



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Uno, dos, tres, ..., infinito, ..., y más allá

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

ENRIQUE MARTÍNEZ CARPIO



TUTOR:
DR. ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO DANTÁN

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Martínez Carpio Enrique 59 76 59 46 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 095250148
2. Datos del tutor Dr Alejandro Ricardo Garcíadiego Dantán
3. Datos del sinodal 1 Dr Luis Antonio Rincón Solís
4. Datos del sinodal 2 M en C Ana María Sánchez Mora
5. Datos del sinodal 3 M en C Luz Arely Carillo Olivera
6. Datos del sinodal 4 M en C Patricia Magaña Rueda
7. Datos del trabajo escrito Uno, dos, tres, ..., infinito, ..., y más allá 135 p 2008

Tabla de contenido

	Página
Índice	
Introducción.....	I
Capítulo 1. Todo es igual.....	1
Capítulo 2. Los sentidos, insuficientes para lograr conocimiento.....	13
Capítulo 3. Rodeado de Gigantes.....	34
Capítulo 4. Un mundo nuevo al alcance de lo más sencillo.....	75
Capítulo 5. Una infinidad de infinidades infinitas.....	101
Bibliografía.....	135

Introducción

La meta de este trabajo es acercarnos al intrincado y apasionante mundo del infinito, pero no de una manera oscura, técnica o poco entendible. Este tema es presentado de un modo sencillo, a manera de narración en primera persona del personaje principal: El adolescente Jorge que sufre lo indeseable como consecuencia de su edad y su entorno. En medio de su vida cotidiana, que le parece aburrida, descubre el mundo del conocimiento, las ideas, el infinito y nociones básicas de la teoría de conjuntos de Cantor. No es necesario ser un experto en algo para entender estas páginas, pues una de las riquezas más grandes del trabajo es que cualquier persona que conozca el proceso de la lectura y, a lo más, las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) puede comprender perfectamente el texto. Esto no es una exageración, pues los conceptos se discuten de manera que sean cuestionamientos naturales de una persona de esa edad y, por supuesto, con la valiosa ayuda de su guía, un personaje misterioso e interesante que el joven conoce.

Lo anterior no es otra cosa que popularizar o divulgar una idea, pues se presenta un tema complicado, de tal manera que los que no son expertos, comprendan principios fundamentales de la teoría de conjuntos. Por otro lado, no se debe esperar que el lector se convierta en un experto en el tema, pues esto es totalmente imposible en todo trabajo de divulgación.

La tesis esta dividida en cinco capítulos. En el primero sólo se presenta el lugar donde se desarrolla la historia, el personaje secundario, y de cómo ve la vida el joven protagonista. En este capítulo se tratan preguntas frecuentes de los adolescentes, pues se busca que tenga un contenido atractivo además de que conozcan algo de matemáticas.

En el capítulo dos se discute la manera de llegar al conocimiento. Se deja claro que los sentidos, solos, no son suficientes para este fin. Se discuten vagamente algunas de las ideas de Platón y Aristóteles y se presentan varios ejemplos sobre las cuatro causas de conocimiento que se le atribuyen a Aristóteles. Se realza la importancia de la razón para este proceso. Se presentan las reproducciones de dos pinturas famosas para ilustrar la tesis, para que sea más llamativa y que tienen que ver, de cierta manera, con el infinito.

El capítulo tres es el más extenso y está revestido de una importancia primordial. Para una persona que tiene cierto grado de estudios matemáticos, es fácil entender que la sucesión de los números naturales es infinita, pero no necesariamente para cualquier otro

ser humano. Es por esto que se presentan múltiples ejemplos de conjuntos de cosas en la naturaleza, desde una colección de diez canicas, hasta el número de átomos que hay en todo el mundo. A pesar de las cantidades inmensas que se manejan, se llega a la conclusión de que la naturaleza es finita y que cualquier conjunto que esté en ella, es susceptible de contarse o de, al menos, aproximar el número de elementos que tiene, por millones y millones que sean. Entonces, ¿en dónde encontramos un ejemplo de algo infinito? Para contestar esta pregunta nos debemos sumergir en el mundo de los números, pues la sucesión de los naturales jamás termina. Pero como no basta sólo decirlo, se introduce, a manera de juego común entre los niños, el primer principio de generación de Georg Cantor. Las matemáticas no siempre son muy complicadas y, en muchos casos, se pueden poner ejemplos de la vida diaria para facilitar su comprensión. Esto es precisamente lo que se hizo para explicar la relación biunívoca entre dos colecciones de objetos. En medio de una sala de cine, se explica que no se necesita contar el número de elementos de un conjunto, para compararlo con otro. Esta relación es sumamente importante, pues ayuda a entender, más adelante, el por qué los números naturales, pares, impares, potencia de dos, etc., tienen el mismo cardinal. Partiendo de la suma, se explica que la multiplicación es un caso particular y que la exponenciación es, a su vez, un caso particular de la multiplicación. Este concepto ayuda a comprender que se pueden escribir cantidades muy grandes, por medio de una expresión muy sencilla como 2^{64} . Es natural, una vez que se explica el anterior término, que el protagonista se pregunte sobre la cantidad que representa 2^{1000} o $2^{1,000,000}$.

El capítulo cuatro trata, principalmente, de entender y conocer el cardinal de la sucesión de los números naturales: *aleph cero*. Gracias a la correspondencia biunívoca, se explica por qué conjuntos como los pares, los impares, las potencias de dos, etc., tienen el mismo cardinal. Se describe el hotel de Hilbert como cuento y se mencionan otros temas como la evolución o las nanomáquinas para hacer más ágil la lectura.

En el capítulo cinco y último, se proveen ejemplos de diferentes conjuntos que tienen como cardinal *aleph cero*, lo cual hace pensar que no existen otro tipo de conjuntos ni otros números transfinitos más. Se juega Batalla Naval para enseñar, o recordar, según sea el caso, alguna forma intuitiva de coordenadas cartesianas. Se demuestra que la sucesión de números irracionales no puede ser numerable y, por lo tanto, no puede tener como cardinal a aleph cero (\aleph_0) tiene que ser otro. Se termina el trabajo con la frase: “Pero

no sólo hay ese [el número transfinito que representa a los números decimales], de hecho hay una infinidad de estos números transfinitos, lo que quiere decir que hay una infinidad de infinitudes de conjuntos infinitos distintos”, dejando al lector en un cierto suspenso para un trabajo posterior.

*No hay un final. No hay un inicio. Sólo hay la infinita
pasión por la vida.*
Federico Fellini

Capítulo 1

TODO ES IGUAL

Ha sido un día más, sin nada nuevo por hacer. Es de noche y me encuentro rodeado por cuatro paredes llamadas ‘mi cuarto’. En unos minutos más, mi madre me llamará para cenar, y el ritual acostumbrado se llevará a cabo. Mi padre me preguntará sobre la escuela, y yo no tendré otra respuesta que la clásica; la que siempre doy ante la misma pregunta de rutina. Tal vez, ni le importen realmente mis actividades; quizás sólo me consulta de manera mecánica sin interesarse por la respuesta. ¿Qué más se puede contestar ante algo que se realiza sólo por costumbre y sin sentido? Lo que hacemos está lleno de esas rutinas. Recuerdo que un día llevé a cabo un experimento bastante simple: consistió en cambiar algunos objetos que han estado en ciertos lugares por siempre; por ejemplo, en la cocina moví el cesto de basura a la pared de enfrente. El resultado totalmente previsible: todos botaron los desperdicios, por costumbre, en el lugar donde lo habían hecho siempre. Claro que no faltaron los insultos y el movimiento del cesto. Lo que me causó más asombro aquella ocasión fue lo que hizo una de mis hermanas: ¡no se percató y dejó la basura en el suelo! Más adelante, al llegar a la escuela, cambié de lugar la pequeña caja donde se ponen

el borrador y los gises. El maestro se desconcertó hasta la desesperación. ¿Por qué las personas actúan de la misma manera a lo largo de los días, semanas, meses, años, e incluso, a lo largo de toda su vida? No conozco la respuesta; pero me he dado cuenta que mucha gente lleva a cabo prácticas que ni siquiera les agradan. Las repiten las veces que puedan y son felices si esto no cambia por el resto de su existencia. Lo triste de todo esto es que yo mismo lo he hecho, tengo hábitos que, aparentemente, son inconscientes. La mayoría de nosotros nos volveremos predecibles.

— Jorge, ¡ya baja a cenar!

Ahí está mi madre aferrada a repetir lo de la cena, noche tras noche. Un día se me ocurrió decirles que podríamos cenar en el patio, junto a los columpios para disfrutar de la luna. Me vieron como a un extraño y me reprendieron por generar el desorden. Así que en limitadas ocasiones digo lo que realmente pienso. Desgraciadamente, mis pensamientos son muchos y me gustaría tener alguien con quien compartirlos. He intentado hablar con mis hermanas, pero se burlan de mí, tal vez por su edad; así que ya no juego con ellas. Lo he intentado con algunos compañeros de clase, pero el parecer no les importa. Incluso, llegué a pensar que los chicos de la escuela lo entenderían pero me equivoqué. No tengo con quien compartir mis inquietudes como, por ejemplo, esta de que las personas actuamos por costumbre. Es extraña la soledad cuando tienes que convivir, aparentemente, con muchas personas. Así que he optado por cargar una pequeña libreta para anotar los pensamientos — o serán locuras — que se me ocurran. ¿En verdad estaré loco? No lo creo, tan solo es que los demás no me entienden.

Como era de esperarse, la cena transcurre como de costumbre: mis padres platican cosas de adultos; mis hermanas retozan todo el tiempo; y, yo pienso, pienso y pienso. Mañana tendré que ir a la escuela, sentarme en el mismo lugar y escuchar a los maestros repetir lo que dicen los libros. ¿No se les ocurre otra forma de dar clases? Parece que se aprenden todo de memoria y no tienen la capacidad de decirnos algo interesante. Francamente, me aburre ese discurso que aprendo y me convierto en el alumno ejemplar. Por cierto, el maestro de historia nos dijo que de poco servirá todo lo que nos pueda enseñar a lo largo del curso si no entendemos el significado de ‘historia’. Cuando comentó esto, todos pusimos cara de sorpresa y, al menos yo, pensé que se trataba de una broma, pues jamás a ningún maestro se le ha ocurrido explicarnos las definiciones de biología, español o

álgebra. Al principio de cada ciclo escolar se presenta cada docente y nos llena de conocimientos, pero jamás se pone a hablar sobre la definición de alguna palabra. De inmediato me di cuenta de que no se trataba de alguna broma, pues el maestro anotó con grandes letras en el pizarrón, como jamás lo había hecho, la tarea que en este momento me dispongo a hacer.

La biblioteca de la casa es pequeña, consta de unos cuantos libros y sinceramente nadie les presta mucha atención, se encuentra en una esquina del estudio de mi papá y es un lugar que poco frecuento; sinceramente no me gusta estar ahí porque corro el riesgo de encontrarme con mi padre y que se ponga a platicar, dar consejos y sermones que nada me gustan. Pero como ahí está una enciclopedia, tengo que arriesgarme e ir en busca de las definiciones necesarias. Afortunadamente, el estudio está solo y me apresuro a buscar el tomo que contiene la letra 'h', me topo de inmediato con un problema: ¡hay varias definiciones, no sé cuál anotar! Recuerdo las palabras del maestro y leo cada una de ellas para quedarme con la que más se relaciona con la materia de la escuela: 'Narración' y 'exposición' de los 'acontecimientos' pasados y 'dignos' de 'memoria', sean públicos o privados. ¿Estas palabras anotadas precipitadamente en mi cuaderno, me dicen realmente lo que necesito saber? ¡Por supuesto que no! Así que, un tanto por el miedo de entregar mal la tarea, y otro tanto por el asomo de un interés verdadero, me instalo en un sillón bastante cómodo y subrayo otras palabras que necesito para comprender bien la definición. Busco y encuentro que 'narrar' significa contar, referir lo sucedido, o un hecho o una historia 'ficticios'. De inmediato tomo el tomo en donde viene la letra 'f' y veo que ficticio no es otra cosa que imaginario. Pero en la clase del maestro jamás nos enseña algo imaginario. Según él, todo lo que nos relata es verdadero y ha pasado en algún momento del tiempo. Ya en clase nos dijo que nos quedáramos con la parte de la definición que se acoplara a la materia, que no todo nos iba a servir. Leo de nuevo las definiciones hasta aquí encontradas y empiezo a entender lo que realmente significa historia, pero aún tengo algunas dudas sobre, por ejemplo, la palabra 'exposición'. Nada complicado, una de las acepciones dice que es explicar un tema o asunto por escrito o de palabra. Está claro que la historia se trata de explicar algún evento que sucedió por medio de la escritura o las palabras. Pero al final de la definición de historia dice que 'dignos' de 'memoria', sean públicos o privados. Busco la palabra 'digno' y me quedo con el sentido de que significa que merece algo, en

sentido favorable o adverso. Un poco de reflexión me dice que el pasado está lleno de acontecimientos que contar, pues a cada momento las personas hacemos algo, pero no todas ellas tiene la importancia para que alguien las escriba y se enseñen a futuras generaciones. Ahora la duda, un poco alejada de la tarea, es saber quién o quiénes deciden lo que es digno de contar para considerarlo dentro de la historia. Pero hay otra cosa que no me gusta del todo, pues la definición dice que los acontecimientos pueden ser públicos o privados. ¿Es válido contar algo privado de alguna persona sólo porque es digno de recordar? Ahora que recuerdo, un día el maestro nos contó, a manera de narración histórica, algo de la vida de Benito Juárez y su esposa, una niña comparada con él. En ese momento no me percaté de que esa narración forma parte de la vida privada de Benito, pero que, sin embargo, se encuentra en los libros y, al parecer, son acontecimientos dignos de contarse. ¿Por qué? Tal vez su boda no nos deba interesar y sí las cosas que hizo que afectaron al país de su tiempo. Salgo del estudio con una madeja de pensamientos que dan vuelta en mi cabeza. Por un lado, creo entender lo que significa historia de acuerdo a las definiciones que encontré, pero por otro me quedan dudas sobre quiénes deciden lo que es digno de preservarse y si es correcto dar a conocer acontecimientos privados de ciertos personajes. De nuevo en mi cuarto fantaseo con que en el futuro seré un hombre importante y algún día los niños en las escuelas leerán justamente lo que hago en este momento. Pero tal vez todo esté deformado, pues cada libro contendrá su propia versión y nadie conocerá lo que realmente sucedió. Tal vez muchos de los ‘hechos’ que narran los libros sí son ficción y muy pocos sucedieron en realidad pero, ¿cómo llegar a saber realmente si muchas de las cosas que se consideran historia sucedieron tal como la cuentan los maestros o los libros?

Por ahora debo seguir con las rutinas, como terminar de cenar, darle gracias a mis padres, lavarme los dientes e irme a acostar. Pero no tengo sueño. Me gustaría salir a caminar, a disfrutar la noche, la luna y, sobre todo, a conocer algo que ahí está, pero me lo ocultan. Es cierto que el día dura doce horas igual que la noche. Entonces, exactamente la mitad del tiempo hay luz y la otra no, para mi es válido conocer de igual manera ambas partes ya que en tiempo son idénticas. Pero no, aquí estoy acostado mientras la noche sigue su marcha. Cuando crezca nadie me obligará a dormir y caminaré cuando tenga ganas, ya sea que alumbre el sol o la luna.

Afortunadamente, puedo irme caminado solo a la escuela, sin que mi madre me acompañe, como a mis hermanas. Disfruto este recorrido porque trato de que no sea el mismo. Intento irme por calles y caminos distintos. En verdad que es agradable este lugar para vivir. Las calles empedradas y de subida le dan un toque colonial que mucho disfrutaban los turistas. Las múltiples iglesias atraen y asombran a los visitantes. En una ocasión, un señor con acento extraño, luego me enteré que era alemán, me preguntó la razón de que hubiera una iglesia en casi cada esquina. Por más que pensé no supe que responderle, pero le recomendé que fuera al museo para informarse. Entonces el alemán se indignó, me miró fijamente a los ojos y me dijo que era una vergüenza que no conociera la historia del lugar en que vivía. Afirmó que esta disciplina sirve para conocer el pasado. Muy intrigado le pedí que me explicara más su punto de vista y su actitud cambió, suavizó el tono de su voz fuerte y me habló de manera interesante acerca de la importancia de conocer la historia. En tan sólo media hora de plática, mi amigo alemán logró lo que no pudieron los profesores de las escuelas: interesarme en un tema. Ahora, creo que si conozco algunos de los hechos del pasado, puedo hacer una especie de magia, conjeturar en torno al futuro —aunque, por otro lado, mi papá me dijo que esto no era posible—. Desgraciadamente, he aprendido que en México esto es más fácil que en otros países por una simple razón, los gobernantes repiten los errores del pasado, en lugar de aprender de ellos y mejorar.

He llegado a la escuela inmerso en mis ideas. Trato de pensar en algo y anotarlo en mi inseparable libreta. Tal vez por eso es que mis compañeros me consideren raro, pero no lo soy. Al principio de cada curso me invitan a jugar y divertirme, pero aunque lo intento, no consigo la misma satisfacción que ellos. Tan solo me divierto un rato y me invaden los pensamientos, hasta llega a resultar gracioso.

Estamos en la clase de química, el maestro nos ha pedido algo que me parece de lo más atrayente. Nos conduce al patio y nos coloca a unos veinte metros de un viejo árbol. Entonces dice que usemos el sentido de la vista para describir el árbol y anotarlo en una hoja de papel. Al principio nadie entiende de lo que se trata. Algunos chicos no le prestaron atención, pero un buen regaño les indica que va en serio. El profesor da quince minutos para anotar lo que veamos: el color, textura, forma, dimensiones y demás características del viejo árbol. Yo disfruto mucho de esta actividad por dos razones: una, que es algo distinto, y, otra, que me gusta mucho escribir lo que pienso y veo. Ahora el profesor revisa nuestras

impresiones y separa cinco descripciones para leerlas en voz alta. ¿El resultado? Totalmente inesperado. Con gran sorpresa nos damos cuenta que, a pesar de que se trató del mismo árbol, lo ‘vimos’ de manera distinta. Unos lo vieron de color café claro, otros café oscuro, otros gris pálido, etc. Así cada característica difiere de narración a narración, desde la altura, la textura, el color, la forma, etc. A mis compañeros esto les causa gran alboroto y se ponen a hacer diversas bromas al respecto, tildan de tontos a los que no lo percibieron igual que ellos. A mi esto me impacta mucho. ¿Cómo es posible que el mismo árbol lo hayamos descrito tan diferente? Al final el maestro concluyó que, para conocer algo, no basta usar sólo los sentidos. Pero ahora que me pongo a analizarlo me pregunto, ¿qué es lo que basta para llegar al verdadero conocimiento de algo? El experimento sigue de manera más que interesante. Ahora, en el salón, nos separa por grupos de cinco personas y pide que un compañero de cada equipo venda los ojos a los otros cuatro, nos entrega unos recipientes con algunos objetos y nos pide que describamos lo que sentimos. Afortunadamente, a mí me toca estar sin la venda y puedo ver que, por ejemplo, un chico describe muy distinto un trozo de madera a otro; otros describen de manera muy diferente al mismo pedazo de tela. Mis cuatro compañeros de equipo han sentido muy distinto tierra mojada y los resultados vuelven a ser impresionantes, al menos para mí. El maestro vuelve a repetir que no bastan los sentidos para conocer y yo me apresuro a anotarlo en mi libreta, así como mis pensamientos posteriores. Ahora hay algo que me pregunto: ¿qué se necesita para conocer algo? Sé que debería preguntarle al maestro pero no lo hago, tal vez él tenga la respuesta pero soy demasiado tímido para ello. Me imagino que todos se van a burlar de mí, y guardo las dudas para mis adentros.

Desde ese día me pregunto la manera de conocer algo, incluso me he llegado a preguntar si realmente existo. ¿Los demás me observan como yo me veo en el espejo? Esto para mí es muy importante. Cada mañana me levanto, me baño y veo mi reflejo. Entonces, me pregunto si las demás personas ven exactamente lo mismo que yo percibo de mí. Incluso esto me llega a pasar con mi voz. Porque ya me sucedió que, en alguna ocasión, me escuché en una grabación de un evento de la escuela, y no la reconocí. Me pareció más chillona o aguda de como yo mismo me escucho. En relación al aspecto, recuerdo una compañera de la escuela del último grado. Ella dice que es muy bonita y lo divulga por todos lados con palabras y acciones, pero sinceramente la veo un tanto fea y desagradable.

El otro día, mientras estaba ella sentada en una banca durante uno de los recesos, la observé detenidamente y no me agradó su aspecto: sus oídos son demasiados pequeños para su rostro ovalado; sus pómulos salidos contrastan con su boca pequeña; sus cabellos pintados de rubio no hacen juego con el tono de su piel; en fin, a mi no me resulta atractiva. Pero ella se dio cuenta de que la observaba y adquirió un aire de superioridad. Creo que pensó que me quedé impactado por su ‘belleza’. A partir de ese día, cada vez que me mira, sonrío despectivamente. Tal vez lo que ella ve en el espejo, de su persona, sea diferente a lo que refleja. Claro que hay niños, la mayoría, que sí la encuentran bonita. En lo particular a mi me gusta mucho Alicia, la hija de la maestra de educación física, aunque me da pena decirlo porque parece que a nadie más le llama la atención. ¿Acaso será que cada uno ve a las personas de manera distinta? Esto realmente es un verdadero problema. Jamás dos personas se podrán poner de acuerdo en la fisonomía de un tercero. Es por esto que cada mañana me miro detenidamente en el espejo para ver qué tanto cambio día con día. Alguna vez mi papá me mencionó un libro donde un joven siente que se transforma, poco a poco, en un gran y horrible escarabajo. Gracias a esto, he soñado que me pasa lo mismo con distintos animales, desde pequeños insectos hasta enormes dinosaurios. Ahora entiendo la desesperación que dijo mi padre sintió el personaje del libro que me platicó.

Ahora que tomo clase de geografía pienso en un tema añejo para mí. Escucho al maestro hablar sobre las montañas más altas del mundo y me pregunto: ¿esa voz que escucho es la que realmente tiene? No presto demasiada atención a los datos que proporciona, más bien pongo cuidado a cada sonido que emite. A pesar de que es la misma voz, se perciben tonalidades distintas. Un día, este maestro dio una importante conferencia fuera de este pueblo y nos trajeron la película, mientras que todos los demás estaban más atentos al contenido, yo lo estuve a su voz. Para mí fue admirable que fuera tan distinta en la realidad y en grabación. Las voces parecían provenir de dos personas totalmente diferentes. Entonces ahora me pregunto si la voz es la misma o cambia de acuerdo a quien la escuche. Estas y otras interrogantes las he expresado a algunas personas de confianza y sólo he obtenido resultados negativos. Me dicen que eso no tiene sentido, que es perder el tiempo y que me debería ocupar en cosas realmente interesantes. ¿Acaso pensar en lo que pasa a nuestro alrededor no tiene importancia?

Las clases pasan igual que siempre. Afortunadamente es viernes y los maestros nos tratan con menor rigor que el resto de la semana. Los alumnos nos sentimos liberados y la escuela se convierte en un gran parque de diversiones. Yo, como de costumbre, me alejo del bullicio. Este es el último receso del día, después tomaré la clase de civismo y me podré ir a mi casa. Ahora he optado por visitar el lago artificial que se encuentra al final del terreno de la escuela. Está prohibido meterse a nadar y sólo me conformo con sentarme cerca y ver pasar el tiempo.

Al llegar a mi casa, me entero de una noticia sensacional: ¡mis padres estarán fuera todo el fin de semana! La situación se tornó graciosa. Llegué de la escuela, me llamaron a comer y el tiempo transcurrió en un ambiente bastante extraño. Mis padres no hablaron y sólo nos miraban. Al terminar los alimentos nos juntaron en la sala, se creó un ambiente tenso, distinto.

— Les tenemos que decir algo sumamente importante — comenzó mi padre—, después de mucho pensarlo y analizarlo, hemos tomado una decisión pero la tienen que aceptar con mucha madurez. Ustedes son unos niños para nosotros, pero debemos tenerles confianza y esperamos que no nos defrauden.

Por este estilo habló mi padre, tan aburrido como siempre. ¿Por qué razón mi madre se queda callada y sumisa ante la voz masculina? Cuando mi madre era joven, fue campeona de natación, ganó muchas medallas y me gusta entrar a su cuarto para admirarlas, es por esto que no entiendo la actitud que tiene ahora de casada, pues me imagino antes era fuerte y decidida. El caso es que mis padres anunciaron que nos íbamos a quedar solos mientras ellos hacían un viaje a la capital del país, el fin de semana completo. Esta noticia me agradó mucho, ya que me gusta que esto suceda. Ya en otras ocasiones mis padres se habían ido, pero sólo por un día. Ahora son dos y podemos hacer lo que queramos. Lo que no me gusta es que cada que salen, repiten el mismo discurso.

Aquí estamos en la estación del tren, en espera de que partan mis progenitores. Por fin, llega el momento y con él los abrazos, despedidas y sin fin de recomendaciones. A medida que ellos abordan el carro, siento palpitar mi cuerpo como librándome de algo aterrador. No es que sean malos; no, sólo que en ocasiones he soñado estar lejos para poder hacer lo que se me antoje. Llegamos a mi casa y mis hermanas se van a su cuarto para jugar

como de costumbre. Me siento incómodo junto a ellas y decido salirme a caminar por las calles que tanto me gustan.

No sé que hacer con esta independencia parcial. No tengo que llegar temprano a mi casa, pero no sé cómo aprovechar la situación. Es singular el comportamiento del ser humano: cuando no tienes algo, lo anhelas con todas tus fuerzas; pero una vez que lo consigues, no sabes cómo manejarlo. Así me pasa en estos momentos. Una gran curiosidad se apodera de mí, y entro con pasos firmes, como para iniciar una larga búsqueda. La tarde es agradable y el museo se encuentra casi vacío. Las imágenes de los cuadros parecen estar llenas de una vida contemplativa, al igual que las esculturas a lo largo del pasillo. En el fondo, frente a un cuadro poco iluminado, hay un señor observando, callado, casi inmóvil. Recorro rápidamente las obras que me separan de esta imagen, llego hasta el viejo. Volteo a verlo y él ni se inmuta, parece que duerme con los ojos abiertos. Con esta confianza volteo la cabeza totalmente y admiro a un anciano de alrededor de setenta años, su barba crecida y blanca le dan un parecido a una de las pinturas de la entrada. Unas arrugas tenues circundan sus ojos gastados por los años. En contraste con todo esto, el pelo es de color totalmente negro, ni una cana se puede ver. Sus ropas gastadas parecen las de un pordiosero, pero no lo es. Puedo adivinar que no lo es. Algo en la imagen de este hombre me atrae mucho; tal vez esa mirada profunda, tal vez ese aire de conocedor del mundo, no lo sé. Volteo un momento hacia mi costado derecho y algo extraordinario sucede. De pronto se encuentra viéndome directamente a los ojos. Su mirada me tranquiliza de sobremanera, pareciera que la profundidad de su vista abarca el mundo entero. Tengo una sensación extraña pero no me puedo alejar. Veo cómo sus labios se abren lentamente para decirme algo.

— ¿Por qué es que si te aquejan tantas dudas, acerca de todo lo que te rodea, no vienes más seguido a este museo para que aprendas y las puedas resolver? —pregunta el viejo con una energía y seguridad asombrosas.

¿Acaso este viejo puede leer mis pensamientos? ¿Qué poder cree tener cómo para pensar en los motivos que me hicieron entrar a este lugar? Después de cuestionarme de esta manera, vuelve a su lugar original, casi de un solo movimiento y adopta la misma postura contemplativa pero lejana. Salgo del edificio y camino sin rumbo fijo. Tal vez la persona que ví sea un personaje de un cuadro y sólo se salió de él para regañarme. Tal vez el viejo

es un ángel que me quiso dar una lección o sólo es mi imaginación y es una persona como cualquier otra.

Un poco más tranquilo camino por la calle principal, perfectamente iluminada, grande y llena de piedras que dificultan el paso rápido. Llego al centro del pueblo y me encuentro de lleno con la grandiosa catedral, por cierto, declarada patrimonio de la humanidad hace algunos años. Las luces que la iluminan le dan un aspecto santo, misterioso y antiguo. Los últimos turistas del día toman fotos y, poco a poco, la plaza se queda vacía. ¿Por qué mis pasos me trajeron aquí? Me siento en una banca al costado del monumento antiguo, enfrente puedo ver la gran fuente perfectamente diseñada y que le da al lugar un toque encantador. Siento la necesidad de conversar con alguien de lo que sea, después de todo sería agradable tener amigos y compartir miles de ideas. Es otra cosa que no puedo entender de mí. Por un lado, no puedo llevarme bien con casi nadie; pero, al mismo tiempo, siento esa necesidad terrible de encontrar un confidente, amigo, consejero, etc. ¿Acaso la amistad es un tesoro difícil de encontrar? Claro que me refiero a la verdadera amistad, a esa que no necesita razón de ser, esa que se da sin requisitos y tan sólo se siente. Por cierto, el año pasado tuvimos en la escuela un chico que llegó de un país lejano. Su aspecto contrastaba con todos nosotros: su tez era muy morena pero sin llegar a ser negro, su altura superaba a todos los chicos de la escuela, incluso a los de último grado. A pesar de estas diferencias físicas, se ganó el aprecio de todos; jugaba muy bien al fútbol y, en general, cualquier actividad física la desarrollada casi a la perfección. En los estudios era el primer lugar, parecía que ya se sabía todo y sólo le bastaba con buscar en su cabeza las respuestas a los exámenes. Un día se acercó a mí y me platicó de su país, cosas raras e interesantes, pero lo que más me impactó fue que me dijo que yo le simpatizaba más que cualquier otro alumno de la escuela, que en mí veía un joven interesante, inteligente y simpático. Estos adjetivos me llenaron de una felicidad poco usual, una especie de ensoñación medida. Fue como si llegaré a la cima de una gran montaña pero debía de caminar firme y despacio para no caer al vacío y hacerme daño. En fin, ese día conocí la verdadera amistad con ese chico. Él podía jugar con los demás, hacer los chistes que tanto me molestan pero, al llegar la tarde, platicar conmigo de cosas muy distintas. Un día en que salimos a caminar por las calles del pueblo, le pregunté cómo poder hacer tantas cosas, él me miró duramente y dijo: “El secreto del trabajo en esta vida es muy fácil: el día se

compone de veinticuatro horas, de las cuáles ocho deben usarse para el trabajo, ocho para los ejercicios físicos y mentales y ocho para el descanso. Si distribuyes así tu día podrás hacer mucho y dejarás asombrados a todos los profanos.” Debo confesar que en aquella ocasión me dio pena preguntar el significado de ‘profano’, es por eso que ahora consulto con más frecuencia mi diccionario. Un día el chico se fue sin despedirse de nadie, tan sólo abandono la escuela y, posiblemente, el país.

He intentado seguir su consejo pero me ha sido imposible. Pensé que eso de distribuir las actividades a lo largo del día era una tarea sumamente fácil, pero me equivoqué. Me doy cuenta de que pierdo mucho tiempo pero no sé cómo arreglarlo. Por ejemplo, en este momento me encuentro sentado en esta banca, escribo en mi libreta y sólo pienso, si hiciera lo que mi amigo me dijo, debería estar dormido en mi cama, y ocupar las ocho horas para el descanso.

Casi ya no hay gente en la calle, las pocas personas que quedan son turistas deseosos de vida nocturna que no hay en este pueblo. Me siento mucho más relajado y con ganas de llegar a mí casa, encamino mis pasos hacia ella y disfruto de las muchas estrellas que hay en el cielo. El color negro sombrío de la bóveda celeste me impone. Los astros que brillan son como puntos que adornan el cielo de noche. Esta visión me conduce y tan sólo camino por costumbre, mientras mi mente se aleja del mundo y se transporta lejos gracias al pensamiento. De nuevo me invade la pregunta, ¿cómo conocer algo realmente, en este caso las estrellas? A mi me impresionan mucho, pero a los demás parece que no. Tal vez yo las veo hermosas y no lo son. Tal vez los demás vean algo desagradable que no les llama la atención. ¿Mi visión del mundo es la misma que la de los demás? Me acuesto sobre el prado de un pequeño parque para ver esos puntos lejanos. Los miro detenidamente para descubrir su verdadera naturaleza. Tal vez los demás ya lo hicieron y han descubierto que no tienen nada de interesante. Cada una de las estrellas tiene luz propia, no tienen una forma específica y parpadean constantemente. Observo por diez minutos y cada vez las encuentro más bellas, majestuosas e inalcanzables. ¡Que bello es el cielo de noche!

— Realmente es hermoso observarlo, pero no todos lo hacen como tú.

Esta frase la dice el mismo personaje del museo, no sé cómo llegó hasta aquí pero se encuentra recostado a mi lado en la misma postura contemplativa. Ahora me doy cuenta de

que el último enunciado lo dije en voz alta, que por la soledad no sólo lo pensé, también lo expresé. Mi primera reacción es correr a mi casa que está a dos cuadras. Sin embargo, me quedo ahí tendido junto al extraño con la vista en el cielo. Algo muy fuerte me obliga a quedarme, no tengo miedo, no tengo desconfianza. Creo que la causa es la mirada del viejo que conocí horas antes. Trato de recrearla y sólo encuentro profundidad que reconforta. Ahora que lo pienso, se parece mucho al color negro del cielo: profundo, impenetrable y con gran sabiduría. Por alguna razón esta persona tiene algo que atrapa mis sentidos. Es como si él fuera a develar las dudas que me aquejan. Jamás había visto unos ojos así. No me atrevo a decir algo y pretendo que veo al cielo, pero realmente pienso. Todas las dudas que me aquejan golpean mi mente, desde la verdadera importancia que tiene el ir a la escuela, hasta la manera de percibir los objetos y qué es el conocer algo. Quiero interrogar al viejo acerca de esto, pero no sé cómo comenzar. Por alguna extraña razón siento que esta persona tiene muchas respuestas. Aquí estamos acostados, vemos las inalcanzables estrellas, y sólo disfrutamos el momento, sin preocuparnos de la opinión de las escasas personas que pasan y nos ven de manera muy extraña.

No hay un final, no hay un inicio, sólo hay la infinita pasión por la vida —dice de pronto el viejo—. Recordé esta frase, expresada por un famoso director de cine, porque refleja la inmensidad que está encima de nosotros y que tiene como representante a las hermosas estrellas y al cielo tan increíble que observamos.

*Un pequeño conocimiento del hecho es infinitamente
más valioso que el conocimiento inútil.*
Kahlil Gibran

Capítulo 2

LOS SENTIDOS, INSUFICIENTES PARA LOGRAR CONOCIMIENTO

Henos aquí acostados en el pasto. El viejo y yo vemos las hermosas estrellas: sus formas, su agrupación misteriosa, su brillo intenso y toda la belleza que irradian. Las personas hablan de ellas pero jamás se preguntan si realmente existen o no, tal vez sólo se hallan en nuestra imaginación.

— ¿Cómo se puede estar seguro que realmente algo se conoce? — pregunta de pronto el viejo.

Esta interrogante me toma por sorpresa, a pesar de haber pensado en esto otras ocasiones. Yo me había cuestionado algunas cosas particulares como la pelota, la voz, la imagen, etc. Ahora este viejo lo hizo en general, no importa de que se trate, tan sólo preguntarse, ¿cómo saber si realmente se conoce algo o no? Obviamente que no tengo la respuesta, así que me quedo un rato en silencio y pienso, al final sólo atino a decir:

— ¡No lo sé!

Esta no es la respuesta que debo de dar. Después de pensar, debería ser capaz de decir algo más inteligente. Así que me tranquilizo y dejo fluir sólo las ideas. Sin presiones, de ningún tipo, trató de expresar lo que siento al respecto.

— No lo sé, porque es muy complicado saberlo. Cada día tenemos contacto con muchas cosas como juguetes, animales, personas, piedras, árboles, etc., pero cuando veo algo, me pongo a pensar si realmente lo conozco. Ahora ya sé que no bastan los sentidos para alcanzar el conocimiento; que yo puedo ver algo de una manera y otra persona puede verlo muy distinto; que puedo percibir algún aroma agradable, pero a alguien más le puede resultar desagradable; en fin, que los sentidos no bastan para llegar al conocimiento verdadero. Pero algunas personas han dicho que es una tontería y que debería ocuparme en cosas más interesantes.

— Pues esa pregunta es de lo más interesante. Imagina que hablas de algún objeto. Estás seguro de que es de tal forma o que huele bien pero, para los demás, no es así. En este caso estaríamos ante objetos diversos, un árbol sería diferente para cada uno, todo dependería de la percepción de los sentidos.

— ¡Es lo que yo digo! —casi grito emocionado por encontrar alguien que me comprende—. Creo que el solo hecho de pensar es agradable y no tiene nada de malo; al contrario, siento que cuando se realiza esta actividad hay un beneficio muy grande aunque no sé exactamente lo que es.

— Los beneficios son muchos y muy variados —dice el viejo—, poco a poco los comprenderás y, en un futuro, te sentirás muy satisfecho de ser así. Ahora volvamos al conocimiento o no de las cosas.

