UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Interpretaciones Entre Lenguajes e Indecidibilidad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
MANUEL ALEJANDRO LARA MARY

DIRECTOR DE TESIS:
JOSÉ ALFREDO AMOR Y MONTAÑO

2008

Debemos considerar que la mayor riqueza de un país es el cultivo de la inteligencia de su población. El día en que la colectividad mexicana se responsabilice más de sus deberes y se organice de manera que no haya niños que carezcan de escuela, que todos los jóvenes tengan oportunidad de capacitarse, que cada ciudadano pueda educar su espíritu y ser un científico o un técnico o un obrero calificado o un agricultor moderno, ese día estarán movilizándose intensivamente nuestros valiosos recursos naturales y no habrá que temer por el destino glorioso de la patria, porque ninguna capacidad humana será desperdiciada, y porque sus recursos materiales serán utilizados para producir bienestar en vez de miseria, y paz en vez de guerra.

Lázaro Cárdenas del Río

Hoy, durante el desayuno, volvió a sorprendernos un poco, porque hizo algo de una manera que, al entrar en el comedor, fue como si volviera a entrar en el comedor, es decir, de algún modo desde el interior; fue como si del interior entrara al interior, lo cual luego le permitió salir del interior al interior, y finalmente del interior al exterior... Digo «como si», «de algún modo», porque todo ocurrió sólo hasta cierto punto, pero indudablemente este chico se aleja cada vez más de lo establecido.

Witold Gombrowicz, Diario Campestre, 1954

A mis padres

Índice general

Introducción

En 1931 Gödel dio a conocer uno de sus resultados más famosos, el Teorema de Incompletud de la Aritmética. Una de las consecuencias inmediatas de este teorema es la indecidibilidad de la aritmética. Una vez establecido este resultado, es natural preguntarse por la indecidibilidad de otras teorías. Para dar respuesta a esta pregunta se desarrollaron diversos métodos. La mayoría consisten en aprovecharse de la indecidibilidad de una teoría para transmitirsela a otra. Para esto hay que poder calcar una teoría en otra (o un lenguaje en otro, o una estructura en otra) y asegurarnos de que conservamos lo que queremos al llevar a cabo este proceso, es decir, que nuestra teoría no cambia o pierde propiedades a la hora de ser calcada en la nueva teoría. Así, un ente matemático está dentro de otro y las propiedades del primero inevitablemente son propiedades del segundo. Esta es la idea de las interpretaciones entre lenguajes.

En el presente trabajo estudiaremos las interpretaciones comenzando con un caso sencillo, la relativización. Después de esto profundizaremos más en el tema partiendo de las interpretaciones entre estructuras para luego ver que las interpretaciones entre lenguajes nos determinan a las primeras. Esto nos llevará a las interpretaciones entre teorías, las cuales nos son de gran interés, pues nos servirán para dar los resultados de indecidibilidad tras los cuales andamos. Una vez llegados a esto, probaremos, a modo de ejemplo, la indecidibilidad de la Teoría de conjuntos, para finalizar con resultados generales de indecidibilidad. Como aplicaciones de estos resultados tendremos la indecidibilidad de la Teoría de Gráficas y la indecidibilidad de la teoría de latices de altura $\leqslant 4$.

Como conocimiento mínimo para abordar este trabajo se necesita dominar la Teoría de Conjuntos y Lógica básicos. Algunos ejemplos requieren un ligero conocimiento de la Teoría de Grupos. El texto está planeado para ser leído de manera continua, o si se quiere, de manera lineal. Con el propósito de que este texto sea lo más autocontenido posible, en los apéndices se establecen resultados

(algunos importantes) que de estar en el texto principal no serían más que trabas para el lector e interrumpirían la continuidad del texto.
La mayor parte del trabajo se basa en [Hod], aunque el cuarto capítulo tiene como fuente principal [End], y los Apéndices C y D están basados en [TMR]. El propósito de este trabajo es aclarar, desarrollar y profundizar en el tema de la indecidibilidad. Esto en el marco de la Teoría de Modelos, area de las matemáticas que ha sido poco estudiada en México. Por último, este texto está pensado para ser leído por estudiantes de licenciatura, de manera que trata de ser lo más sencillo y esclarecedor posible. Esto no implica que no haya que trabajar, así pues: Buen viaje!!!

Capítulo 1

Antecedentes

En sus marcas... Comencemos con las definiciones fundamentales, es decir, las de tipo y estructura algebraico-relacional.

Definición 1.1. *Un tipo ρ es un conjunto de símbolos, de la siguiente forma:*

$$\rho = \left(\bigcup_{1\leqslant n} R_n\right) \cup \left(\bigcup_{1\leqslant m} F_m\right) \cup C,$$

donde R_n es un conjunto (posiblemente vacío) de símbolos de relación de aridad n[1]*, F_m es un conjunto (posiblemente vacío) de símbolos de función de aridad m y C es un conjunto (posiblemente vacío) de símbolos de constante.*

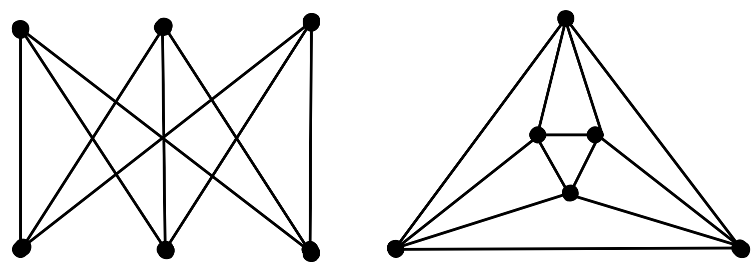
Si la cantidad de símbolos en un tipo ρ es finita, entonces diremos que ρ es un tipo finito.

Definición 1.2. *Una ρ-estructura (algebraico-relacional) es un par $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$, donde A es un conjunto no vacío e I es una función tal que a cada símbolo de relación n-ario de ρ le asigna un subconjunto de A^n; a cada símbolo de función m-ario le asigna una función $f : A^m \longrightarrow A$; y a cada símbolo de constante le asigna un elemento de A.*

[1] La palabra “aridad” hace referencia al número (entero positivo) de argumentos de la relación o función que interpreta al símbolo correspondiente.

I es la función interpretación[2] de $\mathfrak{A}$ sobre el universo A. En general, denotaremos a las estructuras con letras mayúsculas "fraktur" $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. A los universos de las estrucuturas los denotaremos con las letras latinas mayúsculas correspondientes A, B, C, etc. Si $\mathfrak{A}$ es una ρ-estructura y S un símbolo en ρ, entonces escribiremos $S^{\mathfrak{A}}$ en lugar de $I(S)$.

Ejemplo 1.3. *Un ejemplo de una estructura que nos será de utilidad más adelante es la estructura de una gráfica. Una gráfica es un conjunto de vértices junto con una relación binaria simétrica y antirreflexiva. Por lo general dibujamos las gráficas trazando aristas entre vertices que estén relacionados. Los siguientes son ejemplos de gráficas:*



Así, considerando el tipo $\rho = \{R\}$, podemos ver a una gráfica como una ρ-estructura $\mathfrak{A}$ de la forma $\langle V, R^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde V es un conjunto de vértices y dos vertices están relacionados si y sólo si hay una arista que los une. Por ejemplo, en la gráfica central (que por cierto es la gráfica de uno de los sólidos platónicos),

$$V = \{a, b, c, d, e, f\} \text{ y}$$

$$R^{\mathfrak{A}} = \{(a, b), (b, a), (c, a), (a, c), (b, c), (c, b), (b, e), (e, b), (b, d), (d, b), (a, e), (e, a), (a, f), (f, a), (c, d), (d, c), (c, f), (f, c), (e, f), (f, e), (e, d), (d, e), (d, f), (f, d)\}.$$

En el ejemplo 1.3, en lugar de describir a la estructura $\mathfrak{A}$ como un conjunto y una función de interpretación, describimos a la estructura como un conjunto seguido del único elemento en la imagen de la función interpretación. De aquí en adelante adoptaremos esta costumbre.

[2] I interpreta cada símbolo de ρ.

Dado un tipo ρ podemos considerar el lenguaje de primer orden asociado a ese tipo, llamémosle $\mathscr{L}$[3]. Supondremos que el lector ya conoce cuáles son las expresiones, términos, fórmulas atómicas y fórmulas de este lenguaje[4]. Además del lenguaje $\mathscr{L}$ de tipo ρ, consideraremos el lenguaje infinitario $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ que es una extensión del lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ en la cual las fórmulas pueden tener una cantidad menor a ω_1 de conjunciones y disyunciones y los bloques de cuantificadores son menores que ω, es decir, son finitos. Dado un conjunto finito o numerable de fórmulas Φ, la conjunción y la disyunción de todas las fórmulas en Φ serán denotadas por $\bigwedge \Phi$ y $\bigvee \Phi$ respectivamente[5]. Cuando hablemos de un lenguaje de primer orden nos referiremos a un lenguaje finitario. En caso contrario hablaremos de un lenguaje de primer orden infinitario. Por lo general el contexto dejará claro el tipo de lenguaje del que estamos hablando.

Formalmente, la clase de fórmulas de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$[6] se define como la clase más pequeña X tal que:

i) Todas las fórmulas atómicas de $\mathscr{L}$ están en X.

ii) Si φ está en X, entonces $\neg\varphi$ está en X; y si $\Phi \subseteq X$ entonces $\bigwedge \Phi$ y $\bigvee \Phi$ están en X.

iii) Si φ está en X, entonces para cualquier variable y, $\forall y\varphi$ y $\exists y\varphi$ están en X.

La idea de satisfacibilidad para el lenguaje $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ es la misma que la propuesta por Tarski[7], simplemente es necesario extenderla a los conectivos $\bigwedge$ y $\bigvee$. Dada una estructura $\mathfrak{A}$, decimos que $\mathfrak{A}$ satiface la fórmula $\bigwedge \Phi$ (o que $\bigwedge \Phi$ es verdadera en $\mathfrak{A}$) si y sólo si $\mathfrak{A}$ satisface φ para toda $\varphi \in \Phi$. De igual manera, $\mathfrak{A}$ satiface la fórmula $\bigvee \Phi$ ($\bigvee \Phi$ es verdadera en $\mathfrak{A}$) si y sólo si $\mathfrak{A}$ satisface φ para alguna $\varphi \in \Phi$. Recordemos que la noción de satisfacibilidad está definida en términos de una estructura, una fórmula y una asignación[8], por lo que una notación adecuada para

[3]Trataremos de ser consecuentes con la notación, de manera que $\mathscr{L}$ es el lenguaje correspondiente a ρ, $\mathscr{L}'$ el correspondiente a ρ', etc.

[4]Todo esto se puede consultar en [End] pp. 106-114.

[5]Al usar esta notación daremos por un hecho que la cardinalidad de Φ es ω o algún número natural.

[6]Al lector que quiera profundizar en el estudio de este lenguaje le recomendamos [Keis].

[7]Esto se puede consultar en [End] pp. 121-132.

[8]Es decir una función de las variables en el universo de la estructura, o, como tenemos una cantidad numerable de variables, una función de los números naturales en el universo de la estructura.

la expresión φ *es satisfacible en* $\mathfrak{A}$ *con la asignación* s sería:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[s],$$

donde la expresión $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ denota que $x_1, \ldots, x_n$ son (a lo más) las variables libres de la fórmula φ. Sin embargo, por conveniencia, nos olvidaremos de las asignaciones y pensaremos directamente en los objetos del universo a los que éstas se refieren. Es decir, dadas una ρ-fórmula φ con variables libres $x_1, \ldots x_n$, una ρ-estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación s tal que para toda $i \leqslant n$, $s(x_i) = a_i$; si φ es satisfacible en $\mathfrak{A}$ con la asignación s, escribiremos:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Convengamos una cosa más: siempre que escribamos $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ daremos por supuesto que $\overline{a}$ es una sucesión finita de elementos de A del mismo tamaño que el conjunto de variables libres de φ. Evidentemente, si φ es un enunciado (es decir, una fórmula sin variables libres), escribiremos $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Con base en lo anterior, diremos que una estructura $\mathfrak{A}$ es modelo de una fórmula $\varphi(\overline{x})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$. Así, $\mathfrak{A}$ es modelo de Σ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ para toda $\varphi \in \Sigma$.

Definición 1.4. *Sea ρ un tipo y sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ ρ-estructuras. Un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es una función $h : A \longrightarrow B$ que cumple lo siguiente:*

i) *Para cada $c \in \rho$ símbolo de constante, $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.*

ii) *Para cada $n > 0$, cada $R \in \rho$ símbolo de relación n-ario y cada n-ada $\overline{a} \in A$, $\overline{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $h(\overline{a}) \in R^{\mathfrak{B}}$.*

iii) *Para cada $n > 0$, cada $f \in \rho$ símbolo de función n-ario y cada n-ada $\overline{a} \in A$, $h(f^{\mathfrak{A}}(\overline{a})) = f^{\mathfrak{B}}(h(\overline{a}))$.*

A un homomorfismo inyectivo lo llamaremos monomorfismo, a uno suprayectivo, endomorfismo y a uno biyectivo, isomorfismo. Diremos que dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) si y sólo si existe un isomorfismo entre ellas.

Definición 1.5. *Sea ρ un tipo y sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ ρ-estucturas. Una inmersión elemental $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo tal que para toda fórmula φ y toda n-ada $\overline{a} \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\overline{a}))$.*

Hay varias relaciones relevantes entre estructuras, una de ellas es la de isomorfismo. Definiremos tres más.

Definición 1.6. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo ρ.*

1. *Decimos que $\mathfrak{A}'$ es un reducto de $\mathfrak{A}$ (o que $\mathfrak{A}$ es una expansión de $\mathfrak{A}'$) si y sólo si $\mathfrak{A}'$ es una ρ'-estructura con $\rho' \subseteq \rho$, donde $A' = A$ y la interpretación de ρ' es la misma en $\mathfrak{A}'$ que en $\mathfrak{A}$. A $\mathfrak{A}'$ lo denotaremos $\mathfrak{A}|_{\rho'}$.*

2. *Decimos que una ρ-estructura $\mathfrak{A}'$ es subestructura de $\mathfrak{A}$ (o que $\mathfrak{A}$ es una extensión de $\mathfrak{A}'$) si y sólo si $A' \subseteq A$ y:*

   i) *Para cada $n > 0$ y para cada símbolo de relación n-ario R,*
   $$R^{\mathfrak{A}'} = R^{\mathfrak{A}} \cap (A')^n.$$
   ii) *Para cada $m > 0$ y para cada símbolo de función m-ario f,*
   $$f^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}} \restriction_{(A')^m}.$$
   iii) *Para cada símbolo de constante c,*
   $$c^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}}.$$

   Esto se denota como $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

3. *Por último, decimos que $\mathfrak{A}'$ es subestructura elemental de $\mathfrak{A}$ (o que $\mathfrak{A}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{A}'$), denotado $\mathfrak{A}' \preccurlyeq \mathfrak{A}$, si y sólo si:*

   i) $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.
   ii) *Para toda ρ-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para toda $\overline{a}$ sucesión de elementos de A':*
   $$\mathfrak{A}' \models \varphi(\overline{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$$

Observemos que hay una inmersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si y sólo si hay una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$ que es isomorfa a $\mathfrak{A}$.

El siguiente lema nos será de utilidad más adelante.

Lema 1.7. *Sea $\mathfrak{A}$ una ρ-estructura y X un subconjunto de A distinto del vacío. Entonces son equivalentes:*

a) $X = B$ *para alguna* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

b)
- *Para cada constante c de ρ, $c^{\mathfrak{A}} \in X$; y*
- *para cada $n > 0$ y para cada símbolo de función n-ario f y cada n-ada $\overline{a}$ de elementos de X, $f^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \in X$.*

Lo que nos dice el lema es que las condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto del universo de una estructura $\mathfrak{A}$ pueda ser, a su vez, el universo de una subestructura de $\mathfrak{A}$ son que el conjunto contenga a las constantes interpretadas en $\mathfrak{A}$ y sea cerrado bajo la interpretación en $\mathfrak{A}$ de los símbolos de función.

Demostración.

$\Rightarrow$) Para cada constante c en ρ, $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ (definición de subestructura) y $c^{\mathfrak{B}} \in B = X$, por lo tanto $c^{\mathfrak{A}} \in X$. Análogamente, para un símbolo de función n-ario f y una n-ada $\overline{a}$ de X:

$$f^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = f^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) \in B = X.$$

$\Leftarrow$) Definimos $\mathfrak{B}$ de la siguiente manera:

$B = X$,
$c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$ para cada símbolo de constante $c \in \rho$,
$f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \restriction_{X^n}$ para cada símbolo de función n-ario en ρ,
$R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap X^m$ para cada símbolo de relación m-ario en ρ.

Es claro entonces que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

□

Cuando añadimos nuevas constantes al tipo, dichas constantes y los elementos a los que nombran se llaman parámetros. Por ejemplo, si nos interesa nombrar a los elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ para alguna ρ-estructura $\mathfrak{A}$, lo que tenemos que hacer es añadir nuevos y distintos símbolos de constante $c_1, \ldots, c_n$ a ρ para así obtener un nuevo tipo $\rho(\overline{c})$. Denotaremos a la nueva $\rho(\overline{c})$-estructura por $(\mathfrak{A}, \overline{a})$. Por supuesto la interpretación en $(\mathfrak{A}, \overline{a})$ de cada c_i será la correspondiente a_i. También, si $\mathfrak{B}$ es una ρ-estructura y $\overline{b}$ es una sucesión de elementos de B de la misma longitud que $\overline{c}$, entonces hay una $\rho(\overline{c})$-estructura $(\mathfrak{B}, \overline{b})$ en la que las constantes en $\overline{c}$ nombran a los elementos en $\overline{b}$.

Dada una ρ-estructura y una ρ-fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en un lenguaje de primer orden, al conjunto $\{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})\}$ lo denotaremos por $\varphi^{\mathfrak{A}}(A^n)$ y diremos que este conjunto es definible en primer orden sin parámetros, o más sencillo: $\emptyset$-definible. Siguiendo la misma idea, dada una fórmula $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ en un lenguaje de primer orden, $\psi^{\mathfrak{A}}(A^n, \overline{b})$ denotará al conjunto $\{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \psi(\overline{a}, \overline{b})\}$ donde los elementos de $\overline{b}$ están en $X \subseteq A$. Diremos que el conjunto $\psi^{\mathfrak{A}}(A^n, \overline{b})$ es X-definible o definible en primer orden con parámetros.

Ejemplo 1.8. *Una de las estructuras con mayor renombre es la de los números naturales. Por lo general esta estructura tiene la forma $\langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, < \rangle$, donde s es la función sucesor. También podemos considerar como estructura de los números naturales a $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$. Observemos que el tipo de la primera estructura tiene un símbolo de función que no posee el tipo de la segunda estructura, a saber, el símbolo que se interpreta como la función sucesor. Asimismo la segunda estructura tiene al* 1*, constante que no posee la primera estructura. A pesar de que estas estructuras tienen tipos distintos y en consecuencia no tiene sentido pensar en que son homomorfas, las dos nos sirven para estudiar la aritmética.*

En el ejemplo anterior podemos notar que un ente matemático puede interpretarse como una estructura de diversas formas. Es decir, podemos dar varias estructuras, cada una con distinto tipo, que nos representen al mismo objeto matemático. También, agregando o intercambiando símbolos a una estructura con un universo determinado, podemos obtener otras estructuras que representan distintas características de un mismo objeto matemático. Es por esto que conviene hacer una aclaración acerca de la elección de los tipos, pues ésta podría parecer arbitraria (y de cierto modo lo es). En general, lo que nos interesa en dicha elección es que las nociones de homomorfismo y subestructura coincidan con las nociones usuales de la rama de las matemáticas en la que estamos trabajando. Por ejemplo, en el caso de los grupos, si tan sólo consideramos un símbolo de operación para el producto, entonces las subestructuras de un grupo serán sus subsemigrupos[9] cerrados bajo

[9] $G \neq \emptyset$ es un semigrupo si y sólo si está dotado de una operación binaria asociativa. Un subconjunto S de G es un subsemigrupo si y sólo si es un semigrupo con la operación de G restringida a S.

producto, pero que no tienen necesariamente a los inversos y a la identidad. Si en el tipo consideramos símbolos que se interpreten como el producto y la identidad, las subestructuras serán submonoides[10]. Por lo que si nos interesa que las subestructuras de un grupo sean sus subgrupos, el tipo a considerar debe tener símbolos para el producto, la identidad y la función que manda cada elemento a su inverso.

Listos... Casi listos. Veamos lo que entendemos por teoría. Para esto, daremos primero una definición. Sea ρ un tipo. Dados un conjunto de ρ-enunciados Σ y un ρ- enunciado φ, diremos que φ es consecuencia lógica de Σ (o que Σ implica lógicamente a φ) si y sólo si todo modelo de Σ es modelo de φ. Esto lo escribiremos $\Sigma \models \varphi$. Denotaremos con $Cn(\Sigma)$ al conjunto de todas las consecuencias de Σ, en símbolos: $Cn(\Sigma) = \{\varphi \mid \Sigma \models \varphi\}$. Diremos que φ y ψ son lógicamente equivalentes (denotado $\varphi \models\mid \psi$) si y sólo si $\{\varphi\} \models \psi$ y $\{\psi\} \models \varphi$.

Algunos autores definen una teoría como cualquier conjunto de enunciados. Sin embargo, nos parece que esta definición no captura completamente la idea de teoría, por lo que nosotros diremos que una teoría es cualquier conjunto de enunciados cerrado bajo consecuencia lógica. Observemos que para cualquier conjunto de enunciados Σ, $Cn(\Sigma)$ es una teoría.

Como siempre, toda definición viene acompañada de una serie de notaciones. Ésta no es la excepción. Dada una teoría T, denotaremos al conjunto de todos los modelos de T por $Mod(T)$, es decir, $Mod(T) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models T\}$. Y viceversa, dado un modelo, denotaremos por $Th(\mathfrak{A})$ al conjunto de los enunciados en lenguaje de primer orden verdaderos en $\mathfrak{A}$, es decir, $Th(\mathfrak{A}) = \{\sigma \mid \mathfrak{A} \models \sigma\}$. En general, si consideramos una clase de estructuras W, denotaremos por $Th(W)$ al conujunto de aquellos enunciados en lenguaje de primer orden que son verdaderos en todas las estructuras pertenecientes a W.

