UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE ALGUNAS FAMILIAS
DE q-POLINOMIOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

JUVENAL RUEDA PAZ

DIRECTOR DE TESIS:DR. NATIG ATAKISHIYEV MEKDIYEV

MÉXICO,D.F. JULIO, 2008

A mis padres Moisés y Teresa,
a mi familia.

Agradecimientos

En ocasiones es difícil encontrar las palabras que realmente signifiquen lo que uno siente. Quiero agradecer infinitamente:

A a mis padres por todo el apoyo incondicional que me han brindado desde siempre, por su amor y cariño. A toda mi familia por su comprensión y apoyo.

A Marisela por estos años compartidos, por sus palabras de aliento , así como también a su familia que siempre alentaron este esfuerzo.

A todos los amigos y compañeros del IMATE-Cuernavaca, con quienes compartí este tiempo.

A Natig Atakishiyev que desde el inicio me acepto como su estudiante de doctorado y de quien aprendí el gusto por las funciones especiales, por ser más que un tutor un gran amigo, por compartir sus experiencias. Gracias por confiar en mi.

Y a todos aquellos que de algún modo han tenido que ver con mis estudios desde la licenciatura, maestría y este periodo que es el doctorado.

A CONACyT y a DGEP por el apoyo otorgado a través de una beca para realizar mis estudios de doctorado.

Índice general

Introducción

La transformada de Fourier finita, definida en términos de la matriz unitaria de orden $N \times N$, cuyas entradas son de la forma:

$$A_{jk}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} jk\right), \quad i = \sqrt{-1}, \tag{1}$$

aparece en varios problemas matemáticos y ha sido estudiada en detalle (ver por ejemplo, [1]). En particular Schur [2] determinó los eigenvalores de $A^{(N)}$ para calcular la traza de $A^{(N)}$ o la suma cuadrática de Gauss [3]. Mehta [4] estudió los eigenvalores y eigenvectores de dicho operador y propuso un argumento simple mediante el cual nos permite recuperar los eigenvalores de $A^{(N)}$ desde su traza, también introdujo el conjunto de eigenvectores de $A^{(N)}$,

$$F_{jk}^{(N)} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+j)^2} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+j)\right), \tag{2}$$

donde $H_k(x)$ es el polinomio clásico de Hermite de grado k; asociados con los eigenvalores i^k, es decir,

$$\sum_{l=0}^{N-1} A_{jl}^{(N)} F_{lk}^{(N)} = i^k F_{jk}^{(N)}. \tag{3}$$

La fórmula (3) representa el análogo discreto del caso continuo donde las funciones de Hermite $H_k(x)\exp(-x^2/2)$ son sus propias transformadas de Fourier:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ixy - x^2/2} H_n(x) dx = i^n H_n(y) e^{-y^2/2}. \tag{4}$$

Cabe mencionar que Mehta hace uso de (4) para resolver el problema de eigenvalores (3).

Recientemente llegó a ser claro que la transformada integral de Fourier resulta ser muy útil en revelar relaciones cercanas entre varias funciones q-especiales [5]. Por ejemplo, los polinomios continuos q-Hermite $H_n(x|q)$ de

Rogers [6, 7] tienen la siguiente transformación característica [8] con respecto a la transformada integral de Fourier:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{ixy-x^2/2}H_n(\sin\kappa x|q)dx = i^n q^{n^2/4}h_n(\sinh\kappa y|q)e^{-y^2/2}, \qquad (5)$$

donde $q = e^{-2\kappa^2}$, $0 \leq \kappa < \infty$, y $h_n\left(x|q\right) := i^{-n}H_n\left(ix|q^{-1}\right)$ [9].

La pregunta que se presenta naturalmente es si es posible encontrar un análogo discreto de (5), asociado con el operador de la transformada finita de Fourier.

La motivación de este estudio viene del trabajo de Mehta [4], una vez que su técnica de construcción de eigenvectores $F_{jk}^{(N)}$ de la transformada finita de Fourier es comprendida, las q-extensiones para $F_{jk}^{(N)}$, parecen surgir naturalmente.

Los siguientes capítulos están estructurados de modo que proporcionan de modo natural los conocimientos para el desarrollo del problema de encontrar q-extensiones análogas al procedimiento de Mehta. Comenzaremos con algunos conocimientos preliminares, por ejemplo en el capítulo I, correspondiente a la transformada integral de Fourier y a algunas de sus propiedades. En el capítulo II se define la transformada discreta de Fourier, algunas veces llamada transformada finita de Fourier y se proporcionan algunas propiedades básicas de la misma, en el capítulo III trataremos una revisión sencilla de los polinomios clásicos de Hermite, ahí mismo veremos la relación de recurrencia de tres términos y la transformada integral de Fourier para dichos polinomios. El capítulo IV describe con detalle el procedimiento de Mehta mencionado con anterioridad, éste nos resultó muy útil para desarrollar el tema de nuestro interés, relacionar familias de q-polinomios mediante la transformada finita de Fourier. Para poder realizar dichas q-extensiones debemos primero considerar algunos conocimientos básicos de familias de q-polinomios continuos, para ello, en el capítulo V se definen los polinomios q-Hermite $H_n(z|q)$, q^{-1}-Hermite $h_n\left(z|q^{-1}\right)$, polinomios Rogers-Szegő $H_n(x;q)$ y polinomios Stieltjes-Wigert $S_n(x;q)$, así como también se presentan las correspondientes relaciones de recurrencia de tres términos, la transformada integral de Fourier y la relación de ortogonalidad para cada uno de ellos. Para terminar con los preliminares en el capítulo VI se describen los polinomios discretos q-Hermite de tipo I, para el caso $0 < q < 1$ y de tipo II para cuando $1 < q < \infty$.

El desarrollo del tema se describe en los capítulos siguientes, a saber, en el capítulo VII se muestra la relación que existe entre pares de familias de q-polinomios mediante las q-extensiones de la transformada finita de Fourier.

El capítulo VIII muestra como las q-extensiones de los eigenvectores de la transformadas finita de Fourier reproducen los eigenvectores de Mehta para los polinomios clásicos de Hermite cuando el parámetro q tiende a 1. Como veremos más adelante, los eigenvectores relacionan familias de q-polinomios con $0 < q < 1$ con las familias q^{-1}-polinomios, es decir, $1 < q < \infty$. Lo siguiente es preguntarnos si hay una familia de q-polinomios que bajo la transformada finita de Fourier deje fijo el parámetro q. El capítulo IX describe como debe ser dicha familia.

Objetivo

Relacionar las familias de q-polinomios con familias de q^{-1}-polinomios mediante la transformada discreta de Fourier, utilizando una técnica propuesta por Mehta [4]. Dichas familias de polinomios son las siguientes: los polinomios continuos q-Hermite de Rogers, $H_n(x|q)$, con los polinomios continuos q^{-1}-Hermite, $h_n(x|q)$; los polinomios Rogers-Szegö, $H_n(x;q)$ con los polinomios Stieltjes-Wigert, $h_n(x;q)$; así como también familias de q-polinomios discretos como los de tipo I y del tipo II.

Capítulo I
Transformada integral de Fourier.

§ 1. Definición y propiedades.

La transformada integral de Fourier (también llamada la transformada de Fourier compleja o exponencial), de la función $f(x)$, donde $f(x) \in \mathcal{L}^2(\Re)$ denotada por $F(\xi)$, está definida [10, 11] mediante:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx.$$

Para enfatizar la transformación podemos establecer la siguiente notación

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f(x); \xi],$$

la inversión de la transformada de Fourier se define como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi,$$

que en términos de notación se escribe

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\xi); x].$$

Las funciones $f(x)$ y $F(\xi)$ son llamadas par de transformadas de Fourier , y el conocer cualquiera de las dos funciones permite que la otra sea recuperada. La transformada integral de Fourier juega un papel muy importante en física matemática. En particular, en mecánica cuántica relaciona las coordenadas espaciales y el momentum.

La transformada integral de Fourier tiene las siguientes propiedades, las demostraciones de dichas propiedades se pueden ver en [11] entre otros libros de texto de análisis de Fourier.

1. Sean f y g dos funciones en $\mathcal{L}^2(\Re)$. Para a y b constantes arbitrarias.

$$\mathcal{F}\left[af(x)+bg(x);\xi\right]=a\mathcal{F}\left[f(x);\xi\right]+b\mathcal{F}\left[g(x);\xi\right],$$

   y

$$\mathcal{F}^{-1}\left[af(x)+bg(x);\xi\right]=a\mathcal{F}^{-1}\left[f(x);\xi\right]+b\mathcal{F}^{-1}\left[g(x);\xi\right].$$

2. Si $r>0$ es un entero, y $\lim_{|x|\to\infty} f^{(r)}(x)=0$ para $r=0,1,\ldots,N-1$ con $f^{(0)}=f(x)$ entonces,

$$\mathcal{F}\left[f^{(r)}(x);\xi\right]=(-i\xi)^r F(\xi),$$

   es la transformada de una derivada.

3. La Convolución de Fourier, $f*g$, de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ está definida por la integral

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

   que tiene las propiedades de conmutatividad $f*g=g*f$ y asociatividad $(f*g)*h=f*(g*h)$. Estas operaciones pueden establecerse en términos de la convolución

$$\mathcal{F}\left[(f*g)(x);\,\xi\right]=\mathcal{F}\left[f(x);\xi\right]\mathcal{F}\left[g(x);\xi\right].$$

Capítulo II
Transformada discreta de Fourier

Evidentemente, uno puede hacer uso de la transformada integral de Fourier siempre que la variable correspondiente (digamos, coordenada o momentum en mecánica cuántica) pertenezca a toda la linea real. Pero en varias aplicaciones, la variable de interés puede estar restringida a un intervalo finito. La mayoría de las funciones que vienen de la naturaleza son justo secuencias de números, por ejemplo, la dirección del viento o la medida de su velocidad, el brillo variable de las estrellas, datos de la precipitación de lluvia sobre una ciudad, población del mundo, etc. Podemos ver a las medidas como representantes de una función $f(t)$, usualmente tenemos muestras equiespaciadas. Así que tenemos que explotar la transformada discreta de Fourier. En las siguientes secciones recordaremos brevemente la definición y propiedades básicas de la transformada discreta de Fourier.

§ 1. Sumas Gaussianas

La transformada finita de Fourier está definida como una acción del operador (o equivalentemente, la matriz unitaria $N \times N$) cuyos elementos son

$$A_{jk}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} jk\right), \; 0 \leq j, k \leq N-1. \tag{II.1}$$

Dada una función compleja $f(k)$, uno puede calcular otra función $\tilde{f}(k)$,

$$\tilde{f}(k) := \sum_{k=0}^{N-1} A_{jk}^{(N)} f(k),$$

referida como la transformada finita de Fourier de la función $f(k)$. Aquellas

N funciones $f^{(l)}(k)$, $l = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, que satisfacen la relación

$$\sum_{k=0}^{(N)} A_{jk}^{(N)} f^{(l)}(k) = \lambda_l f^{(l)}(j), \tag{II.2}$$

son entonces los eigenvectores de la transformada finita de Fourier $A^{(N)}$, asociada con los eigenvalores λ_l. Como la cuarta potencia de $A^{(N)}$ es el operador identidad (o matriz identidad), solo hay cuatro valores distintos entre si que los eigenvalores λ_l's pueden tomar, son ± 1 y $\pm i$.

La transformada de Fourier finita tiene profundas raíces en las matemáticas puras y brevemente recordaremos aquí solo un aspecto de esta conexión cercana.

Es fácil evaluar la suma de los primeros N términos de la serie geométrica, $S_N(x) := \sum_{k=0}^{N-1} x^k$, ya que la forma característica de esta serie nos permite representar $S_N(x)$ en dos formas diferentes: como $S_N(x) = S_{N-1}(x) + x^{N-1}$ o como $S_N(x) = 1 + xS_{N-1}(x)$. Entonces igualando esas dos expresiones, deducimos que

$$S_N(x) = \frac{1 - x^N}{1 - x}.$$

Pero si se intenta tratar con la secuencia $\{x^{k^n}\}_{k=0}^{\infty}$, donde n es un entero mayor que uno, entonces la tarea de evaluar la suma $S_N^{(n)}(x) := \sum_{k=0}^{N-1} x^{k^n}$ llega a ser más difícil.

Por simplicidad discutiremos aquí como se trata el caso $n = 2$. La traza de la matriz $A_{jk}^{(N)}$ es igual a

$$tr\, \mathbf{A}^{(N)} := \sum_{K=0}^{N-1} A_{kk}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{K=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} k^2\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} S_N^{(2)}\left(e^{2\pi i/N}\right). \tag{II.3}$$

Por otro lado, si conocemos N eigenvalores λ_j de la matriz $A_{jk}^{(N)}$, entonces la traza de $A_{jk}^{(N)}$ es igual a la suma $\sum_{k=0}^{(N)} \lambda_k$ de esos eigenvalores. Así que de esta manera, expresamos la suma cuadrática $S_N^{(2)}\left(e^{2\pi i/N}\right)$ a través de los eigenvalores λ_j de la transformada finita de Fourier vista como matriz $\mathbf{A}^{(N)}$

Gauss ha estudiado y resuelto el problema de los eigenvalores de la transformada finita de Fourier. Él estableció que

$$S_N^{(2)}\left(e^{2\pi i/N}\right) = \begin{cases} \sqrt{N} & \text{si } N \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{N} & \text{si } N \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \tag{II.4}$$

donde N es un entero impar positivo. Observemos que las ecuaciones (II.3) y (II.4) nos proveen una lúcida ilustración de como es conveniente expresar algunas propiedades de la transformada finita de Fourier en términos de notaciones básicas de la teoría de números. Mas tarde Dirichlet, quien empleó una versión de la fórmula de la suma de Gauss, Cauchy quien ofreció una prueba basada en la fórmula de transformación de la clásica función Theta, Kronecker quien usó el contorno de integración y Schur quien proveyó una prueba elemental evaluando los determinantes de matrices cuyos elementos eran raíces de la unidad, todos ellos han contribuido esencialmente a un mejor entendimiento de esta íntima conexión entre la suma cuadrática de Gauss y la transformada finita de Fourier. Muchos de estos detalles históricos y matemáticos pueden ser encontrados en [1, 12, 13, 14]

§ 2. Definición .

Sea G el grupo aditivo $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, debido a que los elementos de éste, están definidos como clases de equivalencia ($\bmod N$). G está en correspondencia uno a uno con el conjunto $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, esto es, tomamos a los enteros y los colocamos en orden secuencial alrededor de un círculo, identificando el número 0 con N, le llamamos a éste el círculo finito.

Sea $\mathcal{L}^2(G)$ el espacio definido por:

$$\mathcal{L}^2(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\},$$

con producto interior de dimensión finita, esto es, el conjunto de funciones sobre G con valores complejos. $\mathcal{L}^2(G)$ es un espacio métrico del tipo de Hilbert, con producto interior $\langle f, g\rangle$ y norma $\|f\|$ definidos por:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in G} f(x)\overline{g}(x) \quad \text{para } f, g \in \mathcal{L}^2(G),$$

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2},$$

con la distancia entre f y $g \in \mathcal{L}^2(G)$ dada por $\|f-g\|$ con la diferencia usual.

