UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE EL MÁXIMO O EL MÍNIMO DE DOS ACTIVOS SUBYACENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

MARTHA ANGÉLICA LEÓN ALVARADO

MTRO. AGUSTÍN ROMÁN AGUILAR

2008

Índice

Introducción

En México el término “derivado financiero” comenzó a adquirir mayor importancia a partir de que el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER) inicia sus operaciones en 1994, además de que en estos últimos años se ha ampliado el catalogo de productos que en dicha entidad se cotizan.

Las autoridades financieras mexicanas han apoyado esta tarea de crecimiento con la intención de fortalecer el Sistema Financiero Mexicano, facilitando tanto a las empresas como a los inversionistas una mayor variedad de productos de acuerdo a sus necesidades.

Un derivado financiero es un instrumento cuyo precio se basa en los precios de otro activo llamado subyacente, el objetivo final de estos derivados es servir de cobertura ante las fluctuaciones de precio de los activos subyacentes, además de que estos instrumentos permiten diversificar las inversiones pero sobre todo administrar los riesgos.

El Fondo Monetario Internacional (FMI) y la Corporación Financiera Internacional (CFI) argumentan que es necesario establecer mercados de productos derivados con la finalidad de “**promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas**”.

Sin embargo, la evolución mundial de los instrumentos derivados va mucho más allá de lo que el mercado mexicano actualmente abarca, mientras que en México los inversionistas le apuestan con temor a los derivados financieros, en países como Estados Unidos y algunos otros de Europa, los financieros están tratando de crear una enorme gama de instrumentos derivados para poder cubrir las necesidades y requerimientos de todos los inversionistas.

Las opciones exóticas son una prueba fehaciente de ello; estos instrumentos son una tipología de los derivados financieros denominados “opciones”. Estos productos se encuentran principalmente en mercados no organizados o comúnmente llamados “over the counter”. Se diferencian de las opciones tradicionales por algunas características como el cálculo de la prima y el tipo de pago.

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar las características de un tipo de opción exótica denominada “**Opción sobre el máximo o el mínimo de dos activos subyacentes**”, así como proporcionar programas de valuación de este tipo de opciones a través de tres diferentes métodos numéricos: Simulación Montecarlo, Fórmulas de Stulz y Pirámides Binomiales.

La descripción de estos derivados proporciona al lector información de las características de esta clase de opciones exóticas, esperando que con ello, el lector pueda encontrar o identificar algún posible uso de estos instrumentos dentro del ámbito financiero.

El diseño del código fuente de los programas contempla las hipótesis planteadas en cada uno de los métodos numéricos, de esta manera estos tres modelos presentados, permitirán obtener los precios de las opciones de tres diferentes maneras y podrán ajustarse a las condiciones de los mercados donde se negocien.

Para llevar a cabo la programación de los métodos de valuación de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos subyacentes, se utilizó el software matemático “Matlab”

El primer capítulo de la tesis contiene información sobre las características de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos subyacentes y su ubicación dentro de la tipología de las opciones exóticas. La descripción de cada una de las opciones (*call máximo, call mínimo, put máximo, put mínimo*) incluye la fórmula para calcular el flujo final o valor de liquidación, así como la construcción de portafolios con instrumentos derivados que pueden replicar el pago de cualquiera de estos cuatro tipos de opciones. Estos portafolios facilitan la valuación de las opciones sobre el máximo o el mínimo ya que es posible calcular el precio de una de ellas si se tiene el valor de todos los instrumentos que componen el portafolio replica.

Dentro del segundo capítulo se describen los métodos que serán utilizados en la valuación de las opciones sobre el máximo o el mínimo, cada uno de ellos se expone en un subcapítulo independiente en donde se establecen las diferentes hipótesis que llevaron al diseño del modelo, así como la fórmula final para el cálculo del precio de la opción. En este capítulo se presentan cuatro modelos, de los cuales solo dos de ellos se programarán. El método de *rendimientos relativos* no será incluido en la programación de los métodos numéricos debido a que este modelo es solo una forma de presentar los precios de los activos en términos de su rendimiento, no es un modelo que proporcione elementos teóricos para obtener de forma diferente el precio las opciones. El método *Binomial para opciones europeas* tampoco se incluye debido a que el modelo de *Pirámides Binomiales* ya incluye la valuación de opciones tanto para las que son de tipo *americanas* como para las *europeas*.

El tercer capítulo comienza describiendo el tercer modelo que se utilizará para valuar las opciones sobre el máximo o el mínimo, se trata de la *Simulación Montecarlo*, además de este método numérico se incluyen los otros dos modelos explicados en el capítulo anterior: *Fórmulas de Stulz* y *Pirámides Binomiales*. En cada uno de ellos se describen las variables de entrada de sus respectivos programas, así como la valuación de una misma opción por medio de los tres métodos. Posteriormente se muestra una tabla comparativa con los precios obtenidos en cada modelo y se hacen algunas reflexiones al respecto.

Dentro de los anexos de este trabajo se incluyen:

- El código fuente de los tres programas diseñados.
- Las bases para llevar a cabo la simulación de una distribución normal bivariada, que se utilizará dentro del método Fórmulas de Stulz.

1. Características de las Opciones sobre el Máximo o el Mínimo.

1.1 Opciones Exóticas

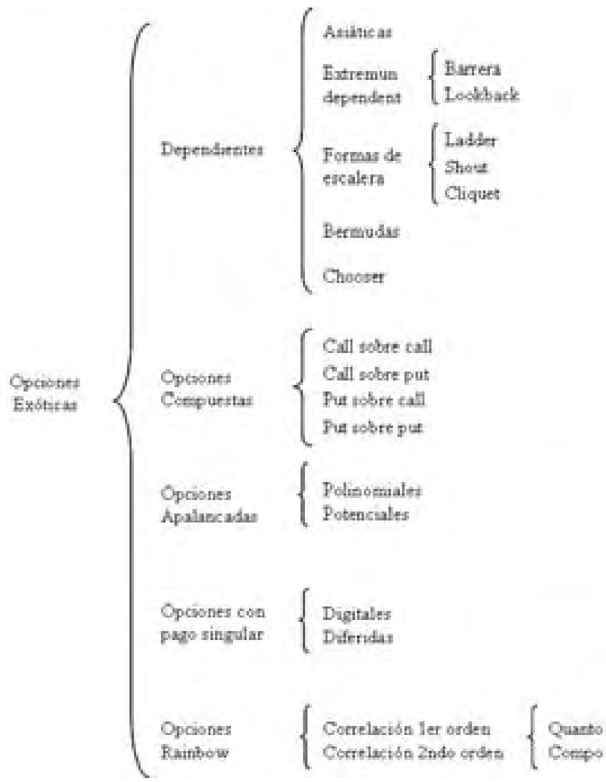
Dentro del ámbito de los derivados financieros se encuentran las opciones, instrumentos que le dan a su poseedor el derecho, más no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente. Éstas se clasifican de acuerdo a la naturaleza de su operación en opción *call*, opción de compra y en opción *put*, opción de venta; si puede ejercerse el derecho de comprar o vender el activo subyacente en cualquier momento, durante la vigencia de la opción, estamos hablando de una opción *americana*, mientras que la opción *europea* es aquella que sólo puede ejercerse en la fecha de vencimiento.

Las opciones también se dividen en opciones *vanilla* o *tradicionales*, son los tipos de opciones más conocidas y las más negociadas en los mercados financieros; y las opciones *exóticas* que se diferencian de las tradicionales en costo y características como: condiciones de pago, determinación del precio de ejercicio o del subyacente, entre otras. Las opciones exóticas han permitido ajustar una opción tradicional a diferentes situaciones o necesidades de los compradores y al mismo tiempo tienen un costo menor a las opciones vanilla.

Si bien la aparición de los derivados ha representado un cambio favorecedor para los mercados financieros, debido a que entre sus principales características esta la cobertura del riesgo, las opciones exóticas han beneficiado a muchos de los inversionistas porque son instrumentos que se adaptan a sus necesidades y expectativas de inversión y cobertura.

Las opciones exóticas se han implantado como un instrumento muy útil tanto para la gestión de riesgos, como para la especulación.

El siguiente esquema muestra los distintos tipos de opciones exóticas que existen. Dentro de este trabajo se explicarán las características de las opciones tipo rainbow sobre el máximo o mínimo de dos activos, y se programaran algunos modelos para su valuación.



Fuente: Boletín Económico de ICE No. 2673

1.2 Opciones Rainbow

Su nombre se debe a que, a diferencia de las opciones tradicionales, en ellas está involucrado más de un activo subyacente, sin embargo, el pago al vencimiento esta referido a un solo activo. En las opciones rainbow principalmente se compara el valor de los diferentes activos involucrados y a partir de ahí se determina el mejor, el peor, el máximo o el mínimo valor de entre ellos.

1.2.1 Opciones sobre el máximo y mínimo

Algunos de los nombres con que son conocidas este tipo de opciones son:

- *Opciones rainbow con correlación de primer orden*
  - *Opciones el mejor de los dos*
  - *Opciones el peor de los dos*

- *Opciones sobre dos activos (two assets)*
  - *Opciones sobre el máximo de dos activos riesgosos*
  - *Opciones sobre el mínimo de dos activos riesgosos*

En el año de 1982, Stulz fue el primero en introducir formulas para la valuación de este tipo de opciones, se enfocaban únicamente en opciones europeas para dos activos. Más tarde, en 1987, Johnson extendió los resultados para las opciones europeas que involucran n activos. Los métodos multinomiales para opciones americanas fueron introducidos por Boyle, Evnine and Gibbs, en el año de 1989. Rubinstein (1991), Rich and Chance (1993) y otros más, continuaron los trabajos para la valuación de opciones sobre el máximo o el mínimo de dos o más activos.[1]

1.2.2 Opciones sobre el máximo

Son aquellas opciones que, al momento de ejercerlas, comparan el valor de dos activos subyacentes. En el caso de las opciones máximo, se elegirá el activo que haya tenido el valor máximo. Dentro de estas opciones se pueden encontrar las *Americanas* o las *Europeas* y las Opciones *Call (de compra) o Put (de venta)*

Sabemos que en una opción Call tradicional, al momento de ejercerse (supongamos al tiempo T) se compara el valor máximo entre 0 y la diferencia entre el valor de activo S al tiempo T menos el precio de ejercicio K, la conveniencia de ejercer o no la opción será determinada con el resultado de esa comparación, ya que en caso de que el valor del activo sea menor que el precio de ejercicio establecido, convendrá no ejercer la opción puesto que esto ocasionaría una pérdida

El pago al final para las opciones call tradicionales esta dado de la siguiente forma:

$$\textbf{Opción Call: Máx } \{0, S_T - K\}$$

[1] Phelim P. Boyle, Y. K. Tse, **An Algorithm for Computing Values of Options on the Maximum or Minimum of Several Assets**, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 2 (Jun., 1990), pp. 215-227

Para el caso de las opciones call sobre el máximo, al momento de ejercerlas (tiempo T), primero se compara el valor de los dos activos S_1 y S_2, se elige el de mayor valor y a partir de ahí el valor de liquidación es similar al del una opción tradicional. El pago para este tipo de opciones esta dado de la siguiente forma:

Opción Call sobre el máximo: Máx {0, Máx {S_{1T}, S_{2T}} – K}

Donde:
S_{1T} es el valor del activo 1 al momento de ejercer la opción
S_{2T} es el valor del activo 2 al momento de ejercer la opción
K es el precio de ejercicio

Es importante destacar que a pesar de que se encuentran involucrados dos activos, el valor de liquidación de la opción puede ser cero debido a que el valor de ninguno de los activos podría superar al precio de ejercicio establecido desde el inicio.

Los siguientes cuadros son un comparativo del valor de liquidación (K) entre un call sobre el máximo de dos activos S_1 y S_2 y dos call, uno para el activo S_1 y otro para el activo S_2.

Caso 1: $S_{1T} < S_{2T}$

	$S_{1T} < S_{2T} < K$	$S_{1T} \leq K \leq S_{2T}$	$K < S_{1T} < S_{2T}$
Call tradicional S_1	0	0	S_{1T} - K
Call tradicional S_2	0	S_{2T} - K	S_{2T} - K
Call sobre el máximo entre S_1 y S_2	0	S_{2T} - K	S_{2T} - K

Cuando el valor de ambos activos es menor al precio de ejercicio, ninguna de las tres opciones se ejerce, por lo que el valor de liquidación de la opción en los tres casos será cero. Cuando el precio de ejercicio se encuentra entre los activos S_1 y S_2, la opción sobre el activo S_1 no se ejerce ya que el precio de ejercicio sigue siendo mayor al valor del activo, sin embargo, la opción sobre el activo S_2 y la opción sobre el máximo de los dos activos pueden ejercerse, debido a que el valor del activo S_2 supera al precio de ejercicio.