Diremos que una teoría T es axiomatizable si y sólo si hay un conjuto de enunciados Σ tal que todo enunciado de T es consecuencia lógica de Σ. Si el conjunto Σ es finito, entonces diremos que T es finitamente axiomatizable.

Ejemplo 1.9. *Una latiz Λ es un conjunto parcialmente*[11] *ordenado en el que cualquier subconjunto de dos elementos tiene supremo e ínfimo. Dados $a, b \in \Lambda$, denotaremos al supremo de a y b, $a \vee b$, y al ínfimo, $a \wedge b$. Así, el lenguaje de las latices tendrá como tipo al conjunto de símbolos* $\{\vee, \wedge\}$. *Consideremos los*

[10]Un monoide es un semigrupo con elemento neutro.

[11]Un conjunto parcialmente oredenado (abreviado como COPO) es un conjunto junto con un orden reflexivo, antisimétrico y transitivo.

siguientes enunciados:

$$\forall x((x \wedge x) = x)$$

$$\forall x((x \vee x) = x)$$

$$\forall x \forall y((x \wedge y) = (y \wedge x))$$

$$\forall x \forall y((x \vee y) = (y \vee x))$$

$$\forall x \forall y(((x \wedge y) \vee y) = y)$$

$$\forall x \forall y(((x \vee y) \wedge y) = y)$$

$$\forall x \forall y \forall z(((x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge (y \wedge z)))$$

$$\forall x \forall y \forall z(((x \vee y) \vee z) = (x \vee (y \vee z)))$$

Sea Σ el conjunto de estos enunciados. Entonces la teoría que obtenemos al cerrar a Σ bajo consecuencia lógica es la teoría de latices. Es decir, Σ axiomatiza a la teoría de latices.

Una teoría es consistente si y sólo si no hay un enunciado φ tal que $\varphi \in T$ y $\neg\varphi \in T$. Una teoría es completa si y sólo si para todo enunciado φ, $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$.

Basándonos en el Teorema de Completud-Correctud -y trantando de evitar la sintaxis- hemos estado dando puras definiciones semánticas. Sin embargo, no nos salvaremos de las nociones sintácticas, éstas aparecerán por un instante en el capítulo 4. Consideremos un sistema formal (axiomas lógicos y reglas de inferencia) adecuado[12] para la lógica de primer orden, por ejemplo aquél dado en [End]. Una deducción de φ a partir de Σ es una lista finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $\alpha_n = \varphi$ y para toda $1 \leqslant i \leqslant n$, α_i es un axioma lógico o pertenece a Σ o se obtiene a través de cualquiera de las reglas de inferencia en el sistema formal a partir de anteriores. Esto lo denotamos por $\Sigma \vdash \varphi$.

Ya que hemos tocado el tema de *Correctud-Completud*, veamos qué dice este en el caso de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. Para ello consideraremos el mismo sistema formal que consideramos para $\mathscr{L}$ con un ligero añadido: el *axioma ω*. Este axioma nos dice que de $\{\varphi_i \mid i \in \omega\}$ se deduce $\bigwedge_{i\in\omega} \varphi_i$. Con esto último y apoyandonos en la noción de deducibilidad descrita anteriormente, tenemos una definición de deducción para

[12]Es decir, un sistema completo y correcto.

$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. Así, un conjunto de fórmulas es consistente si y sólo si de él no se deduce un enunciado y su negación. Diremos que una fórmula φ es cosistente si y sólo si $\{\varphi\}$ lo es. Por último, el Teorema de Completud para $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ nos dice que si φ es una fórmula consistente de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ con una cantidad finita de variables libres, entonces tiene modelo.

Fuera!

Capítulo 2

Relativización

La relativización es un concepto bastante natural. Todo es relativo, según dicen. Así, el hecho de ser numerable es relativo, es decir, dependiendo desde donde se le mire, un objeto puede ser numerable o no. Así, si consideramos un modelo que satisfaga los axiomas básicos para los números reales, podemos demostrar que en este modelo es cierto que los reales son no numerables y sin embargo, usando el Teorema de Löwenheim-Skolem, hay un modelo numerable de los reales, es decir, un modelo con universo numerable, según el cual los reales son no numerables. La relativización tiene un papel importante en la Teoría de Conjuntos [1], pues se usa para dar pruebas de consistencia relativa. Uno de los ejemplos que daremos en este capítulo será precisamente el Teorema Fundamental para Pruebas de Consistencia Relativa. Desde el punto de vista de la Teoría de Modelos, la relativización es conveniente para representar dos estructuras en una más grande. Esto nos sirve, por ejemplo, cuando queremos estudiar a un campo y a su cerradura algebraica. En este caso no nos conviene estudiar dos estructuras por separado. Es mucho mejor verlas como una estructura mayor, que puede ser relativizada a la parte (el campo o su cerradura algebraica) que nos interesa en cada momento. Este tipo de situación es muy común, de hecho se da con mucha frecuencia en el Álgebra. Pensemos, por ejmplo, en los espacios vectoriales sobre un campo, o en un conjunto junto con su grupo de simetría. Sin embargo, la motivación principal para estudiar la relativización es que ésta es muy simple y el teorema principal de este capítulo, el Teorema de Relativización, es sumamente parecido al teorema principal del

[1] Entenderemos por teoría de Conjuntos a las Consecuencias de ZF, donde ZF es la axiomatización de Zermelo-Fraenkel.

siguiente capítulo, el Teorema de Reducción. Al final, la relativización es un caso particular de las interpretaciones entre estructuras.

Bien, comencemos con la relativización. Consideremos dos tipos ρ y ρ' con $\rho \subseteq \rho'$. Sea $\mathfrak{C}$ una ρ'-estructura y $\mathfrak{B}$ una subestructura del reducto $\mathfrak{C}|_\rho$. Construiremos una estructura a partir de $\mathfrak{C}$ y de $\mathfrak{B}$ que de alguna manera los contenga. Para esto, consideremos un símbolo de relación 1-ario P. Sea $\rho^+ = \rho' \cup \{P\}$. Expandemos $\mathfrak{C}$ a una ρ^+-estructura $\mathfrak{A}$ de manera que $P^{\mathfrak{A}} = B$ (donde B es el universo de $\mathfrak{B}$). Podemos recuperar $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{C} = \mathfrak{A}|_{\rho'}, \\ &\mathfrak{B} = \text{la subestructura de } \mathfrak{A}|_\rho \text{ cuyo dominio es } P^{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{B}$ es el reducto a ρ relativizado a P de $\mathfrak{A}$. El siguiente diagrama pretende aclarar la situación recién descrita.

ρ	$=$	ρ	$\subseteq$	ρ'	$\subseteq$	ρ^+	Tipos
$\mathfrak{B}$	$\subseteq$	$\mathfrak{C}\|_\rho$	$\xleftarrow{red}$	$\mathfrak{C}$	$\xrightarrow{exp}$	$\mathfrak{A}$	Estructuras
		$\parallel$		$\parallel$			
		$\mathfrak{A}\|_\rho$		$\mathfrak{A}\|_{\rho'}$			
$P^{\mathfrak{A}} = B$	$\subseteq$	C	$=$	C	$=$	A	Universos

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathfrak{G}$ el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ sobre un campo $\mathfrak{F}$. Podemos ver a $\mathfrak{G}$ y a $\mathfrak{F}$ dentro de una misma estructura $\mathfrak{A}$ de tipo ρ, con ρ como sigue:*

$$\rho = \{grupo, campo, +, \cdot, coef_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)\}^{2},$$

donde $grupo$ y $campo$ son símbolos de relación 1-arios cuya interpretación consiste en los elementos de G y de F respectivamente; $+$ y $\cdot$ son símbolos de relación

[2] Esta práctica, es decir, la práctica de usar símbolos en el tipo que insinuan de una manera descarada la manera en que deben interpretarse para nuestro propósito, será utilizada de aquí en adelante. Esto último se hará con el objetivo de facilitar el entendimiento de este trabajo. El lector que sienta contraproducente esta práctica es apremiado a cambiar los símbolos aquí escritos por aquellos de su preferencia.

ternarios tales que $+^{\mathfrak{A}}$ y $\cdot^{\mathfrak{A}}$ se refieren a la suma y a la multiplicación en $\mathfrak{F}$; y para cada $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $coef_{ij}$ es un símbolo de relación binaria de manera que para cada matriz $g \in G$, su ij-ésima entrada es el único elemento f de F tal que $(g, f) \in coef_{ij}^{\mathfrak{A}}$. No es necesario tener un símbolo de relación para la multiplicación entre matrices, pues dicha multiplicación se puede definir a partir de la suma y el producto en $\mathfrak{F}$. Y por no dejar, o mejor dicho, para dejar la conciencia limpia, veamos que en serio no es necesario tener un símbolo de relación para la multiplicación:

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z) :=\ & \forall x\forall y[grupo(x)\wedge grupo(y) \rightarrow \exists z(grupo(z)\wedge\forall v_{11}\ldots\forall v_{ij}\ldots\forall v_{nn}\forall w_{11}\\ & \ldots\forall w_{ij}\ldots\forall w_{nn}((coef_{11}(x,v_{11})\wedge\ldots\wedge coef_{ij}(x,v_{ij})\wedge\ldots\wedge coef_{nn}(x,v_{nn})\\ & \wedge coef_{11}(y,w_{11})\wedge\ldots\wedge coef_{ij}(y,w_{ij})\wedge\ldots\wedge coef_{nn}(y,w_{nn})) \rightarrow (coef_{11}(z,\\ & v_{11}\cdot w_{11}+\ldots+v_{1n}\cdot w_{n1}) \wedge \ldots \wedge coef_{ij}(z, v_{i1}\cdot w_{1j}+\ldots+v_{in}\cdot w_{nj}) \wedge\\ & \ldots \wedge coef_{nn}(z, v_{n1}\cdot w_{1n}+\ldots+v_{nn}\cdot w_{nn}))))]\end{aligned}$$

Es claro que el dominio de $\mathfrak{A}$ es cualquier conjunto tal que entre sus elementos se encuentren todos los elementos de F y todos los elementos de G.

Pensemos ahora tan sólo en ρ y ρ^+ dos tipos tales que $\rho \subseteq \rho^+$ y P un símbolo de relación 1-ario en $\rho^+\backslash\rho$. Sea $\mathfrak{A}$ una ρ^+-estructura. El Lema 1.7 nos da condiciones necesarias y suficientes para que $P^{\mathfrak{A}}$ sea el dominio de una subestrucutra de $\mathfrak{A}|_\rho$. Cuando estas condiciones son satisfechas, la subestructura queda determinada de forma única y la llamamos $\mathfrak{A}_P$, la P-parte de $\mathfrak{A}$. En caso contrario, $\mathfrak{A}_P$ no está definida. A las condiciones dadas por el Lema 1.7 las llamamos condiciones de admisibilidad.

A continuación daremos el Teorema de Relativización, el cual nos dice qué hechos en $\mathfrak{A}_P$ se pueden traducir sistemáticamente en hechos en $\mathfrak{A}$.

Teorema de Relativización. *Sean ρ y ρ^+ dos tipos tales que $\rho \subseteq \rho^+$ y P un símbolo de relación 1-ario en $\rho^+\backslash\rho$. Entonces, para cada ρ-fórmula $\varphi(\overline{x})$ de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ hay una ρ^+-fórmula $\varphi^P(\overline{x})$ de $\mathscr{L}^+_{\omega_1\omega}$ tal que:*

> *Si $\mathfrak{A}$ es una ρ^+-estructura tal que $\mathfrak{A}_P$ está definido y $\overline{a}$ es una sucesión de elementos de A_P, entonces*
>
> $$\mathfrak{A}_P \models \varphi(\overline{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi^P(\overline{a}).$$

Demostración. Definimos φ^P recursivamente como sigue:

i) $\varphi^P = \varphi$ si φ es una fórmula atómica;

ii) $\left(\bigwedge_{i\in I} \psi_i\right)^P = \bigwedge_{i\in I} \psi_i^P, \quad \left(\bigvee_{i\in I} \psi_i\right)^P = \bigvee_{i\in I} \psi_i^P;$

iii) $(\neg\psi)^P = \neg\psi^P$;

iv) $(\forall y\psi(\overline{x}, y))^P = \forall y(P(y) \to \psi^P(\overline{x}, y))$
$(\exists y\psi(\overline{x}, y))^P = \exists y(P(y) \wedge \psi^P(\overline{x}, y))$.

Observemos que no es necesario definir $(\exists y\psi(\overline{x}, y))^P$, ya que

$$\exists y\psi(\overline{x}, y) = \neg\forall y\neg\psi(\overline{x}, y).$$

Ahora probaremos por inducción que la fórmula definida arriba es realmente la fórmula buscada.
El hecho de que $\mathfrak{A}_P \models \varphi(\overline{a})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ cuando φ es una fórmula atómica, se sigue de forma inmediata de dos resultados. El primero de ellos nos dice que dadas una estructura $\mathfrak{C}$ de tipo ρ y σ una fórmula de tipo ρ' con $\rho' \subseteq \rho$, se tiene que $\mathfrak{C} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{C}|_{\rho'} \models \sigma$. El segundo resultado es un corolario del Teorema del Homomorfismo y nos dice que si α no tiene cuantificadores y $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, entonces para cualquier $\overline{b}$ sucesión de elementos de B, $\mathfrak{B} \models \alpha(\overline{b})$ si y sólo si $\mathfrak{C} \models \alpha(\overline{b})$. Tanto el Teorema del Homomorfismo como su demostración y el corolario se pueden consultar en [Amor] .
Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $\mathfrak{A}_P \models \neg\psi$, si y sólo si $\mathfrak{A}_P \not\models \psi$,si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \psi^P$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \neg\psi^P$. En el caso en el que $\varphi = \bigwedge_{i\in I} \psi_i$ tenemos que:
$\mathfrak{A}_P \models \bigwedge_{i\in I} \psi_i$, si y sólo si para toda $i \in I$, $\mathfrak{A}_P \models \psi_i$, si y sólo si para toda $i \in I$, $\mathfrak{A} \models \psi_i^P$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i\in I} \psi_i^P$.
La demostración para la disyunción es similar. Veamos ahora el caso del cuantificador universal, suponiendo que el resultado ha sido demostrado para $\psi(\overline{x}, a)$ para toda $a \in A_P$. $\mathfrak{A}_P \models \forall y\psi(\overline{x}, y)$, si y sólo si para todo $a \in A_P$, $\mathfrak{A}_P \models \psi(\overline{x}, a)$, si y sólo si para todo $a \in A_P$, $\mathfrak{A} \models \psi^P(\overline{x}, a)$, si y sólo si para todo a tal que $a \in A$ y $a \in P^{\mathfrak{A}}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi^P(\overline{x}, a)$, si y sólo si para todo $a \in A$, si $\mathfrak{A} \models Pa$ entonces $\mathfrak{A} \models \psi^P(\overline{x}, a)$, si y sólo si para todo $a \in A$, $\mathfrak{A} \models Pa \to \psi^P(\overline{x}, a)$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models \forall y(Py \to \psi^P(\overline{x}, y))$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models (\forall y\psi(\overline{x}, y))^P$.

Debido a la observación anterior, no es necesario demostrar la afirmación para el caso del cuantificador existencial.

□

A la fórmula φ^P le llamamos la relativización de φ a P.

Corolario 2.2. *Sean ρ y ρ^+ dos tipos tales que $\rho \subseteq \rho^+$ y P un símbolo de relación 1-ario en $\rho^+ \backslash \rho$. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son ρ^+-estructuras tales que $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}_P$ está definido, entonces $\mathfrak{B}_P$ también está definido y $\mathfrak{A}_P \preccurlyeq \mathfrak{B}_P$.*

Demostración. Observemos primero que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, y por lo tanto $A_P \subseteq B_P$. Ahora, como $\mathfrak{A}_P$ está definido, para cada símbolo de constante c en ρ, $c^{\mathfrak{A}} \in A_P \subseteq B_P$ y como $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$, $c^{\mathfrak{B}} \in B_P$. De nuevo, si $\mathfrak{A}_P$ está definido, entonces dada $n > 0$ y f un símbolo de función n-ario:

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \rightarrow P(f(x_1, \ldots, x_n))).$$

Y como $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, tenemos que:

$$\mathfrak{B} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \rightarrow P(f(x_1, \ldots, x_n))).$$

Por lo tanto, para cada n-ada $\overline{a}$ de B_P se cumple que $f^{\mathfrak{B}_P}(\overline{a}) \in B_P$. De lo anterior podemos concluir que $\mathfrak{B}_P$ está definido.

Veamos ahora que $\mathfrak{A}_P \preccurlyeq \mathfrak{B}_P$:

i) Comencemos por ver que $\mathfrak{A}_P \subseteq \mathfrak{B}_P$:

a) Claramente $A_P \subseteq B_P$.

b) Para cada $c \in \rho$, $c^{\mathfrak{A}_P} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}_P}$.

c) Dados $n > 0$ y f un símbolo de función n-ario:
$f^{\mathfrak{A}_P} = f^{\mathfrak{A}} \restriction_{A_P^n} = (f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^n}) \restriction_{A_P^n} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A_P^n} = (f^{\mathfrak{B}} \restriction_{B_P^n}) \restriction_{A_P^n} = f^{\mathfrak{B}_P} \restriction_{A_P^n}$.

d) De forma similar, para R un símbolo de relación n-ario:
$R^{\mathfrak{A}_P} = R^{\mathfrak{A}} \cap A_P^n = (R^{\mathfrak{B}} \cap A^n) \cap A_P^n = R^{\mathfrak{B}} \cap A_P^n = (R^{\mathfrak{B}} \cap B_P^n) \cap A_P^n = R^{\mathfrak{B}_P} \cap A_P^n$.

ii) Para toda ρ-fórmula φ y para toda sucesión $\overline{a}$ de elementos de A:

$\mathfrak{A}_P \models \varphi(\overline{a}),$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi^P(\overline{a}),$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi^P(\overline{a}),$ si y sólo si $\mathfrak{B}_P \models \varphi(\overline{a}).$

De (i) y (ii) se sigue que $\mathfrak{A}_P \preccurlyeq \mathfrak{B}_P$.

$\square$

De la misma manera en la que extrajimos una estructura $\mathfrak{B}$ a partir de $\mathfrak{A}$ a través de un símbolo de relación 1-ario, podemos obtener $\mathfrak{B}$ a partir de $\mathfrak{A}$ a través de una fórmula $\theta(x)$. En este caso el universo de $\mathfrak{B}$ consistirá en aquellos elementos de A que cumplen $\theta(x)$. A las fórmulas φ^P postuladas en el Teormea de Relativización las llamaremos ahora φ^θ y seran idénticas a las construidas en la demostración, simplemente cambiaremos P por θ. Esta forma del Teorema de Relativización cobra mucha importancia en la Teoría de Conjuntos, pues es fundamental para las pruebas de consistencia relativa con el método de modelos internos.
A continuación veremos como ejemplo el Teorema Fundamental para Pruebas de Consistencia Relativa, ya que la demostración de dicho teorema descansa principalmente en el Teorema de Relativización. Para esto hay que aclarar unas cuantas cosas. El tipo con el que trabajaremos tiene tan sólo un símbolo de relación binario. La estructura para la cual enunciaremos el teorema tendrá como universo a todos los conjuntos y como interpretación del símbolo de relación a la pertenencia. La fórmula $\theta(x)$ que se usará para relativizar será $x \in M$ donde M es una clase[3] y a las fórmulas relativizadas las denotaremos σ^M.

Ejemplo 2.3. Teorema Fundamental para Pruebas de Consistencia Relativa.[4]

Sean Γ y Σ conjuntos de fórmulas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos[5] *y M una clase tal que:*

1) $\Gamma \vdash \exists x(x \in M)$.

[3]Formalmente x satisface φ, donde φ es la fórmula que define a M, es decir, si $M = \{z \mid \varphi(z)\}$, entonces decimos que $x \in M$ si y sólo si $\varphi(x)$.

[4]Vale la pena aclarar que este es un caso particular del Teorema Fundamental para Pruebas de Consistencia Relativa usualmente usado en la Teoría de Conjuntos. En este último caso, la relativización también abarca a las fórmulas atómicas en las que no interviene la igualdad. El lector interesado en esta versión del teorema puede consultar [Jech] p.161.

[5]Este lenguaje es finitario.

2) $\Gamma \vdash \sigma^M$ *para toda* $\sigma \in \Sigma$.

Entonces: si Γ *es consistente,* Σ *lo es.*
Además, si se cumple 1), 2) y $\Sigma \vdash \psi$ *para alguna fórmula* ψ*, entonces* $\Gamma \vdash \psi^M$.

No está de más dar una idea intuitiva de lo que nos está diciendo el teorema: si desde Γ se prueba que $M \neq \emptyset$ y que M es modelo de Σ, entonces si Γ es consistente, Σ también lo es.

Demostración. Supongamos que Γ es consistente, entonces tiene un modelo, digamos $\mathfrak{A} = \langle A, E\rangle$. Por 1) y 2), tenemos que:

a) $\mathfrak{A} \models \exists x(x \in M)$

b) $\mathfrak{A} \models \sigma^M$ para todo $\sigma \in \Sigma$

Sea $\mathfrak{B} = \langle B, E \cap (B \times B)\rangle$ donde $B = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models a \in M\}$[6]. Por a) tenemos que $B \neq \emptyset$. Afirmamos que $\mathfrak{B} \models \Sigma$, para ver esto consideremos $\sigma \in \Sigma$. Por b) tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma^M$ y por el Teorema de Relativización $\mathfrak{B} \models \sigma$. Por lo tanto, $\mathfrak{B} \models \Sigma$. Así Σ tiene modelo y por lo tanto es consitente, con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.
Para lo que resta supongamos que $\Sigma \vdash \psi$, entonces $\Sigma \models \psi$. Veamos que $\Gamma \models \psi^M$. Sea $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, entonces $\mathfrak{B} \models \Sigma$, donde $\mathfrak{B}$ es la estructura considerada en la primera parte de la demostración. Como $\Sigma \models \psi$, $\mathfrak{B} \models \psi$ y de nuevo, por el Teorema de Relativización, $\mathfrak{A} \models \psi^M$. Así $\Gamma \models \psi^M$, de donde se tiene que $\Gamma \vdash \psi^M$.