La transformada discreta de Fourier o TDF de $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ está definida [14] como

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{F}f(x) = \widehat{f} = \sum_{y\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} f(y)\, e_x(-y) = \langle f, e_x\rangle,$$

donde

$$e_x(a) = \exp\left(\frac{2\pi iax}{N}\right),$$

y $x, a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

La convolución $f * g$, donde f, $g : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se define [14] mediante

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} f(y)\, g(x - y).$$

Para grupos finitos G, $\mathcal{L}(\mathrm{G}) = \mathcal{L}^2(\mathrm{G})$ = el espacio de todas las funciones $f : G \to \mathbb{C}$. La convolución lineal es uno de los cálculos más frecuentemente llevados a cabo en el procesamiento de señales digitales [15]

Usando las bases de $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ dadas por la función delta, vemos que la TDF también se puede representar como una matriz $F_{jk}^{(n)}$ $N \times N$ de la siguiente forma:

$$F_{jk}^{(N)} = \left(\omega^{-(j-1)(k-1)}\right)_{1 \leq j,k \leq N},$$

donde $\omega = \exp(2\pi i/N)$ es la raíz primitiva de la unidad.

§ 3. Propiedades de la transformada finita de Fourier.

Teorema: Propiedades básicas de la TDF sobre el círculo finito.

1. $\mathcal{F}_N : \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ es un mapeo uno a uno y sobre.

2. Convolución:

$$\mathcal{F}(f * g)(x) = \mathcal{F}F(x) \cdot \mathcal{F}g(x), \tag{II.5}$$

   para todo $x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

3. Inversión:

$$f(x) = \frac{1}{N}\mathcal{F}\mathcal{F}f(-x) = \frac{1}{N}\sum_{y \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})} \widehat{f}(y) \exp\left(\frac{2\pi ixy}{N}\right),$$

   Este hecho dice que los exponenciales $\{e_a | a = 0, \ldots, N-1\}$ proporcionan un conjunto ortogonal completo en $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ y que $f(x)$ tiene una expansión de Fourier generalizada en términos de esos exponenciales.

4. Teorema de Plancherel o igualdad de Parseval:

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{N}\langle \widehat{f}, \widehat{f}\rangle,$$

este dice que el mapeo lineal $N^{1/2}\mathbb{F}$ proporciona al espacio de Hilbert la isometría de $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)$ sobre si mismo.

Capítulo III
Polinomios de Hermite

Este capítulo provee aspectos básicos para los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$, tales como su función generadora, una representación explícita, la relación de recurrencia de tres términos, la relación de ortogonalidad y por último la transformada integral de Fourier, necesaria para poder comprender el argumento usado para calcular los eigenvectores de la transformada finita de Fourier. Algunos detalles se pueden ver en el apéndice A. La idea principal es emplear una analogía con esas relaciones clásicas para el proceso de construcción de sus q-extensiones particulares.

§ 1. Definición de los polinomios de Hermite.

Comenzaré con la función e^{-x^2} que tiene varias propiedades interesantes, por ejemplo, en esencia es su propia transformada de Fourier [16, 11], es decir,

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{2xit} dt. \tag{III.1}$$

La representación integral (III.1) puede ser diferenciada con respecto a x repetidamente, obteniendo

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{d x^n} = \frac{(2i)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n e^{2xit} dt. \tag{III.2}$$

Los polinomios de Hermite se definen [16], [17] por la fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{d x^n}. \tag{III.3}$$

Empleando (III.2), podemos escribir a los polinomios de Hermite como

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n e^{2xit} dt.$$

De estas dos definiciones, la fórmula de Rodrigues (III.3) para los polinomios de Hermite es la más socorrida para demostrar la propiedad de ortogonalidad y para calcular la transformada integral de Fourier de dichos polinomios .

§ 2. Función generadora.

Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ tienen la función generadora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, r^n = e^{2xr-r^2}, \tag{III.4}$$

se dice que e^{2xr-r^2} es la función generatriz de los polinomios de Hermite, vale decir, es aquella función de dos variables tal que su desarrollo de Taylor tiene como coeficientes a los polinomios de Hermite. A partir de (III.4) se pueden encontrar relaciones entre los polinomios de Hermite. La estrategia para hallarlas (para ésta o cualquier otra función generatriz de otros polinomios) es típica: diferenciar respecto a alguna de las variables y luego comparar potencias de r en los desarrollos de Taylor resultantes. Por ejemplo, tenemos la siguiente expresión para esos polinomios,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}\,, \tag{III.5}$$

donde el símbolo $\lfloor a \rfloor$ en (III.5) representa el entero más grande no mayor que a. La ecuación (III.5) puede ser obtenida escribiendo,

$$e^{2xr-r^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2x)^p}{p!} r^p \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} r^{2q},$$

e igualando los coeficientes para las potencias de r de cada lado

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, r^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2x)^p}{p!} r^p \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} r^{2q}, \tag{III.6}$$

obtenemos la ecuación (III.5). De la cual se sigue que

$$\frac{d^n H_n(x)}{dx^n} = 2^n\, n!. \tag{III.7}$$

§ 3. Relación de ortogonalidad.

La propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Hermite, se cumple en toda la linea real, a saber,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, \delta_{mn}, \tag{III.8}$$

esto se puede comprobar a partir de la definición (III.3) para los polinomios de Hermite, escribiendo esta integral como

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} H_m\,(x)\, dx,$$

suponiendo que $n > m$ e integrando por partes n veces, esto muestra que la integral es cero. Para el caso $n = m$, se utiliza la ecuación anterior integrando nuevamente por partes utilizando en el penúltimo paso la ecuación (III.7) y por último la ecuación (III.1) obteniendo así:

$$(-1)^n \int_{\infty}^{-\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} H_n\,(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_n\,(x)}{dx^n} dx = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

con lo cual se prueba la ecuación (III.8) y así que los polinomios de Hermite forman un sistema de polinomios ortogonales en toda la linea real.

Si definimos las funciones

$$\phi_n(t) = \frac{H_n(t) e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

es claro que $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\, \phi_m(t)\, dt = \delta_{nm}.$$

§ 4. Relación de recurrencia de tres términos.

Para encontrar la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Hermite, observemos que la función $F(x, r)$ definida como

$$F\,(x,\, r) = \exp\,(2xr - r^2),$$

satisface

$$\frac{\partial F}{\partial r} - (2x - 2r)\, F = 0,$$

la cual se puede resolver utilizando la expresión en serie para F usando (III.4), obteniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!}\, r^n \;-\; 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, r^n \;+\; 2n\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{n!}\, r^n \;=\; 0, \qquad \text{(III.9)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[H_{n+1}(x) \;-\; 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)\right] \frac{r^n}{n!} \;=\; 0, \qquad \text{(III.10)}$$

obteniendo así la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Hermite,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \qquad \text{(III.11)}$$

Otra relación se puede encontrar calculando la derivada parcial de $F(x, r)$ con respecto a x

$$\frac{\partial\left(e^{2xr-r^2}\right)}{\partial x} \;=\; 2r\, e^{2xr-r^2}, \qquad \text{(III.12)}$$

produciendo la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} \;-\; 2rF = 0, \qquad \text{(III.13)}$$

que se puede resolver sustituyendo la expresión en serie para F, usando (III.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{'}(x)}{n!}\, r^n - 2r\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, r^n = 0, \qquad \text{(III.14)}$$

de esta manera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[H_n^{'}(x) \;-\; 2n\, H_{n-1}(x)\right] \frac{r^n}{n!} = 0, \qquad \text{(III.15)}$$

por lo tanto

$$H_n^{'}(x) \;=\; 2n\, H_{n-1}(x). \qquad \text{(III.16)}$$

Si ahora se sustituye esta última ecuación en (III.11) se obtiene otra relación para los polinomios de Hermite,

$$H_{n+1}(x) - 2x\, H_n(x) + H_n^{'}(x) \;=\; 0. \qquad \text{(III.17)}$$

Ahora se puede ver más claramente la importancia de la función generadora (III.4), pues nos permite desarrollar la relación de recurrencia de tres términos (III.11), la fórmula de derivación (III.16) y así sucesivamente.

§ 5. Transformada de Fourier.

Otra de las propiedades de los polinomios de Hermite es que cuando se multiplican por la función de peso $e^{-x^2/2}$, son sus propias transformadas de Fourier [16],

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-x^2/2} H_n(x)\,dx = i^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y). \tag{III.18}$$

La demostración de (III.18) se sigue usando la representación de los polinomios de Hermite $H_n(x)$ como en (III.3) y considerando la función $u_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$, entonces si aplicamos la transformada integral de Fourier a $u_n(x)$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)e^{iky}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{iky+x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{ixy+x^2/2}\right)dx, \end{aligned} \tag{III.19}$$

luego como $\exp[ixy + x^2/2] = \exp[y^2/2]\exp[x+iy]^2/2$ y tomando en cuenta que si $z = x+iy$ entonces $dz/dx = -idz/dy$, de este modo la última igualdad en (III.19) se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{y^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{[x+iy]^2/2}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(-i)^n e^{-x^2}e^{y^2/2}\frac{d^n}{dy^n}e^{[x+iy]^2/2}\,dx, \\ &= (-i)^n e^{y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{[x+iy]^2/2}dx \\ &= (-i)^n e^{y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n}{dy^n}e^{-x^2/2+ixy-y^2/2}\,dx \\ &= (i)^n e^{y^2/2}\frac{d^n}{dy^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+ixy-y^2/2}dx \\ &= i^n\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2} \\ &= i^n\sqrt{2\pi}\,u_n(y)\end{aligned}$$

de esta forma, los polinomios de Hermite $H_n(x)$ junto con la función de peso $\exp[-x^2/2]$ son su propia transformada integral de Fourier.

Con esto terminamos la revisión de las propiedades básicas de los polinomios clásicos de Hermite, a continuación nos concentraremos en la transformada integral de Fourier y algunas de sus propiedades.

Capítulo IV

Los eigenvalores de Mehta

§ 1. Los eigenvectores de Mehta.

En el presente capítulo se explica de un modo breve un proceso para recuperar los eigenvectores de la transformada finita de Fourier desde la traza, vista como un operador matricial.

Mehta [4] (1987) propone el siguiente procedimiento para calcular los eigenvectores de la matriz $N \times N$ relacionada con la transformada finita de Fourier (1), Mehta prueba que

$$\sum_{l=1}^{N} A_{jl} F_{lk} = i^k F_{jk}, \tag{IV.1}$$

es decir, F_{jk} definido como en (2)es un eigenvector de A con el eigenvalor i^k.

La manera en la que Mehta prueba lo anterior, es como sigue. Sea

$$F_{jk}(N) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-(\pi/N)(pN+j)^2} H_k \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (pN+j) \right), \tag{IV.2}$$

donde $H_k(x)$ es el k-ésimo polinomio de Hermite.

Si consideramos a F_{jk} como una función de j periódica, con periodo n, entonces podemos tener una expansión en serie de Fourier,

$$F_{jk} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{lk} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} lj \right),$$

con el coeficiente de Fourier a_{lk} obtenido mediante,

$$a_{lk} = \frac{1}{n} \int_0^n e^{-(2\pi i/n)lx} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-(\pi/n)(pn+x)^2} H_k \left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}} (pn+x) \right) dx.$$

Luego, haciendo un cambio de variable $y = \sqrt{2\pi/n}(pn+x)$ y observando que $\exp(2\pi i l p) = 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_{lk} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{p\sqrt{2\pi n}}^{(p+1)\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2 - ily\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\right) H_k(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_k(y) \exp\left(-ily\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(-i)^k \exp\left(-\frac{\pi}{n}l^2\right) H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}}l\right). \end{aligned}$$

En el último paso se usa el hecho que el polinomio de Hermite $H_k(y)$ junto con la función de peso $e^{-y^2/2}$ es su propia transformada de Fourier [10]. Entonces F_{jk} puede escribirse como,

$$\begin{aligned} F_{jk} &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(\pi/n)l^2 + (2\pi i/n)lj} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}}l\right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} e^{(2\pi i/n)lj} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-(\pi/n)(pn+l)^2} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}}(pn+l)\right), \end{aligned}$$

dando como resultado la ecuación (IV.1). Dicha ecuación es válida para cualquier valor de $k \geq 0$. De ésta y de la simetría de (A_{jl}) deducimos que

$$\sum_{j=1}^{n} F_{jk} F_{jl} = 0, \text{ si } i^k \neq i^l, \tag{IV.3}$$

i.e. si $k \neq l \mod 4$, los eigenvectores correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales.

Capítulo V
Familias de q-polinomios continuos

Los sistemas de funciones q-especiales son los más adecuados para describir objetos finitos (i.e. objetos definidos sobre un intervalo finito). Por otro lado, sabemos que los sistemas mecánico-cuánticos requieren de una comprensión en las coordenadas espaciales y de momentum, relacionadas entre ellas mediante las transformadas integrales de Fourier, debido a esto, es de gran importancia el conocer como son las transformadas de Fourier, tanto integral como finita para algunas familias particulares de q-polinomios.

Ahora bien, como ya sabemos algunas propiedades de los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$ y de la transformada integral de Fourier, podemos revisar de manera rápida algunas propiedades de las familias de q-polinomios de Hermite, que según el esquema de Askey-Wilson son las primeras familias de q-polinomios. Las familias que trataremos en esta sección son q-polinomios continuos y veremos entre otras propiedades sus definiciones, relaciones de ortogonalidad y principalmente relaciones de recurrencia muy útiles para recuperar el enlace con los polinomios de Hermite clásicos. A partir de esta sección se empleará la notación estándar de la teoría de funciones especiales (Véase por ejemplo, [16, 18]). Más características de los polinomios continuos q-Hermite se pueden encontrar en el apéndice B.

§ 1. Definición de los polinomios continuos q-Hermite de Rogers.

En esta sección comenzaré con las representaciones explícitas de los polinomios continuos q-Hermite introducidos por Rogers en 1894, véase [6].

$$H_n(\sin \alpha x|q) := i^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q e^{i(n-2k)\alpha x}, \tag{V.1}$$

para los polinomios continuos q-Hermite $H_n(z|q)$, esta representación es válida para cualquier valor de la constante α y cuando $0 < q < 1$. Por otro lado, para el caso en que $1 < q$ se les llama polinomios q^{-1}-Hermite denotados por $h_n(z|q)$, donde

$$h_n(x|q) = i^{-n} H_n\left(ix|q^{-1}\right), \tag{V.2}$$

la representación explícita siguiente se obtiene utilizando la fórmula de inversión para el coeficiente q-binomial y es válida para cualquier constante arbitraria β.

$$h_n(\sinh \beta x|q) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} e^{(n-2k)\beta x}, \tag{V.3}$$

El símbolo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ en (V.1) es el coeficiente q-binomial definido como,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}}, \tag{V.4}$$

con el factorial q-shifted o algunas veces llamado q-factorial definido como en [19]

$$(a,q)_0 = 1,\ (a;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - aq^j\right), \quad n = 1,2,3\ldots,$$

y el q-factorial múltiple que usaremos para la definición siguiente está dado por:

$$(a_1,\ldots,a_r;q)_k := (a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k.$$

Como ya se mencionó, para definir a los polinomios q^{-1}-Hermite $h_n(z|q)$ es necesario recurrir a la fórmula de inversión del coeficiente q-binomial, la cual se representa a continuación,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} = q^{k(k-n)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Veamos ahora algunas de sus propiedades en las secciones siguientes.