— El otro día, el maestro dijo que no se puede conocer algo por medio de los sentidos, hizo unos experimentos muy interesantes en los que demostró dicha afirmación. ¿Por qué no todos vemos el mismo objeto de la misma manera? ¿Por qué alguien siente la textura de una piedra muy distinto que otra persona? ¿Por qué cuando a mí me gusta una comida, digo que huele rico, mientras que mi hermana dice que no huele nada bien? Realmente, ¿cómo se llega a conocer algo que sea cierto para todos? ¿Qué condiciones se necesitan satisfacer para decir que algo se conoce? ¿Qué es conocer? ¿Por qué nadie se ha ocupado de todo esto antes?

— Tranquilo pequeño amigo —dice el viejo asombrado—. Veo que tienes muchas dudas que no has resuelto, te inquietan y las vamos a platicar poco a poco.

La verdad yo también me sorprendí de mi actitud, de pronto expresé lo que pienso, y un poco más. Por alguna razón, me siento muy bien al lado de este viejo y me dan ganas de hablar, situación poco común en mí. Las ideas fluyen más claras y tengo palabras para expresarlas. Realmente esta situación me agrada mucho y estoy seguro que voy a aprender con este individuo tan peculiar.

— Vamos por partes —dice el viejo como para poner en orden las ideas—. Lo que veo que te preocupa es un tema muy interesante y bastante antiguo.

— ¿Antiguo? —pregunto un tanto desconcertado—. ¿A qué se refiere con antiguo?

— Pues que esto del conocer ya tiene muchos años que se discute. Que ha habido grandes pensadores que se han hecho las mismas preguntas que tú, que han dedicado su vida entera a pensar y escribir sobre estos y otros temas.

Esta afirmación me causa gran sorpresa porque pensé que a nadie le había importado esta discusión. Pero también me agrada porque, de alguna manera, no me siento aislado al pensar al respecto. Con gran inocencia, me imagino que hace diez o quince años, a lo más, alguien especuló en el tema y no llegó a la conclusión final.

— ¿A quién le interesaban estos temas y hace cuántos años?

— Pues desde hace muchos siglos. Por ejemplo, en el año 428 antes de nuestra era nació, en la antigua Grecia, un sabio muy importante llamado Platón. Él creció en una familia aristocrática, y dedicó su vida a estudiar cuestiones diversas del intelecto humano. Una de sus aportaciones importantes fue, precisamente, relacionada con el conocimiento.

— ¿Así que ya no tiene sentido discutirlo? ¿Quiere decir que ya lo resolvió Platón?

— No es así, pequeño amigo. Como tu bien dijiste, el sólo hecho de pensar ayuda al hombre y no debemos dejar de hacerlo. Este gran personaje concibió una filosofía acerca de lo que es conocer. Después de él, otras personas han rechazado sus ideas y han propuesto otras. Incluso, hasta nuestros días, hay pensadores dedicados a esto y aportan nuevas formas de resolver el problema. No se puede decir que ya se ha estudiado todo sobre un tema, ya que no es cierto. Esto, en lugar de desmoralizarte, te debe dar aliento para seguir adelante.

— Esto ya suena más interesante —dije emocionado con la certeza de que no soy el único loco en el mundo—. ¿Así que es posible dedicarse sólo a estudiar y tratar de resolver los problemas que aquejan mi mente? ... ¿Y, a uno, le pagan por esto?

El viejo soltó una gran carcajada pero no de burla, es como si con este acto me contestará que sí, y me alentara a preguntar.

— Claro que es posible. Muchas personas en el mundo lo hacen y te aseguro que es de lo más reconfortante, y por supuesto que pagan.

— Eso me agrada aún más —respondo muy emocionado e interesado—. Me pregunto sobre cómo se puede llegar a conocer algo o alguien. Me gustaría saber qué es lo que pensó este personaje llamado Platón. Ahora he recordado algo que me sucedió con mi amigo extranjero. Un día que hablábamos, sentados en una banca del parque principal, pasó un chico de la escuela y me preguntó que si lo conocía, yo le respondí que sí. Me miró como si dudara de mis palabras y me empezó cuestionar sobre su edad, preferencias musicales, hábitos, gustos deportivos, y demás cosas que yo desconocía. Entonces él me dijo que realmente no lo ‘conocía’, que tan sólo ‘sabía’ su nombre y nada más. Creo que desde ese día me entraron este tipo de dudas.

— Creo que tu amigo tiene razón —dice el viejo—. Según Platón, el conocimiento debe de ser certero e infalible.

— ¿A que se refiere con certero e infalible?

— Lo primero se refiere a que debe de ser cierto, que tienes que estar bien informado. Imagina que tú ‘sabes’ que a un amigo tuyo le gusta el fútbol, pero realmente no es verdad. Entonces, tú tienes un conocimiento, pero no es certero.

— ¿Y cómo se llega a la certeza de un conocimiento?

— Eso ya es una cuestión más complicada —responde el viejo—. Más tarde volveremos a estas preguntas. ‘Infalible’ se refiera a que no debes equivocarte, que si afirmas que al chico le gusta el fútbol, es porque estás seguro de ello, no te puedes equivocar en tu afirmación porque entonces no es cierto que conoces.

— Pero esto está muy complicado, —digo después de un rato de analizar estas palabras—. Una persona puede decir que le gusta tal o cual cosa, incluso actuar para que todos crean que es cierto, pero en el fondo es mentira. Por ejemplo, yo puedo asegurarles a

las demás personas que tengo dieciséis años pero tener uno menos, así que los demás tendrán un ‘conocimiento’ equivocado.

— Tienes razón, mi pequeño amigo, nadie afirmó que llegar al conocimiento real sea algo fácil de lograr. Es por esto que se investiga acerca de esta cuestión tan importante e interesante.

— También hay otra cosa difícil —digo al recordar el experimento de la escuela—, yo puedo ver un árbol de tal manera y los demás de otra, ¿Quién tiene la verdad? ¿Quién tiene el conocimiento verdadero de lo que se ve?

— Bajo esas circunstancias, nadie, pequeño amigo.

— ¿Nadie? —pregunto con un poco de desencanto.

— Nadie, si te basas en los sentidos. Es cierto que los objetos de la experiencia no son objetos propios del conocimiento. Es decir, con la experiencia y los sentidos es imposible conocer realmente algo. Claro que te puede dar una idea de lo que es, pero no lo llegas a conocer. Imagina que usamos el sentido del oído, escuchamos tan sólo un pájaro y lo describimos. Como tú bien sabes, esto dará resultados muy distintos, todo dependerá de la experiencia y, en este caso, de la imaginación. Se generarán en la mente cosas totalmente distintas en cada persona, así que los sentidos no son suficientes para conocer algo. Lo mismo pasa con los otros cuatro sentidos. Tu mismo lo pudiste comprobar en tu clase con el árbol.

— Así es —respondo más que interesado—, ahora tengo otra duda, ¿si juntamos los cinco sentidos podemos conocer algo?

— Me temo que la respuesta sigue siendo negativa. Prosigamos con el ejemplo del pájaro. ¿Realmente crees poder llegar a conocer a un ave si la escuchas, la ves, la tocas, la sientes y la hueles? ¿Basta todo lo anterior para saber todo acerca del ave?

— Pues la verdad no, se me ocurre que ni siquiera sabría su nombre a pesar de tocarla, oírla, olerla, verla y escucharla.

— Muy bien concluido, no sabrías su nombre, ni muchas otras cosas. Así que está demostrado que a través de los sentidos no se puede conocer.

— Pero, entonces, ¿cómo se llega a conocer realmente?

— No te desesperes. Antes quiero que pongas mucha atención en lo que te voy a platicar. Imagina una caverna en la que, desde pequeños, han estado unos hombres. Estos

están atados y sólo ven la pared de la caverna, con la cabeza y manos inmóviles. Atrás de ellos, pero un poco lejos, está una hoguera que arde, ésta sólo les permite ver un mal reflejo de unos hombres y objetos que pasan fuera de la caverna pero en un plano superior. Realmente los hombres sólo ven un reflejo de la realidad, gracias a la llama que se mueve constantemente, es decir, no ven lo que realmente es. Un buen día, un hombre se desata y se atreve a explorar el exterior, cruza el largo camino que lo separa de la entrada. Al salir, la luz del sol le lastima los ojos, pero con el tiempo se acostumbra. Entonces ya puede ver ‘la realidad’, ve los objetos iluminados con la luz del sol y no con las llamas inciertas de la hoguera. Este hombre regresa con sus compañeros y les relata la ‘verdad’. Éstos, como están acostumbrados desde niños a estar atados y dentro de la caverna, se burlan de él y no le creen. Algo importante es que, para llegar a conocer la verdad, el hombre tuvo que pasar por un proceso. Primero tuvo la *creencia* de conocer algo, es decir, imaginaba que lo que veía era verdadero. Más adelante, pudo haber pasado por otra etapa en la que *opinó* acerca de la realidad, pero no se acercó a ella. Cuando salió de la caverna y se acostumbró a la luz del sol, ‘llegó’ al *conocimiento* verdadero. Esto nos dice que hay distintos niveles de conocimiento, a saber: la creencia, la opinión y el propio conocimiento. No es lo mismo creer, opinar y conocer.

— Pues realmente es muy importante lo que me acabas de decir —comento con gran entusiasmo—. Estoy de acuerdo contigo en que no es lo mismo creer, por ejemplo, en un pájaro, opinar acerca de él y realmente conocerlo. Me gustó mucho lo de la caverna, pero aún no se ha resuelto nada, ¿cómo se llega al conocimiento de algo?

— ¡Ah qué mi amigo tan desesperado! Esto nos ha servido para dos cosas: una, transmitirte la postura de Platón acerca del conocimiento y entender que, de acuerdo con este filósofo, hay tres niveles. Ya hemos avanzado un poco y ahora sabes lo que se pensó hace siglos acerca de esto que te ha inquietado. Muchas otras personas han pensado sobre este asunto y es interesante comprender qué han dicho.

Un poco apenado, me concentro en mirar las estrellas. Ahora sé que, para Platón, hay tres niveles de conocimiento. Ahora me pregunto cuál de ellos poseo con respecto a los puntos luminosos que tanto me agradan en el cielo. ¿Tengo alguna creencia de las estrellas? ¿Opino algo sobre ellas? ¿Realmente las conozco? Después de mucho meditarlo, llego a la

conclusión de que sólo las dos primeras son ciertas, realmente no las conozco pero sí creo algo al respecto y también tengo una opinión. Al menos considero que son maravillosas, preciosas y que me gustaría llegar un día a vivir en una de ellas.

— ¿Verdad que realmente son preciosas las estrellas? —pregunta el viejo como si adivinara mis pensamientos.

— Claro que lo son —contesto con la mayor naturalidad.

— Cuando yo tenía tu edad, me gustaba mucho mirarlas y me hacía muchas preguntas acerca de ellas. Cuando en la escuela me enseñaron las constelaciones, disfrutaba mucho encontrarlas en el cielo. ¿Puedes reconocer alguna constelación?

— La verdad es que no recuerdo los nombres ni las figuras de ellas —contesto un poco apenado por mi ignorancia.

— No te preocupes —dice el viejo al sacar de su maleta un pequeño libro de constelaciones—. Toma, aquí encontrarás el nombre, la historia y la figura de las más importantes.

Tomo el pequeño libro y lo abro al azar. En la hoja está descrita, y dibujada, la llamada 'virgo'. Mi emoción es mucha pues, precisamente, es mi signo zodiacal. La busco en el cielo pero no puedo encontrarla. Mi nuevo amigo se da cuenta de esto y me explica cómo ubicarla. También me dice que esta constelación está situada al norte del ecuador celeste y que su representación, normalmente, es por una doncella con un haz de espigas. Mi amigo me explica que en la antigüedad fue el símbolo de la fertilidad o de la cosecha. A partir de hoy, puedo tener un pasatiempo muy entretenido, observar el cielo para tratar de encontrar las agrupaciones de estrellas que vienen descritas en el libro que me acaban de regalar.

El tiempo pasa muy rápido cuando se tiene algo que hacer. Me doy cuenta de que ya es muy tarde y me despido del viejo. Le digo que tengo que llegar a mi casa. Él continúa acostado sobre el pasto, mientras yo me alejo satisfecho por haberlo conocido, bueno, no, mejor debería decir por haberlo encontrado, porque después de lo platicado, no me atrevo a decir que lo conozco. Llego a mi casa y mis hermanas ya están dormidas. Me meto a mi cuarto y me invade un sueño placentero.

Son las diez de la mañana y apenas me he levantado. Jamás antes me había acostado tan tarde. Ahora me siento cansado, con sueño, pero satisfecho de la manera en cómo usé mi tiempo. Voy a la cocina y veo que mis hermanas toman el desayuno. Me uno a ellas y

me sorprende lo bien que platicamos. Esta satisfacción interior, por la plática de ayer, ha hecho que mi estado de ánimo sea distinto, al menos, con mis hermanas. Estoy más dispuesto a tolerarlas y puedo platicar con ellas de cosas que para mí no tienen importancia. Me doy cuenta de que puedo pasar un rato agradable con ellas y esto me reconforta mucho. De niños jugamos, pero llegó un día que ya no lo toleré. No sé cuánto dure esto pero lo quiero disfrutar. A medio día me meto a bañar, siento necesidad de hacerlo con agua fría y me sorprende lo bien que se siente. Creo que algo verdaderamente ha cambiado en mí. Escucho el clásico silbato del cartero y sé que ha llegado correspondencia a mi casa. Seguro mi mamá ha recibido noticias de su prima que vive en otro país. Mi papá siempre le dice que sería mejor que le escribiera por correo electrónico, que es más rápido y seguro, pero mi mamá dice que no, que ella no está para esas cosas y prefiere las cartas tradicionales. Yo apoyo a mi mamá, pues aunque tengo presente las ventajas del e-mail, me agrada más tener entre mis manos una hoja que la otra persona escribió de puño y letra. Mi tía y mi mamá se escriben mucho y a mí me ha dado curiosidad por conocer ese lejano lugar. Uno de mis sueños es visitar otros países, personas y culturas. Espero algún día se haga realidad. Salgo de bañarme y me encuentro con un sobre en medio de mi cama, al centro sólo viene mi nombre: Jorge. ¿Quién me pudo haber escrito? No conozco a alguien que lo haga y dudo si abrir o no la correspondencia. La curiosidad me mata. Así que me visto rápidamente, me siento frente al escritorio y rompo el sobre para sacar el contenido. Por un momento, me siento una persona importante, al recibir correspondencia, sentado en una oficina y con el tiempo ocupado. Al fin leo lo siguiente:

Pequeño amigo,

Es un gusto haber platicado contigo el día de ayer. Desde vi que entraste al museo, supe que podías ser buen compañero para discutir sobre temas interesantes. De inmediato noté esa semilla de curiosidad que marca a algunas personas, así que decidí probar qué tan dispuesto estabas a dejarla florecer. Con gran gusto me dí cuenta que te gusta aprender y que tienes muchas inquietudes que debes resolver. Me gustó platicar contigo y cuando quieras compartir algo, sólo basta que lo pienses intensamente para que se produzca un encuentro.

El día de ayer no quedó algo resuelto, tan sólo platicamos de cómo concibió Platón la noción de conocer. Ahora ya sabes que muchas personas se han dedicado a pensar

y que no te debe dar miedo tener estas inquietudes. Una cosa importante es que Platón estaba convencido de que el conocimiento se puede alcanzar. ¿Cómo? Por medio de la razón. Ya vimos que no es con los sentidos o la experiencia. Entonces, él afirmaba que el punto más alto del saber es el conocimiento, porque concierne a la razón en vez de la experiencia. La razón, utilizada en forma debida, conduce a ideas que son ciertas. El resultado de este proceso racional es lo que él llamó los universales verdaderos, es decir, la verdad. Para Platón, el conocimiento debe tener como objeto, lo que es, es decir, no la apariencia porque lo real es algo que tiene que ser fijo, permanente e inmutable. Pongamos el ejemplo del árbol en tu clase. Dices que el color del tronco lo percibieron como café claro, café oscuro, gris oscuro, etc. Realmente el árbol tiene un color específico que se puede llegar a conocer por medio de la razón, si la usamos adecuadamente. Vamos a llegar al verdadero color del tronco del árbol, no importa como lo perciban las personas por medio de los sentidos o de la experiencia. El mismo razonamiento lo podemos aplicar al pájaro. Los sentidos sólo nos van a dar una aproximación de lo que en verdad es, pero una vez que usemos la razón, de manera apropiada, podemos decir que es, por ejemplo, una calandria, azul, que se alimenta de semillas, tiene un ciclo de reproducción de tal manera, vive tantos años y demás características que hacen que conozcamos al ave. Así que, para llegar al conocimiento, el más alto nivel del saber, es necesario usar la razón. Esto no quiere decir que este camino sea fácil, hay que trabajar mucho para alcanzarlo y no siempre se logra totalmente. Los sentidos y la experiencia tan sólo dan una aproximación a la realidad.

Tu amigo, Teodoro.

Ahora ya sé cómo se puede llegar a conocer algo: a través de la razón. También sé cómo se llama mi nuevo amigo, Teodoro. Aún no se me pasa la emoción por la carta. Es la primera vez que alguien me escribe y me da gusto que haya sido para decirme cosas que a pocos le interesan. Algo nace dentro de mí. Por un lado, me siento satisfecho de poder conversar con el viejo de algo que no sea común; pero, por otro lado, me siento más alejado de mis compañeros. El recuerdo de mi amigo extranjero me invade con más fuerza. Lo envidio por su capacidad para involucrarse en muchas cosas a la vez. ¿Por qué le interesaban los juegos tontos de los demás y también aspectos más interesantes como el alma, la conciencia o los pensamientos? Muchas veces me preguntaba sobre un tema específico y no sabía que contestarle, tan sólo emitía una opinión sin fundamento y me limitaba a escuchar todo lo que decía. Es por eso que me caía tan bien; claro, en los momentos que se dedicaba a

pensar, analizar y hablar. Aunque no todo fue agradable. Un día al grupo le dio por burlarse de mí por tropezarme y caerme en medio del salón. Para mí, un hecho así, no tiene la menor importancia; sin embargo, los demás lo tomaron para reírse a costa de esto. Pero lo que más me sorprendió, y molestó, fue que mi amigo también lo hiciera. Incluso de él salieron las bromas más tontas y vulgares que he escuchado. Por supuesto que estuve enojado con él la tarde siguiente que me habló sobre la guerra, ya que pareció no importarle y tan sólo se dedicó a dialogar con alguien que no le correspondía. Nunca entendí esa actitud, creo que jamás la entenderé. Cuando le reclamé, sólo me dijo como si no le importara: ‘La maldad es muy fácil de realizar y tiene infinitas formas de llevarse a cabo’, tal como lo dijo Blaise Pascal. Pero como yo insistí en el tema, me dio una pequeña cátedra de lo que es la maldad, concluyendo que él no había sido malo, sólo utilizó, tal vez de manera inconsciente, una de las formas de este concepto que tanto causa asombro y enojo a la sociedad. Como siempre, no entendí del todo sus palabras, pero disfruté ese discurso que hizo olvidar mi estado de ánimo y perdoné de inmediato a mi amigo.

¿Por qué las personas tienen intereses tan variados? Es evidente que esto es algo bueno, pero me pregunto por qué por ejemplo, algunos se dedican a la música, otros a dar clase, otros a trabajar la tierra, etc. Cada persona tiene intereses y actividades distintas y eso me parece acertado, aunque no sé por qué actúan así los seres humanos. Esto lo he notado hasta en los animales. Los perros, por ejemplo, tienen ‘personalidades’ distintas: unos son muy juguetones; otros muy huraños; otros les da por la flojera y quieren dormir todo el día, etc. Esto se me hace algo muy interesante y ya está anotado en mi libreta.

Otra vez salgo a caminar por las calles empedradas. Como es sábado, están llenas de turistas que toman toda clase de fotografías. Siento un poco de remordimiento por dejar a mis hermanas solas en la casa; de alguna manera me siento responsable de cuidarlas, nadie me lo pidió pero es algo que simplemente se siente. Este viaje de mis padres resulta de lo más productivo: conocí a mi nuevo viejo amigo Teodoro; supe de las ideas de Platón; cambió mi visión con respecto mis hermanas; y, me siento más maduro y responsable. Mi amigo extranjero decía que nada es casualidad, que cada cosa que pasa es para un fin específico. Ahora empiezo a entender esto y creo que tenía razón. Al parecer, todos los eventos que he vivido en las últimas horas, no tienen una relación, pero tal vez la tienen más fuerte de lo que creo y me llevarán a cosas mucho más interesantes. Es como si en

estas últimas horas, despertara a otro mundo, un mundo antes inalcanzable y superior. No lo sé, tal vez sea mejor no pensar en estas cosas, mejor disfrutar de estos momentos, ya sea de aprendizaje o el sentir esa opresión por no tener amigos. Ya lo decía el extranjero, se debe disfrutar cada cosa que se haga, sea lo que sea. ¿En verdad es posible lograrlo?

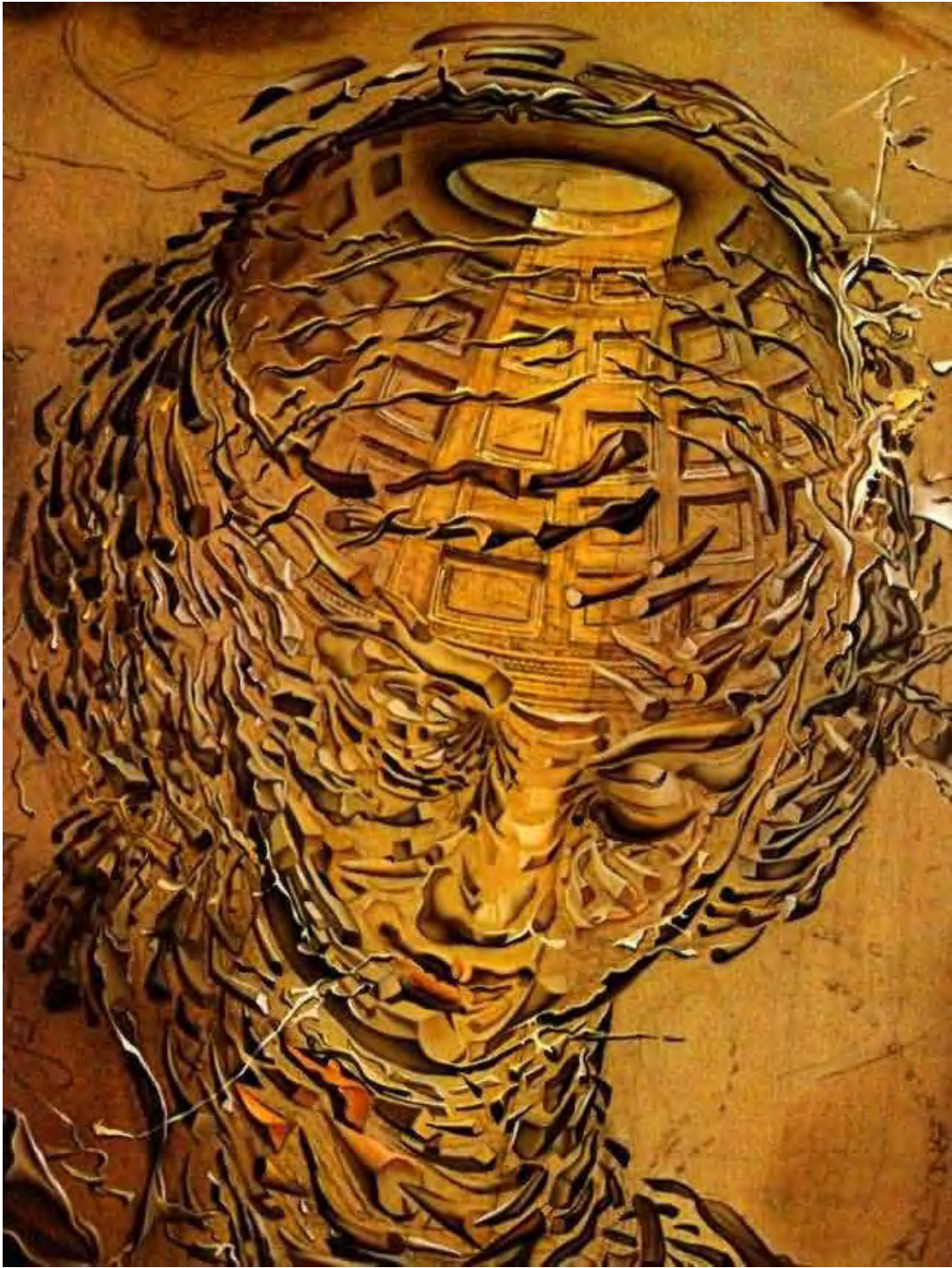
Unas voces desconocidas para mí, me vuelven a la realidad. Cuando era más chico, ese era mi pasatiempo preferido: escuchar los diferentes idiomas que hablan los turistas y adivinar lo que decían. Me doy cuenta de que aún me entretiene esto, pero ahora me gustaría saber exactamente lo que dicen, no por el contenido, más bien por entender sus pensamientos. Algo me dice que nunca se termina de aprender. Tan sólo bastaría tratar de asimilar todos los idiomas de todos los países del mundo, para darse cuenta de esto. Lo verdaderamente interesante, creo yo, es estar seguro de lo que se quiere y hacerlo. Por ejemplo, ayer platicamos acerca de lo que dijo un hombre con respecto al conocer, pero, según me dijo mi amigo, han existido otras personas que han aportado algo. Si tratara de estudiar lo que todos dijeron tal vez nunca terminaría. Qué problema: tanto que aprender y hacer y tan poco tiempo que vivimos.

Tengo ganas de ver a mi amigo Teodoro. Recuerdo las palabras de la carta y me dirijo al lugar que lo conocí. Entro y se encuentra en la misma postura, con la misma expresión, la misma ropa y la misma mirada. No sé si acercarme, tal vez esto sea algo importante para él y no deba interrumpirlo. Decido esperarlo afuera. Salgo del edificio y me entretengo con unas palomas que comen lo que les avienta la gente. Pasan veinte minutos y comienzo a desesperarme. Me dan ganas de entrar, sentarme a su lado, en el piso, y empezar a platicar con él. Volteo la mirada hacia el sur y veo su figura que se aleja, da pasos cortos pero seguros. No camina lento ni rápido. Pareciera que no lleva prisa, pero que no quiere perder tiempo. Siento una opresión en el pecho y no sé qué hacer. Tal vez me vio y decidió alejarse porque le aburre platicar conmigo, o tal vez ni se percató de mi presencia y me busca por todo el pueblo. No soporto cuando las dudas me invaden de esta manera. Por un lado, quiero correr tras de él; pero, por el otro, no quiero importunarlo. Alguien ya me lo dijo, ‘deberías ser más seguro de ti mismo y así evitarías muchos malos ratos’. Tal vez esta persona tenga razón. Lo malo es que no sé cómo actuar: si correr en busca de mi nuevo viejo amigo, u olvidar todo esto y volver a la soledad de mi cuarto. Con un impulso me decido por la primera opción y en unos minutos camino junto a él. No me dice nada, tan

sólo voltea a verme y su mirada me reconforta. Es la misma mirada que me hace pensar y expresar mis ideas. Llegamos al final del pueblo y él continúa su camino. Siento que debería seguirlo, pero mis padres me han dicho que no me adentre en el bosque, que en él hay muchos peligros para una persona de mi edad. De nuevo dudo qué hacer pero recuerdo que, en una ocasión, mi padre me dijo: Sólo podrás visitar el bosque si lo haces acompañado de un adulto de confianza. Claro que a Teodoro no lo conozco mucho, pero le tengo confianza. Además ya es hora de no hacer siempre lo que se dicta en mi casa.

Después de caminar alrededor de media hora, llegamos a una pequeña cabaña en medio de muchos árboles y cerca del río. Es extraño porque un lugar parecido lo había soñado en alguna ocasión. El interior de la cabaña es muy austero, en la habitación que nos encontramos, tan sólo hay un escritorio, un sillón que parece bastante cómodo, muchos libros, cuadros que jamás había visto y un buen número de hojas con apuntes por todos lados. De cada una de las paredes cuelga, al menos, un cuadro interesante y de formas misteriosas. Todos ellos atraen poderosamente mi atención, deseo acercarme a cada uno para observarlos por mucho tiempo, pero me abstengo de hacerlo porque no tengo la confianza suficiente. Aprovecho un momento en que el viejo va a la cocina por unos vasos con agua, para mirar el más cercano sin aproximarme mucho. Creo que este dibujo fue concebido para disfrutarlo de lejos, pues me doy cuenta de que está formado por pequeñas figuras parecidas a trozos de madera, y juntas forman la cara hueca de una mujer, con los ojos cerrados, un círculo en la cabeza en el que le entra algo así como una luz que le atraviesa la frente, nariz, boca y cuello. Me da la impresión de que su cabeza explotó por la luz que le llega de arriba. Parece que el fondo es lo mismo que la cara, que ésta sale de las paredes y que en cualquier momento todo va a desaparecer hasta quedar sólo una superficie irregular, con figuras que no forman ninguna mayor. Para entender el cuadro hay que verlo completo, de lo contrario pierde el sentido y la función que tiene cada pequeña pieza de madera para formar un todo. Este dibujo es muy atrayente y a la vez causa vértigo. No estoy acostumbrado a ver esto, es decir, que miles de piezas que parecen sin sentido, se agrupan sin tocarse para formar una figura totalmente definida. Me pregunto quién pudo haber pintado esto y para qué. ¿Quién es la mujer que está representada de esa forma tan extraña? ¿Por qué el artista usó esta técnica que me causa admiración, una especie de

vértigo y ganas de alejar mi vista, pero a la vez desear ver esas extrañas líneas? Sus ojos, sobre todo sus ojos.



Salvador Dalí, *Galatea de las esferas*.

A pesar de los cuadros, o tal vez por el mismo motivo, se podría decir que todo está en perfecto orden, de no ser por las pequeñas hojas que tienen letras escritas, al parecer, con prisa. En general, el ambiente es agradable y me gusta el lugar. Teodoro regresa con la bebida, toma asiento en el suelo y yo lo hago en el gran sofá. Después del largo silencio no sé qué decir, me imagino que él va a explicar el porqué de su comportamiento pero no es así, tan sólo me mira y me pregunta con la mayor naturalidad del mundo:

— ¿Cómo estás?

— Bien —respondo por costumbre y con sorpresa por su actitud poco común.

— Yo muy bien —dice él como si fuéramos amigos de toda la vida—. Recuerdo que te preguntabas sobre los elementos que son necesarios para llegar al conocimiento de algo. Se me vienen a la mente cuatro y te los quiero compartir para ver qué opinas de ellos, si los adoptas o les hacemos algún cambio.

¿Algún cambio? Esta oración me desconcierta mucho, a pesar de que veo al viejo como un amigo, también lo percibo como una persona que sabe más y que me puede ilustrar con sus palabras. De alguna manera, lo veo como a un maestro en el sentido de enseñanza, no como los de la escuela, sino más bien como un portador de conocimiento que desea compartirlo. Así que la posibilidad de juzgar lo que me vaya a decir me resulta algo nuevo, interesante y un tanto incómodo, por la responsabilidad. Sí, la responsabilidad en cuanto a que tengo que opinar. Así que debo poner mucha atención y no sólo escuchar palabras que no representan nada para mí, como en la escuela. Pero, ¿no es esto lo que siempre había querido? Una enseñanza donde se discuta, donde se opine, donde las dos partes pongan de sí para llegar a verdades. Ni yo mismo, a veces, logro entenderme. Tengo que terminar con esta inseguridad que me invade.

Creo que Teodoro ha notado todos estos sentimientos. Comenzó su rostro con una pequeña sonrisa, pero ahora ya es una carcajada. No la siento como burla, más bien como entendimiento de lo que me pasa. Al final sigue su conversación como si nada.

— Pues bien mi pequeño amigo, hay, al menos, cuatro elementos que son claves para llegar al conocimiento de algo o alguien. Mientras más información se tenga de estas cuatro causas, mejor se conoce algo. Estas cuatro causas van en orden lógico y tú me darás la razón. Si, por ejemplo, vas a comprarte un par de zapatos, ¿que es lo primero que consideras para escogerlos?

- Que me gusten —menciono sin entender del todo lo que me quiere decir
- Muy bien, no vas a ponerte algo que no te gusta. Pero que algo te guste o no, nada aporta para llegar a su conocimiento. Ya que te gustaron, ¿qué otra cosa consideras?
- Pues el material de que están hechos, no es lo mismo unos tenis de piel que de tela.
- Muy bien. aquí tenemos la primera causa clave para acceder al conocimiento, es decir, la *causa material*. Esto significa que debemos de ser capaces de explicar la materia de la que está compuesta un objeto. Es una causa un tanto fácil de saber: tus zapatos están hechos de tela; mi cinturón de plástico; ese vaso de allá de vidrio y así todos los objetos. Cada cosa tiene su materia de la que está compuesto.
- Eso suena bastante lógico —digo al comprender perfectamente de lo que se trata—. Todas las cosas están hechas de algo, si conocemos la materia prima, accedemos un poco al conocimiento verdadero. Espera, dijiste que hay cuatro causas, pero si yo conozco de que está hecha una cosa me basta para conocer un objeto, ¿no? ¿Qué otra cosa se puede conocer de algo?
- Aquí es donde entra la segunda causa, llamada *eficiente o motriz*.
- ¿Qué significa motriz?
- Literalmente significa que se mueve. Así que esta segunda causa es la fuente de movimiento, generación o cambio.
- ¿Cómo se explica esta causa en el ejemplo de mi zapato? Mi zapato no se mueve por sí sólo, ¿o sí?
- Claro que no. Pero te dije que esta causa es la fuente de movimiento, generación o cambio. En tu zapato lo podemos pensar como aquello que lo generó, es decir, la o las personas que lo hicieron. Saber esto nos acerca más a tu zapato, en el sentido de conocer. Si primero conocemos de que está hecho, ahora quién lo hizo, quién lo generó, pues tenemos más información de él, ¿no crees?
- Creo que sí, pero, ¿realmente nos sirve conocer quién lo hizo para conocer al zapato en sí?
- Por supuesto, recuerda que son cuatro causas y que en conjunto nos van a dar un conocimiento global. No las analices por separado. Mejor exploremos las dos que aún faltan y las analizamos en conjunto. La tercera es la llamada *causa formal*. Esta se refiere a

la especie, tipo o clase, es decir, formalmente por lo que algo existe. ¿cuál sería la causa formal de tu zapato?

— La verdad no le entendí bien a esta causa. ¿Es lo que le da sentido al objeto?

— Es más bien la clasificación que se hace del objeto. Los zapatos que traes están hechos para que corras con ellos, se crearon para hacer ejercicio, no los vas a usar en una ceremonia cívica en la escuela. Entonces la causa formal es ser ‘tenis’. Es una especie de clasificación del objeto que se conoce, ya veremos más ejemplos. Por último tenemos, precisamente, la *causa final*. Este es el objetivo o meta del objeto, o la función planeada de una construcción o un invento. Tus tenis están hechos para correr, es el objetivo para el cual fueron creados, por tanto, es la causa final. Vamos a recapitular, tenemos tus zapatos y los queremos conocer por medio de estas cuatro causas. La material es que tus zapatos están hechos de tela; la eficiente o motriz es saber quién los creó, quién los hizo; la formal es que están clasificados como tenis y no como, por ejemplo, botas; y, la final es que están hechos para correr. La noción de estas cuatro causas es la clave para acceder al conocimiento, mientras más información específica, y no general, se tenga de cada causa mejor se llegará al conocimiento de las cosas, objetos o personas.

— Entonces, ¿esto no sólo se aplica a los objetos? ¿También sirve para persona o animales?

— Por supuesto que sirve, veamos el ejemplo que teníamos del pájaro, ¿lo recuerdas? Imagina que tienes un pájaro, identifica cada una de las causas que te he mencionado.

— Muy bien —contesto esforzándome para poner todo el cuidado para esta tarea—. Tenemos un pájaro y no sabemos nada de él. Lo primero que tenemos que conocer es la causa material, hay que saber de qué está compuesto este pájaro. ¿Cuáles son los elementos de un ave?

— Digamos que es la materia prima. Por ejemplo, un vaso puede estar hecho de vidrio, plástico, barro, etc. Un ave, ¿de qué está hecha?

Para no decir una respuesta incorrecta pienso muy bien y me imagino un pequeño pájaro en mis manos. Lo primero que vería serían plumas, un pico dos patas y demás. Pero esto se refiere a la materia prima, así que me imagino la carne del animal.

— Pues está hecho de plumas, carne, corazón y demás órganos.