□

Veamos otro ejemplo relativo a la Teoría de Conjuntos, sencillo, pero sumamente interesante. Para esto recordemos que un conjunto x es inductivo si y sólo si $\emptyset \in x$ y para todo $y \in x$, $y \cup \{y\} \in x$. Llamamos ω a la intersección de todos los conjuntos inductivos. Este conjunto coincide con el de los números naturales.

[6]Claramente $\mathfrak{B}$ es el equivalente a la estructura $\mathfrak{A}_P$ vista en el Teorema de Relativización. Si pensamos en la clase M como una fórmula de una variable libre φ, entonces $B = \varphi^{\mathfrak{A}}(A)$.

Ejemplo 2.4. *Pensemos en un modelo transitivo $\mathfrak{A}$ de la Teoría de Conjuntos. Sea $\theta(x)$ la fórmula $x \in \omega$. La estructura que obtenemos al relativizar $\mathfrak{A}$ a θ es una estructura en la que el orden coincide con la pertenencia y en la que podemos definir con fórmulas conjuntistas $\cdot$ y $+$. Así, tenemos una estructura emparentada con la descrita en 1.8. Lo interesante de este ejemplo es que, de cierto modo, ω satisface una forma fuerte de los axiomas de Peano:*

- *0 no es sucesor de nadie.*
- *Si $x, y \in \omega$ y $s(x) = s(y)$, entonces $x = y$.*
- *Para toda $\in$-fórmula $\varphi(x)$ en lenguaje finitario, posiblemente con parámetros de A, si $\varphi(0)$ y $\forall x(x \in \omega \wedge \varphi(x) \to \varphi(s(x)))$ son ciertas en $\mathfrak{A}$, entonces $\forall x(x \in \omega \to \varphi(x))$ es cierta en $\mathfrak{A}$.*

El esquema de inducción que consideramos aquí hace referencia a todos los subconjuntos de ω que son definibles (con parámetros) en primer orden. Gracias al Teorema de Relativización, este esquema de inducción incluye a los subconjuntos de ω que son definibles en primer orden en $\langle \omega, < \rangle$, sin embargo puede abarcar muchos más subconjuntos[7]*, quizá todos los subconjuntos de ω.*

Una de las motivaciones iniciales para estudiar los reductos relativizados fue una motivación algebraica, es por esto que lo menos que podemos hacer es dar un ejemplo algebraico. Antes veamos una definición.

Definición 2.5. *Un grupo G es completamente reducible de grado n sobre el campo F si y sólo si G es isomorfo a un grupo multiplicativo G_1 de transformaciones lineales de un espacio vectorial V de dimensión n sobre un campo F y todo subespacio de V que es cerrado bajo G_1 tiene complemento en V también cerrado bajo G_1.*

Proposición 2.6. *Sea G un grupo infinito completamente reducible de grado n sobre el campo F. Entonces hay un subgrupo elemental*[8] *numerable de G que también es completamente reducible de grado n sobre el campo F.*

[7] Esto depende de nuestra elección de $\mathfrak{A}$.

[8] Recordemos que el tipo que consideramos para un grupo es aquél en el que el concepto de subgrupo concuerda con el de subestructura. Es por esto que podemos hablar de un subgrupo elemental, es decir, de una subestructura elemental.

Demostración. Como G es completamente reducible, podemos suponer de entrada que G es un grupo de transformaciones lineales del espacio vectorial ${}^{n}F$[9]. Veamos a G y a F dentro de una misma estructura $\mathfrak{A}$, justo como lo hicimos en el Ejemplo 2.1. Ahora, afirmamos que hay un enunciado φ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y que expresa:

i) F es un campo.

ii) G es un grupo de matrices de $n \times n$ sobre F.

iii) Todo subespacio de ${}^{n}F$ que es cerrado bajo G tiene un complemento en ${}^{n}F$ que también es cerrado bajo G.

Escribir las fórmulas que afirman i) y ii) es relativamente sencillo. El caso de iii) es diferente. Podríamos pensar que lo que dice iii) no es expresable en lenguaje de primer orden, pues el enunciado habla de *todo subespacio*. Sin embargo no es así, pues podemos referirnos a todo subespacio de dimensión uno, a todo subespacio de dimensión 2, continuando así hasta n. Ahora, para una k fija, podemos describir a un subespacio W refiriendonos a una base $v_1, \ldots, v_k$ y considerando todas sus combinaciones lineales. La fórmula resultante es tan grande que por salud mental es mejor no ponerla y quedarnos con la pequeña satisfacción de saber que es posible escribirla.
Una vez que tenemos la fórmula φ, usando Löwenheim-Skolem descendente[10], obtenemos una subestructura elemental de $\mathfrak{A}$ numerable, llamémosla $\mathfrak{A}'$. Ahora, por el Corolario 2.2, $\mathfrak{A}'_{grupo} \preccurlyeq \mathfrak{A}_{grupo} = G$. Como G es infinito, entonces $\mathfrak{A}'_{grupo}$ también lo es. Además $\mathfrak{A}'_{grupo}$ "está" dentro de $\mathfrak{A}'$ y ésta última es una estructura numerable. Por lo tanto, $\mathfrak{A}'_{grupo}$ es numerable. Como $\mathfrak{A}'_{grupo} \models \varphi$, entonces $\mathfrak{A}'_{grupo}$ es un grupo completamente reducible de grado n sobre el campo $\mathfrak{A}'_{campo}$.

$\square$

Con esto damos por terminado este capítulo.

[9] ${}^{n}F$ denota al espacio vectorial de las matrices de $n \times 1$ sobre el campo F.

[10] En la lógica infinitaria se pierden varios teoremas que se tienen para la lógica finitaria, entre ellos el de compacidad. Afortunadamente para nosotros, el Teorema de Löwenheim-Skolem sigue siendo válido en la lógica infinitaria. Para una prueba de dicho teorema se puede consultar [Dick].

Capítulo 3

Interpretación de una Estructura en Otra

Si pensamos en los números enteros y los números racionales, parece factible (si no es que obvio) interpretar a los segundos en los primeros. De hecho, la forma de hacerlo es completamente natural. A todo racional le podemos asociar un par de enteros como si de coordenadas se tratara. Simplemente tenemos que pedir que la segunda coordenada sea distinta de cero. Una vez que sabemos cómo ubicar cada racional dentro de los enteros, entonces podemos decir cuándo dos racionales son iguales: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = c \cdot b$, donde a y b son los enteros *coordenada* que le asignamos a $\frac{a}{b}$, c y d los que le asignamos a $\frac{c}{d}$ y $\cdot$ es la multiplicación en los enteros. De la misma forma podemos hablar de la suma y multiplicación de racionales a partir de estas operaciones en los enteros.
Lo que acabamos de hacer de forma muy intuitiva es interpretar una estructura en otra. Podríamos pensar que en una estructura yace implícitamente otra, por lo que parecería posible responder preguntas acerca de la otra, estudiando la una. Veamos cómo formalizar esto.

Definición 3.1. *Sea ρ un tipo. Una ρ-fórmula atómica no-anidada*[1] *es una fórmula atómica de cualquiera de las siguientes formas:*

i) $x = y$,

[1] Este tipo de fórmulas se estudia con detalle en el Apéndice A.

ii) $c = y$ *para algún símbolo de constante* c *en* ρ*,*

iii) $f(\overline{x}) = y$ *para algún símbolo de función* f *en* ρ*,*

iv) $R(\overline{x})$ *para algún símbolo de relación* R *en* ρ*.*

Una ρ*-fórmula es no-anidada si y sólo si todas sus subfórmulas atómicas son no-anidadas.*

Toda fórmulas en lenguaje de primer orden es lógicamente equivalente a una fórmula en lenguaje de primer orden no-anidada. También, toda fórmula en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ es lógicamente equivalente a una fórmula en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ no-anidada[2]. Más adelante se verá cuál es la utilidad de trabajar con fórmulas atómicas no-anidadas. Por el momento conformemonos con ver un ejemplo comparativo de los dos tipos de fórmulas atómicas:

Fórmula Atómica	Fórmula Atómica No-Anidada
$R(f(x, g(f(y, z))), g(y))$	$P(x, y, z)$

Este ejemplo tan sencillo (y un tanto exagerado) deja claro porqué las fórmulas no-anidadas se llaman como se llaman. Sin embargo, el lector no debe dejarse llevar por la aparente sencillez de la fórmula no-anidada que yace en el ejemplo, pues trabajar con fórmulas no-anidadas puede llegar a ser tedioso. Por ejemplo, veamos como queda la fórmula atómica del ejemplo tras transformarla de forma lógicamente equivalente en una fórmula no-anidada:

$$\forall u \forall v \forall w \forall t (g(y) = u \wedge f(y, z) = v \wedge g(v) = w \wedge f(x, w) = t \rightarrow R(t, u)).$$

Observemos que todas las subfórmulas atómicas de este último ejemplo son no-anidadas. Creemos que ya fue suficiente digresión sobre estas fórmulas. Ahora sí, la definición formal de interpretación:

Definición 3.2. *Sean* ρ *y* ρ' *dos tipos,* $\mathfrak{A}$ *una* ρ*-estructura y* $\mathfrak{B}$ *una* ρ'*-estructura. Una interpretación n-dimensional* Γ *de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{A}$ *consiste en:*

i) *una* ρ*-fórmula* $\partial_\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$*;*

[2]Este par de resultados se pueden consultar en el apéndice A.

ii) *para cada ρ'-fórmula atómica no-anidada $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$, una ρ-fórmula $\varphi_\Gamma(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$ en la cual las $\overline{x_i}$'s son n-adas disjuntas de distintas variables;*

iii) *una función suprayectiva $f_\Gamma : \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n) \longrightarrow B$ tal que para toda ρ'-fórmula atómica no-anidada φ y todo $\overline{a_i} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$*[3] *($1 \leqslant i \leqslant m$):*

$$\mathfrak{B} \models \varphi(f_\Gamma(\overline{a_1}), \ldots, f_\Gamma(\overline{a_m})) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}) \tag{3.1}$$

Démosle nombre a las cosas: a la fórmula ∂_Γ le llamamos la fórmula dominio de Γ, pues las n-adas que cumplan dicha fórmula serán la interpretación de algún elemento de $\mathfrak{B}$. A ∂_Γ y φ_Γ las llamamos fórmulas definitorias de Γ. Y a la función f_Γ la llamaremos función coordenada de Γ. La idea aquí es que f_Γ nos dice cuáles son las coordenadas $\overline{a}$ en A que le corresponden a cada elemento $f_\Gamma(\overline{a})$ de B.

Definición 3.3. *Decimos que $\mathfrak{B}$ es interpretable en $\mathfrak{A}$ si y sólo si hay una interpretación de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$ tal que todas las fórmulas definitorias están en lenguaje de primer orden. $\mathfrak{B}$ es interpretable en $\mathfrak{A}$ con parámetros si y sólo si hay $\overline{a}$ en A tal que $\mathfrak{B}$ es interpretable en $(\mathfrak{A}, \overline{a})$.*

Para facilitarnos la vida introduciremos la siguiente notación: $=_\Gamma$ denota a φ_Γ cuando φ es $y_0 = y_1$.

Ejemplo 3.4. *Regresemos al ejemplo inicial y tratemos de dar una interpretación Γ de los racionales en los enteros*[4]*. Como tipo para la estructura de los racionales consideraremos al conjunto $\{suma, mult\}$. En el caso de los enteros, consideraremos como tipo a ser interpretado al conjunto $\{+, \cdot\}$*[5] *Las interpretaciones son las estandar, aunque estamos pensando a la suma y la multiplicación de los racionales como relaciones, y a la suma y la multiplicación de los enteros como funciones. Siguiendo la interpretación sugerida al principio, nuestra interpretación Γ será bidimensional. Las fórmulas definitorias quedan así :*

$\partial_\Gamma(x_1, x_2)$ *es* $x_2 \neq 0$*;*

[3] Recordemos que $\partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ denota al conjunto $\{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \partial_\Gamma(\overline{a})\}$.

[4] Otro ejemplo muy ilustrativo y sencillo es aquél en el que se interpreta $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$, de manera que a cada elemento de $\mathbb{R}^4$ le asignamos un par de coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

[5] Ambos tipos pueden ser ampliados, simplemente hay que considerar las fórmulas definitorias correspondientes a cada nuevo símbolo en el primer tipo. Un buen ejercicio para el lector es dar la fórmula definitoria para el caso del orden racional $\leqslant$.

$=_\Gamma (x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22})$ *es* $x_{11} \cdot x_{22} = x_{12} \cdot x_{21}$;

$suma_\Gamma(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}; x_{31}, x_{32})$ *es* $x_{32} \cdot (x_{11} \cdot x_{22} + x_{21} \cdot x_{12}) = x_{12} \cdot x_{22} \cdot x_{31}$;

$mult_\Gamma(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}; x_{31}, x_{32})$ *es* $x_{11} \cdot x_{21} \cdot x_{32} = x_{12} \cdot x_{22} \cdot x_{31}$.

La función coordenada manda a cada par (m, n) *con* $n \neq 0$ *al número racional* $\frac{m}{n}$. *Con esto queda determinada la interpretación bidimensional* Γ *de los racionales en los enteros.*

Volviendo a los reductos relativizados (todavía no nos hemos olvidado de ellos), éstos se pueden ver como una interpretación de una estructura en otra.

Ejemplo 3.5. *Si* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_P$, *entonces hay una interpretación unidimensional* Γ *de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{A}$ *tal que:*

$\partial_\Gamma(x)$ *es* $P(x)$; *y*

$\varphi_\Gamma(\overline{x})$ *es* $\varphi(\overline{x})$ *para cada fórmula atómica no-anidada* φ.

La función coordenada $f_\Gamma : P^{\mathfrak{A}} \longrightarrow A$ *es la inclusión. A* Γ *le llamamos la reducción relativizada.*

Al igual que en los reductos relativizados hay un par de enunciados que nos dicen si la estructura $\mathfrak{A}_P$ está definida o no, cuando hablamos de cualquier interpretación, digamos de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$, hay ciertos ρ-enunciados que deben ser verdaderos en $\mathfrak{A}$ por el simple hecho de que Γ es una interpretación, sin importar cómo son $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Estos enunciados son los siguientes:

i) $\exists \overline{x} \partial_\Gamma(\overline{x})$[6].

ii) $=_\Gamma$ define una relación de equivalencia en $\partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$.

iii) Para cada ρ'-fórmula atómica no-anidada φ, si $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$ con $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$, entonces hay $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ tales que $\overline{b_i}$ es $=_\Gamma$-equivalente a $\overline{a_i}$ y $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})$.

[6] Más adelante se verá por qué es necesario pedir esta condición.

iv) Si $\varphi(y)$ es una ρ'-fórmula de la forma $c = y$, entonces hay $\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ tal que para toda $\overline{b} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{b}) \text{ si y sólo si } \overline{b} \text{ es } =_\Gamma\text{-equivalente a } \overline{a}.$$

v) Si $\varphi(y_1, \ldots, y_m, x)$ es una ρ'-fórmula de la forma $f(y_1, \ldots, y_m) = x$, entonces para cualquiera $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ hay $\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ tal que para toda $\overline{b} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{b}) \text{ si y sólo si } \overline{b} \text{ es } =_\Gamma\text{-equivalente a } \overline{a}.$$

A estos enunciados los llamamos las condiciones de admisibilidad de Γ y al conjunto de ellos lo denotaremos $Admis(\Gamma)$. Generalizan a las condiciones de admisibilidad para un reducto relativizado[7]. Si observamos con cuidado las condiciones de admisibilidad, notaremos que lo que nos están pidiendo es que la relación definida por $=_\Gamma$ se comporte de una manera muy parecida a la igualdad.

Si Γ interpreta $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$, entonces, de alguna manera $\mathfrak{B}$ está dentro de $\mathfrak{A}$. Esto nos lleva al mismo planteamiento del inicio: parece posible dar respuesta a preguntas acerca de $\mathfrak{B}$ reduciéndolas a preguntas acerca de $\mathfrak{A}$. El siguiente teorema desarrolla esta idea. Su motivación es similar a la del Teorema de Relativización, de hecho, si pensamos en el Ejemplo 3.5, entonces este teorema no es más que un refinamiento del Teorema de Relativización.

Teorema de Reducción. *Sean $\mathfrak{A}$ una ρ-estructura, $\mathfrak{B}$ una ρ'-estructura y Γ una interpretación de dimensión n de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$. Entonces para toda ρ'-fórmula $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ de $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ hay una ρ-fórmula $\varphi_\Gamma(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$ de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, tal que para toda $\overline{a_i} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$,*

$$\mathfrak{B} \models \varphi(f_\Gamma(\overline{a_1}), \ldots, f_\Gamma(\overline{a_m})) \textit{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}).$$

Demostración. Definamos primero la fórmula φ_Γ para toda φ fórmula no-anidada:

- Si φ es atómica no-anidada, entonces φ_Γ es la fórmula dada por el punto ii) en la Definición 3.2;

[7] Esto se puede ver comparando las condiciones de admisibilidad para la interpretación Γ dada en el Ejemplo 3.5 con las del reducto relativizado.

- $\left(\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\right)_\Gamma = \bigwedge_{i\in I}((\varphi_i)_\Gamma)$, $\left(\bigvee_{i\in I}\varphi_i\right)_\Gamma = \bigvee_{i\in I}((\varphi_i)_\Gamma)$;
- $(\neg\varphi)_\Gamma = \neg(\varphi_\Gamma)$;
- $(\forall y\varphi)_\Gamma = \forall x_1,\ldots,\forall x_n(\partial_\Gamma(x_1,\ldots,x_n)\to\varphi_\Gamma)$;
  $(\exists y\varphi)_\Gamma = \exists x_1,\ldots,\exists x_n(\partial_\Gamma(x_1,\ldots,x_n)\wedge\varphi_\Gamma)$.

Sabemos que toda ρ'-fórmula es equivalente a una ρ'-fórmula no-anidada[8], por lo que podemos probar el Teorema de Reducción por inducción sobre la formación de fórmulas no-anidadas.
Para las fórmulas atómicas no-anidadas el resultado se tiene por el punto iii) de la Definición 3.2. Supongamos que φ cumple lo que queremos, entonces:[9]

- $\mathfrak{B}\models\bigwedge_{i\in I}\varphi_i(\overline{f_\Gamma(\overline{a_i})})$, si y sólo si para toda $i\in I$, $\mathfrak{B}\models\varphi_i(\overline{f_\Gamma(\overline{a_i})})$, si y sólo si para toda $i\in I$, $\mathfrak{A}\models(\varphi_i)_\Gamma(\overline{a_i})$, si y sólo si $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{i\in I}(\varphi_i)_\Gamma(\overline{a_i})$. La demostración para $\bigvee$ es similar.
- $\mathfrak{B}\models\neg\varphi(\overline{f_\Gamma(\overline{a})})$, si y sólo si $\mathfrak{B}\not\models\varphi(\overline{f_\Gamma(\overline{a})})$, si y sólo si $\mathfrak{A}\not\models\varphi_\Gamma(\overline{a})$, si y sólo si $\mathfrak{A}\models\neg\varphi_\Gamma(\overline{a})$.
- $\mathfrak{B}\models\forall y\varphi(\overline{f_\Gamma(\overline{a})},y)$, si y sólo si para todo $b\in B$, $\mathfrak{B}\models\varphi(\overline{f_\Gamma(\overline{a})},b)$, si y sólo si para todo $\overline{a'}\in\partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$, $\mathfrak{B}\models\varphi(\overline{f_\Gamma(\overline{a})},f_\Gamma(\overline{a'}))$, si y sólo si para todo $a'_1,\ldots,a'_n\in A$ tal que $\mathfrak{A}\models\partial_\Gamma(a'_1,\ldots,a'_n)$ se tiene que $\mathfrak{A}\models\varphi_\Gamma(\overline{a},a'_1,\ldots,a'_n)$, si y sólo si $\mathfrak{A}\models\forall x_1,\ldots,\forall x_n(\partial_\Gamma(x_1,\ldots,x_n)\to\varphi_\Gamma(\overline{a},x_0,\ldots,x_n)$.

La segunda equivalencia del último punto se tiene porque f_Γ es suprayectiva, y la tercera por hipótesis de inducción. Con esto queda demostrado el Teorema de Reducción.

□

[8]Esto se demuestra en el Apéndice A.

[9]En lo que sigue, escribiremos $\varphi(\overline{f_\Gamma(\overline{a})})$ en lugar de $\varphi(f_\Gamma(\overline{a_1}),\ldots,f_\Gamma(\overline{a_m}))$, donde φ es una fórmula con m variables libres. También, si no hay peligro de confusión, escribiremos $\overline{a}$ en vez de $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_m}$.

Observemos que la función que manda cada φ en φ_Γ ($\varphi \mapsto \varphi_\Gamma$) dada por el Teorema de Reducción depende tan sólo de los puntos i) y ii) en la definición de Γ, y no depende en absoluto de la función coordenada. *Con base en esto, diremos que* Γ *es una interpretación de* $\mathscr{L}'$ *en* $\mathscr{L}$*, si cumple los puntos i) y ii) de la Definición 3.2. A esta función la llamaremos función reducción de* Γ.

Teorema 3.6. *Sean* ρ *y* ρ' *tipos. Sea* Γ *una interpretación n-dimensional de* $\mathscr{L}'$ *en* $\mathscr{L}$*. Entonces para toda* ρ*-estructura* $\mathfrak{A}$ *que es modelo de* $Admis(\Gamma)$*, hay una* ρ'*-estructura* $\mathfrak{B}$ *y una función* $f : \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n) \longrightarrow B$ *tales que:*

a) Γ *junto con* f *es una interpretación de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{A}$.

b) Si $\mathfrak{C}$ *y* g *son tales que* Γ *y* g *forman una interpretación de* $\mathfrak{C}$ *en* $\mathfrak{A}$*, entonces hay un isomorfismo* $\iota : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ *que cumple:*

$$\iota(f(\overline{a})) = g(\overline{a}) \textit{ para toda } \overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n).$$

En otras palabras, dadas una interpretación Γ y una estructura $\mathfrak{A}$ que es modelo de $Admis(\Gamma)$, hay una única estructura $\mathfrak{B}$ salvo isomorfismo tal que Γ es una interpretación de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$. Además, el isomorfismo del que hablamos no es cualquier isomorfismo, sino que se porta bien con respecto a las "coordenadas".