Si bien las dos primeras columnas de este cuadro comparativo no muestran las ventajas de la opción sobre el máximo de dos activos, en la tercera columna podemos observar el caso en el que las tres opciones pueden ser ejercidas debido a que el valor de los dos activos es superior al precio de ejercicio.

Mientras que el valor de liquidación en la primera opción es igual a S_{1T} - K, la segunda opción tiene un pago al vencimiento mayor S_{2T} – K, debido a que S_{2T} es mayor a S_{1T}, la opción sobre el máximo nos muestra que, además de que la opción puede ser ejercida como en las dos opciones anteriores, se obtiene una ganancia mayor que con la primera opción y sin la necesidad de haber adquirido las dos opciones para cada uno de los activos por separado debido a que la opción sobre el máximo elige la que tiene el mayor valor.

Puede pensarse que si se hubiera adquirido sólo la opción sobre el activo S_2, al final se obtendría un valor de liquidación igual al de la opción sobre los dos activos, pero el siguiente cuadro muestra el caso opuesto, cuando S_{1T} es mayor o igual a S_{2T}.

Caso 2: $S_{1T} \geq S_{2T}$

	$S_{2T} \leq S_{1T} < K$	$S_{2T} \leq K \leq S_{1T}$	$K < S_{2T} \leq S_{1T}$
Call tradicional S_1	0	S_{1T} - K	S_{1T} - K
Call tradicional S_2	0	0	S_{2T} - K
Call sobre el máximo entre S_1 y S_2	0	S_{1T} - K	S_{1T} - K

En este caso, el valor de liquidación de la opción sobre los dos activos es igual que el de la opción sobre el activo S_1. La tercera columna muestra el caso en el que los dos activos están por arriba del precio de ejercicio, pueden ejercerse las tres opciones, sin embargo convendría más ejercer la opción con el activo S_1 ya que tiene un valor mayor a S_2.

El inversionista puede tener sus propias expectativas sobre el comportamiento de los dos activos, de acuerdo con herramientas de análisis técnico o fundamental puede estimar cuál de los dos activos tendrá el mayor valor, de esta forma elegiría qué opción tradicional comprar.

Pero si quisiera cubrirse en caso de que esas expectativas no se den, la mejor elección sería adquirir una opción sobre el máximo de los dos activos porque de esta forma, independientemente de cuál sea el comportamiento de los dos activos, él podría obtener un valor de liquidación igual o incluso superior al que obtendría en una opción vanilla para alguno de los dos activos.

Siguiendo con esta dinámica, podemos observar que el valor de liquidación de una opción put sobre el máximo de dos activos esta determinado de la siguiente manera:

Opción Put sobre el máximo: Máx. {0, K - Max {S_{1T}, S_{2T}}}

Como en una opción put tradicional, se ejercerá la opción si el valor del activo es menor al precio de ejercicio. Para el caso de una opción put sobre el máximo de dos activos, se ejerce si el valor máximo de los dos activos es menor al precio de ejercicio.

Analizar las ventajas de una opción put sobre el máximo de dos activos, no es tan sencillo como analizar las ventajas que proporciona un call, debido a que el inversionista estaría vendiendo un activo que tiene más valor que otro y por estar más cerca del precio de ejercicio la ganancia que obtendría sería menor.

Sin embargo, si consideramos que el inversionista decide adquirir este tipo de opciones en un ambiente donde el precio de ambos activos esta disminuyendo, a él le interesa vender cualquiera de los dos, pero está consiente de que de sus probables compradores no adquirirían una acción que ha estado disminuyendo su valor, por ello es que este inversionista vendería el activo que tenga el valor máximo, porque de esta manera tendría mas posibilidades de realizar su venta.

Estas opciones put sobre el máximo no presentan una gran ventaja para el especulador porque el hecho de adquirirlas no le generaría una ganancia, no obstante, el mercado no solo esta compuesto de especuladores, sino también de inversionistas cuyo interés es la cobertura de riesgos.

De la misma forma en que se presentaron los cuadros comparativos de una opción call sobre el máximo de dos activos, se expone ahora la comparación entre la opción rainbow y las opciones put tradicionales para cada uno de los activos.

Caso 1: $S_{1T} < S_{2T}$

	$S_{1T} < S_{2T} < K$	$S_{1T} \leq K \leq S_{2T}$	$K < S_{1T} < S_{2T}$
Put tradicional S_1	$K - S_{1T}$	$K - S_{1T}$	0
Put tradicional S_2	$K – S_{2T}$	0	0
Put sobre el máximo entre S_1 y S_2	$K – S_{2T}$	0	0

Caso 2: $S_{1T} \geq S_{2T}$

	$S_{2T} \leq S_{1T} < K$	$S_{2T} \leq K \leq S_{1T}$	$K < S_{2T} \leq S_{1T}$
Put tradicional S_1	$K - S_{1T}$	0	0
Put tradicional S_2	$K – S_{2T}$	$K – S_{2T}$	0
Put sobre el máximo entre S_1 y S_2	$K – S_{1T}$	0	0

En el caso1, el valor de liquidación de la opción put sobre el máximo es idéntico al valor de liquidación de una opción put tradicional sobre el activo S_2, y para el caso dos, el valor de liquidación de la opción put sobre el máximo es igual al put tradicional sobre S_1.

En ambos casos, podemos ver que cuando el precio de ejercicio se encuentra entre los valores de los subyacentes se elige el activo de mayor valor y si la diferencia entre éste y el precio de ejercicio es negativa la opción no se ejerce. Por ello es que solo convendría ejercer cuando ambos valores son menores que el precio de ejercicio aunque la ganancia no sea la mayor.

1.2.3 Opciones sobre el mínimo

Lo contrario a las opciones sobre el máximo, estas opciones al ejercerse eligen de entre dos activos, el de menor valor.

Tienen un valor de liquidación dado por:

Opción Call sobre el mínimo de dos activos: Max {0, Min {S_{1T}, S_{2T}} – K}

Opción Put sobre el mínimo de dos activos: Max {0, K - Min {S_{1T}, S_{2T}}}

Donde:

S_{1T} es el valor del activo 1 al momento de ejercer la opción

S_{2T} es el valor del activo 2 al momento de ejercer la opción

K es el precio de ejercicio

En el siguiente cuadro podemos comparar los valores de liquidación de una opción call sobre el mínimo y los de un call tradicional para cada subyacente.

Caso 1: $S_{1T} < S_{2T}$

	$S_{1T} < S_{2T} < K$	$S_{1T} \leq K \leq S_{2T}$	$K < S_{1T} < S_{2T}$
Call tradicional S_1	0	0	$S_{1T} - K$
Call tradicional S_2	0	$S_{2T} - K$	$S_{2T} - K$
Call sobre el mínimo entre S_1 y S_2	0	0	$S_{1T} - K$

Caso 2: $S_{1T} \geq S_{2T}$

	$S_{2T} \leq S_{1T} < K$	$S_{2T} \leq K \leq S_{1T}$	$K < S_{2T} \leq S_{1T}$
Call tradicional S_1	0	$S_{1T} - K$	$S_{1T} - K$
Call tradicional S_2	0	0	$S_{2T} - K$
Call sobre el mínimo entre S_1 y S_2	0	0	$S_{2T} - K$

Si comparamos ambas opciones en términos de la utilidad, podemos decir que para el caso 1 conviene más adquirir una opción sobre el activo S_2 debido a que $S_{2T} - K$ es mayor a $S_{1T} - K$, y para el caso dos, la opción call sobre el activo S_1 nos otorga una mayor ganancia que el call sobre el mínimo, no obstante, este tipo de opciones exóticas pueden cubrir el riesgo de que el precio del activo no sea el esperado, no solo para uno sino para dos activos.

De igual forma, en el siguiente cuadro podemos comparar las ventajas de contar con una opción put sobre el mínimo o adquirir un put tradicional para cada subyacente.

Caso 1: $S_{1T} < S_{2T}$

	$S_{1T} < S_{2T} < K$	$S_{1T} \leq K \leq S_{2T}$	$K < S_{1T} < S_{2T}$
Put tradicional S_1	$K - S_{1T}$	$K - S_{1T}$	0
Put tradicional S_2	$K - S_{2T}$	0	0
Put sobre el mínimo entre S_1 y S_2	$K - S_{1T}$	$K - S_{1T}$	0

Caso 2: $S_{1T} \geq S_{2T}$

	$S_{2T} \leq S_{1T} < K$	$S_{2T} \leq K \leq S_{1T}$	$K < S_{2T} \leq S_{1T}$
Put tradicional S_1	$K - S_{1T}$	0	0
Put tradicional S_2	$K - S_{2T}$	$K - S_{2T}$	0
Put sobre el mínimo entre S_1 y S_2	$K - S_{2T}$	$K - S_{2T}$	0

El valor de liquidación del put sobre el mínimo para el primer caso es igual al valor de liquidación de un put tradicional sobre el activo S_1, si se tuviera la certeza de que el valor del activo S_2 será mayor al del activo S_1, se compraría sólo un put tradicional sobre S_1. Sin embargo, el caso dos nos muestra como ahora el valor de liquidación cambia para ser igual al de un put tradicional sobre el activo S_2.

El tener una opción put sobre el mínimo de dos activos conviene si se da cualquiera de los dos casos anteriores. Dado que en el primer caso S_1 es menor a S_2, al ser el valor de liquidación la resta entre el precio de ejercicio y el activo de menor valor la ganancia será mayor. En el segundo caso, sucede algo similar ya que ahora el valor de l subyacente S_2 es menor al valor de S_1 por ello, la ganancia será mayor que la obtenida con las opciones tradicionales.

1.3 Paridad Max – Min.

Después de haber revisado los cuadros comparativos entre las opciones exóticas sobre el máximo o el mínimo y las opciones vanilla, la paridad de opciones nos permite demostrar como un portafolio compuesto por dos call tradicionales sobre cada subyacente S_1 y S_2 es equivalente a un portafolio de un call sobre el máximo y un call sobre el mínimo de dos activos

Caso 1: $S_{1T} < S_{2T}$

	$S_{1T} < S_{2T} < K$	$S_{1T} \leq K \leq S_{2T}$	$K < S_{1T} < S_{2T}$
Call tradicional S_1	0	0	S_{1T} - K
Call tradicional S_2	0	S_{2T} - K	S_{2T} – K
Total	**0**	**S_{2T} - K**	**$S_{1T} + S_{2T}$ - 2K**
Call sobre el máximo entre S_1 y S_2	0	S_{2T} - K	S_{2T} – K
Call sobre el mínimo entre S_1 y S_2	0	0	S_{1T} – K
Total	**0**	**S_{2T} - K**	**$S_{1T} + S_{2T}$ - 2K**

Caso 2: $S_{1T} \geq S_{2T}$

	$S_{2T} \leq S_{1T} < K$	$S_{2T} \leq K \leq S_{1T}$	$K < S_{2T} \leq S_{1T}$
Call tradicional S_1	0	S_{1T} - K	S_{1T} - K
Call tradicional S_2	0	0	S_{2T} – K
Total	**0**	**S_{1T} - K**	**$S_{1T} + S_{2T}$ - 2K**
Call sobre el máximo entre S_1 y S_2	0	S_{1T} - K	S_{1T} - K
Call sobre el mínimo entre S_1 y S_2	0	0	S_{2T} – K
Total	**0**	**S_{1T} - K**	**$S_{1T} + S_{2T}$ - 2K**

Podemos decir entonces que:

- Un **call sobre el máximo entre S_1 y S_2** es igual a un **call sobre S_1** mas un **call sobre S_2** más un **call corto sobre el mínimo entre S_1 y S_2**.
- Un **call sobre el mínimo entre S_1 y S_2** es igual a un **call sobre S_1** mas un **call sobre S_2** más un **call corto sobre el máximo entre S_1 y S_2**.

Para el caso de las opciones put sobre el máximo, el portafolio que las compone es el siguiente

Caso 1: $S_{1T} < S_{2T}$

	$S_{1T} < S_{2T} < K$	$S_{1T} \leq K \leq S_{2T}$	$K < S_{1T} < S_{2T}$
Put tradicional S_1	K - S_{1T}	K - S_{1T}	0
Put tradicional S_2	K - S_{2T}	0	0
Total	**2K – S_{1T} – S_{2T}**	**K - S_{1T}**	**0**
Put sobre el máximo entre S_1 y S_2	K - S_{2T}	0	0
Put sobre el mínimo entre S_1 y S_2	K - S_{1T}	K - S_{1T}	0
Total	**2K – S_{1T} – S_{2T}**	**K - S_{1T}**	**0**

Caso 2: $S_{1T} \geq S_{2T}$

	$S_{2T} \leq S_{1T} < K$	$S_{2T} \leq K \leq S_{1T}$	$K < S_{2T} \leq S_{1T}$
Put tradicional S_1	K - S_{1T}	0	0
Put tradicional S_2	K - S_{2T}	K - S_{2T}	0
Total	**2K – S_{1T} – S_{2T}**	**K – S_{2T}**	**0**
Put sobre el máximo entre S_1 y S_2	K - S_{1T}	0	0
Put sobre el mínimo entre S_1 y S_2	K - S_{2T}	K - S_{2T}	0
Total	**2K – S_{1T} – S_{2T}**	**K – S_{2T}**	**0**

Podemos decir entonces que:

- Un **put sobre el máximo entre S_1 y S_2** es igual a un **put sobre S_1** mas un **put sobre S_2** más un **put corto sobre el mínimo entre S_1 y S_2**.
- Un **put sobre el mínimo entre S_1 y S_2** es igual a un **put sobre S_1** mas un **put sobre S_2** más un **put corto sobre el máximo entre S_1 y S_2**.

