Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN Y ω-MODELOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

MAURICIO SALINAS RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO

2008

Agradecimientos

Este trabajo es un reflejo de mi trayectoria académica y lo dedico en primera instancia a una estrella que está allá en el cielo y que la veo en una lágrima... mi madre Virginia Rodríguez Contreras. A mi padre Arturo Salinas Ramírez, a mis hermanos: Angélica, Patricia y Arturo. Una conexión de aliento y apoyo a mi muy querida tía Ana Rodríguez Contreras. A mis amigos de toda la vida Linda Huerta y Efrén Rangel Vargas. Al Dr. Hilarión Ortiz que me ha curado desde pequeño. A mis amigos del camino rojo: Kamaxtli Matlalcueyetl. A todos los maestros que me han compartido su visión de vida. A Ricardo Ríos Pérez, quien me enseño a escribir en LaTeX, acelerando así el proceso de edición del trabajo. A los integrantes del seminario de titulación: Manuel Zorrilla, Manuel Lara, Luis Jesús Turcio y Osvaldo Guzmán. Un especial agradecimiento a mi director de tesis Dr. José Alfredo Amor Montaño, pues el me ha dado, en los últimos dos años, las bases que poseo en Lógica, su paciencia y dedicación contagiable han hecho posible la realización de este trabajo.

Y en general, gracias a todos los corazones que se han cruzado en mi camino, al cosmos en el que estoy contenido, a la tierra que me alimenta, al aire que respiro, al agua que calma mi sed, al fuego que está en mi interior.

IPAN NOMACEHUAYOTL
ONTLATZ IN
NONAHUALTZIN

(POR MI RAZA
HABLARÁ
EL ESPÍRITU)

Índice general

Agradecimientos V

Introducción VII

1. Conocimientos preliminares **1**

1.1. Lógica de primer orden 1

1.1.1. Fórmulas 2

1.1.2. Verdad y modelos para la lógica de primer orden 3

2. Lenguajes de segundo orden. **7**

2.1. Verdad y modelos para la lógica de segundo orden 7

2.2. Cardinales caracterizables en segundo orden. 15

2.2.1. Numerabilidad 16

2.3. Aritmetización del lenguaje de segundo orden. 20

2.4. Deducibilidad. 24

3. Lógica multivariada **27**

3.1. Verdad y modelos para la lógica multivariada 28

3.1.1. Satisfacción para la lógica multivariada 29

3.2. Reducción a la lógica monovariada 30

4. Estructuras generales **35**

4.1. El lenguaje multivariado 35

4.2. Estructuras generales para lenguajes de segundo orden. 38

5. Modelos del análisis **43**

Recapitulación. **49**

Biliografía **51**

Introducción

En lógica como en matemáticas, el lenguaje es parte fundamental. Con símbolos que siguen cierta "*sintaxis*" formamos *expresiones*, mismas que pueden simplemente nombrar objetos o bien afirmar que un objeto *tiene* una propiedad, a estas últimas las llamamos fórmulas. Mediante el uso de *símbolos* que conectan fórmulas $(\neg, \rightarrow)$ y un *símbolo cuantificador* $(\forall)$ *construimos* a partir de *fórmulas* sencillas (o atómicas), expresiones más complejas a las cuáles también llamamos *fórmulas*. De manera muy informal, una *estructura* es "un mundo posible $\mathfrak{A}$ respecto a un *lenguaje* $\mathscr{L}$" en el que adquieren sentido todas las expresiones donde intervienen los símbolos del lenguaje dado, y donde podemos preguntarnos por la verdad o falsedad de fórmulas expresables *ahí*. Cuando un "mundo $\mathfrak{A}$ con lenguaje $\mathscr{L}$" *hace posible* que una fórmula φ expresada en el lenguaje $\mathscr{L}$, sea verdadera *ahí*, decimos que $\mathfrak{A}$ *es modelo de* φ. En el capítulo 1 introduciremos estos conceptos formalmente.

En el capítulo 2 especificaremos la semántica y la sintaxis de los lenguajes de segundo orden en donde son expresables enunciados como el axioma del supremo y el postulado de inducción de Peano. También veremos que en la lógica de segundo orden no son ciertos los teoremas de compacidad, Löwenheim-Skolem y numerabilidad. Sin embargo al *aritmetizar* el lenguaje de segundo orden mostraremos (mediante la vía semántica) el lema del punto fijo así como el teorema de indefinibilidad de *Tarski*. La "semantización" de estos resultados son una aportación del presente trabajo.

En el capítulo 3 hablaremos de *lógica multivariada*, es decir, lógica de primer orden que tiene distintos universos sobre los cuales podemos cuantificar. Por ser un enfoque de primer orden, podremos *recuperar* los teoremas de compacidad, numerabilidad y Löwenheim-Skolem. El propósito de introducir lógica multivariada en este trabajo será *diseñar un disfraz* para la lógica de segundo orden, este nos permitirá en el capítulo 4 "*vestir*" a la semántica de segundo orden como una semántica multivariada, dejando sin cambios a la sintaxis de segundo orden. Llamaremos *estructuras generales* a aquellas estructuras "*dizfrazadas*" en donde sean verdaderos ciertos enunciados que llamaremos de comprehensión. Así, las estructuras que describimos en el capítulo 2 serán un caso particular de estructuras generales. Como en la lógica multivariada, tendremos también para la lógica general de segundo orden los teoremas de numerabilidad, Löwenheim-Skolem y compacidad, utilizando este último para construir, en el capítulo 5, un modelo general *no estándar* de los números naturales.

Tenemos una comprensión clara o al menos así lo creemos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$; pero de su conjunto potencia $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ no podemos decir lo mismo. Por ejemplo, no sabemos si su cardinalidad es $\aleph_1$ o $\aleph_2$ o más. Así que es razonable dejar fijo aquello de lo que estamos seguros (el conjunto de los números naturales) pero dejar abierto a interpretación por una estructura, aquello de lo que no estamos seguros (el conjunto potencia de los naturales). Estos son los *ω-modelos del análisis*, “mundos posibles” que dejan abierta la cuestión sobre cuál es el cardinal de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Nos referiremos a la teoría de números de segundo orden como *análisis*, el nombre se debe a que un número real lo podemos identificar como un conjunto de números naturales, así podemos *identificar* a los cuantificadores sobre los conjuntos de los números naturales como cuantificadores sobre los números reales. Por un *ω-modelo del análisis* entendemos un *modelo del análisis* cuyo universo es $\mathbb{N}$ y donde *es posible* cuantificar sobre conjuntos de números naturales. Entre los *ω-modelos del análisis* hay un modelo *absoluto*, cuyo universo de relaciones de n argumentos ($n \geq 0$) consta de *todas* las relaciones $n-arias$ sobre $\mathbb{N}$, y cuyos universos de funciones constan de *todas* las funciones posibles. Un enunciado de primer orden es verdadero en un *ω-modelo arbitrario del análisis* si y sólo si es verdadero en la estructura de la aritmética $\langle \mathbb{N}, 0, s, +, *, E, < \rangle$. Pero tal vez el ω-modelo no coincida con el modelo *absoluto* de los enunciados de segundo orden. En el último teorema de este trabajo podremos concluir que un *ω-modelo del análisis* estará completamente determinado por su universo de relaciones unarias.

El objetivo de este trabajo es desarrollar y hacer clara, para cualquier estudiante de pregrado que tenga nociones de lógica, teoría de conjuntos y análisis, lo que es la lógica de segundo orden para así profundizar en el caso particular de los *ω-modelos del análisis*.

Capítulo 1

Conocimientos preliminares

1.1. Lógica de primer orden

En lo sucesivo asumiremos que tenemos un número infinito de objetos distintos que denominamos *símbolos* los cuales no son sucesión finita de otros símbolos y están clasificados de acuerdo a lo siguiente.

A. Símbolos lógicos

0. Paréntesis y coma:) , (, , .

1. Símbolos de conectivo para enunciados: $\rightarrow$,$\neg$.

2. Variables (una para cada entero positivo n): $v_1, v_2, \ldots$

3. Símbolo de igualdad: $=$

B. Parámetros

0. Símbolo de cuantificador: $\forall$. A este parámetro le llamaremos parámetro lógico, a diferencia de los parámetros siguientes, a los que podríamos llamar *no* lógicos.

1. Símbolos de predicado: para cada entero positivo n, algún conjunto (posiblemente vacío) de símbolos, denominados símbolos de predicado de n argumentos.

2. Símbolos de constante: algún conjunto (posiblemente vacío) de símbolos, denominados símbolos de constante.

3. Símbolos de función: para cada entero positivo n, algún conjunto (posiblemente vacío) de símbolos, denominados símbolos de función de n argumentos.

Obsérvese que por A.3 tendremos la existencia del símbolo de igualdad, y siempre daremos por hecho su presencia. El símbolo de igualdad es un símbolo de predicado de dos argumentos, pero se distingue de los demás símbolos de predicado de dos argumentos, por ser un símbolo lógico en vez de un parámetro.

Los símbolos de constante descritos en B.2 los podemos concebir como símbolos de función de cero argumentos. Con frecuencia, esto permitirá dar un tratamiento uniforme a los símbolos que se encuentran en B.2 y en B.3.

En Teoría de Modelos, se usa la letra ρ para el conjunto de *símbolos* de los parámetros *no* lógicos (distintos al parámetro $\forall$) que tiene el lenguaje y se le conoce como *el tipo de semejanza o signatura* de la estructura en cuestión, su forma es:

$$\rho = [\bigcup_{1\leq n} R_n] \cup [\bigcup_{1\leq m} F_m] \cup C$$

donde R_n es un conjunto de *símbolos* relacionales de aridad n, F_m es un conjunto de *símbolos* funcionales de aridad m y C es un conjunto de *símbolos* de constante. La palabra *aridad* denota el número de argumentos de la relación o función en cuestión, ya que los símbolos relacionales y funcionales sólo adquieren sentido cuando se asocia alguna semántica o interpretación al *tipo de semejanza.*

1.1.1. Fórmulas

Una *expresión* es una sucesión finita de símbolos. De esta manera la sucesión:

$$),,(v_1\forall(\neg, P(()(()v_8\forall \rightarrow$$

es una expresión, pero no es interesante. En cambio existen ciertas expresiones interesantes: los términos y las fórmulas.

Intuitivamente los *términos* son los sustantivos y los pronombres de nuestro lenguaje, y pueden entenderse como las expresiones que nombran a los objetos. Los *términos* se definen como aquellas expresiones que pueden construirse a partir de los símbolos de constante y de las variables al prefijarles los símbolos de función. Así, definimos para cada símbolo de función f de n argumentos, una operación de construcción de términos $\mathfrak{F}_f$ de n argumentos sobre las expresiones:

$$\mathfrak{F}_f\ (\epsilon_1, ..., \epsilon_n) = f\epsilon_1, ..., \epsilon_n$$

Definición 1. *El conjunto de términos es el conjunto de expresiones que se pueden construir a partir de símbolos de constante y variables, al aplicar (cero o más veces) las operaciones $\mathfrak{F}_f$.*

Observemos que, en caso de no haber símbolos de función (además de los símbolos de constante), entonces los términos serán únicamente los símbolos de constante y las variables.

Definición 2. *Una **fórmula atómica** es una expresión de alguna de las formas:*

$$t_1 = t_2 \textit{ o bien } P(t_1, ..., t_n)$$

Donde P es un símbolo de predicado de n argumentos, $=$ es el símbolo de igualdad y $t_1, ..., t_n$ son términos.

Nótese que las fórmulas atómicas, no se definen de manera inductiva. Nos limitamos a decir explícitamente cuales expresiones son fórmulas atómicas. Las *fórmulas* son las fórmulas atómicas y todas aquellas expresiones que pueden construirse a partir de las fórmulas atómicas mediante el uso de los símbolos de conectivo y del símbolo de cuantificador. Para esto, definimos primero algunas operaciones de construcción de fórmulas sobre las expresiones:

$$\epsilon_{\neg}(\gamma) = (\neg\gamma)$$

$$\epsilon_{\rightarrow}(\gamma, \delta) = (\gamma \rightarrow \delta)$$

$$\mathfrak{Q}_i\ (\gamma) = \forall v_i \gamma$$

Definición 3. *El conjunto de las* fórmulas *es el conjunto de expresiones que pueden construirse a partir de las fórmulas atómicas al aplicar (cero o más veces) las operaciones $\epsilon_{\neg}$, $\epsilon_{\rightarrow}$ y $\mathfrak{Q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$)*

Los *términos* son expresiones que se traducen como los nombres de los objetos (o frases nominales), en contraste con las fórmulas, que se traducen como afirmaciones acerca de los objetos.

Definición 4. *Variables libres.*

Consideremos cualquier variable x. Definamos para cada fórmula α, lo que significa que x aparece libre en α. Hacemos esto por recursión:

1. *Para α atómica, x aparece libre en α si y sólo si x aparece en (es decir, es símbolo de) α.*
2. *x aparece libre en $\neg\alpha$ si y sólo si x aparece libre en α.*
3. *x aparece libre en $(\alpha \rightarrow \beta)$ si y sólo si x aparece libre en α o en β.*
4. *x aparece libre en $\forall v_i \alpha$ si y sólo si x aparece libre en α y $x \neq v_i$.*

En A.1, se especifican únicamente los símbolos $\neg$ y $\rightarrow$, esto es porque podemos ver a los otros símbolos de conectivo $\vee$, $\wedge$ y $\leftrightarrow$ como *abreviaciones* de estos dos símbolos, es decir, para α y β fórmulas cualesquiera, x una variable y u y t términos:

$(\alpha \vee \beta)$ es una *abreviación* de: $(\neg\alpha \rightarrow \beta)$.

$(\alpha \wedge \beta)$ es una *abreviación* de: $\neg(\alpha \rightarrow \neg\ \beta)$.

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una *abreviación* de: $\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$.

$(\exists x \alpha)$ es una *abreviación* de: $(\neg\forall x(\neg\alpha))$.

$(u = t)$ es una *abreviación* de: $(= ut)$.

$(u \neq t)$ es una *abreviación* de: $(\neg = ut)$.

En lo sucesivo adoptaremos estas *abreviaciones*, pues nos serán más fácil de leer.

1.1.2. Verdad y modelos para la lógica de primer orden

Una estructura para un lenguaje de primer orden nos dirá:

1. A que colección de objetos se refiere el parámetro símbolo de cuantificador universal ($\forall$), y

2. Qué denotan los demás parámetros (los símbolos de constante, de función y de predicado).

Formalmente, una estructura $\mathfrak{A}$ para nuestro lenguaje dado de primer orden es una función cuyo dominio es el conjunto de parámetros y tal que

1. $\mathfrak{A}$ asigna al símbolo de cuantificador $\forall$ un conjunto no vacío $|\mathfrak{A}|$, llamado el universo de $\mathfrak{A}$.

2. $\mathfrak{A}$ asigna a cada símbolo de predicado P de n argumentos una relación n-aria $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$; es decir, $P^{\mathfrak{A}}$ es un conjunto de n-adas de elementos del universo.

3. $\mathfrak{A}$ asigna a cada símbolo de constante c un elemento $c^{\mathfrak{A}}$ del universo $|\mathfrak{A}|$.

4. $\mathfrak{A}$ asigna a cada símbolo de función f de n argumentos una operación n-aria $f^{\mathfrak{A}}$ sobre $|\mathfrak{A}|$; es decir, $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.

La idea es que $\mathfrak{A}$ asigna significados a los parámetros. $\forall$ significa "para todo objeto de $|\mathfrak{A}|$". El símbolo c es para nombrar al objeto $c^{\mathfrak{A}}$. La fórmula atómica $Pt_1, \ldots, t_n$ significa que la n-ada de objetos nombrados por $t_1, \ldots, t_n$ están en la relación $P^{\mathfrak{A}}$. El símbolo f es para nombrar una operación n-aria $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.

Nótese que requerimos que el universo $|\mathfrak{A}|$ sea no vacío. Nótese también que $f^{\mathfrak{A}}$ deberá tener la totalidad de $|\mathfrak{A}|^n$ como su dominio; no hemos hecho estipulación alguna para funciones parcialmente definidas.

Satisfacción

Sean φ una fórmula de nuestro lenguaje, $\mathfrak{A}$ una estructura para el lenguaje, s: $V \to |\mathfrak{A}|$ una función del conjunto de las variables V en el universo $|\mathfrak{A}|$ de $\mathfrak{A}$. Definiremos qué significa que $\mathfrak{A}$ $satisfaga\ a\ \varphi\ con\ s$, adoptando como notación:

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$$

La versión informal es: $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ si y sólo si la traducción de φ determinada por $\mathfrak{A}$, donde la variable x se traduce como $s(x)$ en cualquier lugar donde aparece libre, es verdadera.

La definición formal de satisfacción es:

I. Términos. Definimos la extensión: $\overline{s}$: $T \to |\mathfrak{A}|$, una función del conjunto T de todos los términos, en el universo $|\mathfrak{A}|$ de $\mathfrak{A}$. La idea es que $\overline{s}(t)$ debería ser un elemento del universo $\mathfrak{A}$ que se nombra mediante el término t. $\overline{s}$ se define por recursión como sigue:

1. Para cada variable x, $\overline{s}(x) = s(x)$

2. Para cada símbolo de constante c, $\overline{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.

3. Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función de n argumentos, entonces

$$\overline{s}(ft_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$$

La existencia de una única extensión $\overline{s}$ de s, se sigue del teorema de recursión[1], si utilizamos el hecho de que los términos tienen descomposiciones únicas. Note que $\overline{s}$ depende tanto de s como de $\mathfrak{A}$.

II. Fórmulas. Las fórmulas atómicas se definieron explícitamente, no de manera inductiva. Por lo tanto la definición de satisfacción de las fórmulas atómicas *es* también explícita y no recursiva.

1.1. $\models_{\mathfrak{A}} (t_1 = t_2)_{[s]}$ si y sólo si $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$.

Nótese que la primera aparición de "=" es un símbolo lógico y no un parámetro sujeto a interpretación, en cambio la segunda aparición de "=" es la relación de identidad del *metalenguaje*.

1.2. Para un parámetro de predicado P de n argumentos

$\models_{\mathfrak{A}} P(t_1, \ldots, t_n)_{[s]}$ si y sólo si $\langle \overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n) \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$.

Las demás fórmulas fueron definidas por inducción; en consecuencia, aquí definiremos la satisfacción por recursión.

2. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi_{[s]}$ si y sólo si $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$

3. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)_{[s]}$ si y sólo si o bien $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$, o bien $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$ o ambos.

4. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x \varphi_{[s]}$ si y sólo si para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(x|d)]}$.

Aquí $s(x|d)$ es una función exactamente como s, excepto que en la variable x toma el valor d. Esto se puede expresar mediante la ecuación:

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & si \quad y \neq x \\ d & si \quad y = x \end{cases}$$

Ahora contamos con las herramientas necesarias para entender el importante concepto de implicación lógica para un lenguaje.

Definición 5. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje, Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula. Entonces Γ implica lógicamente a φ, o bien φ es consecuencia lógica de Γ, y se escribe $\Gamma \models \varphi$, si y sólo si para cada estructura $\mathfrak{A}$ del lenguaje $\mathscr{L}$ y cada función $s : V \to |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A}$ satisface a cada elemento de Γ con s, $\mathfrak{A}$ también satisface φ con s.*

[1] Véase [E1] Secc. 4 Cap. I

Capítulo 2

Lenguajes de segundo orden.

Si se permite la cuantificación sobre símbolos de predicado o de función es posible obtener (aunque con cierto costo) lenguajes más ricos y con mayor capacidad de expresión que los lenguajes de primer orden.

Supongamos entonces que, además de los símbolos que se introdujeron en el capítulo 1, tenemos los siguientes símbolos lógicos:

4. Variables de predicado: Para todo entero positivo n tenemos las variables de predicado n-ario

$$X_1^n,\ X_2^n,\ X_3^n,...$$

5. Variables de función: Para todo entero positivo n, tenemos las variables de función n-aria

$$F_1^n,\ F_2^n,\ F_3^n,...$$

Para evitar confusión, lo que considerábamos antes variables, $v_1, v_2, ...$ se llamarán ahora variables individuales. Un enunciado es una fórmula σ en la que ninguna variable (individual, de predicado o de función) aparece libre. Un ejemplo es:

$$\exists X_1^2 \exists v_1 \forall v_2 X_1^2(v_2, v_1)$$

el cual afirma que hay una relación R de dos argumentos, que cumple que hay un elemento a_1 en el universo de interpretación, tal que para todo elemento a_2 del universo de interpretación se tiene que $(a_2, a_1) \in R$.

2.1. Verdad y modelos para la lógica de segundo orden

Para la lógica de segundo orden definimos los *términos* de forma similar a como lo hicimos para la lógica de primer orden en la sección 1 del capítulo 1, como las expresiones que se construyen a partir de los símbolos de constante y las variables individuales al aplicar los símbolos de función (tanto parámetros de función, como variables de función). Las fórmulas atómicas son otra vez las expresiones $t_1 = t_2$ y $P\ t_1, \ldots, t_n$ tales que $t_1, \ldots, t_n$ son términos y P es un símbolo de predicado n-ario (parámetro o variable). La definición de fórmula se extiende mediante nuevas operaciones de construcción de fórmulas, i.e. si φ es una fórmula, entonces $\forall X_i^n \varphi$ y $\forall F_i^n \varphi$ también lo son.