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de $Admis(\Gamma)$. Construyamos $\mathfrak{B}$. Primero, para tener el universo de $\mathfrak{B}$ definamos la siguiente relación $\sim$ en $\partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$:

$$\overline{a} \sim \overline{a}' \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models =_\Gamma (\overline{a}, \overline{a}').$$

El punto ii) en las condiciones de admisibilidad nos garantiza que $\sim$ es una relación de equivalencia. Llamemos $[\overline{a}]$ a la clase de equivalencia de $\overline{a}$. El universo de $\mathfrak{B}$ será el conjunto de todas las clases de equivalencia $[\overline{a}]$ con $\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$[10]. Definamos ahora las relaciones, las funciones y las constantes en $\mathfrak{B}$:

- Para cada símbolo de relación R en ρ':

[10]Es por esto que pedimos la primera condición de admisibilidad, pues ésta nos asegura que el universo de $\mathfrak{B}$ no sea vacío.

$$([\overline{a_1}], \ldots, [\overline{a_m}]) \in R^{\mathfrak{B}} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}),$$

donde $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ es $R(y_1, \ldots, y_m)$.

- Para cada símbolo de función f en ρ':

$$f^{\mathfrak{B}}([\overline{a_1}], \ldots, [\overline{a_{l-1}}]) = [\overline{b}] \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{l-1}}, \overline{b}),$$

donde $\varphi(y_1, \ldots, y_l)$ es $f(y_1, \ldots, y_{l-1}) = y_l$.

- Para cada símbolo de constante c en ρ':

$$c^{\mathfrak{B}} = [\overline{a}] \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a}),$$

donde $\varphi(y)$ es $c = x$.

Así, relaciones, constantes y funciones quedan bien definidas gracias a las condiciones de admisibilidad iii), iv) y v) respectivamente. Con esto queda definida nuestra estructura $\mathfrak{B}$. Ahora, la función $f : \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n) \longrightarrow B$ cuya existencia se postula en el teorema no es otra que la natural, es decir: $f(\overline{a}) = [\overline{a}]$. Veamos que $\mathfrak{B}$ junto con f cumple a) y b):

a) Claramente f es suprayectiva. Por otra parte, $\mathfrak{B}$ fue definida de manera que para toda ρ'-fórmula atómica no-anidada φ, $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{f(\overline{a})})$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a})$. Por lo tanto, Γ y f forman una interpretación de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$.

b) Supongamos que Γ y g forman una interpretación de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{A}$. Para cada $\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ definamos $\iota(f(\overline{a})) = g(\overline{a})$. ι está bien definida, pues si $f(\overline{a}) = f(\overline{a}')$, entonces $\mathfrak{A} \models =_\Gamma (\overline{a}, \overline{a}')$ y por lo tanto $g(\overline{a}) = g(\overline{a}')$. El mismo argumento muestra que ι es inyectiva. La suprayectividad de ι es consecuencia de la suprayectividad de g, ya que si tomamos $c \in C$, entonces hay $\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ tal que $g(\overline{a}) = c$ y por lo tanto $\iota(f(\overline{a})) = c$. Por último, veamos que ι es homomorfismo: $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{f(\overline{a})})$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a})$, si y sólo si $\mathfrak{C} \models \varphi(\overline{g(\overline{a})})$[11]. Por lo tanto, ι es el isomorfismo buscado.

[11] Estamos usando dos veces el Teorema de Reducción.

$\square$

Denotaremos con $\mathfrak{A}_\Gamma$ a la estructura $\mathfrak{B}$ de este teorema. Si $\mathfrak{A}$ es modelo de $Admis(\Gamma)$, entonces diremos que $\mathfrak{A}_\Gamma$ está definido.

Veamos qué dice el Teorema de Reducción en el caso de las estructuras $\mathfrak{A}_\Gamma$.

Teorema 3.7. *Sean ρ y ρ' tipos y Γ una interpretación de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$. Entonces para toda ρ'-fórmula $\varphi(\overline{y})$, para toda ρ-estructura $\mathfrak{A}$ que satisfaga $Admis(\Gamma)$ y para cualesquiera $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$, se tiene que*

$$\mathfrak{A}_\Gamma \models \varphi([\overline{a_1}], \ldots, [\overline{a_m}]), \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a_1}, \ldots \overline{a_m}).$$

Sea ρ un tipo y sea Γ la interpretación tal que para toda ρ-fórmula φ, $\varphi_\Gamma = \varphi$ y $\mathfrak{A}_\Gamma = \mathfrak{A}$. A esta interpretación la llamamos la interpretación identidad, evidentemente no hace nada. Ahora, dados los tipos ρ, ρ', ρ^+, una interpretación Γ de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$ y una interpretación Δ de $\mathscr{L}^+$ en $\mathscr{L}'$, hay una interpretación Σ de $\mathscr{L}^+$ en $\mathscr{L}$ cuyas fórmulas definitorias son:

$$\begin{aligned} \partial_\Sigma &\coloneqq (\partial_\Delta)_\Gamma, \\ \varphi_\Sigma &\coloneqq (\varphi_\Delta)_\Gamma, \end{aligned}$$

donde φ es una ρ^+-fórmula atómica no-anidada. A esta interpretación la llamamos la interpretación compuesta de Γ y Δ, en símbolos: $\Delta \circ \Gamma$.

Por un pequeño momento, nos meteremos con la Teoría de Categorías. La única justificación para esto es que el teorema hacia el cual nos dirigimos es sumamente bonito (¿lo bonito necesita justificación?). Además, nos da oportunidad de entender mejor el concepto de interpretación. Para ello consideremos cuatro cosas: Γ una interpretación de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ modelos de $Admis(\Gamma)$ y $e : A \longrightarrow A'$ una inmersión elemental. Observemos que para todo $\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$, $e\overline{a} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A'^n)$. También, si $\overline{b} \in \partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ y $\mathfrak{A} \models =_\Gamma (\overline{a}, \overline{b})$, entonces $\mathfrak{A}' \models =_\Gamma (e\overline{a}, e\overline{b})$. De lo anterior tenemos que la función $e_\Gamma : A_\Gamma \longrightarrow A'_\Gamma$, dada por $e_\Gamma([\overline{a}]) = [e(\overline{a})]$, está bien definida. Veamos cómo se comportan estas funciones. Si e es la función id_A, entonces $(id_A)_\Gamma$ es la función id_{A_Γ}. Asimismo, si $e_1 : A \longrightarrow A'$ y $e_2 : A' \longrightarrow A''$ son inmersiones elementales, entonces $(e_2e_1)_\Gamma = (e_2)_\Gamma(e_1)_\Gamma$. Aún más, e_Γ es una inmersión elemental de A_Γ en A'_Γ, pues si $\overline{a}$ es una sucesión de elementos de $\partial_\Gamma^{\mathfrak{A}}(A^n)$ y φ una ρ'-fórmula, entonces:

$\mathfrak{A}_\Gamma \models \varphi([\overline{a}])$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma(\overline{a})$, lo que implica que $\mathfrak{A}' \models \varphi_\Gamma(e\overline{a})$, si y sólo si $\mathfrak{A}'_\Gamma \models \varphi([e\overline{a}])$, si y sólo si $\mathfrak{A}'_\Gamma \models \varphi(e_\Gamma([\overline{a}]))$.

La implicación central es porque e es inmersión elemental, la equivalencia siguiente se tiene por definición de e_Γ y las equivalencias laterales se tienen gracias al Teorema de Reducción. Todo esto da pie al siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Sean ρ y ρ' tipos. Sea Γ una interpretación de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$. Entonces, Γ induce un funtor*[12]*, $Funt(\Gamma)$, de la categoría de los modelos de $Admis(A)$ e inmersiones elementales en la categoría de ρ'-estructuras e inmersiones elementales.*

Es claro cuál es el funtor: $Funt(\Gamma)(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_\Gamma$ y $Funt(\Gamma)(e) = e_\Gamma$. Por supuesto no es suprayectivo. A este funtor lo llamaremos *el funtor asociado a la interpretación* Γ.

Para no perder la costumbre, concluiremos este capítulo con un ejemplo.

Ejemplo 3.9. *Dados un conjunto infinito Ω y su grupo de simetría $Sym(\Omega)$, podemos recuperar de $Sym(\Omega)$ tanto a Ω como a la acción* [13] *de $Sym(\Omega)$ sobre Ω. Para esto, supondremos que $Sym(\Omega)$ es una ρ-estructura, donde ρ tiene un símbolo de relación binario $\cdot$ que se interpreta como la multiplicación del grupo. En el caso del par $(\Omega, Sym(\Omega))$*[14]*, el tipo a considerar será:*

$$\rho' = \{Punto, Permutación, Producto, Acción\},$$

donde los símbolos se interpretan, de izquierda a derecha, como el conjunto de los puntos en Ω, el conjunto de permutaciones en $Sym(\Omega)$, la multipliacación en $Sym(\Omega)$ y la acción de $Sym(\Omega)$ sobre Ω. Llamemos $C(x)$ al centralizador de x, es decir, al conjunto $\{y \mid x \cdot y = y \cdot x\}$. Sea Par(x) la ρ-fórmula que dice

$$x \cdot x = 1,\ x \neq 1 \text{ y para toda } y, \text{ si } y \cdot y = 1 \text{ y } C(x) \subseteq C(y), \text{ entonces } x = y \text{ o } y = 1.$$

[12]Las definiciones de categoría y funtor se pueden consultar en el Apéndice B.

[13]Una acción de un grupo $(G, \cdot)$ sobre un conjunto X, es una función $* : G \times X \longrightarrow X$ tal que para toda $x \in X$, $*(e, x) = x$ donde e es el elemento neutro del grupo, y para cualesquiera $g, h \in G$, $*(g \cdot h, x) = *(g, *(h, x))$.

[14]A pesar de la notación $(\Omega, Sym(\Omega))$, la estructura que estamos considerando es aquella cuyo universo es la unión de Ω y $Sym(\Omega$ y su tipo es el enunciado a continuación.

$Par(x)$ expresa que x es una transposición (a, b). Esto no es tan claro, así que veamos rápidamente que Par realmente expresa lo que queremos. Supongamos que x satisface Par y que no es una transposición. Entonces x es la composición de al menos dos transposiciones. Supongamos que $x = a_1 \cdot a_2$, entonces, $C(x) \subseteq C(a_1)$ y sin embargo $a_1 \neq x$ y $a_1 \neq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto x es una transposición. Sea $Muerden(x, y)$ la ρ-fórmula que dice:

$$Par(x) \wedge Par(y) \wedge x \cdot y \neq y \cdot x.$$

Esta fórmula expresa que para distintos elementos a, b, c de Ω, $x = (a, b)$ y $y = (b, c)$, es decir, x y y son dos transposiciones que se muerden. Sea a $Equiv(x, y, z, w)$ la ρ-fórmula que dice:

$$\begin{aligned}&Muerden(x, y) \wedge Muerden(z, w) \wedge Muerden(x, z) \wedge Muerden(y, z) \wedge \\ &Muerden(x, w) \wedge Muerden(y, w).\end{aligned}$$

$Equiv(x, y, z, w)$ expresa que el único punto de Ω movido por x y y es también el punto movido por z y w. Estamos listos para dar una interpretación bidimensional Γ de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$. Esta interpretación tiene como fórmulas definitorias a:

$$\partial_\Gamma(x, y) \coloneqq x = x \wedge y = y,$$

$$Punto_\Gamma(x, y) \coloneqq Muerden(x, y),$$

$$Permutación_\Gamma(x, y) \coloneqq \neg Muerden(x, y),$$

$$\begin{aligned}=_\Gamma (x_1, x_2, y_1, y_2) \coloneqq\ & Equiv(x_1, x_2, y_1, y_2) \vee (\neg Muerden(x_1, x_2) \\ & \wedge \neg Muerden(y_1, y_2) \wedge x_1 = y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Producto_\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \coloneqq\ & \neg Muerden(x_1, x_2) \wedge \neg Muerden(y_1, y_2) \\ & \wedge \neg Muerden(z_1, z_2) \wedge z_1 = x_1 \cdot y_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Acción_\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \coloneqq\ & \neg Muerden(x_1, x_2) \wedge Muerden(y_1, y_2) \\ & \wedge Muerden(z_1, z_2) \wedge Equiv(z_1, z_2, \\ & x_1 \cdot y_1 \cdot x_1^{-1}, x_1 \cdot y_2 \cdot x_1^{-1}).\end{aligned}$$

Esta interpretación junto con la función cordenada

$$f_\Gamma(x, y) = \begin{cases} b & \text{si } x \text{ y } y \text{ se muerden en } b \\ x & \text{si } x \text{ y } y \text{ no se muerden,} \end{cases}$$

es la interpretación que nos interesa. Veamos con detalle la última fórmula definitoria. Supongamos que $y_1 = (a, b)$ *y* $y_2 = (a, c)$*. Entonces,*

$$x_1 \cdot y_1 \cdot x_1^{-1} = (x_1(a), x_1(b)),$$

$$x_1 \cdot y_2 \cdot x_1^{-1} = (x_1(a), x_1(c)).$$

Por lo tanto, $x_1 \cdot y_1 \cdot x_1^{-1}$ *y* $x_1 \cdot y_2 \cdot x_1^{-1}$ *se muerden en* $x_1(a)$ *y en consecuencia,* z_1 *y* z_2 *también se muerden en* $x_1(a)$*. Por lo tanto, Acción realmente describe una acción (valga la redundancia).*

Así, $Sym(\Omega)_\Gamma$ *es una estructura* $\mathfrak{B}$ *cuyo universo es* $B = B_1 \cup B_2$*, donde* B_1 *es un conjunto y* B_2 *un grupo de permutaciones que actúa sobre* B_1*. Además,* B_2 *es isomorfo a* $Sym(\Omega)$*. Curiosamente (aunque esta situación no es tan rara), podemos dar una interpretación al revés, es decir, de* $Sym(\Omega)$ *en* $(\Omega, Sym(\Omega))$*. A diferencia de la primera interpretación, ésta es bastante sencilla. Llamemos* Δ *a la interpretación en cuestión. Entonces* Δ *es la reducción relativizada de* $\mathfrak{B}$ *a la estructura con universo* B_2*.*

Capítulo 4

Interpretaciones y Teorías

En un principio las interpretaciones entre lenguajes surgieron como una herramienta para probar la indecidibilidad de ciertas teorías. Como suele suceder, con el paso del tiempo tanto las interpretaciones como sus aplicaciones se fueron sofisticando de manera que hoy en día se utilizan en diversos campos de la Teoría de Modelos. A pesar de esto, el interés del presente trabajo es dar algunos resultados generales acerca de la indecidibilidad de teorías. A modo de preparación, en este capítulo trataremos dos resultados que dependen directamente de interpretaciones de un lenguaje en otro. El primero de ellos es acerca de extensiones conservadoras y el segundo es un primer ejemplo de indecidibilidad. Este último, a pesar de ser un caso particular y no un resultado general, es importante, pues es ni más ni menos que la indecidibilidad de la Teoría de Conjuntos.

Una interpretación de una teoría en otra será simplemente una interpretación entre los lenguajes de las teorías. Es decir, si T y U son teorías en lenguaje $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ respectivamente, entonces una interpretación de U en T es una interpretación de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$. Asimismo cuando hablamos de una interpretación entre un lenguaje y una teoría o entre clases de modelos, nos referimos a la interpretación entre los lenguajes correspondientes. En el caso de las interpretaciones entre teorías, Tarski pedía además que para todo modelo $\mathfrak{A}$ de T, $\mathfrak{A}_\Gamma \models U$. Sin embargo, este añadido falla en muchas aplicaciones hoy en día, por lo que nos mantendremos con la noción más general enunciada en un principio. Esto no quiere decir que la condición de Tarski no sea interesante, de hecho las interpretaciones que daremos en este capítulo cumplirán dicha condición. A esta condición le daremos un nombre.

Definición 4.1. *Sean W y V clases de estructuras. Sea Γ una interpretación de W en V. Entonces:*

i) *Γ es izquierda total*[1] *si y sólo si para toda $\mathfrak{A}$ en V, $\mathfrak{A}_\Gamma$ pertenece a W.*

ii) *Γ es derecha total si y sólo si para toda $\mathfrak{B}$ en W hay $\mathfrak{A}$ en V tal que $\mathfrak{A}_\Gamma \cong \mathfrak{B}$.*

iii) *Γ es total si y sólo si es izquierda y derecha total.*

En términos del funtor asociado a la interpretación $Funt(\Gamma)$ lo que tenemos es que Γ es izquierda total si y sólo si $Funt(\Gamma)[V] \subseteq W$, es derecha total si y sólo si $Funt(\Gamma)[V] \supseteq W$, y es total si y sólo si $Funt(\Gamma)[V] = W$. En lo subsecuente, las clases V y W serán clases de modelos de alguna teoría.

Definición 4.2. *Sean ρ y ρ' tipos, T una ρ-teoría y Γ una interpretación de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$. En este contexto denotaremos por $\Gamma^{-1}[T]$ al siguiente conjunto de enunciados:*

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}[T] &= Th\{\mathfrak{B}_\Gamma \mid \mathfrak{B} \in Mod(T \cup Admis(\Gamma))\} \\ &= \{\sigma \mid \mathfrak{B}_\Gamma \models \sigma \textit{ para todo } \mathfrak{B} \textit{ modelo de } T \textit{ y de } Admis(\Gamma)\}.\end{aligned}$$

Evidentemente $\Gamma^{-1}[T]$ es una teoría. Veamos algunas de sus propiedades.

Proposición 4.3.

i) *$\Gamma^{-1}[T]$ es satisfacible si y sólo si $T \cup Admis(\Gamma)$ es satisfacible.*

ii) *Para todo ρ'-enunciado σ, $\sigma \in \Gamma^{-1}[T]$ si y sólo si $\sigma_\Gamma \in T \cup Admis(\Gamma)$.*

Demostración.

i) $\Gamma^{-1}[T]$ es satisfacible, si y sólo si hay $\mathfrak{B}$ modelo de $\Gamma^{-1}[T]$, si y sólo si hay $\mathfrak{A}$ modelo de $T \cup Admis(\Gamma)$ tal que $\mathfrak{A}_\Gamma \cong \mathfrak{B}$, si y sólo si $T \cup Admis(\Gamma)$ es satisfacible.

ii) $\sigma \in \Gamma^{-1}[T]$, si y sólo si para todo modelo $\mathfrak{B}$ de $T \cup Admis(\Gamma)$, $\mathfrak{B}_\Gamma \models \sigma$, si y sólo si para todo modelo $\mathfrak{B}$ de $T \cup Admis(\Gamma)$, $\mathfrak{B} \models \sigma_\Gamma$, si y sólo si $T \cup Admis(\Gamma) \models \sigma_\Gamma$.

□

[1] Éste término es traducción literal de *left total*.

Observemos que si para todo modelo $\mathfrak{A}$ de T, $\mathfrak{A}$ es modelo de $Admis(\Gamma)$, entonces la proposición anterior sigue siendo cierta si cambiamos $T \cup Admis(\Gamma)$ por T. A pesar de que ésta es una obsevación bastante obvia, hay que tenerla en cuenta puesto que en lo que resta del capítulo consideraremos teorías T tales que para todo modelo $\mathfrak{A}$ de T, $\mathfrak{A}$ es modelo de $Admis(\Gamma)$.

4.1. Extensiones Conservadoras

Usualmente, en cualquier rama de las matemáticas, introducimos símbolos a modo de abreviaturas para facilitarnos la escritura. Un claro ejemplo es la Teoría de Conjuntos, la cual originalmente dispone tan sólo de un símbolo para la pertencia y sin embargo usamos símbolos para el conjunto vacío, la operación unión, la operación potencia, etc. Por lo general estos símbolos son abreviaciones metalingüísticas, sin embargo, a veces es necesario agregarlos al tipo. Al añadir nuevos símbolos tenemos , por supuesto, un nuevo lenguaje, por lo que es natural preguntarnos si este cambio de tipo no nos está cambiando la teoría. La respuesta es no, siempre y cuando los nuevos símbolos hayan sido introducidos de manera adecuada. En el caso de las relaciones, podemos introducir símbolos predicativos (a través de fórmulas en el lenguaje original) sin ningún problema, pues no hay mucho que exigirle a una relación para que se comporte como tal. Este es el caso del símbolo que denota *subconjunto*. El caso de las funciones y de las constantes es muy distinto. Por ejemplo, no nos gustaría introducir un símbolo de constante que a la hora de ser interpretado resulte en dos elementos distintos. En esta sección veremos cómo extender el lenguaje para que esto no pase. Para ello veamos primero qué es una extensión.

Definición 4.4. *Sean T y U un par de teorías de tipo ρ y ρ' respectivamente. U es una extensión de T si y sólo si $\rho \subseteq \rho'$ y $T \subseteq U$. En el caso en el que $T \subseteq U$ y $\rho = \rho'$ diremos que U es una extensión simple de T.*

Si extendemos nuestro lenguaje de modo que los enunciados (teoremas) en la teoría inicial son enunciados en la nueva teoría, entonces lo que tenemos es una extensión conservadora. Veamos cómo agregar un símbolo de función *n*-ario f de manera que la nueva teoría sea una extensión conservadora de la teoría original.

Sea T una teoría en un lenguaje de tipo ρ, donde ρ no tiene a f. Agregaremos f al lenguaje introduciéndolo mediante la siguiente definición:

$$\delta := \forall x_1 \dots \forall x_n \forall x_{n+1}(f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1} \leftrightarrow \varphi),$$

donde φ es una ρ-fórmula cuyas variables libres están entre $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$.

Teorema 4.5. *Consideremos T y δ como arriba. Entonces son equivalentes:*

i) Para cualquier ρ-enunciado σ, si $T \cup \{\delta\} \models \sigma$, entonces $T \models \sigma$.

ii) El siguiente enunciado está en T:

$$\varepsilon := \forall x_1, \dots, x_n \exists! x_{n+1} \varphi.$$

El inciso i) nos está diciendo que la definición no es creativa, no hace falta δ. Por otra parte ii) nos asegura que f está bien definida.