Con relación a la paridad entre dos opciones máximo y mínimo, Pablo Fernández en su articulo titulado "Derivados Exóticos", menciona algunas otras[2]:

- Un call sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio K es equivalente a un call sobre el activo S_1 más un call sobre el activo S_2, menos un call sobre el mínimo de los dos.

[2] Fernandez Pablo, Ariño Miguel Ángel, **Derivados Exóticos**, Documento de Investigación No. 308, IESE Universidad de Navarra, Marzo 1996, p.p. 35 - 37

$$\mathbf{Call_{max} + Call_{min} = Call\ S_1 + Call\ S_2}$$

- Un put sobre el mínimo de dos activos con precio de ejercicio K es equivalente al valor actual de K más un call sobre el mínimo de los dos activos con precio de ejercicio K, menos un call sobre el mínimo de los dos activos con precio de ejercicio 0.

$$\mathbf{Put_{min} - Call_{min} = K - Min\ (S_1, S_2, 0)}$$

- Un put sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio K es equivalente al valor actual de K más un call sobre el máximo de los dos activos con precio de ejercicio K, menos un call sobre el máximo de los dos activos con precio de ejercicio 0.

$$\mathbf{Put_{max} - Call_{max} = K - Max\ (S_1, S_2, 0)}$$

- Un put sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio K es equivalente a un put sobre el primero más un put sobre el segundo, menos un put sobre el mínimo de los dos activos con precio de ejercicio K.

$$\mathbf{Put_{max} + Put_{min} = Put\ S_1 + Put\ S_2}$$

Es importante mencionar que este tipo de paridades serán de mucha ayuda en las metodologías de valuación empleadas en este trabajo.

En este primer capítulo hemos visto las características principales de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos, además de las bases para su valuación. En los Siguientes capítulos se presentarán algunos modelos utilizados para calcular la prima de estas opciones.

2. Métodos de valuación de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos

2.1 Fórmulas diseñadas por Stulz

2.1.1 Valuación de un call sobre el mínimo de dos activos

En el año 1982 fue publicado un artículo titulado **"Opciones sobre el mínimo y el máximo de dos activos riesgos"**[1], escrito por Rene M. Stulz, en donde se demostraban las fórmulas para valuar opciones europeas put y call sobre el mínimo o máximo de dos activos riesgosos.

En este artículo se establecen diversas hipótesis que permiten obtener una ecuación final para el precio de una opción. Stulz comenzó a valuar opciones call sobre el mínimo de dos activos y tomó ese valor como referencia para posteriormente, utilizando además opciones tradicionales, valuar opciones sobre el máximo.

A continuación se enuncian las hipótesis que se establecieron en dicho artículo:

1. Los mercados no tienen fricciones, no hay costos de transacción, no hay impuestos, no hay restricciones de ventas en corto y no hay diferencia entre las tasas activas y pasivas.
2. Los precios de los activos S_1 y S_2 satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS_1 / S_1 = \mu_{S_1} dt + \sigma_{S_1} dZ_{S_1} \quad \textbf{(1)}$$

$$dS_2 / S_2 = \mu_{S_2} dt + \sigma_{S_2} dZ_{S_2} \quad \textbf{(2)}$$

En donde se asume que:

- Las varianzas instantáneas de las tasas de rendimiento de los activos S_1 y S_2, $\sigma_{S_1}^2$ y $\sigma_{S_2}^2$, son constantes.
- Las tasas instantáneas de rendimiento esperado de los activos S_1 y S_2, μ_{S_1} y μ_{S_2}, respectivamente, pueden variar con el tiempo, pero deben dar siempre solución a las ecuaciones (1) y (2)

---

[1] Stulz M, René, **Options on the minimum or the maximum of two risky assets**, University of Rochester, NY 14627, USA, 1982

- dZ_{S_1} y dZ_{S_2} son procesos estándar de Wiener cuyo coeficiente de correlación es $\rho_{S_1S_2}$.

3. La tasa instantánea de interés libre de riesgo r es constante en el tiempo.

Sea C_{min} *(S₁, S₂, K, T - t)* el precio de una opción call europea sobre el mínimo entre S_1 y S_2, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K. Para encontrar el valor de C_{min}, se creará un portafolio P cuyo valor en la fecha T tenga el mismo valor que el valor de liquidación de la opción call sobre el mínimo, es decir: $P_T = Max\ \{Min\ (S_1, S_2) - K, 0\}$.

De esta manera, para evitar probabilidad alguna de arbitraje, al tener P el mismo valor que el valor de liquidación de la opción en la fecha T, el valor de P en la fecha t será el mismo que el valor o prima de la opción en la fecha t.

El portafolio P estará compuesto de la siguiente manera:

- *X* porcentaje del activo S_1
- *Y* porcentaje del activo S_2 y
- *1 - X - Y* porcentaje invertido a una tasa libre de riesgo

Por lo que el valor actual del portafolio será:

$$P = (XP / S_1)S_1 + (YP / S_2)S_2 + (1 - X - Y)P$$

Y el cambio en el valor de este portafolio puede ser expresado como:

$$dP = (XP / S_1)dS_1 + (YP / S_2)dS_2 + (1 - X - Y)Pe^{rt}dt$$

Que también puede reescribirse de la siguiente manera:

$$dP = (XdS_1 / S_1)P + (YdS_2 / S_2)P + (1 - X - Y)Pe^{rt}dt$$

Para determinar el cambio en P, debido a que se esta trabajando con dos activos, se empleará el lema de Ito en dos dimensiones. Entonces el cambio en P queda expresado así:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial S_1}dS_1 + \frac{\partial P}{\partial S_2}dS_2 - \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2}S_1^2\sigma_{S_1}^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2}S_2^2\sigma_{S_2}^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_2}S_1 S_2 \rho_{S_1S_2}\sigma_{S_1}\sigma_{S_2}\right\}dt$$

Haciendo $X = \left(\frac{\partial P}{\partial S_1}\right)\frac{S_1}{P}$ y $Y = \left(\frac{\partial P}{\partial S_2}\right)\frac{S_2}{P}$ e igualando las dos ecuaciones anteriores, se llega a la siguiente ecuación diferencial parcial no estocástica.

$$Vr = \frac{\partial P}{\partial S_1}S_1 r + \frac{\partial P}{\partial S_2}S_2 r + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2}S_1^2\sigma_{S_1}^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2}S_2^2\sigma_{S_2}^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_2}S_1 S_2 \rho_{S_1S_2}\sigma_{S_1}\sigma_{S_2}\right\}dt$$

Para que esta última ecuación pueda replicar el valor de liquidación de un call sobre el mínimo, se deben cumplir las siguientes condiciones de frontera:

$C_{\min} = Max[\min(S_{1T}, S_{2T}) - K, 0]$ *En la fecha de término*

$C_{\min} = 0$ *Si alguno de los dos activos tiene precio 0*

Bajo la hipótesis de que el valor de la opción no depende de la actitud de los inversionistas hacia el riesgo, es decir, los inversionistas son neutrales al riesgo, Stulz encontró la solución a la ecuación, quedando expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{\min}(S_1, S_2, K, T-t) = S_2 N_2\left(\gamma_2, d - \sigma\sqrt{T-t}, \rho_2\right) + S_1 N_2\left(\gamma_1, -d, -\rho_1\right)\ldots \\ - Ke^{-rT} N_2\left(\gamma_1 - \sigma_{S_1}\sqrt{T-t}, \gamma_2 - \sigma_{S_2}\sqrt{T-t}, \rho_{S_1S_2}\right) \end{aligned}$$

Ecuación 1

Donde $N_2(\alpha, \beta, \theta)$ es la distribución normal estándar bivariada acumulada con límites superiores de integración α y β y coeficiente de correlación θ, y además:

$$\gamma_1 = \left(In\left(S_1/K\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma_{S_1}^2\right)(T-t)\right)/\sigma_{S_1}\sqrt{T-t}$$

$$\gamma_2 = \left(In\left(S_2/K\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma_{S_2}^2\right)(T-t)\right)/\sigma_{S_2}\sqrt{T-t}$$

$$d = \left(In\left(S_1/S_2\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)/\sigma\sqrt{T-t} \qquad \sigma^2 = \sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2 - 2\rho_{S_1S_2}\sigma_{S_1}\sigma_{S_2}$$

$$\rho_1 = (\sigma_{S_1} - \rho_{S_1S_2}\sigma_{S_2})/\sigma \qquad \rho_2 = (\sigma_{S_2} - \rho_{S_1S_2}\sigma_{S_1})/\sigma$$

2.1.2 Valuación de un call sobre el máximo de dos activos

De acuerdo con las igualdades mostradas en el capítulo anterior, un call sobre el máximo entre S_1 y S_2 es igual a un call sobre S_1 mas un call sobre S_2 más un call corto sobre el mínimo entre S_1 y S_2, todos con el mismo precio de ejercicio

$$C_{\max}(S_1, S_2, K, T-t) = C(S_1, K, T-t) + C(S_2, K, T-t) - C_{\min}(S_1, S_2, K, T-t)$$

Recordando que $C(S, K, T-t) = S\,N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\,N(d_2)$

Donde $d_1 = \left(In\left(S/K\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right) / \sigma\sqrt{(T-t)}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$

Por lo que su valuación dependerá de estas tres opciones.

Johnson[2] introdujo un tipo de opción diferente (C_{12K}) cuyo valor de liquidación esta definido de la siguiente manera: $Max\{S_1, S_2, K\}$, es decir, paga el máximo entre el precio de dos activos o una cantidad K en efectivo, a partir de este valor de liquidación Rubinstein desarrolló una fórmula para las opciones sobre el máximo de dos activos, quedando el valor de liquidación de la siguiente manera:

$$Max\{S_1, S_2, K\} - K = Max\{0, Max\{S_1, S_2\} - K\}$$

Notemos que estos valores de liquidación son iguales, el que se encuentra del lado derecho de la igualdad es el que corresponde a una opción call sobre el máximo de dos activos y el de la izquierda corresponde a la opción diseñada por Johnson, el cuál puede ser valuado en el momento *t* de la siguiente manera:

$$C_{12K} - Ke^{-rT}$$

2 Johnson, H, **Options on the Maximum or the Minimum of Several Risky Assets**, Journal of Financial and Quantitative Analysis 22, 1987

El valor de liquidación traído a valor presente equivale al valor de la opción menos la cantidad K traída a valor presente. Así el valor de liquidación de la opción sobre el máximo de dos activos traído a valor presente quedará de la siguiente manera:

$$C_{\max}(S_1, S_2, K, T-t) = C_{12K} - Ke^{-rT}$$

2.1.3 Valuación de un put sobre el mínimo de dos activos

En el capítulo anterior se mostró que un put sobre el mínimo de dos activos es equivalente a un put sobre S_1 mas un put sobre S_2 más un put corto sobre el máximo entre S_1 y S_2.

$$P_{\min}(S_1, S_2, K, T-t) = P(S_1, K, T-t) + P(S_2, K, T-t) - P_{\max}(S_1, S_2, K, T-t)$$

Sin embargo, si no se cuenta con el valor de un put sobre el máximo de los dos activos, o peor aún, el valor de esta opción depende del valor de un put sobre el mínimo, se puede utilizar la siguiente expresión:

> *Un put sobre el mínimo de dos activos con precio de ejercicio K es equivalente al valor actual de K más un call sobre el mínimo de los dos activos con precio de ejercicio K, menos un call sobre el mínimo de los dos activos con precio de ejercicio 0.*

$$P_{\min}(S_1, S_2, K, T-t) = Ke^{-r(T-t)} + C_{\min}(S_1, S_2, K, T-t) - C_{\min}(S_1, S_2, 0, T-t)$$

Ahora bien, puede pensarse que un call sobre el mínimo de dos activos con precio de ejercicio 0 se valúa sustituyendo el valor de K = 0 en la ecuación $C_{\min}(S_1, S_2, K, T-t)$, pero notemos que al calcular las γ_i en la ecuación 1, se indetermina la división S_1/K. Por ello es que Stulz obtuvo una fórmula especial para calcular este tipo de opciones.

