



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Dos Sistemas Discretos con Solitones
Embebidos.**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA:

Silvia de Jesús González Perez Sandi.

DIRECTOR DE TESIS: **Dr. Jorge Fujioka Rojas.**

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DOS SISTEMAS DISCRETOS CON SOLITONES EMBEBIDOS.

por

Silvia de Jesús González Perez Sandi.

Para obtener el grado de:

Doctor en Física.

Posgrado en Física

UNAM

2008

Dedico la presente tesis a Mi Familia y a Mis Amigos.

A todos los que creyeron en mí.

Quiero agradecer a mis asesores:

Dr. Jorge Fujioka Rojas.

Dr. Enrique Cabrera Bravo.

así como a los miembros del jurado:

Dr. Máximo A. Agüero Granados.

Dr. Luis Benet Fernández.

Dr. Carlos Hernández Garcíadiego.

Dr. Rafael Pérez Pascual.

Dr. Rosalio Fernando Rodríguez Zepeda.

También quiero darle las gracias por la ayuda que me brindó al

Dr. Jorge Montemayor.

Gracias Señor.

INDICE

AGRADECIMIENTOS	ii
RESUMEN	iii
LISTA DE FIGURAS.....	viii
CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 2. SISTEMAS NO LINEALES.	4
2.1 Los solitones.	7
2.2 Caos.	19
CAPITULO 3. LOS ANTECEDENTES.	22
3.1 Solitones Brillantes y Solitones Oscuros.	22
3.2 Solitones Embebidos (SE).	26
3.3 Solitones embebidos, doblemente embebidos y familias.	29
CAPITULO 4. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS FINITAS Y LA RELACIÓN DE DISPERSIÓN	34
CAPITULO 5. SOLITONES EMBEBIDOS EN UNA RED.	41
5.1 Una Ecuación mNLS discreta.	42
5.2 Una Ecuación mKdV discreta.	65
CAPITULO 6. CONCLUSIONES	88
BIBLIOGRAFIA	91
APENDICE A. INHIBICIÓN DE LA RADIACIÓN.	100
APENDICE B. ECUACIONES DISCRETAS MÁS IMPORTANTES.	109
2.1 La ecuación de Toda.	109
2.2 La ecuación no lineal de Schrödinger discreta (DNLS).	113
2.3 Ecuación de Ablowitz-Ladik (AL-NLS).	115
APENDICE C. ERGODICIDAD.	117

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
3.1 a) Onda Viajera. b) Solitón Brillante. c) Solitón Oscuro.	23
3.2 Un haz de luz, cuyas componentes TM se muestran, propagandose en una guía de ondas cilíndrica.	30
5.1 Las funciones $\alpha(B\Delta x)$ y $\alpha(F\Delta x)$, las cuales son definidas, respectivamente, por las ecuaciones 5.12 y 5.16.	47
5.2 La relación de dispersión 5.21 con $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 > 0$ y cinco valores diferentes de D	51
5.3 La relación de dispersión, ecuación 5.21 con $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 < 0$, para tres diferentes valores de D	52
5.4 La amplitud, como función del tiempo, de un solitón de red perturbado regular, cuya condición inicial está dada por la ecuación 5.54, con $A_0 =$ 3.14 y $B_0 = 0.61870$	61
5.5 El perfil del solitón perturbado de la Fig.5.4 a $t = 100$	61
5.6 La intensidad de la FFT del solitón perturbado de la Fig.5.4.	62
5.7 Perfil de un solitón embebido ligeramente perturbado cuya condición inicial es dada por la ecuación 5.6, con $A_0 = 0.87$ y $B_0 = 0.43659$	63
5.8 La intensidad de la FFT del solitón cuyo perfil es mostrado en la Fig.5.7. . .	64
5.9 Perfiles del mismo solitón embebido perturbado de la Fig.5.7 para diferentes tiempos, donde podemos observar como se propagan las "alas".	64
5.10 La amplitud, como función del tiempo, del mismo solitón de las Figs. 5.7 a 5.9.	65
5.11 Relación de Dispersión asociada a la ecuación 5.56	72
5.12 Velocidad de fase para diferentes ε_3	73
5.13 La función $V(k\Delta x)$ para diferentes Δx y $\varepsilon_3^0 = 1$	74
5.14 La velocidad de fase de las ondas lineales (veces Δx) como función de κ (ecuación 5.76) para $\varepsilon_3 = 1$ y $\Delta x = 3$	76
5.15 La ecuación 5.81, para el Caso 1 de la Tabla 2. Los asteriscos muestran los números de onda donde se presentará la radiación al ser perturbado el solitón.	77
5.16 El solitón de red doblemente embebido, al tiempo $t = 20$, cuya condición inicial es dada por la ecuación 5.78 con $A_0/A = 1.143$. Los demás parámetros son los de la Tabla 2 Caso 1.	77
5.17 La intensidad de la FFT correspondiente al solitón doblemente embebido de la Fig.5.15	78
5.18 La velocidad de fase de las ondas lineales (veces Δx) como una función de κ . Para el caso 2 de la Tabla 2.	79
5.19 Se muestra el solitón de red embebido y perturbado al tiempo $t = 10$. Este evoluciona de la condición inicial dada por la ecuación 5.78, con los parámetros del caso 2 de la tabla 2 y con $A_0/A = 0.919$	79
5.20 La intensidad de la FFT del solitón embebido y perturbado cuya solución numérica corresponde a la Fig.5.19.	80