Demostración.

$\Rightarrow$] Observemos que $\delta \models \varepsilon$, por lo que si $\sigma = \varepsilon$, entoncces $T \models \varepsilon$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $T \models \varepsilon$. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de T. Para todo $a_1, \dots, a_n \in A$, sea $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$ la única $b \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n, b)$ (podemos asegurar que b es única ya que $\mathfrak{A} \models \varepsilon$). Sea $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}})$ la estructura $\mathfrak{A}$ más $f^{\mathfrak{A}}$. Claramente $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}})$ es modelo de δ. Asimismo, $\mathfrak{A}$ y $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}})$ satisfacen los mismos ρ-enunciados, por lo tanto, $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}})$ es modelo de T. Así, si $T \cup \{\delta\} \models \sigma$ con σ una ρ-fórmula, entonces $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}}) \models \sigma$, de donde $\mathfrak{A} \models \sigma$. Como esto se hizo para cualquier modelo de T, entonces $T \models \sigma$ para toda ρ-fórmula σ tal que $T \cup \{\delta\} \models \sigma$.

□

Si lo que queremos introducir es una constante c, entonces lo podemos hacer a través de la siguiente fórmula $\forall x(c = x \leftrightarrow \varphi(x))$. En este caso la fórmula ε será $\exists! x\varphi(x)$. El teorema anterior se puede enunciar con las fórmulas correspondientes y la demostración es muy similar, simplemente hay que hacer los cambios necesarios.

Pensando de nuevo en un símbolo de función[2] f, supongamos que tenemos una teoría en lenguaje $\mathscr{L}$ tal que contiene al enunciado ε. Entonces podemos aumentar $\mathscr{L}$ a un lenguaje más grande $\mathscr{L}'$ que tiene a f como símbolo de función, esto

[2]La discusión subsecuente no cambia en nada si pensamos en símbolos de constante.

a través del enunciado δ. En este contexto podemos dar una interpretación unidimensional Γ de $\mathscr{L}'$ en T. Esta interpretación será la interpretación identidad excepto para f, en cuyo caso:

$$(f(x_0,\ldots,x_n) = x_{n+1})_\Gamma \quad \text{es} \quad \varphi(x_0,\ldots,x_{n+1})$$

Observemos que para cualquier modelo $\mathfrak{A}$ de T, $\mathfrak{A}$ es modelo de $Admis(\Gamma)$ y $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}}) = \mathfrak{A}_\Gamma$. Además $\mathfrak{A}_\Gamma$ es modelo de $T \cup \{\delta\}$.

Lema 4.6. $\Gamma^{-1}[T] = Cn(T \cup \{\delta\})$.

Demostración. Primero observemos que cualquier modelo $\mathfrak{B}$ de $T \cup \{\delta\}$ es igual a $\mathfrak{A}_\Gamma$, donde $\mathfrak{A}$ es el reducto de $\mathfrak{B}$ a $\mathscr{L}$. Así, para cualquier ρ'-enunciado σ:

$$\begin{aligned} \sigma \in \Gamma^{-1}[T], \quad & \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}_\Gamma \models \sigma \text{ para todo modelo } \mathfrak{A} \text{ de } T, \\ & \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \sigma \text{ para todo modelo } \mathfrak{B} \text{ de } T \cup \{\delta\}, \\ & \text{si y sólo si} \quad T \cup \{\delta\} \models \sigma. \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el lema. □

Con este lema ya tenemos las herramientas necesarias para ver que la definición de f se puede eliminar.

Teorema 4.7. *Para cualquier ρ'-enunciado σ hay un ρ-enunciado σ_Γ tal que:*

i) $T \cup \{\delta\} \models (\sigma \leftrightarrow \sigma_\Gamma)$,

ii) $T \cup \{\delta\} \models \sigma$ *si y sólo si* $T \models \sigma_\Gamma$,

iii) Si f no ocurre en σ, entonces $\models (\sigma \leftrightarrow \sigma_\Gamma)$.

Demostración.

iii) se sigue del hecho de que Γ es la interpretación identidad a excepción de la fórmula no-anidada $f(x_0,\ldots,x_n) = x_{n+1}$.

ii) $T \cup \{\delta\} \models \sigma$, si y sólo si $\sigma \in \Gamma^{-1}[T]$, si y sólo si $T \models \sigma_\Gamma$.

i) Observemos que $T \cup \{\delta\} \models (\sigma \leftrightarrow \sigma_\Gamma)$ si y sólo si $T \models (\sigma \leftrightarrow \sigma_\Gamma)_\Gamma$. Veamos que se cumple la parte derecha de esta equivalencia. Por definición, $(\sigma \leftrightarrow \sigma_\Gamma)_\Gamma = (\sigma_\Gamma \leftrightarrow (\sigma_\Gamma)_\Gamma)$, por lo que esta fórmula está en el lenguaje original, es decir, no tiene a f. Así, por iii), $\models \sigma_\Gamma \leftrightarrow (\sigma_\Gamma)_\Gamma$, y por lo tanto $T \models \sigma_\Gamma \leftrightarrow (\sigma_\Gamma)_\Gamma$, es decir, $T \models (\sigma \leftrightarrow \sigma_\Gamma)_\Gamma$.

□

4.2. Indecidibilidad de la Teoría de Conjuntos

Una relación (sobre $\mathbb{N}^m$ con $m \in \mathbb{N}$) es decidible sii hay un procedimiento efectivo[3] y finito (es decir, un algoritmo) para decidir si dado un elemento cualquiera[4], éste pertenece o no a la relación. En el caso de funciones (de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$), la idea análoga es la de calculable. El concepto de decidibilidad es un concepto informal que se ha tratado de formalizar de diversas formas. Hay muchas definiciones matemáticas que intentan capturar la idea de decidibilidad y curiosamente todas ellas coinciden, o mejor dicho, son equivalentes. La definición original fue dada por Gödel y es la de recursividad. Por ahora nos basta con entender que la idea detrás de las relaciones y funciones recursivas es que éstas sean efectivamente decidibles y efectivamente calculables respectivamente.

Consideremos un tipo ρ finito. Entonces podemos identificar cada uno de los símbolos en ρ con un número natural y de igual manera podemos identificar cada expresión (en particular cada término y cada fórmula) con un número natural. También, podemos identificar sucesiones de fórmulas con números naturales. Así, toda deducción tiene asociado un número natural. A una función que hace esto y es inyectiva la llamamos una aritmetización de $\mathscr{L}$. En el Apéndice C se da una aritmetización del Lenguaje de la Teoría de Conjuntos. A partir de aquí el símbolo # denotará una aritmetización del lenguaje o de la teoría en cuestión.

Definición 4.8. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de tipo finito. Decimos que $\mathscr{L}$ es un lenguaje recursivo si y sólo si hay una aritmetización # de $\mathscr{L}$ tal que el conjunto de números naturales $\{\#\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula de } \mathscr{L}\}$ es recursivo.*

[3]Con *efectivo* queremos decir que el procedimiento es determinista, es decir, cada paso está determinado de manera que no es necesaria la creatividad ni la imaginación.

[4]Evidentemente nos referimos a elementos del universo en el que está definida la relación, si ésta es 1-aria, o a pares ordenados si la relación es binaria, etc.

Dado un lenguaje recursivo, operaciones sintácticas como la conjunción de dos fórmulas o la substitución de un término por una variable libre en una fórmula, tienen asociadas funciones recursivas. Si $\mathscr{L}$ es un lenguaje recursivo y la función que manda a cada fórmula no-anidada φ a su correspondiente φ_Γ es recursiva, entonces diremos que Γ es una interpretación recursiva. En una interpretación recursiva, la función reducción restringida a fórmulas finitarias es recursiva. En cuanto a las teorías, diremos que éstas son recursivas si y sólo si dada una aritmetización de su lenguaje, el conjunto $\#T = \{\#\varphi \mid \varphi \in T\}$ es recursivo. En este caso diremos que la teoría en cuestión es decidible y en caso contrario diremos que la teoría es indecidible.

Ahora sí, veamos la indecidibilidad de la Teoría de Conjuntos. Para esto consideraremos dos tipos: $\rho = \{R_\in\}$ y $\rho' = \{c_0, f_s, f_+, f_\cdot\}$. La idea es que $\mathscr{L}$ es el lenguaje de la Teoría de Conjuntos y $\mathscr{L}'$ el lenguaje de la Aritmética[5]. Hay que decir también unas cuantas palabras acerca de la teoría de tipo ρ' que nos interesa, es decir, la teoría conocida como Q. Esta teoría fue propuesta por Raphael Robinson y sus axiomas son los siguientes[6]:

$$\begin{array}{l}
\forall x(s(x) \neq 0)\\
\forall x \forall y(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)\\
\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y)))\\
\forall x(x + 0 = x)\\
\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))\\
\forall x(x \cdot 0) = 0)\\
\forall x \forall y(x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x)
\end{array}$$

Al conjunto de los axiomas de Q lo llamaremos $Ax(Q)$. Ya sabemos, por el Teorema de Incompletud de Gödel, que $Q \subset Th(\mathfrak{N})$, esto es, que Q es una teoría incompleta. Este resultado se deriva de que $\#Q$[7] no es recursivo, es decir, Q es indecidible[8]. Pero Q no cumple sólo esto, sino que además, para cualquier teoría T tal que $Q \cup T$ es consistente, se tiene que T es indecidible. A este hecho le llamaremos *la indecidibilidad fuerte de Q*. Apoyándonos en esto último daremos

[5]Entendemos por aritmética a la teoría $Th(\mathfrak{N})$ donde $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot \rangle$.

[6]A partir de aquí, por facilidad, usaremos como símbolos a los objetos. Por ejemplo en lugar de utilizar a f_0 como el símbolo que se interpreta como el 0, utilizaremos al símbolo 0.

[7]En general, $\#T$ denota al conjunto $\{\#\varphi \mid \varphi \in T\}$.

[8]La indecidibilidad de Q se prueba en el Apéndice D.

una prueba de la indecidibilidad de la Teoría de Conjuntos (TC), donde entendemos por Teoría de Conjuntos al conjunto de las consecuencias de ZF, es decir, $TC = Cn(ZF)$. Lo primero que tenemos que hacer es dar una interpretación Γ de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$, lo cual no representa ninguna dificultad. La fórmula dominio será el resultado de eliminar el símbolo definido ω[9] de la siguiente fórmula:

$$\partial_\Gamma(x) :\equiv x \in \omega$$

Las fórmulas definitoras correspondientes a la igualdad, cero, sucesor, suma y producto (eliminando la definición de todo lo que sea necesario) son:

$$\begin{aligned}
&=_\Gamma (x, y) :\equiv x = y,\\
&(0 = x)_\Gamma :\equiv \emptyset = x,\\
&(s(x) = y)_\Gamma :\equiv \{x\} \cup x = y,\\
&(x + y = z)_\Gamma :\equiv x \widehat{+} y = z,\\
&(x \cdot y = z)_\Gamma :\equiv x \widehat{\cdot} y = z,
\end{aligned}$$

donde $\widehat{+}$ y $\widehat{\cdot}$ son los símbolos que representan a la suma y al producto cardinal respectivamente. Es importante notar que para cada uno de los siete enunciados σ en $Ax(Q)$, el enunciado σ_Γ está en TC. De igual manera, las condiciones de admisibilidad de Γ son enunciados en TC. Llamemos Φ al conjunto que tiene como elementos a las condiciones de admisibilidad y a los enunciados que axiomatizan a Q. Es claro que Φ es finito, pues Q es finitamente axiomatizable y $Admis(\Gamma)$ es un conjunto finito. Podemos concluir entonces, que a Γ lo podemos ver también como una interpretación de Q en $Cn(\Phi)$, lo cual es bastante elegante ya que Φ es finito. Además, la función reducción de Γ es una función recursiva.

Antes de enunciar el teorema que nos da la indecidibilidad de la Teoría de Conjuntos, veremos unos cuantos aspectos técnicos que nos servirán para la demostración de dicho teorema.

Definición 4.9. *Dados A y B conjuntos de números naturales, decimos que A es multirreducible a B ($A \leqslant_m B$) si y sólo si hay una función recursiva f de A en B tal que para todo $a \in \mathbb{N}$,*

$$a \in A \text{ si y sólo si } f(a) \in B.$$

[9]Esto se puede hacer, ya que desde la Teoría de Conjuntos se prueba que ω es único.

Dados dos conjuntos de naturales A y B tales que $A \leqslant_m B$ y B es recursivo, se tiene que A es recursivo. La demostración de esta afirmación se puede consultar en [End] p.368.

Teorema de Indecidibilidad Fuerte de la Teoría de Conjuntos. *Sea T una ρ-teoría tal que $T \cup TC$ (o al menos $T \cup \Phi$) es consistente. Entonces $\#T$ no es recursivo.*

Demostración. Como $\Phi \subseteq TC$, basta demostrar el teorema para Φ. Sea Δ la teoría consistente $Cn(T \cup \Phi)$ y sea $\Delta_0 = \Gamma^{-1}[\Delta] = Th\{\mathfrak{B}_\Gamma \mid \mathfrak{B} \in Mod(T \cup \Phi)\}$. Veamos cómo es Δ_0. Primero, como Δ es consistente, entonces tiene modelo; además, para todo modelo $\mathfrak{B}$ de Δ, $\mathfrak{B}_\Gamma$ está definido ya que $Admis(\Gamma) \subseteq \Phi$. Esto automáticamente nos lleva a que Δ_0 es consistente. Por otro lado, $Ax(Q) \subseteq \Delta_0$, pues si $\sigma \in Ax(Q)$, entonces $\sigma_\Gamma \in \Phi \subseteq \Delta$. Por lo tanto, $\Delta_0 \cup Q$ es consistente, de modo que, por la indecidibilidad fuerte de Q, $\#\Delta_0$ no es recursivo. Lo que haremos ahora es aprovechar la no recursividad de Δ_0 para obtener la no recursividad de T. Afirmamos que $\#\Delta_0 \leqslant_m \#\Delta$. Esto se debe a dos cosas:

i) $\sigma \in \Delta_0$ si y sólo si $\sigma_\Gamma \in \Delta$ y

ii) $\#(\sigma_\Gamma)$ depende recursivamente de $\#\sigma$ en el sentido de que la función ϱ tal que $\#\sigma \mapsto \#(\sigma_\Gamma)$ es recursiva.

De i) y ii) tenemos que $\#\sigma \in \#\Delta_0$ si y sólo si $\varrho(\#\sigma) \in \#\Delta$, es decir, $\#\Delta_0 \leqslant_m \#\Delta$. Por lo tanto $\#\Delta$ no es recursivo, pues de serlo tendríamos que $\#\Delta_0$ también lo es. De igual forma veremos que $\#\Delta \leqslant_m \#T$. Sea φ la conjunción de los enunciados en Φ y sea ϱ' la función recursiva que manda $\#\tau$ a $\#((\varphi \rightarrow) * \#(\tau) * \#())$, donde τ es cualquier ρ-fórmula y $*$ es la operación recursiva *concatenación*[10]. Entonces:

i) $\tau \in \Delta$ si y sólo si $(\varphi \rightarrow \tau) \in T$ y

ii) $\#(\varphi \rightarrow \tau)$ depende recursivamente de $\#\tau$.

El inciso i) se tiene ya que $\tau \in \Delta$, si y sólo si $T \cup \Phi \models \tau$, si y sólo si $T \models \varphi \rightarrow \tau$, si y sólo si $(\varphi \rightarrow \tau) \in T$. El inciso ii) se debe a que ϱ' es una función recursiva.

[10] La recursividad de la concatenación está demostrada en [End] p.320. La recursividad de ϱ' se deriva inmediatamente de la recursividad de la concatenación.

En conclusión, tenemos que $\#\tau \in \#\Delta$ si y sólo si $\varrho'(\#\tau) \in \#T$, es decir, $\#\Delta \leqslant_m \#T$. Usando el mismo argumento que se usó para ver que $\#\Delta$ no es recursivo, tenemos que $\#T$ no es recursivo, con lo que queda terminada la demostración.

□

Tenemos dos corolarios interesantes:

Corolario 4.10. *Si la Teoría de Conjuntos es consistente, entonces no es completa.*

Demostración. En el teorema anterior, consideremos $T = TC$. Como TC es consistente, entonces $\#TC$ no es recursivo. Supongamos que TC es una teoría completa. Como $\#ZF$ es recursivo (pues claramente ZF es decidible), entonces $\#TC$ es recursivo[11], lo cual es una contradicción.

□

Corolario 4.11. *En el lenguaje con un símbolo de predicado binario, si TC es consistente, el conjunto de enunciados válidos, $UV = \{\#\varphi \mid\ \models \varphi\}$ no es recursivo.*

Demostración. En el teorema anterior, sea $T = Cn(\emptyset)$ el conjunto de los enunciados válidos. Entonces $\#T$ no es recursivo.

□

Para terminar este capítulo demostraremos el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel para la Teoría de Conjuntos. Esto lo haremos de manera similar a la demostración para la aritmética. La idea es encontrar un enunciado σ que indirectamente nos diga que su propia interpretación σ_Γ no es un teorema de la Teoría de Conjuntos.

Antes que nada, llamaremos *numeral de n* al término que resulta de aplicar n veces el símbolo de función s al símbolo de constante 0. Es decir, el numeral de n es el nombre para dicho número. Esto lo denotaremos por $\overline{n}$. Consideremos la siguiente relación ternaria D sobre $\mathbb{N}$:

[11]En [End] p.335 se demuestra que si $\#A$ es recursivo y $Cn(A)$ es una teoría completa, entonces $\#Cn(A)$ es recursivo.

$(a, b, c) \in D$ si y sólo si a es el número de una fórmula $\alpha(x)$ en $\mathscr{L}'$ y c es el número de una deducción de $(\alpha(\overline{b}))_\Gamma$ a partir de ZF, donde $(\alpha(\overline{b}))_\Gamma$ es el resultado de sustituir la variable x por el término $\overline{b}$[12].

D es una función recursiva. Hasta este momento hemos evitado dar una definición formal de recursividad, pues para todo el desarrollo anterior basta con entender los conceptos informales de decidibilidad y calculabilidad a los que ésta hace referencia. Sin embargo, para lo que sigue es necesario dar una de las posibles definiciones de recursividad. Diremos que una relación es recursiva si y sólo si es representable en Q. ¿Y qué quiere decir que una relación sea representable? Pues lo siguiente:

Definición 4.12. *Sea R una relación n-aria. Decimos que φ representa R en Q si y sólo si para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathbb{N}$:*

si $(a_1, \ldots, a_m) \in R$, entonces $\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}) \in Q$; y
si $(a_1, \ldots, a_m) \notin R$, entonces $\neg\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}) \in Q$.

Decimos que una relación es representable en Q si y sólo si existe alguna fórmula que la representa en Q.

Ya que la relación D es recursiva, entonces hay una ρ'-fórmula que la representa en Q, digamos $\delta(v_1, v_2, v_3)$. Sea r el número

$$\#(\forall v_3 \neg\delta(v_1, v_1, v_3)).$$

Sea σ la ρ'-fórmula

$$\forall v_3 \neg\delta(\overline{r}, \overline{r}, v_3).$$

Observemos que σ dice indirectamente que $\sigma_\Gamma \notin TC$. No nos olvidemos de esto, pues más adelante nos será de gran utilidad. El teorema hacia el cual nos dirigimos se deriva del siguiente lema.

Lema 4.13. *Si la Teoría de Conjuntos es consistente, entonces $\sigma_\Gamma \notin TC$.*

[12] De aquí en adelante $\alpha(t)$ denotará al resultado de sustituir por t (si es que t es sustituible) a la variable libre correspondiente de α.

Demostración. Supongamos que TC es consistente y que σ_Γ puede deducirse de ZF. Sea k el valor asignado por #[13] a dicha deducción. Entonces $(r, r, k) \in D$, por lo tanto, $Ax(Q) \vdash \delta(\overline{r}, \overline{r}, \overline{k})$, de donde $Ax(Q) \vdash \exists v_3 \delta(\overline{r}, \overline{r}, v_3)$, de modo que $Ax(Q) \vdash \neg\sigma$. De aquí tenemos que $(\neg\sigma)_\Gamma$ está en TC y por lo tanto TC es inconsistente, lo cual es una contradicción.

□

Si pensamos que todo lo demostrado anteriormente se hizo (o mejor dicho, si nos creemos que se puede hacer) de manera formal dentro de la Teoría de Conjuntos, entonces acabamos de demostrar un enunciado de la Teoría de Conjuntos que tiene la siguiente forma: $Cons(TC) \rightarrow \xi$, donde $Cons(TC)$ es un ρ-enunciado que indirectamente expresa la consistencia de TC y ξ es la ρ-fórmula que dice $\sigma_\Gamma \notin TC$. Sin embargo, ya tenemos un ρ-enunciado que expresa $\sigma_\Gamma \notin TC$, se trata de σ_Γ mismo, por lo que σ_Γ debe ser equivalente a ξ. De todo esto podemos concluir (de forma bastante informal) que $Cons(TC) \rightarrow \sigma_\Gamma$ es un teorema de la Teoría de Conjuntos. Basándonos en esto podemos dar, ahora sí, la cereza del pastel.

Segundo Teorema de Incompletud de Gödel para la Teoría de Conjuntos. *Si TC es consistente, entonces el enunciado $Cons(TC)$ no es un teorema de TC.*

Demostración. Supongamos que TC es consistente y que $Cons(TC)$ es un teorema de TC. Sabemos que $Cons(TC) \rightarrow \sigma_\Gamma$ es un teorema de TC y, por lo tanto, σ_Γ también está en TC. Por otro lado, sabemos por el lema anterior que $\sigma_\Gamma \notin TC$. Esto nos a una contradicción, por lo tanto, el teorema es verdadero.

□

[13]Recordemos que una aritmetización también le asigna números naturales a sucesiones de sucesiones de símbolos.

Capítulo 5

Resultados Generales de Indecidibilidad

En el capítulo anterior probamos la indecidibilidad de la Teoría de Conjuntos, estableciendo así cuál es la idea de usar interpretaciones para transmitir la indecidibilidad de una teoría a otra. Los resultados que daremos en este capítulo tendrán el mismo espíritu, pero serán mucho más generales. Comenzaremos con un teorema sencillo, para culminar de la misma manera. El relleno, en cambio, será mucho más carnoso.