§ 1.1. Funciones generadoras y la relación de recurrencia de tres términos.

Los polinomios de Rogers $H_n(x|q)$ tienen varias funciones generadoras, a saber,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x|q)}{(q;q)_n} t^n = \frac{1}{(e^{i\theta}t, e^{-i\theta}t; q)_\infty}, \; x = cos\theta; \quad \text{(V.5)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} H_n(x|q) t^n = \left(e^{i\theta}t; q\right)_\infty {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ e^{i\theta}t \end{matrix} \middle| q\,;\, e^{-i\theta}t \right), \; x = cos\theta,$$

donde ${}_1\phi_1$ es una serie básica hipergeométrica definida en el caso general como,

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| q\,;\, z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_k}{(b_1, \ldots, b_s; q)_k} (-1)^{(1+s-r)k} q^{(1+s-r)\binom{n}{2}} \frac{z^k}{(q;q)_k} \quad \text{(V.6)}$$

Haciendo uso de (V.5) que es la función generadora que más se emplea, se puede comprobar que los polinomios q-Hermite de Rogers satisfacen también una relación de recurrencia de tres términos, a saber,

$$H_{n+1}(x|q) = 2xH_n(x|q) - (1 - q^n)\, H_{n-1}(x|q), \; H_0(x|q) = 1, \quad \text{(V.7)}$$

y la forma explícita para los polinomios de Rogers de grado n en y se escribe como la ecuación (V.1).

§ 1.2. Relación de ortogonalidad

Los polinomios continuos q-Hermite cumplen la siguiente relación de ortogonalidad sobre el intervalo finito $[-1, 1]$, la cual fue demostrada en 1980 por Allaway en [7]. También se puede apreciar en [19, 20],

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{w(x|q)}{\sqrt{1-x^2}} H_m(x|q) H_n(x|q) = \frac{\delta_{mn}}{(q^{n+1}; q)_\infty},$$

donde

$$w(x|q) = \left| \left(e^{2i\theta}; q\right)_\infty \right|^2 = g(x,-1)g(x,1)g(x,q^{1/2})g(x,q^{-1/2}),$$

y para esta última ecuación

$$g(x,\alpha) = \Pi_{k=0}^{\infty} [1 - 2\alpha x q^k + \alpha^2 q^{2k}] = \left(\alpha e^{i\theta}, \alpha e^{-i\theta}; q\right)_\infty,$$

una forma explícita para la función de peso w está dada en [20], a saber,

$$w(x) = \Pi_{k=0}^{\infty}[1 + 2(1 - 2x^2)q^k + q^{2k}].$$

§ 1.3. La transformada integral de Fourier para los polinomios de Rogers.

Los polinomios q-Hermite $H_n(x|q)$ de Rogers [6, 7] tienen la siguiente propiedad con respecto a la transformada integral de Fourier [8]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist-s^2/2} H_n(\sin s\kappa|q) ds = i^n q^{n^2/4} h_n(\sinh \kappa t|q) e^{-t^2/2}, \qquad \text{(V.8)}$$

donde $q := \exp\left(-2\kappa^2\right)$, $0 \le \kappa < \infty$ y $h_n(x|q) = i^{-n} H_n\left(ix|q^{-1}\right)$.

Como los polinomios q^{-1}-Hermite están definidos por (V.2) [9], haciendo uso de las ecuaciones (III.5) y (III.11) se pueden ahora escribir en forma explícita los polinomios q^{-1}-Hermite,

$$h_n(\sinh y|q) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} e^{i(n-2k)y},, \qquad \text{(V.9)}$$

estos polinomios q^{-1}-Hermite cumplen, al igual que los polinomios clásicos de Hermite y los polinomios continuos q-Hermite, la relación de recurrencia de tres términos,

$$h_{n+1}(x|q) = 2x h_n(x|q) - q^{-n}\left(1 - q^n\right) h_{n-1}(x|q). \qquad \text{(V.10)}$$

La transformada integral de Fourier para los polinomios q^{-1}-Hermite $h_n(x|q)$ se puede calcular de manera sencilla aplicando la definición (V.3) y la transformada de Fourier para la función normal (III.1), así pues, la manera de obtenerla es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist-s^2/2} h_n(\sinh \kappa s|q) ds = \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist-s^2/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} e^{(n-2k)\kappa s} ds \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n-2k)\kappa s} e^{ist-s^2/2} ds \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[t-i(n-2k)\kappa]s-s^2/2} ds \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} e^{-[t-i(n-2k)\kappa]^2/2} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} e^{\frac{n}{4} 2\kappa^2} e^{-2kn\kappa^2} e^{2k^2\kappa^2} e^{i(n-2k)\kappa t} e^{-t^2/2} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q e^{i(n-2k)\kappa t} q^{-n^2/4} e^{-t^2/2} \\
= \quad & i^n q^{-n^2/4} H_n(\sin \kappa t|q) e^{-t^2/2}
\end{aligned}
$$

recordando que $q = \exp(-2\kappa^2)$ y la fórmula para los polinomios q-Hermite (V.1) se usan en los dos últimos pasos del desarrollo anterior. Esta fórmula fue derivada por N. M. Atakishiyev y Sh. Nagiyev en 1994, véase [8]. Resumiendo así la transformada integral de Fourier para los polinomios q^{-1}-Hermite:

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist-s^2/2} h_n(\sinh \kappa s|q) ds = i^n q^{-n^2/4} H_n(\sin \kappa t|q) e^{-t^2/2}. \tag{V.11}
$$

Como ya hemos visto en la sección 6, Mehta utiliza los polinomios de Hermite para la construcción de los eigenvectores para la transformada finita de Fourier y una de las condiciones para calcular los coeficientes en la expansión de Fourier es conocer precisamente la transformada integral de Fourier de dichos polinomios. Ahora que sabemos cual es la transformada integral de Fourier para los polinomios q-Hermite de Rogers, surge de modo natural la pregunta de si es posible calcular los eigenvectores de la transformada de Fourier discreta propuestos por Mehta, utilizando para ello los polinomios q-Hermite de Rogers en lugar de los polinomios clásicos de Hermite. Tales eigenvectores son calculados más adelante, siguiendo un proceso análogo al utilizado por Mehta.

§ 2. Definición de los polinomios Rogers-Szegő.

Heine [21] propuso la siguiente representación para los polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$p_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\sum_{k=0}^{\infty} f_{k,n}\sin(n+2k+1)\theta$$

donde $f_{0,n} = 1$ y

$$f_{k,n} = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})\cdots(n+k+\frac{1}{2})}.$$

Szegő [21] generalizó este resultado al conjunto de polinomios ultraesféricos $\{C_n^{\lambda}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y obtuvo

$$(\sin\theta)^{2\lambda-1}C_n^{\lambda}(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,n}^{\lambda}\sin(n+2k+1)\theta, \tag{V.12}$$

donde

$$f_{k,n}^{\lambda} = \frac{2^{2-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)(1-\lambda)_k(n+1)_k}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)k!(n+\lambda+1)_k}, \tag{V.13}$$

$\lambda > 0$, $\Gamma(\lambda)$ es la función Gamma usual y $(a)_n$ es definido por

$$(a)_0 = 1,\ \ (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)\ n = 1, 2, ...$$

La ecuación (V.12) es la expansión en series de Fourier de $(\sin\theta)^{2\lambda-1}$ $C_n^{\lambda}(\cos\theta)$. Debido a que para cada entero no negativo n, $f_{k,n}^{\lambda}$ es monótona para valores grandes de k y $\lim_{k\to\infty} f_{k,n}^{\lambda} = 0$, se sigue del análisis clásico de Fourier que (V.12) converge puntualmente en $(0,\pi)$ y uniformemente sobre $[\epsilon, \pi-\epsilon]$ para $0 < \epsilon < \pi/2$.

Se sabe [17] que $\{C_n^{\lambda}(\cos\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal sobre$[0,\pi]$ con la función de peso $(\sin\theta)^{2\lambda-1}$. Se han identificado una gran clase de conjuntos de polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación de la forma (V.12). Uno de esos conjuntos de polinomios resulta ser $\{R_n(x;q)\}_{n=0}^{\infty}$, definido por la relación de recurrencia de tres términos

$$\begin{cases} R_0(x;q) = 1,\ R_1(x;q) = 2x \\ R_{n+1}(x;q) = 2xR_n(x;q) - (1-q^n)R_{n-1}(x;q) \quad (n \geqq 1) \end{cases}$$

donde $|q| < 1$. De esta fórmula de tres términos se puede mostrar que

$$\lim_{q\to 1}\frac{R_n\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1-q)}\,x;q\right)}{((1-q)/2)^{n/2}} = H_n(x), \tag{V.14}$$

donde $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es el conjunto de polinomios clásicos de Hermite [17]. Por esta razón $\{R_n(x;q)\}_{n=0}^{\infty}$ es llamado el conjunto de polinomios q-Hermite. Esta familia de polinomios fue introducido por Rogers en 1894 [6].

La familia de polinomios q-análogos a los polinomios de Hermite sobre el círculo unitario son los polinomios Rogers-Szegö, definidos como [22, 23, 24, 25]

$$H_n\left(x;q\right) := \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \tag{V.15}$$

donde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ es el q-coeficiente binomial dado en (V.4).

§ 2.1. Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios Rogers-Szegő.

Los polinomios Rogers-Szegő $H_n(x;q)$ pueden obtenerse a partir de la siguiente relación de recurrencia de tres términos :

$$H_{n+1}(x;q) = (1+x)H_n(x;q) - (1-q^n)\,H_{n-1}(x;q). \tag{V.16}$$

§ 2.2. Relación de ortogonalidad para los polinomios Rogers-Szegő.

Los polinomios Rogers-Szegő satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad sobre el círculo unitario [24, 23],

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} H_m\left(-\frac{w^*}{\sqrt{q}};q\right) H_n\left(-\frac{w^*}{\sqrt{q}};q\right) \vartheta_3\left(\frac{\log w}{2i}\right)\frac{dw}{w} = \frac{(q;q)_m}{q^m}\delta_{mn},$$

donde ϑ_3 es la función theta, i.e.

$$\vartheta_3\left(z,q\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} e^{2ijz},$$

aquí $q = e^{\pi i \tau}$ con $\Im\,\tau > 0$, así que $|q| < 1$ para un τ dado. Los polinomios de Rogers-Szegő pueden ser expresados a través de los polinomios q-Hermite $H_n\left(x|q\right)$ [26] como

$$H_n\left(-e^{2ix};q\right) = i^{-n}e^{inx}H_n(\sin x|q),$$

también satisfacen la relación de ortogonalidad en la linea real

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\int_{-\infty}^{\infty} H_m\left(-q^{-1/2}e^{-2i\kappa x};q\right) H_n\left(-q^{-1/2}e^{2i\kappa x};q\right) e^{-x^2}dx = \frac{(q;q)_m}{q^m}\delta_{mn}.$$

§ 2.3. Transformada integral de Fourier para los polinomios Rogers-Szegő.

Como en el caso de los polinomios continuos q-Hermite (V.8) con $0 < q < 1$ y $1 < q < \infty$, los polinomios Rogers-Szegő $H_n(x;q)$ y los polinomios Stieltjes-Wigert $\tilde{S}_n(x;q)$ (definidos en la sección § 3), están ligados mediante la transformada integral de Fourier [27]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\alpha e^{2i\kappa x};q\right)e^{ixy-x^2/2}dx = \tilde{S}_n\left(\alpha e^{-2\kappa y};q\right)e^{-y^2/2}, \qquad \text{(V.17)}$$

donde α es un número complejo arbitrario.

Ahora vamos a calcular la transformada de Fourier para los polinomios Rogers-Szegő usando $H_n\left(\alpha e^{2i\kappa x};q\right)$ y su definición según la ecuación (V.15)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\alpha e^{2i\kappa x};q\right)e^{ixy-x^2/2}dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\alpha e^{2i\kappa x}\right)^k e^{ixy-x^2/2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \alpha^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\kappa xk+ixy}e^{-x^2/2}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \alpha^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2\kappa k+y)x}e^{-x^2/2}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \alpha^k e^{-(2\kappa k+y)^2/2} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \alpha^k e^{-2\kappa^2k^2}e^{-2\kappa yk}e^{-y^2/2} \\
&= e^{-y^2/2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k^2}\left(\alpha e^{-2\kappa y}\right)^k \\
&= e^{-y^2/2}\tilde{S}_n\left(\alpha e^{-2\kappa y};q\right).
\end{aligned}$$

esto prueba la ecuación (V.17), que como veremos más adelante, será una relación importante entre los polinomios Rogers-Szegő y los polinomios Stieltjes-Wigert para calcular las q-eigenfunciones de la transformada finita de Fourier.

Con esto finalizamos los conocimientos necesarios, con respecto a los polinomios Rogers-Szegő, para poder aplicar el procedimiento análogo al usado por Mehta. Lo que naturalmente sigue es, conocer algunas propiedades de los polinomios Stieltjes-Wigert que como hemos visto en esta sección se relacionan con los de Rogers-Szegő, lo principal es básicamente su transformada integral de Fourier y la relación de recurrencia de tres términos, esta última para poder establecer la relación con los polinomios clásicos cuando el parámetro q tiende al valor numérico 1, o dicho de otra manera, κ se desvanece.

§ 3. Definición y algunas propiedades de los polinomios Stieltjes-Wigert.

Los polinomios Stieltjes-Wigert se definen [18] como

$$S_n\left(x;\, q\right) \;=\; \frac{1}{(q;q)_n}\, {}_1\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n} \\ 0 \end{matrix}\,\middle|\, q\,;\, -q^{n+1}x\right). \tag{V.18}$$

Las funciones generadoras son

$$\frac{1}{(t;q)_\infty}\, {}_0\phi_1\left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}\,\middle|\, q\,;\, -qxt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(x;\, q\right) t^n.$$

$$(t;q)_\infty \cdot {}_0\,\phi_2\left(\begin{matrix} - \\ 0\,,\, t \end{matrix}\,\middle|\, q\,;\, -qxt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} S_n\left(x;\, q\right) t^n.$$

Usando la representación de los polinomios de Rogers-Szegő como en (V.15) y la fórmula de inversión para el coeficiente binomial (V.4), a saber,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} = q^{k(k-n)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q,$$

es evidente que

$$H_n\left(x; q^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} x^k.$$

Ahora podemos definir los polinomios Stieltjes-Wigert $\tilde{S}(x;q)$ en términos de los polinomios $H_n\left(x;q^{-1}\right)$ [19] como sigue

$$\tilde{S}_n(x;q) := (q;q)_n S_n(-x;q) \tag{V.19}$$

donde

$$(q;q)_n S_n(-x;q) := H_n\left(q^n x; q^{-1}\right) \tag{V.20}$$

esta última identidad se verifica usando (V.18) adecuadamente

$$S_n(-x;q) = \frac{1}{(q;q)_n}\, {}_1\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n} \\ 0 \end{matrix}\middle| q\,;\, q^{n+1}x\right), \tag{V.21}$$

donde la función serie hipergeométrica ${}_1\phi_1$ está dada por

$${}_1\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n} \\ 0 \end{matrix}\middle| q\,;\, q^{n+1}x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n};q)_k}{(0;q)_k}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\,\frac{q^{(n+1)k}x^k}{(q;q)_k},$$

y haciendo uso de la identidad para el q-factorial [19]

$$(q^{-n};q)_n = \frac{(q:q)_n}{(q:q)_{n-k}}(-1)^k\, q^{\binom{k}{2}-nk},$$

entonces

$$\begin{aligned}
S_n\left(-x;q\right) &= \frac{1}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q:q)_n}{(q:q)_{n-k}(q;q)_k}q^{2\binom{k}{2}+k}x^k \\
&= \frac{1}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q q^{k^2}x^k = \frac{1}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q q^{k^2-nk}q^{nk}x^k \\
&= \frac{1}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q q^{k(k-n)}(q^n x)^k \\
&= \frac{1}{(q;q)_n}H_n\left(q^n x \middle| q^{-1}\right),
\end{aligned}$$

con lo cual se prueba (V.20). Esta representación de los polinomios Stieltjes-Wigert nos será de gran utilidad al momento de calcular la transformada integral de Fourier como veremos más adelante.