Definimos primero el valor de liquidación de una opción $C_{min}\ (S_1,\ S_2,\ 0,\ T-t)$ como:

$$Max\{Min\{S_1, S_2\} - 0, 0\} = Max\{Min\{S_1, S_2\}, 0\}$$

Como S_1 y S_2 son siempre mayores a cero, el valor de liquidación de esta opción queda de la siguiente manera: $Min\{S_1, S_2\}$

Sea C_{21} *(S_1, S_2, 1, $T-t$)* el precio de una opción call para cambiar una unidad del activo S_2 por una unidad del activo S_1, este tipo de opciones son llamadas *opciones exchange*, a la fecha de vencimiento el valor de liquidación de esta opción estará dado de la siguiente manera:

$$Max\ \{S_1 - S_2,\ 0\}$$

Si construimos un portafolio *P* con una unidad del activo S_1 y una opción corta C_{21}, tenemos que:

	$S_{1T} < S_{2T}$	$S_{2T} < S_{1T}$
Activo S_1	S_{1T}	S_{1T}
Opción corta C_{21}	0	$-(S_{1T} - S_{2T})$
Total	$\mathbf{S_{1T}}$	$\mathbf{S_{2T}}$
Call sobre el mínimo entre S_1 y S_2, K=0	S_{1T}	S_{2T}
Total	$\mathbf{S_{1T}}$	$\mathbf{S_{2T}}$

Cuando S_1 es mayor a S_2 el portafolio vale S_2, lo mismo que un call sobre el mínimo entre S_1 y S_2 con precio de ejercicio 0. Si S_1 es menor que S_2, el portafolio tiene un valor de S_1. Por lo que podemos decir que:

$$C_{\min}(S_1, S_2, 0, T-t) = S_1 - C_{21}(S_1, S_2, 1, T-t) = S_1 - S_1 N(d_1) + S_2 N(d_2)^3$$

Donde

$$d_1 = \left(In(S_1 / S_2) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right) / \sigma\sqrt{(T-t)} \qquad\qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Teniendo todos estos elementos, es posible calcular el valor de una opción put sobre el mínimo de dos activos

[3] Stulz M, René, **Options on the minimum or the maximum of two risky assets**, University of Rochester, NY 14627, USA, 1982

2.1.4 Valuación de un put sobre el máximo de dos activos

De igual manera que en los casos anteriores, este tipo de opciones pueden ser valuadas por medio de una paridad con otras opciones, para este caso tenemos dos tipos de igualdades:

Un put sobre el máximo es equivalente al valor actual de K menos un call sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio 0 más un call sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio K:

$$P_{\max}(S_1,S_2,K,T-t)=Ke^{-R(T-t)}-C_{\max}(S_1,S_2,0,T-t)+C_{\max}(S_1,S_2,K,T-t)$$

Para calcular el valor de una opción call sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio 0, se realizará un ejercicio similar al que se realizó para calcular la opción C_{min} $(S_1, S_2, 0, T - t)$, sólo que esta vez el portafolio que construiremos será de la siguiente manera: una unidad del activo S_2 y la compra de una opción C_{21}.

	$S_{1T} < S_{2T}$	$S_{2T} < S_{1T}$
Activo S_2	S_{2T}	S_{2T}
Opción C_{21}	0	$S_{1T} - S_{2T}$
Total	$\mathbf{S_{2T}}$	$\mathbf{S_{1T}}$
Call sobre el máximo entre S_1 y S_2, K=0	S_{2T}	S_{1T}
Total	$\mathbf{S_{2T}}$	$\mathbf{S_{1T}}$

Así, el valor de la opción es igual a

$$C_{\max}(S_1,S_2,0,T-t)=S_2+C_{21}(S_1,S_2,1,T-t)=S_2+S_1N(d_1)-S_2N(d_2)$$

La siguiente igualdad que tenemos es la que expresa que un put sobre el máximo de dos activos con precio de ejercicio K es equivalente a un put sobre el primero más un put sobre el segundo, menos un put sobre el mínimo de los dos activos con precio de ejercicio K:

$$P_{\max}(S_1, S_2, K, T-t) = P(S_1, K, T-t) + P(S_2, K, T-t) - P_{\min}(S_1, S_2, K, T-t)$$

Recordando que $P(S, K, T-t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S\,N(-d_1)$

Siendo

$$d_1 = \left(In(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right) / \sigma\sqrt{(T-t)} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

2.2 Rendimientos relativos (Relative performace)

Algunos autores argumentan que en las opciones sobre el máximo o mínimo de dos activos se pueden encontrar algunas dificultades. Una de ellas es el hecho de que al inicio de la opción la diferencia entre el valor de ambos activos sea muy grande, esto podría conceder una ventaja o desventaja para cualquier posible comprador debido a que estas opciones pagarán el máximo o el mínimo de entre dos activos.

Este problema ha intentado superarse expresando la opción en términos de los activos[4], por ejemplo, supongamos que se tiene un call sobre el máximo de dos activos, utilizando esta técnica se tendría un valor de liquidación igual a:

$$Max\{Max((S_{1T} - S_1)/S_1, (S_{2T} - S_2)/S_2) - K_r, 0\}$$

Donde:

S_1, S_2, denotan el valor de los activos S_1 y S_2 al inicio de la opción

S_{1T}, S_{2T} se refiere al valor de los activos S_1 y S_2 al tiempo T

K_r indica una tasa de ejercicio

[4] Chance, D.M., **Min-Max Option Pricing**, Teaching note 98-06, E.J. Ourso College of Business, 2003.

Así, al ejercerse la opción no se compara el valor de los activos, sino la **tasa de rendimiento** de cada uno de ellos y en lugar de determinar un precio de ejercicio, se calcularía una **tasa ejercicio** de rendimiento.

Otra forma de expresar el valor de liquidación de este tipo de opciones es:

$$Max\{Max((S_{1T}/S_1),(S_{2T}/S_2))-(1+K_r),0\}$$

De esta forma se indica que el precio de cada activo ha sido *normalizado* para ser valuado en 1 al comienzo, y el precio de ejercicio es expresado como una tasa de rendimiento más 1. Así, esta opción puede ser valuada directamente con las fórmulas de Stulz, considerando el precio de cada activo como 1 y utilizando 1+K_r como el precio de ejercicio. Mientras que la volatilidad y la correlación permanecerán iguales.
Este tipo de opciones ha favorecido la creación de algunas otras opciones similares o relacionadas, una de ellas es la *outperformance option*, cuyo valor de liquidación se expresa de la siguiente manera:

$$Max\{0,((S_{1T}-S_1)/S_1)-((S_{2T}-S_2)/S_2)\}$$

En este caso la opción paga la diferencia entre el rendimiento del activo 1 y el rendimiento del activo 2 si la diferencia es positiva, o cero en caso contrario.

Otro tipo de opciones son aquellas cuyos valores de liquidación se encuentran indicados de la siguiente manera:

$Max\{0,(S_{1T}-S_{2T})-K\}$	Para una *spread option*
$Max\{0,(S_{1T}-K_1),(S_{2T}-K_2)\}$	Se refiere a la *dual - strike option*

2.3 Método Binomial para opciones europeas

El modelo binomial para las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos está basado en el modelo realizado por Mark Rubinstein para opciones europeas dependientes del activo ("path-dependent"), llamado árbol binomial en tres dimensiones.

En este modelo se asume que el activo S_1 puede incrementar su valor con un factor *u* o decrecer con un factor *d* en cada periodo. Si el activo S_1 incrementa *u*, entonces el activo S_2 puede incrementar A o decrecer B. Si el activo S_1 decrece *d*, el activo S_2 puede incrementar C o decrecer D. Estableciendo que $A \neq C$ y $B \neq D$ se podrá construir una correlación distinta de cero entre los activos S_1 y S_2.[5]

Rubinstein parte de la siguiente integral para valuar este tipo de opciones:

$$C = r^{-t} \int\int g(x,y) f(x,y) dxdy$$

En donde g(x, y) es el valor de liquidación de la opción y el rango de integración va de $-\infty$ a ∞. El modelo que desarrolla consiste en aproximar la función de densidad normal bivariada continua f(x, y) con una densidad binomial discreta bivariada.

Debido a que estamos valuando opciones tipo europeas, lo que interesa es el valor de los activos al tiempo T o a la fecha de vencimiento de la opción, es decir, el valor de los activos ubicados en los nodos finales del árbol.

El número de nodos finales es: $\dfrac{n!n!}{k!(n-k)!j!(n-j)!}$

Cada nodo final del árbol tiene probabilidad p_i de tomar su valor final:

$$p_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1/2)^n$$

Entonces cada par de combinaciones tiene probabilidad $p_{jk} = p_j p_k$ de tomar su valor final:

$$p_{jk} = \frac{n!n!}{j!(n-j)!k!(n-k)!}(1/4)^n$$

De esta forma, el valor de la opción será:

$$c = r^{-(T-t)} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!n!}{k!(n-k)!j!(n-j)!}(1/4)^n g(S_1(T), S_2(T))$$

[5] Gaardner Haug, Espen, **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**, The Mac-Graw Hill Companies, USA, 2007

Escrito de otra forma, el valor de la opción estará dado por:

$$c = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!n!}{k!(n-k)!\,j!(n-j)!} (1/4)^n \, g[S_1(T), S_2(T)]$$

Donde:

g [S_1(T), S_2(T)] es cualquier valor de liquidación al término de la opción que involucre dos activos, en este caso puede ser:

Max {Min (S_1, S_2) - K, 0} para el mínimo de dos activos

ó *Max {Max (S_1, S_2) - K, 0}* para el máximo de dos activos.

Y las variables S_1 y S_2 quedan definidas de la siguiente manera[6]:

$S_1(T) = S_1 u^j d^{n-j}$,

$S_2(T) = S_2 \exp[\mu_2 T + \sigma_2(\rho(j-(n-j)) + \sqrt{1-\rho^2}\,(k-(n-k)))\sqrt{\Delta T}\,]$

$u = \exp(\mu_1 \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t})$, $d = \exp(\mu_1 \Delta t - \sigma_1 \sqrt{\Delta t})$

$\mu_1 = r - \sigma_1{}^2/2$, $\mu_2 = r - \sigma_2{}^2/2$

2.4 Valuación de Opciones Americanas usando Pirámides Binomiales

Mark Rubinstein también diseñó un método binomial para valuar las opciones americanas sobre dos activos, a este método le llamo “pirámides binomiales”.

Como primer paso, no se trabajará con los precios de los activos sino con los rendimientos estandarizados de los mismos, los cuales serán denotados como un par (1,1). Transcurrido el primer periodo, el rendimiento del activo S_1 puede moverse hacia arriba como ***u*** o hacia abajo como ***d***, ambos movimientos con igual probabilidad.

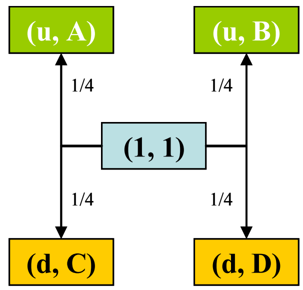
Al mismo tiempo, el rendimiento del activo S_2 puede moverse hacia arriba o hacia abajo, si se considera que cualquier movimiento del activo S_2 es independiente del movimiento del activo S_1 se tendrán dos activos no correlacionados.

---

[6] Gaardner Haug, Espen, **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**, The Mac-Graw Hill Companies, USA, 2007

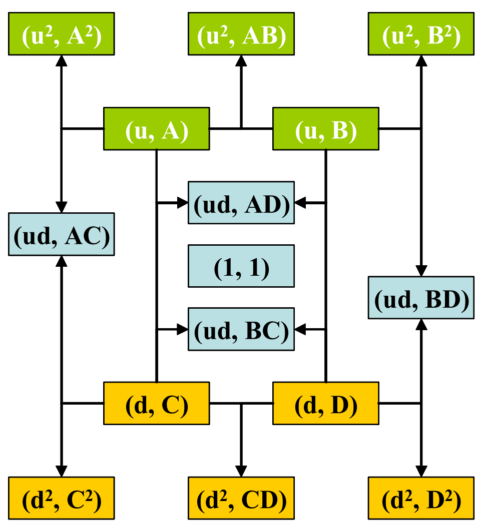
Por lo tanto se considera que si el activo S_1 se mueve hacia arriba (u) entonces el rendimiento del activo S_2 se moverá hacia arriba como ***A*** o hacia abajo como ***B***, en cambio, si el activo S_1 se mueve hacia abajo (d), el rendimiento del activo S_2 se moverá hacia arriba como ***C*** o hacia abajo como ***D***.