Considerando las nuevas variables, la noción de *variable que aparece libre en* φ se define exactamente como antes. Por una estructura seguiremos entendiendo una función $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto

de parámetros que cumple con las condiciones dadas para la lógica de primer orden en la sección 1.2 del capítulo 1, pero ahora, en el conjunto de las variables V tenemos además de las variables individuales, las variables de predicado y las de función. Esto es, si s: $V \to |\mathfrak{A}|$ entonces:
$s(v_1)$ es un elemento de $|\mathfrak{A}|$,
$s(X^n)$ es una relación n-aria sobre $|\mathfrak{A}|$,
$s(F^n)$ es una operación n-aria de $|\mathfrak{A}|^n$ en $|\mathfrak{A}|$.

Para un término t, $\overline{s}(t)$ se define como lo hicimos en la sección 1.2. Si F es una variable de función, $\overline{s}(F^n t_1, \ldots, t_n)$ es el resultado de aplicar $s(F^n)$ a $(s(t_1), \ldots, s(t_n))$. La satisfacción de fórmulas atómicas también se define como en la sección 1.2 del capítulo 1. Si X es una variable de predicado,

$$\models_{\mathfrak{A}} X(t_1, \ldots, t_n)_{[s]} \textit{ si y sólo si } \langle s(t_1), \ldots, s(t_n) \rangle \in s(X).$$

Adoptamos, la misma definición de satisfacción para la lógica de primer orden, pero aumentamos:

5. $\models_{\mathfrak{A}} \forall X_i^n \varphi_{[s]}$ si y sólo si para toda relación n-aria R sobre $|\mathfrak{A}|$, tenemos que $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(X_i^n|R)]}$

6. $\models_{\mathfrak{A}} \forall F_i^n \varphi_{[s]}$ si y sólo si para toda función n-aria $f : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$, tenemos que $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(F_i^n|f)]}$

La implicación lógica ó consecuencia lógica, se define exactamente como se hizo en la definición 5 para la lógica de primer orden.

Ejemplo 1. Un buen orden sobre un conjunto $\mathbb{A}$ es una relación de orden (denotada $<$), antirreflexiva en $\mathbb{A}$ (i.e. para todo $x \in \mathbb{A}$, $x \not< x$) y transitiva en $\mathbb{A}$ (i.e. para todo $x, y, z \in \mathbb{A}$ si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$) tal que, para todo subconjunto no vacío, hay un elemento mínimo, con respecto al orden. Esta condición puede traducirse al siguiente enunciado de segundo orden, donde el único parámetro no lógico es $<$ y donde $y \leq z$ abrevia $(y < z \vee y = z)$:

$$BO^2\text{: } \forall x\ (x \not< x) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z \to x < z)$$

$$\wedge\ \forall X\ (\exists w X w \to \exists y\ (X y \wedge \forall u\ (X u \to y \leq u)))$$

Le llamaremos a este enunciado BO^2, pues es conocido también como el enunciado del **B**uen **O**rden (el superíndice indica que está expresado en el lenguaje de segundo orden). La interpretación de $\exists w X w$ en una estructura $\mathfrak{A}$ quiere decir que hay por lo menos un elemento en el universo de individuos $|\mathfrak{A}|$ que está en la relación unaria $X^{\mathfrak{A}}$ o de manera equivalente, que el conjunto $X^{\mathfrak{A}}$ es no vacío.

Aquí, como en el resto de este trabajo, será conveniente omitir los subíndices de X y F cuando son irrelevantes, y los superíndices cuando por el contexto, queda claro cuáles son.

Ejemplo 2. El postulado de inducción de Peano establece que todo conjunto de naturales que tenga al 0 y que sea cerrado bajo la operación sucesor es, en realidad, el conjunto de todos los números naturales. Esto puede traducirse al lenguaje de segundo orden de la teoría de los números como sigue, donde los parámetros *no* lógicos son 0 y s:

S_P^2: $\forall X\ [(X0 \wedge \forall y\ (Xy \rightarrow Xsy)) \rightarrow \forall w Xw]$

Además, Peano formuló otros dos enunciados expresables en primer orden con los mismos parámetros 0 y s (y por tanto en segundo orden):

S_1: $\forall x\ (sx \neq 0)$ $\qquad$ S_2: $\forall x\ \forall y\ (sx = sy \rightarrow x = y)$

Para introducir la siguiente definición mencionaremos que, es también posible concebir a una estructura $\mathfrak{A}$ como un par $\langle \mathbb{A}, I \rangle$, donde $\mathbb{A} = |\mathfrak{A}|$ e I es nuestra función interpretación definida para todos los elementos del tipo de semejanza, que describimos en la sección 1.2 del capítulo 1.

Definición 6. *Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, I \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}, J \rangle$ dos $\rho-$estructuras, h es un homomorfismo de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ si y sólo si i) h es una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$,*
ii) Para cada $P_n \in \rho$ y cada $a_1, ..., a_n \in \mathbb{A}$, $\langle a_1, ..., a_n \rangle \in P_n^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\langle h(a_1), ..., h(a_n) \rangle \in P_n^{\mathfrak{B}}$,
iii) Para cada $f_n \in \rho$ y cada $a_1, ..., a_n \in \mathbb{A}$, $h(f_n^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f_n^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$,
iv) Para cada $c \in \rho$, $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Definición 7. *Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, entonces decimos que:*
i)h es un monomorfismo si y sólo si h es una función inyectiva,
ii)h es un epimorfismo si y sólo si h es una función suprayectiva,
iii)h es un isomorfismo si y sólo si h es una función biyectiva.

Teorema 1. *Todo modelo de S_1, S_2 y S_P^2 es isomorfo a $\mathfrak{N}_s =\langle\ \mathbb{N}, 0, s\ \rangle$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A} = \langle\ \mathbb{A}, e, t\ \rangle$ un modelo cualquiera de S_1, S_2, y S_P^2. Por demostrar que $\langle\ \mathbb{A}, e, t\ \rangle \cong \langle\ \mathbb{N}, 0, s\ \rangle$. Aquí $\rho = \{c_0, f_1\}$ y $e = c_0^{\mathfrak{A}}$, $t = f_1^{\mathfrak{A}}$ y $0 = c_0^{\mathfrak{N}_s}$, $s = f_1^{\mathfrak{N}_s}$ respectivamente.
Sea $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$ una función definida como sigue:

$$\begin{array}{ll} h(0) = e & \cdots (*) \\ h(s(n)) = t(h(n)) & \cdots (**) \end{array}$$

donde $s(n)$ es una notación para $f_1^{\mathfrak{N}_s}$ aplicada $n+1$ veces a $c_0^{\mathfrak{N}_s}$. Esta notación ayuda a no hacer tediosa la prueba, sin embargo es usada una vez que se ha entendido la diferencia entre símbolos y objetos en una estructura.

Demostraremos que h es inyectiva utilizando el Principio del Buen Orden.
Sea $\tau = \{\ n \in \mathbb{N} : \exists m\ (m \in \mathbb{N} \wedge m \neq n \wedge h(m) = h(n))\}$.
Observe que h es inyectiva si y sólo si $\tau = \emptyset$, pues $\tau = \emptyset$ si y sólo si no hay $n \in \mathbb{N}$ que cumpla $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $(m \neq n \wedge h(m) = h(n))$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ no es cierto que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $(m \neq n \wedge h(m) = h(n))$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $(m = n \vee h(m) \neq h(n))$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $(h(m) = h(n) \rightarrow m = n)$, que es justo la definición de que h sea inyectiva.

Supongamos que h no es inyectiva. Luego, por lo anterior $\tau \neq \emptyset$, sea n *el mínimo de* τ. Como $n \in \tau$, $\exists m \in \mathbb{N}$ $(m \neq n \wedge h(m) = h(n))$ y al intercambiar los papeles de m y n tenemos que $m \in \tau$ luego $n < m$ entonces hay $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m = s(m_1)$, Como h es función tenemos que $h(m) = h(s(m_1)) = t(h(m_1))$, pero como $\models_{\mathfrak{A}} S_1$, $e \neq t(h(m_1)) = h(m) = h(n)$, de donde $n \neq 0$ (pues *si* $n = 0$ *entonces* $h(n) = e$, lo cual no sucede). Luego hay $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(n_1)$. Así, tenemos que $t(h(n_1)) = h(s(n_1)) = h(s(m_1)) = t(h(m_1))$, y como $\models_{\mathfrak{A}} S_2$, $h(n_1) = h(m_1)$. Luego $n_1 \in \tau$ y $n_1 < n = min\ \tau$, lo cual es una contradicción. Así h es inyectiva.

Falta ver que h es suprayectiva. Para esto veamos que: Im $h = \mathbb{A}$

($\subseteq$) Sabemos que por la definición de la imagen de h.

$Im(h) = \{\ x \in \mathbb{A} : \exists n\ (n \in \mathbb{N} \wedge h(n) = x)\} \subseteq \mathbb{A}$

($\supseteq$) 1) Como $h(0) = e$ entonces $e \in Im(h)$

2.) Sea $x \in Im(h)$. Ahora mostraremos que $t(x) \in Im(h)$. Como $x \in Im(h)$, hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(n) = x$ y sabemos que $h(s(n)) = t(h(n)) \in Im(h)$. Como $\mathfrak{A}$ es modelo de S_P^2 y "*estar en la imagen de h*", es un caso particular de una propiedad unaria, entonces $\forall y \in \mathbb{A}$ $(y \in Im(h))$.

Así, h es biyectiva y cumple con el inciso $i)$ de la definición de homomorfismo, y por el inciso $(*)$ h cumple con la parte $iv)$, y de $(**)$ se sigue que h cumple con la parte $iii)$ de la definición de homomorfismo, y como el tipo de semejanza no tiene símbolos de predicado, podemos concluir que h es $isomorfismo$. □

Los enunciados del siguiente conjunto A_E^2 serán axiomas para la aritmética en el lenguaje de segundo orden:

(S_1): $\forall x\ (sx \neq 0)$

(S_2): $\forall x\ \forall y\ (sx = sy \rightarrow x = y)$

(L_1): $\forall x \forall y (x < sy \leftrightarrow x \leq y)$

(L_2): $\forall x (x \not< 0)$

(L_3): $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

(A_1): $\forall x (x + 0 = x)$

(A_2): $\forall x \forall y (x + sy = s(x + y))$

(M_1): $\forall x (x * 0 = 0)$

(M_2): $\forall x \forall y (x * sy = (x * y) + x)$

(E_1): $\forall x (xE0 = s0)$

(E_2): $\forall x \forall y (xEsy = (xEy) * x)$

(S_P^2): $\forall X\ [(X0 \wedge \forall y\ (Xy \rightarrow Xsy)) \rightarrow \forall w Xw]$

En los axiomas E_1 y E_2 estamos pensando a las expresiones $xE0$ y $xEsy$ como x^0 y x^{sy} respectivamente. En el axioma S_P^2 estamos cuantificando sobre *todas* las relaciones unarias que hay sobre el universo de interpretación, a excepción de las demás axiomas en los que cuantificamos únicamente sobre el universo de interpretación.

Teorema 2. *Todo modelo* $\mathfrak{A}$ *de los enunciados de* A_E^2 *es isomorfo a* $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, *, E, < \rangle$

Demostración. Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, e, t, +^{\mathfrak{A}}, *^{\mathfrak{A}}, E^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ un modelo de todos los enunciados de A_E^2. Fijémonos en el Teorema 1, donde se mostró que $\langle \mathbb{A}, e, t\ \rangle \cong \langle\ \mathbb{N}, 0, s\ \rangle$ con el isomorfismo h:$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$ dado por

$$h(0) = e,$$
$$h(s(n)) = t(h(n)).$$

Ahora bien, si "*calcamos*" las operaciones de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} m +' n &= h^{-1}(h(n) +^{\mathfrak{A}} h(m)), \\ m *' n &= h^{-1}(h(n) *^{\mathfrak{A}} h(m)), \\ mE'n &= h^{-1}(h(n)E^{\mathfrak{A}}h(m)). \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{N}$ es modelo de A_1 y A_2, M_1 y M_2 y de E_1 y E_2, entonces el Teorema de Recursión[1] nos asegura en cada caso que $+' = +$, $*' = *$ y $E' = E$ (esto es un abuso de notación para decir que las funciones coinciden). Luego, tenemos que $\langle \mathbb{N}, 0, s, +, *, E\rangle \cong \langle \mathbb{A}, e, t, +^{\mathfrak{A}}, *^{\mathfrak{A}}, E^{\mathfrak{A}}\rangle$.

Sólo nos falta ver que h *preserva* la relación $<$, es decir que cumple con el inciso *ii*) de la definición 6 de homomorfismo.

Afirmación 1. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x \forall y(x < y \leftrightarrow \exists z(\neg(z = e) \wedge x + z = y))$

Mostremos que si $x < y$ entonces existe un $z \in \mathbb{A}$ tal que $z \neq e$ y $x + z = y$.

Como $\models_{\mathfrak{A}} S_P^2$, haremos la demostración en el *metalenguaje*, por inducción sobre y.

Caso base: si $y = e$, la implicación se da, pues $\models_{\mathfrak{A}} L_2$ y en consecuencia $x < e$ es falso en $\mathfrak{A}$.

Hipótesis inductiva: supongamos que la implicación se tiene para $y = n$.

Paso inductivo: demostrar que para $y = t(n)$ se tiene que hay $z \in \mathbb{A}$ tal que $z \neq e$ y $x + z = t(n)$. Por la *Hipótesis inductiva* $x < n$, así, hay $k \in \mathbb{A}$ $(k \neq e \wedge x + k = n)$. Como t es función $t(x + k) = t(n)$ y por (A_2), $x + t(k) = t(x + k) = t(n)$. Luego, hay $z \in \mathbb{A}$ (a saber $z = t(k) \neq e$) tal que $x + z = t(n)$

Inversamente, mostremos por inducción sobre z, que si existe un $z \in \mathbb{A}$ tal que $z \neq e$ y $x+z = y$ entonces $x < y$.

Caso base: si $z = t(e)$ entonces $x+z = y$ si y sólo si $x+t(e) = y$. Por (A_2), $t(x+e) = x+t(e) = y$. Entonces, por (A_1), $t(x) = y$ y si particularizamos $y = x$ en (L_1), tenemos que $(x \leq x \leftrightarrow x < t(x))$, pero $x \leq x$ siempre es verdadera, pues $(x = x)$ es universalmente válida. Luego, $x < t(x)$ y por tanto $x < y$.

Hipótesis inductiva: supongamos que la implicación es cierta para $z = k$.

Paso inductivo: demostrar que para $z = t(k)$ se tiene que $x < y$.
$x + z = y$ si y sólo si $x + t(k) = y$ y, por (A_2), si y sólo si $t(x + k) = y$.

Ahora, mostraremos por inducción sobre k que: $x < t(x + k) = y$. Caso base: si $k = e$ entonces $x < t(x + e) = t(x)$.

Hipótesis inductiva: supongamos que para k se tiene $x < t(x + k)$.

Paso inductivo: demostrar que se tiene la afirmación para $t(k)$. Por *Hipótesis inductiva*, $x < t(x+k)$, pero como $t(x+k) = t(x+k)$, $t(x+k) \leq t(x+k)$, luego, por (L_1), $t(x+k) < t(t(x+k))$, ´pero, por (A_2) $t(t(x + k)) = t(x + t(k))$ luego $x < t(x + k) < t(x + t(k))$.

Para poder concluir, mostraremos que: si $(n < m < p)$ entonces $(n < p)$, por inducción sobre p.

Caso base: si p=0 entonces la afirmación se cumple por vacuidad.

Hipótesis inductiva: supongamos que se cumple para $p = q$.

Paso inductivo: por demostrar que se cumple para $p = t(q)$.

$m < p$ si y sólo si $m < t(q)$ y, por (L_1), $m \leq q$. Luego, hay dos casos:

a) $m = q$, en cuyo caso, si $(n < m = q)$ entonces $(n < q)$, por lo que$^{(\star)}$ $(n \leq q)$ y, por (L_1), $(n < t(q))$.

[1]Véase [E1] Secc. 4 Cap. I

b) Si $(m < q)$ entonces $(n < m < q)$. Luego, por la *Hipótesis inductiva* $(n < q)$, por lo que$^{(\star)}$ $(n \leq q)$ y, por (L_1), $(n < t(q))$.

$(\star)$ En general $(P \rightarrow (P \vee Q))$ es universalmente válida, luego $(n < q \rightarrow (n < q \vee n = q))$ también lo es.

Ahora, veamos en que h *preserva* a la relación $<'$, esto es, $n <' m$ si y sólo si $h(n) <^{\mathfrak{A}} h(m)$.

Afirmación 2. *Hay $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \neq 0$ y $n +' p = m$ si y sólo si hay $z \in \mathbb{A}$ tal que $z \neq e$ y $h(n) +^{\mathfrak{A}} z = h(m)$*

$(\Leftarrow)$ Sea $p = h^{-1}(z)$ entonces $n +' h^{-1}(z) = h^{-1}(h(n) +^{\mathfrak{A}} h(h^{-1}(z))) = h^{-1}(h(n) +^{\mathfrak{A}} z) = h^{-1}(h(m)) = m$

$(\Rightarrow)$ Sea $z = h(p)$ entonces $h(n) +^{\mathfrak{A}} h(p) = h(n +' p) = h(m)$

Como el Teorema de Recursión nos asegura que $+' = +$ entonces $n < m$ si y sólo si $n <' m$ si y sólo si, por la afirmación 2, $h(n) <^{\mathfrak{A}} h(m)$. Obteniendo así el isomorfismo entre $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{A}$ $\square$

Cuando encontramos un enunciado tal que todos sus modelos son isomorfos, diremos que el enunciado en cuestión es *categórico.* Luego entonces:

Corolario 1. *El enunciado en segundo orden que resulta de la conjunción de los tres enunciados de Peano: $S_1 \wedge S_2 \wedge S_P^2$ es categórico.*

Corolario 2. *El enunciado en segundo orden que resulta de la conjunción de los enunciados de A_E^2 es categórico.*

Ejemplo 3. Si φ es una fórmula en la que la variable de predicado X^n no aparece libre, entonces la fórmula:

$$\exists X^n \forall v_1 \ldots \forall v_n \; [X^n(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi] \text{ es universalmente válida.}$$

Es posible que en φ haya más variables libres, además de $v_1, \ldots, v_n$. Esta nueva fórmula nos dice intuitivamente que hay una relación que consiste exactamente en las n-adas que satisfacen φ. Las fórmulas de este tipo se conocen como *fórmulas de comprehensión relacionales.* Un ejemplo sencillo de una fórmula de comprehensión relacional unaria es:

$$\exists X^1 \forall v_1 \; (X^1(v_1) \leftrightarrow \varphi(v_1, v_2, v_3).)$$

También existen las *fórmulas de comprehensión funcionales*, que son análogas. Si ψ es una fórmula en la que la variable F^n no aparece libre, entonces

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n \exists \, ! \; v_{n+1} \; \psi \rightarrow \exists F^n \forall v_1 \ldots \forall v_{n+1} \; (F^n v_1, \ldots, v_n = v_{n+1} \leftrightarrow \psi) \text{ es universalmente válida.}$$

Aquí ψ puede tener variables, de predicado y de función. Donde “ $\exists \, ! \; v_{n+1}\psi$ ” es una abreviación de la fórmula: $\exists v_{n+1}(\forall v(\psi(v) \leftrightarrow v = v_{n+1}))$.

Ejemplo 4. En el campo ordenado de los números reales, el axioma del supremo (que afirma que todo conjunto no vacío, acotado superiormente, tiene mínima cota superior), se puede traducir al siguiente enunciado de segundo orden de tipo $\rho = \{R_<\}$:

$$AS^2 : \forall X\ [\exists y \forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zy \vee z = y))\ \wedge \exists z\ Xz$$

$$\rightarrow \exists y \forall w\ (\forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zw \vee z = w)) \leftrightarrow (R_< yw \vee y = w))]$$

Que X sea un conjunto no vacío y esté acotado superiormente, lo expresa: $\exists y \forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zy \vee z = y))\ \wedge \exists z\ Xz$; que y sea cota superior, lo expresa: $\exists y \forall w\ (\ (R_< yw \vee y = w)) \rightarrow \forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zw \vee z = w))$; y que y sea la mínima cota superior, lo expresa: $\exists y \forall w\ (\forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zw \vee z = w)) \rightarrow (R_< yw \vee y = w))$

Ahora bien, para el siguiente ejemplo introduciremos algunos conceptos. Para un conjunto de enunciados Σ, $Mod\ \Sigma$ denotará la clase de todos los modelos de Σ. En particular $Mod\ \{\tau\}$ será la clase de todos los modelos del enunciado τ y lo denotaremos $Mod\ \tau$.

Sea K una clase de estructuras para un lenguaje de segundo orden.