§ 3.1. Relación de recurrencia para los polinomios Stieltjes-Wigert.

Estos polinomios también tienen las siguientes relaciones de recurrencia,

$$\begin{aligned}
-q^{2n+1}xS_n\left(x;\,q\right) &= \left(1-q^{n+1}\right)S_{n+1}\left(x;\,q\right) - \left[1+q-q^{n+1}\right]S_n\left(x;\,q\right) + \\
&\quad + qS_{n-1}\left(x;\,q\right),
\end{aligned}$$

$$S_n\left(x;\,q\right)-S_n\left(qx;\,q\right)=-qxS_{n-1}\left(q^2x;\,q\right),$$

a esta última ecuación se le llama el operador de cambio derecho y el operador de cambio izquierdo está dado por

$$S_n\left(x;\,q\right)-xS_n\left(qx;\,q\right)=\left(1-q^{n+1}\right)S_{n+1}\left(q^{-1}x;\,q\right).$$

§ 3.2. Relación de ortogonalidad para los polinomios Stieltjes-Wigert.

La propiedad de ortogonalidad también se cumple para los polinomios Stieltjes-Wigert y está dada por

$$\int_0^\infty \frac{S_m\left(x;\,q\right)S_n\left(x;\,q\right)}{\left(-x,-qx^{-1};q\right)_\infty}dx \;=\; -\frac{\ln q}{q^n}\frac{(q;q)_\infty}{(q;q)_n}\delta_{mn}.$$

§ 3.3. Transformada integral de Fourier para los polinomios Stieltjes-Wigert.

La transformada integral de Fourier para los polinomios Stieltjes-Wigert $\tilde{S}_n$ se puede calcular a partir de una representación de los polinomios Rogers-Szegő (V.20),

$$\tilde{S}_n(x;q)=H_n\left(q^nx;q^{-1}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n\left(\alpha q^{-n}e^{-2\kappa x};q\right) &= H_n\left(\alpha e^{-2\kappa x};q^{-1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{k(k-n)}\alpha^k e^{-2\kappa xk}.\end{aligned} \tag{V.22}$$

Ahora podemos calcular la transformada inversa de Fourier para los polinomios Stieltjes-Wigert con la función de peso $e^{-x^2/2}$ haciendo uso de la ecuación (V.22),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k}e^{-2i\kappa x};q\right)e^{-ixy-x^2}dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{k(k-n)}\alpha^k e^{-2\kappa xk}e^{-x^2/2}e^{ixy}dx\\
&=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{k(k-n)}\alpha^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x^2}{2}+2\kappa xk\right)}e^{ixy}dx\\
&=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{k(k-n)}\alpha^k e^{2\kappa^2k^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+2\kappa k)^2/2}e^{ixy}dx, \quad \text{(V.23)}
\end{aligned}$$

recordando que $q=e^{-2\kappa^2}$ y haciendo el cambio de variable $z=x+2\kappa k$ entonces la última igualdad de la ecuación (V.23) se expresa ahora de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{-nk}\alpha^k e^{-i2\kappa yk}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izy-z^2/2}dz\\
&=e^{-y^2/2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\alpha q^{-n}e^{-2i\kappa y}\right)^k\\
&=e^{-y^2/2}H_n\left(\alpha q^{-n}e^{-2i\kappa y};q\right). \quad \text{(V.24)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la transformada inversa de Fourier para los polinomios Stieltjes-Wigert con su respectiva función de peso $e^{-x^2/2}$ está dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k}e^{-2i\kappa x};q\right)e^{-ixy-x^2}dx=e^{-y^2/2}H_n(\alpha q^{-n}e^{-2i\kappa y};q), \quad \text{(V.25)}$$

donde $H_n(x;q)$ representa a los polinomios Stieltjes-Wigert.

De esta manera hemos revisado familias de q-polinomios que están definidas en el continuo, el siguiente capítulo muestra un par de familias relacionadas entre si mediante la transformada finita de Fourier.

Del mismo modo en que los polinomios q-Hermite y los polinomios q^{-1}-Hermite son unos la transformada integral de Fourier de los otros, y que los polinomios de Rogers-Szegő y los polinomios Stieltjes-Wigert satisfacen esta misma relación mediante la transformada integral de Fourier. Se puede pensar en calcular q-extensiones de los eigenvectores de Mehta utilizando para ello ahora este par de familias.

Capítulo VI

Familias de q-polinomios discretos

§ 1. Polinomios discretos q-Hermite de tipo I.

La función generadora para los polinomios discretos q-Hermite esta dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x;q)}{(q;q)_n} t^n = \frac{(t^2;q^2)_\infty}{(xt;q)_\infty},$$

a partir de la cual se puede calcular su forma explícita llamado polinomio discreto q-Hermite $h_n(x;q)$ de tipo I con $0 < q < 1$

$$h_n(x;q) := x^n \, {}_2\phi_0 \left(\left. \begin{matrix} q^{-n}, q^{1-n} \\ - \end{matrix} \right| q^2; \frac{q^{2n-1}}{x^2} \right) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)}(q) x^{n-2k}. \tag{VI.1}$$

Donde los coeficientes $c_k^{(n)}(q)$ en la anterior serie de potencias de x son iguales a

$$c_k^{(n)}(q) = (-1)^k q^{k(2n-k)} \frac{(q^{-n};q)_{2k}}{(q^2;q^2)_k}. \tag{VI.2}$$

§ 1.1. Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios discretos q-Hermite de tipo I.

Los polinomios discretos q-Hermite de tipo I, satisfacen en forma análoga a los polinomios clásicos de Hermite, una relación de recurrencia de tres términos

$$h_{n+1}(x;q) = x h_n(x;q) - q^{n-1} (1 - q^n) h_{n-1}(x;q), \tag{VI.3}$$

Las relaciones de recurrencia de tres términos para los polinomios discretos de Hermite de tipo I (VI.3) y de tipo II (VI.13), servirán para conectar las q-extensiones obtenidas de la aplicación del procedimiento de Mehta a los polinomios discretos de tipo I con los eigenvectores clásicos de Hermite.

§ 1.2. Relación de ortogonalidad para los polinomios discretos q-Hermite de tipo I.

Los polinomios discretos de tipo I, $h_n(x;q)$ forman un sistema de q-polinomios de Hermite que son ortogonales en un subconjunto compacto de la linea real,

$$\int_{-1}^{1}(qx,-qx;q)_\infty h_m(x;q)h_n(x;q)d_qx=(1-q)(q;q)_n(q,-1,-q;q)_\infty q^{\binom{n}{2}}\delta_{mn}.$$

Donde la q-integral está definida por

$$\int_0^z f(t)d_qt := z(1-q)\sum_0^\infty f\left(q^n z\right)q^n.$$

Esta definición para la q-integral se debe a J. Thomae y F.H. Jackson [19].

§ 1.3. Transformada integral de Fourier de los polinomios discretos q-Hermite de tipo I.

Un vistazo a (VI.1) y a (VI.12) muestra que la expansión explícita para los polinomios discretos $q-$Hermite de tipo II, $\tilde{h}_n(x;q)$(definidos en la siguiente sección) en potencias de x difiere de $h_n(x;q)$ solo por el factor extra $q^{k(k+2-2n)}$ en los coeficientes de expansión de los q-polinomios formados. Como verá más abajo, esta circunstancia simplifica ligeramente nuestro intento de evaluar la integral de la transformada de Fourier entre los polinomios q-Hermite discretos $h_n(x;q)$ y $\tilde{h}_n(x;q)$. De hecho, ahora evaluaré la integral

$$I_n(t;q) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\alpha e^{i\kappa s};q)e^{ist-t^2/2}ds, \tag{VI.4}$$

donde α es un número complejo arbitrario. De la definición de (VI.1) es claro que

$$\begin{aligned}
I_n(t;q): &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\alpha e^{i\kappa s};q)e^{ist-t^2/2}ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)}(q)\,\alpha^{n-2k}e^{(i\kappa s)(n-2k)}e^{ist-s^2/2}ds \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)}(q)\,\alpha^{n-2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[t+\kappa(n-2k)]s-s^2/2}ds \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} \alpha^{n-2k}c_k^{(n)}(q)e^{-\frac{1}{2}[t+\kappa(n-2k)]^2}.
\end{aligned} \tag{VI.5}$$

La expresión de la última linea en (VI.4) se sigue de una propiedad bien conocida de la función exponencial $\exp(-x^2/2)$, que es su propia transformada de Fourier. Un fácil cálculo usando (VI.12) muestra que

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}[t+\kappa(n-2k)]^2} &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} e^{-\frac{\kappa^2}{2}(n-2k)^2} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} e^{-\frac{\kappa^2}{2}(n-2k)^2} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)}\, e^{-\frac{\kappa^2}{2}(n-2k)^2} \end{aligned} \tag{VI.6}$$

sustituyendo $q = e^{-2\kappa^2}$ en (VI.6) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}[t+\kappa(n-2k)]^2} &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} q^{\frac{(n-2k)^2}{4}} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} q^{k(k-n)+\frac{n^2}{4}}, \end{aligned} \tag{VI.7}$$

multiplicando la ecuación (VI.7) por 1's de la forma

$$q^{n-n} q^{nk-nk} q^{2k-2k} q^{\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{2}},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}[t+\kappa(n-2k)]^2} &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} q^{k(k-n)+\frac{n^2}{4}}\, q^{n-n} q^{nk-nk} q^{2k-2k} q^{\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} q^{k(k+2-2n)} q^{(3n^2-4n)/4} q^{(1-\frac{n}{2})(n-2k)}, \end{aligned} \tag{VI.8}$$

de esta forma

$$e^{-\frac{1}{2}[t+\kappa(n-2k)]^2} = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\kappa(n-2k)} q^{k(k+2-2n)} q^{(3n^2-4n)/4} q^{(1-\frac{n}{2})(n-2k)}, \tag{VI.9}$$

que sustituida en (VI.5) queda como

$$\begin{aligned} I_n(t;q) &= q^{n(3n-4)/4} e^{-t^2/2} \sum_{k=0}^{[n/2]} q^{k(k+2-2n)} c_k^{(n)}(q) \left(\alpha q^{1-\frac{n}{2}} e^{-t\kappa}\right)^{n-2k} \\ &= q^{n(3n-4)/4} e^{-t^2/2} \tilde{h}_n\left(\alpha q^{1-\frac{n}{2}} e^{-t\kappa}; q\right), \end{aligned} \tag{VI.10}$$

con lo cual se prueba que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\alpha e^{i\kappa s}; q) e^{ist-t^2/2} ds = q^{n(3n-4)/4}\, \tilde{h}_n\left(\alpha q^{1-\frac{n}{2}} e^{-t\kappa}; q\right) e^{-t^2/2}. \tag{VI.11}$$

Es decir, la transformada integral de Fourier para los polinomios discretos q-Hermite de tipo I son los polinomios discretos q-Hermite de tipo II, que se verán en la siguiente sección.

§ 2. Polinomios discretos q-Hermite de tipo II

§ 2.1. Función generadora y definición.

La función generadora para los polinomios discretos q-Hermite de tipo II se debe a la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} \tilde{h}_n(x;q) t^n,$$

a partir de la cual se desprende una representación explícita para dichos polinomios. Para considerar los valores $1 < q < \infty$, se prueba convenientemente en [9], similar a otros casos de q-polinomios, introducir los polinomios discretos q-Hermite de tipo II, $\tilde{h}_n(x;q)$,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n(x;q) : &= i^{-n} h_n\left(ix; q^{-1}\right) = x^n \, {}_2\phi_1 \left(\left. \begin{matrix} q^{-n}, q^{1-n} \\ 0 \end{matrix} \right| q^2; -\frac{q^2}{x^2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} q^{k(k+2-2n)} c_k^{(n)}(q) x^{n-2k} \end{aligned} \tag{VI.12}$$

§ 2.2. Relación de recurrencia para los polinomios discretos q-Hermite de tipo II.

Como ya hemos visto, los polinomios discretos de tipo I satisfacen una relación de recurrencia de tres términos, ahora bien, de la ecuación (VI.3) y de los primeros dos miembros de la ecuación (VI.12), podemos deducir la relación de recurrencia para los polinomios discretos q-Hermite de tipo II, a saber,

$$\tilde{h}_{n+1}(x;q) = x\tilde{h}_n(x;q) - q^{-2n+1}\left(1 - q^n\right) \tilde{h}_n(x;q). \tag{VI.13}$$

.

§ 2.3. Relación de ortogonalidad.

Los polinomios discretos q-Hermite de tipo II, al igual que los anteriores sistemas de q-polinomios, satisfacen también una relación de ortogonalidad sobre la linea real.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\tilde{h}_m\left(cq^k;q\right)\tilde{h}_n\left(cq^k;q\right)+\tilde{h}_m\left(-cq^k;q\right)\tilde{h}_n\left(-cq^k;q\right)\right]w\left(cq^k;q\right)q^k$$
$$= \quad 2\frac{\left(q^2,-c^2q,-c^{-2}q;q^2\right)_\infty}{\left(q,-c^2,-c^{-2}q^2;q^2\right)_\infty}\frac{(q;q)_n}{q^{n^2}}\delta_{mn},\ c>0,$$

donde

$$w(x;q)=\frac{1}{(ix,-ix;q)_\infty}=\frac{1}{\left(-x^2;q^2\right)_\infty}$$

Con esta sección se finalizan los preliminares acerca de las familias de q-polinomios de Hermite, ya sea en el caso continuo, como los q-polinomios de Rogers, los polinomios Rogers-Szegő y los polinomios Stieltjes-Wigert, o en el caso discreto, como los polinomios discretos q-Hermite de tipo I y de tipo II. Lo que sigue es aplicar un procedimiento análogo al utilizado por Mehta en la sección IV para encontrar eigenfunciones de la transformada finita de Fourier, pero en esta ocasión se utilizarán las familias de q-polinomios para construir dichas eigenfunciones.

