



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**CONTROL DE ESTABILIZACIÓN PARA
PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO MECATRÓNICO

P R E S E N T A :

CÓRDOVA ALARCÓN JOSÉ RODRIGO

DIRECTORES:

**DR. ESAÚ VICENTE VIVAS
DR. HUGO RODRÍGUEZ CORTÉS**



Como parte del proyecto número 7126 financiado por CONACYT

México D.F.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

Capítulo

1	LOS PICOSATÉLITES EN EL MUNDO Y EL ORIGEN DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO	1
1.1	Introducción	1
1.2	Los picosatélites a nivel mundial	1
1.3	Orígenes del picosatélite universitario	2
1.3.1	<i>UNAMSAT</i>	2
1.3.2	<i>SATEX</i>	3
1.3.3	<i>SATEDU</i>	4
2	DISEÑO MODULAR DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO	6
2.1	Introducción	6
2.2	Subsistemas que componen al picosatélite universitario	6
2.3	Subsistema estructural	7
2.3.1	<i>Potencia</i>	7
2.3.2	<i>Carga útil</i>	7
2.3.3	<i>Determinación y control de actitud (ADC)</i>	8
2.3.4	<i>Control de comandos y manejo de datos</i>	8
2.3.5	<i>Comunicaciones</i>	8
2.4	Computadora de vuelo	8
2.5	Subsistema de Potencia	10
2.6	Subsistema de Comunicaciones	10
2.7	Subsistema de estabilización	11
2.8	Sensores de estabilización	12
2.8.1	<i>Sensores solares</i>	12
2.8.2	<i>Sensores de Tierra</i>	13

2.8.3	<i>Sensores de estrellas</i>	13
2.8.4	<i>Unidades inerciales</i>	13
2.8.5	<i>Sensores de radiofrecuencia</i>	13
2.8.6	<i>Detector láser</i>	14
2.9	Segmento terrestre para supervisión y mando del picosatélite universitario	14
3	DEFINICIONES Y NOTACIONES	16
3.1	Introducción	16
3.2	Sistemas coordenados	16
3.2.1	<i>Sistema coordenado inercial con centro en la Tierra \mathcal{S}^I</i>	16
3.2.2	<i>Sistema coordenado fijo a la Tierra con centro en la Tierra \mathcal{S}^E</i>	16
3.2.3	<i>Sistema coordenado Orbital con centro en la Tierra \mathcal{S}^{OE}</i>	16
3.2.4	<i>Sistema coordenado Orbital \mathcal{S}^O</i>	18
3.2.5	<i>Sistema coordenado fijo al satélite \mathcal{S}^B</i>	18
3.3	Representación de la actitud del Picosatélite Universitario . .	18
3.3.1	<i>Ángulos de Euler</i>	18
3.3.2	<i>Cuaterniones unitarios</i>	20
3.4	Matriz de rotación	21
3.5	Transformación entre diferentes sistemas coordenados	22
3.5.1	<i>Transformación desde el sistema \mathcal{S}^{OE} a los sistemas \mathcal{S}^I y \mathcal{S}^E</i>	22
3.5.2	<i>Transformación desde el sistema \mathcal{S}^E al sistema \mathcal{S}^I</i>	22
3.5.3	<i>Transformación del sistema \mathcal{S}^O al sistema \mathcal{S}^{OE}</i>	23
3.5.4	<i>Transformación desde el sistema \mathcal{S}^O al sistema \mathcal{S}^B</i>	23
3.6	Relación entre el Sistema Coordenado Orbital \mathcal{S}^O y el Sistema Coordenado Inercial \mathcal{S}^I	23
4	MODELO MATEMÁTICO DE LA POSICIÓN Y ACTITUD DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO	27
4.1	Introducción	27
4.2	Parámetros de la órbita del Picosatélite Universitario	28
4.2.1	<i>Ecuación diferencial de la órbita</i>	28
4.2.2	<i>Parámetros orbitales</i>	29
4.3	Cinemática	31
4.4	Dinámica de cuerpo rígido	33
4.5	Principales perturbaciones que afecten a la orientación del Picosatélite universitario	35
4.5.1	<i>Torques de origen magnético</i>	35
4.5.2	<i>Torques debido a la gravedad terrestre</i>	36

4.5.3	<i>Torques debido al arrastre aerodinámico</i>	36
5	MODELO MATEMÁTICO DEL CONTROL DE ACTITUD DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO	37
5.1	Introducción	37
5.2	Control mediante linearización	37
5.2.1	<i>Análisis de estabilidad</i>	39
5.2.2	<i>Análisis de controlabilidad</i>	39
5.2.3	<i>Algoritmo de diseño del controlador proporcional</i>	40
5.3	Control adaptable del tipo PD mediante BTM's	41
5.3.1	<i>Modelo matemático del campo magnético terrestre</i>	41
5.3.2	<i>Metodología de la implementación del control</i>	43
5.4	Control basado en Pasividad	45
6	SIMULACIÓN Y RESULTADOS OBTENIDOS	49
6.1	Introducción	49
6.2	Parámetros del Picosatélite Universitario	49
6.3	Descripción del diagrama de bloques de <i>Simulink</i>	50
6.4	Resultados de los algoritmos de control	53
6.4.1	<i>Linearización</i>	56
6.4.2	<i>Control adaptable del tipo PD mediante BTM's</i>	56
6.4.3	<i>Control basado en pasividad</i>	57
7	CONCLUSIONES	70
7.1	Conclusiones	70
7.2	Recomendaciones	71

CAPÍTULO 1

LOS PICOSATÉLITES EN EL MUNDO Y EL ORIGEN DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO

1.1 Introducción

En este capítulo se presentarán antecedentes históricos del desarrollo de picosatélites a nivel mundial y el avance de esta tecnología de vanguardia, también se presentan algunos proyectos sobresalientes anteriores al PICOSAT. Adicionalmente se incluye una introducción al concepto de estabilización activa de un picosatélite.

1.2 Los picosatélites a nivel mundial

Actualmente, un gran número de universidades, compañías y organizaciones alrededor del mundo están desarrollando picosatélites. Con su tamaño relativamente pequeño, los picosatélites pueden ser fabricados y lanzados al espacio por un costo estimado de US\$ 65,000 - 80,000 cada uno. A este costo, comparado con la mayoría de otros lanzamientos de satélites, los picosatélites se han convertido en una opción viable para universidades de muchas partes del mundo. La mayoría de ellos transportan 1 o 2 instrumentos de uso científico como su principal carga de misión y pocos proyectos tienen un sistema de estabilización.

Sus respectivos subsistemas son diseñados de acuerdo a las necesidades de cada institución, ya que algunos de los picosatélites son de uso académico, es decir, se diseñan para que el usuario (estudiantes desde secundaria hasta postgrado) puedan aprender las funciones básicas de un satélite e interpretar la información que se obtiene de él. Otros picosatélites se diseñan para ser lanzados al espacio con el objetivo de realizar pruebas para validar su diseño. Por ejemplo, respecto a medios de estabilización, existen diversas maneras de

estabilizar un satélite, algunas de ellas emplean uno y más actuadores para lograr el propósito deseado.

Es por ello que no todos los picosatélites que se han desarrollado en otras partes del mundo son iguales, cada uno fue diseñado y personalizado, buscando siempre la configuración ideal para un óptimo desempeño y un bajo costo de manufactura.

1.3 Orígenes del picosatélite universitario

En México han existido varias experiencias de desarrollo satelital, las que de uno u otro modo han repercutido en la dinámica de trabajo de este campo tecnológico en nuestro país. En seguida se describen estas experiencias.

1.3.1 UNAMSAT

El hoy extinto Programa Universitario de Investigación y Desarrollo Espacial (PUIDE) nació con la necesidad de integrar a México al desarrollo de tecnología espacial y a la formación de personal capacitado que pudiera enfrentar los retos en dicha rama tecnológica. Para lograr esto, se concibió el proyecto UNAMSAT. El UNAMSAT fue un microsatélite cúbico de 23 cm por lado con capacidades de comunicaciones digitales similares a un BBS (*Bulletin Broadcasting Service*), y un experimento científico, para medir la velocidad con la que entran los meteoritos a la atmósfera terrestre. Para realizar este proyecto, la UNAM compró un paquete de tecnología abierta a la compañía AMSAT (*Radio Amateur Satellite Corporation*), lo cual los obligó a respetar términos de discrecionalidad y de secrecía. Este paquete los ayudó a asimilar tecnología satelital, pero también los limitó en términos de independencia tecnológica.

Se considera microsatélite a todo aquel satélite que pese entre 10 y 100 kg, razón por la cual el UNAMSAT, con sus 10.7 kg de peso, entra en esta clasificación. El uso y desarrollo de este tipo de satélites es muy atractivo en la actualidad, debido al bajo costo de su lanzamiento comparado con el costo de lanzar satélites grandes. Los microsatélites normalmente viajan como carga secundaria, pagando únicamente una fracción del lanzamiento. También el costo de desarrollo es bajo, así como el tiempo de construcción.

Entre las aplicaciones que se han dado a este tipo de satélites es la de comunicaciones digitales usando packet radio (paquetes de datos transmitidos por radio) ya que pueden recibir, almacenar y retransmitir datos digitales.

El UNAMSAT fue el primero en llevar un experimento de tipo astronómico. Algunas conveniencias tecnológicas que se obtienen al emplear una plataforma microsatelital de AMSAT son:

- Eliminar en lo posible los arneses de cables en el satélite. El uso de arneses es fuente de fallas significativas y gran consumo de tiempo por parte del fabricante.
- Utilizar una estructura mecánica que puede ser ensamblada y desensamblada en menos de 30 minutos.
- Emplear un arreglo de paneles solares que minimizan la posibilidad de daño durante su manipulación y que pueden ser instalados rápidamente en el satélite.
- Uso de una técnica de manejo de potencia que ajusta dinámicamente la potencia de salida del transmisor para mantener balanceado el presupuesto energético del satélite una vez en órbita. Esta potencia debería ser modificada en órbita y entregar cada miliwatt posible de potencia de radiofrecuencia.
- Disponer de un microsátélite capaz de servir a terminales de usuarios de datos empleando únicamente antenas omnidireccionales.
- Disponibilidad de una computadora con comunicación serial multicanal con una capacidad mínima de 4 Mbytes de memoria y que requiere menos de 1.0 watt de potencia máxima.
- Masa total del satélite menor a 15 kg.

1.3.2 **SATEX**

SATEX fue un proyecto de investigación y desarrollo tecnológico muy ambicioso que buscó generar subsistemas microsatelitales mexicanos, diseñados, fabricados y validados para vuelo espacial. Persiguió además la formación de recursos humanos y la acumulación de experiencias en diversas ramas tecnológicas asociadas a tecnología espacial.

El proyecto fue concebido para involucrar a diferentes dependencias académicas y de investigación mexicanas, entre ellas el Centro de Investigación Científica y de Estudios Superiores de Ensenada (CICESE) de Ensenada BC., el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) de Guanajuato Gto., el Instituto Politécnico Nacional (IPN), la Universidad Autónoma de Puebla

(UAP), el Centro de Investigación en Tecnología Digital (CITEDI) de Tijuana BC., el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) de Puebla y la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Esta última a través del Instituto de Ingeniería y del Instituto de Geografía de la UNAM.

1.3.3 *SATEDU*

El satélite educativo lo desarrolla actualmente el Instituto de Ingeniería, UNAM, bajo un proyecto CONACYT. SATEDU es un satélite para uso en laboratorios de escuelas, desde secundarias hasta posgrados e inclusive para uso en centros de investigación para el desarrollo de nuevas tecnologías en el campo de los pequeños satélites.

SATEDU consistió en un prototipo satelital del tamaño de un contenedor de CD's y un software de visualización 3D ejecutable en PC's; con comunicaciones inalámbricas entre ellos. SATEDU cuenta con todos los subsistemas de un microsatélite incluyendo una rueda inercial. Todos los subsistemas de SATEDU son de tecnología universitaria Mexicana.

De estas experiencias, el personal del Instituto de Ingeniería percibió que México requiere de un proyecto satelital que reúna importantes características para promover este campo tecnológico en México para beneficio de su población en términos de seguridad nacional por medio de satélites LEO (atención y seguimiento a desastres naturales, aprovechamiento de recursos naturales, etc.) y de comunicaciones (video, voz y datos) por medio de satélites GEO.

Las características incluyen bajo costo, proyecto factible de terminar en 1.5 años, proyecto que contribuya la formación y cohesión de un equipo de trabajo con alto potencial de desarrollo tecnológico, etc. Tal proyecto fue precisamente el Picosatélite Universitario, de 1 kg de masa y dimensiones de $10 \times 10 \times 10$ cm, el cual es herencia directa tanto del proyecto SATEX como de SATEDU.

Sin embargo, además de la tecnología palpable directamente de los subsistemas satelitales (estructura, potencia, comunicaciones, computadora de vuelo, sensores, estación terrestre, y software de operaciones en satélite y en Tierra) para avanzar en tecnología satelital se requiere avanzar y dominar los medios de estabilización satelital en 3 ejes y particularmente el trabajo de modelado de estabilización y los algoritmos de control de apuntamiento o actitud.

Si un país no domina o no tiene esta última tecnología, no puede aspirar a controlar de forma inteligente ni a satélites, ni aviones o a dirigibles de control remoto. Por tal razón el Picosatélite Universitario persigue como objetivo entender, desarrollar y validar la tecnología de estabilización en un proyecto satelital muy económico, que nos lleve posteriormente a proponer plataformas satelitales LEO y posteriormente GEO que puedan apoyar la solución de grandes problemas nacionales de México.

CAPÍTULO 2

DISEÑO MODULAR DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO

2.1 Introducción

En este capítulo se describen a *grosso modo* las propuestas elaboradas para los subsistemas del Picosatélite y que actualmente se están desarrollando informalmente en el Instituto de Ingeniería UNAM; se igual forma se mencionan algunos de los componentes más convenientes para el diseño de los mismos.

2.2 Subsistemas que componen al picosatélite universitario

Para alcanzar el objetivo de diseñar y desarrollar un modelo de ingeniería del PICOSAT, se debe generar una solución tecnológica para cada uno de sus subsistemas críticos importantes se han identificado subsistemas críticos importantes, entre los que destacan:

- Subsistema estructural.
- Computadora de vuelo.
- Subsistema de Potencia.
- Subsistema de Comunicaciones.
- Subsistema de estabilización.
- Sensores de estabilización.
- Segmento terrestre para supervisión y mando del picosatélite universitario.

Con excepción del hardware del subsistema de comunicaciones, cada uno de estos subsistemas se ha analizado, estudiado y diseñado individualmente en el Instituto de Ingeniería UNAM, para que una vez se obtenga financiamiento, se procedan a fabricar, validar e integrar para dar forma al Picosatélite Universitario. Cabe mencionar que para alcanzar un alto grado de integración entre los equipos de trabajo que desarrollan los subsistemas mencionados, se ha mantenido constante comunicación y discusión entre los diseñadores. Particularmente, esto ha generado información valiosa para el diseño del subsistema estructural y la configuración del PICOSAT, así como otros aspectos que los diseñadores consideran importante.

2.3 Subsistema estructural

El propósito del subsistema estructural es proveer soporte a todos los subsistemas externos e internos abordo del satélite. El subsistema estructural del PICOSAT debe tener una integridad estructural y proveer un ambiente adecuado para la operación de todos los subsistemas durante todas las etapas de la misión.

En vista que todos los subsistemas tendrán su hardware y electrónica montada internamente y/o externamente al cuerpo del satélite, la estructura debe ofrecer un ambiente de protección para sus operaciones.

Los equipos satelitales que se aseguran al subsistema estructural son los siguientes:

2.3.1 *Potencia*

El subsistema de potencia requiere el montaje de tableros solares en la estructura externa. El subsistema estructural debe proveer un ambiente seguro para el montaje y operación de tableros solares, por ejemplo, que las vibraciones en los paneles sean tolerables para asegurar la operación de las celdas solares cuando el satélite esté en órbita espacial.

2.3.2 *Carga útil*

La carga útil puede ser de comunicaciones, óptica, radiométrica, etc.; en cada caso requeriría fijaciones, ventanas o antenas colocados en el cuerpo del satélite.

2.3.3 *Determinación y control de actitud (ADC)*

El subsistema ADC de PICOSAT requerirá que en su estructura se monten 3 ruedas inerciales y 3 bobinas de torque magnético, que se emplearán como actuadores para generar estabilidad, posicionamiento y ángulo de inclinación hacia la Tierra.

2.3.4 *Control de comandos y manejo de datos*

Este subsistema requiere que la estructura del PICOSAT se instale al menos un interruptor colocado en la parte superior de uno de los cuatro soportes del satélite para detectar la liberación en el espacio.

2.3.5 *Comunicaciones*

Requiere colocar las antenas para proveer comunicaciones de transmisión y recepción con una estación localizada en la Tierra. Se utilizan antenas tipo dipolo de polarización omnidireccional que aseguran las comunicaciones aun cuando no exista apuntamiento adecuado por parte del satélite.

2.4 *Computadora de vuelo*

PICOSAT tendrá una computadora principal pequeña integrada en un solo circuito impreso con conectores laterales a manera de ducto para que sea factible la interconexión de tarjetas en paralelo. Estos conectores ofrecerán la sujeción mecánica que se requiere entre las tarjetas electrónicas, además, cada tarjeta tendrá 1 orificio en cada una de sus esquinas para instalar tornillos que permitirán asegurar el conjunto de tarjetas electrónicas a la estructura satelital.