Definición 8. *K es una clase elemental (abreviaremos EC) si y sólo si para algún enunciado τ sucede que $K = Mod\tau$*

Definición 9. *K es una clase elemental en sentido amplio (abreviaremos $EC\Delta$) si y sólo si para algún conjunto de enunciados Σ sucede que $K = Mod\Sigma$.*

Ejemplo 5. Para toda $n \geq 2$ tenemos un enunciado de primer orden λ_n que es la traducción de "Hay al menos n objetos".

$$\lambda_n\colon \exists x_1 \ldots \exists x_n\ (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j)$$

Por ejemplo: λ_3: $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3)$.

La clase de los modelos del conjunto $\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ es una clase $EC\Delta$, compuesta por todas las estructuras infinitas. Hay un enunciado de segundo orden cuyo *significado* es el mismo que el de la conjunción de todas las λ_i para i $\in \{2, 3, \ldots\}$, a saber:

$$\lambda_\infty : \exists X\ [\forall u \forall v \forall w\ ((Xuv \wedge Xvw) \rightarrow Xuw)\ \wedge \forall u \neg Xuu \wedge \forall u \exists v Xuv\ ]$$

De esta manera, *un conjunto es infinito si y sólo si existe un orden estricto sobre él, que no tiene último elemento.* En otras palabras, *un conjunto es infinito si y sólo si hay una relación antirreflexiva, transitiva y sin último elemento sobre el conjunto cuyo dominio es todo el conjunto.*

Otro enunciado que define (usando una variable de función) la clase de las estructuras infinitas es:

$$\exists F\ [\forall x \forall y\ (Fx = Fy \rightarrow x = y)\ \wedge \exists z \forall w Fw \neq z\ ]$$

el cual afirma que hay una función inyectiva que no es suprayectiva.

Uno de los teoremas más importantes en Teoría de Modelos es el *teorema de compacidad* para la lógica de primer orden, el cual asegura la existencia de un modelo, para cualquier conjunto infinito de enunciados cuyos subconjuntos finitos tengan un modelo. Con él, podemos asegurar la existencia de modelos que satisfacen a los mismos enunciados, pero que no son isomorfos (*modelos no estándar*). El siguiente teorema afirma que, el *teorema de compacidad* no es cierto en lógica de segundo orden, en el fondo, la demostración se debe a que en lenguajes de segundo orden es posible expresar "*ser un conjunto infinito*", mientras que en lenguajes de primer orden, *no*.

Teorema 3. *Existe un conjunto de enunciados en lenguaje de segundo orden tal que todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles y él no es satisfacible.*

Demostración. Utilizando la notación del ejemplo 5, el conjunto es:

$$\Sigma = \{\neg\lambda_\infty, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}.$$

Ya que, si tomamos $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tiene modelo, pues $\neg\lambda_\infty$ dice que el conjunto no es infinito y las λ_i dicen que por lo menos hay i elementos. Luego, si Σ_0 es finito, podemos encontrar un modelo de él. Pero Σ no tiene modelo, pues de ser posible la existencia de tal modelo, $\neg\lambda_\infty$ sería falso *ahí.* □

Definición 10. *Una relación R (de consecuencia o de deducibilidad) de un lenguaje es de carácter finito **si y sólo si** siempre que $\Sigma\ R\ \tau$, se tiene que existe un subconjunto finito Σ_0 de Σ tal que $\Sigma_0\ R\ \tau$.*

Definición 11. *La lógica de un lenguaje es compacta **si y sólo si** siempre que todo subconjunto finito de un conjunto de enunciados de este lenguaje tenga un modelo, se tiene que el conjunto también tiene un modelo.*

Para verificar el siguiente teorema mostraremos primero que:

Lema 1. *Para un enunciado τ, $\Sigma \models \tau$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ no tiene modelo.*

Demostración. De la definición de consecuencia lógica, tenemos que: $\Sigma \not\models \tau$ es equivalente a que exista un modelo $\mathfrak{A}$ tal que para todo $\alpha \in \Sigma$ se tiene que $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$ y $\not\models_{\mathfrak{A}} \tau$ que, a la vez, es equivalente a que exista un modelo $\mathfrak{A}$ tal que para todo $\alpha \in \Sigma$ se tiene que $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$ y $\models_{\mathfrak{A}} \neg\tau$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo. □

Teorema 4. *Es equivalente que la lógica de un lenguaje sea compacta a que el carácter de su relación de consecuencia sea finito.*

Demostración. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje, supongamos que el carácter de su relación de consecuencia es finito y que Γ es un conjunto de enunciados que no tiene modelo. Sea $\gamma \in \Gamma$, y notemos que $\Gamma = (\Gamma \setminus \{\gamma\}) \cup \{\gamma\}$. Si $\Gamma \cup \{\gamma\} \models \neg\gamma$, luego, por hipótesis, hay un $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cup \{\gamma\}$ finito tal que $\Gamma_0 \models \neg\gamma$. Pero $\Gamma_0 \cup \{\gamma\}$ es finito y $\Gamma_0 \cup \{\gamma\} \subseteq \Gamma$, entonces (por monotonía) $\Gamma_0 \cup \{\gamma\} \models \neg\gamma$. Por otro lado, $\Gamma_0 \cup \{\gamma\} \models \gamma$. Luego, $\Gamma_0 \cup \{\gamma\} \models (\neg\gamma \wedge \gamma)$ y entonces $\Gamma_0 \cup \{\gamma\}$ es finito y no tiene modelo.

Supongamos que la lógica de un lenguaje $\mathscr{L}$ es compacta y que no hay Σ_0 finito, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \models \tau$. Por lo tanto, para todo Σ_0 finito, si $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ se tiene que $\Sigma_0 \not\models \tau$. Luego, por el lema 1, $\Sigma_0 \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo. Esto es cierto para todo Σ_0 finito y, como $\Sigma_0 \cup \{\neg\tau\} \subseteq \Sigma \cup \{\neg\tau\}$, por hipótesis $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo y esto equivale a que $\Sigma \not\models \tau$ □

Así, lo que dicen estas definiciones es que en la lógica de un lenguaje cumple el teorema de compacidad.

Teorema 5. *La lógica de segundo orden **no** es compacta.*

Demostración. En el Teorema 3, se construyó un conjunto de enunciados en el que todos sus subconjuntos finitos tienen modelo, pero el conjunto no tiene un modelo, por lo que la lógica de segundo orden no es compacta. □

Corolario 3. *La relación de consecuencia del lenguaje de segundo orden **no** es de carácter finito.*

2.2. Cardinales caracterizables en segundo orden.

Por lenguaje de segundo orden de la igualdad $\mathscr{L}^2_=$, nos referiremos al lenguaje de segundo orden que tiene a $=$ como símbolo lógico y $\forall$ como único parámetro. Aquí, hay que recordar que en el lenguaje tanto de primer como de segundo orden, definimos al símbolo existencial $\exists$ como una abreviación de $\neg\forall\neg$. Así tenemos que una fórmula que tenga $\exists$ como abreviatura de $\neg\forall\neg$, donde $\forall$ es el único parámetro, también será del lenguaje de la igualdad.

Definición 12. *El espectro de un enunciado σ del $\mathscr{L}^2_=$ es la clase de los cardinales de sus modelos. Notación: $esp(\sigma)$.*

Una estructura del $\mathscr{L}^2_=$ puede concebirse simplemente como un conjunto no vacío. En particular una estructura así está determinada (salvo isomorfismo) por su cardinalidad. Si σ es un enunciado universalmente válido del $\mathscr{L}^2_=$, $esp(\sigma)$ es la clase de todos los números cardinales distintos de cero. Si σ no es satisfacible, $esp(\sigma) = \emptyset$. El *espectro* de $\neg\sigma$ es el complemento (relativo a la clase de todos los números cardinales) del *espectro* de σ. El espectro de la conjunción y disyunción de enunciados es la intersección y la unión de espectros respectivamente. Así, un enunciado en $\mathscr{L}^2_=$ está determinado, salvo equivalencia lógica, por su espectro.

Ejemplo. Si expresamos a S_1, S_2 y S^2_P de la siguiente manera:

S^2_1: $\forall x\ w \neq F_s x$,

S^2_2: $\forall x\ \forall y\ (F_s x = F_s y \rightarrow x = y)$,

S^2_P: $\forall X\ [(Xw \wedge \forall y\ (Xy \rightarrow XF_s y)) \rightarrow \forall w X w]$.

Entonces el enunciado $\sigma : \exists F_s\ \exists w\ (S_1^2 \wedge S_2^2 \wedge S_P^2)$ es un enunciado de $\mathscr{L}^2_{=}$, y $esp(\sigma) = \{\ |\mathbb{N}|\ \} = \{\aleph_0\}$

Definición 13. *Sea κ un número cardinal, decimos que κ es* ***caracterizable en segundo orden si y sólo si*** *hay un enunciado del $\mathscr{L}^2_{=}$ que es verdadero en cualquier estructura de cardinalidad κ y sólo en ésas. Notación: $C2O(\kappa)$ abrevia: el número cardinal κ es* ***C****aracterizable en* ***2****^{do}* ***O****rden.*

Teorema 6. *Sea κ un número cardinal. Hay un σ enunciado del lenguaje de segundo orden tal que $esp(\sigma) = \{\kappa\}$ si y sólo si $C2O(\kappa)$*

Demostración. Es inmediato de las definiciones. □

Teorema 7. *La colección $\mathscr{K} = \{\ \kappa \mid C2O(\kappa)\ \}$ es un conjunto y además $|\mathscr{K}| = \aleph_0$.*

Demostración. En general el conjunto de enunciados de un lenguaje es a lo más numerable y por la definición de $C2O(\kappa)$, para cada cardinal $\kappa \in \mathscr{K}$ necesitamos un enunciado diferente que lo caracterice. □

2.2.1. Numerabilidad

Podemos caracterizar el orden de los números naturales (sin utilizar a la operación sucesor), como un orden lineal sin elemento máximo con respecto al cual todo conjunto acotado superiormente es finito.

Definición 14. *Un conjunto es numerable si y sólo si es biyectable con el conjunto de los números naturales.*

Definiciones alternativas a la anterior son:

Definición 15. *Un conjunto es numerable si y sólo si puede ordenarse con un orden isomorfo al de los números naturales*

Definición 16. *Un conjunto es numerable si y sólo si hay un orden lineal en él, sin elemento máximo con respecto al cual todo conjunto acotado superiormente es finito.*

En el lenguaje de segundo orden podemos expresar que un conjunto sea numerable. Para esto, primero veamos cómo decir "*ser un orden lineal estricto*". Abreviaremos con $ORD(X^2)$ a la fórmula expresada en el lenguaje de segundo orden que dice X^2 es un orden lineal estricto.

$$ORD(X)\colon \forall x_0\ \neg Xx_0x_0 \wedge \forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3\ (Xx_1x_2 \wedge Xx_2x_3 \rightarrow Xx_1x_3)$$
$$\wedge\ \forall x_4\ \forall x_5\ (x_4 = x_5 \vee Xx_4, x_5 \vee Xx_5x_4).$$

Abreviaremos con $FIN(Y)$ a la fórmula en el lenguaje de segundo orden que expresa que toda relación antirreflexiva y transitiva *en* Y posee un elemento maximal en Y.

$$FIN(Y) : \forall X^2\ [\ \forall x_0(Yx_0 \rightarrow \neg X^2x_0x_0)$$
$$\wedge\ \forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3\ ((Yx_1 \wedge Yx_2 \wedge Yx_3) \rightarrow (X^2x_1x_2 \wedge X^2x_2x_3 \rightarrow X^2x_1x_3))]$$
$$\rightarrow \exists x_4\ (Yx_4 \wedge \forall x_5\ (Yx_5 \rightarrow \neg X^2x_4x_5))$$

De esta manera, el enunciado NUM que expresa la numerabilidad es el siguiente.

NUM: $\exists X^2\ (ORD(X^2) \wedge\ \forall x_1 \exists x_2\ X^2 x_1 x_2 \wedge \forall Y\ ((\exists x_3 \forall x_4 (Y x_4 \rightarrow X^2 x_4 x_3)) \rightarrow FIN(Y)))$

Éste enunciado es verdadero en una estructura si y sólo si su universo es numerable. Luego, hemos visto que:

Teorema 8. *El número cardinal* $\aleph_0$ *es caracterizable en segundo orden.*

Un conjunto totalmente ordenado y sin extremos, lo podemos pensar como una hilera de puntos, que no tiene principio, ni fin. Cuando entre cada dos puntos de un conjunto totalmente ordenado, hay un punto intermedio en el conjunto, decimos que el conjunto es denso. Un conjunto es separable si y sólo si existe un subconjunto numerable y denso en él. Diremos que un conjunto $\mathbb{A}$ es completo si y sólo si el axioma del supremo (AS^2) es verdadero en la estructura $\langle \mathbb{A}, < \rangle$. El teorema que viene a continuación, es un resultado clásico de Teoría de Conjuntos y omitiremos su demostración[2].

Teorema 9. *Todo conjunto totalmente ordenado, denso, sin extremos, completo y separable es isomorfo a* $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Este teorema nos servirá para *caracterizar* al cardinal del continuo, que es $2^{\aleph_0}$.

Teorema 10. *El número cardinal* $2^{\aleph_0}$ *es caracterizable en segundo orden.*

Demostración. En términos de la Teoría de Modelos, el teorema 9 nos dice que todo modelo de los siguientes enunciados del lenguaje de segundo orden, es isomorfo a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$

$CT_1^2 : \forall x\ \neg R_< xx$ (enunciado de antirreflexividad),

$CT_2^2 : \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R_< xy \wedge R_< yz \rightarrow R_< xz)$ (enunciado de transitividad),

$CT_3^2 : \forall x\ \forall y\ (R_< xy \vee x = y \vee R_< yx)$ (enunciado de tricotomía),

$DEN^2 : \forall x\ \forall y\ (R_< xy \rightarrow \exists z\ (R_< xz \wedge R_< zy))$ (enunciado de densidad),

$SE^2 : \forall x\ (\exists y\ R_< xy\ \wedge\ \exists z\ R_< zx)$ (enunciado que expresa que no hay extremo izquierdo ni derecho),

Que el conjunto universo sea completo quiere decir que en el modelo es verdadero el axioma del supremo, (expresado en lenguaje de segundo orden).

$$AS^2 : \forall X\ [\exists y \forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zy \vee z = y))\ \wedge \exists z\ Xz$$
$$\rightarrow \exists y \forall w\ (\forall z\ (Xz \rightarrow (R_< zw \vee z = w)) \leftrightarrow (R_< yw \vee y = w))]$$

$SEP^2 : \exists D[NUM(D) \wedge \forall x_1 \forall x_2 (R_< x_1 x_2 \rightarrow \exists x_3 (Dx_3 \wedge R_< x_1 x_3 \wedge R_< x_3 x_2)]$

(enunciado de separabilidad), donde $NUM(D)$ es:

[2] Véase [H-J].

$$NUM(D) : \exists X^2[OT_D(X^2) \wedge \forall x_1(Dx_1 \to \exists x_2(D_{x_2} \wedge X^2x_1x_2))$$

$$\wedge \forall Y(\exists x_3(Dx_3 \wedge \forall x_4(Dx_4 \wedge Yx_4 \to X^2x_4x_3))) \to FIN_D(Y)]$$

(enunciado que expresa que D es un subconjunto numerable, esto es, existe un orden total en D, sin elemento máximo, respecto al cual todo conjunto acotado superiormente en D, es finito[3]), donde $OT_D(X^2)$ y $FIN_D(Y)$ son:

$$OT_D(X^2) : \forall x_0(Dx_0 \to \neg X^2x_0x_0)$$

$$\wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3[(Dx_1 \wedge Dx_2 \wedge Dx_3 \wedge X^2x_1x_2 \wedge X^2x_2x_3) \to X^2x_1x_3]$$

$$\wedge \forall x_4 \forall x_5[(Dx_4 \wedge Dx_5) \to (x_4 = x_5 \vee X^2x_4x_5 \vee X^2x_5x_4)]$$

(enunciado que expresa que X^2 es un orden total en D),

$$FIN_D(Y) : \forall R[\{\forall x_0(Dx_o \wedge Yx_0 \to \neg Rx_0x_0)$$

$$\wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3[Dx_1 \wedge Dx_2 \wedge Dx_3 \wedge Yx_1 \wedge Yx_2 \wedge Yx_3 \to (Rx_1x_2 \wedge Rx_2x_3 \to Rx_1x_3)]\}$$

$$\to \exists x_4((Dx_4 \wedge Yx_4 \wedge \forall x_5(Dx_5 \wedge Yx_5) \to \neg Rx_4x_5))]$$

(enunciado que expresa que toda relación antirreflexiva y transitiva en D tiene un elemento maximal en Y).

Así el enunciado

$$\sigma_{2^{\aleph_0}} : \exists R_< \ [CT_1^2 \wedge CT_2^2 \wedge CT_3^2 \wedge DEN^2 \wedge SE^2 \wedge AS^2 \wedge SEP^2]$$

es un enunciado del $\mathscr{L}^2_=$, que es verdadero en una estructura si y sólo si su cardinalidad es $2^{\aleph_0}$. □

Dado Γ un conjunto de enunciados del lenguaje de primer orden que tenga modelos *infinitos*, el teorema descendente de Löwenheim-Skolem (1920), nos asegura la existencia de un modelo *numerable* de Γ. Éste teorema marcó una nueva fase en la lógica matemática. Con él, podemos mostrar la existencia de estructuras *numerables* donde sea verdadero el enunciado: "*hay una cantidad no numerable de objetos*", lo cual es suficientemente desconcertante como para que se le llame "*la paradoja de Skolem*". Aquí no hay contradicción, pues lo que es cierto en la estructura es que no hay elemento que satisfaga la definición formal de ser una función biyectiva de los números naturales en el universo. Pero esto de ninguna manera excluye la posibilidad de que haya, fuera de la estructura, una auténtica función que nos dé esa correspondencia uno a uno. El siguiente corolario del teorema anterior, afirma que en lógica de segundo orden, el teorema descendente de Löwenheim-Skolem falla.

Corolario 4. *El teorema descendente de Löwenheim-Skolem falla en lógica de segundo orden.*

Demostración. Tome el conjunto $\{\sigma_{2^{\aleph_0}}\}$. Como $2^{\aleph_0}$ es un número cardinal caracterizable en segundo orden, hay un enunciado del $\mathscr{L}^2_=$ que es verdadero en cualquier estructura de cardinalidad $2^{\aleph_0}$, y sólo en esas. Por lo que, en segundo orden, no hay modelo numerable del enunciado $\sigma_{2^{\aleph_0}}$. □

[3]Este enunciado implica que D es numerable, aunque no todo D numerable cumple este enunciado. De hecho este enunciado expresa que D con ese orden, es un orden isomorfo al de los números naturales.

Definición 17. *$\langle \mathbb{A}, r\rangle$ es un conjunto bien ordenado (COBO) si y sólo si r es antirreflexiva en $\mathbb{A}$, r es transitiva en $\mathbb{A}$ y para todo $X \subseteq \mathbb{A}$, si $X \neq \emptyset$ entonces hay $y \in X$ tal que para todo $z \in X$: $\langle y, z\rangle \in r$ o $y = z$; tal y se llama r-mínimo de X.*

Ahora bien, para caracterizar el cardinal $\aleph_1$ utilizaremos el siguiente teorema, el cual no demostraremos aquí, pero el lector que este interesado puede ver la prueba en [A-C-M] pág.51.

Teorema 11. ***(Teorema de Enumeración)***

Todo buen orden es isomorfo a un único ordinal. Es decir, si $\langle \mathbb{A}, r\rangle$ es un COBO entonces existe un único ordinal α tal que $\langle \mathbb{A}, r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$.