La pirámide que se construye con los primeros movimientos de los activos puede verse en el siguiente gráfico:



Notamos que para este primer paso, se obtuvieron un total de cuatro nodos que tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

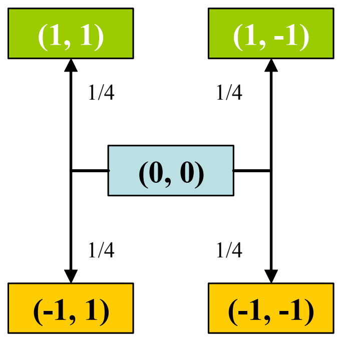
El caso se hace más complejo al transcurrir el segundo periodo



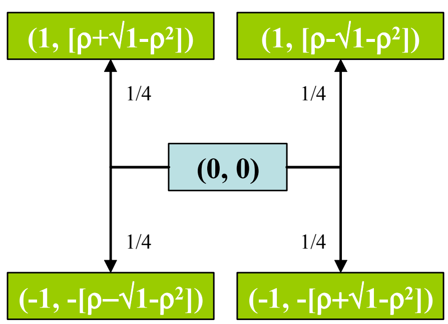
En este segundo movimiento se tuvieron un total de nueve nodos con igual probabilidad de ocurrencia (1/16).

Similar al método binomial para opciones europeas, después de n movimientos dados, se tendrán un total de $(n+1)^2$ nodos.

Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ los rendimientos de los activos S_1 y S_2, obtenidos con el primer movimiento. Ahora bien, si además de emplear los rendimientos de los activos se calcula el logaritmo natural de cada uno de ellos, queriendo replicar el comportamiento desde (0, 0) hasta (log x, log y), considerando medias **0**, desviaciones estándar **1** y un coeficiente de correlación ρ = **0**, el gráfico de los primeros movimientos se vería de la siguiente manera:



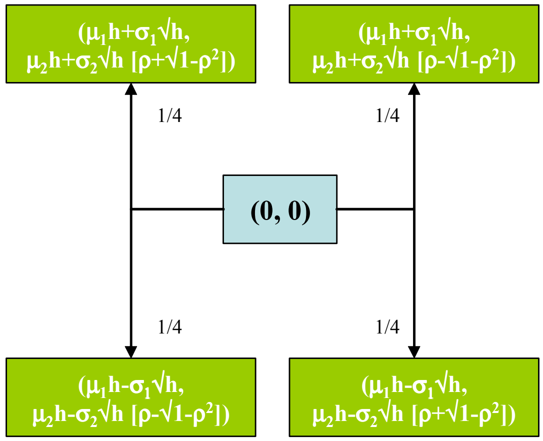
Sin embargo, dado que existe correlación entre ambos activos, el siguiente gráfico incluye el cálculo de rendimientos y logaritmos dado un coeficiente de correlación ρ.



Calculando la media, varianza y covarianza de log x y log y, vemos que se siguen conservando los parámetros anteriores.

Si ahora se consideran medias no nulas para ambos activos (μ_1, μ_2) y desviaciones estándar distintas a 1 (σ_1, σ_2) y definimos h como el tiempo transcurrido en cada movimiento (h = t/n).

Se puede ver como cambia el gráfico anterior:



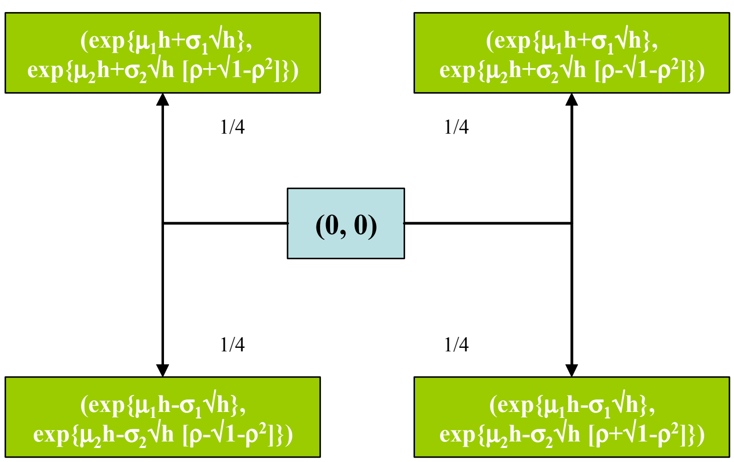
En este caso, calculando la media y la desviación estándar de log x y log y, notamos que:

$E [\log x] = \mu_1 h$ $\qquad$ $Var [\log x] = \sigma_1^2 h$

$E [\log y] = \mu_2 h$ $\qquad$ $Var [\log y] = \sigma_2^2 h$

Y la correlación entre ellos es igual a ρ.

Calculando la exponencial para cada logaritmo, tenemos que:



De esta forma $u = exp\ \{\mu_1 h+\sigma_1 \sqrt{h}\}$ y $d = exp\ \{\mu_1 h-\sigma_1 \sqrt{h}\}$ y:

$A = exp \{\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h} [\rho + \sqrt{1-\rho^2}]\}$

$B = exp \{\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h} [\rho - \sqrt{1-\rho^2}]\}$

$C = exp \{\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h} [\rho - \sqrt{1-\rho^2}]\}$

$D = exp \{\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h} [\rho + \sqrt{1-\rho^2}]\}$

Considerando ***r*** como la tasa de interés libre de riesgo. Suponiendo que los precios de los activos siguen una distribución lognormal, los parámetros μ_1 y μ_2 quedan definidos de la siguiente manera:

$$\mu_1 = r + (1/2)\sigma_1^2$$

$$\mu_2 = r + (1/2)\sigma_2^2$$

El proceso para calcular el valor de una *opción americana sobre el máximo de dos activos* es similar al método binomial de las opciones vanilla americanas, en el que en cada nodo se va evaluando la posibilidad de ejercer la opción o continuar con ella.

Por ejemplo, para el caso en que ***n*** es igual a 2, tenemos nueve nodos al final los cuales tendrán un valor de:

Los dos activos S_1 y S_2 tienen un incremento durante los dos periodos

$$C(u^2, A^2) = \max[\max(S_2 A^2, S_1 u^2) - k, 0]$$

El activo S_1 incrementa en ambos periodos, el activo S_2 incrementa en el primer periodo y en el segundo periodo disminuye

$$C(u^2, AB) = \max[\max(S_2 AB, S_1 u^2) - k, 0]$$

El activo S_1 incrementa en ambos periodos, mientras que S_2 disminuye

$$C(u^2, B^2) = \max[\max(S_2 B^2, S_1 u^2) - k, 0]$$

Los dos activos tienen un incremento en el primer periodo y en el segundo periodo disminuyen

$$C(ud, AC) = \max[\max(S_2 AC, S_1 ud) - k, 0]$$

En el primer periodo S_1 sube y S_2 baja, en el segundo periodo el activo S_1 baja y el activo S_2 sube (o viceversa)

$$C(ud, BC) \text{ ó } C(du, AD) = \max[\max(S_2 BC, S_1 ud) - k, 0]$$

En el primer periodo S_1 sube y S_2 baja, en el segundo periodo S_1 baja y S_2 baja nuevamente

$$C(ud, BD) = \max[\max(S_2 BD, S_1 ud) - k, 0]$$

En ambos periodos S_1 baja y S_2 sube

$$C(d^2, C^2) = \max[\max(S_2 C^2, S_1 d^2) - k, 0]$$

El activo S_1 sube en los dos periodos mientras que S_2 sube en el primer periodo y baja en el segundo

$$C(d^2, CD) = \max[\max(S_2 CD, S_1 d^2) - k, 0]$$

En ambos periodos, los dos activos muestran un decremento

$$C(d^2, D^2) = \max[\max(S_2 D^2, S_1 d^2) - k, 0]$$

Con base en el valor obtenido de cada nodo del segundo periodo se calcula el valor de los nodos obtenidos en el primer periodo:

Los nodos incluidos aquí son las combinaciones que resultan del aumento en los activos S_1 y S_2 durante el primer periodo.

$$C(u, A) = \max[\max(S_2 A, S_1 u) - k, \tfrac{1}{4}[C(u^2, A^2) + C(u^2, AB) + C(ud, AC) + C(ud, AD)]/r^h]$$

Las combinaciones correspondientes a este nodo son aquellos posibles casos en los que durante el primer periodo S_1 incrementa y S_2 disminuye

$$C(u, B) = \max[\max(S_2 B, S_1 u) - k, \tfrac{1}{4}[C(u^2, BA) + C(u^2, B^2) + C(ud, BC) + C(ud, BD)]/r^h]$$

En este caso se incluyen todas las posibles combinaciones que se dan luego de que el activo S_1 disminuye y el activo S_2 aumenta

$$C(d, C) = \max[\max(S_2 C, S_1 d) - k, \tfrac{1}{4}[C(du, CA) + C(du, CB) + C(d^2, C^2) + C(d^2, CD)]/r^h]$$

Los nodos que se agregan para este caso son todos los que resultan de la disminución de ambos activos durante el primer periodo

$$C(d, D) = \max[\max(S_2 D, S_1 d) - k, \tfrac{1}{4}[C(du, DA) + C(du, DB) + C(d^2, DC) + C(d^2, D^2)]/r^h]$$

Luego de comparar todos los posibles valores desde el último periodo hasta el inicio y determinar cuándo puede ejercerse la opción o no, el valor de la *opción americana sobre el máximo de dos activos* quedará definido de la siguiente manera:

$$C = \max\,[\max(S_2, S_1) - k,\ {}^{1}\!/_{4}\,[C(u,A) + C(u,B) + C(d,D) + C(d,D)]\,/\,r^h\,]$$

2.5 Simulación Montecarlo

La simulación Montecarlo es un método numérico mediante el cuál, a través de la generación de números aleatorios, se originan diversas trayectorias del subyacente, calculando así para cada trayectoria su pago final y, después de haber generado múltiples trayectorias, se calcula el promedio de todos los posibles pagos finales, posteriormente bajo la hipótesis neutralidad al riesgo ese promedio es traído a valor presente.

Para poder llevar a cabo esta simulación en la valuación de opciones sobre dos activos se hace uso de la descomposición de Cholesky para generar variables con un coeficiente de correlación determinado. Por lo que cada activo satisface las siguientes ecuaciones:

Para S1 $$S_1 + \Delta S_1 = S_1 \exp\left[\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\Delta t + \sigma_1 \alpha_{1,t}\sqrt{\Delta t}\right]$$

Para S2 $$S_2 + \Delta S_2 = S_2 \exp\left[\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\Delta t + \sigma_2 \alpha_{2,t}\sqrt{\Delta t}\right]$$

En donde $\alpha_{1,t} = \varepsilon_{1,t}$ y $\alpha_{2,t} = \rho\varepsilon_{1,t} + \varepsilon_{2,t}\sqrt{1-\rho^2}$

$\varepsilon_{n,t}$ son números aleatorios independientes cuya distribución corresponde a una normal estándar.

En este capítulo hemos descrito algunos modelos utilizados para la valuación de opciones europeas y americanas sobre el máximo o el mínimo de dos activos, en el siguiente capítulo se explicará la programación en Matlab de estas formulas y métodos creados para valuar este tipo de opciones.

3. Programación de métodos numéricos para la valuación de opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos

3.1 Método Montecarlo.

Dentro del código fuente del programa para valuar opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos mediante el método Montecarlo se definen variables de entrada a partir de las cuáles se generarán las trayectorias de los subyacentes y se calculará el valor de liquidación correspondiente a cada trayectoria. El programa que se realizó incluye las siguientes variables de entrada:

$\mathbf{S_1}$	Es el precio del activo 1 al tiempo t
$\mathbf{S_2}$	Es el precio del activo 2 al tiempo t
X	Es el precio de ejercicio de la opción
T	El tiempo de duración de la opción
Periodos	El número de periodos entre el inicio y término de la opción
Num_Tray	El número total de trayectorias que se generarán para el valor de cada activo
r	La tasa de interés anual libre de riesgo al tiempo t
sigma1	La desviación estándar de los rendimientos del activo 1
sigma2	La desviación estándar de los rendimientos del activo 2
rho	El coeficiente de correlación entre el activo 1 y el activo 2
callput	Establece el tipo de opción a valuar: call (1) ó put (-1)
maxmin	Establece el tipo de opción a valuar: máximo (1) ó mínimo (-1)
grafs	Número de trayectorias que aparecerán en la gráfica

Definidas estas variables se puede poner en práctica el programa realizado.