- Así es, la causa material es que está compuesto de plumas, tejidos y órganos.
- Pero esto no es nada fácil de conocer. Se necesita a un experto para darnos esta información más detallada.
- Nadie dijo que fuera fácil —responde Teodoro—, recuerda que mientras más información se tenga, mejor se conoce una persona, objeto o cosa. En teoría esta es la causa material. Se necesita todo un proceso para saberla y personas que se dediquen a eso. Al menos en el ejemplo de este animal. Ahora dime, ¿cuál es la segunda causa?
- Es la eficiente o motriz, es la fuente de movimiento, generación o cambio. Si entendí bien es quién le dio vida el pájaro, es decir, sus padres, ¿estoy bien?
- Muy bien, la causa motriz, en este caso, son los padres del animal, quienes lo generaron, lo crearon.
- Para conocer la causa formal es necesario saber cómo se clasifica el ave, es decir, si es un gorrión, canario, cotorro, etc.
- Veo que has entendido muy bien, ya sólo te falta la última.
- Dijiste que la causa final es el objetivo o la función que tiene. La verdad no sé cuál sea el objetivo de un ave, pero me imagino que está relacionada con el tipo de pájaro que sea. Si es un perico tiene una función diferente a si es cotorro o gorrión.
- En general sí, pero en este caso la función de cualquier especie animal o vegetal, en general, es cumplir con su ciclo natural, es decir, nacer, crecer, reproducirse y morir. Así lo podemos resumir sin entrar en muchos detalles, pero como tú bien lo dices, cada especie tiene su función específica. Así que, si aprendemos más, más nos acercamos el verdadero conocimiento.
- ¿Esto se puede aplicar a cualquier cosa objeto o persona?
- A lo que tú quieras, aunque no siempre es fácil. Te invito a que lo hagas constantemente, esto te ayudará a comprenderlo más y asimilarlo.

Se hizo un silencio, pero no incómodo. Ahora me doy cuenta de que cuando dos personas se quedan calladas, no es que, necesariamente, se hayan aburrido o no tengan algo que decir; más bien, tratan de asimilar algunas cosas, como en este momento yo. Todo lo que me dijo, acerca de las cuatro causas, me parece bastante lógico. De repente me acuerdo de

Platón y de que para llegar al conocimiento se necesita la razón. Todo esto debe tener una conexión con la plática pasada, así que para llegar a ese tema pregunto:

— ¿Cómo es que se te ocurrió esto de las cuatro causas?

Teodoro soltó una de sus ya características carcajadas y, al final, dijo:

— Esto no se me ocurrió a mí. ¿Recuerdas a Platón? Pues él tuvo un alumno llamado Aristóteles que nació en el año 348 antes de nuestra era. Este también fue un gran sabio y pensador, de los más destacados de la antigua filosofía griega. Todo lo que te acabo de contar son ideas de este personaje. Siendo un adolescente entró a la academia de Platón a estudiar con él, donde permaneció muchos años. Después, también por mucho tiempo, viajó para conocer el mundo y, más adelante, se convirtió en maestro y sobresalió por sus grandes enseñanzas. Tan importantes fueron las cosas que dijo, que hoy se conservan muchos de sus escritos y se recuerdan muchas de sus ideas. Por ejemplo, él afirmó que ‘todo hombre, por naturaleza, desea conocer.’ Tal vez, por esto, es que se dedicó a investigar cómo se llega al conocimiento verdadero de las cosas.

— Así que maestro y alumno fueron grandes pensadores. Para Platón, se conoce algo por medio de la razón, ¿estoy en lo correcto?

— Así es, es lo que platicamos la otra ocasión.

— Pues en todo esto de las cuatro causas es evidente que se tiene que usar la razón. Se debe tener un proceso regido por la mente para conocer la causa material, eficiente o motriz, formal y final. Creo que Platón dijo algo importante y su alumno lo usó para ampliarlo.

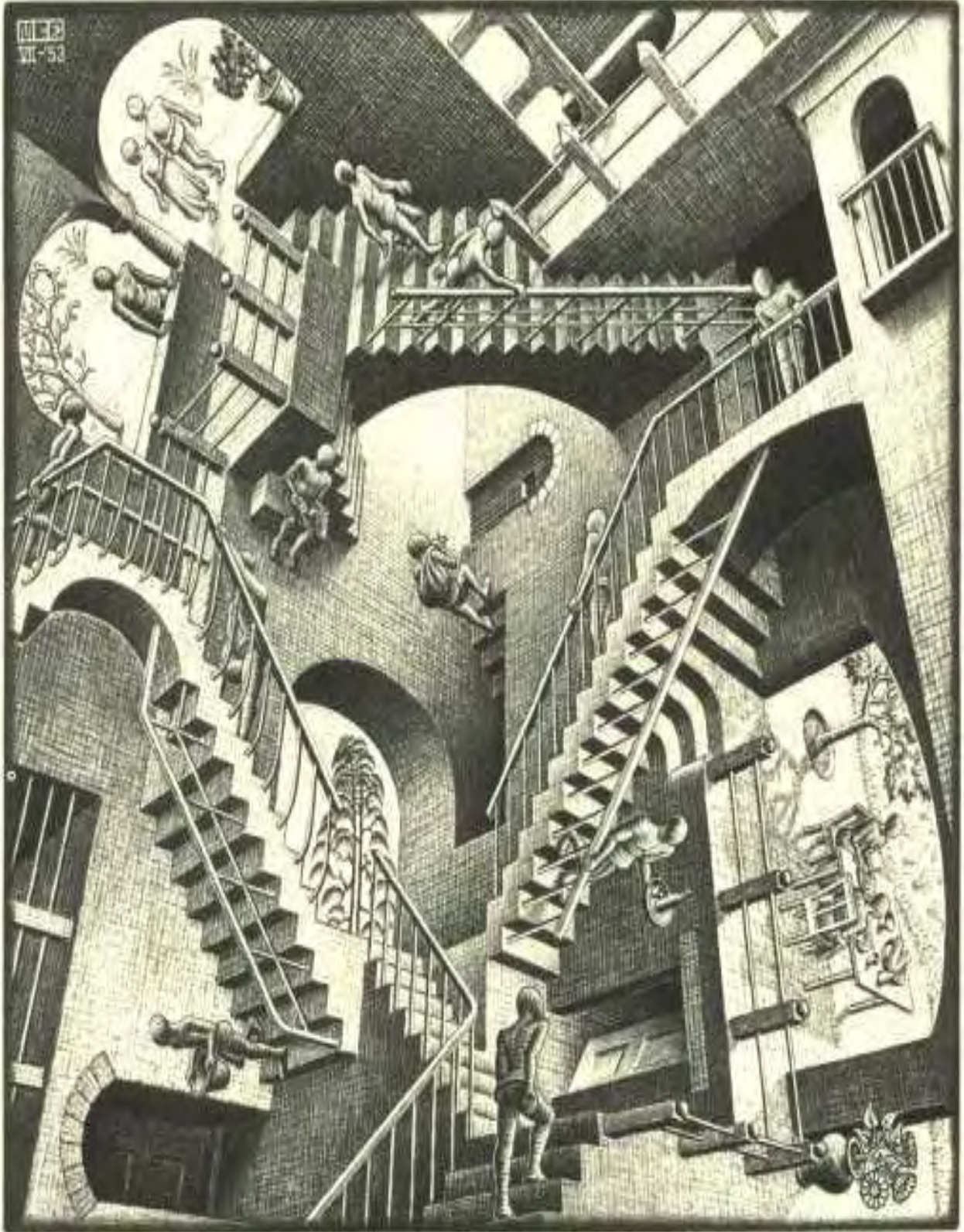
— Has identificado una conexión importante en estas dos teorías. Es evidente, como tú lo dices, que para conocer las cuatro causas se necesita de la razón. Como ya vimos, los sentidos no sirven para llegar al conocimiento de algo, ya sea para Platón o Aristóteles. Me da mucho gusto oír tu observación ya que hemos aprendido mucho los dos.

— Recuerda que también hay que tener ratos de esparcimiento —continuo Teodoro—, por eso te voy a dar un pequeño obsequio.

Al decir esto abrió una puerta al fondo de la habitación y la cerró tras él. Esto me da la oportunidad, ahora con más confianza, de mirar otro de los cuadros. En él se puede apreciar un extraño edificio con muchas escaleras y personas que suben y bajan por ellas. Me acerco y puedo ver que al final de la pintura se colocó una pequeña madera muy bien tallada con el

extraño nombre de Maurits Cornelis Escher. Supongo que es la persona que se le ocurrió dibujar estas escaleras tan peculiares. Hay algo en el cuadro que no está del todo bien. Me quedo mirándolo detenidamente y una sensación nueva, intensa, me invade. Es como si estuviera en alguna realidad distinta, otro mundo, otra dimensión.

Por fin, regresa Teodoro y me trae un pequeño saco color rojo con diez canicas dentro. Me explica que de joven le gustaba mucho jugar con esto y que me invita a hacerlo, que es muy divertido. No logro entender del todo este regalo, pero lo acepto por respeto y curiosidad. Le pregunto acerca del cuadro y me regala una copia del tamaño de una hoja de papel. Guardo todo esto y prometo regresar a verlo en cuanto pueda.



Maurits Cornelis Escher, *Relatividad*.

*Limitar es su naturaleza, infinito es su deseo, el
hombre es un Dios caído que recuerda el cielo.*
Alphonse De Lamartine

Capítulo 3

RODEADOS DE GIGANTES

Ya han pasado varios días sin ver a Teodoro. Mis padres llegaron de su viaje y nos trajeron algunos regalos. En general, me llevo mejor con mis hermanas, pero tengo la necesidad de tener un amigo. Pienso que Teodoro puede serlo, pero la diferencia de edad me hace dudar. Me gusta mucho platicar con él. Disfruto las conversaciones, es algo diferente, no lo había vivido antes. Tal vez debería de tener conocidos de mi edad, jugar con ellos a la pelota, pero también platicar de cosas más interesantes. No lo sé. Siempre he tenido problemas para tomar decisiones y ahora no es algo distinto, el solo hecho de considerar a Teodoro mi amigo o no. Algo que debe de ir en mi libreta es la definición de amistad, lo he intentado hacer pero el tiempo que tengo es realmente poco. Entre la escuela, los quehaceres que tengo que hacer en mi casa, la tarea y la contemplación del cielo en busca de constelaciones, me ha sido imposible escribir acerca de mis sensaciones.

¿Canicas? Tiene mucho tiempo que no juego con ellas. Hace algunos años lo hice y me divertí mucho, incluso, después de recibir este regalo, busqué las mías pero no las encontré de inmediato. La última vez que vi al viejo me dio un pequeño saco con diez

hermosas esferas de colores. Recuerdo las cuatro causas para llegar a conocer algo y las aplico a mi regalo. Los últimos días he realizado este ejercicio. Veo algo, objeto, animal o cosa, y trató de identificarlas, no siempre es fácil. En ocasiones me quedan muchas dudas pero me gusta hacerlo.

Hoy es el segundo sábado del mes y eso significa que vamos a ir al cine. Bajo a comer con la emoción de salir y mis hermanas ya están arregladas con sus mejores vestidos, bien bañadas, peinadas y listas para pasar una tarde familiar. Mis padres me reprimen por estar con ropa no adecuada; de mala gana subo a cambiarme y me pregunto el por qué de esta mala costumbre. Para mí da lo mismo ir cualquier lugar con una ropa u otra. Siempre he pensado que no importa lo que vistas. En este caso, vamos a ir al cine y lo mismo puedo disfrutar con mi ropa de domingo, el uniforme de la escuela o este pantalón que traigo puesto. Ahora ya no tengo ganas de salir, quisiera quedarme en casa para no tener que seguir con las costumbres que me tienen harto. Aún así me cambio, me peino y no me atrevo a decirles a mis padres nada de esto. Cuando sea grande y tenga hijos, no les voy a imponer nada. Voy a dejar que se vistan como deseen, que hagan lo que quieran y aprendan lo que más les guste. En alguna parte del mundo debe de haber una escuela que los deje ser libres y les enseñen de otra manera, la buscaré y ahí estudiarán mis hijos. Esta situación de incomodidad me recuerda el colegio, hay ocasiones en que siento que asistir a la escuela es sólo una pérdida de tiempo, que sólo nos mandan porque piensan que no tenemos nada mejor que hacer y los maestros sólo van por compromiso, que no están interesados y ni siquiera les gusta convivir con nosotros, es por eso que nos tratan tan mal y no nos enseñan cosas interesantes.

No puedo evitar el disgusto y se forma un ambiente tenso a la hora de la comida. Contesto de mala gana lo que me preguntan. Mi madre toma la actitud conciliadora y mi padre la de autoridad, enojado y severo. Estamos ante una clásica escena familiar. Llegamos al cine y ya no encontramos boletos para la película más popular, así que nos tenemos que conformar con una de origen polaco, con actores nada conocidos y una historia bastante extraña. Esto no me desagrada del todo, ya que me gusta ver cosas diferentes. Como es de esperarse la sala esta casi vacía, hay muchos lugares sin ocupar y esto nos da la facilidad de sentarnos como se nos antoje, es decir, mis papás juntos en una fila, mis hermanas en otra y yo alejado de todos. Faltan escasos minutos para que la función

empiece y entran más personas, al parecer son las que ya no alcanzaron boletos en la otra sala y se tienen que conformar con ver esta película de nombre extraño. Me entretengo cuando veo el comportamiento de las personas: todos estamos vestidos con nuestras mejores ropas, bien peinados y actuamos de manera similar. Me pregunto por qué pasa esto, es decir, ¿por qué si todos somos seres humanos distintos, nos comportamos tan parecido? Vamos a los mismos lugares, comemos como está marcado, hablamos igual, actuamos semejante y, al final, no nos diferenciamos de los demás. Por ejemplo, el otro día fui a la oficina donde trabaja mi papá. Sus compañeros son parecidos a él: se visten de corbata y saco; trabajan ocho horas; salen de su casa a la misma hora; van los sábados al cine; los domingos a misa; tienen hijos, esposa y, en general, tienen una vida muy parecida. Creo que si me cambiaran a mi familia por otra no notaría la diferencia; me regañarían; me mandarían al colegio; me traerían al cine; etc.

La función comienza y me percató de que una persona está sentada a mi lado. ¿Por qué si hay más butacas desocupadas tuvo que escoger este sitio? Siento el impulso de cambiarme de lugar pero, por alguna razón, no lo hago. No disfruto la película, pienso en miles de cosas menos en lo que está en la pantalla. Al parecer, la persona junto a mí tampoco la ve, saca unas pequeñas hojas de papel amarillas y escribe en ellas. Extiende la mano y me proporciona una. Siento ganas de correr fuera pero tomo lo que me da, lo observo y tan sólo veo una pregunta: ¿por qué hay tan poca gente en esta sala? Volteo y me doy cuenta de que se trata de Teodoro. Siento deseos de hablarle pero me pide silencio con el dedo índice sobre los labios. Me indica que conteste, dándome una pluma para escribir. En la pequeña hoja amarilla pongo mis impresiones, es decir, que las personas que están aquí sólo vienen porque no tienen algo mejor que hacer, que no encontraron boletos para la otra función y se conforman con ver lo que sea, les guste o no. Así iniciamos un diálogo, en silencio, por medio de estas maravillosas tarjetas.

— Que mal está esto, pequeño amigo —escribe el viejo—. Es la primera vez que vengo al cine en este lugar y se me hace extraño tal comportamiento. Esta película es muy buena y es la cuarta vez que la veo. Jamás pensé que en este lugar la pasaran. ¿Cuántas personas crees que haya en esta sala?

De inmediato me doy a la tarea de contar con la mirada pero me resulta casi imposible. Para eso me tendría que levantar, recorrer la sala y contar una por una a las personas. Aún

así, lo trato de hacer y llego al a conclusión que debe de haber alrededor de veinticinco, lo escribo y le paso una tarjeta al viejo con la respuesta.

— Tal vez tengas razón, pero veo muchos lugares que no están ocupados. Me pregunto, ¿cuál es la capacidad de la sala?

Tomo la tarjeta, la leo y ahora se me ocurre contar una por una las butacas, así que inicio este proceso. No avanzo mucho cuando una tarjeta de mi amigo me interrumpe, en ella dice que hay una manera más fácil de saberlo: que basta conocer cuántas filas hay, multiplicar este número por las butacas en cada fila y listo. El viejo tiene razón, es mucho más fácil hacer esto que contarlas una por una. Lo hago, le paso la hoja amarilla con la respuesta.

— Hice lo que me dijiste, en esta pequeña sala caben alrededor de sesenta personas.

— ¿Así que hay más butacas que personas en este momento?

— Claro, eso ya lo habíamos notado.

— ¿Cómo lo notamos? —pregunta el viejo por medio de las tarjetas.

— Pues es muy fácil, hay más butacas que personas, ya que sobran lugares vacíos. Si no hubiera alguna butaca vacía, entonces el número de personas y butacas sería el mismo.

— Por supuesto —escribe el viejo—. Dices que si a cada butaca le corresponde una persona y a cada persona una butaca, entonces el número es el mismo, si no pasa esto hay más elementos de una cosa o de la otra.

— Pues yo no dije exactamente eso, pero estoy de acuerdo.

— Y para averiguar si hay más butacas que personas ¿se tiene que contar ambas cosas?

— No lo creo, tan sólo basta ver si sobran o no lugares vacíos. Si sobran, hay más butacas; si no, entonces no, o hay las mismas personas que lugares o hay personas paradas.

— Me parece razonable lo que escribiste. Lo único que haces es una relación *uno a uno*, es decir, una persona con una butaca y una butaca por cada persona.

— Pero esta relación ya está dada —escribo—. Me imagino que los que hicieron el cine pensaron en eso, es decir, si hay sesenta butacas sólo caben, a lo más, sesenta personas sentadas. No creo que vendan más de ese número de boletos. Tan es así que en la otra sala

ya no cabe la gente. Allá, me imagino, ninguna butaca está vacía, cada persona tiene asignado un lugar.

— Pensemos que los administradores del cine son honestos y no venden más boletos —responde el viejo—. También supongamos que en la otra sala no hay nadie parado, ni sobran lugares vacíos. En este caso nos encontramos con una relación uno a uno, es decir que, como tú dijiste, cada persona tiene asignado un lugar, y cada lugar tiene asignada una persona. En ese caso se concluye que hay exactamente las mismas personas que butacas. Esto se puede aplicar para cualesquiera dos grupos de ‘cosas’, no importa de lo que se trate. Si es posible asignar un objeto del primer grupo, con un solo objeto del segundo y uno del segundo con sólo un objeto diferente del primero, entonces forzosamente debe de haber la misma cantidad en cada grupo. Esto lo has vivido en la vida diaria sin darte cuenta, es más, las personas lo hacemos sin estar conscientes de ello. Cuando estás en el salón de clases tu maestro comprueba, sin necesidad de pasar lista, si falta algún alumno. Lo único que hace es hacer una inspección visual, y verifica esta relación uno a uno. Es decir, relaciona cada alumno con una silla. Si hay lugares vacíos, se da cuenta de que alguien faltó ese día a su clase. Y lo mismo hace el director de la escuela. Día con día, no le interesa saber cuántos alumnos tiene el colegio, le basta con asomarse a cada salón. Si él sabe que todas las sillas deben de contar con un alumno y observa que algunas están vacías, suma las de cada salón para saber cuántos alumnos en toda la escuela faltaron a clase. Esto es algo muy práctico y natural en las personas, lo vemos en muchos lugares y con usos muy diversos.

— Ahora que lo dices yo también lo utilizo —escribo al recordar una anécdota—, en mi cuarto tengo un lugar en el que caben diez discos. Un día observe un espacio y de inmediato me di cuenta de que faltaba alguno. No tuve necesidad de contarlos para percatarme de la ausencia. Así que investigué y me di cuenta de que mis hermanas lo habían tomado.

— Así es. Esta relación nos facilita muchas actividades y nos ayuda a tener un mejor control de las cosas. Si observas a las personas, te darás cuenta de lo que digo. Por ejemplo, en las tiendas tienen lugares asignados para cada producto y saben cuántos caben. Si ven un espacio vacío de inmediato lo llenan o compran más para suplirlos. Así que en muchos casos, no te interesa la cantidad de elementos con precisión o exactamente, tan sólo

saber si hay los mismos que en otra agrupación. Hasta en los niños pequeños encontramos esto. Si juegan a las canicas no les interesa cuántas tienen, más bien les interesa saber que tienen más que los demás. Lo único que hacen es, de nuevo, esta relación uno a uno, las comparan con las de sus amigos y así saben quién tiene más. Recuerdo que esto me pasó cuando tenía cinco años. Había un vecino con el que jugaba todas las tardes. Él decía que tenía más canicas que yo, pero como no sabíamos contar, se nos ocurrió ponerlas formadas en el suelo, cada quien las suyas pero las filas muy juntas para no perder el control y poder compararlas. Cuando él terminó con sus canicas, yo todavía tenía dos o tres en mi bolsa, así que nos dimos cuenta de que yo tenía más porque al ponerlas en correspondencia uno a uno, a mí me sobraron. Claro que su papá le compró más y me superó, pero lo importante fue que sin contarlas, nos dimos cuenta de quién tenía más.

Pienso en esto y me suena bastante lógico. Mis papás también lo hacen para, por ejemplo, saber si mis hermanas pierden los lápices de colores que ellos les compran. Les dieron un estuche con veinticuatro espacios, en cada uno debe de ir un solo color. Cada fin de semana les revisan los útiles. Les basta ver este estuche para ver si no han perdido nada. No cuentan uno por uno, simplemente ven si todos los lugares tienen su respectivo lápiz para colorear. Por supuesto que conmigo no lo hacen, ¡jamás lo aceptaría! Y, ahora que lo pienso, mi amigo tiene razón, en la vida se usa esto más de lo que me había dado cuenta. Los cepillos de dientes, en el baño de mi casa, tienen asignado un único lugar, si hay espacios vacíos se puede saber que faltan cepillos. En los autobuses para viajar se hace lo mismo con los boletos que venden y los lugares que tiene el camión. Si hay treinta asientos, únicamente se venden treinta boletos, es decir, hacen esta relación uno a uno. A cada boleto se le asigna un lugar y a cada lugar un solo boleto. Es algo tan común y no me había dado cuenta. Las personas no cuentan todo, en lugar de eso hacen esta relación tan sencilla y útil y se facilitan la vida. Estos ejemplos que pensé son fáciles, pero, ¿habrá conjuntos de cosas tan grandes que sea imposible contarlas pero se pueda usar esta útil correspondencia?

Ahora me surgen muchas dudas, pero no se las comento por dos cosas. Una que me gustaría pensarlas para tratar de resolverlas, y otra que no quiero hacerlo por medio de las tarjetas. Mejor esperaré que estemos en otro lugar más apropiado. Además, miles de preguntas surgen en mi cabeza, quiero ponerlas en orden para poder preguntarle a mi

amigo. Así que trato de poner atención a la película, pero me es imposible. Como de mis palomitas de maíz y de inmediato me pregunto qué tanto las puedo conocer y la cantidad que hay en la bolsa de papel. Así que les aplico los cuatro elementos de conocimiento y me imagino el método para contarlas. Si estuviera en mi cuarto las vaciaría en la cama y simplemente las contaría. Teodoro ya no me escribe, y ahora somos como dos extraños juntos en un cine. Como la película ya no me interesa, recorro a lo que más me entretiene; observar lo que hay a mi alrededor y pensar en los objetos y situaciones que hay en mi entorno.

Termina la función y pierdo de vista al viejo. Me integro con mi familia que elabora planes para más tarde. Tengo ganas de decirles que me dejen ir, que necesito buscar a Teodoro pero no me atrevo. Así que me limito a escuchar lo que ellos opinan. Mis hermanas quieren regresar a la casa para ver la televisión. Mis padres quieren que todos cenemos juntos y yo quiero que me dejen ir. Al final la balanza se inclina por regresar al hogar. Así que me armo de valor y les pido que me dejen caminar por las calles, que últimamente no me he sentido bien y que necesito del aire fresco de la noche. Ellos discuten mi proposición. Mi madre se inclina por dejarme, pero expresa sus temores de que ande solo por las calles en la oscuridad. Mi padre dice que eso me haría bien dado el carácter grosero que he mostrado últimamente, pero por lo mismo que no merezco ninguna consideración. Me siento totalmente ajeno a mi familia, con otras ideas, inquietudes y visión de lo que debe ser la vida. Por fin, deciden dejarme caminar, con múltiples condiciones que acepto más que por convicción, por interés. Son las siete de la noche y me dijeron que tengo que estar en casa a las diez, que si llego aunque sea un minuto tarde jamás me vuelven a dar un permiso.

Ahora camino por las calles y pienso en el lugar donde puedo encontrar a Teodoro. Sin tener plena conciencia, me dirijo a la grandiosa catedral. El cielo ya muestra múltiples estrellas y eso me pone muy contento. Dejo que mis pasos me guíen con la mirada vuelta hacia arriba. Sólo espero no chocar con nadie ni caerme. Recuerdo que de chico esto constituyó, por un tiempo, mi pasatiempo. Salía con mi mamá agarrado de su mano, alzaba la cabeza y trataba de contar las estrellas. Al principio, ya no me sabía más números, pero luego ya no me alcanzaba el tiempo. Siempre había más y más estrellas que contar, nunca terminé de hacerlo pero sí con dolores de cuello por la posición. Sin percatarme, estoy en

una calle algo oscura, poco transitada y, según dicen, un tanto peligrosa. No dejo de contar puntos luminosos del cielo pero con mucho trabajo; hay zonas en donde se agrupan muchas estrellas y es imposible diferenciar una de otra. Definitivamente no puedo hacerlo, además de que se juntan muchas en algunos sectores y no sé cómo ordenarlas, es decir, llega un momento en que no sé si ya conté una o no.

— ¿Cuántas son? —pregunta una voz desde la oscuridad acompañada de una figura que se acerca hacia mí.

De pronto siento miedo, no debí de haberme metido por aquí. Aunque creo que es Teodoro pero no estoy seguro. ¿Quién más me puede hacer una pregunta de ese estilo? Vacilo un poco sin saber si dar media vuelta y echarme a correr, o quedarme ahí para ver quién es. Hago lo segundo porque el tiempo me gana, la luz tenue de la lámpara ilumina, en efecto, el rostro de mi nuevo viejo amigo.

— ¿Qué haces por estos lugares tan solitarios? —pregunta el viejo para iniciar conversación y parece olvidar la pregunta inicial.

— Pues me puse a contar las estrellas y simplemente me dejé llevar.

— Eso esta muy bien, pero debes de tener cuidado, ¿acaso tus papás no te han dicho que no debes caminar por esta zona?

— Si me lo dijeron, pero no lo hice intencionalmente.

— Está bien —responde él con un tono más amable—. Y por cierto, ¿cuántas estrellas tiene el cielo?

— No lo sé, me resulta imposible contarlas todas. No sé como hacerlo.

Mientras le explico esto, caminamos de regreso al centro del pueblo. Nos sentamos en una banca del parque, y nos ponemos a conversar animadamente. Él se interesa en el hecho que yo contara las estrellas. Me pregunta al respecto y le cuento mi afición desde pequeño.

— Yo hacía esto todo el tiempo —explica Teodoro—, recuerdo que desde que me enseñaron los números en la escuela, quería contar todo lo que veía.

— A mi me pasó lo mismo. Desde que mi maestro me enseñó a contar, lo hacía con todo lo que encontraba a mi paso, desde las personas, animales, árboles, plantas, etc., hasta que me quedé con las estrellas. Tal vez esto no les gustaba a mis padres, pues tenían que soportar todo el día escuchar los números una y otra vez.

— Pero te toleraban porque eres su hijo y te deben de querer mucho, ¿no crees?

— Claro que sí —digo sin estar convencido, últimamente siento que no les intereso y que soy una carga para ellos.

— ¿Recuerdas las canicas que te regalé? —pregunta mi amigo como si supiera que ese tema me pone triste.

— Por supuesto, las puse dentro de una botella junto a otras, las que usaba cuando era pequeño. En ocasiones, cuando pongo el frasco contra la luz, puedo observar una gama extraordinaria de hermosos colores, entonces me dan ganas de tener más y más canicas, de ser posible, todas las que existan en el mundo. Así tendría una colección única en todo el universo.

— ¿Todas las del mundo? ¿Tienes una idea de cuántas canicas hay en todo el mundo?

— No, la verdad jamás me he puesto a pensar en eso. Pero me imagino que son muchas, tantas que tal vez no se puedan contar.

— Puede ser que tengas razón. Las tuyas, ¿las pudiste contar?

— Claro que sí, son muy pocas y es muy sencillo.

— Y, ahora, imagina los niños de tu escuela que tengan alguna colección parecida a la tuya. ¿Crees que cada uno de ellos pueda contarlas?

— Por supuesto que sí. Algunos se van a tardar más tiempo que otros, pero todos lo van a poder hacer. Cuando iba a la primaria, había un niño en el salón que tenía como quince bolsas llenas. Un día el maestro le preguntó que para que quería tantas y él contestó que le gustaba coleccionarlas. Entonces, el profesor le preguntó que cuántas tenía. Él se quedó serio y dijo que no sabía. Después nos contó que se la pasó todo el fin de semana en esta tarea. El número total ya no lo recuerdo, pero realmente nos pareció grande en ese momento. Tan grande que lo tuvo que anotar en una hoja de papel para que no se le olvidara. Claro que esa época me pareció inmenso, ahora ya no.

— ¡Realmente sí que tenía muchas canicas ese niño! Ahora te imaginas cuántas tienen entre todos tus compañeros de tu clase, suponiendo que aún las conservan.

— Pues muchas más. Si Sebastián tenía, más o menos, unas cinco mil quinientas, entre todos debemos tener muchas.

— Eso es cierto. Ahora yo me pregunto por el número de canicas de todos los niños de tu escuela.

— No, pues, quién sabe. No me imagino cuántas sean en total, aunque sí se podrían contar con mucha paciencia y ganas de hacerlo, ¿no crees?

— Claro que se puede —responde mi amigo un tanto divertido por esta plática tan peculiar—. Tengo entendido que en este pueblo hay cinco escuelas, ¿podríamos saber el número de canicas que tienen todos los niños de este pueblo que asisten a la primaria o secundaria?

De inmediato me imagino que sí es posible, si Sebastián contó las suyas, se pueden contar las de todo el salón, toda la escuela y todas las escuelas del pueblo.

— Yo creo que sí, no ha de ser una tarea muy sencilla pero sí es posible — respondo—. Jamás había pensado en esto. Ya no me imagino el número que resultará, debe de ser muy grande.

— Yo creo que no es tan grande como imaginas, tal vez unos cuantos miles y ya. Hace algunos años, había en este país unas doscientos mil escuelas primarias y secundarias. Imagina que estamos interesados en saber cuántas canicas tienen todos los estudiantes de todas las primarias y secundarias del país. ¿Lo podríamos hacer?

— Ahora ya no sé si se podría. En este pueblo yo creo que sí. Tal vez es imposible ir a las doscientos mil escuelas que mencionas y contar las canicas de cada niño.

— Eso sí que es difícil, pero no necesitamos ir a todas ellas. Dices que si podemos saber el número de canicas que tienen los niños de tu escuela, y además, también sabemos, más o menos, el número de primarias y secundarias en el país. Pues con estos dos datos nos basta, sólo multiplicamos y obtenemos una aproximación del número total.

— Tienes razón, algo parecido a lo del cine y las butacas —digo sorprendido por la fácil solución de Teodoro—. Pero hay algo en que tengo duda, ¿basta con una aproximación y no con el número exacto?

— Para muchas cosas claro que basta. Imagina que tuviéramos que ir a todas esas escuelas, tal vez jamás terminaríamos. Con la aproximación resolvemos el problema de manera fácil y rápida.

— Tienes razón. Aunque no me imagino el resultado de la multiplicación que dices. Debe de ser enorme.

— No tan grande comparado con el número de canicas que tienen los niños en las primarias y secundarias de todos los países del mundo.

— Ese sí que debe de ser mucho mayor.

— Claro que lo es. Tan sólo imagina que en el mundo hay alrededor de ciento noventa y dos países, tan sólo hay que multiplicar el número de canicas que hay en tu colegio, por las escuelas de todo el país, luego por el número de países en el mundo y así obtener una aproximación.

— ¡Qué número tan grande debe resultar!

— No creo que sea tan grande, es decir, hay unos números mucho mayores que ese. Sólo que no estás acostumbrado a escucharlos y pensar en ellos, pero por supuesto que existen. Sólo platicamos de las canicas que pueden tener los alumnos de primarias y secundarias de todo el mundo, pero es cierto que no consideramos absolutamente todas las que hay en el planeta. Hay personas que ya no van a estas escuelas pero tienen canicas guardadas por colección o que asisten a escuelas superiores. El cálculo que hicimos debe ser muy grande, pero siempre se van a poder encontrar números mayores.

Un tanto agobiado por esto, me quedo en silencio. Jamás me había puesto a pensar en el total de canicas que poseen todos los niños de mi salón. Ahora, las de todo el mundo me es difícil de imaginar. Cuando, de pequeño, conté estrellas yo había llegado sólo al doscientos o trescientos. En esa ocasión, se me hizo una cantidad muy grande pero veo que hay más. El viejo mencionó que hay cantidades mayores, puedo pensar en algunas, pero ir más y más allá... Tal vez el ejemplo de las canicas sea el mayor que se pueda encontrar en el mundo.

— Y hay algo todavía más interesante —explica Teodoro—, estos números siempre han vivido contigo. Aunque sólo usabas unos mucho más pequeños, tenías la posibilidad de conocerlos. Sólo bastaba que te pusieras a pensar en ellos.

— Creo que tienes razón —digo no muy convencido de mis palabras—. ¿Quieres decir que el número de canicas que tienen todos los niños de todas las primarias y secundarias del mundo, siempre ha existido aunque no lo sabía?

— Eso es lo que dije. Esas cantidades existen, sólo que estaban ocultos a ti por diversas razones. Pero esto pasa con muchas cosas en la vida, así como cuando discutimos el conocimiento para Platón y Aristóteles, no sabías que existían y no por eso desaparecieron. Lo mismo pasa con este conjunto, realmente es grande pero hay otros

mayores. En la naturaleza hay muchos conjuntos de diversos tamaños, desde los de pocos elementos, hasta los que tienen muchos que es muy complicado de contar.

— ¿Qué conjuntos hay en la naturaleza?

— Pues muchos. Por ejemplo, ¿te has puesto a pensar en el número de leones, hormigas, pájaros, abejas o átomos que hay en todo el mundo?

— No, jamás se me ha ocurrido pensar en ello.

— Pues no es tarde para empezar. Elige un animal, el que quieras, el que más te guste.

— Escojo al león por ser valiente y rey de la selva.

— Pequeño error amigo. La mayoría de las personas piensan que el león vive en la selva, pero no es así. Realmente este animal habita en las sabanas, que son grandes praderas pobladas de arbustos y árboles dispersos de varios tamaños. Aunque también se pueden encontrar al sur del desierto del Sahara y en algunos santuarios. Existen métodos para saber cuántos leones hay en una determinada región. ¿Crees que se pueda saber cuántos leones hay, por ejemplo, en un determinado estado?

— Si dices que hay métodos para una pequeña región, sí se puede saber en todo un estado, incluso en todo un país. Me imagino que para conocer todos los del mundo, basta multiplicar el número de países por el número leones por país, ¿así es?

— Así es, esto para obtener una aproximación. Pero además de conocer un método para hacerlo, es importante saber, o al menos imaginarse, cuántos hay en todo el mundo y si ese número lo consideras grande o pequeño. Se sabe que los leones viven en manadas de cuatro a treinta elementos. Vamos a suponer que, en promedio, viven en manadas de veinte individuos.

— Ahora tendríamos que saber cuántas manadas hay por región o por país, ¿no es así?

— Claro que sí. Una vez que tengamos esos datos los tenemos que multiplicar, imagina que hay unas cien manadas de veinte leones. Si multiplicas estos números te da que, aproximadamente, hay dos mil leones por país. Ahora supongamos que sólo en treinta países hay leones.

— Sólo tenemos que hacer una multiplicación más para obtener el resultado final, ¿no?

— Muy bien. Hay que multiplicar los dos mil por los treinta países, lo que nos da sesenta mil leones en todo el mundo.

— Esos sí que son muchos leones.

— Recuerda que estos datos son suposiciones. Sólo nos sirven para ver la manera de poder calcular el número de esta especie. Puede haber más o menos, eso no nos interesa por el momento. Pero qué te parece este número, ¿consideras que es pequeño o grande?

— Yo creo que es algo grande. Imagínate contar algo, uno por uno, hasta llegar a sesenta mil. Difícilmente terminaría de hacerlo. Pero a mi me da la impresión de que este número que encontramos de los leones del mundo es más pequeño que el de las canicas.

— Puede ser que estés en lo correcto. Tal vez haya más canicas que leones en el planeta. Lo importante es que te des cuenta de que son números grandes, que tal vez no habías pensado en ellos pero que existen. Te puedo asegurar que todavía hay números mucho más grandes que éste. Sólo basta buscarlos para que realmente nos sorprendamos.