Definición 18. *Sea $\langle \mathbb{A}, r\rangle$ un COBO. El tipo de orden de $\langle \mathbb{A}, r\rangle$, denotado $\tau(\langle \mathbb{A}, r\rangle)$ o simplemente $\tau(\mathbb{A})$, se define como el único ordinal α tal que $\langle \mathbb{A}, r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$.*

Teorema 12. *ω_1 se caracteriza por ser el ordinal infinito, no numerable y que se puede bien ordenar de tal forma que cualquier subconjunto acotado sea contable (finito o numerable).*

Demostración. Considere un conjunto $\mathbb{A}$ infinito, no numerable y que $\langle \mathbb{A}, r\rangle$ sea un buen orden como el de la hipótesis. Considere su tipo de orden $\langle \alpha, \in\rangle \cong \langle \mathbb{A}, r\rangle$. Como ω_1 es el mínimo ordinal no numerable, α es un ordinal tal que $\omega_1 \leq \alpha$. Mostremos que $\omega_1 \not< \alpha$. Supongamos que $\omega_1 < \alpha$, luego, $\omega_1 \subseteq \alpha$, por lo que ω_1 sería contable, lo cual es una contradicción. Por tanto $\omega_1 = \alpha$

□

Teorema 13. *El número cardinal $\aleph_1$ es caracterizable en segundo orden.*

Demostración. Ya vimos que en el lenguaje de segundo orden podemos expresar que un conjunto sea infinito y que sea numerable. Cuantificar sobre todos los subconjuntos, del universo de interpretación, que cumplan la propiedad de ser infinitos y decir que un conjunto esté bien ordenado son también expresables en el lenguaje de segundo orden. Luego, el enunciado $\sigma_{\aleph_1}$ en el lenguaje de segundo orden que resulta de decir: *el universo es infinito y no numerable y se puede bien ordenar de tal forma que cualquier subconjunto acotado sea contable*, será verdadero en una estructura si y sólo si, por el teorema 12, su universo tiene cardinalidad $\aleph_1$. □

Definición 19. *Un conjunto Σ de fórmulas es decidible si y sólo si hay un procedimiento efectivo tal que para cualquier fórmula α del lenguaje, el procedimiento decide que $\alpha \in \Sigma$ o bien que $\alpha \notin \Sigma$.*

Teorema 14. *El conjunto de los enunciados universalmente válidos del lenguaje de segundo orden no es decidible.*

Demostración. Tenemos dos enunciados $\sigma_{2^{\aleph_0}}$, $\sigma_{\aleph_1}$ que caracterizan al cardinal del continuo y al mínimo cardinal no numerable, respectivamente. Luego, el enunciado: $(\sigma_{2^{\aleph_0}} \leftrightarrow \sigma_{\aleph_1})$ es universalmente válido si y sólo si la Hipótesis del Continuo ($H.C.$) es verdadera. Sabemos que en la teoría axiomática de conjuntos de Zerfemelo Fraenkel con axioma de elección ZFE hay enunciados no decidibles, como por ejemplo la $H.C.$. Así, concluimos que hay enunciados de la lógica de segundo orden para los cuales *no es decidible* si son universalmente válidos o no. □

2.3. Aritmetización del lenguaje de segundo orden.

Intuitivamente, una aritmetización o Gödelización para un lenguaje es una función inyectiva que asigna números naturales a los símbolos de dicho lenguaje, de esta manera podemos asignarle números a expresiones y a conjuntos de expresiones (nos interesarán sobre todo las deducciones). Este enfoque nos permitirá introducir el concepto de relación definible en $\mathfrak{N}$. Los resultados pilares de esta sección son la imposibilidad de *decidir* si dado un número, este es la Gödelización de un enunciado universalmente válido en el lenguaje de segundo orden o no lo es; siendo también imposible *dar una numeración en algún orden* de las Gödelizaciones de enunciados universalmente válidas en lenguaje de segundo orden.

A menos que especifiquemos lo contrario, por *lenguaje de segundo orden* nos referiremos al lenguaje que introducimos en la sección 1 del capítulo 2. Por *lenguaje de segundo orden de la aritmética* nos referimos al lenguaje de segundo orden, cuyo conjunto de parámetros no lógicos es $\{0, s, <, +, *, E\}$.

Definición 20. *Una función h es una Gödelización para el lenguaje de segundo orden de la aritmética si y sólo si h es una función inyectiva que va del conjunto de los símbolos lógicos y parámetros del lenguaje de segundo orden en $\mathbb{N}$.*

Sea h una Gödelización para el lenguaje de segundo orden de la aritmética. Dada una expresión del lenguaje de segundo orden $\epsilon = u_0u_1...u_n$ definimos su *número de Gödel*, $\sharp\epsilon$, como sigue: $\sharp(u_0u_1...u_n) = \langle h(u_0), h(u_1), ..., h(u_n)\rangle = 2^{h(u_0)+1} * 3^{h(u_1)+1} * ... * P_n^{h(u_n)}$, donde P_n es el $n+1-$ésimo número primo.

Definición 21. *Si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n}$ denota al término $ss...s0$ donde s es el símbolo para sucesor y aparece n veces, a $\overline{n}$ se le llama* el numeral de n. *Obsérvese que $\overline{n}$ es un término de un lenguaje que tenga 0 y s en su tipo.*

Definición 22. *Sea T cualquier teoría en un lenguaje con 0 y s. Decimos que una relación R es representable en T si y sólo si hay una fórmula φ tal que para toda $a_1, ..., a_m$ en $\mathbb{N}$:*

$$\textit{si } (a_1, ..., a_n) \in R \textit{ entonces } \varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \in T; \textit{ y}$$
$$\textit{si } (a_1, ..., a_n) \notin R \textit{ entonces } \neg\varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \in T.$$

Definición 23. *Una fórmula $\varphi(v_1, ..., v_m, v_{m+1})$ representa funcionalmente a una función $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ en la estructura $\mathfrak{N}$ si y sólo si para toda $a_1, \ldots a_m \in \mathbb{N}$,*

$$\models_{\mathfrak{N}} \forall v_{m+1} \ (\varphi \ (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}, v_{m+1}) \leftrightarrow v_{m+1} = \overline{f(a_1, \ldots, a_m)})$$

Intuitivamente, lo que nos dice una fórmula φ que represente funcionalmente a f, es: "*yo me comporto como la función f*".

Lema 2. ***(Lema semántico del punto fijo, para la lógica de segundo orden.)***

Dada una fórmula β del lenguaje de segundo orden, en la que sólo v_1 aparece libre, se puede encontrar un enunciado σ tal que: $\models_{\mathfrak{N}} [\sigma \leftrightarrow \beta(\overline{\sharp\sigma})]$.

Demostración. Intuitivamente, lo que dice σ es: "β es verdadera respecto a mi".
Supongamos que $\theta(v_1, v_2, v_3)$ representa funcionalmente a una función
$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ en la estructura $\mathfrak{N}$, tal que $f(\sharp\alpha, n) = \sharp\ (\alpha(\overline{n}))$, donde α es una fórmula[4].

[4]Esta suposición es un hecho. La demostración de que tal función es representable funcionalmente está en [E1] págs. 325-334.

Consideremos la fórmula: $\pi_\sigma(v_1) : \forall v_3\ (\theta\ (v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3))$ (podemos suponer que v_3 es sustituible por v_1 en β), $\pi_\sigma(v_1)$ sólo tiene a v_1 libre y define al conjunto $\mathbb{A}_\sigma = \{n \in \mathbb{N} | \models_{\mathfrak{N}} \pi_\sigma(v_1)_{[S(v_1|n)]}\}$ en la estructura $\mathfrak{N}$, donde $\sharp\alpha \in \mathbb{A}_\sigma$ si y sólo si $\sharp\alpha(\overline{\sharp\alpha})$ está en el conjunto definido por β, es decir $\sharp\alpha(\overline{\sharp\alpha}) \in \{n \in \mathbb{N} | \models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{n})\}$.
Sea $q = \sharp\pi_\sigma(v_1)$ y sea σ :$\forall v_3\ (\theta\ (\overline{q}, \overline{q}, v_3) \to \beta(v_3))$. Nótese que σ es $\pi_\sigma(\overline{q})$ y nos asegura bajo la estructura $\mathfrak{N}$, que $\sharp\sigma$ está en el conjunto definido por β, es decir, $\sharp\sigma \in \{n \in \mathbb{N} | \models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{n})\}$.
Ahora procedemos a verificar: $\models_{\mathfrak{N}} [\sigma \leftrightarrow \beta(\overline{\sharp\sigma})]$.
$(\to)$ Supongamos que $\models_{\mathfrak{N}} \sigma$. Como θ representa funcionalmente a una función f cuyo valor en $\langle q, q\rangle$ es $\sharp\sigma$, por definición, $\models_{\mathfrak{N}} \forall v_3\ (\theta\ (\overline{q}, \overline{q}, v_3) \leftrightarrow v_3 = \overline{f(q,q)})$, pero como $f(q,q) = \sharp\sigma$, esto último es equivalente a: $\models_{\mathfrak{N}} \forall v_3\ (\theta\ (\overline{q}, \overline{q}, v_3) \leftrightarrow v_3 = \overline{\sharp\sigma})$...(1). Si en σ particularizamos $v_3 = \overline{\sharp\sigma}$, entonces tenemos que $\{\sigma\} \models \theta(\overline{q}, \overline{q}, \overline{\sharp\sigma}) \to \beta(\overline{\sharp\sigma})$ y como $\models_{\mathfrak{N}} (v_3 = \overline{\sharp\sigma})_{[s(v_3|\sharp\sigma)]}$, de (1) obtenemos $\models_{\mathfrak{N}} \theta(\overline{q}, \overline{q}, \overline{\sharp\sigma})$. Por tanto, $\models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{\sharp\sigma})$. Luego entonces $\models_{\mathfrak{N}} [\sigma \to \beta(\overline{\sharp\sigma})]$.
$(\leftarrow)$ Hay que mostrar que $\models_{\mathfrak{N}} [\beta(\overline{\sharp\sigma}) \to \sigma]$, es decir que $\models_{\mathfrak{N}} [\beta(\overline{\sharp\sigma}) \to (\forall v_3 \theta(\overline{q}, \overline{q}, v_3) \to \beta(v_3))]$.
Supongamos que $\models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{\sharp\sigma})$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\models_{\mathfrak{N}} \theta(\overline{q}, \overline{q}, \overline{n})$. Por (1), tenemos que $\models_{\mathfrak{N}} (\overline{n} = \overline{\sharp\sigma})$ ... (2). Pero $(\overline{n} = \overline{\sharp\sigma}) \to (\beta(\overline{\sharp\sigma}) \to \beta(\overline{n}))$ es una verdad lógica, luego $\models_{\mathfrak{N}} (\overline{n} = \overline{\sharp\sigma}) \to (\beta(\overline{\sharp\sigma}) \to \beta(\overline{n}))$. Por (2), tenemos entonces que $\models_{\mathfrak{N}} (\beta(\overline{\sharp\sigma}) \to \beta(\overline{n}))$ y por hipótesis teníamos que $\models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{\sharp\sigma})$, luego $\models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{n})$. Así pues, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\models_{\mathfrak{N}} [\theta(\overline{q}, \overline{q}, \overline{n}) \to \beta(\overline{n})]$, de donde
$\models_{\mathfrak{N}} \forall v_3(\theta(\overline{q}, \overline{q}, v_3) \to \beta(v_3))$. Finalmente tenemos $\models_{\mathfrak{N}} [\beta(\overline{\sharp\sigma}) \to \sigma]$

□

Definición 24. *Consideremos una estructura $\mathfrak{A}$ y una fórmula del lenguaje de segundo orden φ cuyas variables libres se encuentran entre $v_1, \ldots, v_k$, entonces podemos* construir *la relación de aridad k* definida en $\mathfrak{A}$ *por φ: $\{\langle a_1, \ldots, a_k\rangle : \models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[a_1,\ldots,a_k]}\ \}$.*

Se dice que una relación de aridad k sobre $|\mathfrak{A}|$ es definible en $\mathfrak{A}$ si y sólo si existe una fórmula (cuyas variables libres se encuentran entre $v_1, \ldots, v_n$, con $k \leq n$) que la define ahí.

En 1933, Tarski demostró que el conjunto de los números de Gödel de los enunciados del lenguaje de *primer orden* verdaderos en $\mathfrak{N}$ no es definible en $\mathfrak{N}$. Veamos este resultado para lógica de segundo orden.

Notación: $\sharp(U.V.^2)$ es el conjunto de los números de Gödel de los enunciados universalmente válidos de segundo orden.

Notación: $\sharp T^2(\mathfrak{N})$ es el conjunto de los números de Gödel de los enunciados del lenguaje de segundo orden verdaderos en $\mathfrak{N}$.

Teorema 15. ***(Teorema de indefinibilidad de Tarski)***

El conjunto $\sharp T^2(\mathfrak{N})$ no es definible en $\mathfrak{N}$.

Demostración. Considere β la fórmula de segundo orden que piense que podría definir a $\sharp T^2(\mathfrak{N})$. Por el lema del punto fijo para la lógica de segundo orden aplicado a $\neg\beta$ tenemos un enunciado σ tal que: $\models_{\mathfrak{N}} [\sigma \leftrightarrow \neg\beta(\overline{\sharp\sigma})]$.
Si β define a $\sharp T^2(\mathfrak{N})$ entonces intuitivamente, lo que dice σ es: "soy falsa en $\mathfrak{N}$".
Entonces por definición de verdad de Tarski:

$$\models_{\mathfrak{N}} \sigma \textit{ si y sólo si } \not\models_{\mathfrak{N}} \beta(\overline{\sharp\sigma})$$

de modo que o bien σ es verdadera en $\mathfrak{N}$ pero su $\sharp\sigma \notin \{n \in \mathbb{N} | \models_{\mathfrak{A}} \beta(\overline{n})\}$ o bien σ es falsa en $\mathfrak{N}$ y $\sharp\sigma \in \{n \in \mathbb{N} | \models_{\mathfrak{A}} \beta(\overline{n})\}$. Cualquiera de los dos casos demuestra que β no puede definir a $\sharp T^2(\mathfrak{N})$

□

Teorema 16. *$\sharp(U.V.^2)$ no es definible en $\mathfrak{N}$ mediante una fórmula de segundo orden.*

Demostración. Sea α la conjunción de los elementos de A^2_E. Por el Teorema 2, todo modelo de α es isomorfo a $\mathfrak{N}$. De modo que, para todo enunciado σ,

$$\sigma \in T^2(\mathfrak{N}) \text{ si y sólo si}^{(\star)} \ \{\alpha\} \models \sigma \text{ si y sólo si } (\alpha \to \sigma) \text{ es universalmente válida.}$$

Por lo tanto, $\sharp(U.V.^2)$ no es definible, pues de otro modo $\sharp T^2(\mathfrak{N})$ tendría que serlo.

$(\star)(\Rightarrow)$ Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de α, por el Teorema 2, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}$ y un isomorfismo entre estructuras preserva la verdad entre ellas, luego $\models_{\mathfrak{A}} \sigma$.
$(\Leftarrow)$ Todo modelo de α es isomorfo a $\mathfrak{N}$ luego $\models_{\mathfrak{N}} \sigma$

□

Definición 25. *Se dice que una relación en $\mathbb{N}$ es aritmética si y sólo si es definible en la estructura $\mathfrak{N}$.*

Corolario 5. *$\sharp T^2(\mathfrak{N})$ no es aritmético.*

Corolario 6. *$\sharp(U.V.^2)$ no es aritmético.*

Definición 26. *Una teoría T se llama axiomatizable si y sólo si hay un conjunto decidible Σ de enunciados del lenguaje de T, tal que los enunciados que son consecuencias lógicas de Σ coinciden con los enunciados de T. Es decir, tal que $Cn(\Sigma) = T$. A los enunciados de Σ se les llama axiomas propios de T. Dicho de otro modo, T es axiomatizable si y sólo si hay un conjunto decidible de enunciados Σ tal que $T = \{ \varphi | \varphi$ es enunciado y $\Sigma \models \varphi \}$.*

Definición 27. *Una teoría T se llama finitamente axiomatizable si y sólo si T es axiomatizable y el conjunto de axiomas propios Σ, es finito. En este caso, $T = Cn(\varphi)$, donde φ es la fórmula que resulta de la conjunción de los axiomas propios de T.*

Definición 28. *Una teoría T es consistente si y sólo si no hay fórmula φ tal que $\varphi \in T$ y $\neg\varphi \in T$.*

Definición 29. *Una relación R sobre números naturales es recursiva si y sólo si R es representable en una teoría consistente finitamente axiomatizable (en un lenguaje con 0 y s).*

El siguiente teorema se debe a Enderton[5], y no lo probaremos aquí.

Teorema 17. *Si R es recursiva entonces R es representable en $Cn(A^2_E)$.*

Que una relación R sea representable en $Cn(A^2_E)$ implica, por definición, que R es recursiva. Pero el teorema anterior afirma que, si R es representable en *cualquier* teoría consistente finitamente axiomatizable (en un lenguaje con 0 y s), entonces es representable en $Cn(A^2_E)$.

Teorema 18. *Si R es representable en $Cn(A^2_E)$ entonces R es definible en $\mathfrak{N}$.*

Demostración. Sea $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$. Luego, si $(a_1, ..., a_n) \in R$, entonces $A^2_E \models \varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n})$, y como $\mathfrak{N}$ es modelo de A^2_E, $\models_{\mathfrak{N}} \varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n})$. Por otro lado, si $(a_1, .., a_n) \notin R$, entonces $A^2_E \models \neg\varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n})$, por lo que $\not\models_{\mathfrak{N}} \varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n})$. Así, podemos concluir que $R = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n \mid \models_{\mathfrak{N}} \varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n})\}$, esto es, que R sea definible en $\mathfrak{N}$.

□

[5]Véase [E1], pág. 334.

Corolario 7. *Si R es recursiva entonces R es definible en $\mathfrak{N}$.*

Corolario 8. $\sharp(U.V.^2)$ *no es recursivo.*

Demostración. Del corolario 7, tenemos que si $\sharp(U.V.^2)$ no es definible en $\mathfrak{N}$, entonces $\sharp(U.V.^2)$ no es recursiva. Y el teorema 16 afirma que $\sharp(U.V.^2)$ no es definible en $\mathfrak{N}$.

□

Definición 30. *Decimos que una relación R es recursivamente numerable si y sólo si R es de la forma:*

$$\{\overline{a} \mid \exists b\langle \overline{a}, b\rangle \in Q\ \} \text{ con } Q \text{ recursiva. (Donde } \overline{a} \text{ abrevia a la } m\text{-ada ordenada } \langle a_1, ..., a_m\rangle \text{)}$$

Teorema 19. *Si R es una relación recursivamente numerable entonces R es definible en $\mathfrak{N}$.*

Demostración. Si R es una relación $m-aria$ recursivamente numerable, entonces es de la forma $\{\overline{a} \mid \exists b\langle \overline{a}, b\rangle \in Q\ \}$ con Q recursiva. Luego, por el corolario 7 aplicado a Q, tenemos que Q es definible en $\mathfrak{N}$, digamos por la fórmula $\varphi(v_1, ..., v_m, v)$. Así, la fórmula $\exists v\varphi(v_1, ..., v_m, v)$ define a la relación $\{\ \overline{a} \mid \exists b\langle \overline{a}, b\rangle \in Q\ \}$. Por lo tanto R es definible en $\mathfrak{N}$.

□

Corolario 9. $\sharp(U.V.^2)$ *no es recursivamente numerable.*

Demostración. Del teorema 19, tenemos que si $\sharp(U.V.^2)$ no es definible en $\mathfrak{N}$, entonces $\sharp(U.V.^2)$ no es recursivamente numerable. Y el teorema 16 afirma que si $\sharp(U.V.^2)$ no es definible en $\mathfrak{N}$.

□

Definición 31. *Un lenguaje $\mathscr{L}$ es razonable si y sólo si se puede dar una numeración del conjunto de parámetros y las propiedades de ser predicado n-ario y de ser función m-aria son decidibles.*

Así, el *Teorema de Numerabilidad* (que afirma que en un lenguaje razonable, el conjunto de los enunciados universalmente válidos de primer orden es recursivamente numerable), $falla$ para la lógica de segundo orden.

Aquí sale a relucir una discusión importante en lógica, pues la noción $informal$ de decidibilidad que introdujimos en la definición 19, sólo nos sirve para demostrar que ciertas relaciones son decidibles, pero no es adecuada para mostrar *indecidibilidad.* La siguiente afirmación es conocida como *la Tesis de Church* y no es un enunciado matemático susceptible de prueba o refutación, más bien se trata de una postura matemática que propone que la manera más adecuada de formalizar la noción informal de *decidible* es mediante la noción matemática de *recursiva.*

Tesis de Church: *Una relación es decidible si y sólo si es recursiva.*

Definición 32. *Un conjunto de fórmulas Σ es efectivamente numerable si y sólo si es numerable y además hay un procedimiento efectivo para dar una numeración suya. Equivalentemente, si hay una función efectivamente calculable f tal que $\Sigma = \{f(0), f(1), f(2), ...\}$.*

El siguiente enunciado es equivalente a la tesis de Church.

Tesis de Church segunda versión: *Una relación es efectivamente numerable si y sólo si es recursivamente numerable*

Aceptando *la Tesis de Church* podemos concluir que:

Teorema 20. *$\sharp(U.V.^2)$ no es decidible.*

Teorema 21. *$\sharp(U.V.^2)$ no es efectivamente numerable.*

El lector notará que en esencia lo que nos dice el teorema 20 coincide con el contenido del teorema 14, la diferencia es que en la demostración del teorema 14 *dimos* explícitamente un enunciado *indecidible*, en cambio el teorema 20 es resultado de *suponer* una afirmación *extra-matemática*, que no es susceptible de prueba o refutación formal.

2.4. Deducibilidad.

La relación de consecuencia de un lenguaje no es en absoluto constructiva. Esto es, no sugiere un camino para determinar si un enunciado es consecuencia de un conjunto de enunciados, ni siquiera para obtener algunas de las consecuencias del conjunto.

Obtenemos consecuencias, deduciendo, encadenando conclusiones obtenidas a partir de premisas, mediante transformaciones formales, de índole sintáctica. Sistematizamos los métodos de deducción en cálculos deductivos. Los cálculos contienen reglas de inferencia. Tal vez contengan también axiomas, pero éstos son prescindibles, en cuanto que un axioma puede considerarse como la conclusión de una regla sin premisas. Las reglas de inferencia del cálculo nos permiten construir deducciones. Dado un conjunto de enunciados Σ, una deducción a partir de Σ es una sucesión finita de fórmulas, cada una de las cuales o bien pertenece a Σ o bien es obtenida de las anteriores aplicando alguna regla de inferencia. Si α es la última fórmula de una deducción a partir de Σ, decimos que α es deducible a partir de Σ en el cálculo deductivo en cuestión y se denotará $\Sigma \vdash_S \alpha$.