3.1.1 Ejemplos de valuación de opciones sobre el máximo o mínimo de dos activos.

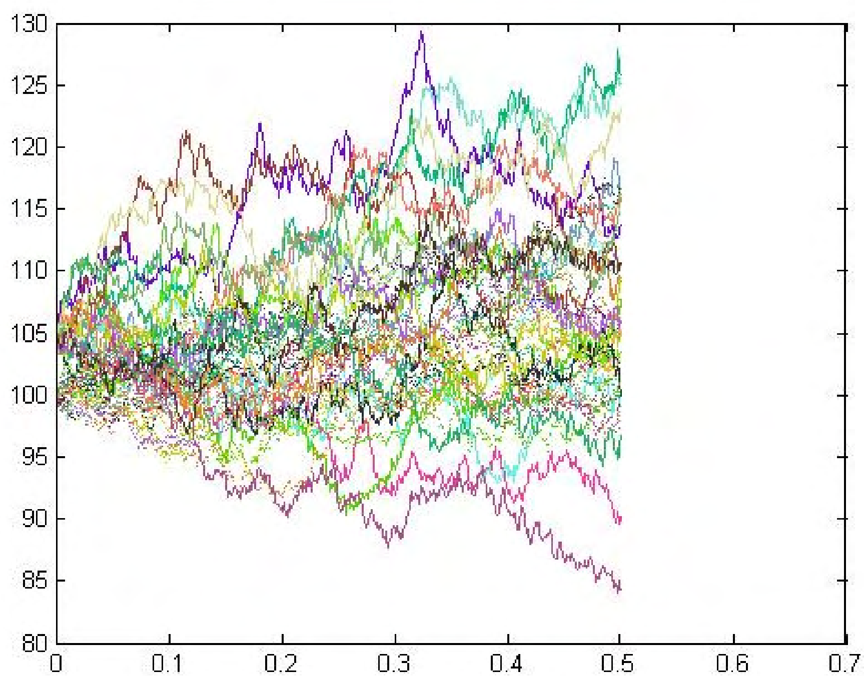
Se definen las variables de entrada como sigue:

S_1: 100	**S_2:** 105	
X: 98	**T:** 6 meses (0.5)	
Periodos: 500	**Num_Tray:** 1000	
r: 5%	**sigma1:** 11%	**sigma2:** 16%
rho: 0.63	**callput**: 1	
maxmin: -1	**grafs**: 20	

<u>Call sobre el mínimo</u>

Valor de la opción: **5.1033**

Gráfica de las trayectorias



- Aumentando el número de trayectorias a **5000**, el valor de la opción cambia a **4.7200**.
- Ahora si incrementamos el número de trayectorias a **10000**, el valor de la opción cambia a: **4.8573**.

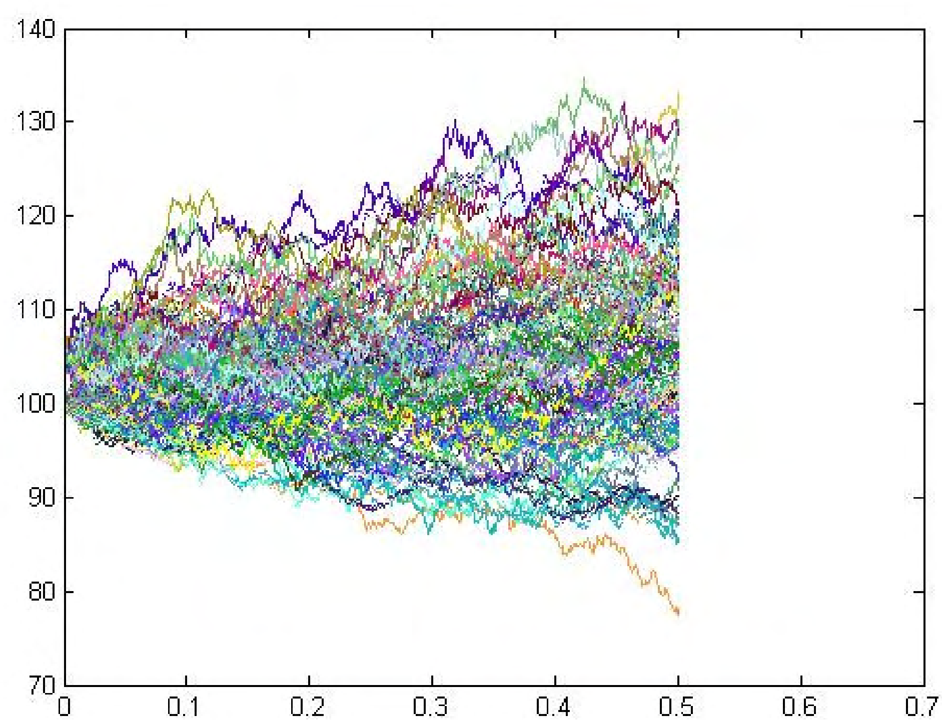
Este tipo de diferencias serán analizadas y comparadas con los valores obtenidos en los siguientes modelos.

<u>Call sobre el máximo</u>

Ahora **maxmin** será igual a **1**

Valor de la opción: **11.8246**

Gráfica de las trayectorias



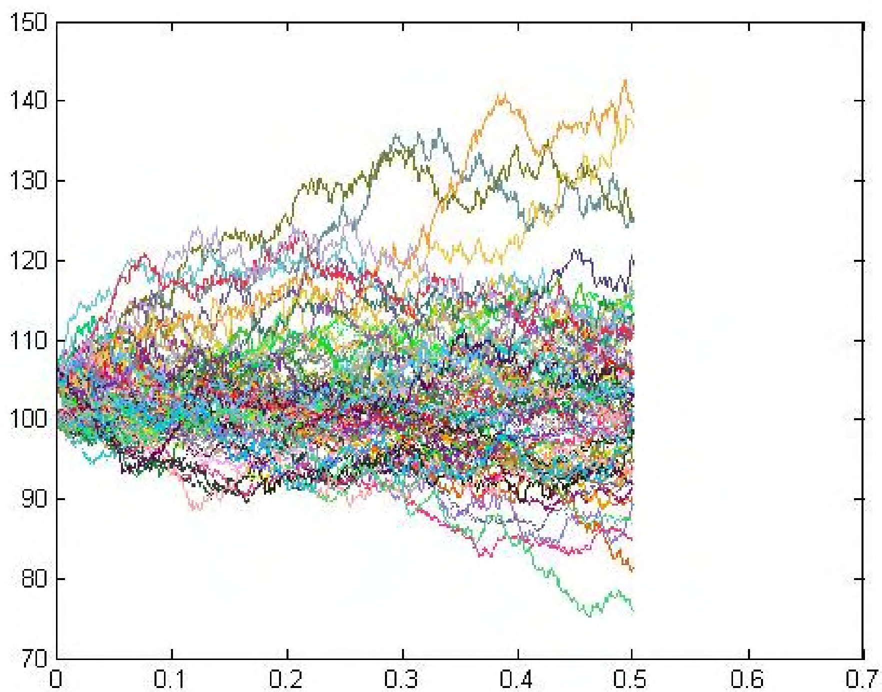
- Aumentando el número de trayectorias a **5000**, el valor de la opción cambia a **11.5566**.
- Ahora si incrementamos el número de trayectorias a **10000**, el valor de la opción cambia a: **11.6755**.

<u>Put sobre el mínimo</u>

Ahora **callput**: **-1** y **maxmin**: **-1**

Valor de la opción: **1.8280**

Gráfica de las trayectorias



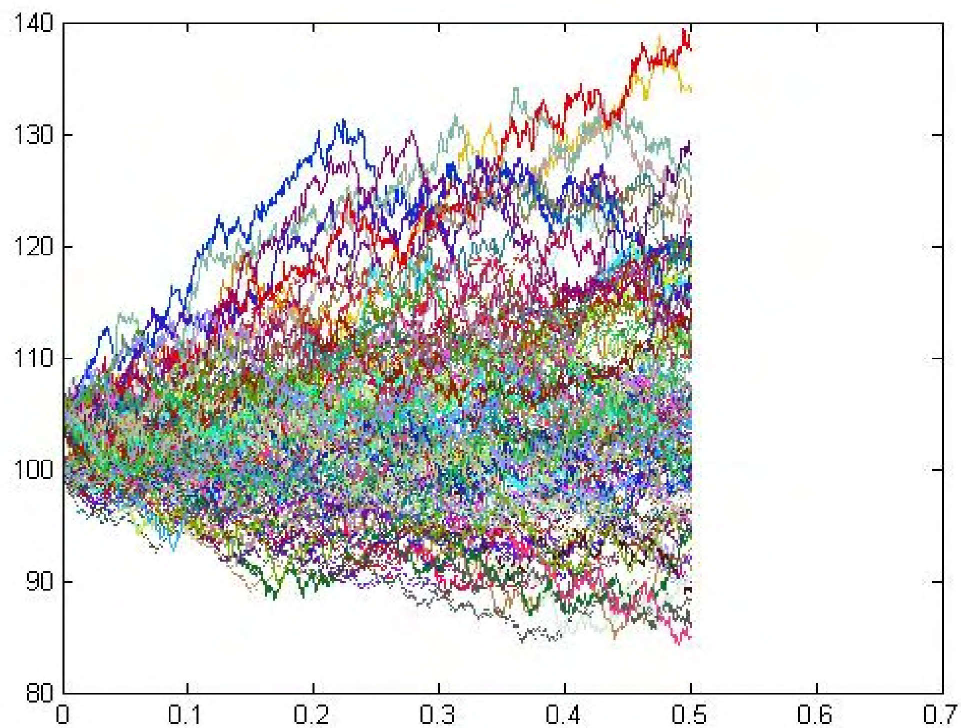
- Aumentando el número de trayectorias a **5000**, el valor de la opción cambia a **2.0629**.
- Ahora si incrementamos el número de trayectorias a **10000**, el valor de la opción cambia a: **2.0837**.

<u>Put sobre el máximo</u>

Ahora **maxmin**: **1**

Valor de la opción: **0.4337**

Gráfica de las trayectorias



- Aumentando el número de trayectorias a **5000**, el valor de la opción cambia a **0.5581**.
- Ahora si incrementamos el número de trayectorias a **10000**, el valor de la opción cambia a: **0.5835**.

3.2 Fórmulas de Stulz.

Se ha diseñado un programa para valuar opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos utilizando las fórmulas de Stulz. Para este caso se agregó un método de aproximación de una función de distribución normal bivariada (Ver Anexo).

Las variables de entrada para calcular el valor de una opción sobre el máximo o el mínimo de dos activos mediante las fórmulas de Stulz son:

S_1	Es el precio del activo 1 al tiempo t
S_2	Es el precio del activo 2 al tiempo t
X	Es el precio de ejercicio de la opción
T	El tiempo de duración de la opción
r	La tasa de interés anual libre de riesgo al tiempo t
sigma1	La desviación estándar de los rendimientos del activo 1
sigma2	La desviación estándar de los rendimientos del activo 2
rhoS1S2	El coeficiente de correlación entre el activo 1 y el activo 2
posición	Establece el tipo de opción a valuar, en donde: *posición=0* *Corresponde a una opción call sobre el mínimo* *posición =callmax* *Corresponde a una opción call sobre el máximo* *posición =putmin* *Corresponde a una opción put sobre el mínimo* *posición =putmax* *Corresponde a una opción put sobre el máximo*

3.2.1 Ejemplos de valuación de opciones sobre el máximo o mínimo de dos activos.

Para fines comparativos se manejarán los mismos valores de S_1, S_2, X, T, r, rho, sigma1 y sigma2 utilizados en la valuación de estas opciones mediante el método Montecarlo.

Call sobre el mínimo

El valor de la opción es: **4.6741**

Call sobre el máximo

El valor de la opción es: **11.7759**

Put sobre el mínimo

El valor de la opción es: **1.8940**

Put sobre el máximo

El valor de la opción es: **0.7167**

3.3 Método binomial tridimensional para opciones americanas y europeas.

Hasta el momento, los métodos mencionados en este capítulo se han enfocado en la valuación de opciones de tipo europeas sobre el máximo o el mínimo de dos activos. En esta sección se ha programado también el método binomial tridimensional diseñado por Mark Rubinstein para valuar opciones de tipo americanas y europeas sobre el máximo o el mínimo de dos activos.

Dentro del segundo capítulo se hizo mención del método para valuar opciones tipo europeas sobre el máximo o el mínimo de dos activos y en un apartado distinto se explicó el método para valuar las opciones tipo americanas, llamado "pirámides binomiales".

El programa que se ha diseñado incluye los dos tipos de opciones (americanas y europeas) y dentro de las variables de entrada se define la variable ***ameur***. Esta variable servirá para determinar el tipo de opción que se desea valuar, ya sea Americana o Europea.

Entonces las variables de entrada para este método son:

$\mathbf{S_1}$	Es el precio del activo 1 al tiempo t
$\mathbf{S_2}$	Es el precio del activo 2 al tiempo t
X	Es el precio de ejercicio de la opción

T	El tiempo de duración de la opción
n	El número de periodos entre el inicio y término de la opción
r	La tasa de interés anual libre de riesgo al tiempo t
sigma1	La desviación estándar de los rendimientos del activo 1
sigma2	La desviación estándar de los rendimientos del activo 2
rho	El coeficiente de correlación entre el activo 1 y el activo 2
ameur	El tipo de opción a valuar, en donde: *ameur = 0 Corresponde a una opción europea* *ameur = 1 Corresponde a una opción americana*
tipo	El tipo de opción a valuar, en donde: *tipo = 1 Corresponde a una opción call sobre el mínimo* *tipo = 2 Corresponde a una opción call sobre el máximo* *tipo = 3 Corresponde a una opción put sobre el mínimo* *tipo = 4 Corresponde a una opción put sobre el máximo*

3.3.1 Ejemplos de valuación de opciones sobre el máximo o mínimo de dos activos.

Al igual que en la sección pasada, se hará uso de los mismos valores de S_1, S_2, X, T, r, rho, sigma1 y sigma2 utilizados en la valuación de estas opciones mediante el método Montecarlo.