Capítulo VII

Familias de q-polinomios relacionadas mediante la transformada finita de Fourier

Toda la teoría anterior nos sugiere que es posible encontrar eigenfunciones para la transformada finita de Fourier usando q-polinomios de Hermite, dada su interrelación mediante la transformada integral de Fourier. Las siguientes subsecciones demuestran que dichos q-polinomios son adecuados para ello. Logrando con esto dar una formulación precisa hacia la versión finita de mecánica cuántica.

§ 1. Los polinomios continuos q-Hermite $H_n(x|q)$ de Rogers.

En esta sección comenzaré con las representaciones explícitas para los polinomios continuos q-Hermite $H_n(z|q)$ (V.1) y q^{-1}-Hermite $h_n(z|q)$ (V.9).

Definiremos una q-extensión de los eigenvectores de Mehta $F_{jk}^{(N)}$ (IV.2), utilizando los polinomios continuos q-Hermite, de la forma

$$F_{jk}^{(N)}(q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+j)^2} H_k \left(\sin \sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\kappa(nN+j)\big|q\right), \qquad \text{(VII.1)}$$

donde $0 < q := \exp(-2\kappa^2) < 1$. Entonces de (VII.1) se sigue que para el caso en que $1 < q$, la q-extensión

$$F_{jk}^{(N)}(q^{-1}) := i^k \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(mN+j)^2} h_k \left(\sinh \sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\kappa(mN+j)\middle|q\right), \quad \text{(VII.2)}$$

extiende $F_{jk}^{(N)}(q)$ a los valores del parámetro q en el intervalo $(1,\infty)$.

De las definiciones de (VII.1) y (VII.2) es claro que ambos $F_{jk}^{(N)}(q)$ y $F_{jk}^{(N)}(q^{-1})$ son funciones periódicas en j con periodo N, así que podemos escribir la expansión de Fourier

$$F_{jk}^{(N)}(q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{lk}^{(N)}(q) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} lj\right) \quad \text{(VII.3)}$$

con los coeficientes de expansión

$$a_{lk}^{(N)}(q) = \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} F_{xk}^{(N)}(q)\, dx\,. \quad \text{(VII.4)}$$

Una forma explícita de los coeficientes $a_{lk}^{(N)}(q)$ es evaluada exactamente según Mehta [4], excepto que el polinomio clásico de Hermite $H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+j)\right)$, debe ser reemplazado por el polinomio q-Hermite $H_k\left(\sin\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+j)|q\right)$.

Ahora calcularé dichos coeficientes

$$\begin{aligned}
a_{lk}^{(N)}(q) &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} F_{xk}^{(N)}(q)dx = \\
&= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} H_k\left(\sin\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\kappa(nN+x)\middle|q\right) dx \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} H_k\left(\sin\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\kappa(nN+x)\middle|q\right) dx,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)$, cambiando los límites de integración correspondientes, y recordando que $e^{2\pi i l n} = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
a_{lk}^{(N)}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\sqrt{2\pi N}}^{(n+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{1}{2}y^2 - ily\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} H_k(\sin y\kappa|q)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 - ily\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} H_k(\sin y\kappa|q)dy, \quad \text{(VII.5)}
\end{aligned}$$

usando la transformada integral de Fourier para los polinomios q-Hermite $H_n(x|q)$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist-s^2/2}H_n(\sin s\kappa|q)ds = i^n q^{n^2/4}h_n(\sinh \kappa t|q)e^{-t^2/2},$$

entonces la ecuación (VII.5) queda como

$$a_{lk}^{(N)}(q) = \frac{1}{\sqrt{N}}i^k q^{k^2/4}h_k\left(\sinh\left(-\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}l\kappa\right)|q\right)e^{-l^2\frac{\pi}{N}}, \tag{VII.6}$$

por lo tanto

$$a_{lk}^{(N)} = \frac{(-i)^k}{\sqrt{N}}q^{k^2/4}h_k\left(\sinh\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}l\kappa\middle|q\right)e^{-l^2\frac{\pi}{N}}, \tag{VII.7}$$

sustituyendo en (VII.3) se obtiene

$$F_{jk}^{(N)}(q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N}lj}\frac{(-i)^k}{\sqrt{N}}q^{k^2/4}h_k\left(\sinh\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}l\kappa\middle|q\right)e^{-l^2\frac{\pi}{N}},$$

$$F_{jk}^{(N)}(q) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{N}}q^{k^2/4}\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N}lj-l^2\frac{\pi}{N}}h_k\left(\sinh\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}l\kappa\middle|q\right), \tag{VII.8}$$

haciendo $l = nN+m$, entonces $e^{\frac{2\pi i}{N}jl} = e^{\frac{2\pi i}{N}j(nN+m)} = e^{\frac{2\pi i}{N}jm}$, sustituyendo en la ecuación anterior utilizando en el último paso (VII.2), se obtiene

$$\begin{aligned} & F_{jk}^{(N)}(q) = \\ = \; & \frac{(-i)^k}{\sqrt{N}}q^{k^2/4}\sum_{m=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}jm}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2}\times \\ & \times h_k\left(\sinh\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}(nN+m)\kappa|q\right) \\ = \; & (-1)^k q^{k^2/4}\sum_{m=0}^{N-1}A_{jm}^{(N)}F_{mk}^{(N)}\left(q^{-1}\right). \end{aligned} \tag{VII.9}$$

De forma similar, cuando $1 < q < \infty$ se puede escribir la expansión de Fourier

$$F_{jk}^{(N)}\left(q^{-1}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{lk}^{(N)}\left(q^{-1}\right)e^{\frac{2\pi i}{N}lj} \tag{VII.10}$$

con los coeficientes de expansión

$$\begin{aligned} b_{lk}^{(N)}\left(q^{-1}\right) &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx}F_{xk}^{(N)}\left(q^{-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}q^{-k^2/4}H_k\left(\sin\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}l\kappa|\,q\right)e^{-\frac{\pi}{N}l^2}, \end{aligned} \tag{VII.11}$$

consecuentemente, sustituyendo (VII.1) y (VII.11) en (VII.10), se obtiene que

$$F_{jk}^{(N)}\left(q^{-1}\right) = q^{-k^2/4}\sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} F_{mk}^{(N)}(q). \tag{VII.12}$$

Las relaciones (VII.9) y (VII.12), escritas como:

$$\sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} F_{mk}^{(N)}\left(q^{-1}\right) = (-1)^k\, q^{-k^2/4} F_{jk}^{(N)}(q), \tag{VII.13}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} F_{mk}^{(N)}(q) = q^{k^2/4} F_{jk}^{(N)}\left(q^{-1}\right), \tag{VII.14}$$

respectivamente son q-extensiones del problema de eigenvalores (3). Estas relaciones describen la propiedad de transformación de los polinomios q-Hermite $H_n(x|q)$ de Rogers con respecto al operador de la transformada finita de Fourier [28] . De las relaciones (VII.14) y (VII.13), las funciones $F_{jk}^{N}(q)$ y $F_{jk}^{(N)}\left(q^{-1}\right)$ son eigenvectores del operador $\left\{A^{(N)}\right\}^2$, asociados con los eigenvalores $(-1)^k$, dicho operador representa el operador de reflección.

§ 2. Los polinomios Rogers-Szegő y los polinomios Stieltjes-Wigert.

En esta sección consideraré otra pareja de familias de q-polinomios relacionadas por la transformación $q \to q^{-1}$.

Los polinomios Rogers-Szegő $H_n(x;q)$ están definidos como

$$H_n(x;q) := \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \tag{VII.15}$$

De la fórmula de inversión $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{q^{-1}} = q^{k(k-n)}\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ tenemos que se pueden expandir estos polinomios al intervalo $1 < q$ y los expresamos como sigue:

$$H_n\left(x;q^{-1}\right) := \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} x^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} x^k, \tag{VII.16}$$

luego, utilizando (V.19) y (V.20) tenemos representación de los polinomios Stieltjes-Wigert $\tilde{S}_n(x;q)$ en términos de $H_n\left(x;q^{-1}\right)$

$$\tilde{S}_n(x;q) = (q;q)_n S_n(-x;q) := H_n\left(q^n x; q^{-1}\right). \tag{VII.17}$$

Podemos ahora definir una q-extensión de los eigenvectores de Mehta $F_{jk}^{(N)}$ de la forma

$$F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+j)^2} H_k\left(\alpha e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+j)}\,;\,q\right), \qquad \text{(VII.18)}$$

donde $0 < q = e^{-2\kappa^2} < 1$, y $H_k(x;q)$ es el polinomio de Rogers-Szegő de grado k, entonces se sigue que

$$F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q^{-1}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+j)^2} \tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k} e^{-2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+j)};\,q\right), \quad \text{(VII.19)}$$

extiende $F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q)$ a los valores del parámetro q en el intervalo $(1,\infty)$

Debido a la periodicidad de $F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q)$ en j, podemos escribir la expansión de Fourier como

$$F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{lk}^{(N)}(\alpha;q)\exp\left(\frac{2\pi}{N}lj\right), \qquad \text{(VII.20)}$$

con los coeficientes de expansión

$$\begin{aligned} a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} F_{xk}^{(N)}(\alpha\,;q)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{S}_k\left(\alpha e^{2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa j}\,;q\right) e^{-\frac{\pi}{N}l^2}, \end{aligned} \qquad \text{(VII.21)}$$

Los siguientes pasos son para probar la ecuación (VII.21)

$$\begin{aligned} & a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) = \\ = \ & \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} F_{xk}^{(N)}(\alpha\,;q)dx \\ = \ & \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} H_k\left(\alpha e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+x)};q\right)dx \\ = \ & \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} H_k\left(\alpha e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+x)};q\right)dx, \end{aligned} \qquad \text{(VII.22)}$$

haciendo el cambio de variable $y=\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)$, y cambiando los límites de integración en la ecuación (VII.22) obtenemos

$$\begin{aligned}
a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n\sqrt{2\pi N}}^{(n+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}ly-y^2/2}\times\\
&\quad\times H_k\left(\alpha e^{2i\kappa y};q\right)dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}ly-y^2/2}H_k\left(\alpha e^{2i\kappa y};q\right)dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-\left(-l\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)^2/2}\tilde{S}_k\left(\alpha e^{-2\kappa\left(-l\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)};q\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-\frac{\pi}{N}l^2}\tilde{S}_k\left(\alpha e^{2\kappa\left(l\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)};q\right),
\end{aligned}\tag{VII.23}$$

con lo cual queda probada (VII.21). Luego sustituyendo (VII.21) en (VII.20)

$$\begin{aligned}
F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{S}_k\left(\alpha e^{2\kappa\left(l\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)};q\right)e^{-\frac{\pi}{N}l^2}e^{\frac{2\pi}{N}lj}\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\pi i}{N}lj-\frac{\pi}{N}l^2}\tilde{S}_k\left(\alpha e^{2\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\,l};q\right),
\end{aligned}$$

haciendo $l=-l'$ y $l'=nN+m$ obtenemos

$$\begin{aligned}
F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{2\pi i}{N}(nN+m)j-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2}\times\\
&\quad\times\tilde{S}_k\left(\alpha e^{-2\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\,(nM+m)};q\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}mj}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2}\times\\
&\quad\times\tilde{S}_k\left(\alpha e^{-2\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+m)};q\right)
\end{aligned}\tag{VII.24}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\left(A^{(N)}\right)^{-1}_{jm}F_{mk}^{(N)}\left(\alpha q^k\,;q^{-1}\right),\tag{VII.25}$$

considerando solo la última igualdad en (VII.25) podemos escribir el eigenvector $F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q)$para los polinomios Rogers-Szegő como

$$F_{jk}^{(N)}(\alpha\,;q) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(A^{(N)}\right)^{-1}_{jm} F_{mk}^{(N)}\left(\alpha q^k\,;q^{-1}\right), \tag{VII.26}$$

donde $\left(A^{(N)}\right)^{-1}$ es el operador inverso con respecto a $\left(A^{(N)}\right)$.

De manera similar, cuando $1 < q < \infty$ podemos expandir $F_{jk}^{(N)}\left(\alpha; q^{-1}\right)$ en serie de Fourier de la forma,

$$F_{jk}^{(N)}\left(\alpha; q^{-1}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{lk}^{(N)}(\alpha, q) e^{\frac{2\pi i}{N} lj}, \tag{VII.27}$$

cuyos coeficientes de expansión se calculan como,

$$b_{lk}^{(N)}(\alpha; q) = \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N} lx} F_{xk}^{(N)}\left(\alpha; q^{-1}\right) dx. \tag{VII.28}$$

La expresión concreta de dichos coeficientes se obtiene sustituyendo la ecuación (VII.19) en (VII.28),

$$\begin{aligned} b_{lk}^{(N)}(\alpha; q) &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N} lx} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} \tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k} e^{-2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+x)}; q\right) dx \\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N} lx} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} \tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k} e^{-2\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+x)}; q\right) dx \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}(Nn + x)$, entonces esta última ecuación se puede escribir de la forma,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\sqrt{2\pi N}}^{(n+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{N}} ily} e^{-y^2/2} \tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k} e^{-2\kappa y}; q\right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{N}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{N}} ily} e^{-y^2/2} \tilde{S}_k\left(\alpha q^{-k} e^{-2\kappa y}; q\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\left(-\sqrt{\frac{2\pi}{N}} l\right)^2/2} H_k\left(\alpha q^{-k} e^{-2i\kappa\left(-\sqrt{\frac{2\pi}{N}} l\right)}; q\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N} l^2} H_k\left(\alpha q^{-k} e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}; q\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión para el coeficiente $b_{lk}^{(N)}(\alpha;q)$ de la serie de Fourier para $F_{jk}^{(N)}(\alpha;q^{-1})$ esta dado por

$$b_{lk}^{(N)}(\alpha;q) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}l^2} H_k\left(\alpha q^{-k} e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}; q\right). \tag{VII.29}$$

Siguiendo con el procedimiento, si se sustituye (VII.29) en (VII.27) obtenemos,

$$\begin{aligned}
F_{jk}^{(N)}\left(\alpha;q^{-1}\right) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}l^2} e^{\frac{2\pi i}{N}lj} H_k\left(\alpha q^{-k} e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}; q\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N}(nN+m)j} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2} H_k\left(\alpha q^{-k} e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}; q\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}jm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2} \times \\
&\quad \times H_k\left(\alpha q^{-k} e^{2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(nN+m)}; q\right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} F_{mk}^{(N)}\left(\alpha q^{-k}; q\right).
\end{aligned} \tag{VII.30}$$

Donde en la ultima igualdad de (VII.30) se utiliza la representación de la transformada finita de Fourier $A_{jm}^{(N)}$ y de la ecuación (VII.18), ahora podemos expresar los eigenvectores q-extendidos para los polinomios Stieltjes-Wigert en términos de los eigenvectores de los polinomios Rogers-Szegő,

$$F_{jk}^{(N)}\left(\alpha;q^{-1}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} F_{mk}^{(N)}\left(\alpha q^{-k}; q\right). \tag{VII.31}$$

así las relaciones (VII.26) y (VII.31) pueden ser escritas como

$$\sum_{m=0}^{N-1} \left(A^{(N)}\right)^{-1}_{jm} F_{mk}^{(N)}\left(\alpha q^{k}; q^{-1}\right) = F_{jk}^{(N)}(\alpha; q), \tag{VII.32}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} F_{mk}^{(N)}\left(\alpha q^{-k}; q\right) = F_{jk}^{(N)}\left(\alpha; q^{-1}\right). \tag{VII.33}$$

Ahora es claro que las transformadas finitas de Fourier (VII.33) y (VII.32) de los polinomios Stieltjes-Wigert y los polinomios Rogers-Szegő respectivamente, representan el análogo discreto de la transformada integral de Fourier (V.17) y de su inversa (V.25) para los mismos polinomios [28].