Definición 33. *Un cálculo deductivo S es correcto respecto a la relación de consecuencia si y sólo si para todo conjunto de enunciados Σ y para todo enunciado α: $\Sigma \vdash_S \alpha$ implica que $\Sigma \models \alpha$*

Definición 34. *Un cálculo deductivo S es completo respecto a la relación de consecuencia si y sólo si para todo conjunto de enunciados Σ y para todo enunciado α: $\Sigma \models \alpha$ implica que $\Sigma \vdash_S \alpha$*

Definición 35. *Un cálculo deductivo S es correcto respecto a la validez si y sólo si para todo enunciado α: $\vdash_S \alpha$ implica que $\models \alpha$*

Definición 36. *Un cálculo deductivo S es completo respecto a la validez si y sólo si para todo enunciado α: $\models \alpha$ implica que $\vdash_S \alpha$*

Teorema 22. ***No** hay cálculo deductivo que sea correcto y completo con respecto a la relación de consecuencia de los lenguajes de segundo orden.*

Demostración. Supongamos que sí lo hay. Observemos que por la definición de deducción, tenemos que toda relación de deducibilidad es de carácter finito. Luego, por correctud, toda relación de consecuencia es de carácter finito así la lógica de segundo orden es compacta (aquí estamos utilizando la completud). Pero esto no puede ser, pues la lógica de segundo orden no es compacta. □

Teorema 23. *Un cálculo puede ser correcto respecto a la validez sin serlo respecto a la relación de consecuencia.*

Demostración. Sea S el cálculo deductivo que consta del conjunto de las tautologías en segundo orden, y que tenga una sola regla de inferencia, a saber: $\frac{\alpha(Q)}{\alpha(Q')}$ donde $\alpha(Q')$ es el resultado de sustituir cualquier predicado atómico Q de aridad n de α, por otro predicado Q' que tenga la misma aridad, en cada una de las presencias que tenga Q en α.

Luego, para todo enunciado α: $\vdash_S \alpha$ implica que $\models \alpha$. Pero si P y Q son dos predicados *distintos* de aridad uno, entonces de acuerdo a la única regla de inferencia tenemos que, $\{P(x)\} \vdash_S Q(x)$, sin embargo $P(x) \not\models Q(x)$. Por lo que, no pueden formar parte de un cálculo correcto con respecto a la consecuencia. □

El siguiente teorema es una consecuencia de uno de los teoremas de Gödel, y es para la lógica de primer orden.

Teorema 24. ***[Gödel, 1931]*** *Th($\langle \mathbb{N}, +, * \rangle$) no es decidible.*

Véase [E1].

Cuando afirmemos que sea posible transformar un enunciado α *de modo efectivo*,en otro enunciado α', queremos decir que, es posible transformar al enunciado α, mediante "un procedimiento efectivo que termina", en α'.

Teorema 25. *Si α_* es un enunciado del lenguaje de primer orden de tipo $\rho_* = \{+, *\}$ entonces es posible transformar α_* de modo efectivo, en un enunciado α_S del lenguaje de segundo orden con tipo $\rho_S = \{0, S\}$ de modo que: $\models_{\mathfrak{N}_*} \alpha_*$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{N}_S} \alpha_S$*

Demostración. En contraste con lo que ocurre en primer orden, son definibles en segundo orden las operaciones de suma y producto a partir de la de sucesor. La relación ternaria R que hay entre los números n, m y k si y sólo si $n + m = k$, es la menor relación ternaria Z tal que (1) para todo número i, $Z(i, 0, i)$, y (2) para cualesquiera números i, j, r, si $Z(i, j, r)$ entonces $Z(i, Sj, Sr)$. Así, si c es la constante cuya interpretación es el *cero*:

$$x + y = z \text{ si y sólo si } \forall Z((\forall u Zucu \land \forall u \forall v \forall w (Zuvw \to ZuSvSw)) \to Zxyz)$$

Para el producto tenemos algo análogo, $n * m = k$ si y sólo si los números n, m y k están en la menor relación ternaria Z tal que:

$$x * y = z \text{ si y sólo si } \forall Z((\forall u Zucc \land \forall u \forall v \forall w (Zuvw \to ZuSv(\text{“}w + u\text{”}))) \to Zxyz)$$

es decir sustituyendo "$w + u$" por la respectiva fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} &x * y = z \text{ si y sólo si } \forall Z((\forall u Zucc \land \forall u \forall v \forall w (Zuvw \to \\ &(\forall Z_1((\forall u_1 Z_1 u_1 c u_1 \land \forall u_2 \forall v_2 \forall w_2 (Z_1 u_2 v_2 w_2 \to Z_1 u_2 S v_2 S w_2)) \to Z_1 w u z_1) \to ZuSvz_1))) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to Zxyz) \end{aligned}$$

Por lo tanto la suma y el producto son definibles en términos de *cero* y *sucesor* mediante una fórmula de segundo orden. De esta manera dada $\alpha_* \in \mathfrak{L}^1_{\rho *}$ podemos eliminar las símbolos $+$ y $*$ de las fórmulas que las contengan transformándola de *modo efectivo* en una fórmula α_S de segundo orden con sólo c y S de modo que la verdad de ambas se preserva. Es decir, $\models_{\mathfrak{N}_*} \alpha_*$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{N}_S} \alpha_S$. □

Corolario 10. *Si $Th^2\mathfrak{N}_S$ es decidible, entonces $Th\mathfrak{N}_*$ es decidible.*

Del *Teorema 24* y *el Corolario 10*, se tiene que:

Corolario 11. *$Th^2\mathfrak{N}_S$ no es decidible.*

Definición 37. *Una teoría T se llama completa si y sólo si para todo φ enunciado del lenguaje de T, se cumple que $\varphi \in T$ o $(\neg\varphi) \in T$.*

Teorema 26. *Si $\mathfrak{A}$ es una ρ-estructura, entonces $Th(\mathfrak{A})$ es una teoría completa.*

Demostración. Sea φ un enunciado en el lenguaje cuyo tipo sea ρ. Supongamos que $\varphi \notin Th(\mathfrak{A})$. Entonces $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi$. Luego, por la definición de verdad de Tarski, $\models_{\mathfrak{A}} (\neg\varphi)$. Por tanto, $(\neg\varphi) \in Th(\mathfrak{A})$. □

Teorema 27. ***No** hay cálculo deductivo correcto y completo respecto a la validez de los enunciados del lenguaje de segundo orden.*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción. Para que un cálculo pueda ser usado para obtener verdades lógicas, debe ser decidible de manera efectiva el que un enunciado dado se obtenga como conclusión de una cierta regla de inferencia a partir de ciertas premisas. De esta manera, dada $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una sucesión finita de fórmulas, es posible decidir en un *número finito de pasos* si tal sucesión es o no una deducción según las reglas de inferencia del cálculo. Esto no significa que haya un método para determinar si una fórmula es o no deducible, sólo significa que dada una *supuesta* deducción de una fórmula, es posible decidir si es una deducción o no.
Puesto que sabemos generar las sucesiones finitas de fórmulas, y de cada una de éstas, sabemos decidir si es o no una deducción, podemos borrar, en las deducciones, todas las fórmulas menos la última, y así generar efectivamente *todas* las fórmulas deducibles en el cálculo.

Ahora bien, sea $\beta = S_1 \wedge S_2 \wedge S_P^2$. Luego, tenemos que si α es un enunciado del lenguaje cuyos símbolos son 0 y s, entonces $\alpha \in Th^2\mathfrak{N}_S$ si y sólo si $\{\beta\} \models \alpha$, si y sólo si $\models (\beta \to \alpha)$. De aquí se sigue que si hay un cálculo correcto y completo para la validez entonces $\vdash_S (\beta \to \alpha)$ si y sólo si $\alpha \in Th^2\mathfrak{N}_S$. Como el teorema 26 no asegura que $Th^2\mathfrak{N}_S$ es completa, también tenemos que $\vdash_S \neg(\beta \to \alpha)$ si y sólo si $\neg\alpha \in Th^2\mathfrak{N}_S$. Entonces habría un método para decidir si $\alpha \in Th^2\mathfrak{N}_s$ o si $\neg\alpha \in Th^2\mathfrak{N}_s$, y $Th^2\mathfrak{N}_s$ sería decidible, contradiciendo al Corolario 11. □

Capítulo 3

Lógica multivariada

Ahora regresamos a los lenguajes de primer orden, pero con muchos *tipos*[1] de variables, que abarcan diferentes universos. Más adelante aplicaremos esto al caso en el cual un tipo de variables es para los elementos de un universo, otro para los subconjuntos de ese universo, otro más para las relaciones binarias, y así sucesivamente. Para más adelante, lograr ver a la semántica del lenguaje de segundo orden como una semántica del lenguaje multivariado.

En matemáticas a veces decimos cosas no muy formales, como "Usaremos letras griegas para ordinales, letras mayúsculas para conjuntos de enteros,..." En efecto, vamos adoptando varios tipos de variables o lenguaje *multivariado*, de modo que cada tipo tiene su propio universo. Como es de esperarse, no hay cambio drástico respecto al caso del lenguaje de primer orden (o lenguaje *monovariado*), donde hay un solo tipo de variable.

Supongamos que tenemos un conjunto I, cuyos elementos se denominan tipos de variables, y símbolos dados del siguiente modo:

A. Símbolos lógicos

0. Paréntesis y coma: (,), , .

1. Símbolos de conectivo: $\neg, \rightarrow$.

2. Variables para cada tipo i, hay variables $v_1^i, v_2^i, ...$ de tipo i.

3. Símbolos de igualdad: para algunos $i \in I$ puede haber un símbolo $=_i$, que es un símbolo de igualdad de tipo $\langle i, i \rangle$.

B. Parámetros

0. Símbolos de cuantificador: para cada tipo i, hay un símbolo de cuantificador universal $\forall_i$.

1. Símbolos de predicado: para cada $n > 0$ y cada $n-ada$ $\langle i_1, ..., i_n \rangle$ de tipos, hay un conjunto (que podría ser vacío) de símbolos de predicado de n argumentos, cada uno de los cuales se dice que es de tipo $\langle i_1, ..., i_n \rangle$.

[1]Aquí, con *tipo de variable* nos estamos refiriendo a un conjunto de variables que son de un mismo *estilo*. El lector no debe confundirlo con el concepto de *tipo de semejanza*, que definimos en la página 2.

2. Símbolos de constante: para cada tipo i, hay un conjunto (que podría ser vacío) de símbolos de constante, cada uno de los cuales se dice que es de tipo i.

3. Símbolos de función: para cada $n > 0$ y cada $(n+1) - ada$ $\langle i_1, ..., i_n, i_{n+1} \rangle$ de tipos, hay un conjunto (que podría ser vacío) de símbolos de función de n argumentos, cada uno de los cuales se dice que es de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i_{n+1} \rangle$.

Como se suele hacer, debemos suponer que estas clases de símbolos son disjuntas y además que ningún símbolo es sucesión finita de otros símbolos.

A cada término se le asignará un único tipo. Definamos el conjunto de los términos de tipo i inductivamente, en forma simultánea para todo i:
1. Cualquier variable de tipo i o símbolo de constante de tipo i es un término de tipo i.
2. Si $t_1, ..., t_n$ son términos de tipo $i_1, ..., i_n$, respectivamente, y f es un símbolo de función de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i \rangle$ entonces $ft_1, ..., t_n$ es un término de tipo i.

Esta definición se puede reformular de un modo que resulte más familiar. El conjunto de los pares $\langle t, i \rangle$ tal que t es un término de tipo i se construye (o se genera) a partir del conjunto básico

$$\{\langle v_n^i, i \mid n \geq 1 \text{ e } i \in I \rangle\} \cup \{\langle c, i \rangle \mid c \text{ es símbolo de constante de tipo } i\}$$

por medio de las operaciones que, para un símbolo de función de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i \rangle$, produce el par $\langle ft_1 \cdots t_n, i \rangle$ a partir de los pares $\langle t_1, i_1 \rangle$,...,$\langle t_n, i_n \rangle$.

Una fórmula atómica es una sucesión $(t_1 =_i t_2)$ con t_1 y t_2 del tipo i, o bien una sucesión $Pt_1, ..., t_n$ que consiste en un símbolo de predicado de tipo $\langle i_1, ..., i_n \rangle$ y términos $t_1, ..., t_n$ de tipo $i_1, ..., i_n$, respectivamente. Las fórmulas *no* atómicas se forman, entonces, usando los conectivos $\neg, \rightarrow$ y los cuantificadores $\forall_i v_n^i$ de la manera usual.

3.1. Verdad y modelos para la lógica multivariada

Una estructura multivariada $\mathfrak{A}$ es una función sobre el conjunto de los parámetros que asigna a cada uno el tipo de objeto correcto:

1. Al símbolo de cuantificador $\forall_i$, $\mathfrak{A}$ le asigna un objeto no vacío $|\mathfrak{A}|_i$ llamado el *universo* de $\mathfrak{A}$ de tipo i.

2. A cada símbolo de predicado P de tipo $\langle i_1, ..., i_n \rangle$, $\mathfrak{A}$ le asigna una relación

$$P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|_{i_1} \times ... \times |\mathfrak{A}|_{i_n}.$$

3. A cada símbolo de constante c de tipo i, $\mathfrak{A}$ le asigna un objeto $c^{\mathfrak{A}}$ en $|\mathfrak{A}|_i$.

4. A cada símbolo de función f de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i \rangle$, $\mathfrak{A}$ le asigna una función

$$f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|_{i_1} \times ... \times |\mathfrak{A}|_{i_n} \rightarrow |\mathfrak{A}|_i.$$

3.1.1. Satisfacción para la lógica multivariada

Sean φ una fórmula del lenguaje multivariado, $\mathfrak{A}$ una estructura multivariada, $s : \bigcup_{i\in I} V_i \to \bigcup_{i\in I} |\mathfrak{A}|_i$ una asignación de la unión de los conjuntos de variables de tipo i en la unión de los universos de tipo i, tal que $\forall i \in I$, $\forall v_j^i \in V_i$, $s(v_j^i) \in |\mathfrak{A}|_i$. Definiremos que significa que $\mathfrak{A}$ $satisfaga\ a\ \varphi\ con\ s$:

I. Términos Definimos la extensión: $\overline{s} : \bigcup_{i\in I} T_i \to \bigcup_{i\in I} |\mathfrak{A}|_i$, una función de la unión de los conjuntos T_i de todos los términos de tipo i, en la unión de los universos de tipo i, donde si t es de tipo i, entonces $\overline{s}(t) \in |\mathfrak{A}|_i$. Nuevamente la idea es que $\overline{s}(t)$ deberá ser un objeto de la unión de los universos de tipo i, tal que si $t \in T_i$, entonces pertenece al universo $|\mathfrak{A}|_i$ y que se nombra mediante el término $t \in T_i$. Definimos $\overline{s}$ por recursión, como sigue:

1. Para cada variable x de tipo i, $\overline{s}(x) = s(x)$

2. Para cada símbolo de constante c de tipo i, $\overline{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.

3. Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos de tipo $i_1, ..., i_n$ respectivamente, y f es un símbolo de función de n argumentos de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i\rangle$, entonces $\overline{s}(ft_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$

Una vez más, la existencia de una única extensión $\overline{s}$ de s, se sigue del Teorema de Recursión (ver [E1] Secc. 4 Cap. I), si utilizamos el hecho de que los términos tienen descomposiciones únicas.

II. Fórmulas atómicas

1.1. $\models_{\mathfrak{A}} (t_1 =_i t_2)_{[s]}$ si y sólo si t_1 y t_2 son del tipo i y $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$.

1.2. Para un parámetro de predicado P de n argumentos de tipo $\langle i_1, ..., i_n\rangle$,

$\models_{\mathfrak{A}} P(t_1, \ldots, t_n)_{[s]}$ si y sólo si $t_1, ..., t_n$ son de tipo $i_1, ..., i_n$ respectivamente, y $(\overline{s}(t_1)\ , \ldots, \overline{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$.

Como las demás fórmulas fueron definidas por inducción, definiremos la satisfacción por recursión.

2. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\phi_{[s]}$ si y sólo si $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi_{[s]}$

3. $\models_{\mathfrak{A}} (\phi \to \psi)_{[s]}$ si y sólo si o bien $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi_{[s]}$, o bien $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$ o ambos.

4. $\models_{\mathfrak{A}} \forall_i x_i \phi_{[s]}$ si y sólo si para todo $d \in |\mathfrak{A}|_i$, tenemos: $\models_{\mathfrak{A}} \phi_{[s(x_i|d)]}$

Aquí $s(x_i|d)$ es una función exactamente como s, excepto que en la variable x_i de tipo i, toma el valor $d \in |\mathfrak{A}|_i$. Esto se puede expresar mediante la ecuación que se definió en la sección 1.2.

Definición 38. *Se dice que dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes (lo cual se denota $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) si y sólo si para cualquier enunciado α,*

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha \text{ si y sólo si } \models_{\mathfrak{B}} \alpha$$

En una estructura multivariada, los universos de los distintos tipos pueden o no ser disjuntos, pero no tenemos símbolos de igualdad *entre* tipos distintos; cualquier situación de universos no disjuntos debe considerarse accidental. En particular, siempre habrá una estructura elementalmente equivalente cuyos universos son disjuntos.

3.2. Reducción a la lógica monovariada

A veces los lenguajes multivariados son convenientes, pero no hay algo escencial que podamos hacer con ellos que no se pueda hacer sin ellos. Hay una *traducción sintáctica* entre fórmulas multivariadas y fórmulas monovariadas, que nos permite $transformar$ una estructura multivariada en una estructura para el lenguaje monovariado "traducido".

Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje multivariado y consideremos un lenguaje monovariado $\mathscr{L}^*$ que tenga todos los símbolos de predicado, de constante y de función de $\mathscr{L}$. Además, tendrá un símbolo de predicado Q_i de un argumento para cada $i \in I$.

Traduciremos *sintácticamente* cada fórmula multivariada φ a una fórmula monovariada φ^*. En esta traducción, todos los símbolos $=_i$ se reemplazan por $=$. El *único* otro cambio está en los cuantificadores (el símbolo de cuantificador y las variables cuantificadas): reemplazamos

$$\forall_i v_n^i \psi(v_n^i) \qquad \text{por} \qquad \forall v(Q_i v \to \psi^*(v))$$

donde v es una variable elegida de modo que no haya conflicto con las otras variables y $\psi*$ es la traducción de ψ que se esta definiendo. Entonces decimos que los cuantificadores de tipo i están "$relativizados$" a Q_i. Las variables libres se dejan sin cambio.

Volviendo a la semántica, podemos $transformar$ una estructura multivariada $\mathfrak{A}$ en una estructura $\mathfrak{A}^*$ para el lenguaje monovariado anterior. El universo $|\mathfrak{A}^*|$ es la unión $\bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}|_i$ de todos los universos de $\mathfrak{A}$. Le asignamos a Q_i el conjunto $|\mathfrak{A}|_i$. La estructura $\mathfrak{A}^*$ concuerda con $\mathfrak{A}$ en la interpretación de todos los símbolos de predicado y de constante. Para cada símbolo de función f, la función $f^{\mathfrak{A}^*}$ es una *extensión arbitraria* de $f^{\mathfrak{A}}$. Desde luego, este último enunciado no especifica $f^{\mathfrak{A}^*}$ por completo pero los resultados que daremos para $\mathfrak{A}^*$ se cumplen para cualquier estructura obtenida del modo que acabamos de describir.

Observación 1. *La función asignación de la lógica multivariada* ***coincide*** *con la función asignación de la lógica monovariada.*

Lema 3. *Un enunciado multivariado σ es verdadero en $\mathfrak{A}$ si y sólo si σ^* es verdadero en $\mathfrak{A}^*$.*

Demostración. Para probar esto, afirmamos algo más fuerte acerca de la fórmulas y asignaciones:

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]} \text{ si y sólo si } \models_{\mathfrak{A}^*} \varphi^*_{[s]}$$

donde $s(v_n^i) \in |\mathfrak{A}|_i$. Probaremos esto por inducción sobre la formación de fórmulas.