El número de periodos que consideraremos inicialmente será de **5** y esos valores los compararemos con un número mayor de periodos: **8**

<u>**Call Europea sobre el mínimo**</u>

Periodos	5	8
Valor de la opción	**5.1038**	**4.8567**

Call Americana sobre el mínimo

Periodos	5	8
Valor de la opción	**4.9753**	**4.9776**

Call Europea sobre el máximo

Periodos	5	8
Valor de la opción	**12.0689**	**11.6470**

Call Americana sobre el máximo

Periodos	5	8
Valor de la opción	**11.5635**	**11.7080**

Put Europea sobre el mínimo

Periodos	5	8
Valor de la opción	**1.6854**	**1.5966**

Put Americana sobre el mínimo

Periodos	5	8
Valor de la opción	**2.0723**	**2.1787**

Put Europea sobre el máximo

Periodos	5	8
Valor de la opción	**0.4594**	**0.4320**

<u>Put Americana sobre el máximo</u>

Periodos	5	8
Valor de la opción	**0.6924**	**0.6919**

3.4 Comparación de modelos.

Luego de haber presentado los diferentes métodos para valuar opciones sobre el máximo o mínimo de dos activos, dentro de esta sección se hará una breve comparación entre cada uno de estos modelos, de acuerdo al valor obtenido en cada una de las opciones.

La siguiente tabla muestra los valores obtenidos para cada tipo de opción en cada uno de los modelos.

Modelo	Call mínimo	Call máximo	Put mínimo	Put máximo
Montecarlo Tray: 1000	5.1033	11.8246	1.8280	0.4337
Montecarlo Tray: 5000	4.7200	11.5566	2.0629	0.5581
Montecarlo Tray: 10000	4.8573	11.6755	2.0837	0.5835
Fórmulas de Stulz	4.6741	11.7759	1.8940	0.7167
Binomial Europea n = 5	5.1038	12.0689	1.6854	0.4594
Binomial Europea n = 8	4.8567	11.6470	1.5966	0.4320

Utilizando las fórmulas de Stulz, al ser un método cuyo resultado no depende de la variación de ninguna variable, sólo se obtiene un único valor para cada tipo de opción, en el caso del método Montecarlo, éste depende del número de trayectorias que se generen para cada subyacente, así como del número de periodos en que se divida el tiempo de duración de la opción. Mientras tanto, el método binomial depende a su vez del número de periodos del árbol que se generen.

En este caso observamos que cuando se varían estos componentes se obtienen ciertas diferencias en los precios. Por ejemplo para el caso de la valuación de un call mínimo mediante el método Montecarlo, cuando se aumenta el número de trayectorias de 1000 a 5000 el precio de la opción disminuye, no obstante cuando las trayectorias aumentan a 10000 el valor se incrementa de nuevo.

Es importante mencionar que dado que el método Montecarlo proporciona soluciones aproximadas se pueden obtener diferentes precios para una misma opción aún manteniendo fijos los valores de cada uno de sus componentes.

De igual forma cuando se calcula el valor de la opción call sobre el mínimo mediante el método binomial, mientras más se incrementa el número de periodos, el valor de la opción disminuye.

Estos procedimientos son razonables si se observa que el valor de la opción call mínimo calculado por medio de las fórmulas de Stulz es menor que cualquiera de los precios obtenidos mediante los otros dos métodos.

A continuación se muestra un cuadro comparativo en donde tomamos como diferencia el **error cuadrático**, es decir, con base en la paridad max-min expuesta en el capítulo 1, vamos a obtener el valor de las opciones vanilla call y put mediante Black and Scholes en ambos activos y comparamos la suma de estas opciones con la suma de las opciones (call y put) sobre el máximo y el mínimo obtenida en cada modelo:

$$\varepsilon = (Paridad_{call} - (Call(Put)_{\min}\,\text{modelo}_n + Call(Put)_{\max}\,\text{modelo}_n))^2$$

Tipo	**Suma**
Call	16.4499
Put	2.6104

Modelo	**Suma Call**	**Error**	**Suma Put**	Error
Montecarlo Tray: 1000	16.9279	0.2285	2.2617	0.1218
Montecarlo Tray: 5000	16.2766	0.0300	2.6210	0.0001
Montecarlo Tray: 10000	16.5328	0.0069	2.6672	0.0032
Fórmulas de Stulz	16.4500	0.0000	2.6107	0.0000
Binomial Europea n = 5	17.1727	0.5224	2.1448	0.2171
Binomial Europea n = 8	16.5037	0.0029	2.0286	0.3388

Notemos que para el caso de las opciones call, el método Montecarlo y Binomial van disminuyendo su error cuadrático. Las fórmulas de Stulz, debido a que están calculadas con base en esta paridad no muestran diferencia, es decir, su error cuadrático es cero.

Para el caso de las opciones put, el método Montecarlo disminuye su valor cuando el número de trayectorias aumenta de 1000 a 5000, sin embargo el error vuelve a incrementarse cuando se incrementan a 10000 trayectorias. De igual forma, el error cuadrático del valor de las opciones mediante el método binomial se incrementa mientras se aumenta el número de periodos.

Es importante mencionar que el método binomial tiene una mejor aproximación cuando el número de trayectorias tiende a infinito, aun cuando no se pueda apreciar en estos dos casos.

Para poder tener mejores elementos de comparación entre cada uno de los modelos, se elaborará una tabla similar a la anterior pero modificando los valores de los activos, la tasa libre de riesgo, las desviaciones estándar, el coeficiente de correlación, etc.

Consideremos ahora una opción para dos activos cuyos valores son: **S_1: 40**, **S_2: 35**, la desviación estándar para cada uno de ellos es: **sigma1: 9%**, **sigma2: 12%**, con una correlación de **0.54**, el precio de ejercicio de la opción es **X: 39**, la tasa libre de riesgo es de **7%** y el tiempo que dura la opción es de **8 meses**.

Modelo	Call mínimo	Call máximo	Put mínimo	Put máximo
Montecarlo Tray: 1000	0.5411	3.0340	2.9520	0.2110
Montecarlo Tray: 5000	0.5223	3.0339	2.7559	0.2325
Montecarlo Tray: 10000	0.4923	3.1090	2.8110	0.2259
Fórmulas de Stulz	0.4442	3.1487	2.7451	0.2915
Binomial Europea n = 5	0.5595	2.9978	2.3459	0.1998
Binomial Europea n = 8	0.5174	2.7891	2.1866	0.1767

En el caso de esta opción, se observa que aunque los precios de cada tipo muestren ciertas diferencias de acuerdo al método utilizado, éstas no son tan grandes como para descartar alguno de los modelos.

El método Binomial tiene la ventaja de que permite valuar opciones tanto europeas como americanas, característica que no tienen los métodos Montecarlo y Fórmulas de Stulz.

A su vez dentro del método Montecarlo se puede incluir no solo una distribución normal sino alguna otra distribución que permita aproximarnos mucho mejor al modelo de los procesos de los activos.

Habiendo definido las características de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos y sus diferentes métodos de valuación en los dos primeros capítulos de este trabajo, dentro de este capítulo se han valuado opciones call y put, americanas y europeas sobre el máximo y mínimo de dos activos mediante la programación en Matlab de tres diferentes métodos numéricos, con base en los precios obtenidos se ha podido hacer una breve comparación entre cada uno de ellos.

Conclusiones

Dentro de este trabajo se presentaron las principales características de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos así como diferentes métodos numéricos y fórmulas analíticas utilizadas para su valuación.

Para finalizar este estudio, a continuación se hace una breve recapitulación de los temas de esta tesis y se exponen las diversas conclusiones que se obtuvieron durante la realización de este trabajo:

Los instrumentos derivados han revolucionado los mercados financieros pero sobre todo se han vuelto una necesidad para fortalecer el sistema financiero de cualquier país. Entre sus principales funciones se encuentra la diversificación de inversiones y la cobertura de riesgos que presentan las fluctuaciones de los precios en un mercado financiero.

Las opciones tradicionales son instrumentos que proporcionan tanto a las empresas como a los inversionistas la cobertura de riesgos, sin embargo la propia evolución de estos mercados ha ido impulsando la creación otro tipo de opciones que se adapten mucho más a las necesidades y expectativas de los inversionistas, es por ello que surgen las opciones exóticas.

Más allá de que las opciones exóticas se adecuan a los requerimientos de los inversionistas, existen las opciones rainbow, una tipología de las opciones exóticas. Estos instrumentos involucran no solo un activo financiero, sino a dos y algunos otros hasta mas de dos activos, incrementando así las posibilidades de elección del inversionista.

Dentro del capítulo uno de este trabajo se demostró que adquirir una opción sobre el máximo o el mínimo de dos activos es mejor, tanto en costo económico y ganancias como en oportunidad, que adquirir dos opciones tradicionales sobre cada uno de los activos.

Así mismo, la creación de portafolios que repliquen el pago de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos facilita la valuación de las mismas y permite la comparación entre estas opciones y las tradicionales.

La valuación de las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos permitió conocer otro tipo de opciones exóticas, por ejemplo, para determinar el precio de una opción put sobre el mínimo se utilizó un call sobre el mínimo de dos activos con precio de ejercicio cero cuya valuación depende de una opción *exchange*, un tipo de opción rainbow que cambia una unidad del activo 1 por una unidad del activo 2 y cuyo valor de liquidación esta determinado por la diferencia de los precios de los activos.

Las *Fórmulas de Stulz* son un método analítico de valuación, similar al de *Black and Scholes* para un solo activo, que se basa en la construcción de un portafolio que invierte cierta cantidad del activo 1, cierta cantidad del activo 2 y el resto a una tasa libre de riesgo, para llegar a una ecuación diferencial se hace uso del Lema de Ito en dos dimensiones y su solución se basa en la hipótesis de neutralidad al riesgo.

A pesar de que los *Rendimientos Relativos*, presentados en el capitulo dos, no constituyen un método numérico de valuación, se pueden utilizar para minimizar las diferencias de los precios de los dos activos cuando al comienzo de la opción estos se encuentren muy lejanos, ya que dentro de este método no se comparan los precios de los activos sino sus rendimientos.

El método binomial para valuar las opciones sobre el máximo o el mínimo de dos activos contempla que estos dos activos deben de estar correlacionados, de esta manera, los posibles valores que puede tomar el activo 2 dependerán de los valores que tome el activo 1. También dentro de este modelo se asume una distribución *lognormal* en los precios de los activos.

En el método Montecarlo, además de que los precios de los activos siguen un patrón de movimiento browniano, donde la evolución del precio esta determinada por un factor tendencial y un factor aleatorio, se hace uso de la *descomposición de Cholesky* para hacer que los dos activos estén correlacionados.

Al comparar los tres modelos programados, se puede observar que los métodos numéricos Montecarlo y Binomial dependen del número de periodos o del número de trayectorias que se generen (Montecarlo).

El método Montecarlo proporciona una buena aproximación sin embargo debido a que el error tiende a ser cada vez menor ($1/\sqrt{n}$, donde n es el número de trayectorias) cuando se aumenta el número de trayectorias, para hacerlo mas eficiente se requerirá entonces generar el mayor número de trayectorias posibles.

El método binomial permite obtener el valor de la opción con base en los posibles pagos al término de su duración, en este caso los posibles pagos son mayores que los de una opción tradicional ya que se involucra a dos activos. Si el número de periodos de un árbol binomial tiende a infinito se puede llegar a las fórmulas de Black and Scholes.

Dentro de este trabajo se presentaron las fórmulas de Stulz, las cuales son la aplicación de las fórmulas de Black and Scholes para dos activos y se mostró que si se incrementan el número de trayectorias dentro del método Montecarlo y el número de periodos en el árbol binomial, se puede llegar a obtener el valor de la opción muy cercano al obtenido en las fórmulas de Stulz.

El método Binomial tiene la ventaja de que permite valuar opciones tanto europeas como americanas, característica que no tienen los métodos Montecarlo y Fórmulas de Stulz.

A su vez dentro del método Montecarlo se puede incluir no solo una distribución normal sino alguna otra distribución que permita aproximarnos mucho mejor al modelo de los procesos de los activos.