El diseño de la computadora incluirá hardware para eliminar el efecto "latch-up" que se genera en componentes electrónicos comerciales expuestos a radiación cósmica. El hardware de prevención de efecto "latch-up" se ha estudiado, diseñado y probado sin radiación en proyectos previos y fue elaborado considerando las mejores publicaciones internacionales que existen en el tema.

La computadora de vuelo está basada en el uso extensivo de partes y de sistemas comerciales de Telecomunicaciones y de la industria automotriz, de esa forma los proyectos de Picosatélites llegan a tener tiempos de desarrollo tan cortos (seis meses en algunos casos) lo cual los hace sumamente atractivos para validar nuevas tecnologías o tecnología de estado del arte en el espacio con financiamientos modestos (comparados con los costos de misiones espaciales

formales). Esta filosofía ha llevado al campo de los PICOSAT's a adoptar el lema de más rápido, más barato y el mejor, para sus misiones satelitales. Como puede deducirse, la vida esperada para este tipo de nave espacial es corta, pero al mismo tiempo resulta suficiente para probar y validar nuevas tecnologías en tiempos cortos, aspecto que contribuye posteriormente a incorporar tales tecnologías en sistemas satelitales más caros y complejos.

La computadora de vuelo integra un procesador RISC SAB80C166 de Siemens, de 16 bits, en versión industrial con grado de temperatura extendida, oscilador de 40 MHz, 256 KB de memoria RAM donde se cargará el software de operaciones satelital, hardware para cargar nuevos programas de forma automática a la computadora y un total de 5 puertos seriales. Los últimos apoyarán la comunicación asincrónica full-duplex de hasta 625 Kbauds y la comunicación síncrona half-duplex de hasta 2.5 Mbauds. Por medio de líneas E/S del procesador se emula un puerto SPI para acceder 32 Mb de memoria Flash. Este último recurso permite agregar la memoria masiva necesaria para almacenar varios tipos de telemetría de PICOSAT.

La razón para emplear el procesador Siemens radica en que tal procesador ya se empleó en la instrumentación previa del Microsatélite Satex y para tal procesador ya tenemos sistemas de desarrollo y software original (lenguaje C, BSO Tasking family of tools) con licencia, lo cual implica ahorros para el proyecto. Adicionalmente contamos con software de operaciones para un satélite mayor, que aunque no se aplica directamente a PICOSAT implica una reducción importante de esfuerzos de desarrollo, pruebas y tiempos de validación, que a su vez significan ahorros financieros para el proyecto.

El software de operaciones satelitales es muy importante pues contiene las soluciones de software que permiten las comunicaciones satélite-Tierra, en este caso desde el punto de vista del satélite, desde el punto de vista de tramas de comunicaciones (para comandos, telemetría, transmisión de nuevos programas) protocolos de intercambio de datos, tramas de comunicaciones, verificación de la integridad de los datos que se transmiten, así como principios de redundancia, diagnóstico, detección y corrección de fallas asociadas a la transmisión y a la recepción de datos. Todo esto ya lo estudiamos, lo resolvimos, implantamos, programamos y validamos en años previos dentro del proyecto microsatelital Satex, y ahora lo transferiremos a este nuevo proyecto.

Por otro lado, el microcontrolador SAB80C166 de 100-pines contiene recursos internos importantes como: un temporizador tipo "watch-dog", un controlador de interrupciones, contadores de 16 bits, 10 canales de conversión

A/D de 10 bits, dos canales seriales y varios puertos I/O de 16 bits, con un total de 76 líneas E/S. El SAB80C166 permite la carga de nuevos programas en memoria RAM externa, no obstante para ello demanda el control de algunas señales eléctricas que requieren respuestas específicas de retroalimentación por parte del procesador. Para este propósito la CV de PICOSAT incluye un pequeño microcontrolador PIC integrado en la misma tarjeta que será conectado también al canal de comunicaciones con la Estación Terrestre (ET). De esta manera, cuando el software de ET envíe el comando "subir nuevo programa" a PICOSAT, el microcontrolador PIC16F877 recibirá y ejecutará el mismo comando, procediendo entonces a asumir el control total del procesador Siemens para supervisar y lograr el proceso de carga del programa.

2.5 Subsistema de Potencia

Este subsistema aloja 4 o 6 baterías de litio AA recargables así como la electrónica que permite recargarlas por medio de tableros solares y también por medio de un cargador externo. De esta forma se tiene un subsistema de potencia sencillo, pequeño y económico que requiere poca mano de obra para ensamblarlo, lo cual contribuirá a reducir el costo del PICOSAT. Este subsistema tiene también un convertidor DC/DC para generar el voltaje de alimentación para los motores de ruedas inerciales, reguladores para diversos voltajes y medios electrónicos para controlar el encendido y el apagado de los subsistemas del PICOSAT. Adicionalmente, cuenta con un par de interruptores de estado sólido en configuración de redundancia series y paralelo para incrementar la confiabilidad de sus funciones operativas, que en éstos casos se consideran altamente críticas para el picosatélite.

2.6 Subsistema de Comunicaciones

El subsistema de comunicaciones de PICOSAT no se tiene definido hasta el momento, debido a que se empleará un sistema comercial adaptado para vuelo, al que se le tienen que agregar y quitar algunos componentes para que opere sin problemas en el espacio. Se elegirá un equipo de radiofrecuencia que haya sido empleado exitosamente en el espacio en alguna o algunas misiones previas. Evidentemente que el tamaño del radio por emplear debe ser compatible con las dimensiones y espacios disponibles en el PICOSAT. Por fortuna este tipo de radios existen en el mercado, son económicos y confiables pues se han empleados con éxito incluso las más avanzadas tecnologías comerciales.

2.7 Subsistema de estabilización

La orientación de un satélite se representa respecto a los ejes de Guiñada, Alabeo y Cabeceo (*yaw*, *roll* y *pitch*, respectivamente) de un sistema de coordenadas local.

Este sistema de coordenadas está referido al centro de masas de un satélite; el eje de guiñada apunta directamente al centro de la Tierra, el eje de alabeo está en el plano de la órbita perpendicular al primero y en la dirección del vector velocidad, el eje de cabeceo es perpendicular a los dos anteriores y orientado de manera que el sistema de coordenadas sea regular. En una configuración nominal de estabilidad los ejes del sistema de coordenadas fijo del satélite están en principio alineados con los ejes del sistema de coordenadas local. El control de estabilidad está representado por los ángulos de rotación de los ejes de esos dos sistemas coordenados.

El papel del control de estabilidad generalmente consiste en mantener los ejes coordenados fijos al satélite alineados con el sistema de coordenadas local con una precisión definida por la amplitud de la rotación en cada uno de esos ejes. En un satélite geostacionario los valores típicos son $\pm 0.05^\circ$ para cabeceo y alabeo y $\pm 0.2^\circ$ para guiñada.

Adicionalmente el mantenimiento de la estabilidad requiere funciones de dos tipos:

- Una FUNCIÓN DE DIRECCIÓN que consiste en hacer que una cara del satélite esté orientada hacia la Tierra girando alrededor del eje de cabeceo para compensar el movimiento aparente de la Tierra respecto del satélite. Para un satélite geostacionario esta rotación se realiza a la velocidad constante de una revolución por día ($0.25^\circ/\text{minuto}$).
- Una FUNCIÓN DE ESTABILIZACIÓN que incluye la compensación de los efectos de los pares perturbadores. Estos pares son creados por fuerzas gravitacionales, presión de la radiación solar y la interacción entre la electrónica del satélite y el campo magnético de la Tierra.

En el pasado se utilizaban controles de estabilidad pasivos. Esto implicaba utilizar los efectos de los pares de fuerzas naturales para mantener la estabilidad requerida, pero la precisión obtenida era incompatible con los requerimientos de los satélites de comunicaciones que usaban antenas directivas, ya que requerían un apuntamiento preciso. Consecuentemente, ahora se utilizan controles de estabilidad activos, el proceso implica:

- Medir la estabilidad del satélite respecto a referencias externas.

- Determinar la estabilidad respecto a una referencia predefinida.
- Evaluar la función de los actuadores.
- Ejecutar las correcciones por medio de los actuadores montados en el satélite.
- Seguimiento de la evolución de la estabilidad durante el movimiento del satélite influido por la acción de los pares perturbadores y de corrección.

El sistema puede operar en lazo cerrado a bordo del satélite, con lo que el control de los actuadores es generado directamente en el propio satélite en función de las salidas de los sensores de estabilidad. Dichas salidas pueden ser también transmitidas a una estación terrena a través de telemetría para que la estación evalúe las acciones correctivas correspondientes. En la práctica, se utiliza una combinación de estas dos técnicas.

2.8 Sensores de estabilización

Los sensores miden bien la orientación de los ejes del satélite respecto a referencias externas, o bien la progresión de la orientación con el tiempo (giróscopos).

Su característica principal es la precisión. Esta depende no solamente del procedimiento usado, sino también del error de alineamiento de los sensores respecto al cuerpo del satélite.

Los sensores más utilizados a bordo de satélites geoestacionarios son los solares, detectores de horizonte terrestre y giróscopos. Para ciertas aplicaciones el uso de sensores de estrellas amplía el rango de posibilidades. Finalmente, es posible utilizar un radiofaro o un láser para obtener medidas de estabilidad precisas.

2.8.1 *Sensores solares*

Utilizan elementos foto-voltaicos que generan una corriente cuando son iluminados por el Sol. Miden uno o dos ángulos de la luz incidente respecto al plano de la cara en la que están montados. La precisión obtenida es del orden de 0.005° .

2.8.2 *Sensores de Tierra*

La Tierra, rodeada por su atmósfera, aparece como un cuerpo esférico negro a una temperatura de 255 K cuando la radiación es medida en la banda de absorción infrarroja del dióxido de carbono (14-16 μ m). La imagen de la Tierra contrasta con respecto al plano de fondo cuya temperatura es de aproximadamente 4 K.

La medida de la absorción infrarroja, cuya emisión es uniforme aproximadamente sobre la superficie de la Tierra, realizada mediante elementos termosensibles permite detectar el contorno terrestre. La reflexión de la luz solar sobre la Tierra puede ser también medida. Ésta es detectada mediante celdas fotoeléctricas o fototransistores. Se obtienen precisiones del orden de 0.05°.

2.8.3 *Sensores de estrellas*

Una imagen de una porción del cielo proporciona un mapa de las estrellas cuya posición relativa es detectada y comparada con un mapa de referencia. Con los datos de comparación se obtienen factores de corrección que se usan para controlar la orientación de un satélite. La precisión de la medición es muy alta, del orden de 10^{-4} grados. Como contrapartida tenemos la complejidad del sensor y el peligro de la saturación del mismo por culpa del Sol, la Tierra u otras fuentes de luz.

2.8.4 *Unidades inerciales*

Utilizan medidores de aceleración para detectar el movimiento de traslación del satélite o giróscopos para la medida de la velocidad angular sobre un determinado eje. Estos dispositivos están sometidos a errores de deriva. Los dispositivos mecánicos tienen un tiempo de vida límite (alrededor de 10000 horas) que imposibilita su uso continuo para misiones convencionales de unos 10 años.

2.8.5 *Sensores de radiofrecuencia*

Dependen de la medición de las características de las ondas de radio transmitidas hacia el satélite por radiofaros terrestres. Permiten medir el ángulo existente entre el eje de la antena a bordo y la dirección deseada del radiofaro. La rotación sobre el eje que va del satélite al centro de la tierra (guiñada) es difícil de evaluar. Para medir la rotación de una onda polarizada desde un radiofaro simple debe obtenerse un valor del ángulo de guiñada.

Desafortunadamente, la orientación de la polarización viene afectada por la rotación Faraday y la precisión del ángulo de guiñada es del orden de 0.5° . Sobre los otros ejes podría llegar a ser de 0.01° .

2.8.6 *Detector láser*

El uso de un haz láser en lugar de un radiofaro se ha considerado para la determinación de la orientación de satélites. La precisión esperada es de 0.006° para ángulos de alabeo y cabeceo, y 0.6° para el de guiñada. Uno de los mayores problemas de este método consiste en la atenuación del láser a causa de las nubes.

2.9 **Segmento terrestre para supervisión y mando del picosatélite universitario**

El segmento terrestre estará compuesta por antenas *yagi* en cuya estructura se tienen rotores electromecánicos controlados por computadora que permiten seguir el viaje del Picosatélite cuando este sobrevuela la Estación Terrestre. Las antenas se conectan a equipos de RF y de estos a una computadora que controla el flujo de datos entre satélite y Tierra.

El software de segmento terrestre se ejecuta en computadoras personales e interactúa con el picosatélite para realizar las funciones del sistema picosatelital. De hecho, gran parte de los atributos amigables de todo el PICOSAT son generados por este software. Es por eso que el desarrollo de este software se realizará bajo las bases de un software desarrollado anteriormente por el proyecto SATEX. El nuevo programa lleva a cabo funciones similares a las que realizó el proyecto SATEX.

El software se desarrolló en Visual Basic y emplea recursos visuales suficientes para que el usuario pueda identificar el estado del satélite a partir de datos telemétricos.

A pesar de que el software de estación terrena PICOSAT se basa en el software del proyecto SATEX, habrá una versión modificada de acuerdo a las características particulares del Picosatélite Universitario, sin embargo, el software tendrá funciones similares a aquella empleada al control de satélites lanzados al espacio, entre ellos:

- Comandos de respuesta inmediata.

- Comandos de tareas de acuerdo con tiempos definidos en el comando mismo, el cual tendrá respuesta retardada desde el PICOSAT.
- Comandos de petición de telemetría de acuerdo con intervalos de tiempo definidos por el usuario.
- Petición de telemetría en tiempo real para permitir la supervisión en línea del PICOSAT.
- Comandos de control de estabilización del satélite, etc.

CAPÍTULO 3

DEFINICIONES Y NOTACIONES

3.1 Introducción

En este capítulo se mencionan las herramientas matemáticas utilizadas para describir el modelo matemático del control de orientación del Picosatélite universitario, que son de gran importancia para establecer un estándar en la simbología utilizada, así como una mejor comprensión de las expresiones matemáticas empleadas en capítulos posteriores y una mejor comprensión del fenómeno a estudiar.

3.2 Sistemas coordenados

3.2.1 *Sistema coordenado inercial con centro en la Tierra \mathcal{S}^I*

El eje x_i apunta al equinoccio vernal (primavera), el eje z_i apunta al polo norte de la Tierra y el eje y_i se obtiene con la regla de la mano derecha [Figura 3.1].

3.2.2 *Sistema coordenado fijo a la Tierra con centro en la Tierra \mathcal{S}^E*

El eje x_e apunta a la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador, el eje z_e apunta al polo norte y la dirección positiva del eje y_e se determina con la regla de la mano derecha. La rotación del sistema \mathcal{S}^E respecto a \mathcal{S}^I es de $\Omega_E = 7.2921 \times 10^{-7} [rad/s]$ alrededor del eje z_i , y corresponde a la rotación de la Tierra [Figura 3.1].

3.2.3 *Sistema coordenado Orbital con centro en la Tierra \mathcal{S}^{OE}*

Describe la órbita del satélite, en donde x_{oe} apunta al perigeo, y_{oe} apunta al eje semimenor y z_{oe} es perpendicular al plano de la órbita. Para órbitas

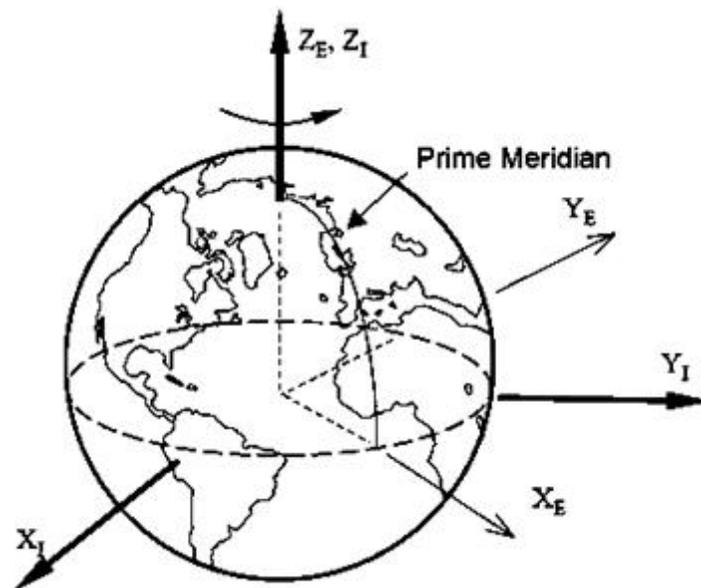


Figura 3.1: Sistemas coordenados Inerciales y con centro en la Tierra

circulares solo es necesario conocer la longitud del plano ascendente respecto al eje que apunta al equinoccio vernal y la inclinación respecto a la línea de nodos [Figura 3.2].

3.2.4 *Sistema coordenado Orbital \mathcal{S}^O*

Tiene como origen el centro de masa del satélite, en donde z_o apunta al centro de la Tierra, x_o es tangente a la órbita y y_o completa la regla de la mano derecha [Figura 3.2].

3.2.5 *Sistema coordenado fijo al satélite \mathcal{S}^B*

Este sistema tiene como origen el centro de masa del satélite y su orientación es relativa al Sistema \mathcal{S}^O . Para nuestro propósito el eje z_b estará alineado a la dirección en la que apuntará una cámara de alta resolución, y cualquiera de los ejes x_b o y_b pueden coincidir con los momentos de inercia principales del satélite. El sistema coordenado \mathcal{S}^B coincidirá con el sistema coordenado \mathcal{S}^O cuando la orientación del satélite sea de 0° en alabeo, cabeceo y guiñada; *roll*, *pitch*, *yaw* por sus siglas en inglés.