Realmente yo estoy muy extrañado con todo esto. Jamás he tenido la necesidad de usar en la vida estas cantidades y la verdad no sé si lo voy a necesitar algún día en la práctica. Le pregunto a Teodoro sobre esto y me responde algo muy cierto. Si fuera, por ejemplo, biólogo, tendría la necesidad de contar muchas cosas de la naturaleza, como animales, plantas o flores. Mi amigo me dice que el número de leones en todo el mundo es muy pequeño, comparado con otras especies que existen, que sólo hay que pensar un poco. En silencio concluyo que tiene razón, pero no puedo pensar en algún ejemplo. No sé si haya más leones que cebras, panteras, lagartos, elefantes, etc. Tal vez la cantidad de cada especie no varíe mucho, tal vez sea insignificante o tal vez sea la misma. Lo que sí me queda claro, es que son cantidades grandes que no uso comúnmente, pero sí las había escuchado. Esto no quiere decir que se les haya contado o se hayan preocupado por la cantidad, pero ahí viven en la naturaleza. Tal vez por mi necedad característica, me empeño en encontrar ejemplos de conjuntos de animales, que puedan superar en número a los dados por Teodoro. Sí él dice que los hay le creo, pero los quiero descubrir.

Desgraciadamente, es tiempo de regresar a mi casa. Me despido de mi amigo con un ligero movimiento de cabeza. Estoy totalmente absorto por encontrar los ejemplos

deseados. ¿Qué agrupaciones puede haber en la naturaleza que contengan más elementos que leones o canicas que, de por sí, ya son enormes?

Hoy me toca clase de biología, pero no puedo poner atención. El sueño de ayer me tiene en un estado extraño. Soñé que estaba en un lugar tan grande que a los cuatro puntos cardinales se veía lo mismo, sólo grandes extensiones de tierra. A lo lejos sólo se distinguían pequeños arbustos, caminaba hacia ellos pero no los podía tocar, pues cada vez se alejaban más. Cansado de querer alcanzarlos, me tiré en el piso totalmente exhausto. De pronto, unos animales extraños salían de la tierra y me empezaban a rodear. Jamás me tocaban pero me producían un miedo espantoso. Por más que pasó el tiempo, ellos salían y salían; parecía que jamás se iban a acabar. Cuando estaba a punto de morir de miedo, ellos formaron una fila y se alejaron de mí. No pude hacer otra cosa que sentarme en el piso y observarlos, salían de la tierra y de inmediato se unían a la larga línea. En mi sueño sabía que eran muchos más que canicas o leones en el mundo, pero no supe realmente de lo que se trataba. Por supuesto, que esto tiene que ver con lo que platicué anoche con el viejo, es un afán por encontrar conjuntos en la naturaleza muy grandes. Se que este sueño me ayudará pero debo de saber interpretarlo.

El maestro habla de un tipo de insectos que son muy sociales, que viven en colonias, que son muy ordenados y trabajadores. Que en el mundo hay, aproximadamente, cuatro mil quinientas especies de hormigas. ¿Hormigas? ¡Por supuesto! Eso es lo que soñé. Estos pequeños insectos que siempre me han impresionado por su manera de trabajar tan organizada. Ahora presto atención y escucho cosas maravillosas de estos pequeños animales: como que es fácil confundirlos con las llamadas hormigas blancas o termitas; que tienen alas pero sólo los machos las conservan; que los machos mueren después del apareamiento; que sus nidos pueden estar excavados bajo una piedra o en troncos de árboles en descomposición; que una colonia de estos insectos puede estar compuesta por unos cuantos individuos, o cientos de miles a millones de individuos y muchas cosas más. Por más que quiero poner atención ya no lo puedo hacer, el último dato me deja muy sorprendido. Sin querer, el profesor me ha dado un ejemplo de un conjunto en la naturaleza, que es mucho más grande que los leones. El número de estos carnívoros que supusimos había, es comparable, por el número de elementos, con una sola colonia de hormigas. Estos

insectos son tan pequeños que debe de haber millones y millones en todo el mundo. No me imagino la cantidad pero debe de ser inmensa.

— ¿Como cuántas colonias de hormigas hay en este país? —pregunto al maestro con gran sorpresa de todo el grupo, pues siempre soy un alumno callado que no se atreve a decir algo.

— Pues realmente son muchas —responde el profesor—, imagina que sólo en el patio de una casa puede haber unas cinco o seis colonias de hormigas. Pero en espacios abiertos y con condiciones apropiadas, como el bosque, se pueden llegar a encontrar cientos de colonias de diferentes especies.

Esto sí que es fantástico. Al principio, el profesor mencionó que hay aproximadamente cuatro mil quinientas especies de hormigas, luego dijo que en una colonia llega a haber varios cientos de miles a millones de individuos. Vamos a suponer, como dice Teodoro, que todas las colonias tuvieran unos tres millones. Vamos a pensar que en el mundo sólo hay una colonia de cada especie, la multiplicación nos daría el número de hormigas en el mundo. ¡Que impresión! Este número si que es inmenso, son trece mil quinientos millones de hormigas, y esto si sólo hubiera una colonia de cada especie. Pero el maestro dijo que en un solo bosque hay cientos de colonias.

— Profesor, ¿cómo cuántas colonias de hormigas hay en el mundo?

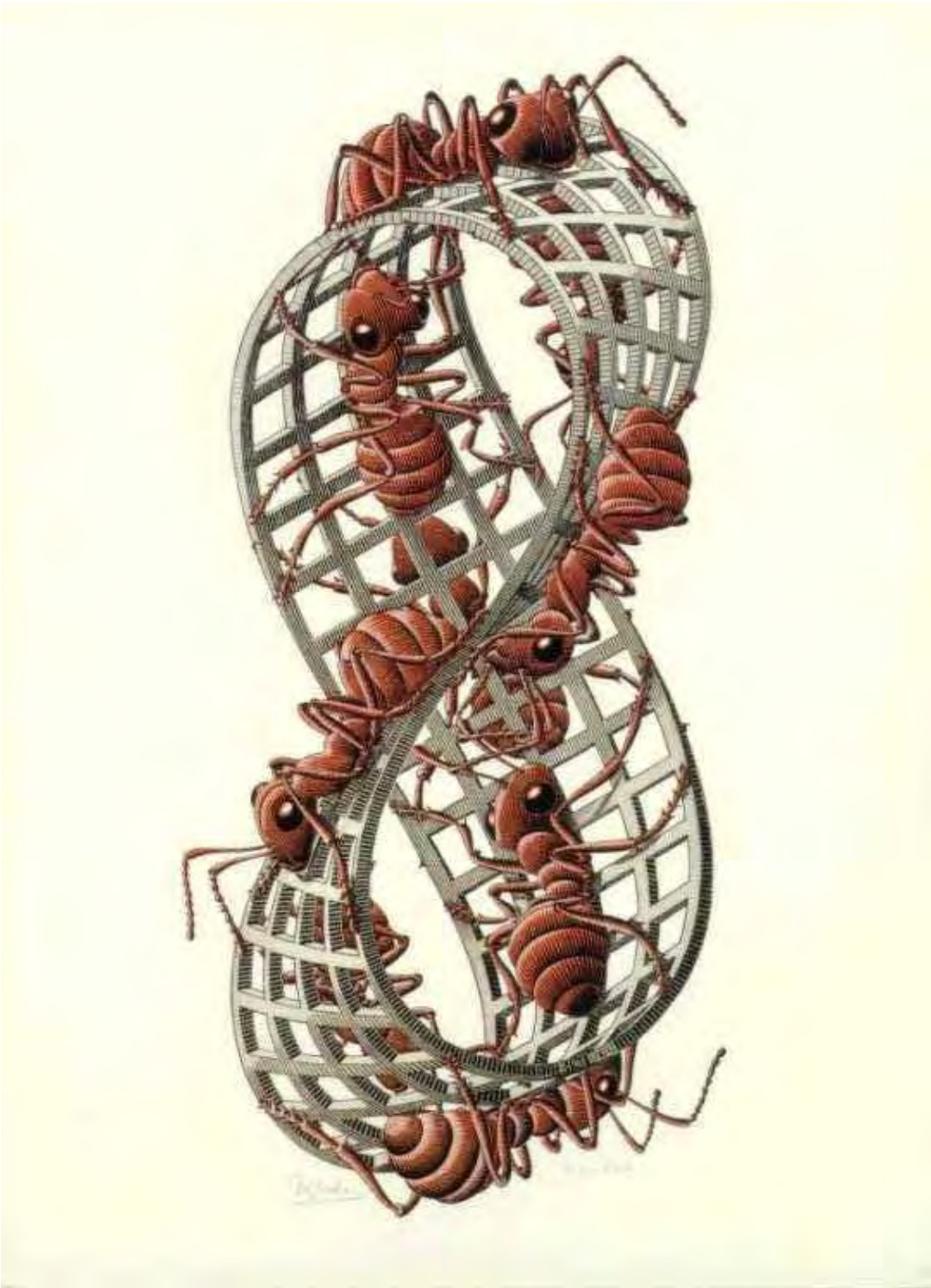
— No lo sé, Jorge. Te digo que debe de haber muchos miles de millones tan sólo en un país, en el mundo entero este número debe ser exageradamente grande.

Esta pregunta la vuelvo a hacer sin pensarlo mucho, tan sólo dejándome llevar por mis impulsos. No es tan grave preguntar para resolver las dudas. Claro, cuando estás interesado en el tema. Pero ahora si que ya no sé cómo hacerle. Ya no quiero hacer más multiplicaciones, porque las cantidades ya se hicieron demasiado grandes. Ahora me doy cuenta de lo que dijo mi amigo Teodoro: se podían encontrar números más grandes que el de las canicas, o el de los leones en la naturaleza. Tal vez el número de hormigas en todo el mundo sea de millones de millones de millones. Ahora si ya no me puedo imaginar la cantidad. Que haya más hormigas que leones, es un tanto lógico, por el tamaño de ambos, en un espacio idéntico caben más animales pequeños que grandes. Además de que siempre se ven más insectos que leones en cualquier lugar. Pero me imagino que Teodoro me diría

que todavía se pueden encontrar conjuntos de cosas, dentro de la naturaleza, que tengan más elementos. Me imagino que debo de pensar en animales más pequeños y que se agrupen en grandes cantidades.

Con esto de las hormigas, recuerdo una hoja que me dio el viejo la otra ocasión. Se trataba de un dibujo muy peculiar, donde aparece una banda retorcida y unas hormigas caminando sobre ella. A pesar de que la banda es pequeña, cada insecto puede caminar todo el tiempo por ella, pues está doblada de tal manera que parece que jamás termina. Un día le pregunté a Teodoro sobre el significado de esta pintura y me dijo que su nombre es ‘la cinta de Moebius’, que fue pintada para representar una superficie finita que puede convertirse en infinita. La verdad es que no entendí del todo esta explicación, pero el dibujo me encantó.

Este día me pasa algo especial. Tengo ganas de jugar con mis compañeros de grupo. En uno de los recesos me integré a un partido de fútbol pero me aburro rápido. La verdad, es que soy muy torpe y malo. Me sorprende que me hayan aceptado, tal vez la convivencia con ellos no sea tan difícil. Aún así, decido alejarme y me voy a sentar frente al lago. En la tierra camina una pequeña hormiga que carga una hoja como diez veces mayor que ella. Pero sólo es una de tantas, hay miles de estos insectos que trabajan y llevan comida en su espalda. Todas se meten en un pequeño orificio en la tierra, que forma un montículo alrededor. De inmediato me pongo a contarlas, después de treinta minutos, cuento más de mil y ellas no terminan de pasar. Debe de ser cierto que en cada colonia hay varios de cientos de miles a millones de individuos. Creo que mi cabeza no da para más. No sé si pueda encontrar otro conjunto más grande. Este es inmenso, realmente grande. Aunque recuerdo que el viejo dijo que siempre es posible encontrar algo más grande. También hay otra cosa que me preocupa, cuando calculé la tremenda multiplicación, me salieron once dígitos, tantos que no cupieron en la pantalla de la calculadora. Si este número hubiera sido mayor, ¿lo hubiera podido calcular? Además de que el número se hubiera hecho demasiado grande, entre más dígitos tenga, mayor es la cantidad representada.



Maurits Cornelis Escher, La cinta de Moebius.

De nueva cuenta en mi cuarto, iluminado sólo por la lámpara de mi escritorio. Saco las hojas que me dio Teodoro la última vez que lo vi, las pongo en la mesa y leo lo siguiente:

Un cuento para que te entretengas.

El rey que se fue a la quiebra por no saber contar.

En una pequeña población, vivía un rey bastante flojo y adicto a todo tipo de juegos. Al contrario de él, sus súbditos eran muy trabajadores, así que el reino era próspero y con muchos recursos. El rey coleccionaba todo tipo de entretenimientos de mesa, incluso mandaba expediciones a otros países para que le trajeran los pasatiempos nuevos que encontrarán. Un día ya no le llevaron más. Ya todo lo conocía y se le hacía aburrido. Fastidiado el monarca por esta situación, convocó a una singular competencia: aquel que inventara un juego divertido le daría lo que él quisiera, sin importar que fuera. El día de la premiación, sólo se presentó una persona con el llamado pasatiempo de 'ajedrez'. El inventor le explicó al rey las reglas para jugar y a éste le encantó. Se cuenta que tanto le gustó, que toda una semana entera se entretuvo con el ganador de la convocatoria. Llegó la hora de entregar el premio y el rey escuchó una singular petición.

—Sólo quiero algo muy sencillo —dijo el inventor del ajedrez—. Mi diseño cuenta con un tablero con sesenta y cuatro casillas. Sólo pido que dentro de la primera de ellas, se coloque un grano de arroz; dentro de la segunda se pongan dos; a la tercera cuatro; a la cuarta ocho y, así, sucesivamente. Es decir, que se coloque un grano en la primera casilla y que a las demás se ponga el doble de la anterior. Tan sólo eso quiero. Arroz para poder vivir el resto de mis días.

El rey, muy sorprendido de escuchar lo anterior, ofreció oro, dinero, joyas, un puesto real o algo con mayor valor que los granos de arroz. El inventor no cambió de parecer y se empeñó en que le dieran lo que pedía. Entonces el rey, un tanto irritado, ordenó que trajeran un saco con semillas y le pagaran a este individuo. Al cabo de unos minutos se informó que un saco no era suficiente. Entonces, el rey mandó a traer un segundo. Pero pronto se dieron cuenta de que tampoco alcanzaba. Sin vacilar, el monarca pidió que trajeran el tercer saco de semilla, pero pasó lo mismo. Es decir, no alcanzaba para la paga. Un tanto desesperado, el rey ordenó que trajeran todos los sacos de arroz del reino. Pero ni así alcanzó para que cumpliera con su promesa. Se agotaron todos, uno por uno, y no alcanzo ni para llegar a la mitad del tablero de ajedrez. Así fue como el rey se percató, con gran sorpresa de todos, menos del inventor, que no era posible pagar, que no alcanzaban todos los granos del reino para este fin.

Así que el rey tuvo que cumplir su palabra. Sembró y pagó toda su vida a tan ingenioso inventor, y aún así, no le alcanzó la vida para cumplir su promesa.

¿Cuál fue el problema en este cuento? ¿Por qué no se le pudo pagar al hombre algo, en apariencia, tan sencillo? Lo que el hombre pidió no fue poca cosa. Él dijo que en la primera casilla pusieran un grano de arroz (1), en la segunda dos (2), en la tercera cuatro (4), en la cuarta ocho (8), en la quinta dieciséis granos (16) y, así, sucesivamente. Esto se ve más fácil de la siguiente manera.

1, 2, 4, 8, 16, ...

Cada número simboliza los granos de arroz en cada casilla. Los tres puntos suspensivos sirven para no escribir todos los números que faltan. Es decir, los puntos simbolizan una abreviación. Lo que el hombre pidió, fue que en cada casilla le pusieran el doble de la anterior. Si te das cuenta es lo que representan los números de la serie que anote. El dos es el doble del uno, el cuatro el doble del dos, el ocho el doble del cuatro y, así, sucesivamente.

Pero ahora vamos a hacer una pequeña pausa para recordar algo muy sencillo. Hace muchos años, cuando estabas muy pequeño, aprendiste a sumar y multiplicar, luego a dividir y algunas operaciones más. Alguna vez tuviste la difícil misión de aprenderte las tablas de multiplicar para poder obtener una buena calificación. Tal vez esto te costó trabajo, pero lo que no sabías es que una multiplicación es la forma abreviada de escribir a la suma. No te sorprendas, pues cuando multiplicas no haces otra cosa que sólo sumar y sumar. Seguramente que si te pregunto que cuánto es cinco por tres, me respondas de inmediato que quince porque así lo memorizaste. Pero en realidad cinco veces tres, no es otra cosa que sumar cinco veces el tres.

$$5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

Y así sucede con todas las tablas que te enseñaron. Por ejemplo, para obtener el resultado de multiplicar siete por cuatro, sólo tienes que sumar siete veces el cuatro, es decir,

$$7 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$$

Y lo mismo pasa para todas las tablas que ahora te sabes de memoria. Por supuesto que la multiplicación es de gran ayuda, pues es una manera fácil de abreviar a la suma.

Volvamos a los granos de arroz que se le deben de pagar al inventor. Ya vimos que pidió que en la primera casilla pusieran un grano, en la segunda dos, en la tercera cuatro, en la cuarta ocho y así sucesivamente. También vimos que la serie de estos números se puede escribir como:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

Pero hay una forma más sencilla de escribir estos números, con la notación que representa una abreviación de la multiplicación:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots, 2^{64}$$

No te asustes de ver todos esos números, pues son muy fáciles de comprender. Vamos a ver esto con el 16, una forma más fácil de escribirlo es como 2^4 , donde al dos se le llama *base* y al pequeño cuatro *exponente*. Lo único que te dice es que tienes que multiplicar (\bullet) la base tantas veces como indique el exponente. Entonces, es lo mismo escribir 16 que $2^4 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2$. La serie anterior representa las potencias del número dos. El último exponente es porque el tablero tiene sesenta y cuatro casillas. El primer elemento de la serie es 2^0 , esto es una convención que representa al uno, es decir, todo número distinto de cero elevado al exponente cero nos da uno. De nuevo uso los tres puntos para no poner todas las potencias que faltan, es decir, los tres puntos, en este caso, representan desde el 2^6 hasta 2^{63} . Como te darás cuenta, el inventor pedía muchos granos de arroz. En realidad él solicitaba la suma de toda las potencias de dos, desde el cero hasta el sesenta y cuatro, es decir:

$$\text{pago} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{64}$$

Si haces la suma, te darás cuenta que representa un número exageradamente grande. Es por eso que no le pudieron pagar. Aunque la expresión 2^{64} es algo físicamente muy pequeño, realmente representa un número muy grande. Si alguna vez tuviste la duda de cómo se pueden representar números muy grandes, aquí tienes una solución.

Teodoro



El viejo dice que 2^{64} es un número muy grande, y que representa multiplicar el dos sesenta y cuatro veces. Para comprobar esto, tomo la calculadora y hago la cuenta el número de veces que dice pero no puedo, pues la pantalla sólo tiene capacidad para ocho dígitos. Así que tomo una hoja de papel, un lápiz y mucha paciencia para hacer esta cuenta. Al final, el número que obtengo es impresionante:

$$2^{64} = 18, 446, 744, 073, 709, 551, 616$$

Si 2^{64} es un número muy grande y sólo representa que hay que multiplicar al dos sesenta y cuatro veces, ¿qué tan grande será 2^{300} ó $2^{1000000000}$ o ‘dos’ con un exponente de millones de millones? Digamos que tomamos los trece mil quinientos millones que calculé del número de hormigas, y lo ponemos como exponente del dos. La expresión sería $2^{13,500,000,000}$, que es un número realmente inmenso, el más grande que he visto en la vida. Pero hay algo todavía más sorprendente. Si yo le pongo más ceros al exponente, el resultado final crece rápidamente. Esto es impresionante, estos números realmente son inmensos, jamás me hubiera imaginado siquiera su existencia. No puedo pensar en cómo multiplicar el número dos, trece mil quinientos millones de veces. Pero hay otra cosa increíble, con pocos dígitos se pueden escribir cantidades enormes. Aunque la expresión 2^{64} es muy chica, simboliza algo mucho mayor; algo que jamás pensé que existiera. Lo que también me impacta mucho, es que estas cantidades las encontramos en la naturaleza. Es fácil encontrar conjuntos de tres, cuatro o cien elementos, como los árboles de la escuela, los alumnos o las casas de todo el pueblo. Pero también es sencillo, y natural, encontrar conjuntos con millones y millones de elementos, tantos que parecen que nunca van a terminar, pero sí lo hacen. Las canicas que hay en todo el mundo, los leones, las hormigas, los cabellos de una persona son conjuntos que están en la naturaleza, muy grandes, pero que es posible saber cuántos elementos tienen. Bueno, si no con exactitud, al menos dar una aproximación. Esto es lo que he aprendido con el viejo, no importa de qué conjunto en la naturaleza se trate, siempre va a ser posible, saber con cuántos elementos cuenta. Pero hay algo que no me queda del todo claro, cuando encontramos números inmensos, Teodoro siempre dice que son pequeños, que siempre hay más grandes. La verdad no se si creer en esto o no. Tal vez algún día alguien encuentre un número tan grande, inmensamente grande, que no haya otro más allá. Tal vez sea el último y el mayor de todos. Tal vez se tengan que usar miles de

hojas para escribirlo. Tal vez no exista una representación para simbolizarlo, pero ninguno lo podrá superar.

Nosotros tan pequeños y estamos rodeados de gigantes escondidos, gigantes que viven entre nosotros pero casi nadie se percata de su existencia. Tan sólo basta mirar alrededor, hacer lo que nos enseñaron desde pequeños, es decir, contar, para encontrarse con este mundo inmenso y fantástico. Basta con preguntarse por el número de, por ejemplo, el número de hormigas que habitan un bosque, para ver las dificultades que da contarlas, y notar que en todo el mundo hay millones y millones de estas. Ahora veo que todas las cosas pueden tener algo interesante, sólo hay que saber encontrar la magia y estar dispuestos a disfrutar lo que brinda la naturaleza. A cada paso se puede descubrir algo nuevo y fascinante, un mundo que no hemos penetrado pero que ahí está dispuesto a enseñarnos, sorprendernos y gritar que existe y quiere convivir con los seres humanos. El simple hecho de observar ya es penetrar en lo desconocido, pero observar de verdad, no sólo mirar sin cuestionarse y tratar de llegar a la verdad de las cosas. Mi amigo me enseñó esto sin proponérselo. Me comentó de Platón y Aristóteles, de sus ideas y sus métodos para llegar al conocimiento de algo. Esto pocas personas lo hacen. La mayoría vemos algo y no le damos la mayor importancia. En lugar de tratar de conocerlo, o preguntarse por el número que hay en todo el mundo, nos pasan desapercibidos animales, objetos y tantas cosas interesantes que hay en la vida. Si antes me gustaba la observación, ahora la practicaré con mayor ímpetu, para ir más allá de las personas comunes, para alcanzar el conocimiento y sentir la fuerza de la verdad.

Me obsesiono con encontrar conjuntos más grandes. Durante los últimos días he estado ocupado en esto pero sin buenos resultados. Poco a poco me doy cuenta de que, en efecto, todas las cosas se pueden contar o es posible dar una aproximación de su número de elementos. Todo lo que pienso se puede contar; todo tipo de animales, no importa su tamaño; todas las plantas y flores, los árboles, las personas, e incluso los insectos más pequeños. Cuando pensé en las hormigas, creí que jamás se iban a poder contar, que son tantas que iba a ser imposible, pero me doy cuenta que siempre hay métodos para estudiarlas y saber cuántas son, si no exactamente, al menos darse una idea aproximada. No importa el número tan grande que resulte, siempre se puede escribir, con todos sus dígitos o con alguna representación que facilite su escritura. Aún así, pienso que tal vez alguien

descubra el número más grande de todos, él último, que no exista uno mayor. Pero mientras esto pasa, yo pienso en lo que me rodea, en las colecciones de objetos propios de la naturaleza, en la manera de contarlos o llegar a una aproximación. Muchas veces le pongo a Teodoro duros retos, como por ejemplo, los peces que viven en todos los mares, ríos, lagunas y presas de todo el mundo. Le digo que ahora si no es posible, que no se pueden meter a todas las aguas para contarlos uno por uno. Entonces, me explica algo importante, que no es necesario hacer esto de manera precisa, que simplemente se encuentran métodos para dar una aproximación; que los interesados en el tema han estudiado grandes extensiones de agua que son representativas de todas las demás, saben el comportamiento de una pequeña parte y así deducen qué pasa en la totalidad. Que tal vez las primeras aproximaciones no sean muy buenas, pero se avanza en la ciencia y en el conocimiento de muchas cosas, entre ellas el número de peces o individuos de una cierta especie. El viejo me explicó que hacer esto no siempre es fácil, que puede tardar muchos años, pero al final se logra o logrará. Que la ciencia y la imaginación de las personas son muy poderosas, y se ha llegado a soluciones de problemas difíciles, no importa qué tanto lo sean. Así se trate de aves, rocas, insectos, plantas, árboles, peces, etc., se puede saber cuántos son. También me dijo que muchas veces no se calcula porque no sirve de nada conocerlo, pero siempre hay maneras de lograrlo. Yo quiero asegurarme de esto y le llevo nuevos retos a Teodoro, pero él siempre los resuelve de manera ingeniosa y con los conocimientos que tiene. A medida que pasa el tiempo, creo que no voy a poder ganar esta discusión alimentada sólo por mi ego, que tendré que aceptar que en la naturaleza todos los conjuntos de cosas se pueden contar. Pero, el mismo Teodoro me da, aparentemente, una esperanza de lo contrario, platico con él y me habla de unas cosas tan pequeñas, que son tantas que no creo se puedan contar.

— ¿Entonces qué?, ¿has oído hablar o no de los átomos? —pregunta el viejo.

— Creo que sí —respondo—, pero la verdad no me acuerdo de lo que son y para qué sirven.

— Ahí esta el problema, sí te enseñan cosas interesantes en la escuela pero no les pones atención. El átomo, es una unidad muy pequeña de un elemento químico. En la antigua Grecia ya empleaban este término para referirse a la parte la de materia más pequeña que podía concebirse. Aunque en la actualidad se sabe, por diversas

investigaciones, que el elemento más pequeño de la materia son los llamados quarks. Los átomos aún se pueden dividir en estas partículas. En este momento, por la simple razón de que ya los habías oído mencionar, discutamos un poco algunas cosas increíbles de los átomos. En términos más sencillos, tenemos que todas las cosas que existen están compuestas por átomos, desde las personas animales o cosas. Estas partículas no se pueden ver a simple vista porque son muy pequeñas, se tienen que usar aparatos especiales para estudiarlas. ¿Ahora ya recuerdas que te lo mencionaron en la escuela?

— Tienes razón —respondo un tanto incómodo—, el maestro de química nos habló de eso, pero sólo memoricé lo necesario para pasar el examen y rápidamente se me olvidó todo. Lo encontré muy aburrido, nunca me ha gustado la química.

— Pues esto de los conjuntos está relacionado con todas las áreas de estudio. En todos lados vas a encontrar agrupaciones de cosas que las quieras estudiar.

— ¿Entonces, también vamos a poder contar el conjunto de los átomos que hay en todo el mundo?

— Es posible, pero primero tienes que entender que cosa es un átomo. Ya te dije que son una de las partículas elementales. Imagina a la sociedad: está compuesta por poblaciones, pueblos, razas, ciudades, familias e individuos como tú y como yo. Es evidente que una ciudad es más grande que una familia, pero esta, a su vez, es más grande que una persona. Pero los individuos ya no tienen más divisiones para formar a la sociedad. Algo parecido pasa con la materia pero en proporciones mucho menores. Los átomos, son unas partículas muy pequeñas de la materia, que a su vez están formadas por quarks y de una pequeñez extrema.

— ¿Qué tan pequeño es un átomo?

— Muchísimo, tanto que se ha calculado que una sola gota de agua contiene más de mil millones de millones de millones de estas partículas, es decir, más de mil trillones de átomos.

— ¿Una sola gota de agua tiene tantos átomos?

— Si, una sola e insignificante gota de agua. Esto nos da una idea de lo pequeños que son y de la gran cantidad que hay en la materia. Ahora imagina los que debe de haber en un vaso con agua que tiene miles de gotas, en una alberca con millones de moléculas o en todo el mar con millones y millones y millones de gotas de agua. Pero recuerda que toda

la materia esta compuesta por partículas elementales, todo lo que ves. El número de átomos en todo el mundo te aseguro que es espantosamente grande, pero aún así, este inmenso número es pequeño comparado con otros.

— ¡Espera un poco! —dije un poco molesto por no entender y por la necesidad de Teodoro a considerar cualquier cantidad pequeña—. Dices que todo en este mundo es materia, ¿de acuerdo?

— Todo lo que vez esta considerado materia, tú mismo lo eres, el agua, el fuego y demás.

— De acuerdo, todo lo que veo es materia, estamos rodeados de materia. También dices que la materia está compuesta por partículas muy pequeñas, que son demasiado pequeñas y que son llamados átomos, ¿estoy en lo correcto?

— Tienes toda la razón en lo que acabas de decir.

— Luego dices que una sola gota de agua, que es tan pequeña y representa un porcentaje pequeñísimo de toda la materia del mundo, casi insignificante, contiene más de mil trillones de átomos, ¿así es?

— Muy bien Jorge —dice el viejo muy tranquilo a pesar de mi desesperación—, has hecho un magnifico resumen de lo que te expliqué.

— Eso quiere decir que he entendido. Si todo en esta vida es materia compuesta por átomos y estos son tan inmensamente pequeños, toda la materia del mundo ha de contener una cantidad tan grande de partículas elementales, que no me la puedo imaginar, ya ni siquiera hablemos de cómo se pueden contar.

— ¿Por qué no? Así como se sabe que en una gota de agua hay esa cantidad de átomos, así mismo se puede saber cuántos hay en cada ser humano, en cada hormiga, en cada león, en cada árbol, en cada animal y en absolutamente todo lo que existe en el mundo. De nuevo te digo que son aproximaciones, pero sí hay métodos para esto. Muchas personas dedican su vida a la ciencia y, al menos, en teoría, es posible dar una aproximación de la cantidad de átomos que hay en todo el mundo. Esto no quiere decir que se vaya a hacer, sólo que se podría si se destinan los suficientes recursos para ello.

— En eso puedo estar de acuerdo. Pero hay algo que no entiendo del todo. Al número final de este posible cálculo lo llamaste ‘pequeño’, cuando realmente es demasiado grande como para imaginárselo.

— Que tú no puedas, o quieras imaginártelo, no quiere decir que no sea posible, simplemente no estás acostumbrado; y sí, lo llamé pequeño, porque realmente lo es comparado con otros mucho más grandes que se pueden encontrar. Mira Jorge, esto no es tan difícil. Dime un número, el que se te ocurra.

— Tres millones

— Pues yo te digo tres millones *más uno*. Dime otro, el que sea, no importa.

— Cien millones de trillones.

— Muy bien, pues yo te digo cien millones de trillones *más uno*. Siempre que tú me digas un número, el que sea, por más grande o pequeño que parezca, siempre es posible encontrar uno mayor con sólo sumarle la unidad. ¿Acaso de niño no jugaste a esto?

— Ahora que lo dices recuerdo algo —digo un poco más tranquilo—. Cuando estaba pequeño me gustaba jugar con mi madre. Le decía que dijera un número y siempre podía yo mencionar uno más grande con sólo sumarle uno, de la misma manera que lo acabas de hacer. El problema es que, en aquel entonces, los números mencionados eran el diez, el treinta o el mil, pero no tan grandes como los que hemos descubierto.

— ¿Y eso que tiene que ver? No importa que número digas, siempre vas a poder sumarle otro, en este caso la unidad, para encontrar uno mayor. Y no hemos descubierto los números como lo mencionas, siempre han existido y sólo nos percatamos de ello. Y con respecto a que cualquier cantidad se me hace pequeña se puede entender muy fácilmente. Conoces la suma, la multiplicación y ahora elevar un número a un exponente, ¿recuerdas que lo mencioné en el cuento del rey?

— Sí, me acuerdo, simplemente es multiplicar el número grande, tantas veces como lo dice el pequeño.

— Así es. Estas tres operaciones sirven, en general, para aumentar. Es decir, si tienes, digamos un cinco y le sumas mil, obtienes algo más grande; si lo multiplicas por lo mismo, obtienes algo aún mayor. Pero, si elevas el cinco al exponente mil, es decir, multiplicas el cinco, mil veces, obtienes algo muchísimo mayor que el cinco original. Sólo piensa que los números que hemos considerado —cinco, mil— son aún muy chicos. Si tú mencionas una cantidad de trillones y trillones, puedes hacer lo mismo, digamos elevarlo a la potencia mil, es decir, multiplicar la cantidad original mil veces. Pero en esto no hay límites, lo que te resulte le puedes hacer lo mismo y obtener nuevos números mayores y así

las veces que quieras. Así que dada una cantidad, no importa la que sea, siempre vas a poder obtener una mucho más grande, con estas operaciones o con otras que no conoces.

— Entonces, ¿no es posible llegar al último número, al mayor de todos?

— Claro que no es posible. Si alguien pretende hacer eso caerá en contradicción muy rápido. Basta con que mencione el número que él quiera, para sumarle uno y demostrarle que hay muchos mayores a él.

— ¿Cuántos números más grandes hay a uno dado?

— Una infinidad.

— ¿Qué significa eso?

— Infinito es algo que no tiene fin, que jamás termina. Entonces los números son infinitos, siempre hay uno después de otro, nunca termina la serie de todos ellos.

— ¿Es posible aceptar la idea de infinito como válida? —pregunto de pronto con la sensación de que es pura invención y no existe en realidad— ¿Hay otras cosas que existan de esta misma manera?

— Muchas más. Por ejemplo, tú has oído cuentos sobre dragones y no existen en la naturaleza. También hablamos de unicornios y otros monstruos. El infinito es sólo una idea, como los dragones, sirenas, hadas, centauros, brujas, gnomos, duendes y muchos otros entes mitológicos. Todos estos seres fantásticos no existen como materia, pero sí en la mente de las personas y son tan válidos que con ellos se han escrito cuentos, novelas e, incluso, se han filmado muchas películas. Hay dos filmes muy bonitos e interesantes que ilustran lo que te digo. Tenemos el caso de *Harry Potter* y el *Señor de los anillos*. Es evidente que no existe Frodo, Gandalf, El señor oscuro, Aragorn, Glóin, etc. Sin embargo, son personajes que existen en nuestra mente, como ideas y son totalmente válidas. Pero hay otros pensamientos que son imprescindibles para la vida cotidiana y, en la actualidad, nadie duda de su existencia. ¿Qué es, por ejemplo, un tres para ti?

— Pues un número.

— Pero, ¿qué es un número?

— No lo sé —digo después de pensarlo.

— Pues no es otra cosa que una idea que representa algo en el mundo real. Un tres no existe como una planta, un árbol o un ser humano. Simplemente existe como idea abstracta y todos aceptamos su existencia, ¿no es así?

— Sí, jamás voy a ver un tres que camine por las calles. Pero, ¿a que te refieres con idea abstracta?

— Abstraer significa separar las cualidades de un objeto para considerarlas aisladamente, para apreciar el objeto en su pura esencia o noción. Es lo que platicamos, la idea de un número, es abstracta porque sólo nos interesan sus cualidades. Como, por ejemplo, que representa una cantidad de lo que sea. Pero también podemos ver un número como una cualidad de una colección. Pongamos el número cinco, este es la cualidad que tienen todos los conjuntos con ese número de elementos. Pensemos en el conjunto de los dedos de tu mano derecha, una cualidad importante es que tiene cinco elementos, que no es otra cosa que el número que siempre has conocido. Pero hay otras muchas colecciones con la misma cualidad, como cinco árboles, cinco personas, cinco salones de clase, etc. Hay algo que relaciona todos estos conjuntos, que se pueden poner en correspondencia, uno a uno, porque tienen el mismo número de elementos.

— Eso que mencionas es muy fácil —digo orgulloso por entender la explicación del viejo—. Si tengo un conjunto de cinco árboles, claro que los voy a poder poner en correspondencia con los dedos de mi mano derecha, sólo basta que a cada dedo le asigne un árbol y viceversa.

— Estás en lo correcto. Eso lo puedes hacer con todos los conjuntos que tengan cinco elementos. Un triángulo, un cuadrado, los números, etc., son ejemplos de este tipo de ideas. ¿Recuerdas qué mencioné que los números son infinitos, qué jamás terminan?

— Sí, claro que lo recuerdo.

— Así es, a esa conclusión llegamos. En la escuela has escuchado la palabra infinito, recordaste que desde pequeño te la mencionaron y entendías muy bien su significado. Simplemente hace referencia a algo que jamás termina, que sigue por siempre. Esto mismo pasa con otras ideas abstractas, como los números.

— Entonces, ¿han dudado de la existencia de los números?

— Claro que sí, han dudado y mucho. Pero yo te digo que un número es una idea que representa algo y ayuda al ser humano en el plano intelectual. El hombre debe desarrollarse en múltiples aspectos, estoy convencido que la religión, por ejemplo, ayuda en unos y las ideas, en general, en otros. Entender y conocer los números es importante para la

mente y el raciocinio. Claro que no es lo único, pero sí algo importante. También ayuda a muchas cosas prácticas como contar objetos.

— ¿Entonces, los números son sólo ideas?

