferencial es la siguiente

$$\Gamma(t) = c_0 e^{-\lambda^2 t}. \quad (\text{C.11})$$

Para el lado izquierdo

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right) = -\lambda^2, \quad (\text{C.12})$$

o bien

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} + (\lambda^2 r^2 - 1) R = 0. \quad (\text{C.13})$$

Realizando el cambio de variable  $x = \lambda r$  se obtiene la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + x \frac{\partial R}{\partial x} + (x^2 - 1) R = 0. \quad (\text{C.14})$$

Esta ecuación diferencial se conoce como la Ecuación de Bessel, cuya solución es

$$R(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x), \quad (\text{C.15})$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de primer tipo,  $Y_1$  es la función de Bessel de segundo tipo ambas de orden uno.

Regresando a la variable original

$$R(\lambda r) = c_1 J_1(\lambda r) + c_2 Y_1(\lambda r). \quad (\text{C.16})$$

Por conveniencia la solución se escribe de la siguiente forma

$$R(\lambda(r - r_1)) = c_1 J_1(\lambda(r - r_1)) + c_2 Y_1(\lambda(r - r_1)). \quad (\text{C.17})$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan de las condiciones de frontera

$$R(r_1) = 0,$$

$$R(r_2) = 0,$$

con lo cual se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$R(\lambda(r_1 - r_1)) = c_1 J_1(\lambda(r_1 - r_1)) + c_2 Y_1(\lambda(r_1 - r_1)) = 0, \quad (\text{C.18})$$

$$R(0) = c_1 J_1(0) + c_2 Y_1(0) = 0. \quad (\text{C.19})$$

Las funciones de Bessel tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} J_1(0) &= 0, \\ Y_1(0) &= \infty, \end{aligned}$$

entonces

$$c_2 = 0.$$

Para  $c_1$  se tiene

$$R(\lambda(r_2 - r_1)) = c_1 J_1(\lambda(r_2 - r_1)) = 0, \quad (\text{C.20})$$

como  $c_1 \neq 0$  esto implica  $J_1(\lambda(r_2 - r_1)) = 0$  esto se satisface idénticamente si

$$\lambda_n = \frac{\beta_{1n}}{a}, \quad (\text{C.21})$$

donde  $a = r_2 - r_1$  y  $\beta_{1n}$  es la  $n$ -ésima raíz de la función de Bessel de grado uno.

La solución general para  $T_t(r, t)$  se obtiene aplicando el principio de superposición

$$T_t(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(\lambda_n(r - r_1)) e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (\text{C.22})$$

Las constantes  $c_n$  se determinan de la condición inicial del problema

$$T_t(r, 0) = -T_s(r),$$

multiplicando esta ecuación por  $J_1(\lambda_m(r - r_1))$

$$-T_s(r + r_1) J_1(\lambda_m(r - r_1)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(\lambda_n(r - r_1)) J_1(\lambda_m(r - r_1)), \quad (\text{C.23})$$

utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Bessel

$$\int_0^a J_\nu \left( \frac{\beta_{\nu n}}{a} r \right) J_\nu \left( \frac{\beta_{\nu m}}{a} r \right) r dr = \frac{1}{2} a^2 [J_{\nu+1}(\beta_{\nu n})]^2 \delta_{mn}, \quad (\text{C.24})$$

se obtienen coeficientes  $c_n$

$$c_n = \frac{-\int_0^a T_s(r + r_1) J_1 \left( \frac{\beta_{1n}}{a} r \right) r dr}{\frac{1}{2} a^2 [J_2(\beta_{1n})]^2}. \quad (\text{C.25})$$

## C.2 Transferencia de calor por convección con un flujo MHD

En el caso de transferencia de calor por convección con un flujo MHD, la ecuación de la energía no puede resolverse en forma analítica por el método convencional de separación de variables. En el caso cuando el perfil de temperatura alcanza un estado permanente se emplea un método de Galerkin para obtener una solución semi-analítica del problema. Esta expresión para la temperatura permite hacer una interpretación de la física del problema de una forma más sencilla y directa en esta situación.

### C.2.1 Solución analítica aproximada por el método de Galerkin

La ecuación de la energía en el caso donde el perfil de temperatura no depende del tiempo se escribe de la siguiente forma

$$Pe_\theta \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}. \quad (\text{C.26})$$

Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente manera

$$L[T(r, \theta)] = 0, \quad (\text{C.27})$$

donde  $L$  denota el operador diferencial lineal

$$L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - Pe_\theta \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{C.28})$$

La idea básica de este método consiste en suponer que la temperatura del fluido puede ser aproximada por una suma de  $N+1$  funciones base  $\Phi_n(r, \theta)$

$$T(r, \theta) \approx T_N(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n(r, \theta), \quad (\text{C.29})$$

donde  $\Phi_0(r, \theta)$  satisface las condiciones de frontera mientras que las funciones  $\Phi_n(r, \theta)$  se anulan en la frontera. Cuando esta serie se sustituye en la ecuación diferencial se obtiene como resultado una función que se denominada residuo

$$R(r, \theta, a_0, a_1, \dots) = L[T_N(r, \theta)]. \quad (\text{C.30})$$

La meta es construir la solución aproximada  $T_N$  de tal manera que la integral del residuo con alguna función de peso  $W$  se igual a cero, es decir

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (R(r, \theta, a_0, a_1, \dots) W(r, \theta)) r dr d\theta = 0, \quad (\text{C.31})$$

para ciertas funciones  $W(r, \theta)$  escogidas apropiadamente.