3.3 Representación de la actitud del Picosatélite Universitario

3.3.1 *Ángulos de Euler*

Representan la orientación de un cuerpo respecto a un sistema coordenado xyz o la orientación de un sistema coordenado respecto a otro [Figura 3.3]. Para describir la orientación de un cuerpo en términos de los ángulos de Euler se definen las siguientes rotaciones:

θ (*roll*) describe la rotación alrededor del eje x .

ϕ (*pitch*) describe la rotación alrededor del eje y .

ψ (*yaw*) describe la rotación alrededor del eje z .

En el caso del satélite estos ángulos describen su orientación relativa al Sistema \mathcal{S}^O .

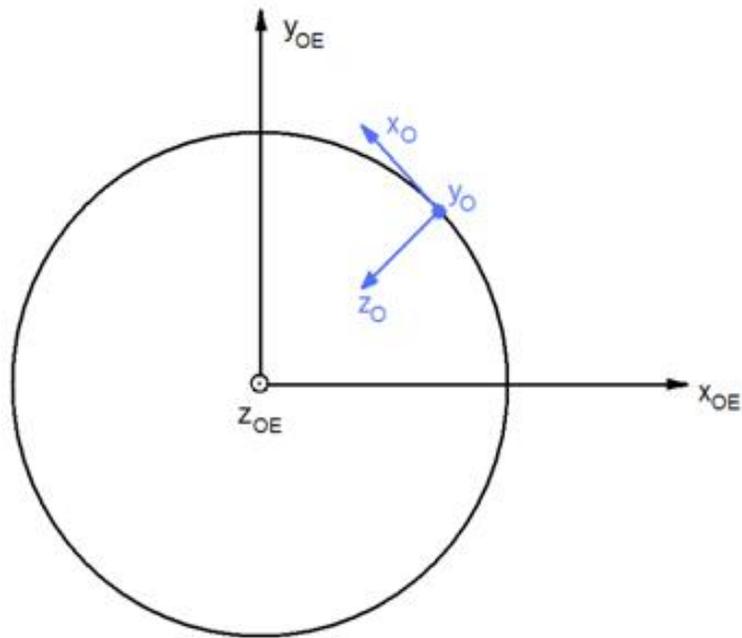


Figura 3.2: Sistemas coordenados orbital con centro en la Tierra y orbital

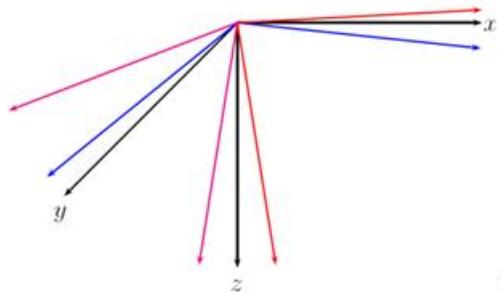


Figura 3.3: Visualización de la rotación de un eje coordenado, obsérvese como rotan los otros ejes coordenados según sean sus colores

3.3.2 Cuaterniones unitarios

La orientación de un objeto puede ser descrita como una rotación alrededor de un eje. Este eje es un vector unitario λ con componentes en un sistema coordenado xyz , por lo que se necesitan cuatro parámetros para describir una orientación respecto a un sistema coordenado de referencia; los tres componentes del vector unitario λ y un ángulo de rotación θ .

La ventaja de utilizar cuaterniones unitarios es que se evitan singularidades (punto(s) donde una función tiende a infinito o está mal definida en otro sentido) que se presentan en secuencias de rotaciones expresados en ángulos de Euler. Un cuaternión se define por tener una parte escalar η y una vectorial ϵ , de manera que:

$$q = [\eta \quad \epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3] \quad (3.1)$$

y para un cuaternión unitario, se tiene:

$$\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = q^T q = 1 \quad (3.2)$$

donde:

$$\eta = \cos \frac{\beta}{2} \quad (3.3)$$

$$\epsilon = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3] = \lambda \sin \frac{\beta}{2} \quad (3.4)$$

y se puede observar que η y ϵ se expresan en términos de una rotación β alrededor de un vector unitario λ , con los cuales también se puede representar la orientación de satélite, mejor conocido como *representación en parámetros de Euler* [Figura 3.4].

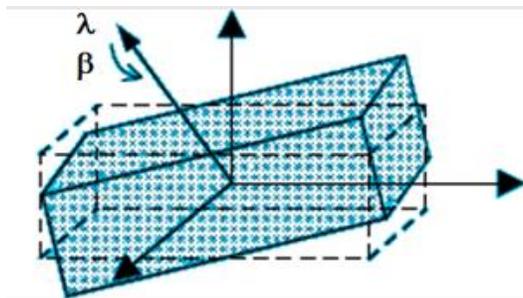


Figura 3.4: Parámetros de Euler

3.4 Matriz de rotación

Una matriz de rotación puede ser interpretada de tres maneras:

- La transformación de un vector representado en un sistema coordenado a otro sistema coordenado.
- La rotación de un vector en el mismo sistema coordenado.
- La descripción de una orientación mutua entre 2 sistemas coordenados.

La matriz de rotación R de un sistema coordenado a a un sistema coordenado b se denota R_a^b . La matriz R es una matriz de 3×3 de elementos reales, y tiene las propiedades siguientes: $R^\top R = I^{3 \times 3}$, $\det(R)=1$ y $R_a^b = (R_b^a)^{-1} = (R_b^a)^\top$.

La transformación de un vector expresado en un sistema coordenado inicial a otro sistema coordenado final se puede expresar como $v_{final} = R_{inicial}^{final} v_{inicial}$.

La matriz de rotación correspondiente a la rotación de β grados alrededor del eje λ puede obtenerse como sigue:

$$R = I + S(\lambda) \sin \beta + (1 - \cos \beta) S^2(\lambda) \quad (3.5)$$

donde el operador $S(\cdot)$ es la matriz anti-simétrica:

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) puede expresarse en términos de cuaterniones unitarios como sigue:

$$R = I + 2\eta S(\epsilon) + 2S^2(\epsilon) \quad (3.7)$$

Otra manera de describir la matriz de rotación es usando los ángulos de Euler:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde los ángulos θ , ϕ y ψ son las rotaciones alrededor de los ejes x , y y z respectivamente.

La derivada de la matriz de rotación con respecto al tiempo es:

$$\dot{R}_b^a = \Omega_{ab}^a \times R_b^a \quad (3.11)$$

donde Ω_{ab}^a es el vector de la velocidad angular del sistema coordenado b relativo al sistema coordenado a expresada en el sistema coordenado a cumpliendo la propiedad $\Omega_{ab}^a = -\Omega_{ba}^a$ resultando en:

$$\dot{R}_b^a = S(\Omega_{ab}^a)R_b^a = R_b^a S(\Omega_{ab}^b) \quad (3.12)$$

siguiendo la definición de producto cruz:

$$\lambda \times a = S(\lambda)a \quad (3.13)$$

y la propiedad:

$$S(\lambda) = -S(\lambda)^\top \quad (3.14)$$

3.5 Transformación entre diferentes sistemas coordenados

3.5.1 Transformación desde el sistema $S^{O\mathcal{E}}$ a los sistemas S^I y S^E

Esta transformación es de utilidad ya que permite conocer la posición del satélite con respecto al sistema S^I y al sistema S^E .

$$\begin{aligned} R_{OE}^I &= R_z(\Omega)R_x(i)R_z(\omega) \\ R_{OE}^E &= R_z(\Omega + \theta)R_x(i)R_z(\omega) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donde Ω es la ascensión derecha del nodo ascendente, i es la inclinación de la órbita respecto a la línea de nodos, ω es el argumento del perigeo y θ es la ascensión del meridiano cero.

3.5.2 Transformación desde el sistema S^E al sistema S^I

Esta rotación se efectúa alrededor de los ejes z_i y z_e coincidentes entre si, equivalente a un ángulo $\delta = \Omega_e t$ donde Ω_e es la rotación de la Tierra y t es el tiempo transcurrido desde que el sistema S^E y S^I estuvieran alineados, y se expresa de la siguiente manera:

$$R_E^I = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.5.3 Transformación del sistema \mathcal{S}^O al sistema \mathcal{S}^{OE}

Esta rotación depende de la translación del satélite en una órbita definida:

$$R_O^{OE} = R_z(\chi)R_x(\xi)R_y(\kappa) \quad (3.17)$$

donde $\chi = -90^\circ$, $\xi = 90^\circ$ y $\kappa = \kappa_o + \omega_o t$, κ_o corresponde al inicio de despliegue del satélite respecto de su órbita y ω_o es la velocidad angular de desplazamiento del satélite en su órbita. Con estos parámetros, z_o del sistema \mathcal{S}^O queda apuntando al centro de la órbita y x_o es tangente a la órbita, tal como se define en la sección 3.1.

3.5.4 Transformación desde el sistema \mathcal{S}^O al sistema \mathcal{S}^B

Esta rotación depende de la actitud del satélite y estimando esta matriz de rotación la actitud puede ser determinada, y a partir de la ecuación (3.7) esta rotación se define como:

$$R_B^O = I + 2\eta S(\epsilon) + 2S^2(\epsilon) \quad (3.18)$$

expandiendo los términos según las ecuaciones (3.5) y (3.4) tenemos:

$$R_B^O = (R_B^O)^\top = \begin{bmatrix} \eta^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \eta\epsilon_3) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \eta\epsilon_2) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \eta\epsilon_3) & \eta^2 - \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \eta\epsilon_1) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \eta\epsilon_2) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \eta\epsilon_1) & \eta^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.6 Relación entre el Sistema Coordenado Orbital \mathcal{S}^O y el Sistema Coordenado Inercial \mathcal{S}^I

Como se mencionó anteriormente, el Sistema coordenado Orbital \mathcal{S}^O tiene como origen el centro de masa del picosatélite y se caracteriza por la dependencia que existe con el desplazamiento angular de satélite en su órbita, además de que uno de los ejes apunta al centro de la Tierra, por lo que es muy importante obtener un modelo matemático que describa el movimiento de ese sistema coordenado \mathcal{S}^O en la órbita del satélite mientras transcurre el tiempo, además que se podría interpretar como una *orientación deseada* del picosatélite respecto al Sistema Coordenado Inercial \mathcal{S}^I .

El objetivo del sistema de control de estabilización es que una de las caras del satélite apunte al centro de la Tierra, es decir, que el sistema \mathcal{S}^B coincida con los ejes del sistema \mathcal{S}^O . El uso de los ángulos de Euler para expresar

la orientación del satélite no es adecuado ya que se presentan singularidades, por tal motivo se usarán cuaterniones unitarios.

Ya que un cuaternión unitario tiene un componente vectorial y uno escalar, se necesita un vector y ángulo de rotación tal que el satélite apunte al centro de la Tierra durante su recorrido en una órbita definida.

Para calcular el cuaternión unitario asociado que relaciona el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{O}}$ y el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{I}}$ se utilizan las siguientes rotaciones:

- Transformación del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{O}\mathcal{E}}$ al sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{I}}$

$$R_{OE}^I = R_z(\Omega)R_x(i)R_z(\omega) \quad (3.20)$$

donde R_{OE}^I se definió en la sección 3.4, y los valores para cada parámetro son de acuerdo a una órbita definida, y en nuestro caso se tiene que $\Omega = 15^\circ$, $i = 89^\circ$ y $\omega = 0^\circ$.

- Transformación del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{O}}$ al sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{O}\mathcal{E}}$

$$R_O^{OE} = R_z(\chi)R_x(\xi)R_y(\alpha) \quad (3.21)$$

donde $\chi = -90^\circ$ y $\xi = 90^\circ$. La rotación $R_y(\alpha)$ se omitirá debido a que α varía con el tiempo y provocará que en cierto ángulo exista una singularidad, parámetro que se incluirá más adelante, quedando esta rotación así:

$$R_O^{OE} = R_z(\chi)R_x(\xi) \quad (3.22)$$

Teniendo las matrices de rotación anteriores, el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{O}}$ puede expresarse en términos del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{I}}$ con la siguiente expresión:

$$R_I^{OE} = (R_{OE}^I)^\top; \quad R_{OE}^O = (R_O^{OE})^\top \quad (3.23)$$

$$R_I^O = R_{OE}^O R_I^{OE} \quad (3.24)$$

Para expresar la matriz de rotación anterior en términos de un vector unitario λ_i y un ángulo de rotación β_i transformaremos la matriz de rotación en cuaterniones mediante este sencillo algoritmo:

- Para obtener el vector de giro V , y considerando que la matriz R_I^O se define como:

$$R_I^O = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

el vector de giro será:

$$V = \begin{bmatrix} r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} \\ r_{12} - r_{21} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

por lo que el vector unitario λ_i será:

$$\lambda_i = \frac{V}{|V|} \quad (3.27)$$

- Ahora calculamos el ángulo de giro β_i de la siguiente manera:

$$\beta_i = \arccos \frac{\text{trace}(R_I^O) - 1}{2} \quad (3.28)$$

- Expresando λ_i y β_i en cuaterniones:

$$\begin{aligned} \eta_i &= \cos \frac{\beta_i}{2} \\ \epsilon_i &= \lambda \sin \frac{\beta_i}{2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Teniendo el cuaternión unitario $q_i = [\epsilon_i, \eta_i]$ queda incluir la rotación omitida en la ecuación (3.21). Esta rotación se efectuaba sobre el eje coordenado y_o con un ángulo κ , por lo que se puede expresar esta rotación en un cuaternión unitario definido así:

$$\begin{aligned} \eta_o &= \cos \frac{\kappa}{2} \\ \epsilon_o &= \lambda_o \sin \frac{\kappa}{2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $\lambda_o = [0, 1, 0]^\top$. Finalmente se usará la definición del producto de dos cuaterniones unitarios para relacionar $q_i = [\eta_i, \epsilon_i]$ y $q_o = [\eta_o, \epsilon_o]$

$$q_d = q_i \times q_o = \begin{bmatrix} \eta_i \eta_o - \epsilon_i^\top \epsilon_o \\ \eta_i \epsilon_o + \eta_o \epsilon_i + S(\epsilon_i) \epsilon_o \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

donde q_d es el cuaternión asociado que relaciona el sistema \mathcal{S}^O y el sistema \mathcal{S}^I . La interpretación geométrica de este producto es la rotación q_i

en torno a q_o , por lo tanto la rotación que se omitió se incluye en este producto de dos cuaterniones unitarios. Este resultado será de gran utilidad para hacer una transformación de coordenadas entre el sistema \mathcal{S}^O y el sistema \mathcal{S}^I y visualizar los resultados del control de apuntamiento del picosatélite en una simulación de realidad virtual.

CAPÍTULO 4

MODELO MATEMÁTICO DE LA POSICIÓN Y ACTITUD DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO

4.1 Introducción

Una vez que se mencionaron las herramientas matemáticas necesarias para el estudio realizado en esta tesis se comprenderá de manera más clara el modelo matemático de la posición y actitud del picosatélite universitario que se trata en este capítulo.

Primero se describirá la posición del satélite según su desplazamiento angular en una órbita definida, de tal manera que se conocerá aproximadamente su posición respecto al sistema coordenado $\mathcal{S}^{\mathcal{E}}$ en coordenadas geocéntricas o cartesianas.

Posteriormente se describirán los modelos matemáticos dinámicos y cinemáticos del satélite para conocer su orientación, velocidad angular, torques de control y torques externos o perturbaciones conforme el satélite se traslada en su órbita. La inclusión de perturbaciones en el modelo matemático permite una mejor aproximación a la realidad, ya que en el espacio exterior existen perturbaciones que afectan a la dinámica del satélite, unas más significativas que otras.

Este modelo matemático es de gran importancia para incluir un control que estabilizará al satélite y para lograr la orientación que se desea con el objeto de que el satélite apunte al centro de la Tierra.

4.2 Parámetros de la órbita del Picosatélite Universitario

4.2.1 Ecuación diferencial de la órbita

El tipo de órbita que seguirá el Picosatélite universitario será circular con radio de 7,878 km. Con estos datos se podrá conocer la velocidad angular del desplazamiento del satélite a lo largo de su órbita.

La ecuación diferencial general de una órbita es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m_o k}{H^2}; \quad u = r^{-1} \quad (4.1)$$

que tiene la forma de un oscilador armónico lineal con una función de fuerza constante cuya solución para este tipo de órbita es simplemente una constante y un término armónico:

$$u = \frac{m_o k}{H^2}; \quad u = r^{-1}; \quad H = m_o r^2 \dot{\theta} \quad (4.2)$$

siendo:

$$k = G m_e m_o = m_o g (R_E)^2 \quad (4.3)$$

donde:

m_o Masa del satélite.

r Radio de la órbita.

H Magnitud del momentum angular.

$\dot{\theta}$ Velocidad angular con la que el satélite recorre su órbita.

G Constante de la gravitación universal.

m_e Masa de la Tierra.

g Gravedad terrestre al nivel del mar.

R_E Radio de la Tierra.

finalmente se obtiene:

$$\dot{\theta} = \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m_o r^3}} \quad (4.4)$$

donde $\Omega_{io} = [0 \ \omega_o \ 0]^T$ será el término que se usará para expresar la velocidad angular con la que el satélite recorre su órbita en términos del sistema coordenado orbital con centro en la Tierra \mathcal{S}^{OE} relativo al sistema coordenado inercial \mathcal{S}^I .