Proposición 5.1. *Sean $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ dos lenguajes y sea Γ una interpretación de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$. Consideremos una teoría T en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ tal que Γ está definida en la clase de modelos de T. Se tiene lo siguiente:*

i) *Si φ_i ($i \in I$) y ψ son enunciados de $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ tales que $\models \bigwedge_{i\in I} \varphi_i \to \psi$, entonces $T \models \bigwedge_{i\in I}(\varphi_i)_\Gamma \to \psi_\Gamma$.*

ii) *La clase $\{\varphi \in \mathscr{L}'_{\omega_1\omega} \mid T \models \varphi_\Gamma\}$ es cerrada bajo consecuencia lógica*[1].

Demostración.

[1] Si $\{\varphi \in \mathscr{L}'_{\omega_1\omega} \mid T \models \varphi_\Gamma\} \models \psi$, entonces $T \models \psi_\Gamma$.

i) Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de T. Entonces $\mathfrak{A}_\Gamma$ está definido y $\mathfrak{A}_\Gamma \models \bigwedge_{i\in I} \varphi_i \to \psi$, pues $\models \bigwedge_{i\in I} \varphi_i \to \psi$. Ahora, por el Teorema de Reducción, $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i\in I} (\varphi_i)_\Gamma \to \psi_\Gamma$. Por lo tanto, $T \models \bigwedge_{i\in I} (\varphi_i)_\Gamma \to \psi_\Gamma$.

ii) Llamemos $\mathcal{A}$ a la clase $\{\varphi \in \mathscr{L}'_{\omega_1\omega} \mid T \models \varphi_\Gamma\}$. Sea ψ un enunciado en $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ tal que $\mathcal{A} \models \psi$ y sea $\bigwedge \mathcal{A}$ la conjunción de todos los enunciados en $\mathcal{A}$. Entonces $\models \bigwedge \mathcal{A} \to \psi$ y por i), $T \models (\bigwedge \mathcal{A})_\Gamma \to \psi_\Gamma$. Ahora, como $T \models (\bigwedge \mathcal{A})_\Gamma$, entonces $T \models \psi_\Gamma$ y por lo tanto $\psi \in \mathcal{A}$. En conclusión, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo consecuencia lógica.

□

Comencemos por definir dos tipos de indecidibilidad.

Definición 5.2. *Sea T una teoría en un lenguaje recursivo de primer orden $\mathscr{L}$. Decimos que T es esencialmente indecidible si y sólo si T es consistente y para toda teoría consistente U en $\mathscr{L}$ tal que $T \subseteq U$, U es indecidible.*

Definición 5.3. *Una teoría T en un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ es hereditariamente indecidible si y sólo si para toda teoría U en $\mathscr{L}$ tal que $U \subseteq T$, U es indecidible.*

Teorema 5.4. *Sea U una teoría finitamente axiomatizable y esencialmente indecidible en un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}'$ de tipo finito. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje recursivo de primer orden y T una teoría en $\mathscr{L}$. Si existe una interpretación Γ de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$ que interpreta algún modelo de U en algún modelo de T, entonces T es hereditariamente indecidible.*

Demostración. Probaremos primero la indecidibilidad de T. Para esto supongamos que T es decidible. Sea χ la conjunción de los enunciados que generan a U y sea Γ una interpretación de un modelo $\mathfrak{B}$ de χ en un modelo $\mathfrak{A}$ de T. Llamemos σ a la conjunción de las condiciones de admisibilidad de Γ. Entonces, por el Teorema de Reducción,

$$\mathfrak{A} \models \chi_\Gamma.$$

Sea Φ el conjunto de enunciados

$$\{\varphi \in \mathscr{L}' \mid T \cup \{\sigma\} \models \chi_\Gamma \to \varphi_\Gamma\}.$$

Observemos dos cosas. Primero, $\chi \in \Phi$, y segundo, Φ es cerrado bajo consecuencia lógica. Esto último es consecuencia inmediata de la proposición 5.1. Veamos que Φ es indecidible. Para esto hay que verificar que Φ es consistente y que $U \subseteq \Phi$. Veámoslo:

a) Si $\varphi \in \Phi$, entonces $\mathfrak{A} \models \chi_\Gamma \to \varphi_\Gamma$ y por lo tanto $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma$. Así, por el Teorema de Reducción, $\mathfrak{B} \models \varphi$, por lo que Φ es consistente.

b) Veamos que $U \subseteq \Phi$. Sea $\tau \in U$, entonces $\models \chi \to \tau$ y por lo tanto $T \cup \{\sigma\} \models \chi_\Gamma \to \tau_\Gamma$, de donde $\tau \in \Phi$.

Como Φ es consistente, $U \subseteq \Phi$ y U es esencialmente indecidible, por lo tanto, Φ es indecidible.
Consideremos la función f tal que

$$f(\varphi) = (\sigma \wedge \chi_\Gamma \to \varphi_\Gamma).$$

Esta función es recursiva, pues σ y χ_Γ están fijos y la función reducción es recursiva. Con esta función tenemos un mecanismo para saber qué enunciados están en Φ: dado $\varphi \in \mathscr{L}'$ nos fijamos si $\sigma \wedge \chi_\Gamma \to \varphi_\Gamma$ está en T (esto lo puedo hacer pues T es decidible), si lo está, entonces φ está en Φ,y si no, φ no está en Φ. Esto nos lleva a que Φ es decidible, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T es indecidible. Usando el mismo argumento se prueba que cualquier subteoría de T en $\mathscr{L}$ es indecidible, por lo que T es hereditariamente indecidible. □

Corolario 5.5. *Si algún modelo de Q es interpretable en una estructura $\mathfrak{A}$, entonces toda subteoría de $Th(\mathfrak{A})$ es indecidble.*

Este resultado es consecuencia inmediata del teorema 5.4 y del hecho de que Q es esencialmente indecidible[2].

Definición 5.6. *Decimos que dos conjuntos X y Y son recursivamente inseparables si y sólo si no hay un conjunto recursivo que contenga a X y que sea ajeno con Y. En caso contrario decimos que X y Y son recursivamente separables.*

Definición 5.7. *Una teoría T en un lenguaje de primer orden recursivo $\mathscr{L}$ es fuertemente indecidible si y sólo si T y el conjunto*

$$\{\varphi \in \mathscr{L} \mid T \cup \{\neg\varphi\} \textit{ tiene un modelo finito}\},$$

son recursivamente inseparables.

[2] La indecidibilidad esencial de Q se demuestra en el Apéndice D.

Observemos que si T es fuertemente indecidible, entonces T es indecidible y la teoría de todos los modelos finitos de T también es indecidible.

Teorema 5.8. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden y T un teoría en $\mathscr{L}$. Sea $\mathscr{L}'$ un lenguaje de primer orden de tipo finito y U una teoría finitamente axiomatizable y fuertemente indecidible en $\mathscr{L}'$. Si hay una interpretación Γ de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$ tal que:*

> *para cualquier modelo finito $\mathfrak{B}$ de U, hay un modelo finito $\mathfrak{A}$ de T tal que $\mathfrak{A}_\Gamma \cong \mathfrak{B}$,*

entonces T es fuertemente indecidible.

Demostración. Sea σ la conjunción de las condiciones de admisibilidad de Γ y sea χ un enunciado que axiomatiza a U. Supongamos que T no es fuertemente indecidible, es decir, que hay un conjunto recursivo X que contiene a T y que es ajeno a $\{\varphi \in \mathscr{L} \mid T \cup \{\neg\varphi\}\ tiene\ un\ modelo\ finito\}$. Sea Y el conjunto de enunciados

$$\{\varphi \in \mathscr{L}' \mid (\sigma \wedge \chi_\Gamma \to \varphi_\Gamma) \in X\},$$

y sea $\mathcal{B}$ el conjunto

$$\{\psi \in \mathscr{L}' \mid U \cup \{\neg\psi\} \text{ tiene un modelo finito}\}.$$

Veamos que Y separa recursivamente a U de $\mathcal{B}$:

i) Y es recursivo, pues X lo es.

ii) Para todo modelo $\mathfrak{A}$ de $T \cup \{\sigma, \chi_\Gamma\}$, $\mathfrak{A}_\Gamma$ está definido y es modelo de χ. Por lo tanto, si φ es un enunciado en U, entonces $\mathfrak{A}_\Gamma \models \varphi$ y por el Teorema de Reducción $\mathfrak{A} \models \varphi_\Gamma$, de donde $T \models \sigma \wedge \chi_\Gamma \to \varphi_\Gamma$. De modo que $\varphi \in Y$ y por lo tanto $U \subseteq Y$.

iii) Si $\neg\psi$ es un enunciado en $\mathscr{L}'$ que es verdadero en algún modelo finito $\mathfrak{B}$ de U, entonces por hipótesis hay un modelo finito $\mathfrak{A}$ de T tal que $\mathfrak{A}_\Gamma \cong \mathfrak{B}$ y por lo tanto
$$\mathfrak{A} \models \sigma \wedge \chi_\Gamma \wedge \neg\psi_\Gamma.$$
Por lo que $T \cup \{\neg(\sigma \wedge \chi_\Gamma \to \psi_\Gamma)\}$ tiene un modelo finito. Así $(\sigma \wedge \chi_\Gamma \to \psi_\Gamma) \notin X$ y por lo tanto $\psi \notin Y$. De modo que $Y \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

De i), ii) y iii), tenemos que U y $\mathcal{B}$ son recursivamente separables y por lo tanto U no es fuertemente indecidible, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T es fuertemente indecidible. $\square$

Veamos algunos ejemplos. Para ello primero necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 5.9. *Hay un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ de tipo finito tal que los conjuntos de enunciados $\{\psi \in \mathscr{L} \mid \models \psi\}$ y $\{\psi \in \mathscr{L} \mid \psi \text{ no tiene modelos } finitos\}$ son recursivamente inseparables.*

Este resultado se debe a Trakhtenbrot y su demostración se puede consultar en [Trak]. El siguiente corolario nos será de gran utilidad para dar un par de ejemplos.

Corolario 5.10. *Podemos elegir un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ de tipo finito de manera que $UV_{\mathscr{L}}$, la teoría de los enunciados universalmente válidos[3] en $\mathscr{L}$, es fuertemente indecidible.*

Demostración. Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje que nos da la proposición 5.9. Llamemos $\mathcal{A}$ al conjunto de enunciados $\{\psi \in \mathscr{L} \mid \psi$ no tiene modelos finitos$\}$ y $\mathcal{B}$ al conjunto $\{\varphi \in \mathscr{L} \mid \neg\varphi$ tiene un modelo finito$\}$. Supongamos que $UV_{\mathscr{L}}$ no es fuertemente indecidible. Entonces hay un conjunto recursivo X tal que $UV_{\mathscr{L}} \subseteq X$ y $X \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por otra parte, por la proposición 5.9, $\mathcal{A}$ y $UV_{\mathscr{L}}$ son recursivamente inseparables. Sea φ un enunciado en $\mathcal{A}$, entonces para todo ρ-modelo finito $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, por lo tanto $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ y en consecuencia φ pertenece a $\mathcal{B}$. Así, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, de manera que X separa recursivamente a $UV_{\mathscr{L}}$ de $\mathcal{A}$. Esto último es una contradicción y por lo tanto $UV_{\mathscr{L}}$ es fuertemente indecidible. $\square$

Cada vez nos acercamos más al primer ejemplo de indecidibilidad. Se trata de la indecidibilidad de la Teoría de Gráficas. Estamos a un paso de esto, nada más hace falta demostrar el siguiente teorema.

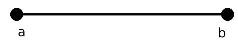
Teorema 5.11. *Sea ρ un tipo con tan sólo un símbolo de relación binario R y sea ρ' un tipo finito. Entonces hay un ρ-enunciado χ tal que:*

i) Todo modelo de χ es un gráfica.

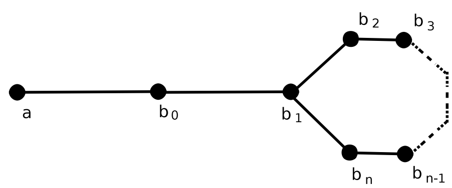
[3]Un ρ-enunciado φ es universalmente válido si y sólo si es verdadero en cualquier ρ-modelo, es decir, si para cualquier ρ-modelo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \varphi$.

ii) Hay una intrepretación Γ *de la clase de* ρ'*-estructuras en la clase de los modelos de* χ.

Demostración. i) Esta prueba será constructiva. A partir de una ρ'-estructura $\mathfrak{B}$ construiremos una gráfica $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$[4] y daremos el enunciado χ de manera que $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ sea modelo de χ. Para esto definamos unas cuantas cosas. Primero, el dibujo



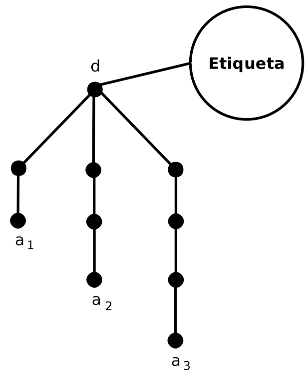
querrá decir que a y b son elementos distintos de A[5] y $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} \models R(a,b) \wedge R(b,a)$. Dado $3 \leqslant n \in \mathbb{N}$, diremos que un elemento a de A está n-etiquetado si y sólo si hay $b_0, b_1, \ldots, b_n$ en A tales que:



Sean $S_1, \ldots, S_l$ los símbolos en ρ'. Construiremos $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ de la siguiente manera. Primero, cada elemento de B será un elemento 5-etiquetado en $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$. En el caso de los símbolos de relación, veremos por medio de un ejemplo cómo introducir su interpretación en una gráfica. Consideremos el símbolo S_i y supongamos que es un símbolo de relación ternario. Entonces, para cada (a_1, a_2, a_3) en $S_i^{\mathfrak{B}}$ agregaremos elementos a $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ de manera que se cumpla el siguiente diagrama:

[4] Esta notación podrá parecer un poco extraña, sin embargo más adelante se verá que la gráfica $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ está completamente determinada por $\mathfrak{B}$.

[5] Por simplicidad llamaremos A al universo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$.



(☢)

donde d es un elemento de A $(i+6)$-etiquetado. Notemos que la cantidad de nodos entre d y a_i nos indica el lugar que le corresponde a a_i en la terna (a_1, a_2, a_3). Si S_i es un símbolo de función m-ario, entonces haremos lo mismo que en el diagrama ☢ considerando a S_i como un símbolo de relación $m+1$-ario. De igual manera veremos a los símbolos de constante como relaciones 1-arias. La colección de todos los nodos que representan elementos de B y n-adas en relaciones de $\mathfrak{B}$, junto con todas las aristas que los unen, forman la gráfica $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$. Podemos clasificar los elementos de A en especies, de manera que si un nodo pertenece a una especie determinada, entonces satisface una $\exists_1$-fórmula[6]. Para hacer esta clasificación consideremos las siguinetes ρ-fórmulas:

$$\varphi^+(x,y) := R(x,y) \wedge R(y,x),$$

$$\varphi^-(x,y) := x \neq y \wedge \neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x),$$

$$\begin{aligned} Etiq_n(x, y_0, \ldots, y_n) := {} & \varphi^+(x,y_0) \wedge \varphi^+(y_0,y_1) \wedge \varphi^+(y_1,y_2) \wedge \ldots \wedge \varphi^+(y_{n-1},y_n) \\ & \wedge \varphi^+(y_n,y_1) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi^-(x,y_i) \wedge \bigwedge_{i+1<j<n} \varphi^-(y_i,y_j) \wedge \\ & \bigwedge_{i\neq 1, i+1<n} \varphi^-(y_i,y_n). \end{aligned}$$

Las dos primeras fórmulas están claras. La última fórmula, en cambio, puede ser desconcertante, sin embargo si la leemos con cuidado, no hace más que describir una n-etiqueta. Apoyándonos en estas fórmulas, tenemos que, para los nodos incluidos para representar objetos de B, hay siete especies

[6] La definición de $\exists_1$-fórmula se puede consultar en el Apéndice A.

$E_0, \ldots, E_6$ definidas por las fórmulas $E_i(w)$ $(0 \leqslant i \leqslant 6)$, donde $E_i(w)$ es

$$\exists w_0 \ldots \exists w_{i-1} \exists w_{i+1} \ldots \exists w_6 Etiq_5(w_0, \ldots, w_{i-1}, w, w_{i+1}, \ldots, w_6)$$

Así un elemento de A es de especie E_0 si y sólo si es un elemento de B. Los elementos pertenecientes a la i-ésima especie $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ son aquellos que aparecen en la posición i de una 5-etiqueta. De manera similar podemos describir especies para los elementos que ocurren en el diagrama ☢, excluyendo por supuesto, a a_1, a_2, a_3, ya que estos elementos son de especie E_0. Ya que tenemos clasificados los elementos de A en especies, estamos listos para dar el ρ-enunciado χ. Éste dice:

- R es una relación simétrica y antirreflexiva,
- todo elemento es de alguna de las especies,
- para cada $i < l$, si S_i es un símbolo de relación n-ario y $\overline{a}$ es una n-ada de elementos de la especie E_0, entonces hay a lo más una configuración del estilo ☢ con $\overline{a}$ hasta abajo,
- la condición correspondiente a la condición anterior, cuando S_i es un símbolo de función o de constante.

Evidentemente $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ (así lo construimos) es un modelo de χ. También, todo modelo de χ es isomorfo a alguna estructura $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$.

ii) Ahora daremos la interpretación Γ mencionada en el teorema. Ésta será una interpretación unidimensional de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$ cuyas fórmulas definitorias son las siguientes:

$$\partial_\Gamma(x_0) \text{ es } x_0 \textit{ pertenece a la especie } E_0$$

$$=_\Gamma (x_0, x_1) \text{ es } (x_0 = x_1)$$

En el caso de los símbolos S_i, la fórmula será una generalización de la fórmula dada para el caso en el que S_i es un símbolo de relación ternario. En este caso, si $\varphi(x_0, x_1, x_2)$ es la fórmula $S_i(x_0, x_1, x_2)$, entonces $\varphi_\Gamma(a_0, a_1, a_2)$ es

hay elementos como en ☢ *tales que d está*$(i + 6) -$ *etiquetado.*

Con esto queda establecida la interpretación Γ.

□

Observemos dos cosas que nos serán de utilidad a continuación. En primer lugar $(\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}})_{\Gamma}$ es isomorfo a $\mathfrak{B}$. Y en segundo, si $\mathfrak{B}$ es finito entonces $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ también lo es. Lo anterior junto con esta observación dan pie a la indecidibilidad de la Teoría de Gráficas .

Teorema 5.12. *Sea χ el enunciado de la demostración anterior, entonces la teoría $Th\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \chi\}$ es fuertemente indecidible.*

Demostración. Sea T la teoría $Th\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \chi\}$ y sea $U = UV_{\mathscr{L}'}$ donde $\mathscr{L}'$ es el lenguaje que nos da el Corolario 5.10. Entonces U es fuertemente indecidible y, por supuesto, finitamente axiomatizable. Además, la interpretación Γ del Teorema anterior cumple la hipótesis del Teorema 5.8. En conclusión, y de nuevo por el Teorema 5.8, T es fuertemente indecidible. ◻

Lo que el teorema anterior nos dice es que si $\mathscr{L}$ es el lenguaje de primer orden de la Teoría de Gráficas, entonces no hay un algoritmo que distinga los enunciados de $\mathscr{L}$ verdaderos en toda gráfica de aquéllos que son falsos en alguna gráfica finita. Apoyándonos en que la Teoría de Gráficas es fuertemente indecidible, probaremos que la teoría de latices de altura $\leqslant 4$ es fuertemente indecidible.

Definición 5.13. *La altura de una latiz Λ es el supremo de los números naturales n tales que Λ contiene una cadena finita $a_o < \ldots < a_{n-1}$.*

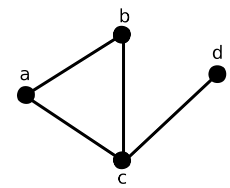
Sea θ en el lenguaje de las latices que dice: *soy una latiz de altura* $\leqslant 4$ *y tengo mínimo y máximo distintos.*

Teorema 5.14. *La clase de las gráficas es interpretable en la clase de los modelos de θ.*

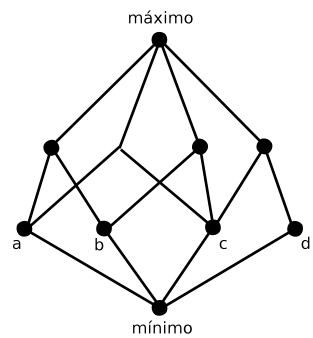
Demostración. Sea $\mathfrak{B} = (B, R^{\mathfrak{B}})$ una gráfica. Con la misma idea de la demostración del Teorema 5.11, definiremos una latiz $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ que satisfaga al enunciado θ. Para dar el universo de la nueva estructura introduciremos una serie de nuevos objetos. Para empezar consideremos dos objetos nuevos *máximo* y *mínimo*. Por cada (a, b) en $R^{\mathfrak{B}}$ consideremos un nuevo objeto $ab_{\vee}$. Así, el universo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ tendrá como elementos a *máximo*, *mínimo*, a todos los objetos $ab_{\vee}$ y a los elementos de B. Los elementos *máximo* y *mínimo* serán el máximo y el mínimo de nuestra latiz, es decir, para todo elemento a en A[7], $a \vee$ *máximo* = *máximo* y $a \wedge$ *mínimo* = *mínimo*

[7] Una vez más llamaremos A al universo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$, es decir, $A = B \cup \{ab_{\vee} \mid (a, b) \in R^{\mathfrak{B}}\} \cup \{\textit{máximo}, \textit{mínimo}\}$.

y si c es tal que para toda $a \in A$, $a \vee c = c$ ($a \wedge c = c$), entonces $c = máximo$ ($c = mínimo$). Asimismo, los elementos $ab_\vee$ cumplen que $a \vee b = ab_\vee$. Veamos un ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica:



Entonces la latiz que obtenemos con el procedimiento anterior es:



Evidentemente toda estrucutra $\mathfrak{A}_\mathfrak{B}$ construida a partir de una gráfica $\mathfrak{B}$ es modelo de θ y todo modelo de θ es isomorfo a una estructura $\mathfrak{A}_\mathfrak{B}$. Observemos que la latiz $\mathfrak{A}_\mathfrak{B}$ tiene cuatro niveles, de los cuales el primero tiene tan sólo a *mínimo* y el último a *máximo*. Los dos niveles centrales son descritos por las siguientes fórmulas:

$$\varphi_2(x) \coloneqq x \neq 0 \wedge \neg\exists y(y \neq 0 \wedge (x \wedge y = y)),$$

$$\varphi_3(x) \coloneqq \exists y \exists z(\varphi_2(y) \wedge \varphi_2(z) \wedge (y \vee z = x)),$$

donde 0 es una abreviatura para la fórmula $\varphi(x)$ que expresa que x es el mínimo de la latiz. Así, si a pertenece al segundo nivel, entonces satisface φ_2, y si pertenece al tercer nivel satisface φ_3. La interpretación Γ de $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{L}$ que buscamos está dada por:

$$\partial_\Gamma(x_0) \coloneqq \varphi_2(x_0),$$

$$=_\Gamma (x_0, x_1) \coloneqq x_0 = x_1,$$

$$(R(x_0, x_1))_\Gamma \coloneqq \exists z(\varphi_3(z) \wedge (x_0 \vee x_1 = z)).$$

$\square$

Teorema 5.15. *La teoría de latices de altura* $\leqslant 4$ *es fuertemente indecidible.*

Demostración. Sea T la teoría $Th\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \theta\}$ y sea U la Teoría de Gráficas. Entonces U es fuertemente indecidible y finitamente axiomatizable [8]. Además, por construcción, Γ se comporta como queremos, es decir, $(\mathfrak{A}_\mathfrak{B})_\Gamma$ es isomorfo a $\mathfrak{B}$ y, si $\mathfrak{B}$ es finito, entonces $\mathfrak{A}_\mathfrak{B}$ también lo es. Así, por el Teorema 5.8, T es fuertemente indecidible. $\square$

Como lo prometido es deuda, terminaremos con un resultado sencillo de indecidibilidad. Así, a modo de despedida, presentamos el siguiente teorema.