— Son una idea abstracta y son infinitos, jamás terminan. La importancia de las ideas es clara para algunos autores, mucho se ha escrito y pensado al respecto. Por ejemplo, Jacques Maritain, filósofo francés, dijo que ‘una simple idea, si es verdadera, salva nuestro trabajo de una infinidad de experiencias o situaciones a realizar’.

— ¿Qué significa lo que esa persona dijo? —pregunto.

— Lo que este filósofo dijo fue que una idea, por muy sencilla que esta sea, siempre y cuando represente a la verdad y no se trate de una mentira, nos ahorra muchas experiencias para llegar a la verdad de la idea original. Imagina que la simple idea es que sabes la altura exacta de un gran árbol. Si no contarás con esta información, tienes que realizar muchas acciones para llegar a conocer la altura del árbol. Tal vez lo primero que tendrías que hacer es conseguir un metro y una escalera. Pero si no sabes usar el instrumento de medición, tienes primero que aprender. Luego tienes que buscar la mejor manera para realizar la medición, con lo que todo eso implica. Pero alguien te puede decir que el árbol mide siete metros pero no es verdad, así que el proceso anterior lo tienes que seguir, para alcanzar la verdad.

— Eso que dices es muy cierto. Ahora recuerdo algo de Platón y Aristóteles y la manera de llegar al conocimiento. La razón juega un papel importante en estos tres personajes, ¿no es así?

— Tienes toda la razón, pequeño amigo. Me da gusto que te acuerdes de las pláticas anteriores y las puedas relacionar. Otro personaje importante que recuerdo que habló al respecto fue George Leonard, un arzobispo que mencionó que ‘la última capacidad creativa del cerebro, puede ser, por todo propósito práctico, infinito’. Esto nos dice la gran importancia que tiene el cerebro y sus ideas. Con esta frase, Leonard afirmó que las ideas de un cerebro son tantas, que pueden llegar a no tener un final. Los números se pueden representar, estudiar y conocer los misterios que guardan.

— Esto está interesante. ¿Dices que se van a poder representar aunque sean infinitos? ¿No importa que jamás terminen? Entonces, no es necesario escribirlos todos para su representación, ¿o sí?

— Claro que no. Ahora te voy a dar una carta más, léela con cuidado y me das tus impresiones. Te espero en mi cabaña cuando puedas ir.

Estoy ansioso de saber cómo representar algo que jamás termina. Algo me dice que es sencillo, y que es un paso importante. Jamás imaginé todos los misterios que guardan los números. Es cierto que desde chico me los enseñaron y aprendí a repetirlos. Los he usado sin saber casi nada de ellos. Pero desde que conocí a Teodoro, esto cambió. Primero me mostró cantidades inmensas, muy grandes, pero lo más sorprendente es que éstas existen en la naturaleza. Luego me mostró que los números no tienen un fin, que siempre que se tiene uno, no importa lo grande que sea, es posible encontrar otro mayor, con la simple operación de sumarle uno. Esto lo hacía desde pequeño pero no me percaté que representa una cosa muy interesante, además de que es una idea abstracta y encierra misterios increíbles. Creo que esto apenas empieza, tengo la sensación de que hay muchas cosas más que descubrir de los números, que encierran secretos inimaginables y estoy ansioso de saberlos.

Llego a mi casa y de inmediato leo la carta que Teodoro me dio.

Hola Jorge:

Ahora tenemos un ejemplo de algo infinito: el conjunto de los números con los que contamos objetos. A esta sucesión de números,

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$

les llamaremos, ¡números naturales! Recuerda que los tres puntos sucesivos son simplemente una abreviación, para no tener que escribir todos. La palabra 'natural', es sólo el nombre que se les da a los números que siempre has conocido; como el uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc., simplemente es una convención para llamarles de alguna manera. Ya vimos que lo que nos rodea se puede contar, o llegar al número aproximado de elementos que tiene un conjunto, no importa qué tan grande sea. Nunca vas a encontrar en la naturaleza un conjunto que no tenga fin, porque no existe. Lo interesante es pensar en ideas abstractas como la totalidad del conjunto de los números naturales. Sin embargo, siempre hay infinidad de números más grandes que cualquiera, no importa de qué tamaño sea. Esto lo vimos cuando recordaste el juego con tu madre, ella decía un número y tu siempre eras capaz de encontrar otro mayor. Esto nos demuestra que los números no tienen un límite, no hay uno que sea el mayor de todos. Pero hablamos de que es posible representar a los números aunque no terminen. Si alguien te pide que

escribas los números del uno al mil, te vas a tardar mucho tiempo, no tiene sentido y hay otra forma sencilla y compacta de expresarlos. Sólo tienes que escribir los primeros, luego tres puntos suspensivos y en seguida el último número.

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1000$$

Lo anterior representa a la serie de números, desde el uno hasta el mil. Los tres puntos suspensivos simbolizan desde el seis hasta el novecientos noventa y nueve. Esto es una maravilla, pues facilita las cosas y no hay que escribir mucho, para representar sucesiones de números muy grandes. Recuerda que esto ya te lo comenté en la carta pasada, cuando te conté el premio que le pidió al rey el inventor del ajedrez. Pero esto no acaba aquí, de la misma manera se puede representar a la serie completa, e infinita, de los números naturales de la siguiente manera.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

donde los tres puntos suspensivos simbolizan a los números siguientes, pero, con la novedad, de que no se indica cuál es el último, porque no existe. Es decir, en este caso, ponemos a la serie ilimitada; sin límite; sin fin.

Que sencillo, ¿no? Sólo escribí algunos de los primeros números de la serie y al final uso los tres puntos suspensivos. Aquí ya simbolizan una infinidad de números. Así tenemos que los tres puntos suspensivos son una maravilla, sirven para escribir una cantidad limitada de números o una infinidad. Claro que se pueden combinar ambas ideas. Imagina que estás interesado en escribir el conjunto de números del uno al mil, pero también quieres representar a la serie completa, es decir, infinita. En este caso la expresión es:

$$1, 2, 3, 4, \dots, 1000, \dots$$

Aquí se usaron ambas ideas, los primeros tres puntos simbolizan del cinco al novecientos noventa y nueve, mientras que los segundos tres puntos simbolizan el mil uno, mil dos, mil tres, etc., es decir, toda la infinidad de números naturales que existen, a partir del mil uno.

Este conjunto de los números naturales tiene una manera exacta de definirlos, es muy sencilla y así se entienden mejor. Las comas se usan para separar cada número. Con esta representación puedes escribir cualquier serie de números naturales, no necesariamente debes de empezar en uno, puedes comenzar desde cualquiera, el tres:

$$\{3, 4, 5, 6, \dots\}$$

cinco:

$$\{5, 6, 7, 8, \dots\}$$

mil:

$$\{1000, 1001, 1002, 1003, \dots\}$$

Tampoco es necesario que vayas de uno en uno. Aquí también hay completa libertad, depende de tus necesidades y exigencias. Quiero hacer énfasis en algo que ya te mencioné. Un número es una expresión de una cantidad, pero todos los números juntos forman lo que se conoce como el conjunto de los números naturales. Piensa en conjuntos de la naturaleza, aquellos que se pueden contar o es posible aproximar el número de elementos. Si tenemos, por ejemplo, canicas, podemos formar un conjunto de tres canicas, otro de quince, otro de veinte, unos más de siete, etc.

Este conjunto de los números naturales, que no tiene fin, tiene características muy importantes, que sirven para entenderlo y lo definen de manera exacta.

Saludos, Teodoro.

¿Una expresión tan pequeña que representa algo que jamás termina? Realmente sorprendente la carta de mi amigo. Estos números en realidad son increíbles. No sé por qué en la escuela no nos enseñan este tipo de cosas, sería muy divertido e interesante.

Los días pasados pensé en lo que el viejo mencionó en la carta: representar a algunos conjuntos muy grandes, hasta me parece un juego de niños. Recordé los conjuntos que discutí con el viejo y ahora los represento en mi inseparable libreta. Por ejemplo, comienzo con el conjunto de las diez canicas que me regaló. Me doy cuenta de que las puedo escribir todas o utilizar los tres puntos suspensivos.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

o

$$1, 2, 3, \dots, 10$$

Recordé que calculamos, aproximadamente, que en el mundo puede haber sesenta mil leones, si lo quiero representar en una expresión es muy fácil.

$$1, 2, 3, 4, \dots, 60,000$$

Y no tuve la necesidad de escribir todos los números, uno por uno. Esto en verdad me gusta, facilita mucho la vida para escribir conjuntos de cosas muy grandes.

Un conjunto con muchísimos elementos pero que, aún así, es sencillo de representar en una expresión breve y fácil de escribir. Ahora me entretengo con esto, pienso en diferentes conjuntos y los simbolizo. No importa cuántos elementos tengan, siempre los puedo abreviar. Ahora recuerdo que el viejo me dijo algo a lo que no le di la mayor importancia: que el conjunto de los números naturales tiene una manera exacta de definirlos. Pienso en esa manera pero no la puedo encontrar. Creo que ya es tiempo de hacerle una visita al viejo, tengo que conocer todos los misterios de este impresionante conjunto.

Casi diario salgo a caminar por las calles; poco a poco, mis padres me dan más libertad. Es muy sencillo obtener sus permisos. Sólo tengo que hacer lo que ellos llaman deberes hacia mi familia, casa y escuela. No es otra cosa que cumplir con las tareas, hacerlas a la hora que ellos dicen y portarme bien con mis hermanas. Después de todo, esto me ayuda a tener más organización, ya que tengo una hora determinada de hacer la tarea, de jugar, de comer, etc. Es decir, mis padres han puesto horario para todo. Antes esto me resultaba aburrido y no lo hacía, pero veo que no es tan difícil ni molesto, además de que obtengo permisos para muchas cosas, entre ellas salir todas las tardes o escribir en mi cuarto sin que nadie me moleste. Encuentro una parte del pueblo que jamás había visitado. Es una especie de monumento a una persona, se trata del fundador de este lugar. En realidad la estatua es muy pequeña y a las personas ya no les interesa. Está muy descuidada pero a mi se me hace hermosa. Es todo de metal pintado de rojo, pero, sobre todo, me llamó la atención el letrero que tiene casi enterrado en la tierra, sin que a nadie le importe. ¿Cómo es posible que hayan olvidado a alguien que asentó el lugar donde vivimos? Es por estas cosas que no logro entender a las personas, es como olvidar a nuestros padres o abuelos. Así que este lugar se convierte en mi favorito, a las orillas del pueblo y sin mucha gente alrededor. Ya son dos semanas las que vengo al mismo sitio, casi a diario, pienso en todo y en nada. Por esto me he olvidado de ir a ver al viejo, pero prometo que mañana lo haré.

Hoy es viernes y tengo muchas preguntas para mi amigo. Llego a la cabaña y de inmediato el viejo me platica algo acerca de los números que no había considerado.

— Ahora ya sabemos dos cosas muy importantes acerca de la sucesión de números naturales: primero, que dado uno siempre existen una infinidad más; y, segundo, que es posible escribir la serie completa con la ayuda de los tres puntos suspensivos. Pero esto que te digo no siempre ha sido aceptado, incluso por grandes personajes de la antigüedad. Hace tiempo comentamos sobre la manera de llegar al conocimiento de algo y mencionamos al gran filósofo Aristóteles. Él decía que no se puede pensar en la serie completa de los números.

— ¡Que no se puede! —replico—. Pero, ¿por qué decía eso?

— Según él, como la serie de números naturales es infinita, ningún hombre la puede pensar en su totalidad, ya que el hombre es finito, mientras que los números no. Pero lo que se piensa en la actualidad es que la capacidad de la mente puede hacer esto y mucho más, que no importa que la serie de los números naturales no termine, es posible pensar en que tenemos a todos dados y que no los vamos a construir uno por uno porque, en efecto, no terminaríamos.

— Deja ver si entendí bien. Cuando tienes un número, el que sea, siempre se le puede sumar la unidad y obtener uno mayor. Y esta operación se puede repetir infinidad de veces, así nos damos cuenta de que la serie es infinita, ¿así es?

— Tal como lo dijiste —responde el viejo.

— Ahora me dices que no basta hacer estas sencillas sumas para tener a todos los infinitos naturales. Entonces, ¿para que sirvió eso de sumarle uno a cualquier número?

— No te compliques pequeño amigo. Eso de sumarle uno a cualquier número nos sirvió para verificar, para estar convencidos de que la serie en verdad es infinita. Pero no podemos ponernos a sumar infinitamente, pues somos finitos así como nuestra vida, jamás terminaríamos. Aquí es donde entra la grandiosa capacidad de la mente, que es posible pensar que tenemos la *serie completa* de los naturales, aunque sean infinitos. Es lo que no se aceptaba antes, pensar en algo infinito porque somos finitos. Pero yo digo que esto es totalmente posible. Tú que dices, ¿puedes pensar en la serie infinita de los números?

— Claro que puedo —respondo convencido y pensando en que Aristóteles no pudo hacerlo—. Ahora tengo una pregunta, ¿los grandes sabios de antes no podían pensar en la serie completa de números naturales?

— Yo creo que sí podían pero lo importante es que no lo aceptaban. Pasaron muchos siglos para que esta idea que te comento fuera admitida por la mayoría de los estudiosos de los números. Así que, si puedes pensar en que tenemos dados a todos los números infinitos naturales has avanzado en tu pensamiento enormemente. Pero te digo que mucho se ha escrito al respecto, así tenemos el caso de Voltaire, un escritor y filósofo francés que se preguntó: ‘¿Puedo tener una idea exacta de lo que es el infinito?’ A lo que él mismo se contestó: ‘Yo sólo lo comprendo confusamente, con desorden, con confusión ¿me sucede esto por qué se que soy totalmente finito? ¿Quién se explica lo que es caminar por siempre sin avanzar un solo centímetro, contar siempre sin llegar a hacer una cuenta, dividir siempre sin encontrar la última parte?’ Aquí parece que Voltaire no aceptó la idea del infinito. No se si se refería específicamente a los números, pero lo que dijo representa lo difícil que se le hizo pensar en esta idea. Ahora tú tienes la oportunidad de pensar en la totalidad de los números, es decir, que puedes imaginarte que ya están todos dados, absolutamente todos aunque sean infinitos. Si puedes tener en la mente a la serie completa, a la totalidad de los naturales, habrás avanzado enormemente en este tema. Es más, tendrás más poder en la mente que muchos intelectuales de todas las épocas.

Contento de estas palabras, me imagino como alumno de Aristóteles en la antigua Grecia y debatiendo con él acerca de este tema, siendo admirado por mis compañeros y por los propios maestros, por poder pensar en todos estos números infinitos. Uno de mis sueños que, tal vez jamás logre, es viajar en el tiempo. Me atraen muchas épocas, ahora añado una más a mi lista: aquella en que este gran filósofo enseñaba para poder estudiar con él. Pero ahora tengo a Teodoro y recuerdo que tengo algunas dudas respecto a estos números tan interesantes.

— Hay algo que no me convence en los números naturales —le digo al viejo.

— Tal vez que son muchos —dice el viejo en tono de broma.

— No, eso ya me queda muy claro, son infinitos, no terminan nunca. Siempre que se tiene uno se pueden encontrar muchos más, solamente sumándole cada vez la unidad. Digamos que tenemos el seis, si le sumamos uno obtenemos el siete, ¿así es?

— Por supuesto que es correcto, es algo que sabes desde que eras muy pequeño.

— Estoy de acuerdo pero, en medio del seis y del siete, ¿qué hay? Es decir, ¿en medio de estos dos números naturales no hay más números naturales?

— Qué gusto que te surgió esta duda, es algo muy interesante. No hay de que preocuparse, en medio del seis y del siete no hay otro número natural. Si tienes el seis, al siete se le llama ‘sucesor’ del seis, porque es el que le sigue, es el que resulta al sumarle uno.

— ¿Así que todos los números naturales proceden de su antecesor? Es decir, ¿que cada número se obtiene sumándole un uno a otro?

— Casi todos —responde el viejo—, hay un elemento que no se comporta así, el primer elemento del conjunto: el número uno. No existe ningún número que sumado con uno nos de el uno.

— Claro que sí existe —respondo emocionado por encontrar un error en los razonamientos del viejo—. Si al cero se le suma uno, se obtiene, precisamente, el uno.

— En eso tienes razón, pero resulta que el cero no es un número natural, el uno es el primero de toda la serie.

— ¿Por qué el uno y no el cero?

— Por simple convención, aunque hay personas que no lo consideran así. Pero nosotros vamos a aceptar que la serie de números naturales empieza con el uno. Ahora dáte cuenta de una cosa muy importante. Tomemos un número, el que sea, dime uno.

— Pues el quince.

— Ahora, ¿cuál es el sucesor del quince?

— Pues dices que se obtiene sumándole uno, entonces es el dieciséis.

— Muy fácil. Tenemos que cualquier número siempre va a ser diferente a su sucesor, aquel que se obtiene al sumarle la unidad. Además de que, como ya dijimos, no hay ningún natural entre cualquier número y su sucesor. Quiero que te des cuenta de otra cosa muy interesante en la sucesión de este conjunto. Si tomamos dos números diferentes y obtenemos sus sucesores, estos también tiene que ser diferentes entre ellos. Vamos a ver un ejemplo. Dime dos números diferentes, los que se te ocurran.

— El quince y el treinta y dos.

— Ahora menciona sus sucesores.

— Eso es muy fácil, son el dieciséis y el treinta y tres.

— Así es, date cuenta de lo que dije anteriormente. Estos dos últimos números son distintos entre sí, por provenir de dos números también distintos.

— ¿Funciona para cualesquiera dos números que tomemos?

— Si son diferentes, sí: sus sucesores tienen que ser también diferentes. Pero hay otra cosa que resulta de suma importancia. ¿Recuerdas como se escriben la totalidad de los números?

— Claro que sí, puedo usar los tres puntos suspensivos para simplificar.

— Muy bien. Aquí tienes esta hoja con una representación. Les llamé N por ponerles un nombre.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

— Lo anterior representa a la sucesión completa de todos los números —continúa el viejo—. Ya vimos la utilidad de los tres puntos suspensivos. Para cada número, con excepción del uno, tiene un número tal que, sumándole uno se llega a él. También vimos que un número y su sucesor siempre son distintos. Algo también importante es que todos los números que están en la serie son distintos, es decir, que no vas a encontrar el tres, once, treinta o mil otra vez en la serie.

— ¿Esto quiere decir que cada número aparece una sola vez? ¿Qué jamás se repite?

— Así es. Cada elemento del conjunto es único y no se encuentra dos veces, no se puede encontrar, por ejemplo, el mil más de una vez. Ni el mil cinco, ni el cien mil, ni el diez millones once, ni ninguno. Cada elemento, no importa del que se trate, aparece una sola vez en la serie.

— ¿Cómo sabes eso?

— Por el concepto de sucesor. Ya sabemos que la serie comienza con el uno, con la sencilla operación de sumarle la unidad obtenemos el dos; le sumamos al dos la unidad y llegamos al tres; luego al cuatro; cinco; seis; siete; ocho, etc. También recuerda que un número siempre es distinto a su sucesor. No puede aparecer de nuevo, digamos, un tres, porque estaría en desacuerdo con esto que te menciono.

— ¿Para qué nos interesa saber que cada número sólo aparece una sola vez en la sucesión completa? —pregunto creyendo que esto carece de sentido.

— Para darse cuenta de la grandiosidad de la serie y cómo es que es infinita. Si no te dijera estas cosas, pudieras pensar que hay un límite, que existe un número más grande que todos, que a partir de ese la serie comienza de nuevo, al terminar, vuelve a empezar y así sucesivamente. Entonces llegarías a la conclusión de que todo es falso, que realmente no es un conjunto infinito, sólo que lo hacemos más grande al añadirle cosas que terminan, pero no es así. Cada número es distinto y no se repite. El concepto de sucesor nos ayuda a entender esto de manera más clara.

Con estas explicaciones comprendo mejor a los números. El viejo tiene razón. Ahora me doy cuenta de que en verdad nos encontramos ante un conjunto increíble, infinito por sí sólo, es decir, no termina porque siempre hay más y más números diferentes, todos entre sí.

— Así nadie puede dudar de la infinitud de esta serie — continúa el viejo—, nadie puede decir que es una falsedad y que no existe algo que jamás termine.

— Tienes razón —respondo—, está claro que este conjunto jamás termina. Se forma un silencio en el que, cada uno de nosotros, parece analizar lo que hemos dicho. Mi amigo me habló de los números, de algunas cosas que pasan con ellos y de que el cero no forma parte de la serie por convención. Pero, ¿quién acordó esto? ¿Por qué las cosas tienen que ser de determinada manera? ¿Por qué las personas hacemos lo que otros dicen?

— Yo digo que las reglas se usan más en la vida de lo que te has dado cuenta — dice Teodoro al preguntarle al respecto—. Es más, las usas tanto que ya te acostumbraste a ellas. O tal vez no lo recuerdes en este momento. Un ejemplo muy sencillo, que lo debes de haber visto mucho, es el fútbol. Este deporte tan popular tiene reglas muy específicas, que todos los que lo practican las siguen o creen hacerlo. Un grupo de personas se pusieron de acuerdo en la manera de jugarlo, luego todos las aceptaron y ahora en todo el mundo tratan de usarlas. Imagina que cada quien hiciera lo que se le antojara en el terreno de juego, simplemente sería un caos y no se podría jugar. Mientras que para unos algo sería tiro de esquina, para otros no, o tiro de castigo, saque de banda, etc. Así que es necesario tener reglas para la mejor convivencia y el mejor funcionamiento de la sociedad. En tu caso también tienes reglas, por ejemplo en tu casa.

— Eso sí, en mi casa también hay reglas, y muchas. Últimamente me di cuenta de que al seguirlas me llevo mejor con mi familia.

— Si las personas no se ponen de acuerdo en como jugar, por ejemplo, el póquer, habría problemas para decidir el ganador. Por ejemplo, ¿qué vale más un par o una terna?

— Pues un par, ¿no? —contesto muy indeciso.

— Pues yo tengo entendido que no es así, que vale más una terna porque es más difícil de obtener. Aquí está lo que te digo, podemos jugar con lo que tú dices o con lo que yo sé. En cada caso nos van a dar resultados totalmente distintos. Pero si llega otra persona que diga algo contrario y se juegan con esas reglas, entonces el juego y los resultados cambiarán mucho.

— Pero esto no es válido, que pueda ser diferente sólo porque no todos están de acuerdo en lo mismo.

— Claro que es válido, sólo hay que establecer las reglas y seguirlas. Aquí la importancia de lo que te digo, en el conjunto de números naturales se tienen los principios que te mencioné, así se establecieron y las personas que quieran estudiarlos tienen que regirse por ellos.

— ¿Y si no lo hacen?

— Pues entonces estudiarían otra cosa que no son los números naturales. Pero para eso tiene que establecer las reglas y darles nombre a los objetos que estudien. Lo que te quiero decir es que es sumamente importante ponerse de acuerdo para todas las cosas. Es por eso que existen reglas básicas para todo. Te voy a poner otro ejemplo, el dominó. En este juego hay personas que usan la ficha blanca como comodín, pero la mayoría no lo hace así. Esta pequeña regla puede modificar el resultado de una partida, dándole el gane a una u otra persona.

— La verdad yo no sabía que la blanca se usara como comodín.

— Pues sí, algunas personas lo hacen, si juegas con ellos tendrías que adaptarte a sus reglas y seguirlas.

— Que complicación, puedo entender la importancia de lo que dices. Si no hubiera acuerdos anteriores no se podría hacer casi nada.

— Así es. La vida de los seres humanos se rige por normas, así como los juegos, los animales y todas las áreas de conocimiento. Con los conjuntos pasa lo mismo, hay ciertas reglas que seguir para estudiarlos. Antes te había dicho que el conjunto de los números naturales vive en el plano de las ideas abstractas. Ahora, agrégale que tienen

ciertas reglas que se siguen. Pero no por esto deja de ser válido esto, ayuda al conocimiento intelectual y del mundo en que vivimos.

— Esta bien todo eso pero, ¿cómo es que dieron con esas reglas? ¿En qué se basaron?

— En el estudio de cada objeto. Volvamos al póquer, unas combinaciones de cartas son más difíciles de obtener que otras, entonces deben de valer más puntos. Esto se determinó con base en estudios rigurosos de las cartas y las posibles combinaciones. Que la gente no lo respete es otra cosa. También en el fútbol pasa, por más reglas que existan no implica que las respeten y las sigan paso a paso.

— ¿Entonces lo mismo pasa con el conjunto de los naturales? Me dijiste que el uno es el primero de todos, es decir, que no es sucesor de ningún número. Entonces nadie me obliga a respetar eso y puedo decir otra cosa, ¿no?

— Sí, de hecho, algunos consideran al cero como el primero de toda la sucesión. Un grupo de personas que conocen mucho del tema, establecen las que consideran mejores reglas; pero esto como consecuencia de muchos estudios y pueden cambiar con el tiempo. Digamos que afirmas que el uno sí es sucesor de algún número. No basta con sólo afirmarlo. Tienes que mostrar que tu nueva afirmación es mejor que la anterior. Debes demostrarle al mundo que lo que dices es lo correcto, con pruebas matemáticas y argumentos sólidos. Lo que no pasa con las reglas, por ejemplo, del dominó. Esas cosas son para entretenerse y no afecta en lo más mínimo que algunos lo jueguen de una u otra manera. Pero en las áreas del conocimiento, muchos modelos sirven para representar algo en la realidad, así que no las puedes cambiar sólo porque no te gustan.

— Eso quiere decir que en las áreas del conocimiento son más estrictos.

— Sí, si lo quieres ver de esa forma está bien, somos más estrictos.

*Ver el mundo en un grano de arena
Y el cielo en una flor silvestre
Asir el infinito en la palma de tu mano
Y la eternidad en una hora.*
William Blake

Capítulo 4

UN MUNDO NUEVO AL ALCANCE DE LO MÁS SENCILLO

Poco a poco empieza la temporada de lluvias. Los días se vuelven más fríos y el ánimo de las personas cambia. He escuchado comentarios de que es una época fea, triste y que nada se puede hacer; yo no comparto este pensamiento. Me gusta este ciclo en que los árboles se llenan de agua, el cielo cambia de color y el estado de ánimo de las personas es diferente. En la noche cayó la primera lluvia del año. Dejó el patio de la escuela encharcado y nadie se atreve a correr y jugar por miedo a mojarse. No es que no lo quieran hacer, sólo que los maestros nos han dicho que tuviéramos cuidado, que no nos empapáramos porque nos ensuciaríamos la ropa. Así que todos los alumnos se limitan a caminar y platicar tranquilamente, mientras los maestros permanecen en sus salones o en la sala que está reservada especialmente para ellos.

Hay un profesor que no hace esto, sino que se sentó frente a la cancha de fútbol, con un balón en los pies y sólo observa a los alumnos que están cerca. Este individuo es joven,

con aspecto agradable y nuevo en el colegio. Nadie sabe para que está aquí, ni que materia va a dar, sólo que mañana debemos de ir al auditorio porque va a impartir una conferencia sobre la evolución de la vida. Lo miro atentamente, hay algo en esta persona que me atrae, pero no sé qué es. Tal vez lo delgado, tal vez su mirada profunda, tal vez su manera de vestir muy distinta a todos los profesores, no lo sé. De pronto lanza el balón y llega directamente a mí. Sin saber que hacer, por lo inesperado de la situación, lo pateo con la intención de regresarlo a su dueño, pero no logro la dirección correcta y va a dar a uno de los alumnos que caminan un tanto aburrido. Éste lo patea hacia uno de sus amigos y comienza un ir y venir de la pelota. No pasan muchos minutos y se juega un partido improvisado de fútbol, con el balón del maestro nuevo y la complicidad de todos los participantes. Lo que me sorprende, es que el propio profesor juega con los alumnos, cosa nunca antes vista en esta escuela. Todos juegan muy bien, incluyendo al conferencista de mañana, que ahora luce como uno más de nosotros: juega sin importarle nada más en la vida.

Por fortuna, ningún otro de los maestros se da cuenta de este incidente. Al final todos regresamos a los salones de clase y mis compañeros están muy contentos, dicen que cuando este profesor de clase, todo va ser diversión y nada de trabajo. Con este suceso terminan las clases con otro contexto, ahora todos lucen felices por poder jugar a pesar del impedimento de las autoridades escolares.

Llego a mi casa y se me olvida pronto lo que pasó en el colegio. Siento un poco de cansancio y no tengo ganas de hacer algo, pero la comida de mi madre es realmente sabrosa y esto me llena de ánimos. Ahora se que es bueno tener que seguir reglas y las cumplo sin la molestia acostumbrada. Termino rápidamente con los quehaceres del hogar y con la tarea de la escuela. Saco la carta que me dio mi amigo la última vez que lo vi y la leo por tercera o cuarta ocasión. En ella me comenta sobre su percepción del pueblo, lo bien que le caigo y cosas por el estilo. Me resulta muy agradable platicar con Teodoro, ya sea personalmente o simplemente leyendo lo que me escribe. La carta me hace recordar todos los conjuntos que contamos, desde los muy pequeños, como las diez canicas que me regaló, hasta el número de átomos que hay en todo el mundo, que es realmente inmenso. También me dice que todo conjunto, no importa cual sea, siempre va a tener un número relacionado, aquel que representa la cantidad de elementos que tiene. Y realmente tiene razón, pues ya vimos que

todo conjunto, sin importar lo grande que sea, se puede llegar a saber, aunque sea de manera aproximada, la cantidad de elementos que tiene. Antes pensaba que esto era imposible que, por ejemplo, era inadmisibile saber cuántos granos de arena tiene una playa, mucho menos todas las playas de todo el mundo. Pero Teodoro me enseñó varios métodos para contar, o aproximar, el número de muchas cosas.

En alguna ocasión mencionó que todo conjunto, sin importar de cuál se trate, se pueden contar sus elementos y hay un número que los representa a todos ellos. Pero creo que ahora sí Teodoro se equivocó, pues, al ser los números infinitos, no se pueden contar porque siempre hay más y más. Nunca voy a encontrar un número que los represente, pues si digo, por ejemplo, que hay cien millones de números se que es una mentira, pues hay muchos más. No importa que tan grande sea un número que piense, no va a ser suficiente para contar todos los números que hay, pues son infinitos. Y conste que esto me lo escribió mi amigo en la última carta que me dio. Creo que ahora realmente se equivocó en su apreciación.

Con esta idea corro hacia el bosque para decírselo a Teodoro, pues no puedo esperar a indicarle que encontré una falla en lo que escribió. En el camino encuentro a unos compañeros de la escuela, se divierten con un juego que desconozco y me invitan a unirme a su equipo. Dudo mucho si debo quedarme o no, pues estoy ansioso por platicar con el viejo, pero también me dan ganas de permanecer en este lugar. Al final decido irme, pongo de pretexto que tengo que regresar a mi casa pues mis padres me esperan y tengo que llegar pronto.

En menos de diez minutos estoy frente a la cabaña de mi amigo. Entro totalmente agitado por el esfuerzo que hice y lo veo escribir sobre unas hojas, con muchos libros alrededor y de fondo una música extraña pero bella para mí. Alza la vista y parece que le da gusto verme, pues de inmediato deja lo que hace y me invita a sentarme.

— Creo que hay algo mal en lo que escribiste en la última carta —digo de inmediato una vez que recupero las fuerzas para hablar.

— ¿En serio? —dice Teodoro con falsa sorpresa en el rostro—En verdad quiero que me expliques de qué se trata.

— Es algo que tiene que ver con lo que dijiste respecto a poder contar los elementos de cualquier conjunto, ¿lo recuerdas?

— Claro que lo recuerdo —contesta realmente interesado en mis palabras—. En aquella carta te dije que tengas el conjunto que tengas, no importa cual sea, siempre va a haber un número que se relacione con él, que es precisamente el número de elementos que tenga.

— Pero yo digo que esto no es cierto, pues encontré un conjunto en donde no funciona esto. Bueno —corrijo—, no es que lo haya encontrado, tú mismo me mostraste que podemos pensar en él.

— ¿Cuál es ese conjunto que hace que mis argumentos sean falsos? Por cierto, recuerda que ‘la falsedad tiene infinitas combinaciones, pero la verdad tiene sólo un modo de ser’, según el filósofo francés Jean Jacques Rousseau. Esto quiere decir que la falsedad la podemos encontrar de diversas formas, pues ésta es amplísima, pero la verdad es única, no por esto fácil de observar, por eso dijo Rousseau que tiene sólo un modo de ser. Entonces dime, ¿cuál es la afirmación falsa que mencioné disfrazada de verdad?

— Pues el conjunto de los números naturales. ¿Estás de acuerdo que es un conjunto que jamás termina?

— Claro que estoy de acuerdo.

— Pues precisamente por eso no se puede relacionar un número que represente a todos los elementos que tiene. Cualquier número que pienses, no importa qué tan grande sea, no es suficiente para contar a todos sus elementos, pues son infinitos. Es por esto que lo que me escribiste es falso —concluyo de manera triunfal.

— Tienes razón en tu razonamiento. Ahora estamos ante un gran problema que hay que resolver. Estaría muy bien que existiera un número que represente a los infinitos elementos que tiene pero, como bien dijiste, no puede ser ninguno de los que conocemos. Hay que inventar uno nuevo que cumpla con esta función.

— ¿Inventar? —pregunto ahora muy sorprendido— Esto parece una trampa, si no existe pues ya hay que dejarlo así, cualquiera que inventes va a tener el mismo problema, no va a representar a todos los números, pues son infinitos.

— Precisamente por eso hay que inventar uno nuevo que si lo haga. ¿Qué nombre quieres que le pongamos a este nuevo número?

— ¿Puede ser el nombre que sea?

— Claro, pues nosotros lo inventaremos, lo importante es lo que va a simbolizar, a la sucesión completa de todos los números. ¿Se te ocurre algún nombre?

— La verdad no.

— Entonces te voy a proponer uno. Hace tiempo conocí el alfabeto hebreo y me gustó mucho la primera letra, se llama *aleph* y se representa con el símbolo χ . ¿Estas de acuerdo que así le llamemos al número que va a representar a la totalidad de los números?

— Pues si estoy de acuerdo, pero es muy extraña esa palabra para mí, ¿no podríamos ponerle de nombre algo más común?

— Tengo una idea mejor, le dejamos *aleph* porque a mí me gusta, pero le agregamos el cero que tu conoces. Entonces, el número nuevo, que va a representar a la serie completa de todos los números, se va a llamar *aleph cero*, ¿qué te parece?

— Estoy de acuerdo. Ahora, ¿cuál va a ser el símbolo que lo distinga?

— Pues el que te había enseñado antes, sólo que con un pequeño cero como subíndice: χ_0 .

¡Qué fácil resolvió Teodoro el problema que le planteé! Tan solo inventó un nuevo número, dándole un nombre raro y listo. Pero todavía me queda la duda de si en verdad es nuevo este *aleph cero* y qué tan válido es usarlo. Más bien no me queda claro que sea nuevo, necesito de alguna prueba que me lo confirme. Al decirle esto a Teodoro me comenta que hay formas muy fáciles de convencerme de que este número es nuevo, pero que en otra ocasión me las enseñará. Que por ahora quiere que lea un cuento más, así que saca unas hojas de una vieja mochila y me las da. Que bien, el cuento pasado del rey me gustó mucho y espero que este también.

El hotel fantástico

Se dice que, en una ocasión, había un hotel muy peculiar y famoso en una isla muy lejos de todo lo conocido. El acceso a este lugar era muy difícil y, una vez que llegabas, no podías salir de ahí hasta días después. En la zona sólo había un hotel y las personas que llegaban a él eran muchas, por lo que siempre estaba ocupado, totalmente lleno, sin ninguna habitación libre. Un buen día llegó un visitante a la isla y, obviamente, fue a pedir una habitación a pesar de que el letrero decía que estaba lleno. El encargado, en lugar de negársela, le tomó sus datos e hizo algo para desocuparle un cuarto. Tomó el

teléfono y dispuso una orden muy sencilla: que la persona que ocupaba la habitación uno se pasara a la dos; que la de la dos se pasara a la tres; que la persona de la habitación tres se pasará a la cuatro; el de la cuatro a la cinco y, así, sucesivamente. Es decir, cada quien se mudara al cuarto sucesor. Como las habitaciones de este hotel tan peculiar eran infinitas, no hubo algún problema. Absolutamente todas las personas tuvieron de nuevo una habitación y nadie resultó afectado. Con esta sencilla operación las infinitas personas quedaron albergadas de nuevo. Pero esto no es todo, cada que llegaba una persona nueva se repetía este proceso, y así daban un servicio excepcional porque jamás se negaba a nadie el hospedaje.

Ya te darás cuenta del secreto de este hotel. Simplemente se podía realizar esta operación, porque las habitaciones con que contaba eran infinitas en cantidad, jamás terminaban. En un hotel con número de habitaciones finita, no se puede hacer esto. Si tiene, por ejemplo, cien habitaciones, llega alguien y quiere una más no se puede aplicar el mismo procedimiento para que se instale.