4.2.2 *Parámetros orbitales*

Para definir una órbita se necesitan los siguientes parámetros, en un plano 2D [Figura 4.1]:

a = Eje semi-mayor,

e = Excentricidad,

Ω = Argumento del perigeo,

b = Eje semi-menor,

r = Radio de la órbita,

E = Centro de la Tierra,

A = Apogeo,

P = Perigeo,

v = Anomalía verdadera,

u = $\omega + v$ = Argumento de latitud,

A.N. = Nodo ascendente,

S = Posición del satélite,

En el espacio 3D [Figura 4.2]:

i = Inclinación,

Ω = Ascensión derecha del nodo ascendente,

ω = Argumento del perigeo,

V = Equinoccio Vernal (intersección entre el ecuador de la Tierra y la elíptica),

A.N. = Nodo Ascendente,

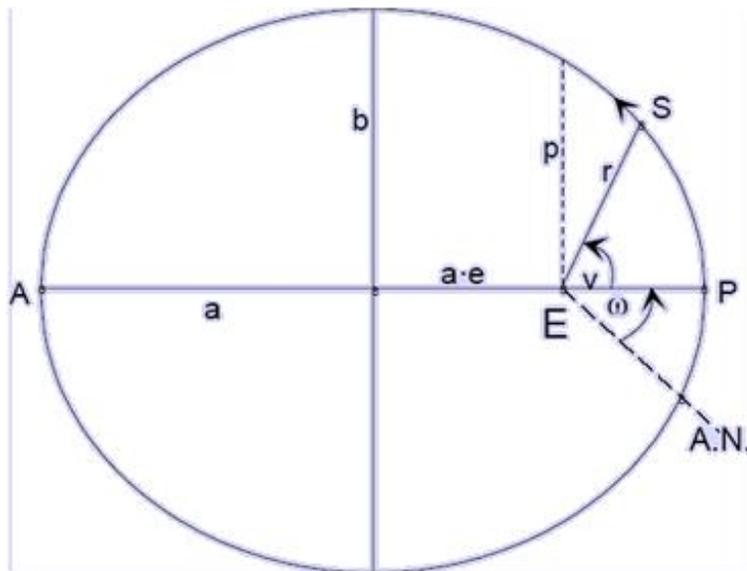


Figura 4.1: Definición de los parámetros de órbita en un plano

P = Perigeo,

N = Polo Norte,

B = Plano Orbital,

Para describir la órbita del Picosatélite basta con definir el radio, la inclinación y la ascensión derecha del nodo ascendente; y para definir la posición del satélite se necesita el argumento de latitud y considerar que el argumento del perigeo es cero.

4.3 Cinemática

Como se mencionó en el capítulo 3 la orientación del satélite se puede expresar con una matriz de rotación, ángulos de Euler o cuaterniones unitarios. Aún cuando existan esas posibilidades se descartará el uso de ángulos de Euler para simplificar los cálculos y evitar las singularidades que puedan producirse. Entonces para expresar la orientación del satélite se utilizarán los cuaterniones unitarios y para definir una matriz de transformación entre sistemas coordinados se utilizará la matriz de rotación en términos de cuaterniones unitarios.

La orientación del satélite en términos de un cuaternión unitario se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\eta &= \cos \frac{\beta}{2} \\ \epsilon &= \lambda \sin \frac{\beta}{2}\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde anteriormente se mencionó que $\eta^2 + \epsilon^2 = 1$ y $q = [\eta \ \epsilon]^\top$. Entonces, la cinemática del satélite se expresa como:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}\eta \Omega - \frac{1}{2}\Omega \times \epsilon\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde Ω es la velocidad angular del satélite; utilizando la propiedad del producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega\end{aligned}\tag{4.7}$$

expresando la ecuación anterior de acuerdo a los ejes coordinados definidos con anterioridad:

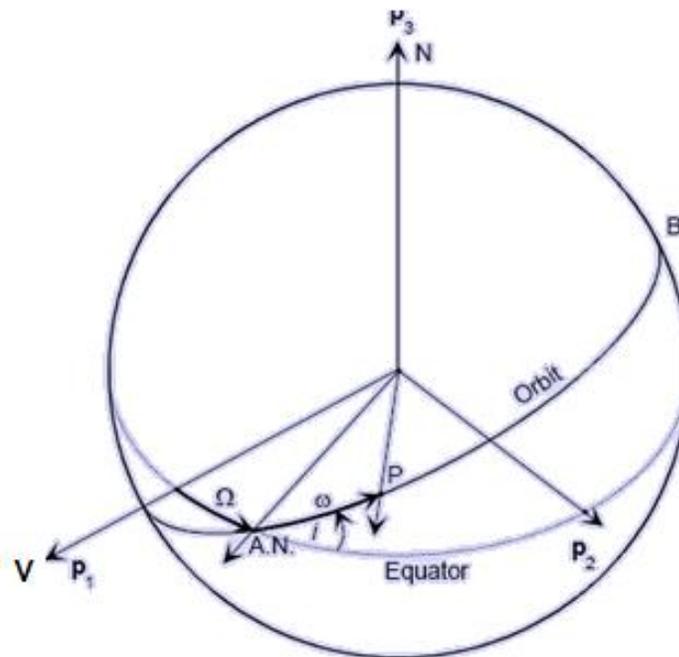


Figura 4.2: Definición de los parámetros de órbita en el espacio 3D

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega_{ob} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega_{ob}\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde Ω_{ob} es la velocidad angular del satélite en el sistema coordenado orbital \mathcal{S}^B referido al sistema coordenado orbital \mathcal{S}^O . Para definir una transformación lineal del sistema coordenado fijo al satélite \mathcal{S}^B al sistema coordenado orbital \mathcal{S}^O , con las propiedades mencionadas en el capítulo 3, se define la matriz de rotación de la siguiente manera:

$$R_o^b = I - 2\eta S(\epsilon) + 2S^2(\epsilon)\tag{4.9}$$

4.4 Dinámica de cuerpo rígido

Para definir la dinámica de cuerpo rígido del satélite se hace la siguiente consideración [Figura 4.3]:

$$R = \begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix}, \quad r'_i = \begin{bmatrix} x_i^b \\ y_i^b \\ z_i^b \end{bmatrix}\tag{4.10}$$

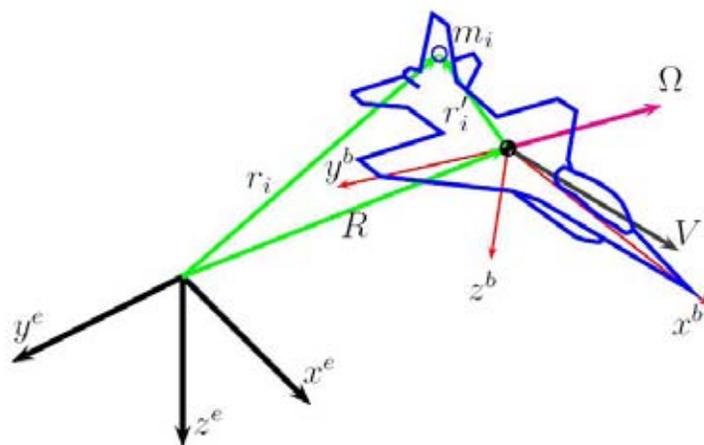


Figura 4.3: Definición de *ejes Tierra* y *ejes cuerpo* en un modelo de dinámica de cuerpo rígido

donde R es un vector que está expresado en un sistema coordenado inercial que lo llamaremos como *ejes Tierra* y r'_i es un vector que está expresado

en un sistema coordenado que lo llamaremos como *ejes cuerpo* y el centro de ese sistema coordenado está en el centro de masa del objeto, de manera que:

$$r_i = \begin{bmatrix} x^e + x_i^b \\ y^e + y_i^b \\ z^e + z_i^b \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Se sabe además que la derivada de la cantidad de movimiento de una partícula de un cuerpo rígido rotando alrededor de su centro de masa es:

$$\frac{d}{dt}L_i = r'_i \times m_i[\Omega \times (\Omega \times r'_i)] + r'_i \times m_i(\dot{\Omega} \times r'_i) \quad (4.12)$$

por lo que la ley de Newton para movimiento rotacional del satélite es:

$$\sum_{i=1}^n \{r'_i \times m_i[\Omega \times (\Omega \times r'_i)] + r'_i \times m_i(\dot{\Omega} \times r'_i)\} = \tau$$

donde τ son los momentos externos actuando alrededor del centro de masa del satélite. Utilizando la identidad del triple producto vectorial puede mostrarse que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i[\Omega \times (\Omega \times r'_i)] &= \Omega \times I\Omega \\ \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i(\dot{\Omega} \times r'_i) &= I\dot{\Omega} \end{aligned}$$

Donde se identifica a la matriz de inercia J como:

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \begin{bmatrix} y_i'^2 + z_i'^2 & -x_i'y_i' & -x_i'z_i' \\ -y_i'x_i' & x_i'^2 + z_i'^2 & -y_i'z_i' \\ -z_i'x_i' & -z_i'y_i' & x_i'^2 + y_i'^2 \end{bmatrix} \right\}$$

por lo tanto queda:

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times J\Omega = \tau \quad (4.13)$$

expresando ahora la ecuación anterior de acuerdo a los ejes coordenados definidos con anterioridad obtenemos:

$$J\dot{\Omega}_{ib} + \Omega_{ib} \times J\Omega_{ib} = \tau \quad (4.14)$$

o bien, utilizando la propiedad del producto vectorial definida en el capítulo 3 se tiene que:

$$J\dot{\Omega}_{ib} - S(J\Omega_{ib})\Omega_{ib} = \tau \quad (4.15)$$

que es la ecuación de la dinámica de cuerpo rígido del satélite, en la cual se puede conocer la velocidad angular del satélite cuando se aplica un torque externo considerando la distribución de masas y la geometría descritas en la matriz de inercia. Esta velocidad angular está expresada en un sistema coordenado fijo al satélite \mathcal{S}^B relativo al sistema coordenado inercial \mathcal{S}^I .

Además se puede expresar Ω_{ib} con la siguiente ecuación:

$$\Omega_{ob} = R_{ob}\Omega_{io} + \Omega_{ib} \quad (4.16)$$

donde:

$$\Omega_{io} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

siendo ω_o una constante ya definida anteriormente.

4.5 Principales perturbaciones que afecten a la orientación del Picosatélite universitario

En el espacio existen perturbaciones que afectan tanto a la orientación como la translación de satélites en cualquier tipo de órbita, para esta tesis solo se considerarán aquellas que afecten la orientación del satélite. En el caso de la órbita del Picosatélite Universitario las principales perturbaciones son la gravedad de la Tierra, el campo magnético terrestre y el arrastre aerodinámico, debido a que la órbita del Picosatélite universitario es de órbita baja.

4.5.1 *Torques de origen magnético*

Los torques magnéticos en un satélite resultan tanto de una estrategia de control utilizando actuadores que generan momentos de dipolo magnético o de la magnetización del satélite causado por algunos componentes de satélite como sensores y actuadores o de campos magnéticos residuales de efectos de carga espacial. Para satélites de órbita baja con altitudes de más de 1000 km, los torques de origen magnético son frecuentemente las principales perturbaciones que afectan a la orientación del satélite.

Si \mathbf{m} es el momento magnético del satélite en $[A \ m^2]$ y \mathbf{B} es la densidad de flujo magnético en $[Wb/m^2]$, el torque magnético está dado por:

$$\tau_{mag} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.18)$$

Se debe subrayar que los valores típicos del campo magnético terrestre a baja altitud en el ecuador son de $3 \times 10^{-5} [Wb/m^2]$ [Vicent L. Pisacane, *Fundamentals of space systems*].

4.5.2 *Torques debido a la gravedad terrestre*

Asumiendo que la fuerza gravitacional de un componente del satélite es diferente de otra, esta diferencia resulta en un torque neto.

Esto se expresa mediante:

$$\tau_r = 3\omega_o^2 S(c_3^b) J c_3^b \quad (4.19)$$

donde:

$$c_3^b = R_o^b [0 \ 0 \ 1]^T \quad (4.20)$$

Cabe mencionar que esta expresión también sirve para satélites que cuentan con gradiente gravitacional, es decir, una masa que se despliega del satélite y este provee estabilización en la guiñada del satélite. Para el Picosatélite, se considerará como una perturbación externa.

4.5.3 *Torques debido al arrastre aerodinámico*

A altitudes de menos de 800 km, el torque aerodinámico es generalmente la perturbación ambiental más importante. La misión de un satélite llega a su fin frecuentemente cuando el torque aerodinámico es tan grande que el satélite entra a la atmósfera de la Tierra y el sistema de estabilización deja de ser efectivo.

Para la simulación de los modelos matemáticos del Picosatélite Universitario no se considerarán estos tipos de perturbaciones aún cuando la altitud deseada es de aproximadamente 380 a 900 km, pero se recomienda en trabajos futuros el estudio de este tipo de perturbaciones.

Cabe mencionar que el tiempo de vida considerado para la misión del Picosatélite Universitario es entre 4 a 12 meses o más, dependiendo de diversas circunstancias tecnológicas y ambientales.

CAPÍTULO 5

MODELO MATEMÁTICO DEL CONTROL DE ACTITUD DEL PICOSATÉLITE UNIVERSITARIO

5.1 Introducción

En este capítulo se mencionarán tres técnicas de control, de las cuales se describirá la metodología de su aplicación al modelo matemático de la cinemática y dinámica del Picosatélite Universitario para llevar al satélite a una orientación deseada. No se considerará la demostración de estabilidad debido a que está fuera del alcance de este proyecto de tesis, además que ha sido demostrada ya en trabajos que se mencionan en la bibliografía.

5.2 Control mediante linearización

Considerando la cinemática y dinámica del Picosatélite Universitario mencionada en el capítulo 4:

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega_{ob} \quad (5.1)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega_{ob}$$

$$J\dot{\Omega}_{ib} - S(J\Omega_{ib})\Omega_{ib} = \tau \quad (5.2)$$

$$\Omega_{ob} = R_{ob}\Omega_{io} + \Omega_{ib} \quad (5.3)$$

definiendo los siguientes estados:

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\epsilon} \\ \Omega_{ob} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde $\tilde{q} = [\tilde{\eta} \ \tilde{\epsilon}]^\top$, considerando que $\eta = [x_1]$, $\epsilon = [x_2 \ x_3 \ x_4]^\top$, que $\Omega_{ob} = [x_5 \ x_6 \ x_7]^\top$ y además:

$$\tilde{q} = q_d \times q = \begin{bmatrix} \eta_d \eta + \epsilon_d^\top \epsilon \\ \eta_d \epsilon - \eta \epsilon_d - S(\epsilon_d) \epsilon \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

siendo $q_d = [\eta_d \ \epsilon_d]$ que es la orientación deseada del satélite. Puede demostrarse fácilmente que la cinemática puede escribirse en términos de \tilde{q} :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top \Omega_{ob} \\ \dot{\tilde{\epsilon}} &= \frac{1}{2} [\tilde{\eta} I + S(\tilde{\epsilon})] \Omega_{ob} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Se puede observar que el modelo contiene términos no lineales, y que la dinámica del satélite se necesita expresar en términos de los estados que se definieron, por lo que el modelo no lineal de orientación del satélite es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}} \\ \dot{\tilde{\epsilon}} \\ \dot{\Omega}_{ob} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top \Omega_{ob} \\ \frac{1}{2} [\tilde{\eta} I + S(\tilde{\epsilon})] \Omega_{ob} \\ J^{-1} [S(J(R_o^b \Omega_{io} + \Omega_{ob})) (R_o^b \Omega_{io} + \Omega_{ob}) + S(\Omega_{ob}) R_o^b \Omega_{io} + \tau] \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega_{ib} &= (R_o^b \Omega_{io} + \Omega_{ob}) \\ \dot{\Omega}_{ib} &= (\dot{R}_o^b \Omega_{io} + \dot{\Omega}_{ob}) \\ \dot{R}_o^b &= -S(\Omega_{ob}) R_o^b \end{aligned} \quad (5.8)$$

Se observa que el sistema tiene un punto de equilibrio en $\tilde{q}_{eq} = [\tilde{\eta}_{eq} \ \tilde{\epsilon}_{eq}] = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ ya que el producto entre dos cuaterniones $\tilde{q} = q_d \times q$ donde $q = q_d$ da como resultado el vector $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$. Y en el caso de la dinámica del satélite se puede ver que el punto de equilibrio es $\Omega_{ob_{eq}} = [0 \ 0 \ 0]$.

Aplicando el Jacobiano al sistema anterior en el punto de equilibrio $\tilde{\eta}_{eq} = 1$, $\tilde{\epsilon}_{eq} = [0 \ 0 \ 0]^\top$ y $\Omega_{ob} = [0, 0, 0]^\top$ y considerando que $\dot{\tilde{\eta}} = [f_1(x)]$, $\dot{\tilde{\epsilon}} = [f_2(x) \ f_3(x) \ f_4(x)]^\top$, $\dot{\Omega}_{ob} = [f_5(x) \ f_6(x) \ f_7(x)]^\top$ y $\tau = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_6} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial x_7} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_5(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_5(x)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_6(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_6(x)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_7(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial u_2} & \frac{\partial f_7(x)}{\partial u_3} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Así el sistema linealizado queda de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$.

5.2.1 *Análisis de estabilidad*

Puede demostrarse que algunos de los eigenvalores de la matriz A tienen raíces positivas, por lo que algunos de los estados del sistema son inestables.

5.2.2 *Análisis de controlabilidad*

Se obtiene la matriz de controlabilidad mediante:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B \quad A^6B] \quad (5.11)$$

Se puede demostrar que el rango de la matriz de controlabilidad es menor que el rango de la matriz A , por lo que el sistema no es controlable en todos sus estados.