§ 3. Los polinomios discretos q-Hermite del tipo I y del tipo II.

Ahora se está en posición para definir dos q-extensiones de eigenvectores de Mehta $F_{jk}^{(N)}$ de la forma

$$F_{jk}^{(N)}(\alpha;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+j)^2} h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+j)};q\right), \tag{VII.34}$$

$$\Phi_{jk}^{(N)}(\beta;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_k\left(\beta q^{1-\frac{n}{2}} e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+j)};q\right), \tag{VII.35}$$

donde $0 < q := e^{-2\kappa^2} < 1$ en vista de

$$\lim_{q\to 1} h_n\left(\alpha e^{i\kappa};q\right) = \lim_{q\to 1} \tilde{h}_n\left(\alpha q^{1-\frac{n}{2}} e^{-\kappa y};q\right) = \alpha^n, \tag{VII.36}$$

de las definiciones de (VII.35)tenemos

$$\lim_{q\to 1} F_{jk}^{(N)}(\alpha;q) = \alpha^k F_{j0}^{(N)}, \quad \lim_{q\to 1} = \Phi_{jk}^{(N)}(\beta;q) = \beta^k F_{j0}^{(N)}. \tag{VII.37}$$

Por lo tanto la expansión de Fourier.

$$F_{jk}^{(N)}(\alpha;q) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) e^{\frac{2\pi i}{N} lj}, \tag{VII.38}$$

con los coeficientes de expansión

$$a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) = \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N} lx} F_{xk}^{(N)}(\alpha;q)dx. \tag{VII.39}$$

$$\begin{aligned} a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{\frac{-2\pi i}{N} lx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2} h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)};q\right) dx \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^N e^{\frac{-2\pi i}{N} lx - \frac{\pi}{N}(nN+x)^2} \times \\ &\quad \times h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)};q\right) dx \end{aligned} \tag{VII.40}$$

haciendo el cambio de variable $y = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN + x)$, se obtiene de la ecuación anterior;

$$\begin{aligned} a_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N}\sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int_{n\sqrt{2\pi N}}^{(n+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{N}} ily - y^2/2}\, h_k\left(\alpha e^{i\kappa y};q\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}} ly - y^2/2}\, h_k\left(\alpha e^{i\kappa y};q\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\, q^{k(3k-4)/4}\, e^{-\frac{2\pi}{N}\frac{l^2}{2}}\, \tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}} e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}} l};q\right) \end{aligned} \tag{VII.41}$$

Ahora, regresando a (VII.38), se puede usar la forma explícita de los coeficientes de Fourier $a_{lk}^{(N)}(\alpha;q)$, para desarrollar la expansión de Fourier,

$$\begin{aligned} F_{jk}^{(N)}(\alpha;q) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N}}\, q^{k(3k-4)/4}\, \tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}} e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}} l};q\right) e^{-\frac{\pi}{N}l^2}\, e^{\frac{2\pi i}{N} lj} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\, q^{k(3k-4)/4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N} lj - \frac{\pi}{N} l^2}\, \tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}} e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}} l};q\right) \end{aligned} \tag{VII.42}$$

como l es de periodo N, podemos hacer $l = nN + m$, entonces;

$$\begin{aligned} F_{jk}^{(N)}(\alpha;q) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\, q^{k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} mj} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2} \times \\ &\quad \times \tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}} e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+m)};q\right) \\ &= q^{k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)}\, \phi_{mk}^{(N)}(\alpha;q), \end{aligned} \tag{VII.43}$$

donde $\Phi_{mk}^{(N)}(\alpha;q)$ está definida como en (VII.35). Evidentemente, se pueden repetir los mismos pasos, partiendo de (VII.38) hasta (VII.43), pero aplicados en esta ocasión a $\Phi_{jk}^{(N)}(\alpha;q)$. Esto da como resultado la relación;

$$\phi_{jk}^{(N)}(\alpha;q) = q^{-k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} \left(A^{(N)}\right)^{-1}_{jm} F_{mk}^{(N)}(\alpha;q),$$

La expansión de Fourier para $\Phi_{jk}^{(N)}$

$$\Phi_{jk}^{(N)}(\alpha;q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{lk}^{(N)}(\alpha;q) e^{\frac{2\pi i}{N} lj}, \tag{VII.44}$$

con los coeficientes de Fourier definidos como;

$$\begin{aligned} b_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \\ &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx}\Phi_{xk}^{(N)}(\alpha;q)dx \\ &= \frac{1}{N}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2}\tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}}e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)};q\right)dx \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N}lx-\frac{\pi}{N}(nN+x)^2}\tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}}e^{\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)};q\right)dx \end{aligned} \tag{VII.45}$$

haciendo nuevamente el cambio de variable $y=\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(nN+x)$ en la ecuación anterior, se obtiene;

$$\begin{aligned} b_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n\sqrt{2\pi N}}^{(n+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}ly_n-y_n^2/2}\tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}}e^{\kappa y};q\right)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}ly-y^2/2}\tilde{h}_k\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}}e^{\kappa y};q\right)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)}c_m^{(k)}(q)\left(\alpha q^{1-\frac{k}{2}}e^{\kappa y}\right)^{k-2m}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)}c_m^{(k)}(q)\alpha^{k-2m}q^{(1-\frac{k}{2})(k-2m)}\times \\ &\quad\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}ly-y^2/2}e^{\kappa y(k-2m)}dy \end{aligned} \tag{VII.46}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)} c_m^{(k)}(q)\alpha^{k-2m} q^{(1-\frac{k}{2})(k-2m)} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l+\kappa(k-2m)]y-y^2/2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)} c_m^{(k)}(q)\alpha^{k-2m} q^{(1-\frac{k}{2})(k-2m)} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l-i\kappa(k-2m)]y-y^2/2}dy \qquad \text{(VII.47)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)} c_m^{(k)}(q)\alpha^{(k-2m)} q^{(1-\frac{k}{2})(k-2m)} e^{-\frac{1}{2}[-\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l-i\kappa(k-2m)]^2}.
\end{aligned}
$$

El término exponencial de la última ecuación se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l-i\kappa(k-2m)\right]^2} &= e^{-\frac{1}{2}[\frac{2\pi}{N}+2i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(k-2m)l-\kappa^2(k-2m)^2]} \\
&= e^{-\frac{\pi}{N}l^2}\, e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(k-2m)l}\, e^{\frac{\kappa^2}{2}(k-2m)^2} \qquad \text{(VII.48)}
\end{aligned}
$$

que sustituido en (VII.47) produce;

$$
\begin{aligned}
b_{lk}^{(N)}(\alpha;q) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)} c_m^{(k)}(q)\alpha^{(k-2m)} q^{(1-\frac{k}{2})(k-2m)} e^{-\frac{\pi}{N}l^2} \\
\times &\quad e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa(k-2m)l}\, e^{\frac{\kappa^2}{2}(k-2m)^2} \\
= &\quad \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}l^2} \sum_{m=0}^{[k/2]} q^{m(m+2-2k)}\, q^{(1-\frac{k}{2})(k-2m)} q^{-\frac{(k-2m)^2}{4}} \\
\times &\quad C_m^{(k)}(q)\left(\alpha e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}\right)^{(k-2m)} \\
= &\quad \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}l^2}\, q^{-k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{[k/2]} C_m^{(k)}(q)\left(\alpha e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}\right)^{(k-2m)} \\
= &\quad \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}l^2}\, q^{-k(3k-4)/4} h_k\left(\alpha e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}\right). \qquad \text{(VII.49)}
\end{aligned}
$$

entonces los coeficientes de Fourier,

$$
b_{lk}^{(N)}(\alpha;q) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}l^2}\, q^{-k(3k-4)/4} h_k\left(\alpha e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\kappa l}\right). \qquad \text{(VII.50)}
$$

Tenemos ahora que,

$$\begin{aligned}
\Phi_{jk}^{(N)}(\alpha;q) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{lk}^{(N)}(\alpha;q)e^{\frac{2\pi i}{N}l} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} q^{-k(3k-4)/4} h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l};q\right) e^{i\frac{2\pi}{N}lj-\frac{\pi}{N}l^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} q^{-k(3k-4)/4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l};q\right) e^{i\frac{2\pi}{N}jl-\frac{\pi}{N}l^2},
\end{aligned}$$

haciendo $l = nN + m$ en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Phi_{jk}^{(N)}(\alpha;q) &= \frac{1}{\sqrt{N}} q^{-k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l};q\right) \\
&\times \ e^{i\frac{2\pi}{N}j(nN+m)-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} q^{-k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}mj} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k\left(\alpha e^{i\kappa\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l};q\right) \\
&\times \ e^{-\frac{\pi}{N}(nN+m)^2} \\
&= q^{-k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}mj} F_{mk}^{(N)}(\alpha;q),
\end{aligned}$$

obteniendo así,

$$\Phi_{jk}^{(N)}(\alpha;q) = q^{-k(3k-4)/4} \sum_{m=0}^{N-1} \left(A^{(N)}\right)_{jm}^{-1} F_{mk}^{(N)}(\alpha;q). \tag{VII.51}$$

donde $\left(A^{(N)}\right)^{-1}$ el es operador inverso con respecto a $A^{(N)}$.

Concluímos que las relaciones (VII.43) y (VII.51), describen la propiedad de transformación con respecto al operador $A^{(N)}$ de los polinomios discretos q-Hermite $h_n(x;q)$ de tipo I $(0 < q < 1)$. Para los polinomios discretos $\tilde{h}_n(x;q)$ de tipo II $(1 < q)$ también se cumple esa propiedad mediante la transformada finita de Fourier inversa.

Logrando así otra versión de una q-extensión para los eigenvectores de Mehta, para otro par de familias relacionadas primero mediante la transformada integral de Fourier, y ahora por medio de la transformada finita de Fourier [29].

Capítulo VIII
Casos límite, cuando $q \to 1$

§ 1. Límite de los polinomios de Rogers.

Es bien sabido que los polinomios continuos q-Hermite $H_n(x|q)$ coinciden con los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$ en el límite cuando el parámetro q tiende a 1 (o el parámetro κ desaparece) [19], a saber,

$$\lim_{q\to 1} \kappa^{-n} H_n(\sin \kappa y|q) = \lim_{q\to 1} \kappa^{-n} h_n(\sinh \kappa y|q) = H_n(y). \tag{VIII.1}$$

De este modo podemos verificar fácilmente que el límite de los eigenvectores de los polinomios q-Hermite cuando $q \to 1$, coinciden con los eigenvectores de Mehta, es decir,

$$\lim_{q\to 1} \kappa^{-k} F_{jk}^{(N)}(q) = F_{jk}^{(N)}, \lim_{q\to 1} \kappa^{-k} F_{jk}^{(N)}\left(q^{-1}\right) = i^k F_{jk}^{(N)}, \tag{VIII.2}$$

donde$F_{jk}^{(N)}$ son los eigenvectores de Mehta (2), consecuentemente se puede observar que ambas relaciones en (VII.13) y (VII.14) coinciden con (IV.1), otra observación que se puede hacer es que los parámetros q y N son independientes y en el límite continuo (i.e. el límite cuando $N \to \infty$) de las relaciones (VII.14) y (VII.13), son la transformada integral de Fourier (V.8) y su transformada inversa.

A continuación se prueba que los eigenvectores q-extendidos q-Hermite (VII.13) coinciden con los eigenvectores obtenidos por Mehta (IV.1).

Tomando la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios q-Hermite (V.7) y escribiendo esta última ecuación en términos de la variable $\sin \kappa x$, la relación de recurrencia queda como

$$H_{n+1}(\sin \kappa x|q) = 2 \sin \kappa x H_n(\sin \kappa x|q) - (1 - q^n)\, H_{n-1}(\sin \kappa x|q),$$

luego, como $\sin x \approx x$ para $x \in [-\delta, \delta]$ y además $q = e^{-2\kappa^2}$, entonces $q^n \approx 1 - 2n\kappa^2$

$$H_{n+1}(\kappa x|q) = 2\kappa x H_n(\kappa x|q) - 2n\kappa^2 H_{n-1}(\kappa x|q), \tag{VIII.3}$$

multiplicando cada miembro de la ecuación (VIII.3) por κ^{n+1} y haciendo $\tilde{H}_m = \kappa^{-m} H_m$,

$$\tilde{H}_{n+1}(\kappa x|q) = 2x\tilde{H}_n(\kappa x|q) - 2n\tilde{H}_{n-1}(\kappa x|q), \qquad \text{(VIII.4)}$$

usando el límite para los polinomios q-Hermite [19]

$$\lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-n} H_n(\kappa x|q) = H_n(x), \qquad \text{(VIII.5)}$$

la ecuación (VIII.4) queda como

$$\tilde{H}_{n+1}(x) = 2x\tilde{H}_n(x) - 2n\tilde{H}_{n-1}(x), \qquad \text{(VIII.6)}$$

que es la misma ecuación de recurrencia de tres términos para los polinomios clásicos de Hermite.

Para el caso de los polinomios q^{-1}-Hermite $h_n(x|q)$, el procedimiento para evaluar el límite cuando q tiende a 1 es análogo al de los polinomios q-Hermite, usando la ecuación de recurrencia de tres términos (V.10) queremos comprobar ahora que

$$\lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-n} h_n\left(\sinh \kappa x|q\right) = H_n(x),$$

donde$H_n(x)$ es el polinomio clásico de Hermite. Entonces, escribiendo ecuación de recurrencia (V.10) en términos de la variable $\sinh \kappa x$, obtenemos

$$h_{n+1}(\sinh \kappa x|q) = 2\sinh \kappa x h_n(\sinh \kappa x|q) - q^{-n}\left(1-q^n\right) h_{n-1}(\sinh \kappa x|q), \qquad \text{(VIII.7)}$$

como $\sinh x \approx x$ cuando $x \in [-\delta, \delta]$ y recordando que $q = e^{-2\kappa^2}$, la ecuación (VIII.7) se puede escribir como,

$$h_{n+1}(\kappa x|q) = 2\kappa x h_n(\kappa x|q) - 2n\kappa^2 h_{n-1}(\kappa x|q),$$

multiplicando cada uno de los términos por κ^{-n+1} y tomando $\lim_{q\uparrow 1}$ o $\lim_{\kappa \to 0}$, recordando cual es la relación entre q y κ

$$\lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-(n+1)} h_{n+1}(\kappa x|q) = 2x \lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-n} h_n(\kappa x|q) - 2n \lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-n-1} h_{n-1}(\kappa x|q),$$

obtenemos la relación de recurrencia de tres términos (III.11) para los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$.

§ 2. Límite de los polinomios Rogers-Szegő y Stieltjes-Wigert.