¡Qué cuento tan corto e interesante me dio mi amigo!, muy original y entretenido. Me gustaría tener un hotel así, donde siempre hubiera espacio para alguien más, sin importar que ya estuviera totalmente lleno. Esto en la vida real es imposible, no puede haber un hotel con infinitas habitaciones. Pero lo más sorprendente es que no hay límite para que nuevas personas se hospeden. ¿Por qué pasa esto? Al final del cuento mi amigo dice que porque el hotel tiene infinitas habitaciones, pero no me queda muy claro. Se supone que ya está lleno, que ya no cabe nadie más, pero cuando llega un nuevo cliente, cada persona se recorre a la habitación siguiente; el que está en la habitación uno se pasa a la dos; el que está en la dos se pasa a la tres; el que está en la tres se instala en la cuatro; el que está en la cuatro se pasa a la cinco y así sucesivamente, y así dejan el cuarto uno libre para el nuevo huésped. Con esta sencilla operación resolvieron el problema pero, ¿qué tan posible es esto? ¿Por qué se puede hacer en un hotel con infinitos cuartos? La verdad que si comprendo la operación, pero hay algo que no me convence. ¿Qué pasa con las personas que tienen la habitación cien millones o mil millones de millones? Según el cuento, también se recorren a la habitación siguiente, es decir, a la cien millones uno y a la mil millones de millones uno, respectivamente. Y no importa en que habitación estén, simplemente se recorren a la siguiente y ya, le suman un uno al número de cuarto que tienen y listo. Esa es la nueva habitación que les toca. Es como cuando Teodoro me explicó lo del sucesor de un número.

Las personas se tienen que hospedar en la habitación, digamos, sucesora, la que está después de la suya en la numeración. Tal vez aquí se encuentre todo el secreto: como los cuartos jamás terminan, son infinitos, igual que los números, se puede hacer este proceso pues nunca se terminan las habitaciones para que la operación dispuesta, pueda tener el final esperado de desocupar una habitación. Suena bien esto, me agrada tanto que transcribo el cuento completo a mi libreta así como a las conclusiones que llegué. Después de todo, el ‘hotel maravilloso’ no es otra cosa que una copia de los números. El número de habitaciones es infinito y se comportan de la misma manera.

Ya es hora de dormir y no puedo dejar de pensar en dos cosas: conocer el hotel maravilloso, aunque sé que esto es imposible; y, en la plática que dará mañana el nuevo maestro. Su actitud de hoy me dejó realmente asombrado: comportándose como otro alumno, rió y jugó a la pelota como si fuera uno más en la escuela. El tema que va a tratar también me interesa: la evolución de la vida. Alguna vez nos explicaron esto en la escuela, pero no recuerdo casi nada. También quiero ver el ambiente durante la plática, pues tal vez mis compañeros no lo tomen en serio, pues posiblemente lo van a ver sin autoridad y no le pongan atención. Al final quiero ir a ver a Teodoro, pues le quiero comentar lo que pensé del hotel maravilloso.

En la escuela hay gran expectación por la conferencia, pues raramente hay una. Todos los alumnos queremos que ya terminen las clases para dirigirnos al auditorio. En el receso se espera que el maestro vuelva a jugar, pero nadie lo ha visto en todo el día. Algunos comentan que tal vez le dio miedo y se quedó en su casa. Hay burlas por este motivo y esto me molesta, que digan cosas sin tener fundamento. Aprovecho el receso para ir a la biblioteca y pedir un libro para una tarea. Entro al edificio y encuentro rápido lo que busco. Lo hojeo y me interesan las fotos impresas, pues son coloridas y jamás las había visto. Al dirigirme a la salida hay algo que me extraña mucho, pues en el fondo hay una persona que lee frente a una mesa. Me da curiosidad que se encuentre alguien a esta hora. Pensé que todos los alumnos estarían jugando y dejarían esto para el final. Me acerco lentamente para ver de quien se trata y me llevo una gran sorpresa, pues es el maestro nuevo que se encuentra muy entretenido leyendo un libro en un idioma extraño, pues no comprendo el título. Él siente mi presencia y voltea lentamente, su expresión es de amabilidad pero yo salgo inmediatamente de ahí, sin saber el por qué de mi actitud.

Por fin la hora esperada, la conferencia sobre la evolución de la vida. El auditorio está totalmente lleno y sólo se ve una gran pantalla frente a todos nosotros. Se apagan las luces y comienzan a proyectar una serie de fotos muy impresionantes. Aparecen animales muy extraños, parecidos a peces, caballos, elefantes, lagartos, moscos, etc., pero muy distintos a los que conozco. Todos estamos interesados y el silencio que se genera es total. Siguen las imágenes, todas ellas con un parecido a algunos animales de la actualidad, pero hay algo que cambia. Al final se prende de nuevo la luz y ya está el nuevo maestro en el escenario, con un pequeño micrófono inalámbrico.

¿Cómo saben que todas las personas que viven en el mundo son parecidos a ustedes? —Comienza la conferencia el maestro— ¿Cómo saben que del otro lado del mundo no hay niños con tres manos, dos cabezas o seis dedos en cada mano y son perfectamente normales? ¿Se han preguntado cómo eran los seres vivos hace cien, doscientos o mil años? Las imágenes que les acabo de mostrar son una prueba de algunos seres que vivieron hace mucho tiempo, pero ahora ya han cambiado notablemente, son distintos pero aún conservan ciertas características. Hay muchos factores que intervienen para que se lleven a cabo estos cambios, es por eso que estoy aquí con ustedes, para que juntos entendamos la evolución de la vida y la manera en que nos afecta.

En este punto todos los presentes estamos más que interesados. Primero con las fotos y luego con las preguntas iniciales del maestro. La manera de introducirnos al tema me agradó mucho, sin las formalidades de los otros profesores. Durante una hora nos expone algunas teorías acerca de cómo se generó la vida, así como la evolución y la selección natural y sexual. Todos estamos atentos en su plática, pues supo atrapar nuestra atención y nos llevó, poco a poco, por este tema con inteligencia y de una manera natural. Resulta muy agradable que esta persona, a pesar de ser joven, sabe del tema y, sobre todo, que tiene una manera muy sencilla de explicarlo.

No puedo dejar de hacer una comparación con Teodoro, pues en los dos encuentro el mismo elemento, es decir, el gusto por el conocimiento y la manera de comunicarlo: claro y sencillo. El viejo realmente me cae muy bien, pero la diferencia de edad me ha generado algún conflicto. Pero, con este nuevo profesor, presiento que puedo aprender muchas cosas agradables. El simple hecho de que juegue con los alumnos es de admirarse, pues demuestra que no todo en la vida es estudio, que se pueden disfrutar diferentes

aspectos, desde un juego que antes consideraba tonto, hasta grandes temas como el contenido de la conferencia. Ahora me pregunto si este nuevo maestro conocerá algo sobre la sucesión infinita de los números y el cuento sobre el hotel maravilloso.

Termina la plática y todos aplaudimos sinceramente, esto es todo un éxito. Al final el profesor joven hace un anuncio fuera de todo lo imaginado: que la próxima semana llevará a los diferentes grupos al cine, ya que proyectan una película entretenida y bastante atrayente.

Camino de regreso a mi casa sin saber qué pensar. ¿Acaso es una broma que este maestro joven se involucre tanto con los alumnos? ¿Qué pretenden las autoridades de la escuela? ¿Será una trampa para que nos portemos mal y que nos expulsen? En verdad que estoy preocupado. Esto suena bastante bonito para que pueda ser cierto. Como no tengo la suficiente confianza para platicar de esto con mis padres, corro con la única persona que me puede ayudar: mi amigo Teodoro, el viejo. Pero al platicarle mis dudas, él lo toma de manera muy divertida. Ríe tanto que parece nunca va a dejar de hacerlo. Me dice que a pesar de todas mis ideas sin cimiento, yo soy infinitamente más complicado que mis pensamientos, es decir, hay personas que han pensado que un hombre es mucho más, pero mucho más, complejo que sus ideas y creencias que tenga de todas las cosas, por muy intrincadas que éstas sean. Luego me explica que no debo de preocuparme de más, que mi inquietud no tiene fundamento, que debería confiar más en las personas y que disfrute el cine con mis compañeros y el nuevo profesor, que no todo es malo, etc. Esto hace que recuerde a mi antiguo compañero extranjero, le comento al viejo que a pesar de que él es un amigo para mí, me gustaría tener más conocidos de mi edad con los que platicar y compartir. Me habla del desencanto que siento por la ausencia de aquel fugaz compañero extranjero y me dice que recuerde la gran frase de un luchador social muy importante en el mundo llamado Martín Luther King Jr. Según el viejo, esta persona dijo algo como que ‘estamos dispuestos a aceptar desilusiones infinitas, pero jamás esperamos pérdidas infinitas.’ Que siempre estamos pensando en lo que podemos recibir de las personas, pero que jamás en lo que vamos a dar. Según Teodoro, las pérdidas de los individuos que queremos, no lo son en realidad. Me dice que cuando un amigo se aleja, sufrimos por la incapacidad para aceptar el cambio. En esta ocasión el viejo me habla mucho sobre mi forma de ser, lo que considera correcto e incorrecto, lo que me preocupa y cómo

solucionarlo. Hablamos largo rato acerca de estos temas, como si fuéramos padre e hijo. Un aspecto de mi amigo que jamás había experimentado.

También le comparto mis conclusiones acerca del hotel fantástico, que las habitaciones no son otra cosa que una copia de los números y esta totalmente de acuerdo conmigo.

— Me da mucho gusto que te haya gustado este nuevo cuento —dice el viejo—, ahora vamos a hacer algunos diagramas, para ver algo que resulta muy interesante. ¿Recuerdas el ejercicio que hicimos en el cine de relacionar una butaca con un niño y un niño con una sola butaca?

— Claro que me acuerdo —contesto muy convencido.

— Muy bien. Pues ahora imagina que tenemos un cine con infinitas butacas numeradas, así que *alguien* invita a sus infinitos alumnos a este cine. Todos están muy felices porque tienen un lugar seguro. A cada niño se le ha asignado un número, así que cuando lleguen sólo tienen que sentarse en el lugar que les corresponde. El niño que tiene el número uno, se sentará en la butaca uno, el niño que le fue asignado el número dos se sentará en la butaca dos, el que tiene el tres en la butaca tres, y, así, sucesivamente. Así que no debe de sobrar algún lugar vacío y no debe de haber algún niño sin lugar. Pero cuando todos estos niños llegan al cine, se encuentran a un pequeño que no tiene casa y no asiste a la escuela, así que no está invitado. Los alumnos quieren que vaya con ellos a la función, pero se preocupan porque creen que no alcanzará lugar, pues ya todos están asignados, ya no cabe nadie más. Entonces el maestro les dice que no se preocupen, que lo inviten que ya encontraran una solución. Al llegar a la sala con infinitas butacas, el profesor sienta al niño de la calle en la butaca con el número uno, y les pide a los demás que se recorran un lugar, es decir, que el niño con el número uno se sienta en la butaca dos, el que tiene el número dos que se sienta en el lugar tres, el que tiene el tres en la butaca número cuatro y así sucesivamente. De inmediato algunos protestan porque dicen que el último niño no alcanzará una butaca. Pero de inmediato el profesor les hace ver que esto no pasará, pues no existe un último alumno porque son infinitos, igual que los lugares del cine. Al final todos quedan acomodados y pueden disfrutar de un momento agradable.

Entonces el viejo anota esto en una hoja y me lo enseña.

$$\begin{array}{c}
 N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\} \\
 \begin{array}{ccccccc}
 \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \end{array} \\
 B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1, \dots\}
 \end{array}$$

— La N —explica Teodoro— representa al conjunto de las infinitas butacas que hay en el cine, la B a los infinitos niños, sólo que tiene un elemento de más. Le llamé cero porque no estaba considerado desde el principio para asistir. Las flechas es como se acomodaron, es decir, al niño de la calle lo sentaron en la butaca uno, mientras que a los demás niños los recorrieron un lugar.

— ¿Y así todos tuvieron una butaca para sentarse? —pregunto intuyendo que la respuesta es afirmativa.

— Absolutamente todos —responde Teodoro—. Con esta sencilla operación, todos los niños, incluyendo al que no asiste a la escuela, disfrutaron de la película sentados cada uno en su propia butaca. El secreto es que había un número infinito de butacas en este cine.

— Igual que el hotel fantástico del cuento.

— Exactamente igual —responde mi amigo—. ¿Recuerdas el nuevo número que inventamos que representa a la cantidad de los números naturales?

— Si, el de la letra rara, que al final le llamamos *aleph cero*.

— Pues este número representa a la totalidad de butacas que hay en el cine por ser infinitas, ¿estás de acuerdo?

— Si, pues las butacas, igual que en el hotel fantástico, son como una copia de todos los números.

— Tienes razón —dice el viejo—, entonces estarás de acuerdo que debe de haber un número que represente al conjunto de los niños infinitos, pero una vez que invitaron al niño de la calle.

— Pero no puede ser *aleph cero* —menciono un poco preocupado por tener que inventar otro nuevo símbolo.

— Tienes razón, no puede ser *aleph cero* pero le podemos sumar uno y ya está, pues este conjunto tiene un elemento de más que las butacas del cine. Así que el número que representa a todas las butacas es χ_0 , y el que representa a todos los niños es $1 + \chi_0$.

— Que bueno que sólo le sumaste uno, llegue a pensar que teníamos que inventar un nuevo número.

— Bueno, ahora date cuenta de que los dos conjuntos, tanto las butacas como los niños, son, en un sentido, exactamente iguales, pues a cada niño se le asignó una butaca y a cada butaca un solo niño. Sin importar que hubiera un chico de más.

— Estoy totalmente de acuerdo, las flechas lo confirman.

— Bueno, entonces como los dos conjuntos son iguales, también lo tienen que ser los números que los representan a sus elementos. Así tenemos que:

$$\aleph_1 = 1 + \aleph_0$$

— ¿Un número (*aleph cero*) que es igual que cuando le sumas uno? —pregunto muy desconcertado.

— Sí, pequeño amigo. Esto no pasa con todos los números como el cinco, quince, tres millones o cualquier otro que puedas mencionar. Pues si, por ejemplo, al tres le sumas uno, nos da cuatro y evidentemente que tres es diferente de cuatro. Es lo que comentamos acerca de los sucesores, que cualquier número es distinto a su sucesor, ¿lo recuerdas?

— Sí —contesto muy asombrado—, lo recuerdo muy bien. Entonces este *aleph cero* en verdad que es distinto a todos los números que conocemos.

— Muy distinto. En primer lugar, lo inventamos porque representa a infinitos elementos de un conjunto que jamás termina y ahora hemos visto que tiene propiedades totalmente diferentes, como esta. Fíjate, una cosa muy interesante. Por el hecho de ser diferente, no negamos que existe. Sino que afirmamos que debe de haber otro tipo de número distinto a los que ya conocemos: los naturales. A este nuevo número vamos a llamarle el primer número transfinito.

— ¿Transfinito?

— Si, porque está *más allá* de los finitos, de los que si tienen un fin.

— Ahora ya me convencí de que es distinto a todos los demás, con esta propiedad tan especial.

— Y eso no es todo, hay muchas más que lo confirman, sólo que esas las veremos en otra ocasión. Hay algo que quiero que pienses: vimos que si a un conjunto infinito le

agregamos un elemento nuevo, se puede poner en relación, uno a uno, con el conjunto original, pues se puede asignar a cada elemento del primer conjunto, un solo elemento del segundo conjunto y viceversa. ¿Qué pasaría si le agregamos, o quitamos, dos, tres, cuatro o cinco elementos más? ¿Se podrían poner, una vez más, en correspondencia los dos conjuntos resultantes?

— No lo sé. Pero, no creo.

— Quiero que pienses en eso y me vengas a ver cuando lo tengas listo. Ahora regresa a tu casa porque ya es tarde y recuerda disfrutar de la película con el nuevo maestro joven.

Sé que debo de regresar a mi casa, sólo que no tengo ganas de hacerlo. Lo que me acaba de decir Teodoro me sorprendió mucho, pues hasta hace pocos días se me hacía muy obvio que, si le sumas un uno a cualquier número, este tenía que ser distinto al original, sin importar cual tomaras. Mentalmente pienso en muchos números, les sumo la unidad y compruebo que siempre son distintos. Digamos que tomo el treinta y dos, al sumarle la unidad se obtiene el treinta y tres, y obviamente treinta y dos es distinto a treinta y tres. Ahora lo hago con uno más grande: el mil doscientos treinta y cuatro. Si se le suma la unidad, se obtiene el mil doscientos treinta y cinco y, una vez más, estos dos números son distintos. Pero con el nuevo número llamado *aleph cero* no pasa esto. Y todo porque representa un conjunto que jamás termina. Si se le aumenta un elemento a un conjunto, se pueden poner sus elementos en correspondencia con el conjunto original, como lo demostró el viejo con el cuento del hotel fantástico y con el ejemplo de las butacas. Pero él me dijo que no sólo le agregara o le quitara un elemento más, si no que dos, tres, cuatro y cinco. ¿Qué pasará al hacer esto? No lo sé, así que, a pesar de que no quiero llegar a mi casa, me apresuro para hacer este ejercicio en una hoja de papel. Mi padre cena en el comedor y está de muy buen humor, aprovecho para platicar con él y hacerle unas pequeñas preguntas.

— Buenas noches papá —digo acercándome al comedor—, ¿Cómo te fue hoy en el trabajo?

— Bien, como siempre —contesta mi padre—. Gracias.

— ¿Te puedo hacer una pregunta?

— Claro que sí, ya sabes que para eso estoy —dice mi papá y se nota que hace un esfuerzo por mostrarse atento a lo que digo.

— ¿Qué pasa cuando le sumas un uno a cualquier número?

— Pues aumenta de tamaño —responde sin entender del todo.

— Y este nuevo número, ¿es diferente al original?

— Por supuesto que sí, pues si le sumas uno tiene que ser estrictamente mayor.

— Y, ¿siempre pasa esto?

— ¿A que te refieres exactamente? —responde mi padre un tanto extrañado.

— Quiero saber que si no existen números, tal vez un poco raros, que al sumarles uno no cambien, representen lo mismo

— No existe tal cosa —responde mi papá después de pensarlo un poco.

— Gracias papá, sólo eso quería saber. Me voy a acostar pues me tengo que levantar temprano para llegar a la escuela.

Evidentemente que mi padre no está al tanto de los conjuntos infinitos y del sorprendente *aleph cero*. Tal vez esto sí sea invento del viejo y mío; quizá nadie lo conoce y somos los primeros que lo hacemos. Esto me alienta a hacer el ejercicio que me sugirió Teodoro. Así que escribo el conjunto de todos los números igual que lo hizo mi amigo.

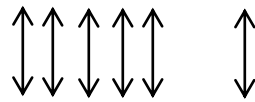
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Voy a empezar por quitarle un elemento a este conjunto, el número uno, y le voy a llamar ***M***

$$M = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Ahora tengo que ver si se pueden poner en correspondencia, uno a uno, a cada uno de los elementos. Recuerdo que el viejo lo hizo de manera muy sencilla, sólo usó unas flechas para indicar la correspondencia. Hago lo mismo y resulta que sí se puede:

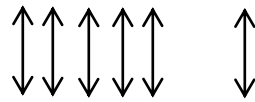
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$



$$M = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, n-1, \dots\}$$

Esto resulta muy fácil, pues es muy parecido a lo que se hizo con el ejemplo de las butacas. A cada elemento del conjunto llamado N , le corresponde sólo uno del llamado M y, viceversa, a cada elemento del conjunto M le corresponde uno y solo uno del conjunto N . Así que ambos tienen el mismo número transfinito, como dice el viejo, que representa a sus elementos, es decir, *aleph cero*. No queda ningún elemento que sobre en alguno de los dos conjuntos, cada uno tiene su correspondiente pareja con el segundo grupo. Ahora se me ocurre que le voy a quitar no sólo un elemento, sino dos. A este nuevo conjunto le voy a llamar O , sólo por llevar el orden del abecedario. Hago el diagrama y pasa exactamente lo mismo.

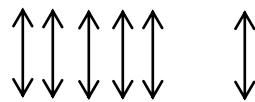
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$



$$O = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots, n-2, \dots\}$$

No importó que le quitara dos elementos, también se pudo hacer la correspondencia, nadie queda sin pareja, pues son conjuntos infinitos. Lo interesante es que vuelven a tener el mismo número de elementos, por lo que tienen el mismo número que los representa, de nuevo el aleph cero inventado por nosotros. Ahora voy a quitarle tres elementos

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$



$$P = \{4, 5, 6, 7, 8, \dots, n-3, \dots\}$$

Vuelve a dar el mismo resultado, se puede hacer la misma asociación. Así que no importa si al conjunto de los números le quito uno, dos o tres elementos, siempre se pueden poner en

correspondencia, uno a uno, entre los elementos de los conjuntos. Es como en el ejemplo de las butacas, simplemente se recorren los niños los lugares que son necesarios. Digamos que no se encontraron sólo a un niño en la calle, sino que dos, tres, cuatro niños que no tenían asignado un lugar y repitieron el proceso que me comentó mi amigo las veces que fueron necesarias. Para comprobarlo lo hago quitándole, cinco elementos y el resultado es exactamente el mismo.

De pronto me doy cuenta de una cosa, que no importa que se les quite o ponga elementos, siempre se va a poder hacer la correspondencia, por medio de las flechas, para que nadie quede sin su pareja. Puedo seguir con este proceso de quitarle elementos, o puedo pensar en que hay más niños que no van a la escuela y, a pesar de eso, entran al cine y se les acomoda en una butaca, sin que nadie se quede parado. Hago los dos ejercicios y llego a agregar, y quitar, hasta veinte elementos y el comportamiento es el mismo pero puedo seguir haciéndolo sin ninguna complicación. ¿Hasta donde podré parar con este ejercicio? ¿Cuántos elementos se podrán quitar o agregar sin que se tenga que modificar el número que representa a estos conjuntos? Otras preguntas que debo de consultar con Teodoro.

Estos últimos tres días han sido de los más extraños en la escuela, con el nuevo maestro y el comportamiento de los alumnos. Después de la conferencia sobre la evolución, hubo otras pláticas pero en cada salón de clase. El maestro habló de diversos temas como: las estrellas; unas cosas que hay en el universo llamadas quasares; las máquinas más pequeñas del mundo llamadas nanomáquinas; el ciclo de reproducción de algunos peces y muchos temas que no enseñan comúnmente en los libros. Y, si lo llegan a hacer, siempre es de una manera que no atraen al lector. Pero este maestro joven es muy distinto: sabe de muchas cosas y lo explica muy fácil, claro y hasta divertido. Lo que más me gusta es que, gracias a esto, se me ha quitado un poco la timidez, pues hace que discutamos en equipo algunas cosas que nos dice. Pero no nos obliga, sino que su método es muy distinto al que conozco. Las cosas que nos dice son más fáciles de resolver entre dos, tres o cuatro personas, incluso entre todo el grupo. Para cada opinión que expresamos, así sea la más simple del mundo, él tiene un comentario que nos alienta a pensar y descubrir la solución. Así que a todos nos gusta participar y nos sentimos muy a gusto haciéndolo. Lo que todavía no asimilo del todo es la convivencia en el receso, pues el profesor juega con todos los alumnos a todos sus juegos, desde fútbol, básquetbol, o incluso luchas en el pasto. El otro

día sólo se sentó en una banca a observar a los chicos, de vez en cuando anotaba en una libreta de hojas amarillas. Esto me agradó mucho, pues me recuerda a mi amigo el viejo y la manía que, últimamente tengo, de anotar todo. Así que esta persona ha cambiado radicalmente el ambiente, haciéndolo más interesante, divertido y hasta de cierta complicidad. Parece que ayer lo llamaron a la dirección por su actitud con nosotros, pues al director no le gusta que juegue en el receso, pero él salió de la oficina con una gran sonrisa y continúa comportándose exactamente igual. Hoy es viernes y me toca ir al cine con mi grupo y el joven maestro, pues es el día que nos han asignado. He pensado en el tipo de película que vamos a ver, tal vez sea una que hable de un tema para aprender, como historia, matemáticas o ciencia, no creo que sólo vayamos a divertirnos, de seguro nos tiene preparado algo en donde nos enseñe muchas cosas.

Por fin llegamos al cine y parece que la sala la apartaron para nosotros, pues nadie más puede entrar. Esto me recuerda muchas cosas, me imagino que somos un grupo de personas infinitas, que nos tenemos que acomodar en una sala con butacas igualmente infinitas. Sólo falta que nos encontremos a alguien que quiera entrar con nosotros y que no esté invitado. De inmediato le diría que sí va a caber y les explicaría a mis compañeros cómo hacerle. Pero estamos ante un cine finito y sólo vamos a ver una película. Por fin, empieza la función y mi sorpresa es mucha, pues no se trata de nada cultural, que nos enseñe algo de ciencia, más bien es una animación llamada 'Shrek', un personaje verde que vive ciertas aventuras para que no les quiten la tierra a los habitantes de aquel lugar. Realmente es divertida la historia y todos reímos por escenas tan chistosas que observamos. Cuando la película termina y se prenden las luces, el maestro corre para colocarse enfrente de todos y nos habla sobre la belleza. Dice que este atributo de los seres humanos es muy relativo, pues todo depende de las personas, la sociedad y el ambiente. Y es que en la película sucede que una mujer bella se enamora de Shrek y esto hace que cambie físicamente, se parezca a él y así ya se puedan casar. Pero su amado Shrek la ve mucho más linda convertida en un ser parecido a él que como estaba antes. El profesor explica que decidió dejar su belleza por el amor, pero que aún así los dos veían a su pareja muy guapos, pues la belleza es relativa. Una vez más estoy gratamente sorprendido, pues este personaje nos ha enseñado algo gracias a una película que pensé no servía más que para hacer reír y entretener a las personas que la ven. Al final, el profesor comenta algo al respecto; que de

todo se puede conocer, sólo hay que saber cómo y estar atentos. Esto llena de inquietud mis pensamientos. También nos explica lo importante que es conocer realmente algo, sin barreras como lo que sentimos o pensamos, sino que el conocimiento verdadero u objetivo, de inmediato me recuerda esto a Platón y Aristóteles y lo que ellos pensaron acerca de este tema. Ansioso espero que nos hable sobre estos dos filósofos, pero, en lugar de eso, dirige su mirada exactamente a mi lugar o, al menos, es lo que percibo, y menciona la frase de un poeta y pintor libanés llamado Kahlil Gibran: ‘Un pequeño conocimiento de una situación u objeto es infinitamente más valioso que el conocimiento inútil, aquel que no sirve para nada’. Termina la plática explicando rápidamente el significado de la expresión. Expone que conocer verdaderamente una situación, vale mucho más que tener una aseveración que sea falsa. Al parecer a mis compañeros no les importa esta última frase mencionada, pues todos salen de la sala con sus acostumbrados juegos, pero a mí realmente me impacta. Ahora recuerdo que el viejo mencionó algo parecido, pero citó a un filósofo francés. Hace algún tiempo, Teodoro me habló del conocimiento, luego del infinito, ahora este maestro joven dice una frase de un pintor, tema que también está relacionado con Teodoro, que tiene que ver con todo esto. ¿Será una mera coincidencia o es algo ingeniosamente premeditado?

Ahora estamos en el parque, deciden jugar fútbol pero yo no quiero participar, así que me ponen en la banca para un posible cambio que espero no se de. Antes no toleraba ver un partido, pero ahora es distinto. Me doy cuenta de que no tiene nada de malo y puede resultar agradable hacerlo. Desafortunadamente, nuestro equipo pierde y no me requieren para entrar a la cancha. La verdad, en última instancia, me había dado ganas de jugar, pues se ve que lo hacen muy fácil, que no les cuesta trabajo. Pero cuando lo he intentado no puedo hacer mucho, ni siquiera le pego bien al balón.

Esta semana fue muy distinta a las demás, con el maestro joven que ronda en la escuela y con el tema del nuevo número *aleph cero*. Por cierto, que no he ido con mi amigo. Quiero decirle lo que encontré cuando le agregué y quité elementos al conjunto de los números, que siempre pude hacer ‘el uno a uno’, de tal manera que todos tuvieron su correspondiente pareja y, por lo tanto, se les pudo asignar el mismo número para representar a la totalidad de sus elementos: *aleph cero*. Así que esta tarde, después de comer, voy a ir verlo. Este juego con los conjuntos me agrada mucho, pues me da

oportunidad de caminar hasta el bosque, a la cabaña del viejo y platicar de cosas poco comunes. Pero ahora me he dado cuenta que también se pueden disfrutar otras actividades en la vida, por muy pequeñas e insignificantes que parezcan, como ver un juego de fútbol que tanto me desagradaba antes. De pronto veo pasar a mi viejo amigo frente al parque. Parece que lleva prisa pues sus pasos son largos y con energía. No puedo controlar las ganas de ir tras él, así que me paro y me despido rápidamente para caminar tras el viejo. A pesar de la edad que nos separa, me cuesta trabajo seguirlo, pues su paso es muy veloz. Toma la calle principal y luego dobla a la derecha, como si quisiera dirigirse a la escuela donde estudio, pero creo que su destino es otro. Rápidamente me doy cuenta de mi equivocación, pues en la entrada lo espera el director. Se saludan amigablemente y mi desconcierto es total. ¿Qué tiene que ver Teodoro con la escuela? ¿Qué relación tiene el director con el viejo? ¿Por qué se ven en una hora que ya no hay alumnos? Decido esperar afuera hasta que salgan, pero veo que no puedo hacer esto, pues faltan diez minutos para la hora de llegar a mi casa.

Estoy muy ansioso, no me puedo concentrar en nada y mi madre se preocupa por el poco apetito que presento. Dice que tal vez estoy enfermo y me toma la temperatura, la presión y me da una revisada rápida. La convengo a medias de que estoy bien y que sólo es por el partido de fútbol, pues le hago creer que esta tarde jugué con mis compañeros. Le digo que un poco de aire me hará bien; además de que es viernes y mañana no tengo que ir a la escuela. Me deja salir a caminar y se olvida de los quehaceres del hogar que me tocan este día. Mis pasos me llevan a la catedral donde encuentro a Teodoro sentado en una banca, leyendo un libro. Me aproximo lentamente, pero cuando estoy a punto de llegar, un hombre se sienta junto al viejo y se ponen a conversar animadamente. No pasan ni quince minutos cuando ambos se despiden, pero no puedo ver la cara de esta nueva persona ya que lleva una gran bufanda que le cubre casi todo el rostro. Aún así, me da la impresión de que se trata del nuevo maestro de la escuela, por su figura delgada, su alta estatura y la ropa extraña que usa. Ahora las cosas se ponen más complicadas, primero la entrevista de Teodoro con el director y luego lo que acabo de presenciar. Me siento en una banca al otro lado del pasto, olvidándome de todo y sin saber que hacer. De pronto veo que el viejo se acerca y se sienta junto a mí.

— ¡Que gusto verte, pequeño amigo! —dice el viejo con un tono bastante amigable— ¿Qué haces aquí tan solito?

— Espero a un amigo —miento.

— Que bien, es bueno que las personas de tu edad tengan muchos amigos y descubran juntos la vida.

Ahora ya ninguno dice algo. Presiento que se dio cuenta de la mentira pero no le importa. Cómodamente saca un libro de su bolsa y se pone a leer como si yo no estuviera ahí. Realmente no estoy enojado con Teodoro, sólo que me gustaría saber qué es lo que pasa, que me explique todo lo que vi. Poco a poco me siento más tranquilo, pero no desaparecen las dudas. Aún así, decido no preguntarle algo al respecto. Él sigue con su lectura, ajeno a mis pensamientos. No puedo dejar pasar esta oportunidad de decirle lo de los conjuntos, así que hago un esfuerzo y comienzo a platicar con él.

— He pensado en lo del nuevo número *aleph cero* —comento sin el afán de interrumpir su lectura.

— ¿Y que has pensado? —pregunta el viejo de los más tranquilo, como si lleváramos varias horas con este tema.

Le cuento sobre el ejercicio que hice con los conjuntos, eso de quitarle o ponerle números y que aún así se pueda hacer la relación uno a uno. Le pregunto que cuándo terminará esto, que hasta dónde se puede seguir el proceso sin que se modifique el representante de todos los elementos.

— ¿Conoces los números pares? —pregunta Teodoro como si ignorara mi pregunta.

— Sí —contesto sin saber a donde quiere llegar—, son el dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, etc., ¿no?

— Esos son. Quiero que hagamos un ejercicio con esos números. Primero vamos a sacarlos del conjunto de todos los números naturales, ya que están dentro de éste.

— ¿Cómo que dentro de éste?

— A lo que me refiero es que el conjunto de los números pares *está contenido* dentro de todos los números naturales. Para que nos quede más claro los escribí de la siguiente manera:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots\}$$

— Los números que están resaltados —explica el viejo— son los que me mencionaste, es decir, los pares. Los que sobran, los que no están resaltados, son los impares.

— Ya entendí, los diagramas me ayudan a comprender mucho lo que me dices. Si están dentro de todos los números que conocemos, de hecho son la ‘mitad’ de todos, ¿no?

— Podemos pensar que así es, que el conjunto de los números pares, es la mitad del conjunto de los números naturales.

— Pues en el diagrama es lo que se ve. Pero entonces hay menos pares que naturales, ¿no?

— Eso es precisamente lo interesante —dice el viejo —, preguntarse si hay más números naturales que pares. Primero tenemos algo muy peculiar, que este conjunto, que parece la mitad de los naturales es infinito. Si una persona menciona un número par, es decir, que se pueda dividir entre dos, siempre vamos a poder mencionar otro par, solamente sumándole dos unidades al número mencionado. Por ejemplo, si alguien dice el veinte, le sumamos dos y nos da veintidós, que es par. Así para cualquier número par que nos mencionen.

— ¿A poco es posible, de un conjunto infinito, sacar otro infinito? —pregunto.

— Claro que es posible. Se pueden obtener muchos conjuntos infinitos de uno igualmente infinito. Te has dado muy bien cuenta de esta propiedad. Y de que son la ‘mitad’ también estás en lo correcto. También date cuenta de que los números que no resalté, son los llamados impares, es decir, el uno, tres, cinco, siete, nueve, once, etc.

— Y también son infinitos y son la otra mitad del conjunto de todos los números.

— Así es. Los pares unidos con los impares, dan como resultado todos los números naturales. Con los ejercicios que hiciste te debiste de dar cuenta de algo: cuando tienes un conjunto, el que sea, y a sus elementos los puedes poner en correspondencia, uno a uno, con todos los elementos de los naturales, entonces el conjunto tiene *aleph cero* como cardinal. Es lo que hiciste al quitarle un elemento, luego dos, tres y hasta veinte. Ahora, para

contestar a tu pregunta que hasta donde llega este proceso, vamos a quitarle una infinidad de elementos y a ver qué pasa.

- Y, ¿cuál es esa infinidad de elementos que le vamos a quitar?
- Pues los que quieras, ya sea los números pares o los impares, elige un conjunto.
- Escojo a los impares.
- Muy bien —dice el viejo—, ahora vamos a llamarlos **I** por la inicial de impares.

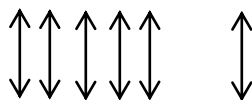
Entonces este conjunto quedaría de la siguiente manera:

$$I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

— Ahora, ¿hay que ponerles las flechas con el conjunto original para ver si se puede hacer la relación? —pregunto al recordar el ejercicio que hice en mi casa.

— Precisamente eso es lo que te iba a proponer —responde Teodoro—. Pero eso no es nada complicado, aquí traigo anotados los conjuntos, con sus flechas, a ver que te parece.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$



$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots\}$$

Observo la hoja detenidamente y sólo hay algo que no me queda claro, le pregunto a mi amigo que significa ‘ n ’ y ‘ $2n-1$ ’.

— Son los términos generales de la serie. Los escribimos de esta manera para indicar cómo se generan. No es otra cosa que hacer unas sencillas cuentas con los naturales para generar los números impares.

- ¿Cómo está eso de que se generan?
- Pues muy fácil, veamos lo siguiente. Lo único que tienes que hacer es sustituir la n por cada uno de los números.

$$2n-1 = 2 \cdot 1-1 = 2-1 = \mathbf{1} \quad \text{con } n = 1$$

$$2n-1 = 2 \cdot 2-1 = 4-1 = \mathbf{3} \quad \text{con } n = 2$$

$$2n-1 = 2 \cdot 3-1 = 6-1 = \mathbf{5} \quad \text{con } n = 3$$

$$2n-1 = 2 \cdot 4-1 = 8-1 = \mathbf{7} \quad \text{con } n = 4$$

$$2n-1 = 2 \cdot 5-1 = 10-1 = \mathbf{9} \quad \text{con } n = 5$$

$$2n-1 = 2 \cdot 6-1 = 12-1 = \mathbf{11} \quad \text{con } n = 6$$

.....

.....

.....

— Si te das cuenta —explica el viejo —, en la tabla usé los números naturales para generar los impares (resultado de las cuentas). A eso me refiero con término general, pues la expresión $2n-1$, representa a todos los impares y se usaron los naturales. La n representa que están todos los números, el uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc. En la nueva serie de los impares, que le llamamos I , $2n-1$ es la expresión que representa a todos los impares, es la que genera a todos los números de ese conjunto. Es muy sencillo, si n vale uno, entonces la expresión vale dos veces uno menos uno, lo que nos da el uno, es decir, el primer elemento de I . Si n vale dos, la expresión vale dos veces dos menos uno, es decir, tres, que es el segundo elemento de I . Cuando n toma el valor de tres, la expresión $2n-1$ vale dos veces tres menos uno, que es cinco y es el tercer elemento de I .