5.2.3 Algoritmo de diseño del controlador proporcional

Separando la parte controlable del sistema mediante una transformación de similaridad:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= TAT^\top \\ \bar{B} &= TB \\ \bar{C} &= CT^\top\end{aligned}\quad (5.12)$$

tal que:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{nc} & 0 \\ A_{21} & A_c \end{bmatrix} \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} \bar{C} = [C_{nc} \quad C_c] \quad (5.13)$$

donde T es una matriz unitaria de 7×7 . Teniendo las matrices A_c y B_c se puede diseñar un control para esa parte controlable asignando polos, con el criterio de que la señal de control tenga una amplitud máxima definida por la capacidad de los actuadores, que en este caso pueden ser bobinas de torque magnético o ruedas inerciales.

Para aplicar la metodología de asignación de polos a plantas representadas en forma de variables de fase (o en su forma canónica) se realizan los siguientes pasos:

1. Representar la planta por medio de las variables de fase para cada una de las entradas del sistema.

$$\tilde{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\tilde{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

2. Realimentar cada variable de fase a la entrada de la planta por medio de una ganancia, k_i .

$$\tilde{A}_c - \tilde{B}_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \dots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

3. Hallar la ecuación característica para el sistema en lazo cerrado representado en el paso 2.

$$\Delta(\lambda_c) = \det(\lambda I - (\tilde{A}_c - \tilde{B}_c K_c)) = \lambda^n + (a_{n-1} + K_{c_n})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 + K_{c_2})\lambda + (a_0 + K_{c_1}) \quad (5.17)$$

4. Determinar todas las ubicaciones de polo en lazo cerrado y establecer una ecuación característica equivalente. Se proponen los polos P_d de tal forma que, para el subsistema formado por las nuevas matrices A_c y B_c , su polinomio característico sea:

$$\begin{aligned} \Delta_d(\lambda_c) &= (\lambda_c + P_{d_1})(\lambda_c + P_{d_2})\dots(\lambda_c + P_{d_n}) = \\ &= \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_2s^2 + d_1s + d_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

5. Igualar los coeficientes semejantes de las ecuaciones características de los pasos 3 y 4, y despejar k_i para formar K_{c_1} , y repetir el mismo procedimiento para las entradas faltantes y obtener K_{c_2} y K_{c_3}

Una vez obtenidos los valores de la matriz K_c se obtiene \bar{K} para el sistema formado por las matrices \bar{A} y \bar{B} teniendo una realimentación $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$ de tal manera que:

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} A_{nc} & 0 \\ A_{21} & A_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & K_c \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Finalmente se necesita la matriz K para el sistema original, obteniéndose de esta manera:

$$K = -\bar{K}(T^\top)^{-1} \quad (5.20)$$

de esta manera el sistema realimentado $\dot{x} = (A - BK)x$ tendrá los polos que se seleccionaron con anterioridad, haciendo al sistema estable y los estados tenderán al punto de equilibrio.

5.3 Control adaptable del tipo PD mediante BTM's

5.3.1 Modelo matemático del campo magnético terrestre

El modelo matemático del campo magnético terrestre que está aceptado mundialmente es el IGRF (*International Geomagnetic Reference Field*), que es esencialmente una serie de coeficientes Gaussianos, g_n^m y h_n^m , que se actualizan cada 5 años y se usan en un modelo esférico armónico.

Este es el modelo que mejor describe al campo magnético terrestre, pero se debe de considerar que existen variaciones de tipo aleatorio que son impredecibles y no pueden ser modelados con precisión, las cuales tienen que ser considerados en el diseño de vehículos espaciales, tales como tormentas magnéticas debidas a la actividad del Sol y a variaciones temporales que ocurren cada 27 días cuando el área activa del Sol incide sobre la superficie de la Tierra, por mencionar algunas.

De acuerdo a la física, el campo magnético B se define como el gradiente negativo de la función de potencial escalar V tal que:

$$B = -\nabla V \quad (5.21)$$

Aunque un modelo simple de dipolo magnético da una buena aproximación del campo magnético terrestre, este puede mejorarse por medio de una función esférica armónica de potencial escalar del tipo:

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \quad (5.22)$$

donde a es el radio de referencia de la Tierra ($a=6371.7\text{km}$), r , θ y ϕ son las coordenadas geocéntricas (r es el radio en kilómetros, θ es la latitud donde $\theta = 90^\circ - \text{latitud}$, y ϕ es la longitud. Los coeficientes g_n^m y h_n^m son coeficientes Gaussianos, y $P_n^m(\theta)$ representa las funciones Schmidt-cuasi-normalizadas de Legendre de orden n y m .

Como la fuerza del campo magnético es calculado tomando las derivadas parciales de V , se tiene:

$$B_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \quad (5.23)$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \frac{\partial P_n^m(\theta)}{\partial \theta} \quad (5.24)$$

$$B_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n m (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \quad (5.25)$$

donde B_r , B_θ y B_ϕ representan la fuerza del campo magnético en coordenadas locales tangenciales.

Convirtiendo de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas XYZ (X - dirección norte, Y - dirección este, Z - completando la regla de la mano derecha) con un valor de corrección de la irregularidad de la Tierra e , tenemos:

$$\begin{aligned} B_x &= -B_\theta \cos e - B_r \sin e \\ B_y &= B_\phi \\ B_z &= B_\theta \sin e - B_r \cos e \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3.2 Metodología de la implementación del control

Si se considera la dinámica y cinemática del satélite mencionadas anteriormente:

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^\top \Omega_{ob} \quad (5.27)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2}[\tilde{\eta}I + S(\tilde{\epsilon})]\Omega_{ob}$$

$$J\dot{\Omega}_{ib} - S(J\Omega_{ib})\Omega_{ib} = \tau \quad (5.28)$$

donde:

$$\Omega_{ob} = R_{ob}\Omega_{io} + \Omega_{ib} \quad (5.29)$$

$$\Omega_{io} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Además, señalando que el torque de control generado por las BTM's es:

$$\tau_b = m_b \times \tilde{b}(t) = S(\tilde{b}(t))m_b \quad (5.31)$$

donde $\tilde{b}(t)$ es el campo magnético terrestre relativo al sistema coordinado fijo al satélite \mathcal{S}^B .

En vista de que $S(\tilde{b}(t))$ es estructuralmente singular, los actuadores magnéticos no proveen controlabilidad completa al sistema cada instante de tiempo, en particular es fácil de observar que $rank(S(\tilde{b}(t)))=2$. Por lo tanto, en cada instante de tiempo no es posible aplicar un torque de control en la dirección de $\tilde{b}(t)$.

Considerando una retroalimentación preliminar de la forma:

$$m_b = \frac{1}{\|\tilde{b}(t)\|^2} S^\top(\tilde{b}(t))u \quad (5.32)$$

la cual es aplicada al sistema, donde $u \in \mathbb{R}^3$ es el nuevo vector de control, el sistema puede reescribirse como:

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega_{ob} \quad (5.33)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega_{ob}$$

$$J\dot{\Omega}_{ib} - S(J\Omega_{ib})\Omega_{ib} = \Gamma(t)u \quad (5.34)$$

donde:

$$\Gamma(t) = S(b(t))S^\top(b(t)) \geq 0 \quad (5.35)$$

y:

$$b(t) = \left(\frac{1}{\|\tilde{b}(t)\|} \right) \tilde{b}(t) \quad (5.36)$$

Considerando el sistema anterior se observa la siguiente ley de control:

$$u = \begin{cases} -\varepsilon k_v \Omega_{ob} & t \leq \bar{t} \\ -\hat{\Gamma}_{av}^{-1} (\varepsilon^2 k_p q + \varepsilon k_v \Omega_{ob}) & t > \bar{t} \end{cases} \quad (5.37)$$

donde:

$$\dot{\hat{\Gamma}}_{av} = \frac{1}{t}\Gamma - \frac{1}{t}\hat{\Gamma}_{av} \quad t > 0 \quad (5.38)$$

y:

$$\hat{\Gamma}_{av}(0) = \Gamma(0) \quad (5.39)$$

se puede seleccionar una $\varepsilon > 0$, $k_p > 0$ y una $K_v > 0$ tal que el sistema tienda a un punto de equilibrio $[q_{eq} \ \Omega_{ob_{eq}}] = [\tilde{q} \ 0]$ donde $\tilde{q} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$.

Cabe mencionar que la primera etapa de control que se realiza cuando $t \leq \bar{t}$ busca reducir el valor de Ω_{ob} ya que el nuevo sistema tiene propiedades de controlabilidad *promedio* debido al rango completo de la función $\Gamma(t)$ cuando se tienen valores suficientemente pequeños de Ω_{ob} .

5.4 Control basado en Pasividad

Antes de describir la metodología de implementación de esta técnica de control se debe subrayar que se considera que el modelo general de un sistema físico se puede escribir como:

$$\mathcal{A}(x)\dot{x} = \mathcal{J}(x, u)x - \mathcal{R}(x, u)x + \mathcal{B}(x)u + \mathcal{E}(t) \quad (5.40)$$

donde x es un vector n -dimensional, \mathcal{A} es una matriz simétrica positiva definida y constante, $\mathcal{J}(x, u)$ es una matriz antisimétrica, $\mathcal{R}(x, u)$ es una matriz simétrica positiva definida y \mathcal{E} es un vector suave n -dimensional que es función de t o a veces, un vector constante. La matriz de entradas $\mathcal{B}(x)$ es una matriz $n \times m$, donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, u) &= \mathcal{J}_0 + \sum_{j=1}^m \mathcal{J}_j^u u_j + \sum_{k=1}^n \mathcal{J}_k^x x_k \\ \mathcal{R}(x, u) &= \mathcal{R}_0 + \sum_{j=1}^m \mathcal{R}_j^u u_j + \sum_{k=1}^n \mathcal{R}_k^x x_k \\ \mathcal{B}(x) &= \mathcal{B}_0 + \sum_{j=1}^n \mathcal{B}_j x_j \end{aligned} \quad (5.41)$$

entonces se puede demostrar que bajo la acción del siguiente controlador:

$$u = u^*(t) - K\mathcal{B}^*(x, t)y \quad (5.42)$$

donde $y(t) = x(t) - x^*(t)$ es el error, el cual es global y asintóticamente estable, con la siguiente dinámica del error:

$$\mathcal{A}(x)\dot{y} = [\mathcal{J}^*(x, u, t) - \mathcal{R}^*(x, u, t)]y + \mathcal{B}^*(x, t)e_u \quad (5.43)$$

donde:

$$e_u = u - u^*(t) \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^*(x, u, t) &= \mathcal{J}(x, u) + \frac{1}{2}[\mathcal{P}^*(t) - \mathcal{P}^*(t)^\top] \\ \mathcal{R}^*(x, u, t) &= \mathcal{R}(x, u) - \frac{1}{2}[\mathcal{P}^*(t) + \mathcal{P}^*(t)^\top] \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\mathcal{B}^*(x, t) = \mathcal{B}(x) + \mathcal{Q}^*(t)$$

con:

$$\mathcal{P}^*(t) = \mathcal{M}^*(t) + \mathcal{L}^*(t) \quad (5.46)$$

y:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^*(t) &= [(\mathcal{J}_1^x - \mathcal{R}_1^x)x^*(t) \quad \dots \quad (\mathcal{J}_n^x - \mathcal{R}_n^x)x^*(t)] \\
\mathcal{L}^*(t) &= [\mathcal{B}_1x^*(t) \quad \dots \quad \mathcal{B}_nx^*(t)] \\
\mathcal{Q}^*(t) &= [(\mathcal{J}_1^u - \mathcal{R}_1^u)x^*(t) \quad \dots \quad (\mathcal{J}_m^u - \mathcal{R}_m^u)x^*(t)]
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de la cinemática y dinámica del satélite mencionadas con anterioridad se puede expresar el sistema tal como se indica en las ecuaciones anteriores, además de describir la dinámica del error de dicho sistema. Entonces teniendo las ecuaciones de la cinemática y dinámica del satélite definidas en el capítulo 4:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega_{ob} \\
\dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega_{ob}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
q &= [\eta \quad \epsilon]^\top \\
J\dot{\Omega}_{ib} &= S(J\Omega_{ib})(\Omega_{ib}) + \tau
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\Omega_{ob} = R_{ob}\Omega_{io} + \Omega_{ib} \tag{5.50}$$

$$\Omega_{io} = [0 \quad \omega_o \quad 0]^\top \tag{5.51}$$

Fácilmente se puede expresar la dinámica del satélite como:

$$\mathcal{A}\dot{\Omega}_{ib} = \mathcal{J}(\Omega_{ib})\Omega_{ib} + \tau \tag{5.52}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= J \\
\mathcal{J}(\Omega_{ib}) &= S(J\Omega_{ib}) \\
\mathcal{R}(\Omega_{ib}) &= 0 \\
\mathcal{B}(x) &= I_{3 \times 3} \\
\mathcal{E}(t) &= 0
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Para obtener la dinámica del error del satélite se considera que:

$$y = \Omega_{ob} - \Omega_{ob_d} \quad (5.54)$$

El término Ω_{ob_d} está expresado en términos del error de orientación del satélite y será considerado como un control virtual que se definirá más adelante. Si se define una orientación deseada:

$$q_d = [\tilde{\eta} \quad \tilde{\epsilon}^\top]^\top \quad (5.55)$$

la expresión que describe el error de orientación del satélite es:

$$\tilde{q} = q_d \times q = \begin{bmatrix} \eta_d \eta + \epsilon_d^\top \epsilon \\ \eta_d \epsilon - \eta \epsilon_d - S(\epsilon_d) \epsilon \end{bmatrix} = [\tilde{\eta} \quad \tilde{\epsilon}]^\top \quad (5.56)$$

Si se propone el siguiente cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta} \\ \tilde{\epsilon} \\ y \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

donde $\bar{\eta} = \tilde{\eta} \mp 1$, $\tilde{q} = [\tilde{\eta} \quad \tilde{\epsilon}]^\top = q_d \times q$ y $y = \Omega_{ob} - \Omega_{ob_d}$ se pueden reescribir las ecuaciones de la cinemática del satélite:

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top \Omega_{ob} \quad (5.58)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2} [(\bar{\eta} \pm 1)I + S(\tilde{\epsilon})] \Omega_{ob}$$

y si se sustituye Ω_{ob} se tiene:

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top \Omega_{ob_d} - \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top y \quad (5.59)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2} [(\bar{\eta} \pm 1)I + S(\tilde{\epsilon})] \Omega_{ob_d} + \frac{1}{2} [\bar{\eta}I + S(\tilde{\epsilon})] y$$

Finalmente, la expresión del siguiente control virtual se propone de la siguiente manera:

$$\Omega_{ob_d} = -K \frac{\tilde{\epsilon}}{1 + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon}} \quad (5.60)$$

donde K es una constante positiva. Cabe mencionar que el error y también se puede expresar como:

$$y = (R_o^b \Omega_{io} + \Omega_{ib}) - \Omega_{ob_d} \quad (5.61)$$

y se sabe que:

$$\Omega_{ib_d} = \Omega_{ob_d} - R_o^b \Omega_{io} \quad (5.62)$$

por lo tanto:

$$y = \Omega_{ib} - \Omega_{ib_d} \quad (5.63)$$

y finalmente, teniendo el error y en términos de Ω_{ib} y Ω_{ib_d} , se puede obtener la dinámica del error del satélite:

$$J\dot{y} = [\mathcal{J}^*(\Omega_{ib}, \Omega_{ib_d}) - \mathcal{R}^*(\Omega_{ib}, \Omega_{ib_d})]y + \tilde{\tau} \quad (5.64)$$

donde:

$$\mathcal{J}^*(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_j & -\frac{1}{2}B_j \\ -\frac{1}{2}A_j & 0 & \frac{1}{2}C_j \\ \frac{1}{2}B_j & -\frac{1}{2}C_j & 0 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$\mathcal{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_r\Omega_{ib_{d3}} & -\frac{1}{2}B_r\Omega_{ib_{d2}} \\ \frac{1}{2}A_r\Omega_{ib_{d3}} & 0 & \frac{1}{2}C_r\Omega_{ib_{d1}} \\ -\frac{1}{2}B_r\Omega_{ib_{d2}} & \frac{1}{2}C_r\Omega_{ib_{d1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

donde $A_j = (J_{xx} + J_{yy})\Omega_{ib_{d3}} - 2J_{zz}\Omega_{ib_3}$, $B_j = (J_{xx} + J_{zz})\Omega_{ib_{d2}} - 2J_{yy}\Omega_{ib_2}$ y $C_j = (J_{yy} + J_{zz})\Omega_{ib_{d1}} - 2J_{xx}\Omega_{ib_1}$. Además, $A_r = J_{xx} - J_{yy}$, $B_r = J_{xx} - J_{zz}$, y $C_r = J_{yy} - J_{zz}$.

Entonces se puede definir el torque que estabilizará al satélite como:

$$\tilde{\tau} = -ky \quad (5.67)$$

siendo k una constante positiva, lo que implica que:

$$\tau = \tilde{\tau} \quad (5.68)$$

el cual llevará al sistema al punto de equilibrio $[q_{eq} \ \Omega_{ob_{eq}}] = [\tilde{q} \ 0]$ donde $\tilde{q} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$.

CAPÍTULO 6

SIMULACIÓN Y RESULTADOS OBTENIDOS

6.1 Introducción

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos mediante cálculos y simulaciones que se hicieron en *Simulink* de *Matlab*. Para visualizar estos resultados se elaboró un modelo de realidad virtual que ilustra tanto las ecuaciones que describen a la dinámica del satélite como la acción de los algoritmos de control, además, se puede ver al satélite en una órbita definida moviéndose alrededor de la Tierra.