Teorema 5.16. *Sean* $\mathscr{L}$ *y* $\mathscr{L}'$ *dos lenguajes de primer orden y* T *y* U *dos teorías en* $\mathscr{L}$ *y* $\mathscr{L}'$ *respectivamente. Si* U *es indecidible y* Γ *es una interpretación total de* U *en* T*, entonces* T *es indecidible.*

Demostración. Sea Γ una interpretación total de U en T. Supongamos que T es decidible. Sea φ en U. Como Γ es izquierda total, para todo $\mathfrak{A}$ modelo de T, $\mathfrak{A}_\Gamma$ está definido y es modelo de U y por lo tanto, modelo de φ. Así, por el Teorema de Reducción, para todo $\mathfrak{A}$ modelo de T, $\mathfrak{A}$ es modelo de φ_Γ y, por lo tanto, φ_Γ pertenece a T. Sea φ_Γ en T. Como Γ es derecha total, para todo modelo $\mathfrak{B}$ de U hay un modelo $\mathfrak{A}$ de T tal que $\mathfrak{A}_\Gamma$ es isomorfo a $\mathfrak{B}$. Por el Teorema de Reducción, $\mathfrak{A}_\Gamma \models \varphi$ y en consecuencia $\mathfrak{B} \models \varphi$. Por lo tanto, φ pertenece a U. Así, φ_Γ pertenece a T si y sólo si φ pertenece a U. Como T es decidible, U también lo es, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T es indecidible. $\square$

[8] Recordemos que el enunciado χ descrito en la prueba del Teorema 5.11 axiomatiza a U.

Capítulo 6

Epílogo

Comencemos el epílogo de manera árida y poco ortodoxa: con una definición.

Definición 6.1. *Un conjunto Σ de fórmulas es efectivamente numerable si y sólo si es numerable y además hay un procedimiento efectivo (algoritmo) para dar una enumeración suya. Equivalentemente, Σ es efectivamente numerable si y sólo si hay una función efectivamente calculable f tal que $\Sigma = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$.*

En los tres ejemplos de indecidibilidad que se dieron en el presente trabajo, las teorías que consideramos están en un lenguaje de primer orden numerable y su tipo se puede numerar efectivamente. Además, las propiedades de ser símbolo de relación n-ario y de ser símbolo de función m-ario, son decidibles. A este tipo de lenguajes los llamaremos lenguajes razonables (¿es razonable pedirle al tipo que sea numerable o finito?). Una de las consecuencias inmediatas de la indecidibilidad de las teorías en lenguaje razonable y axiomatizables, es que dichas teorías no son completas. Esto se deriva del siguiente par de proposiciones.

Proposición 6.2. *Sea T una teoría en un lenguaje razonable. Si T es axiomatizable, entonces es efectivamente numerable.*

La demostración de esta proposición se puede consultar en [End] p.229.

Proposición 6.3. *Sea T una teoría en un lenguaje razonable. Si T es axiomatizable y completa, entonces es decidible.*

Demostración. Sea T una teoría completa y axiomatizable. Entonces existe un conjunto decidible Ax tal que $T = \{\varphi \mid Ax \models \varphi\}$. Si T es inconsistente, entonces $T = \{\varphi \mid \varphi$ es un enunciado de $\mathscr{L}_T\}$ y por lo tanto T es decidible. Si T es consistente, como T es axiomatizable, es efectivamente numerable, es decir, hay una numeración $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ de los elementos de T. Así, dado un enunciado α, como T es completa, en la numeración aparece α o $\neg\alpha$ (y sólo uno). Si el enunciado que aparece es α, entonces $\alpha \in T$. Y si aparece $\neg\alpha$, entonces $\neg\alpha \in T$. Con esto queda establecido un algoritmo que decide si dada una fórmula α, ésta pertenece a T o su negación pertenece a T. Por lo tanto, T es decidible. □

Como corolario inmediato se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.4. *Sea T una teoría en un lenguaje razonable y axiomatizable. Si T es indecidible entonces no es completa.*

Demostración. De ser T completa, tendríamos que es decidible, pues por hipótesis T es axiomatizable. □

Como se vio a lo largo del trabajo, lo interesante de las interpretaciones es que nos preservan -bajo algunas condiciones- cierta propiedad, la indecidibilidad. Como es de suponerse, ésta no es la única propiedad que preservan. Entre otras, también preservan la ω-categoricidad. También, las interpretaciones, en particular los reductos relativizados, se utilizan para construir universos no estándar. Así, lo que surgió como una herramienta para probar la indecidibilidad de ciertas teorías se ha ido sofisticando y ha ido adquiriendo un mayor rango de aplicación. Una pregunta interesante es cuándo cierto tipo de estructuras no son interpretables en otro tipo de estructuras. Como suele pasar cuando nos preguntamos cuándo no pasa algo, dar una respuesta es bastante difícil. Esta pregunta ha dado pie a nuevos desarrollos en la Teoría de Modelos.

Apéndice A

Fórmulas no-anidadas

Las fórmulas no-anidadas nos interesan por pura comodidad. Es usual en matemá-ticas referirnos a una misma cosa de distintas formas según convenga. Éste es el caso de las fórmulas no-anidadas, pues de hecho, las fórmulas no-anidadas son equivalentes a las fórmulas usuales. Veamos esto último.

Definición A.1. *Una fórmula está en forma rectificada si y sólo si cumple lo siguiente:*

i) *No tiene variables que ocurren libres y acotadas a la vez.*

ii) *No hay dos cuantificadores con la misma variable.*

iii) *No hay cuantificadores tales que las variables a las cuales cuantifican no aparecen libres en su alcance (es decir, no hay cuantificadores vacuos o que no cuantifican).*

En la siguiente tabla se puede ver del lado izquierdo ejemplos de fórmulas no rectificadas y, del lado derecho, fórmulas logicamente equivalentes que resultan ser fórmulas rectificadas.

Fórmula no rectificada		*Fórmula rectificada*
$\forall x \exists y P(x, y, z) \land Q(x, z)$	$\models\!\dashv$	$\forall w \exists y P(w, y, z) \land Q(x, z)$
$\forall x \exists y P(x, y, c) \lor \exists x Q(x, z)$	$\models\!\dashv$	$\forall w \exists y P(w, y, c) \lor \exists x Q(x, z)$
$\forall x \exists y P(y, z, c)$	$\models\!\dashv$	$\exists y P(y, z, c)$

Cada una de las fórmulas no rectificadas en la tabla rompe con uno de los incisos en A.1. Sin embargo, todas ellas son lógicamente equivalentes a fórmulas rectificadas. De hecho, toda fórmula es lógicamente equivalente a una fórmula en forma rectificada. De aquí en adelante supondremos que todas las fórmulas están en forma rectificada.

Definición A.2. *Decimos que una fórmula ϕ es $\forall_1$ (o fórmula universal) si se construye a partir de fórmulas libres de cuantificadores y a través de $\bigwedge$, $\bigvee$ y cuantificación universal. Una fórmula $\exists_1$ (o fórmula existencial) es una fórmula construida a partir de fórmulas libres de cuantificadores a través de $\bigwedge$, $\bigvee$ y cuantificación existencial.*

Recordemos que una fórmula atómica no-anidada de tipo ρ es una fórmula atómica de la siguiente forma:

i) $x = y$,

ii) $c = y$ *para algún símbolo de constante* c *en* ρ,

ii) $f(\overline{x}) = y$ *para algún símbolo de función* f *en* ρ,

iv) $R(\overline{x})$ *para algún símbolo de relación* R *en* ρ.

Una fórmula no-anidada es una fórmula tal que todas sus subfórmulas atómicas son no-anidadas.

Teorema A.3. *Sea ρ un tipo. Toda ρ-fórmula atómica $\phi(\overline{x})$ es lógicamente equivalente a ρ-fórmulas en lenguaje de primer orden no-anidadas $\phi^{\forall}(\overline{x})$ y $\phi^{\exists}(\overline{x})$, donde $\phi^{\forall}$ es una fórmula $\forall_1$ y $\phi^{\exists}$ es una fórmula $\exists_1$.*

Antes de dar la prueba del teorema veremos un ejemplo que dará pie a dicha prueba. Consideremos la fórmula $f(g(x), z) = c$. Esta fórmula es lógicamente equivalente a las fórmulas no-anidadas:

$$\forall u \forall w (g(x) = u \wedge f(u, z) = w \rightarrow c = w), \text{ y}$$

$$\exists u \exists w (g(x) = u \wedge f(u, z) = w \wedge c = w).$$

Demostración. A lo largo de la demostración, $\varphi \models\mid \psi$ querrá decir que φ es lógicamente equivalente a ψ. Demostraremos primero que para todo término t, todo $n \geqslant 0$ y f^n símbolo de función n-ario, y cualesquiera $t_1, \ldots, t_n$ términos, las fórmulas

i) $t = x$

ii) $t = c$

iii) $t = f^n(t_1, \ldots, t_n)$

son lógicamente equivalentes a fórmulas no-anidadas $\phi^\forall$ y $\phi^\exists$:

i) Veamos por inducción sobre la formación de t lo que queremos. El caso en el que t es una variable es inmediato, pues $y = x$ es una fórmula no-anidada. Asimismo, si t es una constante, entonces $c = x$ es una fórmula no-anidada, por lo que no hay nada que hacer. Sea g^m una función m-aria. Supongamos que para $1 \leqslant i \leqslant m$, $t'_i = x$ es equivalente a fórmulas no-anidadas $\forall \overline{z}_i \sigma(\overline{z}_i, x)$ y $\exists \overline{z}_i \psi(\overline{z}_i, x)$. Entonces:

$g^m(t'_1, \ldots, t'_m) = x \models\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m(t'_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t'_m = u_m \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = x) \models\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m(\exists \overline{z}_1 \psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \exists \overline{z}_m \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = x) \models\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m(\exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m)) \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = x) \models\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall \overline{z}_1 \ldots \forall \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = x)$.

La última fórmula en la serie de equivalencias es la fórmula buscada, es decir, es una fórmula $\forall_1$ y es no-anidada. Por otro lado:

$g^m(t'_1, \ldots, t'_m) = x \models\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m(t'_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t'_m = u_m \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = x) \models\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m(\exists \overline{z}_1 \psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \exists \overline{z}_m \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = x) \models\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m(\exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m)) \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = x) \models\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m \exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = x)$.

La última fórmula es $\exists_1$ y es no-anidada. Con esto queda demostrado i).

ii) Teniendo i) es fácil demostrar lo restante. Probaremos ahora que $t = c$ cumple lo que queremos. Si t es una variable, no hay nada que hacer. Si t es una constante, digamos d, entonces $d = c \models\mid \forall u(d = u \rightarrow u = c)$, y esta última es una fórmula no-anidada. El caso en el que $t = g^m(t'_1, \ldots, t'_m)$, donde g^m es una función m-aria es muy parecido al visto en i):

$g^m(t'_1, \ldots, t'_m) = c \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall w(t'_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t'_m = u_m \wedge c = w \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = w)$.

Por i), para cada $1 \leqslant i \leqslant m$, $t'_i = u_i$ es equivalente a fórmulas no-anidadas $\forall \overline{z}_i \sigma(\overline{z}_i, u_i)$ y $\exists \overline{z}_i \psi(\overline{z}_i, u_i)$. Por lo tanto, la última fórmula es lógicamente equivalente a:

$\forall u_1 \ldots \forall u_m \forall w(\exists \overline{z}_1 \psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \exists \overline{z}_m \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge c = w \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = w) \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall w(\exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m)) \wedge c = w \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = w) \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall w \forall \overline{z}_1 \ldots \forall \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge c = w \rightarrow g^m(u_1, \ldots, u_m) = w)$.

Y para la fórmula $\exists_1$:

$g^m(t'_1, \ldots, t'_m) = c \models\!\!\!\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m \exists w(t'_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t'_m = u_m \wedge c = w \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w)$.

Por i), esta última fórmula es equivalente a:

$\exists u_1 \ldots \exists u_m \exists w(\exists \overline{z}_1 \psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \exists \overline{z}_m \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge c = w \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w) \models\!\!\!\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m \exists w(\exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m)) \wedge c = w \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w) \models\!\!\!\mid \exists u_1 \ldots \exists u_m \exists w \exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m(\psi_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge c = w \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w)$.

Con lo que queda demostrada la afirmación para ii).

iii) Ahora mostraremos lo deseado para $t = f^n(t_1, \ldots, t_n)$. El caso en el que t es una variable se tiene por i); y el caso en el que t es una constante se tiene por ii). Como siempre, el caso en el que $t = g^m(t'_1, \ldots, t'_m)$ es el más laborioso. Por i), tenemos que para todo $t'' \in \{t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m\}$, $t'' = x$ es equivalente a una fórmula no-anidada $\exists_1$, digamos $\exists \overline{z}_i \psi(\overline{z}_i, x)$. Entonces:

$g^m(t'_1, \ldots, t'_m) = f^n(t_1, \ldots, t_n) \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w(t'_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t'_m = u_m \wedge t_1 = v_1 \ldots \wedge t_n = v_n \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w \rightarrow w = f^n(v_1, \ldots, v_n)) \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w(\exists \overline{z}_1 \psi'_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \exists \overline{z}_m \psi'_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge \exists \overline{y}_1 \psi_1(\overline{y}_1, v_1) \wedge \ldots \wedge \exists \overline{y}_n \psi_n(\overline{y}_n, v_n) \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w \rightarrow w = f^n(v_1, \ldots, v_n)) \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w(\exists \overline{z}_1 \ldots \exists \overline{z}_m \exists \overline{y}_1 \ldots \exists \overline{y}_n(\psi'_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi'_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge \psi_1(\overline{y}_1, v_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n(\overline{y}_n, v_n)) \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w \rightarrow w = f^n(v_1, \ldots, v_n)) \models\!\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_m \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w \forall \overline{z}_1 \ldots \forall \overline{z}_m \forall \overline{y}_1 \ldots \forall \overline{y}_n(\psi'_1(\overline{z}_1, u_1) \wedge \ldots \wedge \psi'_m(\overline{z}_m, u_m) \wedge \psi_1(\overline{y}_1, v_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n(\overline{y}_n, v_n) \wedge g^m(u_1, \ldots, u_m) = w \rightarrow w = f^n(v_1, \ldots, v_n))$.

De nuevo, la última fórmula en la serie de equivalencias en una fórmula no-anidada. A estas alturas ya se ve cómo queda el caso en el que buscamos una fórmula no-anidada $\exists_1$.

Por último, si R es un símbolo de relación n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos:

$R(t_1, \ldots, t_n) \models\!\!\mid \forall u_1 \ldots \forall u_n(t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_n = u_n \rightarrow R(u_1, \ldots, u_n))$

$R(t_1, \ldots, t_n) \models\!\!\mid \exists u_1 \ldots \exists u_n(t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_n = u_n \wedge R(u_1, \ldots, u_n))$.

El resto de las equivalencias se sigue de i) de igual manera que en los casos anteriores.

$\square$

Tenemos un corolario inmediato:

Corolario A.4. *Sea ρ un tipo. Entonces toda ρ-fórmula es lógicamente equivalente a una ρ-fórmula no-anidada. Y más aún, toda ρ-fórmula de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ es lógicamente equivalente a una ρ-fórmula no-anidada de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$.*

Apéndice B

Categorías

El propósito de este apéndice es simplemente dar la definición de categoría y de funtor. El lector que esté interesado en profundizar más en la teoría de categorías puede consultar [JHG].

Definición B.1. *Una categoía* $\mathbf{A}$ *consiste en:*

1. *Una clase de objetos* $Ob(\mathbf{A})$.
2. *Para cada par* A, B *en* $Ob(\mathbf{A})$ *un conjunto* $\mathbf{A}(A, B)$ *(a este conjunto se le llama el conjunto de morfismos o flechas de A en B y si* f *es un morfismo en este conjunto, entonces lo escribimos* $A \xrightarrow{f} B$*).*
3. *Para cada A en* $Ob(\mathbf{A})$*, un morfismo* $A \xrightarrow{id_A} A$ *llamado la* $\mathbf{A}$*-identidad en A.*
4. *Una ley de composición que le asocia a cada* $\mathbf{A}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *y a cada* $\mathbf{A}$*-morfismo* $B \xrightarrow{g} C$ *el* $\mathbf{A}$*-morfismo* $A \xrightarrow{g \circ f} C$*, llamado la composición de* f *y* g*.*

Estos cuatro puntos están sujetos a los siguientes axiomas:

a) *La composición es asociativa:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

b) *Las* **A**-*identidades se comportan como identidades, es decir, para todo morfismo* $A \xrightarrow{f} B$*:*

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f.$$

c) *Los conjuntos* $\mathbf{A}(A, B)$ *son disjuntos dos a dos.*

Con esto queda definido lo que es una categoría. La definición de funtor es la siguiente:

Definición B.2. *Sean* **A** *y* **B** *categorías. Un funtor* F *de* **A** *a* **B** *es una función que la asigna a cada objeto* A *de* **A** *un objeto* $F(A)$ *de* **B**, *y a cada* **A**-*morfismo* $A \xrightarrow{f} A'$ *un* **B**-*morfismo* $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$ *de manera que:*

1. F *preserva la composición, es decir,* $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ *siempre que* $f \circ g$ *esté definido.*

2. F *preserva las identidades, es decir, para cada objeto* A *en* **A**, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

Ejemplos de categorías son:

i) *La clase de todos los conjuntos y funciones entre ellos,*

ii) *la clase de todos los espacios vectoriales y las transformaciones lineales entre ellos,*

iii) *la clase de todos los grupos y los homomorfismos entre ellos,*

iv) *la clase de todos los espacios topológicos y las funciones entre ellos.*

Apéndice C

Recursividad y Representabilidad

En el Capítulo 4 dimos una idea general de lo que son las relaciónes y funciones recursivas. Dijimos que éstas tratan de rescatar la idea de decidibilidad. Algunos ejemplos de funciones recursivas son: la función sucesor, las funciones constante, las funciones proyección, la suma, el producto, la función característica, etc. Algunos ejemplos de relaciones recursivas son: la relación de divisibilidad, el conjunto de los números primos, etc. También, en el Capítulo 4 dimos una equivalencia, a saber, una relación es recursiva si y sólo si es representable en alguna teoría consistente y finitamente axiomatizable. Además, pedíamos que el lenguaje de la teoría tuviera símbolos para la constante 0 y la función sucesor. A continuación daremos de nuevo la definición de representabilidad, pero esta vez pidiéndole al lenguaje que contenga una sucesión infinita de términos sin variables.

Definición C.1. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje tal que contiene una sucesión infinita de términos $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m, \ldots$ que no contienen variables, y sea T una teoría en $\mathscr{L}$. Decimos que $P \subseteq \mathbb{N}^n$ es representable en T si y sólo si hay una ρ-fórmula $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ tal que:*

$$\text{si } a_1, \ldots, a_n \in P, \text{ entonces } \varphi(\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_n}) \in T, \text{ y}$$
$$\text{si } a_1, \ldots, a_n \notin P, \text{ entonces } \neg\varphi(\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_n}) \in T.$$

En el contexto anterior decimos que φ representa a P en T.

Esta definición es bastante general. Usualmente la sucesión de δ's es la sucesión *de los numerales. Una vez que hemos definido la representabilidad para relaciones, nos interesa saber cuándo una función es representable en una teoría.*

Definición C.2. *Sea T como en la definición anterior. Decimos que una fórmula φ representa funcionalmente a f en T si y sólo si para toda $a_1, \ldots, a_m$ en $\mathbb{N}$,*

$$\forall v_{m+1}(\varphi(\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_m}, v_{m+1}) \leftrightarrow v_{m+1} = \delta_{f(a_1,\ldots,a_m)})$$

pertenece a T. En este caso, decimos que φ representa funcionalmente a f en T

¿Cuál es la relación entre la representabilidad y la representabilidad funcional? Dado un conjunto de números naturales, éste es representable si y sólo si su función característica es funcionalmente representable. Además, tenemos el siguiente teorema.

Teorema C.3.

i) Si φ representa funcionalmente a f en T, emtonces también representa a f (vista como relación) en T.

ii) Si f es una función representable (vista como relación), entonces hay una fórmula φ que representa funcionalmente a f en T.