— Ahora logro entender, es algo que representa a todos los números cuando n vale uno, dos, tres, cuatro, etc.

— Así es, es el término general. Es una forma de abreviar la sucesión. ¿Te acuerdas de los puntos suspensivos? Bueno, pues es algo muy semejante. Nos evita tener que escribir todos. El diagrama nos da una manera de relacionar los elementos de N con los de I , y como nadie se queda sin pareja, tenemos que los dos conjuntos tienen como cardinal al ya muy conocido *aleph cero*.

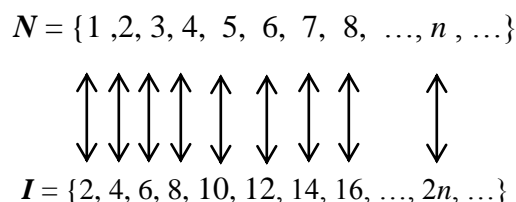
— ¿Aunque los impares sean la mitad de todos los números? —pregunto.

— Eso no importa, ya lo hemos comprobado.

— Entonces, ¿qué pasa con la otra mitad, es decir, el conjunto de los números pares?

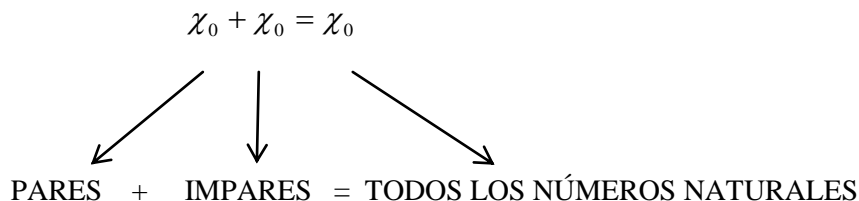
— Para verlo vamos a anotarlos, llamándole a este conjunto P por la palabra par.

Ahora Teodoro no trae el diagrama ya realizado, más bien saca una hoja y lápices y lo hacemos entre los dos.



— ¿Ahora el término general del los pares es dos veces n ? —pregunto.

— Si, ese es el término general. A este conjunto también se le puede asignar *aleph cero* como representante de todos sus elementos, pues no sobró ningún elemento que no tenga pareja. Entonces tanto al conjunto de todos los números, a los pares y a los impares se les asigna *aleph cero* como cardinal, a pesar de que cuando unimos a I con P nos da N . Si lo ponemos en términos más sencillos tenemos que:



— El diagrama anterior —continúa Teodoro— representa lo que te digo. Tanto el conjunto de todos los números pares, como el de los impares, tiene cardinalidad *aleph cero* y unidos dan el conjunto de todos los números naturales, que como ya habíamos dicho, también tienen cardinalidad *aleph cero*. Esta es otra de las propiedades importantes de este número transfinito, que sumado dos veces da el mismo.

— ¡Esto no pasa con los números que siempre he conocido! ¿Verdad?

— Tienes toda la razón, no pasa esto. Al considerar un número y sumarlo con el mismo, da como resultado otra cantidad totalmente distinta. Dime un número, el que se te ocurra.

— El seis

— ¿Cuánto es seis más seis?

— Doce, que es muy diferente de seis —concluyo.

— Exactamente, lo que no es cierto para este primer número transfinito, que como ya vimos:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

— Esta es otra de las propiedades de este nuevo número —explica Teodoro —, lo que comprueba que en realidad es distinto a los que conocemos, ya que representan al tamaño de los conjuntos que jamás terminan, infinitos.

— La manera de comprobarlo es muy fácil —digo—, pues sólo basta con hacer lo que un día hicimos en el cine y me pareció de lo más sencillo. Cuando relacionamos las butacas con las personas para ver que había más sin necesidad de contar.

— Tienes toda la razón, usamos el mismo método pero ahora con conjuntos infinitos. Es la misma relación de poner cada elemento del primer conjunto, con uno sólo del segundo, si al final todos tienen su pareja entonces poseen el mismo número de elementos.

— ¿Hay más conjuntos que se comporten de la misma manera?

— ¿A que te refieres?

— ¿Hay más conjuntos infinitos, que se puedan obtener de la totalidad de los números y que se les asigne como cardinalidad a *aleph cero*?

— Claro que si hay muchos más, ya te lo había comentado. Sólo hay que tener un poco de imaginación. ¿Te acuerdas del concepto de potencia, aquel que significa la multiplicación repetitiva?

— Si, me lo comentaste en el cuento de rey que se fue a la quiebra por no saber contar.

— Muy bien. Pues en ese cuento se usaron las potencias de dos, que es un conjunto que cumple con lo que me dijiste. Pero las potencias de tres, cuatro, cinco, seis, siete, etc., también tiene estas características.

— ¿Cuáles son las potencias de, por ejemplo, cinco? —pregunto sin recordar del todo esto.

— Pues todos los números que resulten de multiplicar por cinco.

Al decir esto Teodoro escribe en una hoja lo siguiente:

$$P^5 = \{5, 5 \cdot 5, 5 \cdot 5 \cdot 5, 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5, \dots\}$$

es decir,

$$P^5 = \{5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \dots\}$$

— ¿Ahora recuerdas que ya lo habíamos comentado? —pregunta el viejo.

— Tienes razón, en aquella ocasión me explicaste que sólo hay que multiplicar la base, que en este caso es el cinco, cuantas veces indique el exponente, ¿no?

— Si, entonces el mismo conjunto se puede escribir de la siguiente manera y representa exactamente lo mismo.

$$P^5 = \{5, 25, 125, 625, \dots, 5^n, \dots\}$$

— ¿Aquí también funciona de la misma manera el término general?

— Sí, es el que representa a todos los términos del conjunto. Este conjunto es infinito y tiene como cardinalidad a *aleph cero* así como las potencias de dos, tres, cuatro, seis, siete, ocho, etc. Lo único que tienes que hacer para verificarlo es ponerle las flechas y ver que cada elemento tenga a su pareja con el conjunto de todos los números naturales. Ahora te dejo porque ya es un poco tarde y tengo cosas que hacer. De inmediato Teodoro se para y camina rápidamente hasta perderse en las calles del pueblo.

*¿Puedo tener una idea exacta de lo que es el infinito?
Yo sólo lo comprendo confusamente. ¿Me sucede esto
por qué soy excesivamente finito? ¿Quién se explica
lo que es andar sin avanzar nunca, contar siempre
sin llegar a hacer una cuenta, dividir sin encontrar la
última parte?
Voltaire*

Capítulo 5

UNA INFINIDAD DE INFINIDADES INFINITAS

Ayer fui de nueva cuenta a ver a Teodoro, después de una semana entera de no hacerlo. Ahora la escuela se ha convertido en algo realmente sorprendente, algo así como un gran parque de diversiones en el que los alumnos pasamos gran parte de nuestro tiempo. Esto es gracias al nuevo maestro joven, que ha hecho de todo para que estemos contentos. Hace unos días se inauguró la ludoteca, que no es otra cosa que un salón donde se guardan muchos juegos y juguetes para su uso y préstamo. No sé de dónde han sacado tantas cosas, pero hay muchos juegos raros e interesantes. También se han juntado grupos de alumnos con los mismos intereses para formar equipos. Así que ya existe el de ajedrez, damas chinas, risk, dominó, fotografía, fútbol, básquetbol y hasta de béisbol que antes nadie jugaba. Hay muchos compañeros que practican varias disciplinas; a algunos les pueden

interesar las damas chinas pero también jugar básquetbol. Aún no me decido a qué equipo pertenecer pues no es obligatorio hacerlo, pero todos estamos invitados y con tantas cosas que hacer, es difícil que no nos guste al menos una de ellas. Pero asisto a varios de los talleres, así que ya sé jugar un poco de todo.

Las pláticas del nuevo maestro continúan. Nos habla de diversos temas poco conocidos y que en los libros no aparecen. El otro día discutió sobre los superhéroes de las revistas cómicas y de televisión. Nos enseñó varias historietas en las que aparece *Superman*, pues dijo ser aficionado a este superhéroe y por eso tiene la colección completa. Uno de los alumnos le preguntó que cómo es que *Superman* controla sus poderes, que cómo le hace para poder ver a través de los muros con su vista de rayos láser sin quemarlos y sin pasarse del límite que quiere. Entonces el maestro sonrió y dijo que eso sólo lo sabía un experto en el tema, pero como él es uno, nos iba a explicar todas estas cosas rápidamente. Nos habló del planeta de donde proviene este personaje, de sus padres, de los motivos por los cuales lo mandaron a la Tierra, de todos los superpoderes que posee, de la persona que se enamoró, etc. Al final, nos pidió que escribiéramos en una hoja un superpoder que nos gustaría tener, para qué lo usaríamos y por qué ese en particular. Uno de los alumnos le dijo que si podía escoger todos, y así ser exactamente como *Superman*, pero el maestro dijo que así ya no tenía chiste, que lo interesante era elegir el mejor para cada uno de nosotros. Esta tarea no fue nada fácil, pues es complicado preferir entre mucha fuerza, vista increíble, velocidad asombrosa, inteligencia inaudita, etc. Al final elegí poder volar, pues siempre he querido ver todo desde el cielo, sentir el aire por todo mi cuerpo y desplazarme como las aves.

Cuando todos entregamos nuestros deseos, el maestro dijo que escogería volar, pues desde pequeño quiso saber qué se siente y muchas veces soñó con eso. Este deseo común, junto a otras coincidencias, me acercan más al maestro. Puedo sentir que somos parecidos y me gustaría que fuera mi amigo como Teodoro, pero creo que no le interesa, pues a todos los alumnos los trata igual y siempre está dispuesto a escuchar y aconsejar a todo aquel que se lo pide.

Hoy, en la escuela, dieron una noticia: el maestro joven va a dar una nueva conferencia en el auditorio de la escuela el próximo viernes. Se comenta mucho sobre el posible tema, pues el título que aparece en los carteles que han pegado en los salones de

clase no dice mucho, sólo emerge la palabra ‘negatividad’ en grandes letras, pero da la impresión de que son números. Así que tal vez se hable sobre números y todo lo que hemos descubierto Teodoro y yo en las últimas semanas. Varios sentimientos se entrecruzan, pues si este maestro les explica a todos lo de los conjuntos, la manera de contarlos, *aleph cero* y todas esas cosas que me ha enseñado mi viejo amigo, me voy a sentir un poco defraudado, pues siento que es algo muy personal que nadie más debe saber. Pero, por otro lado, esto me daría la oportunidad de acercarme al maestro joven, de que se convierta en un amigo más como Teodoro y que cambie mi actitud, es decir, poder relacionarme con los compañeros de la escuela igual que este personaje. Estos momentos, en los que tengo muchas dudas, y no sé que hacer, no me gustan, pues sólo me preocupo de más sin necesidad. Sólo me atormento por cosas que luego ni pasan como las pienso. Lo que menos me gusta es que, muchas veces, las cosas se resuelven muy bien y resultan innecesarias tantas vueltas que le doy al asunto. Aunque no puedo cambiar de actitud, es mi manera de ser y creo que debo de aprender a vivir con ello.

Hoy es miércoles y tengo muchas cosas que hacer de la escuela. Esta semana me dejaron mucha tarea, así que no he tenido tiempo de hacer nada más que no sea leer, estudiar, escribir y cosas relacionadas con el colegio. Hasta mis padres se extrañan que no salga por las tardes, me preguntan que si estoy enfermo. Esto me da risa. Primero, no me dejaban salir a ninguna parte y ahora se preocupan si no lo hago. Es parte de vivir sólo las cosas por costumbre. El que parece que no vive la vida como una rutina es el maestro joven, pues todos los días hace y dice cosas distintas. He notado que llega por diversos caminos a la escuela, pues en ocasiones me lo encuentro caminado por las calles con toda la despreocupación del mundo, sin importarle que las personas lo vean extrañadas cuando, en ocasiones, se detiene a observar una casa, una pared, un poste, un pájaro o algo que llame poderosamente su atención. Parece que siempre hay algo que lo motiva a pensar y estar en un mundo ajeno, en el que todo tiene una importancia vital y en todo lo que le rodea encuentra un tema para escribir en su libreta. Algunos alumnos han dicho que sus notas sólo consisten de pequeñas ideas que le sirven de inspiración para poemas que le gusta escribir. No sé si creer esto o no, pues alrededor de este personaje se han formado miles de historias, gracias a que es diferente a los demás y tiene una relación con los alumnos como nadie más en el colegio. Cuando está con nosotros parece un adolescente jugando a

aprender, pero de pronto adopta un aire maduro y puede controlar las situaciones más inesperadas, como peleas entre compañeros, discusiones o abatir el aburrimiento propio después de haber tomado tres o cuatro horas de clase continuas. Así que cuando creo conocer un poco a este profesor, me sorprende con un cambio de actitud, una frase o una acción que me demuestran que no entiendo su forma de ser. Esto se convierte en una obsesión y me la paso observando cada movimiento, para encontrar la fórmula que me diga qué va a hacer o la manera por la que actúa así. Tal vez algún día comente esto con Teodoro para que juntos resolvamos tan grande misterio.

Es viernes y el auditorio está, como la primera vez, lleno de expectantes estudiantes. Ahora no hay una pantalla, sólo se puede ver un gran espejo en el centro del escenario. ¿Para que lo pondrían ahí? Se apagan las luces unos instantes y cuando las prenden aparece el maestro joven en una posición extraña. Está colocado de tal manera que sólo se ve la mitad de su cuerpo, que se refleja dando la sensación de que está completamente ahí. Así que cada movimiento que hace lo reproduce idénticamente la imagen en el gran espejo, los espectadores estamos muy divertidos, pues el maestro hace unos movimientos realmente graciosos. Se apagan de nuevo las luces y cuando las prenden ya no hay espejo, sólo un gran tres pegado a una pared y, del otro lado, el mismo tres pero con una rayita en medio. Saco mi libreta y logro anotar lo que estoy viendo de la siguiente manera:

-3 | 3

De pronto, el gran número desaparece en el suelo y otro ocupa su lugar, y también tiene su contraparte con la misma rayita en medio del número que está a la derecha. Por espacio de algunos segundos, los números desaparecen para dar lugar a otros con las mismas características. De inmediato pienso que si van a desfilan ante nuestros ojos todos los números que existen, tendremos que estar aquí toda la eternidad, pero, afortunadamente, no es así. El efecto de poner números con la raya termina y aparece el maestro joven que es recibido con grandes aplausos por el público. Explica que usamos los espejos para vernos reflejados, pero que en el mundo de los números también existe una especie de espejo que deforma la visión original, poniendo un signo de menos a cada imagen, conocidos como los

números negativos. Que es como si el cero fuera el encargado de realizar este trabajo, pues él sirve de espejo reflejante. Entonces los ayudantes acercan un pizarrón y el maestro escribe lo siguiente:

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Ahora nos habla sobre los números negativos, dice que si sumamos cada número con su opuesto nos da siempre el cero, es como restarse a si mismo. Así que, cinco más menos cinco es cero, lo mismo que cuatro más menos cuatro o tres más menos tres.

El maestro sale del escenario unos momentos y todos platican lo entretenidos que están. Por mi parte, pienso en varias cosas. Me doy cuenta de que estos números negativos ya los conocía, alguna vez un maestro de matemáticas me los enseñó e incluso los uso en diferentes cuentas en la vida. Este descubrimiento es maravilloso. No sólo existe una cantidad infinita de números positivos, ahora también hay otro conjunto que contiene a la totalidad infinita de los números negativos. Y digo que es totalmente distinto, porque el maestro explica que el menos cinco es diferente al cinco, por el solo hecho de tener signos diferentes.

Tomo mi libreta y trato de anotar este nuevo conjunto, pero no sé cómo llamarle, si N o $-N$ siguiendo con las letras que he usado con mi amigo el viejo. Pero tampoco sé por dónde empezar, pues ahora son infinitos pero, digamos, hacia la izquierda, y estoy acostumbrado a escribir de izquierda a derecha, así que debería de escribir primero el último elemento de esta serie pero se que es infinita porque su contraparte también lo es. Al final, la serie terminará con -1 pero no podré llegar a él si no sé cómo empezar. Esto es un problema, escribir la serie completa de los llamados enteros negativos. Uno de los alumnos le pregunta al maestro que por qué se llaman enteros y él responde que porque hay otros números que no son enteros, que representan partes de algo pero que eso se verá en otra ocasión.

Termina la conferencia y no logro poner atención a las últimas palabras del profesor, al parecer fue algo muy divertido pues todos rieron de buena gana. Me obsesiono muy rápido en ciertas cosas y ahora quiero saber la manera de escribir este conjunto infinito de números enteros negativos.

Caminar por las calles del pueblo siempre me relaja y en esta ocasión no es la excepción, pues me siento más tranquilo y decido que en la tarde voy a ir con el viejo para platicarle lo de la conferencia de hace rato. Como casi siempre, mis sospechas resultaron infundadas; pues el maestro joven no habló de los conjuntos infinitos, ni de *aleph cero*, ni de nada que haya platicado con Teodoro. Sólo nos mostró otro tipo de números y nos dijo que hay más. Creo que debo de dejar de actuar así, ser más tranquilo y relajado para no preocuparme por las cosas antes de tiempo.

Son las seis de la tarde y llego a la cabaña del viejo. Al parecer no está pues luce todo de lo más tranquilo. Toco suavemente y nadie contesta; así que decido sentarme a la entrada y esperar un poco. A los pocos minutos me duermo y tengo un sueño bastante extraño. Se trata de que todo en el mundo funciona al revés, que somos unos personajes con una marca especial en la espalda y que existe una gran pared que nos separa de otro mundo, muy parecido al de nosotros. Del otro lado del muro hay las mismas personas, pero ellos no tienen la marca y se mueven parecidos, pero distintos. Incluso si me acerco mucho a la pared, sé que hay otro Jorge del otro lado, que hace lo mismo que yo pero que él no sabe que yo existo. Empujo con gran fuerza los ladrillos, para poder pasar hacia el otro lado, pero permanecen todos en su lugar, ninguno se cae. Tomo vuelo y aplico todas mis fuerzas en esta labor, así que la gran pared cede y puedo derrumbarla. En ese preciso momento, despierto y estoy tirado dentro de la cabaña con el viejo riendo parado junto a mí.

— ¿Qué haces ahí, tratando de tirar mi puerta? —pregunta Teodoro en un tono serio pero divertido a la vez.

— Lo siento —respondo apenado pero no preocupado—, es que me senté aquí para esperarte, me quedé dormido y estaba soñando algo que yo creo me hizo empujar tu puerta hasta abrirla.

— No te preocupes, hubieras abierto para meterte a la cabaña; no me molesta en lo más mínimo y hubieras estado más cómodo. Pero no te quedes ahí; entra, porque te voy a invitar de este rico pan que compré en un pueblo vecino y está buenísimo.

Una vez en la cabaña, el viejo me invita una taza de leche pura de vaca con chocolate y un pan delicioso acompañado de nata, que tanto me gusta. Con estos suculentos alimentos le platico lo que pasó en la escuela, de la conferencia, de los números enteros negativos y de

que existen muchos más. Él me escucha atentamente y mueve la cabeza afirmativamente, de vez en cuando se dibuja una sonrisa como de complicidad en su rostro marcado por algunas arrugas. Cuando termino mi relato, me explica que no sólo existen ese tipo de números, sino que también los llamados racionales, irracionales, trascendentes, algebraicos, complejos, perfectos, etc.; que poco a poco los iré conociendo, pero a su debido tiempo. También muestra una especie de satisfacción por el tema de la conferencia del maestro, incluso sus comentarios me hacen pensar que pudiera conocer al joven profesor.

— Ahora que ya conoces a los enteros negativos —dice Teodoro—, vamos a hacer un ejercicio. Primero vamos a anotarlos para ver como se ven en el papel.

— ¡Eso es precisamente lo que traté de hacer pero no pude! —exclamo emocionado por esta relación de pensamientos.

— ¿Por qué no pudiste?

— Lo que pasa es que no supe cómo escribirlos, pues estoy acostumbrado a escribir de izquierda a derecha y esta serie no tiene primer término a la izquierda y no se cómo empezar.

— Pues eso se arregla muy fácil —dice el viejo sacando papel y lápiz para escribir—. Los voy a anotar, a ver qué te parece. Pero antes de eso, ¿cómo quieres que le llamemos a este conjunto igualmente infinito como tu bien lo mencionas?

— Pues no lo se, tal vez $-N$, pues son los negativos de los que hemos visto estas semanas.

— Esa es una solución pero la verdad no me gusta. ¿Qué te parece si mejor les asignamos sólo la letra arbitraria Z ?

— Esta bien —respondo sin realmente importarme con qué letras vayamos a identificar este conjunto.

— Muy bien, ahora el diagrama queda de la siguiente manera:

$$Z = \{ \dots, -n, \dots, -5, -4, -3, -2, -1 \}$$

— Los tres puntos suspensivos a la izquierda, al principio, ¿es válido hacer eso?

— Claro que es correcto hacerlo, es lo mismo que el conjunto de N , los tres puntos siguen siendo una abreviación para escribir, sólo que colocados diferente. Aunque es muy válido escribirlo al contrario, es decir:

$$Z = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots, -n, \dots\}$$

— Ahora me pregunto, ¿cuál será el número que representa a la cantidad de todos los elementos de este nuevo conjunto de los enteros negativos?

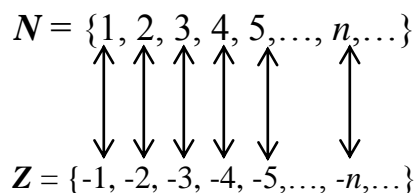
— Cuando estaba en la conferencia también me surgió la misma duda, y creo que tiene que ser el mismo *aleph cero*. Lo digo porque este conjunto es muy parecido a N , son exactamente los mismos números sólo que negativos, así que debe de tener el mismo *aleph cero* como cardinalidad.

— Suena muy bien lo que dices y por supuesto que tienes razón pero, ¿cómo le hacemos para comprobarlo?

— Pues como le hemos hecho desde el principio — respondo recordando las pláticas anteriores—. Basta que anotemos este conjunto junto con el de N y poner a cada elemento de un conjunto, en correspondencia con un solo elemento del otro, por medio de flechas y listo.

— De nuevo tienes razón —dice el viejo muy satisfecho—. Aquí tienes una hoja y lápiz para que lo hagas mientras voy por más nata y pan, porque al parecer te gustó mucho, pues ya te lo terminaste.

El viejo se levanta y va hacia la cocina. Tomo los instrumentos necesarios y escribo lo que me pidió con mucha facilidad, pues sólo basta asignarle al uno el menos uno, al dos el menos dos, al tres al menos tres, al cuatro el menos cuatro y así sucesivamente para toda la infinidad de números de ambos conjuntos.



Llega el viejo y le enseño el diagrama, dice que eso sólo muestra que, el conjunto de los enteros negativos, tiene como número cardinal a *aleph cero*, que ambos conjuntos tienen exactamente el mismo número de elementos. Pero ahora me dice que vamos a unir los dos conjuntos más el cero, es decir, a \mathbb{N} , \mathbb{Z} y al cero. Yo no entiendo del todo y escribe lo siguiente para que lo comprenda:

$$\{\dots, -n, \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$

Me pregunta sobre el cardinalidad de este nuevo conjunto y no sé qué decirle. De inmediato pienso sumar dos veces *aleph cero* más uno, pues son dos conjuntos infinitos más un nuevo elemento, el cero. Pero recuerdo el ejemplo de las butacas del cine y decido pensarlo mejor para no decir algo erróneo. Entonces anoto el conjunto de \mathbb{N} para ver si puedo poner las flechas como antes, pero no lo logro, pues esta nueva serie de números no termina ni a la derecha ni a la izquierda. La verdad no creo que este nuevo conjunto, ‘dos veces infinito’, tenga como representante de la cantidad de elementos de nuevo al ya tan famoso, al menos entre nosotros, *aleph cero*.

Después de pensarlo un largo rato, le comento al viejo mis reflexiones y me dice que me equivoco, que este nuevo conjunto, no es dos veces infinito, que sólo hay que pensar un poco en lo que hemos platicado, para encontrar cuál va a ser su cardinalidad.

— ¿Recuerdas cuando discutimos los números pares y los impares? —pregunta el viejo.

— Si lo recuerdo —contesto—. En aquella ocasión me explicaste que los números pares unidos con los impares, forman el conjunto de los números naturales.

— Exactamente eso es lo que dijimos. ¿Recuerdas cuál fue el número cardinal para esos dos conjuntos?

— Pues el de siempre —contesto—, el número que inventamos, *aleph cero*. Ese día fue cuando me explicaste lo del término general. Pero, ¿qué tiene que ver todo eso con los que estamos viendo de los enteros negativos, los positivos y el cero?

— La relación es muy grande, pues nos va a servir para encontrar el representante de la unión de esos tres conjuntos que mencionaste.

— ¿Cuáles tres? Si sólo tenemos a los enteros positivos, a los negativos y un elemento solo que es el cero.

— Pero el cero puede formar un conjunto con un solo elemento. Pero si no quieres, vamos a pensar que tenemos dos conjuntos: el de los enteros negativos más el cero, y el de los enteros positivos, que es lo mismo que el conjunto de los naturales. Yo digo que el conjunto de los enteros negativos más el cero, tiene el mismo número de elementos que el conjunto de los impares, pues los elementos de ambos están relacionados uno con uno. También digo que todos los enteros positivos, es lo mismo que los pares, pues se puede hacer lo mismo.

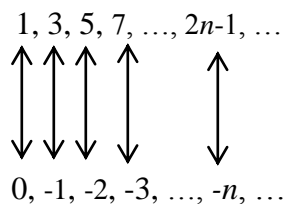
— Para ver si es cierto eso, tendríamos que escribirlos y ponerles sus flechas, ¿no?

— Por supuesto que eso es lo que vamos a hacer. Pero antes quiero que quede claro para que nos va a servir hacerlo. Si lo que digo es cierto, vamos a tener que la unión de los enteros negativos más el cero, con el conjunto de los enteros positivos, tiene que tener como cardinalidad a *aleph cero*.

— ¿Igual que la unión de los pares con los impares nos dio como cardinalida a *aleph cero*?

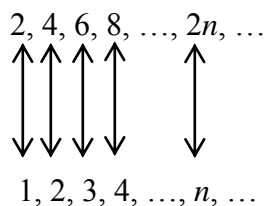
— Igual que en aquella ocasión. Sólo basta ver que el conjunto de los enteros negativos más el cero, tiene el mismo número de elementos que los impares y que lo mismo sucede entre conjunto de los enteros positivos y los pares.

Al decir esto, empezamos a hacer los clásicos diagramas con sus flechas.



— El diagrama anterior —dice el viejo—, ilustra que el conjunto de los enteros negativos más el cero, tiene exactamente el mismo número de elementos que el conjunto de los impares. Pero ya habíamos visto que éste último tiene cardinalidad *aleph cero*, entonces ambos conjuntos tienen como cardinal al mismo número.

— Lo mismo podemos hacer con los pares y los enteros positivos —digo y escribo.



— Tienes razón Jorge, lo mismo pasa. Recordemos que la unión de los pares más los impares, forma a los naturales y los tres conjuntos tienen como número cardinal a *aleph cero*. Entonces, el conjunto de los enteros negativos más el cero, unido con el conjunto de los enteros positivos, también tiene como cardinal a *aleph cero*.

Enseguida le pregunto al viejo que si este nuevo ejemplo nos dice que:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

y me dice que sí, pues unimos dos conjuntos infinitos y llegamos que tiene cardinalidad *aleph cero*.

Ahora ya conozco otro tipo de números que jamás terminan y me pregunto si hay más del mismo estilo. Al principio de esta conversación, el viejo me mencionó nombres de otros tipos de números. No los recuerdo, pero me pregunto si también serán infinitos, si son igual de interesantes y qué cosas se pueden hacer con ellos. Así que le pregunto todo esto a Teodoro y sólo me dice que debo aprovechar los recursos que tengo a mi alcance, es decir, que le pregunte al maestro joven acerca de los llamados números fraccionarios y así los conoceré. Que luego venga con él para que les pongamos sus respectivas flechas.

¿Ya no querrá que lo moleste más y por eso me envía con el maestro joven? ¿Acaso ya se aburrió de mí y por eso ya no me quiere decir algo? De nuevo estas dudas que me atormentan, pero ya decidí que voy a cambiar, así que hago un esfuerzo por sonreír y anoto estos nombres en mi libreta. Camino a mi casa no puedo dejar de pensar en estas dos cosas, en que pueden existir otro tipo de números, aparte de los que conozco, igual de infinitos e interesantes y en que tal vez Teodoro ya no me quiere ver.

Sé que Teodoro me dijo que le preguntara algo al maestro joven, pero no sé cómo acercarme. Él sigue con la misma actitud de ser muy amable con todos los alumnos, jugar con ellos y enseñarnos sobre temas muy interesantes. El otro día estuve a punto de

acercarme a él después de una plática que ofreció sobre fotografía en el cine, pero no me atreví.

Estoy sentado en una banca disfrutando del recreo, comiendo un rico chocolate relleno de cajeta. El maestro joven pasa delante de mí y estoy a punto de pararme para preguntarle lo que me dijo el viejo, pero no lo hago y permanezco sentado. Me desconcierto porque él da media vuelta y se sienta junto a mí, me mira y me saluda con una de sus características y agradables sonrisas. Hay días en que no juega con alguien, sólo se pasea por todo el patio o simplemente desaparece de la vista de todos, aunque yo sé que va a la biblioteca. Pero en este momento está aquí, conmigo, y no sé cómo hacerle para iniciar conversación. El toma la iniciativa, pero no me agrada lo que me propone.

— ¿Quieres jugar un poco?

— La verdad es que no se jugar bien fútbol y prefiero no hacerlo —contesto tímidamente.

El ríe de buena gana y eso me desagrada, pero al ver mi cara de contrariedad, me explica algo bastante reconfortable.

— Sé que en ocasiones parece que el fútbol es el único deporte que se practica, pero hay muchas cosas más que jugar en este recreo. Si te diste cuenta, se inauguró la ludoteca, en donde puedes encontrar diversos juegos que no son fútbol ni tienen relación.

— Tienes razón —contesto más tranquilo—. ¿Por qué se les ocurrió abrir una ludoteca en esta escuela?

— Yo creo que en todas las escuelas debe de haber una, no importando que sea primaria, secundaria, preparatoria o, incluso, universidad. Siempre he pensado que el juego es muy importante en la vida, desde pequeños aprendemos jugando y es una actividad que a la mayoría de las personas, por no decir a todas, nos gusta. ¿Acaso a ti no te gusta jugar?

— ¡Claro que me gusta! Sólo que aquí en la escuela la mayoría les gusta el fútbol y yo soy muy torpe para eso, por eso prefiero mantenerme al margen.

— Te entiendo, a mi tampoco me gustaba ese deporte. Pero he aprendido que jugarlo no es tan malo, te divierte, entretiene y pasas unos momentos realmente agradables. No digo que es todo en la vida, sólo que es bueno conocer de todo un poco. Es por esto que convencí al director, junto con un viejo amigo, de que esta escuela debería tener una

ludoteca. Por cierto, que aquí traigo un juego que tiene años que no practico, tengo muchas ganas de recordar cuando era un adolescente como tú.

— ¿De qué se trata? —pregunto interesado por lo que puede ser.

— Es algo muy sencillo pero sumamente entretenido —responde el profesor joven a la vez que saca dos pequeñas cajas negras y me da una—. Imagina que tú y yo estamos en guerra, ambos tenemos tres barcos de diferente tamaño y el propósito es hundir a los del enemigo.

— ¿En guerra? —pregunto sorprendido porque siempre he pensado que la guerra es algo que sólo afecta negativamente y ni siquiera se debería jugar con ello.

— Pero no pongas esa cara. Estoy de acuerdo contigo que las guerras no deberían de existir —dice el maestro como si leyera mis pensamientos—, pero este es un juego de estrategia, de esos que ayudan a agilizar la mente y no tiene nada de malo. Sé que la paz es lo mejor, pero en la vida no siempre tenemos lo más adecuado para las personas. Ya lo dijo el escritor de origen irlandés George Bernard Shaw: ‘La paz no es sólo mejor que la guerra, es infinitamente más difícil.’ Así que relájate y vamos a jugar.

Me da mucho gusto que el profesor comparta esta idea conmigo, pues por un momento pensé que éramos totalmente distintos. Abro la caja y me encuentro, en la parte de arriba, muchos cuadros con un pequeño orificio en el centro. En la parte de abajo lo mismo pero con unos barquitos, de diferente tamaño, que se pueden colocar en los orificios. También hay palitos de plástico, blancos y rojos, que caben perfectamente en los hoyitos.

— ¿Cómo se juega esto? —pregunto.

— Como ya te dije, hay que hundir los barcos del oponente. Si te das cuenta, en el cuadriculado están las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J que representa a cada renglón. Para identificar a las columnas están los números del uno al diez. Así que tenemos cien cuadritos, cada uno con un orificio en el que caben estos pequeños palos de plástico. Los tres barcos son de diferente tamaño, uno puede abarcar tres cuadros, el otro cuatro y el más grande cinco y todos se pueden colocar en los orificios. Cada quien tiene un tablero igual, debes de poner tus tres barcos en la parte de abajo, sin que yo los vea, yo hago lo mismo y empieza el juego. Vas a tener cinco tiros para pegarle a mis barcos, al final yo te digo si le diste a alguno o no. Luego yo tengo cinco tiros y al final, me dices si te pegué o no.

Después, de nuevo, tienes cinco tiros; luego yo otros cinco y así hasta que uno de los dos hunda todos los barcos del oponente. Cada que yo tire, vas a poner un palo blanco en el punto que te mencioné. Si le doy a tu barco pones uno rojo encima del barco. Por ejemplo, el barco mediano abarca tres cuadros, si le doy a los tres entonces ese barco estará hundido, ¿tienes alguna duda?

— Sólo una, dices que hay que tratar de hundir los barcos con tiros pero, ¿cómo vamos a tirar?

— Me faltó explicar eso. Pues vamos a tirar, es decir, lanzar un misil al contrario, diciendo los nombre de cada cuadro.

— ¿Los nombres? ¿Cada uno de los cuadros tiene un nombre?

— ¡Claro que lo tiene! ¿Para qué crees que sirven las letras y los números que representa a los renglones y a las columnas? Cada cuadro puede ser identificado, de manera única, con una letra y un número. Digamos que yo lanzo un misil en D4, entonces me

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
B	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
D	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
E	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
F	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
G	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
H	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
I	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
J	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10

refiero al renglón D y a la columna 4. Si tu barco ocupa ese cuadro, entonces pones un palito rojo encima del buque; si no, pues pones un blanco en la parte de arriba. Si le pegué a tu barco, y este ocupa tres cuadros, sólo me faltarán dos tiros para hundir ese barco. Al final de los cinco tiros tienes que decir: ‘Me diste’; en caso de que le haya atinado a tus buques; ó ‘me hundiste’, si es el caso, o te quedas callado si no le atine a alguna nave. ¿Está claro?

— Ahora ya me quedó todo claro, vamos a jugar.

— Muy bien, toma tus tres buques de guerra y colócalos en el tablero para que empiece el bombardeo. Dos últimas cosas que no te he dicho: una, no se vale poner los barcos en diagonal, sólo horizontal y vertical; dos, deberías de anotar los tiros que me dices, para que no los vayas a olvidar y los repitas perdiendo oportunidades.

Tomo el barco que abarca tres cuadros y pienso dónde ponerlo. Es la primera vez que juego esto y debo de planear una buena estrategia, pues el maestro dijo que se trata precisamente

de eso. No tengo que pensar mucho para decidirme, pues los voy a colocar muy alejados uno del otro, así va a ser más difícil que el maestro les atine. Así que los pongo cerca de lados laterales y le digo que estoy listo. El profesor me dice que comience el bombardeo, tomo lápiz y papel y trato de dar tiros a las orillas para atinarle a sus barcos.

— B-2, C-9, H-3, J-8 y J-10 —lanzo mis tiros con la esperanza, casi confianza, de pegarle a uno de sus barcos—. Espero que diga que le di; pero en lugar de eso, bombardea a mis buques con mucha efectividad, pues casi me pega.

— B-3, B-8, F-5, H-9 y J-4 —dice el maestro.

— No me diste —digo nervioso porque estuvo cerca de atinarle a dos de mis barcos. Ahora yo te voy a tirar. D-1, E-9, F-7, H-10 y J-3.

— Me diste, mis tropas están heridas —dice el profesor en tono de juego—. Pero resisto como buen guerrero que soy.

Estoy feliz porque le pegué primero, ahora sólo es cuestión de tiempo para que le gane.

— D-2, F-2, E-9, I-10 y F-7 —bombardea el maestro que le atina cuatro veces a mis barcos.

— Me diste —digo muy desanimado—. ¿Cómo le hiciste para tener tanto tino?