6.2 Parámetros del Picosatélite Universitario

Para el Picosatélite universitario se empleó la siguiente matriz de inercia:

$$J = \begin{bmatrix} 0.001905 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002905 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00248 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Esta matriz se obtuvo de las ecuaciones de dinámica de cuerpo rígido del satélite, donde se calculó la masa y la posición de cada elemento que compone al satélite, como la estructura, paneles solares, actuadores, sensores, electrónica y carga útil (experimento) sin exceder de una masa total de 1 kg. Esta matriz de inercia también puede ser obtenida mediante un software CAD, como *SolidEdge* dibujando cada componente que conforma al Picosatélite Universitario, a pesar de ello, esta matriz de inercia es una buena aproximación de lo que será el Picosatélite Universitario.

Los parámetros de órbita del satélite son:

$$\text{Radio de la Tierra} + \text{Altura del satélite} = 6378 + 1000 = 7378 \text{ km.}$$

Ascensión derecha del nodo ascendente = 30° .

Inclinación = 89° .

Argumento del perigeo = 0° .

Una órbita es aproximadamente igual a 5000 segundos.

Estos parámetros son de utilidad en la simulación en realidad virtual para mostrar el movimiento de translación del Picosatélite alrededor de la Tierra, además de que se usan para construir las matrices de rotación necesarias en los cálculos que ya se han definido en capítulos anteriores.

6.3 Descripción del diagrama de bloques de *Simulink*

En el software de *Simulink* de Matlab se implementaron los modelos matemáticos que describen tanto la dinámica del Picosatélite Universitario como los algoritmos de control. En la figura 6.1 se muestra un diagrama de bloques donde se clasifican los modelos para una lectura sencilla, donde cada bloque representa un subsistema que contiene los modelos desarrollados en esta tesis. Al final se hará una descripción del bloque de control, ya que difiere según la técnica de control aplicada.

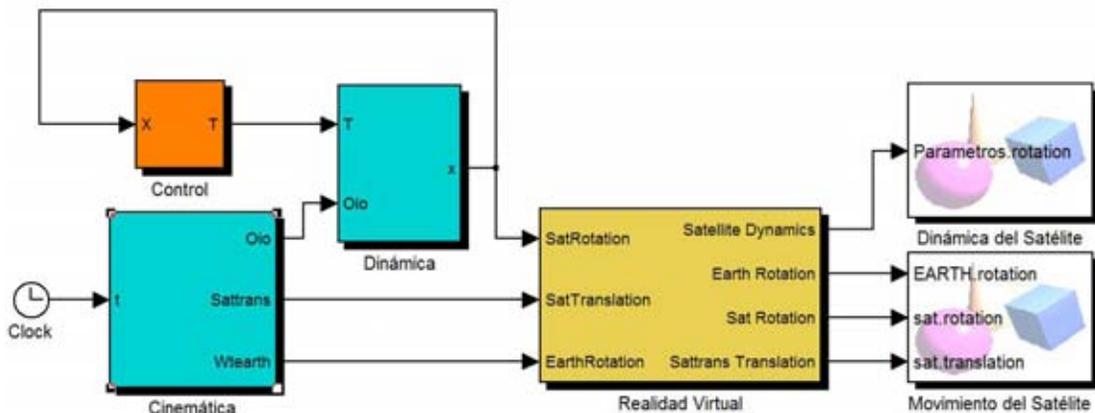


Figura 6.1: Diagrama de Bloques de Simulink, donde se simulan los modelos matemáticos de la dinámica del Picosatélite, cinemática y la ley de control, además se tiene un bloque donde se acondicionan las señales necesarias para modelos de realidad virtual.

A continuación se muestra el contenido de cada uno de los bloques que conforman el modelo de Simulink.

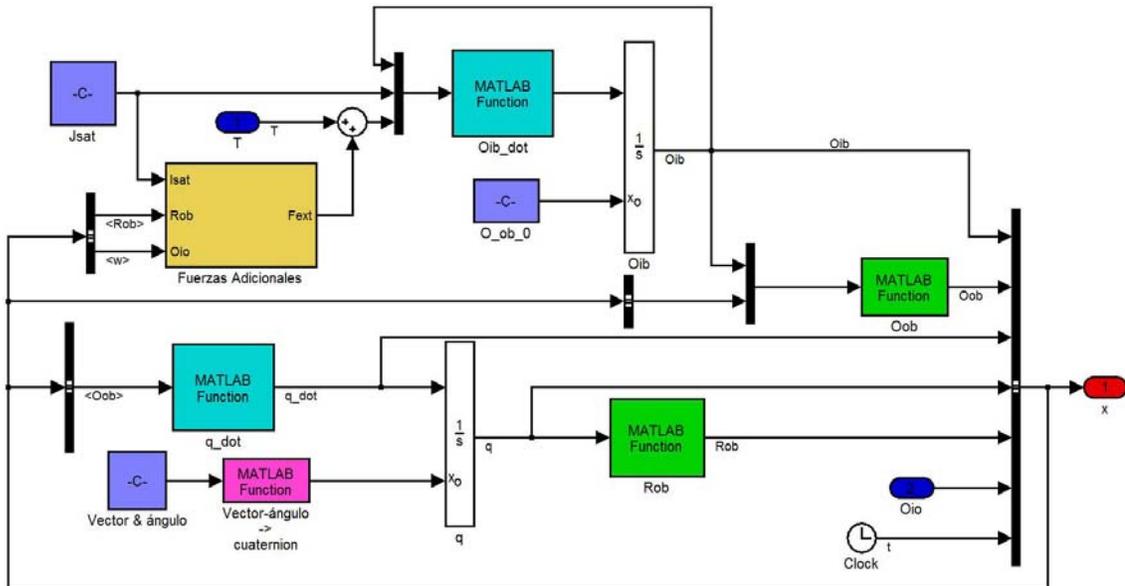


Figura 6.2: Dinámica del Picosatélite Universitario.

En la Figura 6.2 se muestran los bloques donde se resuelven las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica y cinemática del satélite, adicionalmente se tiene un sub-bloque de fuerzas adicionales donde se pueden definir las perturbaciones ambientales y el resultado se suma al torque de control, en las siguientes simulaciones solo se incluirá el torque gravitacional como perturbación ambiental.

En la Figura 6.3 se modela la órbita del Picosatélite Universitario y la rotación de la Tierra, de tal manera que se pueda observar el movimiento del satélite en realidad virtual. Además se incluyeron indicadores para conocer la posición del satélite mientras transcurre el tiempo.

Por último en la figura 6.4 se acondicionan las señales para su ingreso a los modelos de realidad virtual, debido a que esos modelos necesitan parámetros XYZ para la translación y vector-ángulo, para la rotación. Es por eso que se transforma un cuaternión en un vector y un ángulo, $\theta = 2\text{acos}(\eta)$ y ϵ es un vector.

Los dos modelos de realidad virtual se ven de acuerdo a las figuras 6.5 y 6.6.

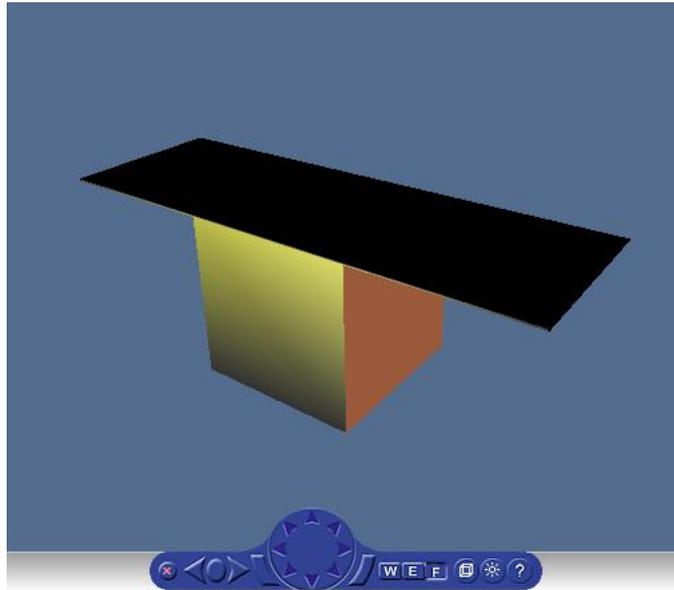


Figura 6.5: Modelo de realidad virtual de la dinámica del Picosatélite Universitario.

Cabe mencionar que en el bloque de la figura 6.4 también se define el sistema coordenado orbital, en el bloque amarillo, así el modelo en realidad virtual resultante respetará los sistemas coordenados de referencias mencionados en el capítulo 3.

Cuando el satélite se estabiliza hasta llegar al punto de equilibrio, significa que el satélite está apuntando al centro de la Tierra, y en el modelo de realidad virtual se puede visualizar en la figura 6.7.

6.4 Resultados de los algoritmos de control

Ahora se mencionarán los bloques que corresponden al control de estabilización satelital.



Figura 6.6: Modelo de realidad virtual del Picosatélite Universitario con los parámetros de órbita y el modelo de la Tierra.



Figura 6.7: Modelo de realidad virtual, se muestra al Picosatélite Universitario apuntando al centro de la Tierra.

6.4.1 Linearización

En el diagrama de bloques del control por linealización [Figura 6.8] se puede observar que el control es la ganancia K obtenida de la metodología que se menciona en el capítulo 5, considerando los polos $P = [-0.004 \ -0.0041 \ -0.0039 \ -0.003 \ -0.0031 \ -0.0029]$; obteniendo la ganancia K de:

$$K^T = \begin{bmatrix} -4.7561 \times 10^{-21} & 1.6827 \times 10^{-22} & -2.1725 \times 10^{-21} \\ -4.5634 \times 10^{-8} & 2.167 \times 10^{-10} & -8.9606 \times 10^{-9} \\ 1.3151 \times 10^{-9} & -6.85 \times 10^{-8} & 5.7286 \times 10^{-9} \\ -1.0245 \times 10^{-8} & 4.0434 \times 10^{-9} & -1.7048 \times 10^{-7} \\ -1.3295 \times 10^{-5} & 3.875 \times 10^{-7} & 6.1896 \times 10^{-7} \\ 3.6835 \times 10^{-7} & -2.0218 \times 10^{-5} & 1.2113 \times 10^{-6} \\ -6.4734 \times 10^{-6} & 7.716 \times 10^{-7} & -4.9255 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

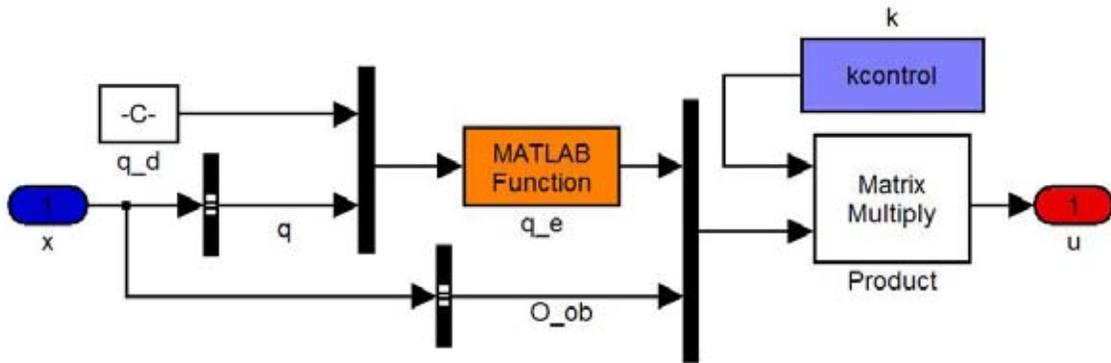


Figura 6.8: Control por linealización.

Los resultados se muestran en las figuras 6.9, 6.10 y 6.11.

Y se puede observar que el sistema tiende a su punto de equilibrio.

6.4.2 Control adaptable del tipo PD mediante BTM's

En la figura 6.12 se muestra el diagrama de bloques que compone a este algoritmo de control, donde $\varepsilon = 0.001$, $k_p = 0.06$, $k_v = 0.02$ y $\bar{t} = 10000$, que son los parámetros que arrojaron mejores resultados, tomando en cuenta la matriz de inercia del satélite y el torque suficiente para lograr estabilizar al satélite, además de que $k_p > k_v$.

También se obtuvieron datos del campo magnético terrestre [Figura 6.13], esto se logró utilizando las ecuaciones del campo magnético terrestre mencionado en el capítulo 5, estas ecuaciones necesitan la posición en coordenadas geográficas, por lo que solo se muestra el valor del campo magnético en la trayectoria del satélite.

Se puede ver en el diagrama de bloques del control [Figura 6.12], que una vez teniendo el campo magnético terrestre, que está en coordenadas cartesianas referidas a un sistema de referencia inercial, se hace una transformación lineal con la matriz de rotación R_o^b , por lo que el valor del campo magnético estará referido al sistema coordenado fijo al satélite \mathcal{S}^B . Los resultados de este algoritmo de control se muestran en las figuras 6.14, 6.15 y 6.16.

De los resultados se puede observar como actúan las dos etapas del controlador, además de que existen ciertos picos en el torque de control, que son debidos a la rapidez con la que cambia el campo magnético terrestre cuando pasa por los polos Norte y Sur; y el sistema converge a su punto de equilibrio.

6.4.3 *Control basado en pasividad*

El diagrama de bloques de este algoritmo de control se presenta en la figura 6.17.

Considerando las ganancias $K_1 = 0.000002$ y $K_2 = 0.2$ se obtienen estos resultados mostrados en las figuras 6.18, 6.19 y 6.20.

Cabe mencionar que la selección de las ganancias K_1 y K_2 se hizo con el criterio que $K_1 < K_2$ ya que así se le da más prioridad a alcanzar el punto de equilibrio que a reducir la velocidad angular. Si el valor de las ganancias se invierte, el sistema reduce la velocidad angular, y por lo tanto tomará mucho tiempo en que el sistema tienda a su punto de equilibrio ya que el control virtual depende del cuaternión unitario.

Finalmente se puede observar de las figuras que el sistema converge a su punto de equilibrio.

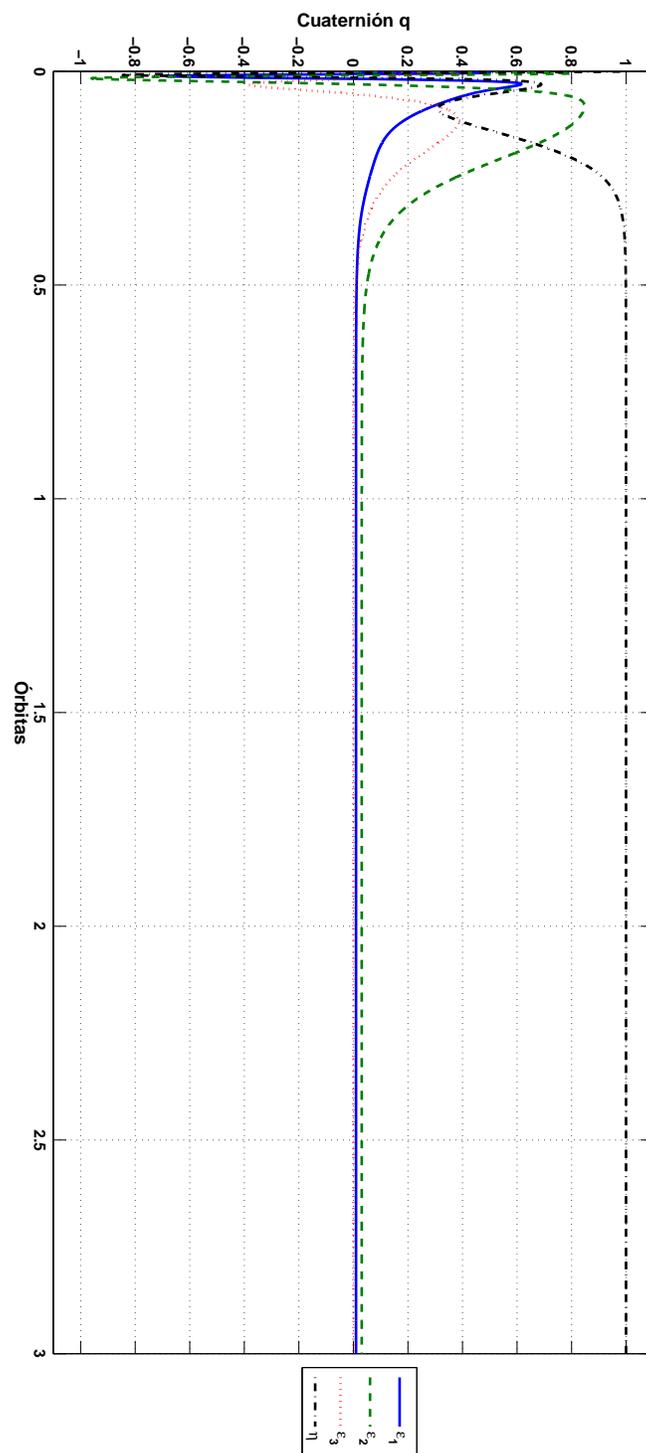


Figura 6.9: Comportamiento de Cuaternión Unitario bajo efecto del control.