La demostración de este teorema se puede consultar en [End] pp.305-307. Ya que hemos dado la definición de decidibilidad (representabilidad) para relaciones y funciones, nos aprovecharemos de esto para expresar la indecidibilidad de teorías. Para esto tenemos que meter al lenguaje dentro de la aritmética, para así poder hablar de conjuntos de expresiones recursivos y de funciones sintácticas recursivas. Es decir, los conjuntos y las funciones en el lenguaje los veremos como conjuntos y funciones aritméticas y nos preguntaremos si éstos son recursivos o no. Al proceso de traducir entes en el lenguaje a entes en la aritmética lo llamamos aritmetización. Daremos un ejemplo de aritmetización en el caso del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Definiremos una función h que va de los símbolos del lenguaje en los número naturales, como sigue:

	h
(	*3*
)	*5*
,	*7*
=	*9*
$\to$	*11*
$\neg$	*13*

	h
$\forall$	*15*
$\in$	*17*
x_0	*19*
x_1	*21*
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$19+2n$

Observemos que h es inyectiva. Ésta va a ser una condición que le vamos a pedir a cualquier aritmetización. Ya que hemos dado la aritmetización de los símbolos del lenguaje, daremos la de las expresiones. Así, definiremos una función # de las expresiones en los números naturales. Dados $s_0, \ldots, s_n$ *símbolos del lenguaje,*

$$\#(s_0 \ldots s_n) = P_0^{h(s_0)} P_1^{h(s_1)} \cdots P_n^{h(s_n)},$$

donde P_i *denota al i-ésimo número primo, es decir,* $P_0 = 2$, $P_1 = 3$, $P_2 = 5$, *etc. Observemos que* $Im(\#) \subseteq 2\mathbb{N}$ *y # es inyectiva. De igual manera, podemos dar una función* $\mathcal{G}$ *que manda a cada sucesión finita de expresiones a un número natural. Así, por ejemplo, las deducciones tendrán asociado un número natural. Sean* $E_0, E_1, \ldots, E_n$ *expresiones. Entonces,*

$$\mathcal{G}(E_0 E_1 \ldots E_n) = P_0^{\#(E_0)} P_1^{\#(E_1)} \cdots P_n^{\#(E_n)}.$$

Una vez más, esta función es inyectiva.

Consideremos ahora cualquier correspondencia uno a uno entre expresiones en T *y números naturales. A esta correspondencia la denotaremos por #, de manera que si* φ *es una expresión de* T*, entonces* $\#\varphi$ *es un número natural. Y al revés, dado un número natural n, llamaremos a la expresión asociada a él (si es que la hay)* ξ_n*. Sea* $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *la función tal que* $d(n) = \#(\xi_n(\delta_n))$[1]*, si* ξ_n *es una fórmula con una variable libre, y* $d(n) = 0$*, en otro caso. A esta función la llamamos la función diagonal. Sea* $\mathfrak{I}$ *el conjunto de todos los números naturales tales que* ξ_n *es un enunciado de* T*.*

Teorema C.4. *Si* T *es una teoría consistente, entonces la función* d *y el conjunto* $\mathfrak{I}$ *no pueden ser ambos representables en* T*.*

[1]Recordemos que $\xi_n(\delta_n)$ es la expresión que se obtiene al sustituir en la fórmula $\xi(x)$ la variable x por el término δ_n.

Demostración. Sea T una teoría consistente. Supongamos que d y $\mathfrak{I}$ son representables en T. Entonces hay φ y ψ fórmulas tales que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall v(\varphi(\delta_n, v) \leftrightarrow v = \delta_{d(n)}) \text{ está en } T. \tag{C.1}$$

Es decir, φ representa a d en T; y

$$\text{si } n \in \mathfrak{I}, \text{ entonces } \psi(\delta_n) \text{ está en } T, \text{ y} \tag{C.2}$$

$$\text{si } n \notin \mathfrak{I}, \text{ entonces } \neg\psi(\delta_n) \text{ está en } T. \tag{C.3}$$

Supongamos que v no ocurre en ψ. Sea $m = \#(\forall v(\varphi(u, v) \to \neg\psi(v)))$. Entonces

$$\xi_m(\delta_m) = \forall v(\varphi(\delta_m, v) \to \neg\psi(v)). \tag{C.4}$$

Ahora, hay dos posbilidades, o $\xi_m(\delta_m)$ está en T, o $\xi_m(\delta_m)$ no está en T. Veamos qué pasa en cada uno de los casos. Si $\xi_m(\delta_m)$ está en T, entonces por (C.1) y (C.4), $\neg\psi(\delta_{d(m)})$ pertenece a T. Si $\xi_m(\delta_m)$ no está en T, entonces $\#(\xi_m(\delta_m))$ no está en $\mathfrak{I}$, es decir, $d(m)$ no está en $\mathfrak{I}$, por lo tanto (por (C.3)) $\neg\psi(\delta_{d(m)})$ está en T. En cualquiera de los dos casos tenemos que:

$$\neg\psi(\delta_{d(m)}) \text{ está en } T \tag{C.5}$$

Así, por (C.1) y (C.4), $\xi_m(\delta_m) = \forall v(\varphi(\delta_m, v) \to \neg\psi(v))$ está en T. De donde $d(m)$ está en $\mathfrak{I}$ y por (C.2), $\psi(\delta_{d(m)})$ está en T. Por lo tanto, T es inconsistente, lo cual es una contradicción. □

Supongamos ahora que la sucesión $\delta_0, \delta_1, \ldots$ es recursiva, es decir, que la sucesión $\#\delta_0, \#\delta_1, \ldots$ lo es. Esta suposición es necesaria si queremos asegurar que la función d sea recursiva. Bajo esta suposición daremos el siguiente corolario del teorema anterior.

Corolario C.5. *Si T es una teoría consistente en la cual todas las funciones recursivas son representables en T, entonces T es esencialmente indecidible.*

Demostración. Como la función d es recursiva, entonces es representable en T y por el teorema anterior, el conjunto $\mathfrak{I}$ no es representable en T. Supongamos que $\mathfrak{I}$ es recursivo. Entonces la función característica de $\mathfrak{I}$ también es recursiva y por lo tanto representable en T. Esto implica que $\mathfrak{I}$ es representable, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\mathfrak{I}$ no es recursivo, es decir, el conjunto de los enunciados de T no es recursivo y, por lo tanto, T es indecidible. □

Apéndice D

Indecidibilidad de Q

El resultado hacia el cual nos dirigimos (la indecidibilidad de Q, como el título lo indica) requiere un poco de trabajo. Primero definamos dos teorías. Sea Q la teoría generada por los siguientes axiomas:

1. $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \to x = y)$
2. $\forall x (0 \neq s(x))$
3. $\forall x (x \neq 0 \to \exists y (x = s(y)))$
4. $\forall x (x + 0 = x)$
5. $\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$
6. $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
7. $\forall x \forall y (x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x)$

Y sea R la teoría generada por los siguientes cinco esquemas de axiomas (donde n y m son números naturales cualesquiera):

a) $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n + m}$[1]

[1]Recordemos que $\overline{n}$ denota al numeral de n.

b) $\overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$

c) $\overline{n} \neq \overline{m}$ *si* $n \neq m$

d) $\forall x(\exists y(y + x = \overline{n}) \rightarrow x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n})$

e) $\forall x(\exists y(y + x = \overline{n}) \vee \exists y(y + \overline{n} = x))$

Tanto los axiomas d) y e), como varios enunciados en la prueba de la siguiente proposición son más fáciles de entender si abreviamos $\exists w(w + x = y)$ *con* $x \leqslant y$*. Usaremos esta abreviatura según nos convenga. La siguiente proposición muestra que una teoría con un número infinito de axiomas puede ser una subteoría de una teoría con un número finito de axiomas.*

Proposición D.1. *R es una subteoría de Q.*

Demostración. Para ver que R es una subteoría de Q basta checar que podemos obtener a), b), c), d) y e) a partir de los axiomas de Q.

a) Veamos por inducción sobre m que $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$. El caso $m = 0$ se tiene por el axioma 4. Supongamos que la afirmación se cumple para m, entonces, por el axioma 5, $\overline{n} + \overline{m+1} = \overline{n} + s(\overline{m}) = s(\overline{n} + \overline{m}) = s(\overline{n+m}) = \overline{n+m+1}$.

b) De manera análoga, usando inducción sobre m y por los axiomas 6 y 7, se tiene que $\overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$.

c) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n < m$. Entonces, si $n = 0$, por el axioma 2, tenemos que $\overline{n} \neq \overline{m}$. Para $n \neq 0$ supongamos que $\overline{n} = \overline{m}$, entonces aplicando n veces el axioma 1 llegamos a que $0 = \overline{m-n}$, lo cual contradice al axioma 2. Por lo tanto $\overline{n} \neq \overline{m}$.

d) Para demostrar d) daremos una serie de enunciados en Q. Primero, de los axiomas 3 y 5 podemos derivar el enunciado:

$$\forall x \forall z(z + x = 0 \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y) \wedge s(z + y) = 0)), \tag{D.1}$$

de aquí tenemos que:

$$\forall x(\exists z(z + x = 0) \rightarrow x = 0) \tag{D.2}$$

pertenece a Q, pues si suponemos que $z + x = 0$ y $x \neq 0$, entonces por (D.1) hay y tal que $x = s(y)$ y $s(z + y) = 0$, lo cual contradice al axioma 2. Ahora, por los axiomas 3 y 5, para cada $n \in \mathbb{N}$ el siguiente enunciado está en Q:

$$\forall x \forall z(z + x = \overline{n+1} \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y) \wedge s(z + y) = s(\overline{n}))), \tag{D.3}$$

de donde

$$\forall x(\exists z(z + x = \overline{n+1}) \rightarrow x = 0 \vee \exists y \exists w(x = s(y) \wedge w + y = \overline{n})) \tag{D.4}$$

es también enunciado de Q, pues si suponemos que $z + x = \overline{n+1}$ y que $x \neq 0$, entonces por (D.3) hay y tal que $x = s(y) \wedge s(z + y) = s(\overline{n})$ y por el axioma 1, $z + y = \overline{n}$. Por último, por inducción probaremos que para toda $n \in \mathbb{N}$, el enunciado:

$$\forall x(\exists y(y + x = \overline{n}) \rightarrow x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n}))$$

está en Q. El caso en el que $n = 0$ se tiene por (D.2). Supongamos que se tiene para n y que hay y tal que $y + x = \overline{n+1}$, entonces por (D.4), $x = 0$ o hay z y w tales que $x = s(z)$ y $w + z = \overline{n}$. Ahora, por hipótesis de inducción $z = 0$ o $z = \overline{1}$ o ... o $z = \overline{n}$ y como $x = s(z)$ entonces $x = 0$ o ... o $x = s(\overline{n})$.

e) De a) y d) tenemos que:

$$\forall x(\exists y(y + \overline{n} = \overline{n+1}) \wedge (\exists u(u + x = \overline{n}) \rightarrow \exists w(w + x = \overline{n+1}))) \tag{D.5}$$

está en Q. Ahora, usando inducción de una forma muy parecida a a), tenemos que el siguiente enunciado está en Q:

$$\forall x(s(x) + \overline{n} = x + \overline{n+1}).$$

De donde, por el axioma 3, también está en Q:

$$\forall z(z + \overline{n} = x \wedge z \neq 0 \rightarrow \exists w(w + \overline{n+1} = x)). \tag{D.6}$$

Y por lo tanto,

$$\forall x(\exists z(z + \overline{n} = x) \rightarrow x = \overline{n} \vee \exists w(w + \overline{n+1} = x)) \tag{D.7}$$

pertenece a Q, pues si suponemos que hay z tal que $z + \overline{n} = x$ y $x \neq \overline{n}$, entonces $z \neq 0$ (esto por a)) y por (D.6) hay w tal que $w + \overline{n+1} = x$. Por último veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x(\exists w(w + x = \overline{n}) \vee \exists w(w + \overline{n} = x))$$

pertenece a Q. Si $n = 0$ entonces el resultado se tiene por el axioma 4. Supongamos que esto es cierto para n, entonces:

i) Si hay y tal que $y + x = \overline{n}$, por (D.5) hay w tal que $w + x = \overline{n+1}$.

ii) Si hay y tal que $y + \overline{n} = x$, entonces por (D.7) $x = \overline{n}$ (y nos remitimos al caso i)) o hay w tal que $w + \overline{n+1} = x$.

Con esto queda demostrado que $R \subseteq Q$. □

Ya que hemos demostrado el teorema anterior, podemos aprovecharnos de que $R \subseteq Q$ para dar resultados de Q a partir de resultados de R. El primero de ellos requerirá una noción equivalente a la de recursividad propuesta por Julia Robinson en [Jul]. Para enunciar ésta, daremos unas cuantas definiciones. Sea r la función tal que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asocia su residuo cuadrático, es decir, el único p tal que para alguna $m \in \mathbb{N}$,

$$m^2 + p = n < (m+1)^2$$

Dadas dos funciones g y h, denotaremos por $g + h$ a la suma de éstas, es decir, $(g + h)(n) = g(n) + h(n)$. Además $g \circ h$ denotará la composición de g y h, y g^{-1} denotará a la función determinada por las siguientes condiciones:

i) $g^{-1}(n) = m$*, si m es el natural más pequeño tal que $g(m) = n$, y*

ii) $g^{-1}(n) = 0$*, si no existe tal m.*

Lo que hicimos fue definir una función inversa aún si la función original no es biyectiva. Ya con esto podemos dar la siguiente caracterización de funciones recursivas:

Proposición D.2. *Una función 1-aria es recursiva si y sólo si pertenece a todo conjunto de funciones $\mathscr{F}$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) $s, r \in \mathscr{F}$,

ii) *si* $g, h \in \mathscr{F}$*, entonces* $g + h, g \circ h \in \mathscr{F}$,

iii) *si* $g \in \mathscr{F}$ *y g es suprayectiva, entonces* $g^{-1} \in \mathscr{F}$.

La proposición nos está hablando de un conjunto BF-inductivo generado por las funciones suma, composición e inversa a partir del conjunto que contiene a las funciones s y r. Ahora sí, estamos listos para dar el primer resultado acerca de R.

Teorema D.3. *Toda función recursiva es representable en R. Asimismo, toda relación recursiva es representable en R.*

Demostración. Aplicaremos la caracterización anterior de funciones recursivas tomando a $\mathscr{F}$ como el conjunto de todas las funciones representables en R. Veamos que $\mathscr{F}$ satisface i)-iii) en la proposición D.2.

i) La función sucesor es representable en R por la fórmula $s(u) = v$. En el caso de la función r, la fórmula que la representa es:

$$\varphi(u, v) :\!= \exists x(x \leqslant u \wedge v \leqslant x + x \wedge u = (x \cdot x) + v).$$

Veamos que φ captura la idea de la función r. Por la definición de r, hay un natural m tal que $m^2 + r(n) = n < (m+1)^2$ y, por lo tanto, $m \leqslant n$ y $r(n) \leqslant 2 \cdot m$. Ahora, si n y p hacen verdadera a la fórmula φ de manera que hay m tal que $m \leqslant n$, $p \leqslant 2m$ y $n = m^2 + p$, entonces $n \leqslant m^2 + 2m$ y, por lo tanto, $n < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$. Ahora demostraremos que φ representa a r en R, es decir, demostraremos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall v(v = \overline{r(n)} \to \varphi(\overline{n}, v)), \text{ y} \tag{D.8}$$

$$\forall v(\varphi(\overline{n}, v) \to v = \overline{r(n)}) \tag{D.9}$$

son enunciados en R. De los axiomas de R podemos deducir fácilmente el enunciado $\overline{m} \leqslant \overline{n} \wedge \overline{r(n)} \leqslant \overline{m} + \overline{m} \wedge \overline{n} = \overline{m} \cdot \overline{m} + \overline{r(n)}$, de donde podemos deducir a su vez la ecuación (D.8). Por otro lado, de φ y los axiomas a), b) y d) obtenemos la fórmula

$$\forall v(\varphi(\overline{n}, v) \to (v \leqslant \overline{2 \cdot 0} \wedge \overline{n} = \overline{0^2} + v) \vee \ldots \vee (v \leqslant \overline{2 \cdot n} \wedge \overline{n} = \overline{n^2} + v)).$$

Y aplicando d) de nuevo obtenemos un enunciado de la forma:

$$\forall v(\varphi(\overline{n}, v) \to \psi), \tag{D.10}$$

donde ψ es la disyunción de fórmulas $v = \overline{p} \wedge \overline{n} = \overline{m^2 + p}$, con $m \leqslant n$ y $p \leqslant 2 \cdot m$. Ahora, como $r(n)$ está determinado de forma única como el número natural p tal que $n = m^2 + p$ y $p \leqslant 2 \cdot m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, entonces si $l \neq r(n)$, tenemos que $n \neq m^2 + l$ siempre que $l \leqslant 2 \cdot m$. Por lo tanto, por c), todas las fórmulas $\overline{n} \neq \overline{m^2 + l}$ con $l \neq r(n)$ y $l \leqslant 2 \cdot m$ están en R. Así, usando (D.10) concluimos que (D.9) pertenece a R, con lo que queda demostrada la representabilidad de r.

ii) Supongamos que g y h son funciones representables en R por las fórmulas φ y ψ respectivamente. Entonces la fórmula:

$$\exists x \exists y(v = x + y \wedge \varphi(u, x) \wedge \psi(u, y))$$

representa a la función $g + h$. Y la fórmula:

$$\exists z(\psi(u, z) \wedge \varphi(z, v))$$

representa a la función $g \circ h$.

iii) Sea g una función suprayectiva. Supongamos que es representable en R por la fórmula φ. Llamemos ψ a la siguiente fórmula:

$$\varphi(v, u) \wedge \forall y(\varphi(y, u) \rightarrow v \leqslant y).$$

Claramente ψ captura la idea de la función g^{-1} ya que ésta es suprayectiva. Veamos ahora que ψ representa a g^{-1}. Al igual que en el caso ii), esto lo haremos demostrando que los enunciados:

$$\forall v(\psi(\overline{n}, v) \rightarrow v = \overline{g^{-1}(n)}), \text{ y} \tag{D.11}$$

$$\forall v(v = \overline{g^{-1}(n)} \rightarrow \psi(\overline{n}, v)) \tag{D.12}$$

pertenecen a R. Por la definición de g^{-1} tenemos que $g(m) \neq n$ para todo $m < g^{-1}(n)$. Así, por c), todos los enunciados $\overline{g(m)} \neq \overline{n}$ con $m < \overline{g^{-1}(n)}$ están en R. Ahora, como para todo m el enunciado $\varphi(\overline{m}, v) \leftrightarrow v = \overline{g(m)}$ está en R, usando d), podemos derivar el enunciado:

$$\forall v(\varphi(v, \overline{n}) \wedge v \leqslant \overline{g^{-1}(n)} \rightarrow v = \overline{g^{-1}(n)}). \tag{D.13}$$

Además, como g es suprayectiva, $g(g^{-1}(n)) = n$ y por lo tanto la fórmula

$$\varphi(\overline{g^{-1}(n)}, \overline{n}) \tag{D.14}$$

está en R. Por otro lado, $\psi(\overline{n}, v) \rightarrow \varphi(v, \overline{n}) \wedge \forall v(\varphi(\overline{g^{-1}(n)}, \overline{n}) \rightarrow v \leqslant \overline{g^{-1}(n)})$ también pertenece a R. Este último enunciado junto con (D.13) y (D.14) implica (D.11). Para ver que (D.12) está en R, hay que observar que de e) y (D.13) obtenemos los enunciados:

$$\forall v(v \leqslant \overline{g^{-1}(n)} \vee \overline{g^{-1}(n)} \leqslant v), \text{ y}$$

$$\forall v(\varphi(v,\overline{n}) \wedge v \leqslant \overline{g^{-1}(n)} \to v = \overline{g^{-1}(n)}).$$

Y estos enunciados junto con (D.14) y a) nos dan:

$$\psi(\overline{n}, \overline{g^{-1}(n)}) \coloneqq \varphi(\overline{g^{-1}(n)}, \overline{n}) \wedge \forall v(\varphi(v,\overline{n}) \to \overline{g^{-1}(n)} \leqslant v),$$

lo cual implica (D.12). Con esto queda demostrado que ψ representa a g^{-1} en R.

De i), ii) y iii) tenemos que toda función recursiva es representable en R. Ahora, si P es una relación recursiva, entonces su función característica también lo es y por lo tanto dicha función es representable en R, lo cual implica que P es representable en R. □

Corolario D.4. *El resultado anterior es válido para cualquier extensión simple de R. En particular para Q.*

Este corolario es consecuencia inmediata del Teorema D.3, pues si T es una extensión simple de R, entonces las funciones representables en R también son representables en T. Lo mismo sucede en el caso de las relaciones.

Teorema D.5. *Tanto R como cualquier extensión simple consistente de R son teorías esencialmente indecidibles.*

Demostración. Como R es consistente y además toda función recursiva es representable en R, por el Corolario C.5, R es esencialmente indecidible. El mismo argumento es válido para cualquier extensión simple de R. □

Como en particular Q es una extensión simple consistente de R, Q es esencialmente indecidible.

Bibliografía

[Amor] Amor J.A., Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completud, 2^a *edición, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.*

[JHG] Adámek J., Herrlich H., Strecker G. E., Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats, http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.htm, 2004.

[Dick] Dickmann M.A., Large Infinitary Languages: Model Theory, Amsterdam: North-Holland, 1975.

[End] Enderton H.B., Una Introducción Matemática a la Lógica, 2^a *edición, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, 2004.*

[Hod] Hodges W., Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[Jech] Jech T., Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded, Springer, 2002.

[Jul] Robinson J., General Recursive Functions, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 1, pp.703-718, 1950.

[Keis] Keisler H.J., Model Theory for Infinitary Logic, Amsterdam: North-Holland, 1971.

[TMR] Tarski A., Mostowski A., Robinson R.M., Undecidable Theories, Amsterdam: North-Holland, 1953.

[Trak] Trakhtenbrot, B.A., On Recursive Inseparability, Dokl. Akad. Sci. SSSR, 88, pp. 953-6, 1953.

Glosario de Símbolos