Ahora vamos a calcular el $\lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-n} H_n(\kappa x, q)$, donde $H_n(x;q)$, $0<q<1$ son los polinomios de Rogers-Szegő. Comenzamos con la relación de recurrencia de tres términos (V.16) escrita en términos de la variable $-e^{2ix}$

$$H_{n+1}\left(-e^{2ix};q\right) = \left(1-e^{2ix}\right) H_n\left(-e^{2ix};q\right) - \left(1-q^n\right)\left(-e^{2ix}\right) H_{n-1}\left(-e^{2ux};q\right), \tag{VIII.8}$$

esta relación de recurrencia se puede escribir en términos de los polinomios q-Hermite $H_n(x|q)$ bajo la siguiente identidad [26],

$$H_n\left(-e^{2ix};q\right) = i^{-n} e^{inx} H_n(\sin x|q)),$$

sustituyendo esta última ecuación en (VIII.8), obtenemos,

$$H_{n+1}(\sin x|q) = i\left(1-e^{2ix}\right) e^{-ix} H_n(\sin x|q) - \left(1-q^n\right) H_{n-1}(\sin x|q), \tag{VIII.9}$$

$$H_{n+1}(\sin x|q) = 2x H_n(\sin x|q) - 2n\kappa^2 H_{n-1}(\sin x|q) \tag{VIII.10}$$

luego en el $\lim_{q\uparrow 1} \kappa^{-n} H_n(x|q)$, $\sin x \approx x$ y recordando que $q = e^{-2\kappa}$

$$H_{n+1}(\kappa x|q) = 2\kappa x H_n(\kappa x|q) - 2n\kappa^2 H_{n-1}(\kappa x|q), \tag{VIII.11}$$

multiplicando por κ^{-n+1} y haciendo $\tilde{H}_m = \kappa^m H_m$,

$$\kappa^{-(n+1)} H_{n+1}(\kappa x|q) = 2\kappa^{-n} x H_n(\kappa x|q) - 2n\kappa^{-(n-1)} H_{n-1}(\kappa x|q), \tag{VIII.12}$$

$$\tilde{H}_{n+1}(\kappa x|q) = 2x\tilde{H}_n(\kappa x|q) - 2n\tilde{H}_{n-1}(\kappa x|q), \tag{VIII.13}$$

la cual es la relación de recurrencia para los polinomios de Hermite clásicos (III.11).

§ 3. Límite de los polinomios discretos de tipo I y de tipo II.

Para demostrar que los polinomios discretos q-Hermite de tipo I $h_n(x;q)$ coinciden con los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$, comenzamos con la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios discretos q-Hermite de tipo I (VI.3),

$$h_{n+1}(x;q) = x h_n(x;q) - q^{n-1}\left(1-q^n\right) h_{n-1}(x;q),$$

entonces si cambiamos $x \mapsto x\sqrt{1-q^2}$,

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x\sqrt{1-q^2};q) &= x\sqrt{1-q^2}h_n(x\sqrt{1-q^2};q) - q^{n-1}\left(1-q^n\right)\times \\ &\quad \times h_{n-1}(x\sqrt{1-q^2};q), \end{aligned} \tag{VIII.14}$$

recordando que $q = e^{-2\kappa^2}$ entonces, $\sqrt{1-q^2} \approx 2\kappa$ y $q^{n-1} - q^{2n-1} \approx 2n\kappa^2$ cuando $q \in [-\delta, \delta]$, luego la ecuación (VIII.14), se puede escribir como,

$$h_{n+1}(2x\kappa;q) = 2x\kappa h_n(2x\kappa;q) - 2n\kappa^2 h_{n-1}(2x\kappa;q), \tag{VIII.15}$$

haciendo el cambio $\kappa \mapsto \tilde{\kappa}/2$

$$h_{n+1}(x\tilde{\kappa};q) = 2x\frac{\tilde{\kappa}}{2}h_n(x\tilde{\kappa};q) - 2n\frac{\tilde{\kappa}^2}{2^2}h_{n-1}(x\tilde{\kappa};q), \tag{VIII.16}$$

multiplicando los términos de la ecuación (VIII.16) por $(2\kappa)^{-(n+1)}$, ésta se puede ver como,

$$\frac{\tilde{\kappa}^{-(n+1)}}{2^{n+1}}h_{n+1}(x\tilde{\kappa};q) = 2x\frac{\tilde{\kappa}^{-n}}{2^n}h_n(x\tilde{\kappa};q) - 2n\frac{\tilde{\kappa}^{-(n-1)}}{2^{(n-1)}}h_{n-1}(x\tilde{\kappa};q), \tag{VIII.17}$$

haciendo $\tilde{h}_n = \frac{\tilde{\kappa}^{-n}}{2^n}h_n$ la ecuación anterior se ve como la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$

$$\tilde{h}_{n+1}(x\tilde{\kappa};q) = 2x\tilde{h}_n(x\tilde{\kappa};q) - 2n\tilde{h}_{n-1}(x\tilde{\kappa};q), \tag{VIII.18}$$

Para el caso de los polinomios discretos q-Hermite de tipo II, usamos el procedimiento análogo para los polinomios discretos q-Hermite de tipo I con su correspondiente relación de recurrencia de tres términos.

Capítulo IX

q-Extensión de las bases de la transformada finita de Fourier

Hasta ahora se ha mostrado que las relaciones (VII.13) y (VII.14) nos habilitan para encontrar extensiones de los eigenvectores de Mehta para la trasformada finita de Fourier. Evaluamos ahora la acción de la matriz de Fourier $A^{(N)}$ de (1), sobre la combinación lineal de (VII.1) y (VII.2) [30],

$$f_{mk}^{(N)}(q) := a_k(q) F_{mk}^{(N)}(q) + b_k(q) F_{mk}^{(N)}(q^{-1}), \tag{IX.1}$$

donde $a_k(q)$ y $b_k(q)$ son constantes no cero, que necesitamos determinar. Entonces, usando (VII.12) y (VII.9), se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{N-1} A_{jm}^{(N)} \left(a_k(q) F_{mk}^{(N)}(q) + b_k(q) F_{mk}^{(N)}(q^{-1}) \right) \\
= \; & q^{k^2/4} a_k(q) F_{jk}^{(N)}(q^{-1}) + (-1)^k q^{-k^2/4} b_k(q) F_{jk}^{(N)}(q) \qquad \text{(IX.2)} \\
= \; & i^k i^{-k} q^{k^2/4} a_k(q) F_{jk}^{(N)}(q^{-1}) + i^{2k} q^{-k^2/4} b_k(q) F_{jk}^{(N)}(q) \\
= \; & i^k \left(i^{-k} q^{k^2/4} a_k(q) F_{jk}^{(N)}(q^{-1}) + i^k q^{-k^2/4} b_k(q) F_{jk}^{(N)}(q) \right) \\
= \; & i^k \left(a_k(q) F_{jk}^{(N)}(q) + b_k(q) F_{jk}^{(N)}(q^{-1}) \right)
\end{aligned}$$

estipulando que

$$b_k(q) = i^{-k} q^{k^2/4} a_k(q). \tag{IX.3}$$

Cuando esta relación se cumple para cada $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, las combinaciónes lineales en (IX.1) son los eigenvectores de la transformada finita de Fourier con los eigenvalores $\lambda_n = i^n$, como se puede ver en (IX.2).

Con la elección en general de la constante $a_n(q) = \frac{1}{2}q^{-n^2/8}$ en (IX.3), escribimos los componentes del eigenvector q-extendido de Fourier como

$$\psi_{mk}^{(N)}(q) := \frac{1}{2}q^{-k^2/8}\left(F_{mk}^{(k)}(q) + i^{-k}q^{k^2/4}F_{mk}^{(N)}(q^{-1})\right) \qquad \text{(IX.4)}$$

$$\begin{aligned} = \;& \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{q^{-k^2/8}H_k\left(\sin\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\kappa(nN+j)\middle|q\right) + \\ + \;& q^{k^2/8}h_n\left(\sinh\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\kappa(nN+j)\middle|q\right)\Big\} \\ \times \;& e^{-\frac{2\pi}{N}\kappa(nN+j)^2/2}. \end{aligned} \qquad \text{(IX.5)}$$

Esta ecuación muestra que los eigenvectores $\psi_{mk}^{(N)}(q)$ exhiben una simetría con respecto al cambio de $q \to q^{-1}$. Con la elección adecuada de $a_n(q)$ en (IX.5), es directo verificar que,

$$\psi_m^{(n)}\left(q^{-1}\right) = i^n\psi_m^{(n)}\left(q\right). \qquad \text{(IX.6)}$$

Los vectores $\psi^{(n)}(q) = \|\psi_m^{(n)}(q)\|$ serán los eigenvectores de la transformada finita de Fourier,

$$A^{(N)}\psi^{(n)}(q) = i^n\psi^{(n)}(q) = \psi^{(n)}\left(q^{-1}\right).$$

En particular, el estado base de las eigenfunciones q-extendidas de Fourier es una suma Gaussiana sobre $\sqrt{2\pi/N}(kN+m)$ [debido a que $H_0(x|q) = 1 = h_0(x|q)$], el cual es independiente de q, y por tanto igual a $q = 1$ que es el estado base no deformado $F_{0k}^{(N)}$ en (IV.2). Estas pueden ser escritas en términos de la función de Jacobi ϑ_3 [31]

$$\begin{aligned} \psi_0(m) \;:=\;& \psi_{m0}(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\tfrac{\pi}{N}(kN+m)^2\right) \\ =\;& e^{-\pi m^2/N}\vartheta_3\left(\pi i m, e^{-\pi N}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{N}}\,\vartheta_3\left(\tfrac{\pi m}{N}, e^{-\pi/N}\right). \end{aligned} \qquad \text{(IX.7)}$$

Todas esas eigenfunciones tienen forma Gaussiana, y convergen a la Gaussiana $\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ en el límite continuo cuando $N \to \infty$. Todos los coeficientes $a_n(q)$ fueron elegidos como $\frac{1}{2}q^{-n^2/8}$ para normalizar los eigenvectores q-extendidos $\psi_{mk}(q)$, así que éstos exhiben naturalmente la propiedad límite de los eigenvectores de Mehta,

$$\lim_{q\to 1}\kappa^{-n}\psi_{mk}(q) = F_{mk}(N), \qquad \text{(IX.8)}$$

que es una consecuencia del $\lim_{q\to 1} a_n(q) = \frac{1}{2}$.

Recordemos que los parámetros q y N son independientes en las relaciones de las secciones previas. De hecho, el límite continuo $N \to \infty$ de (IX.8) y de (IX.6) dan lugar a las eigenfunciones q-extendidas de la transformada integral de Fourier,

$$\begin{aligned} \psi_n(x;q) &:= \lim_{N\to\infty} \psi_{mn}(x;q) \\ &= \frac{1}{2}\left(q^{-n^2/8} H_n(\sin\kappa x|q) + q^{n^2/8} h_n(\sinh\kappa x|q)\right) e^{-x^2/2}, \end{aligned} \tag{IX.9}$$

donde el intervalo y la densidad de los puntos $x_k(m) = \sqrt{2\pi/N}(kN+m)$ tienden a infinito cuando $\sqrt{N}$ tiende a infinito, y son reemplazados por la variable real x. Las funciones (IX.9) satisfacen entonces

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\psi_n(x;q) = i^n \psi_n(y;q). \tag{IX.10}$$

Esta transformada integral de Fourier es una q-extensión del resultado clásico (4). Podemos notar que de la ecuación (IX.9), los estados base q-extendidos

$$\psi_0(x;q) = e^{-x^2/2}, \tag{IX.11}$$

coinciden con los estados ordinarios, que son estados base no extendidos: es decir, los Gaussianos.

Capítulo X
Conclusiones

Como hemos visto a lo largo de las secciones V y VI, la transformada integral de Fourier relaciona a las familias de q-polinomios con las q^{-1}-polinomios, por ejemplo (V.8) y (V.11) son la transformada integral para los polinomios continuos q-Hermite y q^{-1}-Hermite respectivamente; lo mismo para los polinomios Rogers-Szegő (V.17) y los polinomios Stieltjes-Wigert (V.25), así también para los polinomios discretos de tipo I (VI.11) y de tipo II .

Luego como parte del proyecto de investigación, se demostró que esa relación con la transformada integral de Fourier da lugar para calcular la transformada finita de Fourier, relacionando entre ellas de un modo natural, a los pares de familias de q-polinomios antes mencionados.

Estas familias de q-polinomios son un buen candidato para ser eigenfunciones de la transformada finita de Fourier. En la sección IX se demuestra explícitamente que una combinación lineal $\psi_{mk}^{(N)}(q)$ (IX.4 conformada por los polinomios continuos q-Hermite (V.1) y los polinomios q^{-1}-Hermite (V.3) representa una eigenfunción de la transformada finita de Fourier.

Cabe señalar que es posible un tratamiento similar para las familias de q-polinomios Rogers-Szegő y Stieltjes-Wigert, así como para las familias de polinomios discretos de tipo I y de tipo II. De esta forma se encuentran otras dos eigenfunciones, el desarrollo de esto se realizará en trabajos posteriores.

Apéndice A: Los polinomios clásicos de Hermite.

La función de peso para los polinomios de Hermite son el caso límitante de la función de peso para Jacobi $(1-x/\alpha)^{\alpha}(1+x/\alpha)^{\alpha}$ cuando $\alpha \to \infty$, esta función de peso es e^{-x^2} sobre la linea real $\Re$. En esta sección estableceremos directamente las propiedades para dichos polinomios en lugar de tratarlos como casos límite, ya que ciertas propiedades se cumplen para los polinomios de Hermite y no para la contraparte que son los polinomios de Jacobi.

Los Polinomios de Hermite pueden ser definidos mediante la siguiente fórmula:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \tag{1}$$

es sencillo verificar que $H_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Sabiendo que la función normal e^{-x^2} es su propia transformada integral de Fourier, y diferenciando repetidamente tenemos,

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = \frac{(2i)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n e^{2ixt} dt, \tag{2}$$

combinando las ecuaciones 1 y 2, obtenemos otra representación para los polinomios de Hermite, a saber,

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n e^{2ixt} dt. \tag{3}$$

Algunos autores definen a los polinomios de Hermite usando los polinomios de Laguerre $L_n(x)$, que son también un caso límite de los polinomios de Jacobi y tienen la función de peso $x^{\alpha} e^{-x^2}$, sobre el intervalo $[0, \alpha)$,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-1/2}(x^2), \tag{4}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{1/2}(x^2). \tag{5}$$

Los polinomios de Hermite satisfacen la relación de ortogonalidad sobre $\Re$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \delta_{mn}. \tag{6}$$

si definimos las funciones

$$\phi_n(t) = \frac{H_n(t) e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

es claro que ϕ_{n_n} es un conjunto ortonormal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) \phi_m(t) dt = \delta_{n,m}. \tag{7}$$

De esta última relación se obtienen resultados interesantes, por ejemplo, las funciones ϕ_n definidas en 7 satisfacen la ecuación diferencial

$$y'' - t^2 y = -(2n+1) y, \tag{8}$$

con la condición de frontera $y(\pm\infty) = 0$, esta ecuación 8 es precisamente la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico.