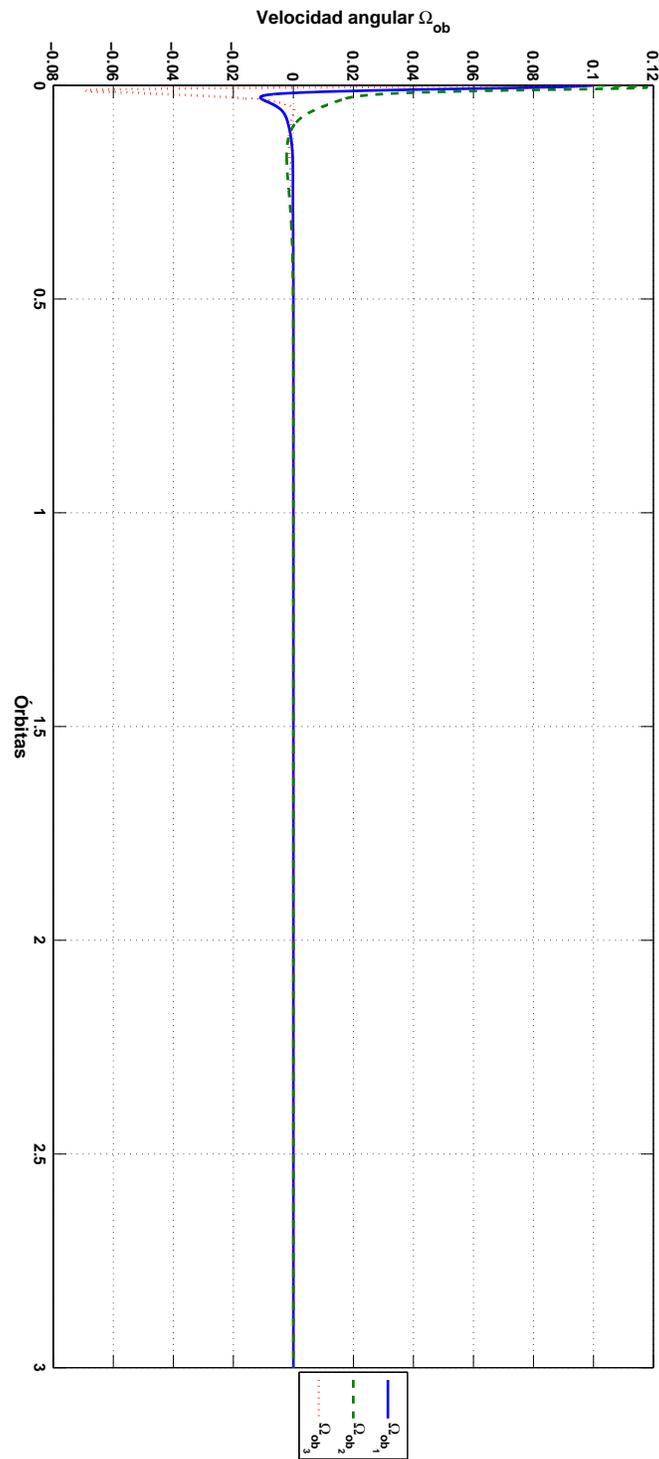


Figura 6.10: Comportamiento de la velocidad angular Ω_{ob} bajo efecto del control.

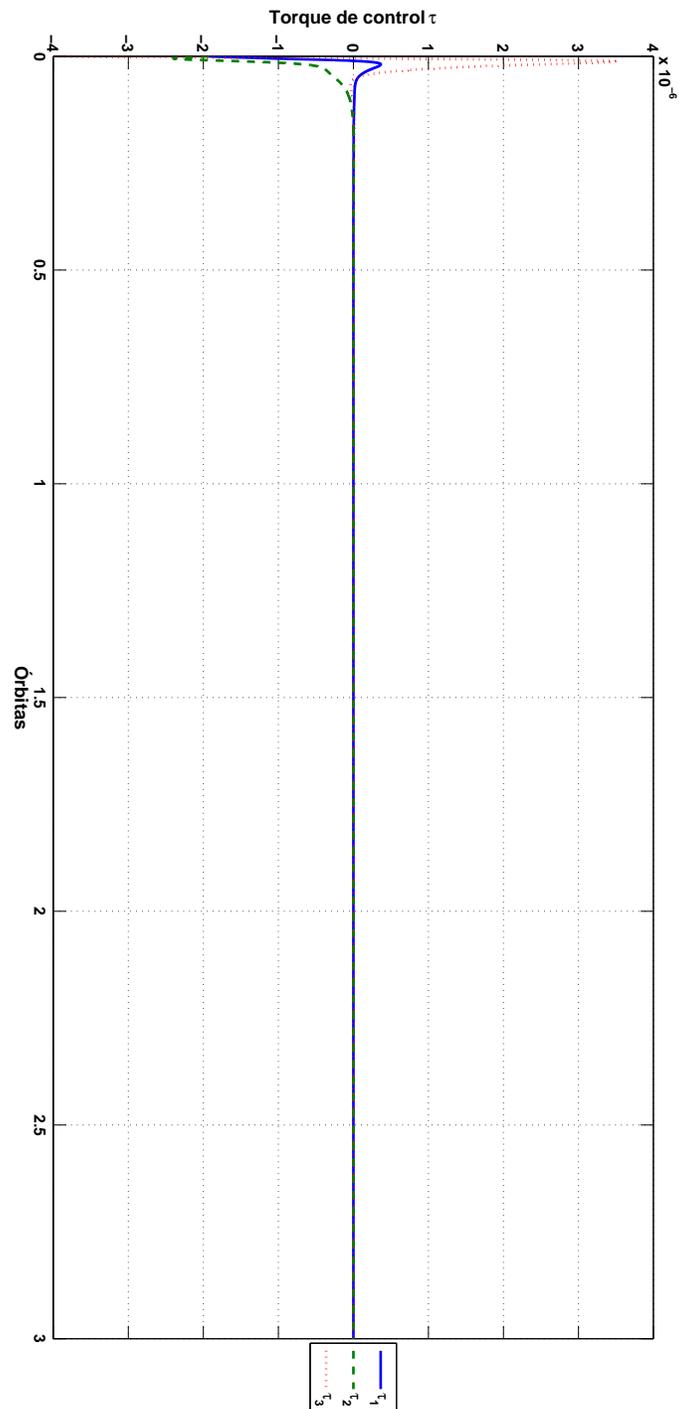


Figura 6.11: Torque de control aplicado al sistema.

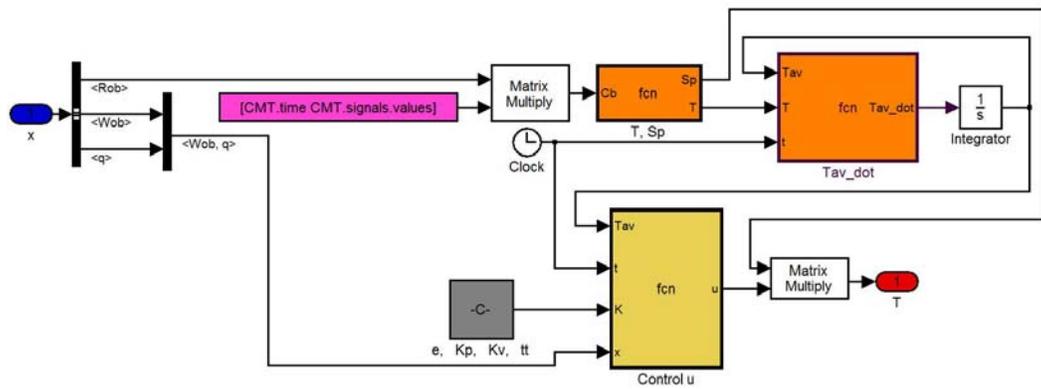


Figura 6.12: Diagrama de bloques del algoritmo de control adaptable.

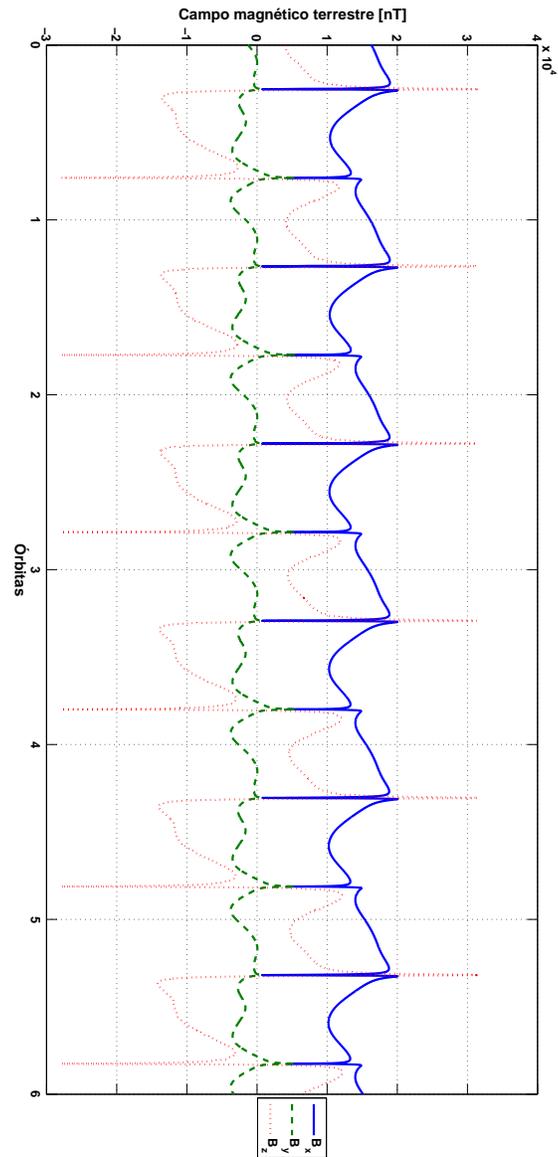


Figura 6.13: Campo magnético terrestre de acuerdo con la trayectoria del Picosatélite universitario.

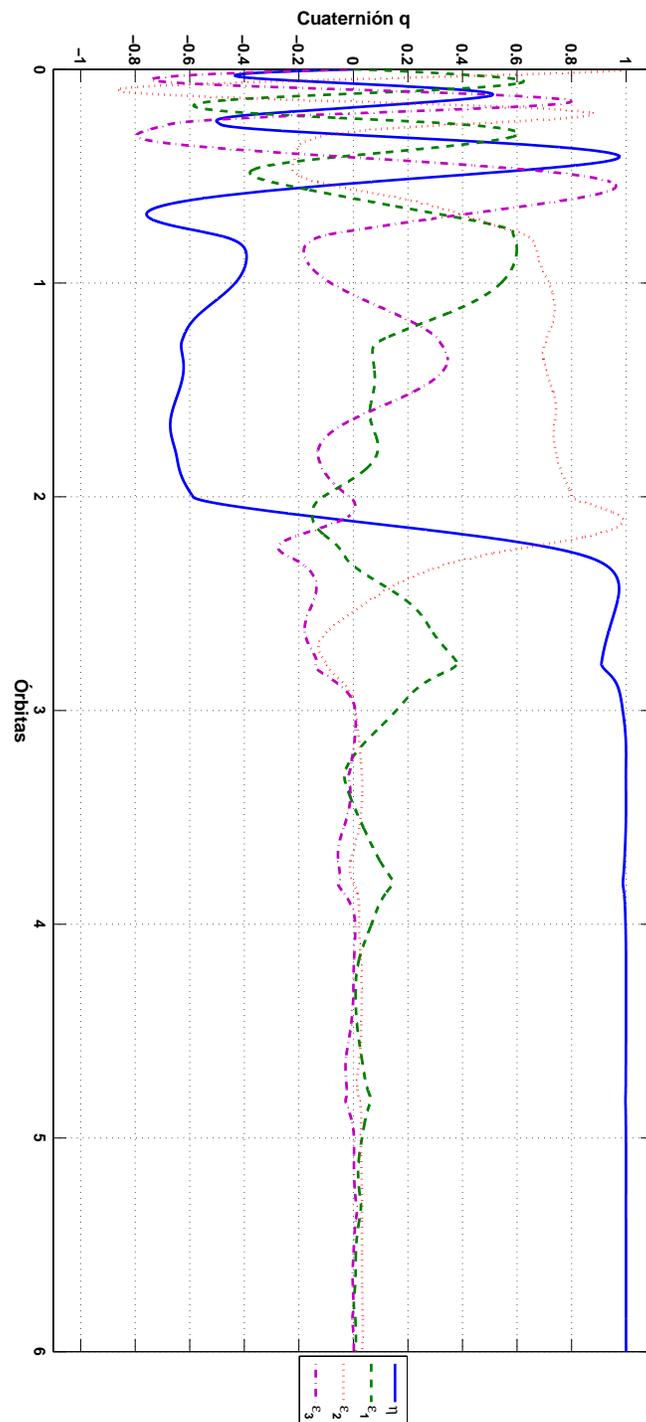


Figura 6.14: Comportamiento del Cuaternión unitario q del Picosatélite Universitario bajo efecto de las dos etapas de control.

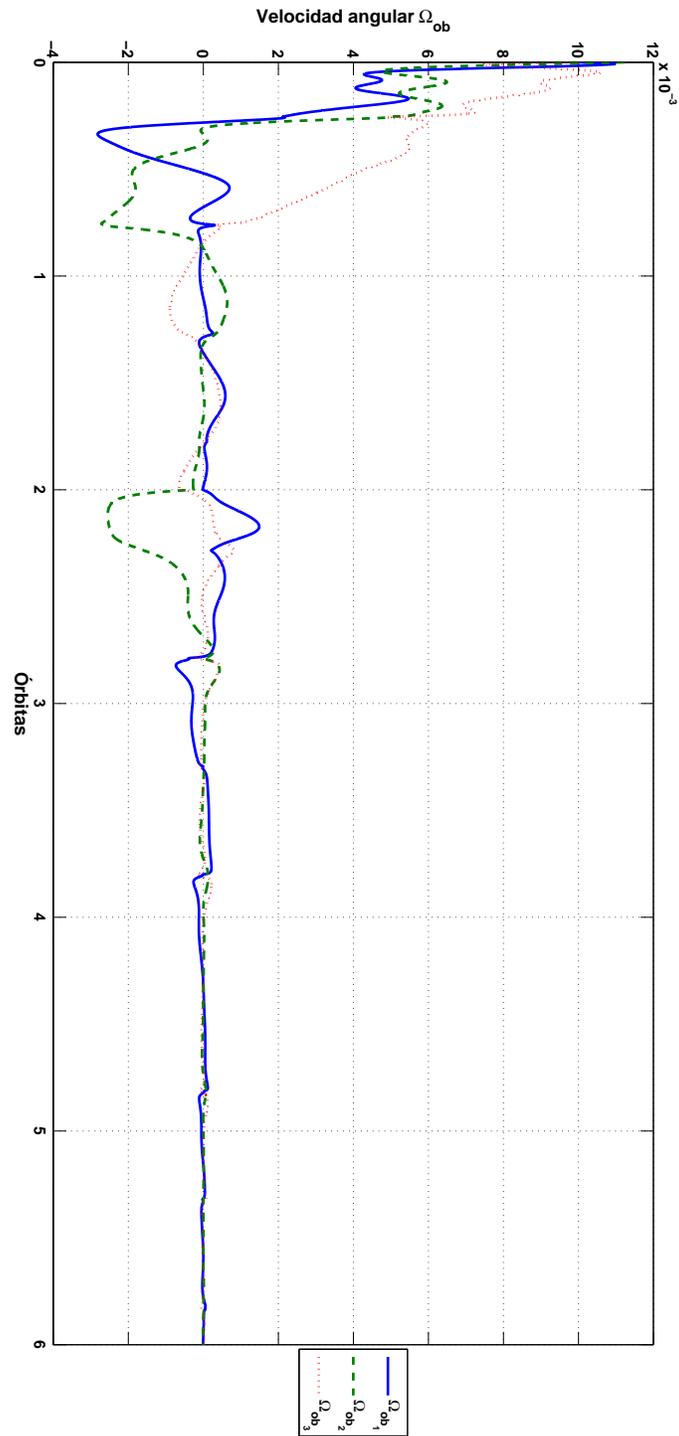


Figura 6.15: Comportamiento de la velocidad angular Ω_{ob} del Picosatélite Universitario bajo efecto de las dos etapas de control.

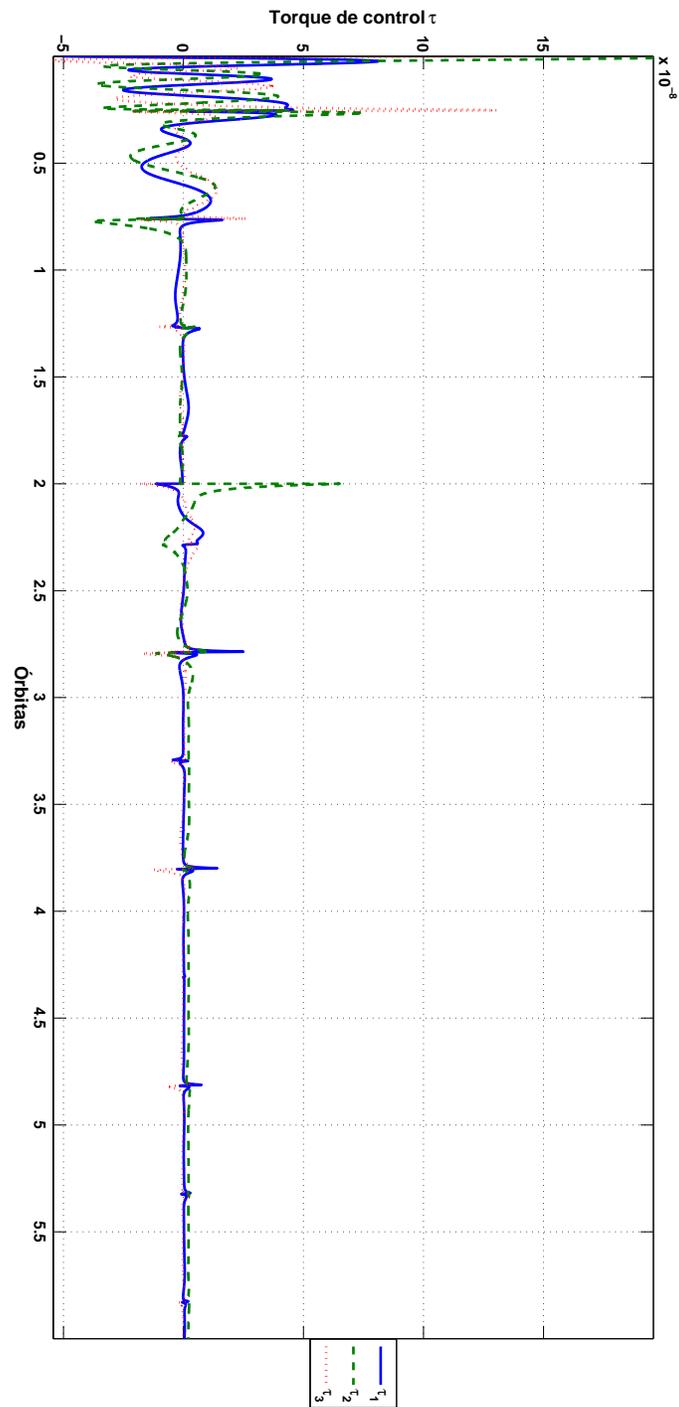


Figura 6.16: Torque de control aplicado al sistema.