ANEXOS

Simulación normal bivariada

El método de aproximación utilizado para la distribución normal bivariada, es el procedimiento que fue diseñado por Z Drezner en 1978. La primera fórmula empleada para calcular la probabilidad acumulada de una distribución normal bivariada para α, β, ρ se describe a continuación:

$$\Phi(\alpha,\beta,\rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_i x_j f(y_i, y_j)$$

En donde

$$f(y_i, y_j) = \exp\left[\alpha_1(2y_i - \alpha_1) + \beta_1(2y_j - \beta_1) + 2\rho(y_i - \alpha_1)(y_j - \beta_1)\right]$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \qquad \beta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$$

Y los valores de x_i y y_i están dados de la siguiente manera:

$x_1 = 0.24840615$	$y_1 = 0.10024215$
$x_2 = 0.39233107$	$y_2 = 0.48281397$
$x_3 = 0.21141819$	$y_3 = 1.0609498$
$x_4 = 0.033246660$	$y_4 = 1.7797294$
$x_5 = 0.00082485334$	$y_5 = 2.6697604$

La función de distribución dependerá de los valores α, β, ρ. Si el producto entre ellos es negativo, se aplicarán las siguientes reglas:

Cuando $\alpha \leq 0, \beta \leq 0, \rho \leq 0$ entonces: $N(\alpha, \beta, \rho) = \phi(\alpha, \beta, \rho)$

Cuando $\alpha \leq 0, \beta \geq 0, \rho \geq 0$ entonces: $N(\alpha, \beta, \rho) = N(\alpha) - \phi(\alpha, -\beta, -\rho)$

Cuando $\alpha \geq 0, \beta \leq 0, \rho \geq 0$ entonces: $N(\alpha, \beta, \rho) = N(\beta) - \phi(-\alpha, \beta, -\rho)$

Cuando $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \rho \leq 0$ entonces: $N(\alpha, \beta, \rho) = N(\alpha) + N(\beta) - 1 + \phi(-\alpha, \beta, -\rho)$

Cuando el producto de α, β, ρ es positivo, la función de la distribución normal bivariada es expresada de la siguiente manera:

$$N(\alpha, \beta, \rho) = N(\alpha, 0, \rho_1) + N(\beta, 0, \rho_2) - \delta$$

Para calcular los valores de $N(\alpha, 0, \rho_1)$ y $N(\beta, 0, \rho_2)$ se aplican cualquiera de las cuatro reglas mencionadas anteriormente, mientras que ρ_1 y ρ_2 quedan definidas de la siguiente manera:

$$\rho_1 = \frac{(\rho\alpha - \beta)Sign(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - 2\rho\alpha\beta + \beta^2}} \qquad \rho_2 = \frac{(\rho\beta - \alpha)Sign(\beta)}{\sqrt{\alpha^2 - 2\rho\alpha\beta + \beta^2}}$$

Y $$\delta = \frac{1 - Sign(\alpha)Sign(\beta)}{4} \qquad Sign(x) = \begin{cases} +1 & cuando\ x \geq 0 \\ -1 & cuando\ x \leq 0 \end{cases}$$

Código fuente de los programas

Método Montecarlo para opciones europeas, incluye gráficas

```
function
m=montecarlo_rainbow(S1,S2,X,T,periodos,num_tray,r,q,sigma1,sigma2,rho,ca
llput,maxmin,grafs)
    precio=0;
    for j=1:num_tray
        s1=S1;
        s2=S2;
        color=rand(3,1);
        for i=2:periodos+1
            normal1=normrnd(0,1);
            normal2=rho*normal1+normrnd(0,1)*sqrt(1-rho^2);
            temp1=s1;

  s1=s1*(r-q)*(T/periodos)+(sigma1*sqrt(T/periodos))*s1*normal1+s1;
            temp2=s2;

  s2=s2*(r-q)*(T/periodos)+(sigma2*sqrt(T/periodos))*s2*normal2+s2;
            if grafs>=j
                plot([(i-1)*T/periodos i*T/periodos],[temp1
s1],':','color',color)
                hold on
                plot([(i-1)*T/periodos i*T/periodos],[temp2
s2],'color',color)
            end
        end
        precio=precio+max( (maxomin(s1,s2,maxmin)-X)*callput,0 );
    end
    m=exp(-r*T)*(precio/num_tray);
end

function m=maxomin(S1,S2,maxmin)
    if maxmin==1
        m=max(S1,S2);
    else
        m=min(S1,S2);
    end
end
```

Fórmulas de Stulz, incluye normal bivariada para el cálculo de probabilidad

```
function rain=rainbowdrezner(S1,S2,K,T,r,sigma1,sigma2,rhoS1S2,posicion)
     y1=(log(S1/K)+(sigma1*sigma1/2)*(T))/(sigma1*sqrt(T));
     y2=(log(S2/K)+(sigma2*sigma2/2)*(T))/(sigma2*sqrt(T));
     sigma=sqrt(sigma1*sigma1+sigma2*sigma2-2*rhoS1S2*sigma1*sigma2);
     rho1=(sigma1-rhoS1S2*sigma2)/sigma;
     rho2=(sigma2-rhoS1S2*sigma1)/sigma;
     d=(log(S1/S2)+(sigma*sigma/2)*T)/(sigma*sqrt(T));

    %call mínimo
    rain=S2*M( y2 , d-sigma*sqrt(T), -rho2 ) + S1*M( y1 , -d , -rho1 ) -
K*exp(-r*T)*M( y1-sigma1*sqrt(T) , y2-sigma2*sqrt(T) , rhoS1S2 );

    %call máximo
    if strcmp(posicion, 'callmax')

rain=vainilla1(S1,K,T,r,sigma1,'call')+vainilla1(S2,K,T,r,sigma2,'call')-
rainbowdrezner(S1,S2,K,T,r,sigma1,sigma2,rhoS1S2,'callmin');
    end

    %put mínimo
    if strcmp(posicion,'putmin')
        rain=K*exp(-
r*T)+rainbowdrezner(S1,S2,K,T,r,sigma1,sigma2,rhoS1S2,'callmin')-S1*(1-
normcdf(d))-S2*normcdf( d-(sigma*sqrt(T)) );
    end

    %put max
    if strcmp(posicion,'putmax')

rain=vainilla1(S1,K,T,r,sigma1,'put')+vainilla1(S2,K,T,r,sigma2,'put')-
rainbowdrezner(S1,S2,K,T,r,sigma1,sigma2,rhoS1S2,'putmin');
    end
end


function result=fy(i,j,a,b,rho)
    y=1:5;
    y(1)=.10024215;
    y(2)=.48281397;
    y(3)=1.0609498;
    y(4)=1.7797294;
    y(5)=2.6697604;
    a1=a/sqrt(2*(1-rho^2));
    b1=b/sqrt(2*(1-rho^2));


  result=exp(a1*(2*y(i)-a1)+b1*(2*y(j)-b1)+2*rho*(y(i)-a1)*(y(j)-b1));
end

function t=theta(a,b,rho)
    x=1:5;
```

```
    x(1)=.24840615;
    x(2)=.39233107;
    x(3)=.21141819;
    x(4)=.03324666;
    x(5)=.00082485334;

    suma=0;
    for i=1:5
        for j=1:5
            suma=suma+x(i)*x(j)*fy(i,j,a,b,rho);
        end
    end

    t=(sqrt(1-rho^2)/pi)*suma;
end

function MR=M(a,b,rho)

    rho1=(rho*a-b)*sign(a)/sqrt(a*a-2*rho*a*b+b*b);
    rho2=(rho*b-a)*sign(b)/sqrt(a*a-2*rho*a*b+b*b);
    delta=(1-sign(a)*sign(b))/4;

    if a<=0 && b<=0 && rho<=0
        MR=theta(a,b,rho);
    elseif a<=0 && b>=0 && rho>=0
        MR=normcdf(a)- theta(a,-b,-rho);
    elseif a>=0 && b<=0 && rho>=0
        MR=normcdf(b)- theta(-a,b,-rho);
    elseif a>=0 && b>=0 && rho<=0
        MR=normcdf(a)+normcdf(b)-1+theta(-a,-b,rho);
    elseif a*b*rho>0
        MR=M(a,0,rho1)+M(b,0,rho2)-delta;
    else
        display('caso desconocido')
    end

end

function vain1=vainilla1(S1,K,T,r,sigma,posicion)

     d1=(log(S1/K)+((r+(sigma*sigma/2))*T))/(sigma*sqrt(T));
     d2=d1-sigma*sqrt(T);

    %call
    vain1=S1*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);

   %put
    if strcmp(posicion,'put')
        vain1=K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S1*normcdf(-d1);
    end

end
```

Binomial tridimensional para americanas y europeas

```
function bin=binomial_rainbow(S1,S2,X,T,n,r,p,sigma1,sigma2,ameur,tipo)
    dt=T/n;
    mu1=r+sigma1*sigma1/2;
    mu2=r+sigma2*sigma2/2;
    u=exp(mu1*dt+sigma1*sqrt(dt));
    d=exp(mu1*dt-sigma1*sqrt(dt));
    A=exp(mu2*dt+sigma2*sqrt(dt)*(p+sqrt(1-p*p)));
    B=exp(mu2*dt+sigma2*sqrt(dt)*(p-sqrt(1-p*p)));
    C=exp(mu2*dt-sigma2*sqrt(dt)*(p-sqrt(1-p*p)));
    D=exp(mu2*dt-sigma2*sqrt(dt)*(p+sqrt(1-p*p)));

    bin=payoff(tipo,S1,S2,X);
    if n>0
       valor=(exp(-r*T))*(1/4)*(binomial_rainbow(S1*u,S2*A,X,T-dt,n-
1,r,p,sigma1,sigma2,ameur,tipo)+ binomial_rainbow(S1*u,S2*B,X,T-dt,n-
1,r,p,sigma1,sigma2,ameur,tipo)+ binomial_rainbow(S1*d,S2*C,X,T-dt,n-
1,r,p,sigma1,sigma2,ameur,tipo)+ binomial_rainbow(S1*d,S2*D,X,T-dt,n-
1,r,p,sigma1,sigma2,ameur,tipo));
        bin=max(bin*ameur,valor);
    end
end

function poff=payoff(tipo,S1,S2,X)
    if tipo==1
        poff=max(0,min(S1,S2)-X);
    elseif tipo==2
        poff=max(0,max(S1,S2)-X);
    elseif tipo==3
        poff=max(0,-1*min(S1,S2)-(-1)*X);
    elseif tipo==4
        poff=max(0,-1*max(S1,S2)-(-1)*X);
    end
end
```

Black and Scholes para opciones vanilla

```
function vain1=vainilla1(S1,K,T,r,sigma,posicion)
     d1=(log(S1/K)+((r+(sigma*sigma/2))*T))/(sigma*sqrt(T));
     d2=d1-sigma*sqrt(T);

    %call
    vain1=S1*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);

   %put
    if strcmp(posicion,'put')
        vain1=K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S1*normcdf(-d1);
    end

end
```

Bibliografía

1. Baxter, Martin and Rennie Andrew, **Financial Calculus: An introduction to derivative pricing**, Cambridge University Press, Cambridge U.K, 1996.

2. Black, F. and M. Scholes, **The pricing of options and corporate liabilities**, Journal of Political Economy 81, 1973.

3. Boyle, P. P. and Y. K. Tse., **An Algorithm for Computing Values of Options on the Maximum or Minimum of Several Assets**, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 25, No. 2, 1990.

4. Broadie, M. and J. Detemple, **The Valuation of American Options on Multiple Assets**, Mathematical Finance 7, 1997.

5. Chance, D.M., **Min-Max Option Pricing**, Teaching note 98-06, E.J. Ourso College of Business, 2003.

6. Cox, J., Ross, S., and Rubinstein M., **Option Pricing: A Simplified Approach**, Journal of Financial Economics 7, 1979.

7. Fernández Pablo, Ariño Miguel Ángel, **Derivados Exóticos**, Documento de Investigación No. 308, IESE Universidad de Navarra, Marzo 1996.

8. Haug, Espen Gaardner, **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**, The Mac-Graw Hill Companies, USA, 2007.

9. Hull, J. C., **Options, futures and other Derivatives**, Third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, Toronto, 1997.

10. Johnson, Herb, Options on the Maximum or the Minimum of Several Risky Assets, Journal of Financial and Quantitative Analysis 22, 1987.

11. Margrabe, W., **The value of an option to exchange one asset for another**, Journal of Finance 33, 1978.

12. Nelken, Israel, **The Handbook of exotic options, Instruments, Analysis and Applications**, Mac Graw Hill Professional, Chicago USA, 1996.

13. Rubinstein, M., **Somewhere Over the Rainbow**, Risk 4, No. 10, 1991.

14. Stulz M, René, **Options on the minimum or the maximum of two risky assets**, University of Rochester, NY 14627, USA, 1982.

15. Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne, **The mathematics of financial derivatives**, Cambridge University Press, Cambridge U.K, 1995.

Bibliografía Electrónica

1. http://www.fintools.com/doc/exotics/exoticsAbout_Rainbow_Options.html

2. http://www.global-derivatives.com/options/rainbow-options.php#Intro

3. http://mathworld.wolfram.com/BivariateNormalDistribution.html

4. http://www.mexder.com.mx/MEX/Antecedentes.html

5. http://www.riskglossary.com/link/rainbow_option.htm