— Ya te dije que es pura estrategia. Ahora te toca tirar a tí.

Así continua el juego y pronto me hunde los tres barcos y yo sólo uno. Desanimado le pido la revancha y me vuelve a ganar. Él parece muy divertido pero me dice que si practico algún día seré muy bueno, pero no debo desesperarme y hacer una buena estrategia.

— Ya es hora de regresar a clase —dice el maestro joven—, pero si te interesa seguir jugando, te espero a la hora de la salida en la sala de la ludoteca. Ya sabes que van muchos alumnos a jugar ajedrez, damas chinas, serpientes y escaleras y ahora ‘batalla naval’. Si te encuentro ahí, te enseñare algunas estrategias que puedas usar para ser el mejor en este juego.

Pero, ¡por supuesto que voy a ir! Si dice que me va a enseñar algunas estrategias las quiero aprender para que nadie me gane. También es una manera de convivir con este maestro y con mis compañeros. Tal vez aprenda a jugar ajedrez y pida de premio lo que no le pudieron dar a su inventor, tantos granos de arroz que no alcancen los que hay en todo el

pueblo. Sería muy divertido, jugar con un compañero, apostar, ganar y pedir algo parecido al cuento del rey que me enseñó mi amigo Teodoro.

Aún faltan tres horas para la hora de la salida; no es mucho, pero presiento que se me van a hacer muy aburridas y largas. Las clases de la maestra de geografía jamás me han gustado, pues parece que recita nombres de países lejanos, ríos, montañas, cordilleras, mares, islas, archipiélagos, etc., aprendidos muy bien en su juventud y hasta ella misma se aburre. Pero el día de hoy es distinto. No es que la profesora haya cambiado su método, más bien es algo en mi percepción que me hace estar más atento y disfrutar de las palabras que escucho. Nos habla de la lluvia en las diferentes regiones del mundo. Me imagino todos esos paisajes lejanos en medio de grandes cantidades de agua cayendo del cielo y realmente es agradable. Pero, ¿por qué este cambio en la clase de geografía? No se me ocurre otra cosa que el maestro joven, creo que me contagia de su alegría y dinamismo, pues tengo ganas de aprender mucho en todas las clases pero de una manera sencilla y agradable. Me siento como veo al maestro: serio en la vida pero disfrutando cada momento, desde lo más tonto hasta el sentimiento más sublime.

Por fin terminan las clases y de inmediato me dirijo a la sala de juegos. Me sorprende ver tantos alumnos, pues antes lo único que querían era irse a sus casas, nunca se quedaban en la escuela por algún motivo. El maestro joven está en el fondo, leyendo un libro en un idioma extraño. Me acerco lentamente pero no sé si hablarle, pues parece muy entretenido y tal vez se le olvidó que quedamos de jugar. Pero en la mochila que está en el suelo veo una bolsa transparente con los dos tableros de batalla naval con los que jugamos en el recreo, entonces tal vez sí me esté esperando y se puso a leer para no aburrirse.

— Toma los tableros de mi mochila —dice el maestro sin apartar la mirada de su lectura—, no creas que te vas a escapar de este compromiso que tenemos.

Durante el encuentro, me da algunos consejos básicos de estrategia que yo aprendo muy contento. ¡Esta ludoteca es una maravilla! Al final de una partida me dice que si le puedo ayudar en algo, pues tiene preparada su próxima conferencia y quiere ver si funciona bien. Que me quiere comentar unas ideas para ver qué me parecen. Por supuesto que le digo que sí, pues me siento como una persona importante, escuchando antes que nadie la conferencia para dar mi punto de vista.

— ¿Conoces los números quebrados? —pregunta el maestro joven.

— Sí los conozco —respondo—. Creo que se usan dos números para representarlos, uno arriba del otro, separados o divididos por una raya ¿cierto? —Aquí temo que me empiece a preguntar sobre la suma, resta, multiplicación o división de estos números, pues siempre se me han complicado estas operaciones.

— Esos mismos —dice el profesor—. ¿Puedes escribir algunos quebrados que recuerdes?

Saco una hoja de mi libreta y anoto el tres cuartos, un medio y tres quintos porque el maestro joven me interrumpe con una pregunta.

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$$

— Si te pidiera que escribieras todos los quebrados que existen, ¿lo podrías hacer? —pregunta el profesor.

Pienso un momento en esto y creo que no es posible, pues hay muchos quebrados y no sabría como escribirlos todos o, simplemente, no me alcanzaría el tiempo. Recuerdo que me dijeron que son representados con dos números, pero no se cuántos existan.

— No lo sé —digo un poco preocupado.

— No te apures, es precisamente de lo que te quiero hablar: la manera de escribir todos los quebrados que existen. Yo se que conoces muy bien a los números naturales, así que dibújalos en tu libreta.

¿Cómo sabe que conozco bien a los números naturales? No importa, por ahora hago lo que me dice y anoto la colección de números, pero el maestro le borra los corchetes, la N y queda lo siguiente:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, n, \dots$$

— Muy bien, ahora, como bien lo dijiste, los números quebrados, también llamados fraccionarios, se forman de la división de dos números enteros. Vamos a usar la serie de los naturales y a cada número le vamos a poner un uno encima, para formar la siguiente sucesión de quebrados:

$$\longrightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

— Si te das cuenta —explica el profesor— en la parte de abajo está la serie de los naturales, sólo que todos tienen como numerador el uno.

— ¿Qué es eso de numerador?

— Los números que están arriba. A los que están abajo se les llama denominadores, sólo es una manera de nombrar las cosas.

— Tengo una duda. Es cierto que ahí siguen estando todos los naturales, pero ahora se han formado fracciones, pero esa serie es infinita, ¿no?

— Tienes toda la razón. Hemos formado una sucesión de fracciones infinitas. Pero debes saber que no son todas las que existen, hay muchas más. Para formar otra serie infinita basta con cambiar todos los numeradores que son uno, por un dos.

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{2}{n}, \dots$$

— Tienes razón, esta serie de números también es infinita como la primera, pues en la parte de abajo tenemos a los naturales, en los denominadores, como dijiste que se llaman.

— Ahora ya tenemos dos series de números quebrados con infinitud de elementos, pero ¿cuántas más se pueden formar?

— Las que quieras, sólo basta que, para formar la que sigue, cambiemos todos los numeradores por un tres en lugar del número dos.

Al decir esto el maestro anota lo siguiente:

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{3}{n}, \dots$$

— Ya entendí lo que haces —le comento al maestro y empiezo a escribir la serie que sigue —, ahora vas a escribir lo mismo pero en la parte de arriba puros cuatros, ¿no?

— Así es, es precisamente lo que sigue.

Le enseñé el diagrama al maestro y dice que está muy bien y escribe la serie siguiente mientras yo lo hago con el cinco y el con la del seis.

$$\frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{4}{n}, \dots$$

$$\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \dots, \frac{5}{n}, \dots$$

$$\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5}, \frac{6}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{6}{n}, \dots$$

Veo la hora en el reloj de la pared y me percató que tengo que regresar a mi casa, así que me despido del maestro y salgo a toda prisa. Realmente no sé qué me quería comentar acerca de las fracciones, o si su intención era solamente mostrarme que son muchas, pero ya no le doy oportunidad.

Llego a mi hogar y me encierro en mi cuarto. Me acuesto en mi cama con la mirada fija en el techo y trato de recordar la conversación de hoy. Lo que más me sorprendió es cuando mencionó que alguien ya le había dicho que soy muy observador. Esta frase me la dice todo el tiempo mi amigo Teodoro, así que supongo que se conocen. Definitivamente, tengo que investigar esto, por qué los dos están en este pueblo, qué es lo que buscan, cuál es la relación entre ellos, qué provecho puedo sacar, etc.

Por ahora me voy a dedicar a ver que hay de raro en este nuevo conjunto de los números quebrados. Así que abro mi libreta en donde realizamos los diagramas y los observo por un largo rato. Al final me doy cuenta de algo muy importante, ¡que hay series infinitas por todos lados! No lo puedo creer, hacia la derecha cada renglón no termina y hacia abajo tampoco. Para ver mejor esto vuelvo a anotar todo lo que hicimos pero con una pequeña modificación.

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \dots, & \frac{1}{n}, & \dots \\
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & \frac{2}{6}, & \frac{2}{7}, & \dots, & \frac{2}{n}, & \dots \\
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & \frac{3}{6}, & \frac{3}{7}, & \dots, & \frac{3}{n}, & \dots \\
\frac{4}{1}, & \frac{4}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{4}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{4}{6}, & \frac{4}{7}, & \dots, & \frac{4}{n}, & \dots \\
\frac{5}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{5}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{5}{7}, & \dots, & \frac{5}{n}, & \dots \\
\frac{6}{1}, & \frac{6}{2}, & \frac{6}{3}, & \frac{6}{4}, & \frac{6}{5}, & \frac{6}{6}, & \frac{6}{7}, & \dots, & \frac{6}{n}, & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Le he agregado tres puntos suspensivos al final de cada renglón y cada columna, para indicar que son infinitas. Después de todo esto no es muy difícil de ver, pues todo el secreto está en que se usan los números naturales que son infinitos. El primer renglón es infinito porque son los mismos números naturales sólo que tienen el uno en la parte de arriba, como numerador. En el segundo renglón pasa lo mismo, sólo que con numerador dos. El tercero tiene numerador tres y, así, sucesivamente. Así que hay infinitos renglones. Pero las columnas también son infinitas, pues también se hace uso de los naturales que jamás terminan. Pero, resulta que todos estos números juntos forman lo que el maestro llamó los números quebrados, así que deben de ser muchos más que naturales, pues como lo dijo el profesor: ‘Los números naturales son sólo una pequeña, muy pequeña parte, de todas las fracciones que existen’. ¡Este conjunto realmente es enorme!

Ahora me pregunto sobre la cardinalidad de todas las fracciones. Estoy convencido de que no puede ser el mismo *aleph cero*, pero no sé cuál pueda ser. Tal vez el viejo vaya a inventar otro número extraño más; así que tengo que ir a verlo de inmediato. Si me pregunta que por qué *aleph cero* no es candidato, le voy a decir que porque es imposible.

Todos estos números no pueden ponerse en correspondencia con los naturales. Cada fila y cada renglón sí, pero la totalidad de ellos no. Es más, voy a escribir varios conjuntos en donde ponga algunos renglones y algunas filas en correspondencia con los naturales, con sus flechas y todo, para que se convenza de lo que digo.

Llego a la cabaña del viejo y, de nuevo, no lo encuentro. Así que decido dar un paseo alrededor, para disfrutar de la puesta del sol que ilumina al cielo, con ese tono rojizo que me trae algunos recuerdos. Evoco el primer día que pensé en esto. Era una tarde fría en la que caminaba con mi madre por algunas calles un poco ruidosas. Ella se encontró con una de sus amigas y yo me aburría terriblemente. Así que mi estado de ánimo se transformó a enojo y melancolía. Eran como las seis de la tarde y el sol se metió iluminando el cielo, lo vi y de inmediato sentí un bienestar profundo y placentero. El frío, la incomodidad y el sentimiento adverso, desaparecieron paulatinamente.

A unos cien metros de la cabaña, rumbo al norte, se encuentran unas grandes piedras. Me dirijo hacia ellas y trepo con un poco de dificultad. En lo alto disfruto mucho de la vista, pues los árboles, las nubes, el sol, el aire, etc., son cosas que me gustan mucho. No pasan ni diez minutos y escucho ruidos de personas que se acercan. Por instinto, me escondo entre las rocas y vigilo atentamente. Reconozco la voz del maestro joven, junto con la de varios compañeros de la escuela. Ahora lo recuerdo: en el colegio organizaron un viaje al bosque para ir a pescar, pero no me interesó y no me inscribí. Al parecer les fue muy bien, pues todos vienen contentos y algunos cargan unas cubetas con pescados grandes en su interior. También se les ve en la cara una mezcla de cansancio y satisfacción. Decido seguir escondido hasta que pasen, pero en la próxima excursión seguro que me voy a integrar. A lo lejos veo que el grupo se aproxima a la cabaña, no estoy seguro, pero creo que el maestro joven se aleja un poco y entra a la pequeña casa, de inmediato quiero correr hacia allá para evitarlo, pero me quedo inmóvil en el mismo lugar, sólo observando lo que pasa, sin tener la visión que quisiera. Después de veinte minutos bajo de las grandes rocas, me acerco a la cabaña y veo que el viejo ya llegó pero no tiene visita alguna. Al lado de la mesa veo una cubeta con dos grandes pescados. Le pregunto a Teodoro y sólo me dice que los fue a pescar, que estoy invitado para comerlos al siguiente día.

No sé qué pensar de todo esto, ¿acaso el maestro joven conoce a mi amigo y le trajo este regalo? O tal vez Teodoro fue con todos los alumnos a pescar y ahora todos son

grandes amigos y les habla de las mismas cosas que a mí. Tal vez ya le aburrieron mis visitas y es por eso que se buscó nuevos amigos. Parece que el viejo se da cuenta de que pienso mucho y me invita a sentarme. Me dice que va a cortar unas hojas para marinar el pescado y que regresa en un momento.

Últimamente el viejo me ha regalado copias, del tamaño de una hoja, de los cuadros que tiene en la pared. Pero también es cierto que cada que vengo a su cabaña tiene algunos nuevos, así que puedo admirar obras de los más famosos pintores, según las propias palabras de Teodoro. Pero sin duda hay artistas que me han gustado más, pues lo que expresan con colores llega a una parte importante de mis sentimientos y alma. Cuando entré, de inmediato fui atraído por una pintura que tiene que ver con el tiempo, al menos así lo creo, porque veo en él unos relojes deformados, aparentemente, por el sol. Muchas son las interpretaciones que se me ocurren, pero siempre me queda la duda del verdadero significado, la idea principal que quiso transmitir el artista. He llegado a pensar que los autores sólo dibujan lo que sienten en el momento, sin que precisamente tenga un sentido específico. Tal vez somos las personas, que vemos los trabajos terminados, a las que nos gusta encontrar un sentido a los sentimientos particulares de los autores. Aunque también he pensado que esos grandes artistas pintan después de un largo tiempo de meditar y pensar lo que quieren transmitir. La realidad no la sé, sólo que disfruto mucho de lo que veo en la pared del viejo. Este cuadro en particular despierta emociones contrarias, pues la forma displicente de los relojes me dicen muchas cosas; desde que el tiempo no vale nada para las personas, o que le damos tanta importancia que despreciamos su verdadero significado. También puede significar que el tiempo, para algo en particular, se termina y no nos damos cuenta de eso. De lo que sí estoy seguro es que este tipo de pintura me gusta y disfruto al verla.

Cuando el viejo regresa, estoy más tranquilo. Mis dudas se han despejado y le comento sobre la plática con el maestro joven, de los números quebrados y de que no se pueden poner en correspondencia con los naturales. Él, como siempre, me escucha muy atento y de inmediato saca unas hojas de papel y unos lápices.



Salvador Dalí, *La persistencia de la memoria*.

— Esos diagramas que hiciste son muy interesantes —dice Teodoro —, y estoy de acuerdo contigo pero sólo en una parte. Es cierto que cada renglón y cada columna son como los naturales y, por lo tanto, cada uno de esas colecciones tiene como número cardinal a *aleph cero*. Te preguntaste por el número que representa a esa infinidad de infinitudes.

— ¿Infinidad de infinitudes? —pregunto casi interrumpiendo al viejo.

— Si, la totalidad de números quebrados o racionales, es una infinidad de infinitudes. Pues como tú bien lo percibiste, así como los escribieron el maestro joven y tú, se ve que cada renglón y cada columna son sucesiones infinitas. Así que tenemos una colección formada por un número infinito de sucesiones infinitas. ¿Estás de acuerdo?

— Si, estoy de acuerdo —respondo fascinado y recordando el diagrama que hice en mí cuarto.

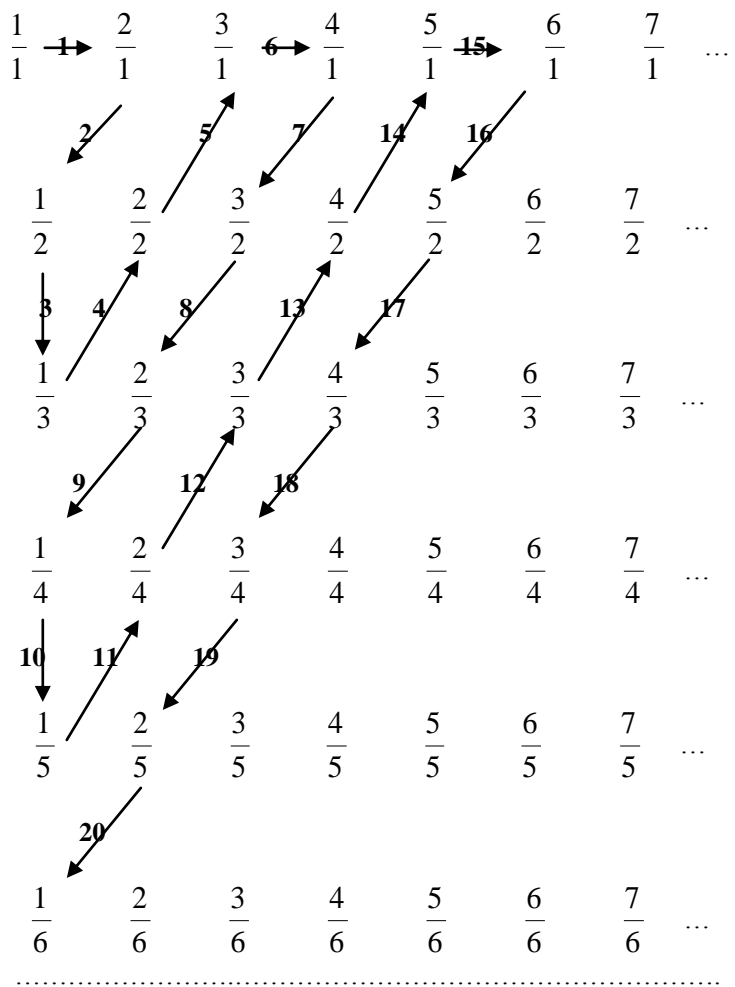
— Pues bien, pequeño amigo, ahora hay que encontrar el cardinal de este conjunto inmenso. Pero, estás convencido de que no puede ser *aleph cero*. ¿Has pensado en algún otro?

— Pues creí que íbamos a inventar otro igual como lo hicimos con *aleph cero*. Otra letra rara que representara a este conjunto formado por infinidad de conjuntos infinitos. Tendría que ser algo así como la suma de infinitas veces *aleph cero*, ¿no?

— Puede ser, pero no es así. Cuando hablamos de los números enteros negativos y positivos, encontramos una manera de escribirlos, de tal manera, que los pusimos en correspondencia con los naturales, ¿recuerdas?

— Claro que lo recuerdo. En aquella ocasión dijiste que, bastaba con encontrar una forma de acomodar ciertos conjuntos, para ponerlos en correspondencia con los naturales.

— Así es, pero resulta que el maestro joven y tú ya encontraron esa manera de acomodarlos. Al decir esto, Teodoro anota algo parecido a lo que hice pero con algunas flechas y unos números.



- Este diagrama —explica Teodoro —, nos dice cuál es el número que se le asigna a este conjunto de todos los números quebrados.
- ¡En serio! —exclamo asombrado, porque no es claro para mi.
- Hablo muy en serio. Si te das cuenta, las flechas están numeradas usando los naturales, lo único que nos dicen, es la manera de acomodar todos los números quebrados para que se puedan poner en correspondencia con los naturales. En realidad es como si hiciéramos un collar con todos los naturales, y numeráramos cada uno de los eslabones para evitar que se rompa. Entonces, todos los elementos de este conjunto formado por infinitos conjuntos infinitos, se pueden acomodar tal como lo indican las flechas. Con este sencillo truco podemos ponerlos en correspondencia con los naturales, pero antes observa que en la serie hay números que se repiten, hay que quitarlos antes de hacer la correspondencia uno a uno.

— ¿Números que se repiten? ¿Te refieres a que hay fracciones que son las mismas, equivalentes? —pregunto al recordar vagamente las palabras de un profesor de primaria.

— Exactamente Jorge. Fíjate, por ejemplo, en las fracciones que tienen el mismo denominador que numerador, es decir, uno entre uno, dos entre dos, tres entre tres, etc. Todas ellas representan al uno, hay quedarse con el uno entre uno y eliminar todos los demás.

— Tienes razón Teodoro —comento al darme cuenta de lo que dice mi amigo—. Pero también hay otras fracciones que son iguales —casi grito por este descubrimiento—. El uno entre dos es igual dos entre cuatro y a tres entre seis.

— Así es, hay infinidad de fracciones que hay que tachar porque se repiten. Ahora dime, ¿cuál es el número cardinal de todos los números quebrados?

De nuevo, veo el diagrama y concluyo que no puede ser otro más que *aleph cero*, pues las flechas numeradas son como ponerlos en correspondencia con los naturales. A cada fracción se le asigna un natural y viceversa. También recuerdo lo que me dijo el viejo la vez pasada, que sólo basta acomodar los elementos de manera adecuada, para ver que si se pueden numerar.

— Pues no puede ser otro que *aleph cero* —digo bastante impresionado con el resultado.

— Así es, pequeño amigo. Estas sucesiones no son otra cosa que una infinidad de infinitudes y tienen cardinalidad *aleph cero*. Entre tu maestro joven, tu y yo, hemos encontrado la manera de ordenarlos igual que los números naturales, de ponerlos en correspondencia con todos ellos. Así que, al final, estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, ambos tienen exactamente el mismo número de elementos.

— ¿Cómo es posible que pase esto si los naturales son sólo una parte pequeña de todos los quebrados? —pregunto recordando las palabras del maestro.

— Es la magia del infinito, pues en él encontramos propiedades distintas que no conocíamos; cosas que nos sorprenden pero que son muy interesantes. Lo que acabas de decir es algo muy cierto. A primera vista, puede parecer que la totalidad de los números quebrados o fracciones, no puede tener a *aleph cero* como cardinal, pero vimos que no es así. Como bien dijiste, los naturales están dentro de los quebrados. Así que podemos pensar que un conjunto infinito, que jamás termina, es aquel en el que sus elementos se pueden

poner en correspondencia con una parte del mismo. Esto que te digo nos pasó en los naturales, en los enteros positivos, negativos y ahora con los quebrados. Hablar del infinito, es hablar de un paraíso que alguien creó para todos los que estemos interesados, y nadie, absolutamente nadie, nos podrá expulsar de él. El infinito representa una de las más grandes ideas de todos los tiempos. Desde épocas muy remotas, grandes personajes han hablado y escrito mucho acerca de esto. Pero pocos son los que realmente lo han llegado a comprender, y disfrutar de las maravillas que proporciona. Es fácil perderse en este maravilloso concepto, pero es muy placentero cuando descubres lo que hay detrás de todo esto, como la idea que una colección formada por un número infinito de sucesiones infinitas que tienen como representante a *aleph cero*. Esto es algo que sólo el infinito nos proporciona y aquellos que lo conocemos somos seres afortunados que debemos disfrutarlo al máximo.

Las últimas palabras del viejo suenan como una especie de poesía al infinito; esta idea que me ha impactado e impresionado mucho. El brillo en los ojos de mi amigo es muy especial, como si estuviera hablando de algo sublime, algo que da una especie de poder y que pocas personas lo conocen. ¿Acaso yo seré de los pocos seres que han logrado conocer el infinito? Puede ser que sí. Cuando le pregunto a Teodoro, me dice que voy en el camino correcto, pero si quiero conocer más el paraíso de esta idea, el camino es aún largo, que hay muchas más maravillas por descubrir, pero que se debe hacer lentamente.

Camino de regreso a mi casa con varios sentimientos de esta conversación. Primero no sé qué pensar acerca de la relación del maestro joven, el viejo y yo. No es que en verdad exista una relación, pero en ocasiones siento que ellos dos se conocen muy bien, que ellos me conocen y, al final, que si hay algo que nos une a los tres. Pero luego pienso que esto no puede ser, que son sólo falsas percepciones mías y que estoy pensando de más. Además, cada vez que le quiero preguntar a Teodoro al respecto no lo puedo hacer, pues pienso que se va molestar o que no me va a responder porque es su vida privada y nadie tiene derecho a cuestionarla. Pero hay varios detalles que me intrigan mucho, como aquella ocasión en que vi al viejo meterse a la escuela; o cuando encontré a Teodoro en la banca y que se entrevistó con una persona muy parecida al maestro joven; o el día de hoy que el profesor me habló exactamente de las fracciones, cuando el viejo me dijo que precisamente le

preguntara de eso. Además, la impresión de hace rato que tuve de que el joven maestro se metió a la cabaña, etc. Todos estos detalles me hacen pensar mucho, pero no sé cómo aclarar esta situación. Lo que tengo que hacer es preguntar, pero no me atrevo; o quedarme con la duda y esperar que el tiempo me de más pistas para resolver este misterio.

Mañana no es día de ir a la escuela, ni mi padre tiene que ir al trabajo. Así que, aprovecho que nos dormimos un poco tarde para pedirles permiso de salir mañana con el viejo. Les digo que sólo voy a ir con unos amigos de la escuela a jugar, caminar y divertirnos. Ellos no tienen problema pero debo de llegar a cierta hora. Ahora, más que nunca, me gustaría convivir más con mis padres, que les interesaran las mismas cosas que a mí, pero no es así. Mañana ellos se van a ir a la iglesia a una especie de plática o retiro. Yo no tengo edad para asistir, ni las ganas necesarias. Así que me meto a mi cuarto a escuchar música y disfrutar de este espacio que, a pesar de estar dentro de mi casa, es algo muy personal.

Llego a la cabaña de mi amigo y cocina los dos grandes pescados. Me cuenta un poco acerca del deporte de la pesca y me promete que en un futuro me llevará a la gran laguna para poder dedicarnos a esta actividad. Me pide que salga a buscar una hierba para la comida que nace a la sombra de las grandes rocas y ante mi sorpresa, me encuentro de nuevo al maestro joven con algunos alumnos. Me dicen que descansan porque van hacia otra excursión. Me invitan a unirme al grupo y estoy a punto de hacerlo, pero recuerdo que quedé de comer con el viejo. Tan sólo me quedo un momento con ellos, pero llega la hora de despedirme y los veo marcharse. Me subo a las rocas y veo cómo se alejan entre juegos y risas. De inmediato arranco del suelo lo que me pidió mi amigo y se lo llevo. A pesar de mi tardanza, él no dice algo. Actúa como si nada pasara, o como si todo supiera, sólo sigue cocinando los pescados que ahora huelen delicioso. De inmediato olvido todo y sólo disfruto de la cabaña, pues se ha convertido en una especie de segunda casa. La conozco muy bien y el viejo me da la libertad de andar por toda ella mientras no haga desastres. Comemos y mi amigo me habla de cocina. Me cuenta que estudió un tiempo gastronomía y que le encanta cocinar. También me dice que yo soy como él cuando era chico, que me interesan muchos temas y que seguro voy a aprender muchas cosas a lo largo de la vida. Me habla de la universidad y la vida que se lleva en ese centro de estudios. Me dice que cuando sea el momento de ingresar, él mismo me ayudará para estudiar y presentar unos exámenes

muy buenos. Esto me alegra mucho, pues me dice que voy a tener la oportunidad de vivir lejos de aquí, de conocer la ciudad, y que estudiaré cosas muy interesantes todos los días. Me habla largo tiempo sobre esto y en verdad disfruto estar en esta casa que no es la de mis padres.

Nos quedamos en silencio después de comer el postre y no puedo dejar de pensar en los números quebrados, pues tengo la sensación de que no hay más números parecidos a *aleph cero*. Es decir, que todos los conjuntos de números que existen tienen como cardinal a *aleph cero*. Y es que esto de los quebrados me sorprendió mucho, pues es un conjunto que consta, como lo dijo el viejo, de una infinidad de infinitudes y se pudieron poner a sus elementos en correspondencia con los naturales. Así que ya no creo que existan conjuntos más grandes. ¿Qué otro conjunto más grande puede haber que una infinidad de infinitudes?

Como siempre le comento al viejo mis pensamientos. Él se sonríe y me dice que vamos a jugar batalla naval, que a él también le gusta este juego y que nos vamos a divertir. Saca unos tableros y me da la impresión de que son los mismos de la escuela, es más, los mismos que usé con el maestro joven.

El viejo me da más estrategias y veo cómo, poco a poco, mejoro en este juego tan entretenido, hasta le gano algunas partidas a mi amigo. Eso de reconocer los nombres de cada cuadro ya no es complicado, pues sólo basta mencionar una letra y un número. Al final de una de las partidas el viejo me dice:

— Este juego me gusta mucho por varias cosas. Primero que se me hace muy interesante la manera de reconocer cada cuadro. En la vida real, la marina usa un sistema parecido, pues cada punto que existe en el espacio, lo representan con unas coordenadas como en el juego, es un poco más complicado pero es la misma idea. También me recuerda mucho a todos los números que existen entre el cero y el uno. ¿Sabes que números hay entre el cero y el uno?

— Pues a la mitad está el cero punto cinco (0.5), ¿no?

— En efecto tienes razón. Pero también está el cero punto cincuenta y tres (0.53).

— Tienes razón —le digo al viejo observando que ahora usó, después del punto, una cifra con dos dígitos. Así que le digo una con tres dígitos, usando la misma cifra pero aumentada—, pero también está el cero punto quinientos treinta y seis (0.536).

— Si a esa vamos —dice el viejo—, también está el cero punto cinco mil trescientos sesenta y cuatro (0.5364).

Así continuamos aumentando un dígito más, pero se hace difícil recordar tantos números. Me doy cuenta de que este juego jamás terminaría, pues se le puede aumentar infinitos números después del punto decimal. Teodoro dice que tengo razón, que los números que están entre el cero y el uno, son infinitos y se pueden expresar de manera similar a los cuadros en el juego de la batalla naval.

— ¿Cómo es esa forma? —pregunto.

— Muy sencilla, vamos a usar letra 'a' y dos pequeños números a la derecha llamados subíndices. Estos nos van a servir para tratar de escribirlos todos sin que nos vaya a faltar alguno.

— La verdad es que no entiendo la idea —le digo al viejo con toda sinceridad.

— Es muy fácil. Imagina que me dices que encuentre la manera de escribir a todos los números decimales que existen entre el cero y el uno y los coloquaste de la siguiente manera, digamos:

—

	0.1235658488...
	0.8697144892...
	0.4129879873...
	0.1152317895...

— Pero como nadie ha encontrado esa manera —continúa Teodoro—, vamos a usar la letra 'a' y los subíndices que te dije. Veamos el ejemplo del primer renglón, el número:

0.1235658488...

vamos a representarlo por

$0. a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$

— Lo que nos dicen los pequeños números —explica el viejo—, es la posición, es decir, el uno, después del punto decimal, está representado por a_{11} , que indica que está en el renglón uno y la columna uno, igual que en el juego.

— Entonces el 2, representado por a_{12} , ¿quiere decir que está en el primer renglón y en la segunda columna?

— Exactamente, así es. Entonces, si alguien dice que puede escribir todos los decimales que existen entre el cero y el uno, y los puede escribir en renglones, se podrían expresar como:

$$\begin{array}{l} 0. a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}\dots \\ 0. a_{21} a_{22} a_{32} a_{33}\dots \\ 0. a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}\dots \\ 0. a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

— Ahora entiendo, es igual que en el juego de la guerra naval. Entonces la letra a_{32} sólo expresa el número que esta en el tercer renglón y en la columna dos, ¿no es así?

— Así es Jorge, muy bien. Ahora sólo les ponemos unos números a la derecha, los naturales, porque se supone que están todos, entonces se pueden poner en correspondencia con ellos.

$$\begin{array}{l} 1. 0. a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}\dots \\ 2. 0. a_{21} a_{22} a_{32} a_{33}\dots \\ 3. 0. a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}\dots \\ 4. 0. a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

— ¿Entonces el conjunto de los números que están entre el cero y el uno, también tiene cardinalidad *aleph cero*? ¿no?

— Si están todos en esa lista por supuesto que sí, pero te voy a mostrar uno que no está. Tomemos el número que está en el lugar a_{11} , si este es, digamos, un tres, lo

cambiamos por un cinco, un ocho o un nueve, es decir, lo cambiamos por cualquier número distinto. Como ya es diferente, lo vamos a nombrar b_{11} , sólo por darle un nombre. Ahora tomamos a_{22} y hacemos lo mismo, lo sustituimos por un número distinto al que tiene y le llamamos b_{22} . Pero lo mismo hacemos con a_{33} , a_{44} , a_{55} , etc.

— ¿Para qué vamos a hacer todo esto? —pregunto casi interrumpiendo al viejo.

— Para asegurarnos de que este nuevo decimal es distinto a todos los que están en el diagrama. Este nuevo número decimal es precisamente:

$$0. b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} b_{55} b_{66} b_{77} \dots$$

— No puede estar en el primer renglón, —explica el viejo—, porque al menos difiere en el primer dígito; tampoco en el segundo porque al menos es diferente en el segundo dígito, tampoco en el tercero porque es diferente en el tercer número, etc. Entonces, este número no se encuentra en la lista porque es diferente a cada número en, al menos, el dígito que se encuentra en la diagonal.

— Entonces, ¿los números que hay entre el cero y el uno, no se pueden poner en correspondencia con los naturales?

— Por supuesto que no, pues se partió de la suposición de que se podía. Se colocaron en una supuesta relación con los naturales, representada por los renglones, y se exhibió un número que estaba fuera de esta lista. Al estar fuera de la lista, no alcanzan los naturales para hacer una relación entre los decimales que están entre el cero y el uno y los naturales, porque al suponer que sí se podía, ya los habíamos agotado todos. De otra forma nuestra relación no podía haber sido uno a uno.

— ¿Esto significa que la sucesión de números decimales es más grande que la de los naturales?

— Así es pequeño amigo. Es más grande porque en el diagrama usé a todos los naturales para representar a algunos decimales. Ahora hemos visto que, al menos, hay un decimal distinto a todos esos. Esto quiere decir que hay más decimales que naturales.

— ¡Esto es increíble! Entonces, ¿cuál es el cardinal de esta colección de números

— Pues otro número transfinito. Pero no sólo hay ese, de hecho hay una infinidad de estos números transfinitos. Hay infinidades tan grandes que no se pueden poner en

relación uno a uno con toda la sucesión de números naturales. Esto quiere decir que hay una infinidad de infinitudes de infinitudes de ... de números infinitos diferentes. Pero, esto ya lo empezaremos a discutir en una futura ocasión.

En este momento Teodoro y Jorge alcanzaron una de las cimas importantes en la amistad, la altura en la que podían ser ellos mismos ante el otro, sin temor a sentirse ridículos o tener que aparentar algo que estaban lejos de ser. Teodoro, por ser viejo, entendía a la perfección las relaciones humanas y la mejor forma de manejarse ante las personas, es por eso que sabía tratar a todo mundo en este pueblo y su presencia, nada fortuita, nos enseñó la manera de relacionarse con alguien mucho más joven. En este momento su experiencia supera a sus fuerzas y ánimos, más no a su dedicación. Por su parte Jorge, por ser joven y estar en constante dilema ante el mundo, le sobra energía pero le falta un canal para conducirla a ciertos fines determinados, pero algo dentro del él, dice, aunque no tan explícitamente como se pretende escribir, que al momento de alcanzar un punto límite hay que brincar al siguiente o dejarse caer lentamente para iniciar la escalada de la otra cima, pues la vida esta llena de puntos de inflexión y el verdadero reto es conocer el camino que debemos o queremos andar.

Bibliografía

Libros:

GARCIADIEGO A., 1992, Bertrand Russell y los orígenes de las <<paradojas>> de la teoría de conjuntos

MAOR E., 1987, To infinity and Beyond

FREIRE P., 2004, Pedagogía de la autonomía. Saberes necesarios para la práctica educativa

FRAENKEL, A., 1976, Teoría de conjuntos y lógica

HERMANN H., 2004, Bajo la rueda

GARCÍA MÁRQUEZ, G., 1985, Cien años de soledad

Artículos:

BERTRAND R., Los metafísicos y las matemáticas

FLORES DE LA MOTA I., 1993, El infinito: diálogo entre Bertrand Russell y Jorge Luis Borges

RODRÍGUEZ CONSUEGRA F., 1993, Lo que son y lo que no son los números: nota introductoria al célebre artículo de Benacerraf

HAHN H., El infinito

FERREIROS J., 1995, Lógica, conjuntos y logicismo: desarrollos alemanes de 1870 a 1908

ALFREDO AMOR J., Pequeños grandes cardinales

DAUBEN W. J., 1991, Georg Cantor y el Papa León XIII: las matemáticas, la teología y el infinito

GARCIADIEGO A., 1996, Historia de las ideas matemáticas: un manual introductorio de investigación

Enciclopedia:

Gateway to the Great Books

Lecturas sugeridas

KERNER E. y NEWMAN J., 1972, Matemáticas e imaginación

NEWMAN J., Sigma el mundo de las matemáticas

BELL, E., 1948, Los grandes matemáticos

KLINE M., Matemáticas en el mundo moderno

NORTHROP E., 1968, Paradojas matemáticas