1. Para el caso de las fórmulas atómicas: Sean t_1 y t_2 términos del tipo i, $\models_{\mathfrak{A}} (t_1 =_i t_2)_{[s]}$ si y sólo si $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$ si y sólo si, de la observación 1, $\models_{\mathfrak{A}^*} (t_1 = t_2)_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}^*} (t_1 =_i t_2)^*_{[s]}$. Como $\mathfrak{A}^*$ concuerda con $\mathfrak{A}$ en todos los símbolos de predicado, entonces para un parámetro de predicado $n-ario$ P, de tipo $\langle i_1, ..., i_n\rangle$, $\models_{\mathfrak{A}} P(t_1, ..., t_n)_{[s]}$ si y sólo si $(\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{A}^*}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}^*} P(t_1, ..., t_n)_{[s]}$ si y sólo si[2] $\models_{\mathfrak{A}^*} (P(t_1, ..., t_n))^*_{[s]}$

2. Hipótesis inductiva: supongamos que si φ es fórmula multivariada entonces $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}^*} \varphi^*_{[s]}$

3. Paso inductivo, para la negación, la implicación y la cuantificación universal:

$\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi_{[s]}$ si y sólo si, por la definición de verdad de Tarski, $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ si y sólo si, por la hipótesis inductiva, $\not\models_{\mathfrak{A}^*} \varphi^*_{[s]}$ si y sólo si, por la definición de verdad de Tarski, $\models_{\mathfrak{A}^*} \neg\varphi^*_{[s]}$

$\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)_{[s]}$ si y sólo si, por la definición de verdad de Tarski, $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ o bien $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$ si y sólo si, por hipótesis inductiva, $\not\models_{\mathfrak{A}^*} \varphi^*_{[s]}$ o bien $\models_{\mathfrak{A}^*} \psi^*_{[s]}$ si y sólo si, por la definición de verdad de Tarski, $\models_{\mathfrak{A}^*} (\varphi^* \to \psi^*)_{[s]}$

Para la cuantificación universal hay que ver: $\models_{\mathfrak{A}} \forall_i x_i \varphi(x_i)_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}^*} \forall v(Q_i v \to \varphi^*(v))_{[s]}$

Supongamos que $\models_{\mathfrak{A}} \forall_i x_i \varphi(x_i)_{[s]}$ y sea $a \in Q_i^{\mathfrak{A}} = |\mathfrak{A}|_i$. Luego, $\models_{\mathfrak{A}} \varphi(x_i)_{[s(x_i|a)]}$ si y sólo si, por la hipótesis inductiva, $\models_{\mathfrak{A}^*} \varphi^*(x_i)_{[s(x_i|a)]}$. Por lo tanto, $\models_{\mathfrak{A}^*} \forall v(Q_i v \to \varphi^*(v))_{[s]}$

Supongamos que $\models_{\mathfrak{A}^*} \forall v(Q_i v \to \varphi^*(v))_{[s]}$ y sea $d \in |\mathfrak{A}|_i = Q_i^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}^*|$. Luego, $\models_{\mathfrak{A}^*} \varphi^*(v)_{[s(v|d)]}$ si y sólo si, por la hipótesis inductiva, $\models_{\mathfrak{A}} \varphi(v)_{[s(v|d)]}$. Por lo tanto, $\models_{\mathfrak{A}} \forall_i x_i \varphi(x_i)_{[s]}$

$\square$

Consideraremos ahora la otra dirección. Una estructura monovariada no siempre se puede convertir en una estructura multivariada con más de un tipo de variables. Por lo tanto, *impondremos* algunas condiciones. Sea Φ el conjunto que consta de los siguientes enunciados monovariados:
1. $\exists v\ Q_i v$, para cada $i \in I$.
2. $\forall v_1 \cdots \forall v_n((Q_{i_1} v_1 \wedge \cdots \wedge Q_{i_n} v_n) \to Q_i f v_1 \cdots v_n)$, para cada símbolo de función f de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i\rangle$. Incluimos el caso $n = 0$, en el cual el enunciado anterior se convierte en $Q_i c$ para un símbolo de constante c de tipo i.

Lema 4. *Si $\mathfrak{A}$ es un modelo multivariado, entonces $\mathfrak{A}^*$ es modelo monovariado de Φ.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo multivariado.

1. Sea $i \in I$, como para cada $i \in I$, $|\mathfrak{A}|_i \neq \emptyset$ entonces hay $a \in |\mathfrak{A}|_i = Q_i^{\mathfrak{A}^*}$ luego $\models_{\mathfrak{A}^*} \exists v\ Q_i v$.

[2]La traducción de un predicado es el mismo predicado.

2. Sea $(a_1, \cdots, a_n) \in |\mathfrak{A}|_{i_1} \times \cdots \times |\mathfrak{A}|_{i_n} = Q_{i_1}^{\mathfrak{A}^*} \times, ..., \times Q_{i_n}^{\mathfrak{A}^*}$, f un símbolo de función de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i\rangle$. Si $f^{\mathfrak{A}^*}$ es una extensión arbitraria de $f^{\mathfrak{A}}$, entonces $f(a_1, ..., a_n) \in |\mathfrak{A}|_i = Q_i^{\mathfrak{A}^*}$, luego $\models_{\mathfrak{A}^*} \forall v_1 \cdots \forall v_n((Q_{i_1} v_1 \wedge \cdots \wedge Q_{i_n} v_n) \to Q_i f v_1 \cdots v_n)$

$\square$

Un modelo monovariado $\mathfrak{B}$ de Φ se puede convertir en un modelo multivariado $\mathfrak{B}^\sharp$. La conversión se lleva a cabo del siguiente modo:

$|\mathfrak{B}^\sharp|_i = Q_i^{\mathfrak{B}}$;

$P^{\mathfrak{B}^\sharp} = P^{\mathfrak{B}} \cap (Q_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \cdots \times Q_{i_n}^{\mathfrak{B}})$, donde P es un símbolo de predicado de tipo $\langle i_1, ..., i_n\rangle$;

$c^{\mathfrak{B}^\sharp} = c^{\mathfrak{B}}$;

$f^{\mathfrak{B}^\sharp} = f^{\mathfrak{B}} \cap (Q_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \cdots \times Q_{i_n}^{\mathfrak{B}} \times Q_i^{\mathfrak{B}})$, la restricción de $f^{\mathfrak{B}}$ a $Q_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \cdots \times Q_{i_n}^{\mathfrak{B}}$, donde f es un símbolo de función de tipo $\langle i_1, ..., i_n, i\rangle$.

Lema 5. *(a) Si $\mathfrak{B}$ es un modelo de Φ, entonces $\mathfrak{B}^\sharp$ es una estructura multivariada. Además, (b) un enunciado σ es verdadero en $\mathfrak{B}^\sharp$ si y sólo si σ^* es verdadero en $\mathfrak{B}$.*

Demostración. (a) Si $\mathfrak{B}$ es modelo de Φ, entonces tenemos la garantía de que para todo $i \in I$, $\emptyset \neq Q_i^{\mathfrak{B}} = |\mathfrak{B}^\sharp|_i$. Así, para todo $i \in I$, $\emptyset \neq |\mathfrak{B}^\sharp|_i$, es decir tenemos "*partido*" al universo $|\mathfrak{B}^\sharp|$ y además los enunciados del inciso 2 del conjunto Φ nos aseguran que las funciones "relativizadas" en $\mathfrak{B}$ se comportan como funciones multivariadas en $\mathfrak{B}^\sharp$. Luego, $\mathfrak{B}^\sharp$ es multivariada.

(b) Lo probaremos por inducción sobre la formación de fórmulas.

1. Para el caso de las fórmulas atómicas: Sean t_1 y t_2 términos del tipo i, $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} (t_1 =_i t_2)_{[s]}$ si y sólo si $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} (t_1 = t_2)_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} (t_1 =_i t_2)^*_{[s]}$.
Para un parámetro de predicado $n - ario$ P, de tipo $\langle i_1, ..., i_n\rangle$, $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} P(t_1, ..., t_n)_{[s]}$ si y sólo si $(\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{B}} \cap (Q_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \cdots \times Q_{i_n}^{\mathfrak{B}})$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} P^*(t_1, ..., t_n)_{[s]}$, pues, traducir (con $*$) al símbolo de predicado P, no lo modifica.

2. Hipótesis inductiva: supongamos que si φ es fórmula multivariada, entonces $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \varphi_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} \varphi^*_{[s]}$.

3. Paso inductivo, para la negación, la implicación:

$\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \neg\varphi_{[s]}$ si y sólo si, por la definición de verdad de Tarski, $\not\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \varphi_{[s]}$ si y sólo si, por la hipótesis inductiva, $\not\models_{\mathfrak{B}} \varphi^*_{[s]}$ si y sólo si, por la definición de verdad de Tarski, $\models_{\mathfrak{B}} \neg\varphi^*_{[s]}$

$\models_{\mathfrak{B}^\sharp} (\varphi \to \psi)_{[s]}$ si y sólo si. por la definición de verdad de Tarski, $\not\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \varphi_{[s]}$ o bien $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \psi_{[s]}$ si y sólo si, por hipótesis inductiva, $\not\models_{\mathfrak{B}} \varphi^*_{[s]}$ o bien $\models_{\mathfrak{B}} \psi^*_{[s]}$ si y sólo si, por definición de verdad de Tarski, $\models_{\mathfrak{B}} (\varphi^* \to \psi^*)_{[s]}$

Para el cuantificador universal hay que ver que: $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \forall_i x_i \varphi(x_i)_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} \forall v(Q_i v \to \varphi^*(v))_{[s]}$.

Supongamos que $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \forall_i x_i \varphi(x_i)_{[s]}$ y sea $a \in Q_i^{\mathfrak{B}} = |\mathfrak{B}^\sharp|_i$. Luego, $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \varphi(x_i)_{[s(x_i|a)]}$ si y sólo si, por hipótesis inductiva, $\models_{\mathfrak{B}} \varphi^*(x_i)_{[s(x_i|a)]}$. Por lo tanto, $\models_{\mathfrak{B}} \forall v(Q_i v \to \varphi^*(v))_{[s]}$.

Supongamos que $\models_{\mathfrak{B}} \forall v(Q_i v \to \varphi^*(v))_{[s]}$ y sea $d \in |\mathfrak{B}^\sharp|_i = Q_i^{\mathfrak{B}}$. Luego, $\models_{\mathfrak{B}} \varphi^*(v)_{[s(v|d)]}$ si y sólo si, por la hipótesis inductiva, $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \varphi(v)_{[s(v|d)]}$. Por lo tanto, $\models_{\mathfrak{B}^\sharp} \forall_i x_i \varphi(x_i)_{[s]}$.

□

Nótese que en general $\mathfrak{B}^{\sharp^*}$ no es igual a $\mathfrak{B}$, pues $|\mathfrak{B}|$ puede contener objetos que a ningún $Q_i^{\mathfrak{B}}$ pertenecen. Por otro lado, observe que $\mathfrak{A}^{*^\sharp}$ sí es igual a $\mathfrak{A}$. La razón de esto es que cuando "monovariamos" una estructura multivariada, las relativizaciones de los cuantificadores de tipo i *conservan* la información sobre quiénes son los universos de tipo i, así cuando "multivariamos" dicha estructura, las relativizaciones *coinciden* con los universos de tipo i de la estructura multivariada inicial.

Teorema 28. *En el lenguaje multivariado*

$$\Sigma \models \sigma$$

si y sólo si en el lenguaje monovariado

$$\Sigma^* \cup \Phi \models \sigma^*.$$

Demostración. Supongamos que $\Sigma \models \sigma$ y sea $\mathfrak{B}$ un modelo monovariado de $\Sigma^* \cup \Phi$ (donde $\Sigma^* = \{\sigma^* | \sigma \in \Sigma\}$). Entonces, por el lema 5, $\mathfrak{B}^\sharp$ es un modelo de Σ. Por lo tanto, $\mathfrak{B}^\sharp$ es modelo de σ. Así que nuevamente por el lema 5, $\mathfrak{B}$ es modelo monovariado de σ^*.

Supongamos que $\Sigma^* \cup \Phi \models \sigma^*$, y sea $\mathfrak{A}$ un modelo multivariado de Σ. Entonces por el lema 3, $\mathfrak{A}^*$ es modelo de Σ^* y por el lema 4 aplicado a $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ es modelo monovariado de Φ. Luego, $\mathfrak{A}^*$ es modelo de $\Sigma^* \cup \Phi$ y por tanto $\mathfrak{A}^*$ es modelo de σ^*. Nuevamente por el lema 3, $\mathfrak{A}$ es modelo de σ, de donde $\Sigma \models \sigma$.

□

Este teorema relaciona el lenguaje multivariado con el monovariado y nos permitirá *rescatar* tres teoremas importantes a partir de los resultados correspondientes para la lógica monovariada.

Teorema 29. ***(Teorema de compacidad para la lógica multivariada.)***

Si todo subconjunto finito de un conjunto Σ de enunciados multivariados tiene modelo, entonces Σ tiene modelo (multivariado).

Demostración. Supongamos que todo subconjunto finito Σ_0 de Σ tiene un modelo multivariado $\mathfrak{A}_0$. Entonces por el lema 3, cualquier subconjunto finito Σ_0^* de Σ^* tiene un modelo monovariado $\mathfrak{A}_0^*$. En consecuencia por el teorema de compacidad ordinario, Σ^* tiene un modelo monovariado $\mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{B}^\sharp$ es un modelo multivariado de Σ.

□

Para entender la demostración del *Teorema de numerabilidad para la lógica multivariada,* utilizaremos un resultado que no demostraremos aquí, a saber:

Teorema 30. *Si A es un conjunto de enunciados tal que $\sharp A$ es recursivo, entonces $\sharp CnA$ es recursivamente numerable.*

La demostración formal de este teorema depende de verificar que ciertas relaciones son representables[3].

Teorema 31. ***(Teorema de Numerabilidad para la lógica multivariada.)***

Para un lenguaje multivariado recursivamente numerado, el conjunto de los ***números*** *de* ***Gödel*** *de los enunciados* ***lógicamente válidos*** *es recursivamente numerable.*

Demostración. Para un enunciado multivariado σ, por el teorema 28 con $\Sigma = \emptyset$, tenemos que:

$$\models \sigma \qquad \text{si y sólo si} \qquad \Phi \models \sigma^*.$$

Dado un enunciado α podemos *decidir* si $\alpha \in \Phi$ o $\alpha \notin \Phi$, así, por la *tesis de Church* $\sharp\Phi$ es recursivo. Entonces por el teorema 30, $\sharp Cn\Phi$ es recursivamente numerable.

□

Teorema 32. ***(Teorema de Löwenheim-Skolem para la lógica multivariada)***

Para cualquier estructura multivariada infinita (de un lenguaje numerable) hay una estructura numerable elementalmente equivalente a ella.

Demostración. Supongamos que la estructura multivariada dada es $\mathfrak{A}$. Entonces, por los lemas 5 y 6, $\mathfrak{A}^*$ es un modelo monovariado de $(Th\mathfrak{A})^* \cup \Phi$ (donde $(Th\mathfrak{A})^* = \{\alpha^* | \models_{\mathfrak{A}^*} \alpha^*\}$). De ahí que por el teorema de Löwenheim-Skolem para la lógica de primer orden, $(Th\mathfrak{A})^* \cup \Phi$ tiene un modelo numerable $\mathfrak{B}$ que es elementalmente equivalente a $\mathfrak{A}^*$. En consecuencia, por el lema 5, $\mathfrak{B}^\sharp$ es un modelo multivariado de $Th\mathfrak{A}$ numerable (pues $\bigcup_{i\in I} |\mathfrak{B}^\sharp|_i = |\mathfrak{B}| = \aleph_0$) y es elementalmente equivalente a $\mathfrak{A}$.

□

[3]Véase [E1] pág. 345.

Capítulo 4

Estructuras generales

Continuemos con nuestra discusión sobre la Lógica de Segundo Orden. En el capítulo 2 discutimos la sintaxis, es decir cómo se construyen las fórmulas de segundo orden, y la semántica, es decir el concepto de estructura y la definición de satisfacción y verdad.

Dejemos la sintaxis sin cambios, pero veamos una alternativa para la semántica. La idea es considerar el lenguaje de segundo orden, como un lenguaje elemental (es decir, de primer orden) pero con varios tipos de variables. El resultado será dejar abierto a la interpretación no sólo el universo que abarcan las variables individuales, sino también los universos para las variables de predicado y de función. En particular este enfoque es adecuado para la teoría de números, pues los *ω-modelos del análisis* serán modelos de la teoría de números, de segundo orden, cuyo universo de individuos es $\mathbb{N}$ y cuyos universos para variables de predicado y de función, no son necesariamente los universos de la lógica de segundo orden que presentamos en el capítulo 2.

4.1. El lenguaje multivariado

Consideraremos un lenguaje multivariado (de primer orden) construido a partir del lenguaje de segundo orden del capítulo 2.

Tomamos $\aleph_0$ tipos de objetos: el tipo individual (con variables $v_1, v_2, ...$); para cada $n > 0$, el tipo de predicados de n argumentos (con variables $X_1^n, X_2^n, ...$); y para cada $n > 0$, el tipo de función de n argumentos (con variables $F_1^n, F_2^n, ...$). *Usaremos la igualdad (=) sólo entre términos de tipo individual.* Los parámetros de predicado y de función de nuestro lenguaje de segundo orden dado, también serán parámetros del lenguaje multivariado que estamos construyendo. Para un parámetro de función f, el término $ft_1...t_2$ es de tipo individual. *Los únicos términos de tipo de predicado o de función son las variables de esos tipos.*

Además, usaremos ahora dos clases nuevas de parámetros. Para cada $n > 0$, hay un parámetro de predicado de *pertenencia* ϵ_n que toma, como argumentos, un término del tipo de predicado *$n - ario$* (es decir una variable X_m^n) y n términos del tipo individual. Por ejemplo:

$$\epsilon_3(X^3, v_1, v_2, v_3)$$

es una fórmula. Su interpretación propuesta es que la terna denotada con $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ debe pertenecer a la relación denotada con X^3. Esta es exactamente la interpretación asignada previamente a la fórmula de segundo orden:

$$X^3 v_1 v_2 v_3$$

y de hecho, podemos identificar mentalmente la cercanía de estas dos fórmulas.

Para cada $n > 0$, hay también un parámetro de función *evaluación* E_n, que toma como argumentos un término de tipo de función $n - aria$ (es decir, una variable F^n_m) y n términos de tipo individual. El término resultante:

$$E_n(F^n, t_1, ..., t_n)$$

es él mismo de tipo individual. Nuevamente podemos identificar mentalmente la cercanía del término $E_n(F^n, t_1, ..., t_n)$ con el anterior $F^n(t_1, ..., t_n)$

De esta manera, podemos realizar una traducción entre el lenguaje de segundo orden del capítulo 2 y el presente lenguaje multivariado: en una dirección agregamos los símbolos ϵ_n y E_n; en la otra los quitamos. El propósito de estos símbolos es hacer que el lenguaje multivariado que acabamos de describir, esté de acuerdo con el del capítulo 3.

Una estructura multivariada tiene universos para cada tipo y asigna objetos adecuados a los diversos parámetros. Para empezar probaremos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ϵ_n y E_n se interpretan como la pertenencia y la evaluación genuinas.

Teorema 33. *(Versión multivariada del teorema de homomorfismo).*
Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, y sea s una función de $\bigcup_{i\in I} |V|_i$ la unión de los conjuntos de las variables de tipo i en $\bigcup_{i\in I} |\mathfrak{A}|_i$ la unión de los universos de tipo i.
(a) Para cualquier término t, tenemos $h(\overline{s}(t)) = \overline{h\circ s}(t)$, donde $\overline{s}(t)$ se calcula en $\mathfrak{A}$ y $\overline{h\circ s}(t)$ se calcula en $\mathfrak{B}$.
(b) Para cualquier fórmula α libre de cuantificadores, que no tenga símbolo de igualdad,

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha_{[s]} \text{ si y sólo si } \models_{\mathfrak{B}} \alpha_{[h\circ s]}.$$

(c) Si h es uno a uno y tenemos la igualdad sólo para el tipo de individuos*, entonces en (b) podemos eliminar la restricción "no tenga símbolo de igualdad".*
(d) Si h es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$, entonces en (b) podemos eliminar la restricción "libre de cuantificadores".
(e) Si h es isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$ entonces $\models_{\mathfrak{A}} \alpha_{[s]}$ si sólo si $\models_{\mathfrak{B}} \alpha_{[h\circ s]}$.

Esta versión multivariada del teorema de homomorfismo se demuestra del mismo modo que la versión ordinaria, teniendo en cuenta que la igualdad se utiliza sólo para el tipo de individuos. [1]

Teorema 34. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para el lenguaje multivariado descrito, tal que los diferentes universos de $\mathfrak{A}$ son disjuntos. Entonces existe una estructura $\mathfrak{B}$ del mismo tipo de semejanza, y un homomorfismo h de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$, tal que:*
(a) h es uno a uno, de hecho, es la identidad sobre el universo de los individuos, de lo cual se sigue que, para cada fórmula φ:

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]} \text{ si y sólo si } \models_{\mathfrak{B}} \varphi_{[h\circ s]}.$$

(b) El universo U_n de predicados $n - arios$ de $\mathfrak{B}$ consiste de ciertas relaciones $n - arias$ R sobre el universo U de individuos (es decir $R \in U_n \subseteq \mathscr{P}(U^n)$), y $\langle R, a_1, ..., a_n\rangle$ está en $\epsilon^{\mathfrak{B}}_n$ si y sólo si $\langle a_1, ..., a_n\rangle \in R$.
(c) El universo W_n de funciones $n - arias$ de $\mathfrak{B}$ consiste de ciertas funciones $n - arias$ f, sobre el universo U de individuos (es decir, $f \in W_n \subseteq \{f | f : U^n \to U\}$), y $E^{\mathfrak{B}}_n(f, a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n)$.