La función generadora para los polinomios de Hermite esta dada según la fórmula de Rodrigues por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^n = e^{2xr - r^2}, \tag{9}$$

esta función es útil para obtener varias propiedades de los polinomios de Hermite, por ejemplo, ahora podemos tener otra representación para los polinomios de Hermite,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \tag{10}$$

Dos de las formulas que se siguen inmediatamente de la ecuación 10, son las siguientes,

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!},$$

$$H'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}.$$

Además de estas dos ecuaciones anteriores, si diferenciamos n veces la ecuación 10, se sigue que,

$$\frac{d^n H_n(x)}{dx^n} = 2^n n!. \tag{11}$$

Usando la representación de los polinomios de Hermite 10 en combinación con 11, podemos calcular el límite,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n} H_n(x) = 2^n. \tag{12}$$

Ahora, siendo los polinomios de Hermite una familia de polinomios ortogonales, éstos satisfacen una relación de recurrencia de tres términos, la cual se obtiene mediante lo siguiente, primero observemos que la función F

$$F(x,r) = e^{2xr-r^2}, \tag{13}$$

satisface la ecuación diferencial en r,

$$\frac{\partial F}{\partial r} - (2x - 2r)F = 0, \tag{14}$$

cuya solución se encuentra sustituyendo la ecuación 9 para F en 13, a saber,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x),\ n = 0, 1, 2, ... \tag{15}$$

otra relación proviene usando ahora la ecuación diferencial para la función F respecto a la variable x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - 2rF = 0, \tag{16}$$

la cual implica una solución de la forma

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),\ n = 1, 2, 3, ... \tag{17}$$

combinando las ecuaciones 15 y 17, obtenemos

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0, \tag{18}$$

luego, si diferenciamos esta ecuación y usamos 17, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden en $H_n(x)$,

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$$

Otra representación para los polinomios de Hermite, es la representación integral,

$$H_n(ix) = \frac{(2i)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-x)^2} y^n dy, \tag{19}$$

la cual es válida para $n = 0, 1, 2, ...$

Por último podemos señalar que las funciones de Hermite $\{e^{-x^2}H_n(x)\}$ son eigenfunciones de la transforma integral de Fourier,

$$e^{-x^2/2}H_n(x) = \frac{i^{-n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-y^2/2} H_n(y) dy. \tag{20}$$

Sabemos ahora por la ecuación 6 que los polinomios de Hermite forman un conjunto ortogonal sobre la linea real, con la función de peso e^{-x^2}, aunado a la teoría previa podemos desarrollar los siguientes resultados,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^k H_n(x) dx = 0, \;\; k = 0, 1, 2, ..., (n-1); \tag{21}$$

Los ceros de $H_n(x)$ son reales y distintos;

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x)H_k(y)}{2^k k!} = \frac{H_{n+1}(y)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_n(y)}{2^{n+1}n!(y-x)}; \tag{22}$$

y si existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} (2^n n!)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) H_n(x) dx = 0.$$

Otra característica para los polinomios de Hermite $H_n(x)$, es que cualquier polinomio $P(x)$, puede ser expandido en una serie de polinomios de Hermite, y los coeficientes pueden ser determinados como en la teoría en general: si

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k(x),$$

$$c_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P(x) H_k(x) dx$$

Apéndice B: Los q-polinomios continuos de Hermite

Los polinomios continuos q-Hermite $\{H_(x|q)\}$ son generados por la fórmula recursiva,

$$2xH_n(x|q) = H_{n+1}(x|q) + (1-q^n)H_{n-1}(x), \tag{23}$$

con las condiciones iniciales,

$$H_0(x|q) = 1, \;\; H_1(x|q) = 2x. \tag{24}$$

Lo que sigue es calcular una función generadora para $\{H_n(x|q)\}$. Entonces, haciendo

$$H(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x|q)\frac{t^n}{(q;q)_n}.$$

Multiplicando la ecuación 23 por $t^n/(q;q)_n$, y sumando para $n = 1, 2, 3, ...$, y considerando las condiciones según 24, se obtiene la ecuación funcional,

$$H(x,t) - H(x,qt) = 2xtH(x,t) - t^2H(x,t),$$

por lo tanto,

$$H(x,t) = \frac{H(x,qt)}{1-2xt+t^2} = \frac{H(x,qt)}{(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta})}, \;\; x = \cos\theta. \tag{25}$$

Lo anterior sugiere iterar la ecuación funcional 25 para obtener,

$$H(\cos\theta, t) = \frac{H(\cos\theta, q^n t)}{(te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_n}.$$

Dada la funcional previa, es sencillo verificar el límite

$$\lim_{n\to\infty} H(x, q^n t) \to H(x,0) = 1.$$

Así que ahora podemos expresar el siguiente resultado: la función generadora para los polinomios continuos q-Hermite tiene la forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\cos\theta|q)\frac{t^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(te^{i\theta, te^{-i\theta}})_\infty}. \tag{26}$$

la demostración de lo anterior se puede verificar como sigue, el lado izquierdo de 26 satisface la funcional,

$$(1-2xt+t^2)F(x,t) = F(x,qt) \tag{27}$$

Ahora, como el lado derecho de la ecuación 26 es analítica en t en una vecindad de $t=0$ entonces puede ser expandida en un serie de potencias en t y sustituyendo la expasión,

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{t^n}{(q;q)_n} \tag{28}$$

en la ecuación 27 e igualando los coeficientes de t^n, se encuentra que los f_n's satisfacen la relación de recurrencia de tres términos 23 y además coinciden con $H_n(x|q)$ cuando $n=0$, $n=1$. Esto es, $f_n = H_n(x|q)$ para todos los n, probando de esta manera la ecuación 26.

Para obtener una fórmula explícita para los polinomios q-Hermite, se expande $1/(te^{\pm i\theta};q)_\infty$ por medio de

$$e_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(z;q)_\infty}, \quad |z|<1,$$

entonces multiplicando la serie resultante, obtenemos,

$$\begin{aligned} H_n(\cos\theta|q) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_n(q;q)_{n-k}}\cos(n-2k)\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_n(q;q)_{n-k}}\cos|(n-2k)|\theta \end{aligned} \tag{29}$$

Esta representación refleja el caracter polinómico de $H_n(x|q)$ ya que $\cos(n-2k)\theta = \cos(|(n-2k)|)\theta$, el cual es un polinomio en términos de $\cos\theta$ de grado $|n-ak|$. Los polinomios continuos q-Hermite tienen la siguiente propiedad,

$$H_n(-x|q) = (-1)^n H_n(x|q), \tag{30}$$

$$\text{máx}\left\{|H_n(-x|q)| : -1 \leq x \leq 1\right\} = H_n(1|q) = (-1)^n H_n(-1|q), \qquad (31)$$

y el máximo es alcanzado en los extremos $x = \pm 1$. Una consecuencia inmediata de 31 es que la serie del lado izquierdo de (26) converge uniformemente en x para $x \in [-1, 1]$ para todo t tal que $|t| < 1$. Ahora bien, siendo los polinomios continuos q-Hermite una extensión de los polinomios clásicos de Hermite, satisfacen entonces una relación de ortogonalidad, a saber,

$$\int_{-1}^{1} H_n(x|q)H_m(x|q)w(x|q)dx = \frac{2\pi(q;q)_n}{(q;q)_\infty}\delta_{m,n}, \qquad (32)$$

donde

$$w(x|q) = \frac{\left(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q\right)_\infty}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; x = \cos\theta,\, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Como en los polinomios de Hermite clásicos $H_n(x)$, tenemos una fórmula para relacionar la derivada del polinomio con otro polinomio de grado inferior 17, es natural pensar que los polinomios $H_n(x|q)$ tienen una relación equivalente, a estas relaciones se les llama operadores de cambio, y podemos ir hacia adelante o hacia atrás mediante las fórmulas siguientes, para el operador de cambio delantero tenemos que,

$$\delta_q H_n(x|q) = -q^{-\frac{1}{2}n}\left(1-q^n\right)\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)H_{n-1}(x|q), \;\; x = \cos\theta \qquad (33)$$

la ecuación anterior también puede escribirse de la forma,

$$D_q H_n(x|q) = \frac{2q^{-\frac{1}{2}(n-1)}\left(1-q^n\right)}{1-q}H_{n-1}(x|q).$$

Mientras que el operador de cambio posterior ésta representado por la ecuación

$$\delta_q[H_n(x|q)\tilde{w}(x|q)] = q^{-\frac{1}{2}(n+1)}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\tilde{w}(x|q)H_{n+1}(x|q), \qquad (34)$$

donde

$$\tilde{w}(x|q) := \frac{w(x|q)}{\sqrt{1-x^2}},$$

este operador de cambio posterior también tiene otra forma de representarse, equivalentemente,

$$D_q[H_n(x|q)\tilde{w}(x|q)] = -\frac{2q^{-\frac{1}{2}n}}{1-q}\tilde{w}(x|q)H_{n+1}(x|q).$$

En el caso de operadores diferenciales y en diferencia, para poder determinar la fórumla de Rodrigues, definimos δ_q y D_q como sigue,

$$D_q f(x) := \frac{\delta_q f(x)}{\delta_q x},$$

donde

$$\delta_q f(e^{i\theta}) = f\left(q^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}\right) - f\left(q^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta}\right), \ x = \cos\theta,$$

finalmente

$$\delta_q x = -\frac{1}{2} q^{-\frac{1}{2}} (1-q)\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Siendo los polinomios $H_n(x|q)$ una extensión de los polinomios clásicos de Hermite $H_n(x)$, es de esperarse que los primeros también puedan representarse mediante una fórmula tipo la fórmula de Rodrigues, a saber,

$$H_n(x|q)\tilde{w}(x|q) = \left(\frac{q-1}{2}\right)^n q^{\frac{1}{4}n(n-1)} (D_q)^n [\tilde{w}(x|q)].$$

Las funciones generadoras para los polinomios continuos q-Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x|q)}{(q;q)_n} t^n = \frac{1}{(e^{i\theta}t, e^{-i\theta}t; q)_\infty}, \ x \cos\theta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} H_n(x|q) t^n = \left(e^{i\theta}t; q\right)_\infty \, {}_1\phi_1\left(\begin{matrix} 0 \\ e^{i\theta}t \end{matrix} \middle| q\,;\, e^{-i\theta}t\right), \ x = cos\theta$$

Por último, podemos calcular la transformada integral de Fourier para los polinomios continuos q-Hermite y ver que están relacionados con los polinomios q^{-1}-Hermite,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist - s^2/2} H_n(\sin s\kappa|q) ds = i^n q^{n^2/4} h_n(\sinh \kappa t|q) e^{-t^2/2}, \tag{35}$$

donde $q := \exp\left(-2\kappa^2\right)$, $0 \leq \kappa < \infty$ y

$$h_n(x|q) = i^{-n} H_n\left(ix|q^{-1}\right) \tag{36}$$

Bibliografía

[1] B.C. Berndt and R.J. Evans. The determination of Gauss sums. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **5**(2):107–129, 1981.

[2] I. Schur. Über die Gaußschen Summen. *Nachr. K. Gessel Wiss. Gottingen, Math. Phys.*, pages 147–153, 1921.

[3] E. Landau. *Elementary Number Theory.* Chelsea, New York, 1966.

[4] M.L. Mehta. Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform. *J. Math. Phys.*, **28**(4):781–785, 1987.

[5] N.M. Atakishiyev. *Fourier-Gauss transform of some special functions*, volume 25. CRM Proceedings and Lecture Notes, Providence, Rhode Island, 2000.

[6] L.J. Rogers. Second memoir on the expansion of ceratin infinite products. *Lond. Math. Soc.*, **25**:318–343, 1894.

[7] W.R. Allaway. Some properties of the q-Hermite polynomials. *Canad. J. Math.*, **32**(3):686–694, 1980.

[8] N.M. Atakishiyev and Sh.M. Nagiyev. On the wave functions of a covariant linear oscillator. *Theor. Math. Phys.*, **98**(2):162–166, 1994.

[9] R. Askey. *Continuous q-Hermite polynomials when q>1, In q-series and Partitions.* Springer-Verlag, New York, 1989.

[10] I.S. Gradsheteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products.* Academic Press, New York, 2000.

[11] Kenneth B. Howell. *Principles of Fourier Analysis.* Chapman Hall CRC, 2001.

[12] L. Auslander and R. Tolimieri. Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics? *Bull. Math. Soc.*, **1**(5):847–897, (1979).

[13] B.C. Berndt, R. J. Evans, and K. Williams, editors. *Gauss and Jacobi sums*. Wiley, New York, 1998.

[14] A. Terras. *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*. Cambrigde university Press, Cambrigde, 1999.

[15] R. Tolimieri, M. An, and C. Lu. *Algoritms for discrete Fourier transform and convolutions*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[16] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special Functions*. Cambrigde University Press, Cambrigde, 1999.

[17] E.D. Rainville. *Special functions*. The MacMillan Co., New York, 1960.

[18] G. Gasper and M. Rahman. *Basic Hypergeometric Series*. Cambrigde University Press, Cambrigde, second edition, 2004.

[19] R. Koekoek and R.F. Swarttouw. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*. Delft, University of Technology, Delft, 1998.

[20] R. Álvarez-Nodarse, M.K. Atakishiyeva, and N.M. Atakishiyev. On a q-extension of the hermite polynomials $h_n(x)$ with the continuous orthogonality property on $\mathbb{R}$. *Soc. Mat. Mexicana*, **8**(3):127–139, 2002.

[21] G. Szegő. Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc., Colloquium Publication*, **23**, 1975.

[22] W.A. Al-Salam and L. Carlitz. A q-analogue of a formula of Toscano. *Boll. unione Math. Ital.*, **12**(3):414–417, 1957.

[23] L. Carlitz. Note on orthogonal polynomials related to theta functions. *Publ. Math. Debrecen*, **5**:222–228, 1958.

[24] Szegő G. *Collected Papers*, volume 1. ed. R. Askey (Basel: Birkhäuser), 1982.

[25] G.Szegő. Ein beitrag zur theorie der thetafunktionen. *Sitz. Preus. Akad. Wiss., Phys.-Math.*, **19**:242–252, 1926.

[26] Askey R. and Ismail M.E.H. *Studies in Pure Mathematics*. ed P. Erdös (Boston, MA: Birkhäuser), 1983.

[27] N.M. Atakishiyev and Sh.M. Nagiyev. On the Rogers-Szegő polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**(17):L611–L615, 1994.

[28] N.M. Atakishiyev, Diogenes Galetti, and Juvenal P. Rueda. On relations between certain q-polynomial families, generated by the finite fourier transform. *Int. J. of Pure and App. Math.*, **26**(2):275 – 284, 2006.

[29] Metin Arık, N.M. Atakishiyev, and Juvenal P. Rueda. Discrete q-hermite polynomial are linked by the integral and finite fourier transforms. *Int. J. of Diff. Eq.*, **1**(2):195 – 204, 2006.

[30] N.M. Atakishiyev, J.P. Rueda, and K.B. Wolf. On q-extended eigenvectors of the integral and finite fourier transforms. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**(2):12701 – 12707, 2007.

[31] N.M. Atakishiyev. On q-extensions of mehta's eigenvectors of the finite fourier transform. *Int. J. Mod Phys. A*, **21**:4993–5006, 2006.