El producto interno de dos funciones  $f$  y  $g$  se define de la siguiente manera

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (fg) r dr d\theta, \quad (\text{C.32})$$

este tipo de producto interno es análogo al producto punto entre dos vectores que se estudia en álgebra lineal.

Con la definición anterior entonces, la condición que tiene que satisfacer el residuo es

$$(R, W) = 0, \quad (\text{C.33})$$

para ciertas funciones  $W(r, \theta)$  escogidas apropiadamente.

En el método de Galerkin las funciones de  $W$  es el conjunto de funciones base  $\Phi_n(r, \theta)$ . Entonces los coeficientes  $a_n$  se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$(R, \Phi_k(r, \theta) = 0 \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{C.34})$$

sustituyendo los coeficientes  $a_n$  se obtiene la solución aproximada requerida. El método de Galerkin forma parte de los llamados métodos de residuos pesados [14].

Las funciones base satisfacen que la función  $T$  se puede escribir como una combinación lineal de ellas. Las funciones base que pueden lograr esto son por ejemplo el conjunto de polinomios  $r^n$  combinados con las funciones  $Sen(n\theta)$  y  $Cos(m\theta)$ . Las funciones base que se utilizaron son las siguientes

$$\Phi_0(r, \theta) = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} Sen(\theta), \quad (\text{C.35})$$

$$\Phi_1(r, \theta) = (r - r_1)(r - r_2) Sen(\theta), \quad \Phi_2(r, \theta) = (r - r_1)(r - r_2) Cos(\theta), \quad (\text{C.36})$$

$$\Phi_3(r, \theta) = (r - r_1)^2(r - r_2) Sen(\theta), \quad \Phi_4(r, \theta) = (r - r_1)(r - r_2)^2 Cos(\theta), \quad (\text{C.37})$$

$$\Phi_5(r, \theta) = (r - r_1)^2(r - r_2)^2 Sen(\theta), \quad \Phi_6(r, \theta) = (r - r_1)^2(r - r_2)^2 Cos(\theta). \quad (\text{C.38})$$

Para el caso  $Pe=50$ , la solución aproximada para la temperatura es

$$T(r, \theta) \approx T_6(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^6 a_n \Phi_n(r, \theta) \quad (\text{C.39})$$

donde los coeficientes  $a_n$  son:

$a_1=-0.0769041$	$a_2=2.63815$	$a_3=1.9093$	$a_4=2.89607$	$a_5=-5.41928$	$a_6=3.048$
------------------	---------------	--------------	---------------	----------------	-------------

Tabla C.1: Coeficientes  $a_n$

Para esta solución aproximada se utilizaron seis funciones base. El error es menor mientras más funciones base se utilicen. Si utilizamos ocho funciones base para calcular la solución  $|T_8(r, \theta) - T_6(r, \theta)| < 0.04$  tomando esto en cuenta se considera que la solución para la temperatura Ec. C.39 es bastante razonable.

# Bibliografía

- [1] B. Ulrych R. Matas and I. Dolezel. Velocity field in molten metal at electromagnetic stirring in cylindrical crucible. *Computational Problems of Electrical Engineering*, 5:25–40, 2003.
- [2] N. Ma and J.S. Walker. Electromagnetic stirring in crystal growth processes. *Fluid Dynam. Mater. Process*, 2:119–126, 2006.
- [3] J. E. Hesselgreaves. *Compact heat exchangers : selection, design, and operation*. Pergamon, 2001.
- [4] Sadik Kakac and Hongtan Liu. *Heat Exchangers: Selection, Rating and Thermal Design*. CRC Press, 2002.
- [5] S. C. Kakarantzas and A. P. Grecos. Direct numerical simulation of a heat removal configuration for fusion blankets. *Energy Conversion and Management*, 48:2775–2783, 2007.
- [6] M. H. Chang and C. K. Chen. Hydromagnetic stability of current-induced flow in a small gap between concentric rotating cylinders. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454:1857–1873, 1998.
- [7] I.G Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw - Hill, 1974.
- [8] L.D. Landau and E.M Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [9] P. A. Davison. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge, 2001.
- [10] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley Sons, 1975.
- [11] De Wikipedia la enciclopedia libre. Ecuaciones de maxwell. [http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones\\_de\\_Maxwell](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Maxwell).
- [12] W. Hughes and F. Young. *The Electromagnetodynamics of Fluids*. John Wiley & Sons, 1966.
- [13] E. Blums. *Heat and mass transfer in mhd flows*. World Scientific Publishing, 1987.
- [14] C. Fletcher. *Computational Galerkin Methods*. Springer Verlag, 1984.

- [15] H.K Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*. Prentice Hall, 1995.
- [16] S. P. Mahulikar and C. P. Tso. A new classification for thermal development of fluid flow in a circular tube under laminar forced convection. *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 458:669–682, 2002.
- [17] J. H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2002.
- [18] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw Hill, 1980.