[1] [E1] págs.143-145

Demostración. Como los universos de $\mathfrak{A}$ son disjuntos, podemos definir h sobre cada universo por separado. Sobre el universo de individuos U, h es la identidad (es decir, para toda $u \in U$, $h(u) = u$)); sobre el universo de tipo de predicados de n argumentos,

$$h(Q) = \{ \langle a_1, ..., a_n \rangle | \text{ cada } a_i \text{ está en } U \text{ y } \langle Q, a_1, ..., a_n \rangle \text{ está en } \epsilon_n^{\mathfrak{A}} \}.$$

Entonces

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle \in h(Q) \text{ si y sólo si } \langle Q, a_1, ..., a_n \rangle \text{ está en } \epsilon_n^{\mathfrak{A}} \text{ ...(1).}$$

De modo similar, sobre el universo de tipo de funciones de n argumentos, $h(g)$ es la función $n-aria$ sobre U cuyo valor en $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ es $E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, ..., a_n)$, es decir:

$$h(g)(a_1, ..., a_n) = E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, ..., a_n)...(2).$$

Para $\epsilon_n^{\mathfrak{B}}$ tomamos simplemente la relación pertenencia,

$$\langle R, a_1, ..., a_n \rangle \text{ está en } \epsilon_n^{\mathfrak{B}} \text{ si y sólo si } \langle a_1, ..., a_n \rangle \in R...(3).$$

Para $E_n^{\mathfrak{B}}$ tomamos la función evaluación,

$$E_n^{\mathfrak{B}}(f, a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n)...(4)$$

En los otros parámetros (heredados del lenguaje de segundo orden), $\mathfrak{B}$ coincide con $\mathfrak{A}$.
Veamos que h "*preserva*" al predicado de pertenencia ϵ_n, esto es, mostraremos que:

$$\langle h(Q), h(a_1), ..., h(a_n) \rangle \text{ está en } \epsilon_n^{\mathfrak{B}} \text{ si y sólo si } \langle Q, a_1, ..., a_n \rangle \text{ está en } \epsilon_n^{\mathfrak{A}}.$$

$\langle h(Q), h(a_1), ..., h(a_n) \rangle$ está en $\epsilon_n^{\mathfrak{B}}$

si y sólo si $\langle h(Q), a_1, ..., a_n \rangle$ está en $\epsilon_n^{\mathfrak{B}}$............................, pues para todo $u \in U$, $h(u) = u$,

si y sólo si $\langle a_1, ..., a_n \rangle \in h(Q)$................................, particularizando $R = h(Q)$ en el inciso (3),

si y sólo si $\langle Q, a_1, ..., a_n \rangle$ está en $\epsilon_n^{\mathfrak{A}}$ ...., por el inciso (1).

Ahora veamos que: $h(E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, ..., a_n)) = E_n^{\mathfrak{B}}(h(g), h(a_1), ..., h(a_n)))$, es decir, h "preserva" E_n.

$h(E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, ..., a_n))$

$= E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, ..., a_n)$ ...., pues el término $E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, ..., a_n)$ es de tipo individual,

$= h(g)(a_1, .., a_2)$ ...., por el inciso (2),

$= h(g)(h(a_1), .., h(a_2))$ ...., para todo $u \in U$, $h(u) = u$,

$= E_n^{\mathfrak{B}}(h(g), h(a_1), ..., h(a_n)))$ ....por el inciso (4).

La afirmación del inciso (a) se sigue de la versión multivariada del teorema del homomorfismo, usando el hecho de que tenemos igualdad sólo para el tipo de individuos, donde h es uno a uno.

$\square$

El teorema anterior, nos permite restringir la atención a las estructuras $\mathfrak{B}$, donde ϵ_n y E_n están dadas por (b) y por (c) del teorema. Pero como $\epsilon_n^{\mathfrak{B}}$ y $E_n^{\mathfrak{B}}$ están determinadas por el resto de $\mathfrak{B}$, en realidad no las necesitamos. Cuando las eliminamos, tenemos una *preestructura general para nuestro lenguaje de segundo orden.*

4.2. Estructuras generales para lenguajes de segundo orden.

Estas estructuras proporcionan una semántica alternativa para los lenguajes de segundo orden.

Definición 39. *Una preestructura general $\mathfrak{A}$ para nuestro lenguaje de segundo orden, consiste en una estructura en el sentido original (un universo de discurso y una interpretación para los símbolos no lógicos), junto con los conjuntos adicionales siguientes:*
(a) Para cada $n > 0$, $\mathscr{D}_n$ un universo de relaciones $n-arias$ $R \subseteq |\mathfrak{A}|^n$.
(b) Para cada $n > 0$, $\mathscr{F}_n$ un universo de funciones $n-arias$ $f : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.

Algunos autores[2] definen *preestructura general* como una cuarteta $\langle |\mathfrak{A}|, \mathscr{D}, \mathscr{F}, I\rangle$, donde $|\mathfrak{A}|$ es el universo de interpretación, $\mathscr{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$, $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ e I es una función de interpretación de los símbolos no lógicos.

Ejemplo 1: Tome la estructura $\langle \mathbb{N}, 0, s, *\rangle$ y considere:
para cada $n > 0$, $\mathscr{D}_n$=$\{\{\langle k_1, ..., k_n\rangle \in \mathbb{N}^n |$ "k_1 es múltiplo de 1" y ... y "k_n es múltiplo de n" $\}\}$,
y para cada $n > 0$, $\mathscr{F}_n$ =$\{$ $f^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} |\ \forall z \in \mathbb{N}^n\ f(z) = n$ $\}$.

Ejemplo 2: Tome cualquier estructura $\mathfrak{A}$. Para cada $n > 0$, sea $\mathscr{D}_n$ el conjunto de *todas* las relaciones $n - arias$ y para cada $n > 0$, sea $\mathscr{F}_n$ el conjunto de *todas* las funciones $n - arias$ sobre $\mathfrak{A}$. A estas preestructuras generales les llamaremos, preestructuras generales *saturadas* y coinciden con las estructuras (que llamaremos *absolutas*) del capítulo 2.

En efecto, las estructuras que describimos en el capítulo 2, son un caso particular de preestructuras generales.

Definición 40. *Una estructura general $\mathfrak{A}$ es una preestructura general donde todos los enunciados de comprehensión son verdaderos.*

Recordemos que un enunciado de comprehensión es una generalización de

$$\exists X^n \forall v_1 \ldots \forall v_n\ [X^n(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi],$$

donde X^n no aparece libre en φ; o bien la generalización de

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n \exists\ !\ v_{n+1}\ \psi \to \exists F^n \forall v_1 \ldots \forall v_{n+1}\ (F^n v_1, \ldots, v_n = v_{n+1} \leftrightarrow \psi),$$

[2]Véase [S2] pág.759.

donde F^n no aparece libre en ψ. Aquí φ y ψ pueden tener variables individuales, de predicado o de función. Para cada fórmula φ y ψ que cumplen lo anterior se tiene un enunciado de comprehensión.

En seguida aclararemos qué significa que un enunciado de segundo orden (en particular los enunciados de comprehensión) sea verdadero en una preestructura $\mathfrak{A}$. Antes veremos cómo traducir una fórmula φ del lenguaje de segundo orden a una fórmula multivariada φ^T.

Para los términos: si $t = c$ ó $t = v_n$ entonces $t^T = t$.

Si F es variable de función $n-aria$ y $t_1, ..., t_n$ son términos, entonces $(Ft_1, ..., t_n)^T = F(t_1^T, ..., t_n^T) = E_n(F, t_1^T, ..., t_n^T)$.

Si f es símbolo de función $n - ario$, entonces $(f(t_1, ..., t_n))^T = f(t_1^T, ..., t_n^T)$.

Para las fórmulas atómicas: si $t_1, ..., t_n$ son términos, entonces $(t_1 = t_2)^T = (t_1^T = t_2^T)$.

Si X^n es variable de predicado $n - aria$, entonces $(X^n(t_1, ..., t_n))^T = \epsilon_n(X^n, t_1^T, ..., t_n^T)$.

Si P es símbolo de predicado $n - ario$, entonces $(P(t_1, ..., t_n))^T = P(t_1^T, ..., t_n^T)$.

Para las de más fórmulas, se tiene que

$$(\neg\alpha)^T = \neg\alpha^T,$$
$$(\alpha \to \beta)^T = (\alpha^T \to \beta^T),$$
$$(\forall x\alpha)^T = \forall x(\alpha)^T.$$

Definición 41. *Sea $\mathfrak{A}$ una preestructura general. Un enunciado σ es verdadero en $\mathfrak{A}$ si y sólo si σ^T es verdadero en $\mathfrak{A}$.*

Más en general, sea φ una fórmula de segundo orden, y sea s una función que asigna a cada variable individual un elemento de $|\mathfrak{A}|$, a cada variable de predicado un elemento del universo de relaciones, y a cada variable de función un elemento del universo de funciones de $\mathfrak{A}$. Entonces decimos que $\mathfrak{A}$ satisface a φ con s (lo cual denotaremos $\models^G_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$) si y sólo si φ^T se satisface con s en la estructura $\mathfrak{A}$, donde ϵ_n se interpreta como pertenencia y E_n como evaluación.

Las consecuencias esenciales de esta definición de satisfacción son las siguientes, que podrían compararse con las definiciones de satisfacción 5 y 6 de la página 8, que dimos para la lógica de segundo orden.

$\models^G_{\mathfrak{A}} \forall X^n\varphi_{[s]}$ si y sólo si para toda R en el universo de las relaciones $n-arias$ de $\mathfrak{A}$, $\models^G_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(X^n|R)]}$.

$\models^G_{\mathfrak{A}} \forall F^n\varphi_{[s]}$ si y sólo si para toda f en el universo de las funciones $n-arias$ de $\mathfrak{A}$, $\models^G_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(F^n|f)]}$.

Esto implica tratar al lenguaje de segundo orden, como un lenguaje multivariado de primer orden *disfrazado*. Como este es un enfoque básicamente de primer orden, tenemos el teorema de Löwenheim-Skolem, el teorema de compacidad, y el teorema de numerabilidad.

Teorema 35. ***(Teorema de Löwenheim-Skolem para modelos generales.)***
Si un conjunto Σ de enunciados en un lenguaje numerable de segundo orden tiene un modelo general, entonces tiene un modelo general numerable.

Aquí un modelo general numerable es aquél en el que todo universo es numerable.

Demostración. Sea Σ un conjunto de enunciados en un lenguaje numerable de segundo orden, que tenga un modelo general, y sea Γ el conjunto de los enunciados de comprehensión. Entonces las traducciones de todos los enunciados de $\Sigma \cup \Gamma$ (es decir $(\Sigma\cup\Gamma)^T = \{\alpha^T | \alpha \in \Sigma\cup\Gamma\}$) son verdaderos en una preestructura general (que es una estructura multivariada). Luego por la versión multivariada del teorema de Löwenheim-Skolem, $(\Sigma \cup \Gamma)^T$ tiene un modelo multivariado (que es una estructura para el lenguaje multivariado descrito en la sección 1 del capítulo 4) numerable. Por el teorema 34, existe una imagen *homomórfica* de ese modelo que es una preestructura general que satisface $\Sigma \cup \Gamma$, y por lo tanto es un modelo general numerable de Σ.

□

Teorema 36. ***(Teorema de compacidad para modelos generales.)***

Si todo subconjunto finito de un conjunto Σ de enunciados de segundo orden tiene un modelo general, entonces Σ tiene un modelo general.

Demostración. Sea Γ el conjunto de enunciados de comprehensión, y sea Σ un conjunto de enunciados de segundo orden, tal que todo $\Sigma_0 \subseteq \Sigma \cup \Gamma$ finito, tiene modelo general. Luego, si *traducimos* todos los enunciados de segundo orden de Σ_0 en enunciados multivariados tenemos que todo $\Sigma_0^T \subseteq \Sigma^T \cup \Gamma^T$ conjunto finito de enunciados multivariados tiene modelo multivariado (que es una estructura para el lenguaje multivariado descrito en 4.1). Entonces por la versión multivariada del teorema de compacidad, $\Sigma^T \cup \Gamma^T$ tiene un modelo multivariado $\mathfrak{A}$, y por el teorema 34, existe un homomorfismo h de $\mathfrak{A}$ sobre una *preestructura* $\mathfrak{B}$ que hace verdaderos a todos los enunciados de $\Sigma \cup \Gamma$, por lo que $\mathfrak{B}$ es un modelo general de Σ. □

Definición 42. *Un lenguaje $\mathscr{L}$ es recursivamente numerado si y sólo si hay una Gödelización h tal que las siguientes dos relaciones*

$\{\langle k, m\rangle \mid k$ *es el valor de h asignado a algún parámetro de predicado de m argumentos*$\}$,

$\{\langle k, m\rangle \mid k$ *es el valor de h asignado a algún símbolo de función de m argumentos*$\}$

son recursivas.

Si comparamos la definición 31 de lenguaje razonable con la definición 42, y cambiamos las palabras recursivo por decidible, entonces veremos que, módulo la *tesis de Church*, éstas definiciones son equivalentes.

Teorema 37. ***(Teorema de numerabilidad para modelos generales.)***

Supongamos que el lenguaje es recursivamente numerado. Entonces, el conjunto de los números de Gödel de los enunciados de segundo orden que son verdaderos en toda estructura general es recursivamente numerable.

Demostración. Un enunciado σ es verdadero en toda estructura general si y sólo si σ es consecuencia, como enunciado multivariado, de Γ. Y dada una fórmula φ, podemos decidir si $\varphi \in \Gamma$ o bien $\varphi \notin \Gamma$. Luego, por la *tesis de Church*, $\sharp\Gamma$ es recursivo, entonces por el teorema 30, $\sharp Cn\Gamma$ es recursivamente numerable. □

Podemos comparar los dos enfoques de la semántica de segundo orden como sigue. La versión del capítulo 2 (a la que llamaremos lógica *absoluta* de segundo orden) es una criatura híbrida, en la cual el significado de los parámetros se deja abierto a interpretación por estructuras; sin embargo, la interpretación de ser (por ejemplo) un subconjunto no se deja abierta, sino que se trata con un significado fijo (donde "ser subconjunto" significa "ser una relación" que pertenece a ***el*** universo *fijo* de *todas* las relaciones *uno − arias*). La versión de la lógica general de segundo orden evita apelar a una noción fija de subconjunto (donde "ser subconjunto" significa "ser una relación" que pertenece a ***un*** universo de relaciones $uno-arias$, $\mathscr{D}_1$) y es, en consecuencia, reducible a la lógica de primer orden. En ese aspecto se asemeja a la teoría axiomática de conjuntos, donde se habla de conjuntos, y de conjuntos de conjuntos, y así sucesivamente, pero la teoría es una teoría de primer orden.

Lema 6. *Si Δ es el conjunto de fórmulas de comprehensión, entonces en la lógica absoluta de segundo orden, todo $\gamma \in \Delta$ es universalmente válida (i.e. $\models \gamma$).*

Demostración. Sea γ una fórmula de *comprehensión relacional*, esto es, si φ es una fórmula en la que la variable de predicado X^n no aparece libre, γ es de la forma: $\exists X^n \forall v_1 \cdots \forall v_n (X^n v_1 \cdots v_n \leftrightarrow \varphi)$. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo absoluto cualquiera, $\models_{\mathfrak{A}} \exists X^n \forall v_1 \cdots \forall v_n (X^n v_1 \cdots v_n \leftrightarrow \varphi)$ si y sólo si hay una relación R $n-aria$ sobre $|\mathfrak{A}|$ tal que para toda $(a_1, ..., a_n) \in |\mathfrak{A}|^n$ sucede que: $\models_{\mathfrak{A}} (X^n v_1 \cdots v_n \leftrightarrow \varphi)_{s[(X^n|R)(v_i|a_1)...(v_n|a_n)]}$. Considere $R = \{\langle a_1, ..., a_n\rangle \mid \models_{\mathfrak{A}} \varphi(a_1, ..., a_n)\}$. R es una relación sobre $|\mathfrak{A}|$ que cumple con lo que queremos. Por lo tanto, $\models_{\mathfrak{A}} \gamma$.

El razonamiento es análogo si γ es un fórmula de *comprehensión funcional*, pues el universo de funciones de un modelo absoluto, tiene a todas las funciones $n-arias$ que hay de $|\mathfrak{A}|^n$ en $|\mathfrak{A}|$.

□

Luego, si Γ es el conjunto de los enunciados de comprehensión (generalizaciones de las fórmulas de comprehensión) y Δ es el conjunto de la fórmulas de comprehensión, entonces $\Gamma \subseteq \Delta$ y todo $\sigma \in \Gamma$ es universalmente válido en la lógica absoluta de segundo orden.

Corolario 12. *Los modelos generales absolutos coinciden con los modelos absolutos de segundo orden.*

Al agrandar la clase de las estructuras, la lógica general de segundo orden disminuye los casos en que se cumple la implicación lógica ($\models$).

Teorema 38. *Si todo modelo general de Σ es modelo general de σ (lo cual denotaremos $\Sigma \models^G \sigma$), entonces $\Sigma \models \sigma$ en la lógica absoluta de segundo orden.*

Demostración. Sea Γ el conjunto de los *enunciados* de comprehensión, y sea $\mathfrak{A}$ un modelo absoluto de Σ. Entonces, por el lema anterior, $\mathfrak{A}$ es modelo absoluto de $\Sigma \cup \Gamma$, por lo que $\mathfrak{A}$ es un modelo general (absoluto) de Σ. Entonces, por hipótesis, $\mathfrak{A}$ es un modelo general (absoluto) de σ. Luego por el corolario anterior, $\mathfrak{A}$ es modelo *absoluto* de σ.

□

Corolario 13. *Si σ es verdadero en todo modelo general (i.e. $\models^G \sigma$), entonces σ es universalmente válida (i.e. $\models \sigma$) en la lógica absoluta de segundo orden.*

Teorema 39. *Hay enunciados que son universalmente válidos en la lógica absoluta de segundo orden, sin ser verdaderos en todo modelo general.*

Demostración. El conjunto de los enunciados verdaderos en todos los modelos generales es un subconjunto recursivamente numerable del conjunto de los enunciados universalmente válidos de la lógica absoluta de segundo orden, que por el corolario 9 no es recursivamente numerable.

□

Capítulo 5

Modelos del análisis

Podemos ilustrar la idea de este capítulo dirigiendo la atención al caso particular más interesante: *los modelos generales de la teoría de números de segundo orden.* Consideremos, pues, un lenguaje de segundo orden para la teoría de números, con los parámetros 0, s, $+$, $*$, $<$ y E. Tomamos como nuestro conjunto de axiomas el conjunto A_E^2 escrito en la sección 1 del capítulo 2. En el teorema 2 se mostró que todo modelo de A_E^2 es isomorfo a $\mathfrak{N}$.

Pero ¿qué podemos decir de los modelos *generales* de nuestro conjunto de axiomas?. ¿En qué pueden diferir de $\mathfrak{N}$? El siguiente teorema nos muestra que hay *modelos generales no estándar.*

Teorema 40. *Para la estructura $\mathfrak{N}_* = \langle \mathbb{N}, 0, s, <, +, * \rangle$ existe una estructura general numerable $\mathfrak{M}_0$ elementalmente equivalente a $\mathfrak{N}_*$, pero que no es isomorfa a $\mathfrak{N}_*$.*

Demostración. Construiremos $\mathfrak{M}_0$ usando el teorema de compacidad para modelos generales. Extendamos el lenguaje usando un nuevo símbolo de constante c. Sea

$$\Sigma = \{0 < c, s0 < c, ss0 < c, ...\}.$$

Afirmamos que $\Sigma \cup Th\mathfrak{N}_*$ tiene un modelo general. Para demostrarlo, tomemos cualquier Σ_0 finito, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma \cup Th\mathfrak{N}_*$. Este subconjunto finito es verdadero en

$$\mathfrak{N}_k = \langle \mathbb{N}, 0, s, <, +, *, k \rangle$$

(donde $k = c^{\mathfrak{N}_k}$) para alguna k suficientemente grande. Entonces por el teorema de compacidad para modelos generales, $\Sigma \cup Th\mathfrak{N}_*$ tiene un modelo general. Usando el teorema de Löwenheim-Skolem para modelos generales, $\Sigma \cup Th\mathfrak{N}_*$ tiene un modelo general numerable

$$\mathfrak{M} = \langle |\mathfrak{M}|, 0^{\mathfrak{M}}, s^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, *^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}} \rangle.$$

Sea $\mathfrak{M}_0$ la restricción de $\mathfrak{M}$ al lenguaje original:

$$\mathfrak{M}_0 = \langle |\mathfrak{M}|, 0^{\mathfrak{M}}, s^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, *^{\mathfrak{M}} \rangle.$$

Como $\mathfrak{M}_0$ es modelo de $Th\mathfrak{N}_*$, tenemos que $\mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{N}_*$, pues

Si $\models_{\mathfrak{N}_*} \sigma$, entonces $\sigma \in Th\mathfrak{N}_*$, por lo que $\models_{\mathfrak{M}_0} \sigma$; y

si $\not\models_{\mathfrak{N}_*} \sigma$, entonces $\sigma \notin Th\mathfrak{N}_*$, luego, como el teorema 26 nos asegura que $Th\mathfrak{N}_*$ es completa, $\neg\sigma \in Th\mathfrak{N}_*$, por lo que $\models_{\mathfrak{M}_0} \neg\sigma$, luego, por la definición de verdad de Tarski, $\not\models_{\mathfrak{M}_0} \sigma$.

Falta ver que $\mathfrak{M}_0 \not\cong \mathfrak{N}_*$.