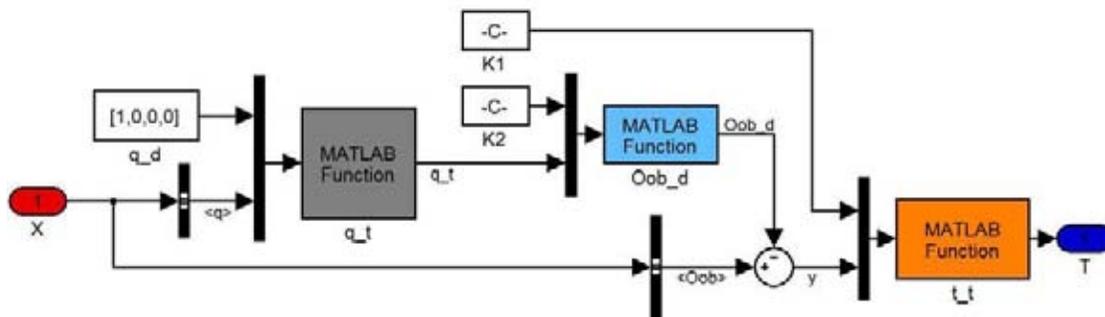


Figura 6.17: Diagrama de bloques del algoritmo de control basado en pasividad.

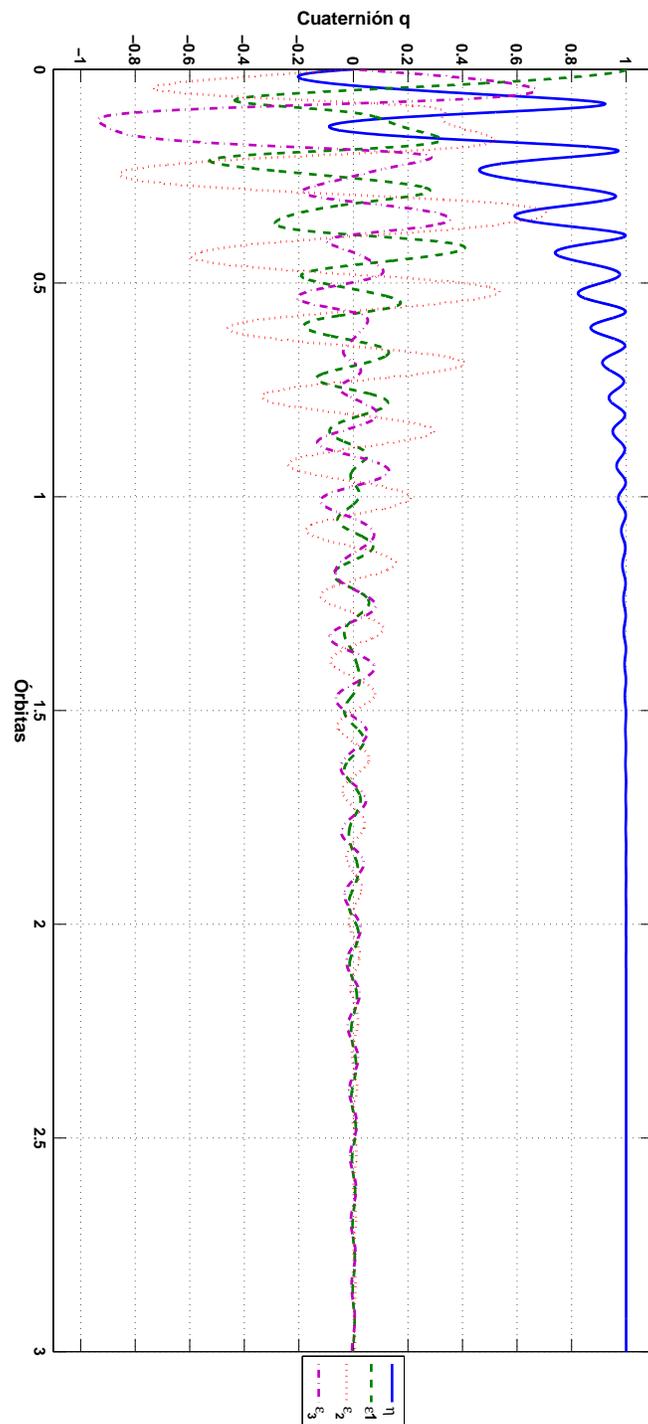


Figura 6.18: Comportamiento del Cuaternión unitario q del Picosatélite Universitario debido a la acción del controlador basado en pasividad.

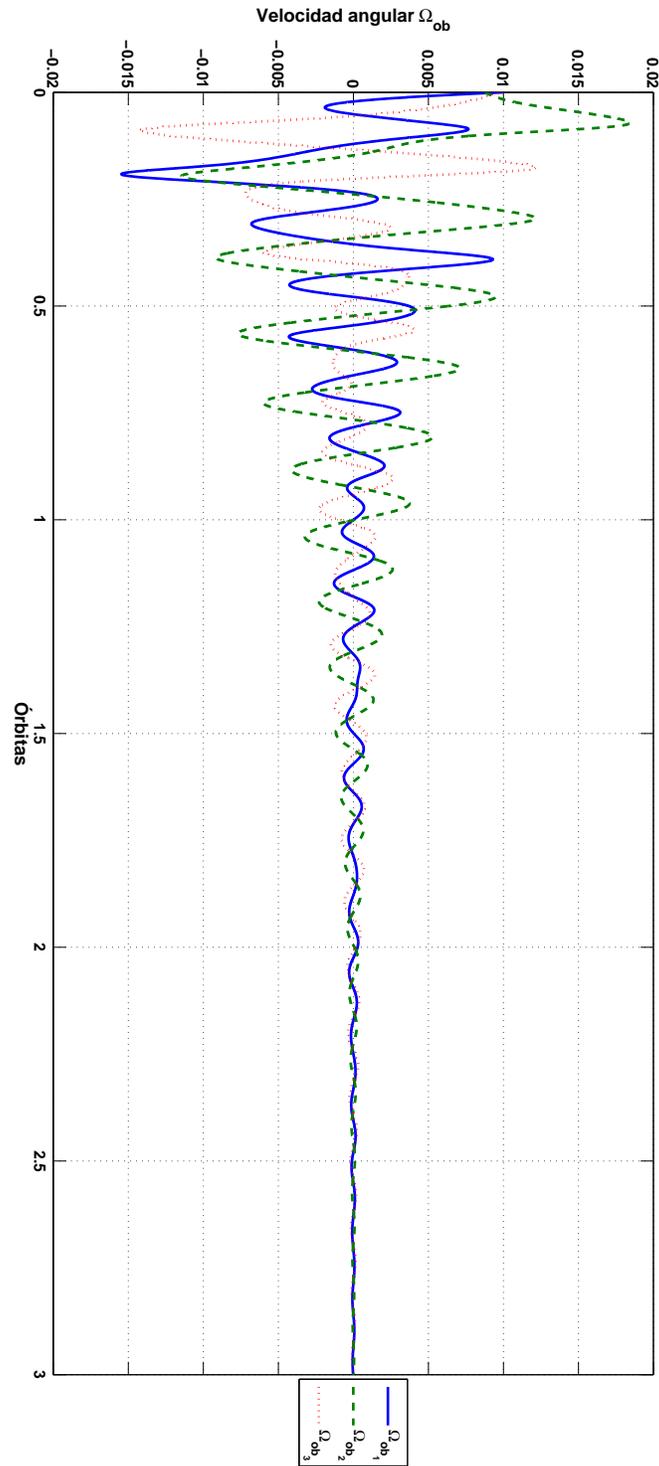


Figura 6.19: Comportamiento de la velocidad angular Ω_{ob} del Picosatélite Universitario debido a la acción del controlador basado en pasividad

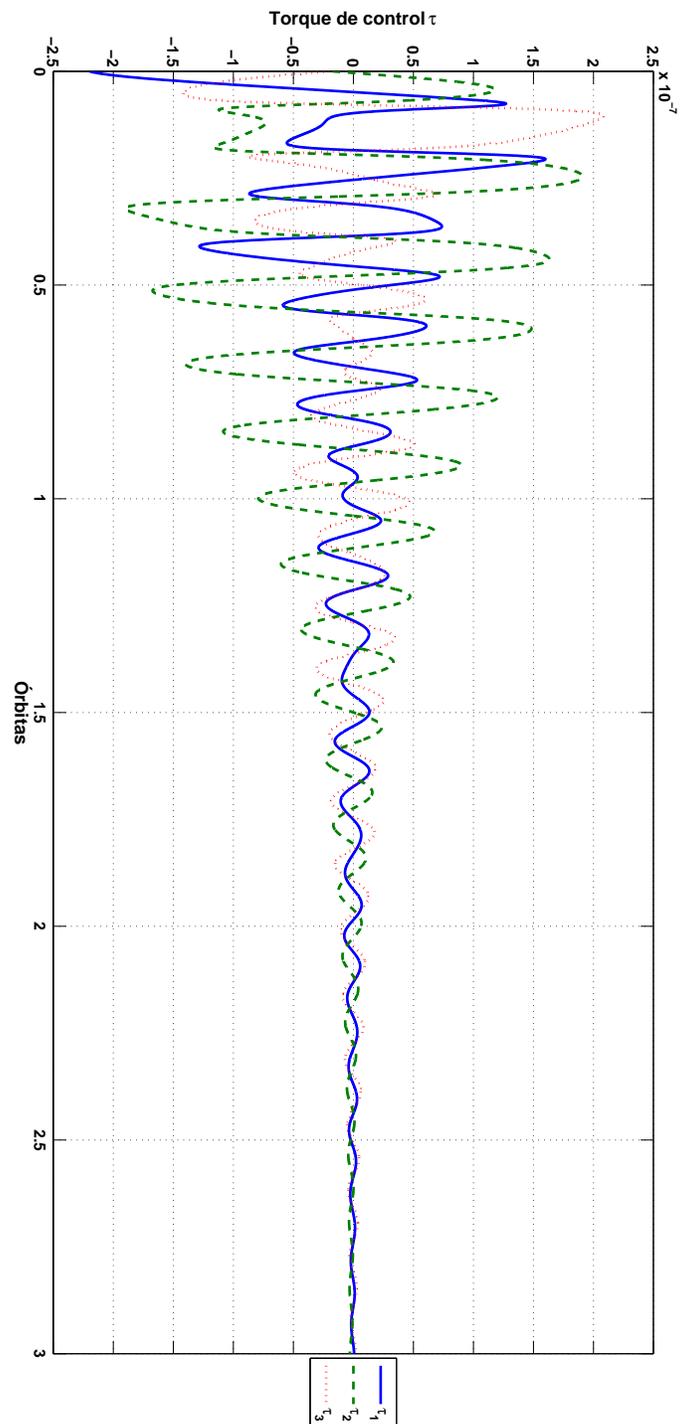


Figura 6.20: Torque de control aplicado al sistema.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

En este capítulo, se mencionarán las conclusiones de los resultados obtenidos en el desarrollo de esta tesis y algunas recomendaciones para trabajos futuros.

7.1 Conclusiones

Se desarrollaron exitosamente los modelos de cuerpo rígido, de orientación satelital basada en cuaterniones unitarios, de dinámica satelital, de cinemática orbital, de perturbación gravitacional y además se generaron los primeros algoritmos de estabilización en tres ejes para el Picosatélite Universitario.

Respecto al control de estabilización se implementaron diferentes técnicas de control para lograr estabilización satelital, logrando resultados satisfactorios y se comprobaron por medio de la visualización del comportamiento de un modelo de realidad virtual. El primer paso que se realizó fue el modelado de la dinámica del Picosatélite Universitario el cual fue cuidadosamente analizado e interpretado mediante gráficas y modelos de realidad virtual. El trabajo que se desarrolló para incluir en el modelo a cuaterniones unitarios fue complejo ya que su interpretación es abstracta y requirió de herramientas algebraicas para su correcto uso e implementación en el modelo, logrando un modelo confiable y listo para la aplicación de técnicas de control.

Un paso importante que se logró fue desarrollar un modelo de realidad virtual donde se visualiza el satélite trasladándose en su órbita alrededor de la Tierra. De nuevo, se requirió de mucho tiempo y dedicación para comprender las transformaciones lineales de un sistema coordenado a otro que se usaron para definir correctamente los diferentes sistemas coordenados y aplicar correctamente dichas transformaciones, sin caer en singularidades, es por ello que el uso de cuaterniones unitarios fue de gran utilidad. Por esta razón, mediante un modelo de realidad virtual se pueden ver resultados fáciles de visualizar e

interpretar, a pesar de la complejidad de los cálculos que hay detrás de ello.

La aplicación de las diferentes técnicas de control después del desarrollo del modelo matemático se llevó a cabo de manera exitosa, logrando resultados teóricos que son el principio de un nuevo periodo de desarrollo tecnológico en el campo satelital en México, ya que se demostró que es posible aplicar diferentes algoritmos de control para estabilización satelital aplicados desde proyectos universitarios tecnológicos y ajustar estos algoritmos según se requiera.

7.2 Recomendaciones

Para mejorar el modelo matemático que se desarrolló en este proyecto, se sugiere incluir perturbaciones adicionales de tipo ambiental que debido a su magnitud son importantes, ya que la única perturbación que se incluyó fue el torque gravitacional, pero perturbaciones como el arrastre aerodinámico y la radiación solar, por mencionar algunas, permitirían observar el desempeño de los algoritmos de control en presencia de perturbaciones con apego al ambiente espacial real.

Se recomienda que se analice la posibilidad de mejorar el modelo que describe la órbita satelital, ya que existen otros factores como la influencia de la gravedad de la Tierra, la Luna y el Sol, que modifican en cierto grado la órbita satelital.

Se debe dar continuidad al análisis de estabilidad de las diferentes técnicas de control para mejorar el desempeño de los controladores y al respecto buscar trabajos publicados de control en el área satelital.

Se sugiere incluir el modelado de sensores y actuadores que estarán a bordo del Picosatélite Universitario y analizar los parámetros que se pueden medir, ya que es posible que se requiera del desarrollo de observadores.

Un tema muy importante es la capacidad de cómputo del Picosatélite Universitario, por lo que es necesario un análisis de la factibilidad para programar algoritmos de control a bordo del Picosatélite Universitario que no requieran algoritmos complejos, además de considerar el muestreo de los sensores y la respuesta de los actuadores.

BIBLIOGRAFÍA

Libros:

NORMAN S. NISE, **Sistemas de Control para Ingeniería**, CECSA, año 2002

VINCENT L. PISACANTE, **Fundamentals of Space Systems**, Oxford University Press, New York, año 2005.

Artículos:

MARCO A. LOVERA, ALESSANDRO ASTOLFI, **Global Magnetic Attitude Control of Spacecraft in the Presence of Gravity Gradient**, IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS, Vol. 42, Páginas 796-805, año 2006.

RAYMOND KRISTIANSEN, PER J. NICKLASSON, **Satellite Attitude Control by Quaternion-Based Backstepping**, American Control Conference, Vol. 2, Páginas 907-912, año 2005.

JOHN TING-YUNG WEN, KENNETH KREUTZ-DELGADO, **The Attitude Control Problem**, IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS, Vol. 36, Páginas 1148-1162, año 1991.

HERBERTT SIRA-RAMIREZ, **Spacecraft Reorientation Maneuvers Via Linearizing Variable Structure Control**, 20th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Vol. 29, Páginas 21-44, año 1986.

M. VELASCO VILLA, H. RODRÍGUEZ CORTÉS, I. SANCHEZ ESTRADA Y H. SIRA RAMÍREZ, **Passivity based Path Tracking Control of an Omnidirectional Mobile Robot**, AIAA J., Vol. 3, Páginas 1062-1067, año 2008.

PANAGIOTIS TSIOTRAS, **Further Passivity Results for the Attitude Control Problem**, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. 43, Páginas 1597 – 1600, año 1998

TESIS:

STIAN SØNDERSRØD OSE, **Attitude Determination for the Norwegian Student Satellite nCube**, Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, año 2004, Tesis de Maestría.

ELI JERPSETH ØVERBY, **Attitude Control for the Norwegian Student Satellite nCube**, Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, año 2004, Tesis de Maestría.

TORBEN GRAVERSEN, MICHAEL KVIST FREDERIKSEN, SØREN VEJLGAARD VEDSTESSEN, **Attitude Control System for AAU CubeSat**, Aalborg University, Institute of Electronic Systems, Department of Control Engineering, año 2002, Tesis de Maestría.