Supongamos que $\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{N}_*$. Luego, hay un *isomorfismo* h de $\mathfrak{M}_0$ *en* $\mathfrak{N}_*$. Sea $S = \{m \in |\mathfrak{M}_0| : m <^{\mathfrak{M}} c^{\mathfrak{M}}\}$. Como h es inyectiva, la restricción de h al conjunto S es también inyectiva y por tanto S *es biyectable con la imagen de* S *(i.e.* $h[S]$*)*. Y observemos que S es infinito pues $\mathfrak{M}_0$ es modelo de Σ.

Sin embargo, $h[S]$ es finita. Para verlo, tome $h(c^{\mathfrak{M}}) = n_0$, donde $n_0 \in \mathbb{N}$ es un número fijo.

$x \in h[S]$ si y sólo si $h^{-1}(x) \in S$ ....pues h es biyectiva,
si y sólo si $h^{-1}(x) <^{\mathfrak{M}} c^{\mathfrak{M}}$ ....por definición de S,
si y sólo si $x <^{\mathfrak{N}_*} h(c^{\mathfrak{M}}) = n_0$ ....h es homomorfismo.

Por lo que hay una biyección de un conjunto infinito S en un conjunto finito $h[S]$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathfrak{M}_0 \not\cong \mathfrak{N}_*$.

□

También podemos encontrar modelos generales (*no absolutos*) en los cuales, por ejemplo, la cardinalidad del universo de los conjuntos (el universo de relaciones *unarias*), es menor que la cardinalidad de todo el conjunto potencia de los individuos.

Notación: Si $\mathbb{A}$ es un conjunto, entonces $car(\mathbb{A})$ es la cardinalidad de $\mathbb{A}$.

El siguiente teorema es un clásico de la Teoría de Conjuntos, y se debe a Cantor.

Teorema 41. *No hay conjunto* $\mathbb{A}$ *tal que* $car(\mathbb{A}) = car(\mathscr{P}(\mathbb{A}))$.

La demostración se puede consultar en [A1] página 67.

Corolario 14. *Para todo conjunto* $\mathbb{A}$ *se tiene que* $car(\mathbb{A}) < car(\mathscr{P}(\mathbb{A}))$.

Corolario 15. *Si* $\mathfrak{A}$ *es un modelo general numerable, entonces* $car(\mathscr{D}_1) < car(\mathscr{P}|\mathfrak{A}|)$.

Demostración. Como un modelo general *numerable* es aquél en el que todo universo es *numerable*, en particular su universo de relaciones *unarias* $\mathscr{D}_1$ es *numerable*. Luego por el corolario anterior $car(\mathscr{D}_1) < car(\mathscr{P}(|\mathfrak{A}|))$.

□

Es común entre los lógicos referirse a la teoría de números de segundo orden como *análisis*. El nombre se debe a que es posible identificar a los números reales con los conjuntos de los números naturales. En la teoría de números de segundo orden, tenemos cuantificadores sobre los conjuntos de números naturales que pueden verse como cuantificadores sobre números reales.

Definición 43. *Por un modelo del análisis, entenderemos un modelo general del conjunto de axiomas* A_E^2.

Definición 44. *Un* ω*-modelo del análisis es un modelo del análisis en el que el universo de individuos es* $\mathbb{N}$*, y* 0 *y* s *denotan a cero y sucesor estándar.*

Observación: Si 0 y s tienen denotaciones estándar entonces, como consecuencia del Teorema de Recursión[1], $<$, $+$, $*$ y E también tienen denotaciones estándar.

La motivación para estudiar los ω-modelos se puede explicar como sigue: tenemos una comprehensión clara o al menos así lo creemos del conjunto $\mathbb{N}$; pero de su conjunto potencia $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ no podemos decir lo mismo. Por ejemplo, no sabemos si su cardinalidad es $\aleph_1$ o $\aleph_2$ o más. Así que es razonable dejar fijo aquello de lo que estamos seguros ($\mathbb{N}$), pero dejar abierto a interpretación por una estructura aquello de lo que no estamos seguros ($\mathscr{P}(\mathbb{N})$).

Entre los ω-modelos del análisis hay un modelo *absoluto* cuyo universo de relaciones $n-arias$ consta de todas las relaciones $n-arias$ sobre $\mathbb{N}$ y cuyos universos de funciones constan de todas las funciones posibles.

Los enunciados de primer orden *cuantifican* sólo sobre el universo de individuos, es por esto que los *ω-modelos del análisis* coinciden con el modelo $\mathfrak{N}$ en los enunciados de primer orden, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 42. *Un enunciado σ de primer orden es verdadero en un ω-modelo arbitrario del análisis si y sólo si es verdadero en $\mathfrak{N}$.*

El lector se preguntará por qué no afirmamos el teorema anterior para enunciados de segundo orden. La razón es que tal vez el ω-modelo no coincida con el modelo *absoluto* en los enunciados de segundo orden.

Para entender el siguiente teorema, debemos recordar el concepto de relación *definible* en una estructura $\mathfrak{A}$, que dimos en la definición 19.

Lema 7. *Una relación R es representable en la teoría $Th\mathfrak{N}$ si y sólo si R es definible en $\mathfrak{N}$.*

Demostración. Recordemos que, una relación R es representable en la teoría Th$\mathfrak{N}$ si y sólo si hay una fórmula φ tal que para toda $a_1, ..., a_m$ en $\mathbb{N}$:

si $(a_1, ..., a_n) \in R$ entonces $\varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \in Th\mathfrak{N}$; y

si $(a_1, ..., a_n) \notin R$ entonces $\neg\varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \in Th\mathfrak{N}$, luego, por el teorema 26, $\varphi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \notin Th\mathfrak{N}$.

Entonces $(a_1, ..., a_n) \in R$ si y sólo si $\rho(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \in Th\mathfrak{N}$. Pero ésto es justo la definición de que R sea definible en $\mathfrak{N}$.

$\square$

Observemos que también tiene sentido preguntarnos si ciertas funciones son *representables*, pues una función se puede ver como una relación.

Tomaremos del catálogo de [E1] (págs. 312-322) funciones y relaciones *representables*. El conjunto de los números primos es *representable en Th$\mathfrak{N}$*; también la función cuyo valor en a es el $(a+1)$-*ésimo* número primo P_a, es *representable en Th$\mathfrak{N}$*. Esta función es útil para *codificar* sucesiones finitas de números por medio de un sólo número. Aquí usaremos de forma determinante el *Teorema fundamental de la Aritmética* (que asegura que todo número tiene una descomposición *única* como producto de factores primos.) Sea

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle = P_0^{a_0+1} * \cdots * P_m^{a_m+1} = \prod_{i \leq m} P_i^{a_i+1}$$

[1]véase [E1] pág. 65

la *codificación* de la sucesión $\langle a_0, ..., a_m \rangle$. En virtud de que las funciones $+$, $*$,E y ^{o} (función composición) son parte del catálogo de las funciones *representables en* $Th\mathfrak{N}$,podemos afirmar que la función:

$$f(a_0, ..., a_m) = P_0 E(a_0 + 1) * \cdots * P_m E(a_m + 1)$$

que codifica a una sucesión finita, es *representable en* $Th\mathfrak{N}$ y por tanto *definible en* $\mathfrak{N}$.

Existe también una función *decodificadora* que es una *función representable en* $Th\mathfrak{N}$ (i.e. *definible en* $\mathfrak{N}$) tal que para $b \leq m$,

$$(\langle a_0, ..., a_m \rangle)_b = a_b,$$

donde a_b es el b-ésimo número de la sucesión $\{a_0, ..., a_m\}$.

En el siguiente teorema afirmamos que un ω-*modelo del análisis* está completamente determinado por su universo de conjuntos, es decir, por su universo de relaciones unarias, $\mathscr{D}_1$.

Teorema 43. *Si* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son* ω*-modelos del análisis que tienen a los mismos universos de relaciones unarias, entonces* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Demostración. Supongamos que R pertenece al universo de las relaciones de n-argumentos de $\mathfrak{A}$. Sea $\langle R \rangle$ la "*comprehensión*" de R a una relación *unaria*:

$$\langle R \rangle = \{\langle a_1, ..., a_n \rangle | \langle a_1, ..., a_n \rangle \in R\}.$$

Como nuestra función $codificadora$ de sucesiones es definible en la teoría de números de primer orden por una fórmula φ, $\langle R \rangle$ está en el universo de conjuntos de $\mathfrak{A}$ en virtud del enunciado de *comprehensión*:

$$\forall X^n \exists X^1 \forall u[X^1_u \leftrightarrow \exists v_1 \cdots \exists v_n \varphi(v_1, ..., v_n, u) \wedge X^n(v_1, ..., v_n)].$$

Entonces, por hipótesis, $\langle R \rangle$ está en el universo de conjuntos de $\mathfrak{B}$; lo decodificamos por medio de la función decodificadora, que es una función $definible$ en $\mathfrak{N}$ por una fórmula ψ. $\langle R \rangle$ está en el universo de n argumentos de $\mathfrak{B}$ en virtud del enunciado de comprehensión:

$$\forall X^1 \exists X^n \forall v_1 \cdots \forall v_n [X^n_{(v_1, ..., v_n)} \leftrightarrow \exists u(\psi(v_1, ..., v_n, u) \wedge X^1_u)].$$

Para los universos de funciones, basta observar que una función $n - aria$ puede verse como una relación $n + 1 - aria$.

$\square$

En consecuencia, podemos identificar un ω-*modelo del análisis* con su universo de conjuntos (que pertenece a $\mathscr{P}(\mathbb{N})$). No toda subclase es, entonces, un ω-*modelo del análisis*, sino sólo aquéllas para las cuales se satisfacen los enunciados de comprehensión.

Definición 45. *Una* ω*-preestructura es una preestructura general cuyo universo de individuos es* $\mathbb{N}$*, y 0 y s denotan a cero y sucesor estándar.*

Corolario 16. *Fijémonos en el conjunto* Γ^1 *de los enunciados de comprehensión relacionales unarios i.e. los de la forma* $\exists X^1 \forall u(X^1 u \leftrightarrow \varphi)$*. Un* ω-modelo del análisis *es una* ω*-preestructura con un universo de conjuntos* $\mathscr{D}_1$*, donde* ***basta*** *verificar que los enunciados de* Γ^1 *son verdaderos.*

Ejemplos de ω-modelos. De acuerdo con el corolario anterior, sólo necesitamos especificar el universo de conjuntos $\mathscr{D}_1$.

1. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ es el modelo absoluto.

2. Sea $\langle A, \in_A \rangle$ un modelo de los axiomas más comunes de la teoría de conjuntos, a saber:

axioma de Extensionalidad: $\forall x \forall y (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \leftrightarrow x = y)$,

axioma de la existencia del conjunto vacío: $\exists x \forall u (u \notin x)$,

axioma del par: $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$,

axioma de unión: $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (u \in v \wedge v \in x))$,

axioma de potencia: $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow (\forall w (w \in u \rightarrow w \in x))$,

axioma de infinito: $\exists y (\emptyset \in y \wedge \forall x (x \in y \rightarrow x \cup \{x\} \in y))$,

esquema de axiomas de comprehensión: para cada fórmula φ del lenguaje de la teoría de conjuntos, $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi(u))$ es axioma, donde (i) la relación $\in_A$ es la relación de pertenencia $\{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in A \text{ y } a \in b\}$ sobre el universo A, y (ii) A es transitivo, es decir, si $a \in b \in A$, entonces $a \in A$.

En el teorema anterior vimos que los *ω-modelos del análisis* quedan completamente determinados por su universo de conjuntos, en particular por la verdad de los axiomas de comprehensión relacionales de la forma $\exists X^1 \forall u (X^1 u \leftrightarrow \varphi(u))$ que coinciden con el esquema de axiomas de comprehensión, los cuales son verdaderos en $\langle A, \in_A \rangle$. Por lo tanto, la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que pertenecen a A, es un modelo del análisis.

3. Para una clase $A \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, definimos $\mathbb{D}(A)$ como la clase de todos los conjuntos $B \subseteq \mathbb{N}$ que son definibles en la ω-preestructura con universo de conjuntos A por una fórmula del lenguaje de teoría de números de segundo orden, aumentado con parámetros para cada conjunto de A. Entonces definimos por recursión transfinita sobre los ordinales:

$$\begin{gathered} A_0 = \emptyset, \\ A_{\alpha+1} = \mathbb{D}(A_\alpha), \\ A_\lambda = \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha. \end{gathered}$$

Afirmación: A_α deja de crecer en algún ordinal β, es decir, hay β ordinal tal que

$$A_{\beta+1} = A_\beta.$$

Demostración. Para todo ordinal α tenemos que $A_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ luego $|A_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$.

Veamos que nuestra definición de A_α sobre ordinales es una *jerarquía acumulativa*, i.e. para cualesquiera ordinales $\alpha \leq \beta$, $A_\alpha \subseteq A_\beta$. Considere una relación unaria $R \in A_\alpha$. Como R es parámetro en $A_{\alpha+1}$, la fórmula $\forall u (X^1 u \leftrightarrow Ru)$ *define* a la relación unaria R en $A_{\alpha+1}$ y por tanto $R \in A_{\alpha+1}$.

Ahora bien, considere $(2^{\aleph_0})^+$. Si para todo ordinal $\alpha < (2^{\aleph_0})^+$, $A_\alpha \neq A_{\alpha+1}$ entonces $A_{(2^{\aleph_0})^+}$ tendría al menos $(2^{\aleph_0})^+$ conjuntos, lo cual contradice que $|A_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$.

Por lo tanto, existe $\beta < (2^{\aleph_0})^+$ tal que $A_{\beta+1} = A_\beta$.

$\square$

Apelando al *principio del mínimo ordinal*, el cual afirma que toda clase no vacía de ordinales tiene mínimo, sea β_0 el mínimo ordinal β tal que

$$A_{\beta_0+1} = A_{\beta_0}.$$

Afirmación: β_0 es un ordinal *numerable*.

Demostración. Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} A_{\beta_0} = A_{\beta_0+1} = \mathbb{D}(A_{\beta_0}) &= \{B \in \mathscr{D}_1 \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mid \models_{\mathfrak{N}} \forall u(X^1 u \leftrightarrow \varphi)_{[s(X^1|B)]}\} \\ &= \{B \in A_{\beta_0} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mid \models_{\mathfrak{N}} \forall u(X^1 u \leftrightarrow \varphi)_{[s(X^1|B)]}\}. \end{aligned}$$

Notación: $\varphi \in \mathscr{L}^2_{\mathfrak{N}}$ es una abreviación de φ es una fórmula del lenguaje de segundo orden de la teoría de números con una variable libre.

Ahora fijémonos en el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{\mathbb{D}(A_{\beta_0})} &= \{\varphi \in \mathscr{L}^2_{\mathfrak{N}} \mid \text{Hay } B \in A_{\beta_0} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}) \text{ tal que } \models_{\mathfrak{N}} \forall u(X^1 u \leftrightarrow \varphi)_{[s(X^1|B)]}\}. \\ &= \{\varphi \in \mathscr{L}^2_{\mathfrak{N}} \mid \models_{\mathfrak{N}} \exists X^1 \forall u(X^1 u \leftrightarrow \varphi)_{[s]} \text{ donde } \mathfrak{N} \text{ es } \omega\text{-preestructura con } \mathscr{D}_1 = A_{\beta_0}\} \end{aligned}$$

$\mathscr{F}_{\mathbb{D}(A_{\beta_0})}$ es el conjunto de las fórmulas que *definen mediante un enunciado de comprehensión relacional unario* a los conjuntos B de A_{β_0} en la ω-preestructura $\mathfrak{N}$ con $\mathscr{D}_1 = A_{\beta_0}$. Luego, $\mathscr{F}_{\mathbb{D}(A_{\beta_0})}$ tiene un modelo general, entonces por el teorema de Löwenheim-Skolem para modelos generales, tenemos que $\mathscr{F}_{\mathbb{D}(A_{\beta_0})}$ tiene un modelo general *numerable* digamos $\mathfrak{A}_{\beta_0}$. Así, el universo $\mathscr{D}_1^{\mathfrak{A}_{\beta_0}}$ de conjuntos de $\mathfrak{A}_{\beta_0}$ es numerable. Como $\mathfrak{A}_{\beta_0}$ es modelo de $\mathscr{F}_{\mathbb{D}(A_{\beta_0})}$, tenemos que $\mathscr{D}_1^{\mathfrak{A}_{\beta_0}} = A_{\beta_0}$, siendo así que A_{β_0} es numerable. Entonces β_0 tiene que ser un ordinal numerable, pues para cada ordinal $\alpha \leq \beta_0$, $\mathscr{F}_{\mathbb{D}(A_\alpha)}$ tiene una cantidad a lo más numerable de fórmulas. $\square$

Luego, A_{β_0} coincide con $\bigcup_{\alpha \in OR} A_\alpha$ (la unión sobre todos los ordinales α) y se conoce como ***la clase de los conjuntos analíticos ramificados.*** Este es un ω- modelo del análisis; la verdad de las enunciados de comprehensión se sigue del hecho de que $\mathbb{D}(A_{\beta_0}) \subseteq A_{\beta_0}$.

Recapitulación.

En los primeros dos capítulos describimos formalmente la sintaxis y la semántica de los lenguajes de primer y segundo orden, al familiarizarnos con este último descubrimos que el costo de su riqueza expresiva es la invalidez de teoremas importantes en lógica, como son los teoremas de compacidad, Löwenheim-Skolem, numerabilidad y la existencia de un cálculo correcto y completo para la validez de sus enunciados. A pesar de la invalidez de estos teoremas, pudimos rescatar, apoyados en la semántica del lenguaje de segundo orden, el lema del punto fijo así como el teorema de indefinibilidad de Tarski.

El concepto de *cardinal caracterizable en segundo orden* nos permitió construir un enunciado del $\mathscr{L}^2_=$, a saber, $(\sigma_{2^{\aleph_0}} \leftrightarrow \sigma_{\aleph_1})$ que es universalmente válido *si y sólo si* la hipótesis del continuo es verdadera. Sin embargo, ZFE *no puede saber* si la hipótesis del continuo es verdadera o no lo es, pues este enunciado es *independiente* de ZFE. Así pudimos concluir que el conjunto de los enunciados universalmente válidos del lenguaje de segundo orden *no es decidible.*

En el capítulo 3 introdujimos a la lógica multivariada para que mediante el concepto de *preestructura general* lográramos generalizar la interpretación del lenguaje de segundo orden como un lenguaje de primer orden *disfrazado de lenguaje multivariado*, para así recuperar los teoremas de numerabilidad, compacidad y Löwenheim-Skolem para modelos generales. Estos últimos nos permitieron, en el capítulo 5, asegurar la existencia de modelos generales *no estándar* así como de modelos generales en los que todos sus universos sean numerables.

Los ω-*modelos del análisis* se definieron como modelos generales de A^2_E cuyo universo (fijo) de individuos es $\mathbb{N}$, y donde 0 y s denotan a cero y sucesor estándar. El último teorema de este trabajo nos asegura que un $\omega-$*modelo del análisis* está completamente determinado por su universo de relaciones unarias. En este sentido podemos identificar un $\omega-$*modelo del análisis* como una terna $\langle \mathbb{N}, \mathscr{D}_1, I \rangle$, donde $\mathscr{D}_1$ denota un universo de relaciones unarias e I es la interpretación estándar del tipo en $\mathbb{N}$, y *basta* verificar que los enunciados de comprehensión relacionales unarios sean verdaderos ahí.

Sin embargo, los $\omega-$*modelos del análisis* siguen sin dar respuesta a la pregunta sobre cuál es el cardinal del continuo, pues en todos ellos $car(\mathscr{D}_1) \leq 2^{\aleph_0}$, y ninguno puede determinar $car(\mathscr{D}_1)$.

Biliografía

[A-C-M] Amor J. A., Campero G., Miranda F. E., *Teoría de Conjuntos Intermedia.*(En revisión), 2008.

[A1] Amor J. A., *Teorìa de Conjuntos para estudiantes de ciencias*, Coordinaciòn de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.

[A2] Amor J. A., *Compacidad en la lógica de primer y su relación con el Teorema de Compacidad*, Coordinaciòn de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.

[B] Boolos, George., *On Second-Order Logic*, The Journal of Philosophy, 72: 509-527, 1975. También esta en: Logic, Logic, and Logic, by George Boolos, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 37-53, 1998.

[E1] Enderton, Herbert B., *Una introducción matemática a la lógica*, Segunda Edición, IIF UNAM, 2004.

[E2] Enderton, Herbert, B., *Second-order and Higher-order* http://plato.stanford.edu/entries/logic-higher-order/ , 2007.

[H-S] Hewitt E. y Stromberg Karl, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag,1965.

[H-J] Hrbacek & Jech., *Introduction to Set Theory*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 3er edición, Editotial M. Dekker, 1999.

[J] Jané, Ignacio., *Lógica de Orden Superior*, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Editorial Trotta S.A., 1995.

[S1] Shapiro, Stewart., *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic.* editorial Oxford University Press, 1991.

[S2] Shapiro, Stewart., *Higher-Order Logic*, The Oxford Handbook of PHYLOSOPHY OF MATHEMATICS AND LOGIC, editorial Oxford University Prees, 2005.