5..21	La evolución en el tiempo de la amplitud máxima alcanzada por el solitón. La curva superior nos muestra el caso de un solitón cuya amplitud inicial es mayor a la exacta, $A_0/A = 1.143$. La curva inferior corresponde a un solitón cuya amplitud inicial es menor que la exacta, $A_0/A = 0.857$. La línea recta representa la amplitud del solitón exacto. Son solitones doblemente embebidos con los parámetros de la Tabla 2 Caso 1.	82
5..22	La evolución en el tiempo de la máxima amplitud alcanzada por el solitón embebido y perturbado de la Tabla 2 Caso 2. La curva superior corresponde a una amplitud inicial mayor que la exacta, $A_0/A = 1.089$ y la curva inferior a una amplitud de $A_0/A = 0.905$, menor que la exacta. La línea recta representa la amplitud del solitón exacto.	83
5..23	La evolución en el tiempo de la máxima amplitud del solitón perturbado del Caso 3 de la Tabla 2, con una condición inicial dada por 5..78, y una $A_0/A = 0.857$	84
5..24	Evolución en el tiempo de dos solitones que colisionan, sus parámetros corresponden al caso 2 de la tabla 2. El movimiento de los solitones está determinado por $Q_1 = 3.315$, $a_1 = 15.7$ y $Q_2 = 7.9$, $a_2 = -9.0$, respectivamente.	86
5..25	El perfil de los solitones después de la colisión, Fig. 4.24, al tiempo $t = 11$.	86

RESUMEN

Este trabajo gira en torno de un nuevo tipo de solitones descubierto en 1997; que fueron bautizados en 1999 con el nombre de **Solitones Embebidos**, (SE). Los *Solitones Embebidos* poseen la frecuencia o la velocidad intrínseca dentro del intervalo de las ondas lineales. El objetivo de esta tesis fue la investigación de los **Solitones Embebidos Discretos**, (SED). Encontrándose los primeros SED's exactos, ellos son brillantes y oscuros, además, los hallamos: Estables e Inestables.

Los SED's brillantes inestables fueron encontrados en un sistema descrito por una versión discreta de la famosa ecuación no lineal de Schrödinger (NLS): La extensión considerada contiene términos dispersivos de segundo y cuarto orden, así como no linealidades cúbica y quinta. Pueden presentarse como soluciones a un sistema dado, al fijar los parámetros de la ecuación, un solitón brillante, un solo solitón brillante y uno oscuro, y dos solitones brillantes. La ecuación continua asociada a ella describe pulsos ópticos de corta duración.

Los SED's brillantes estables fueron encontrados en una discretización de una versión compleja de la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (cmKdV), la cual surge al estudiar la propagación de luz en cristales líquidos. Estos SED's aparecen en familias (i.e., no son soluciones aisladas). Además, pueden estar sencillamente embebidos o doblemente embebidos, comportandose de forma diferente ante perturbaciones.

Una característica especial de las versiones discretas presentadas aquí, fue la necesidad de incluir la interacción con primeros y segundos vecinos, lo cual es una novedad en los SED, ya que su existencia depende de ella.

Abstract

This work deals with a new type of solitons, which in 1999 were baptized **Embedded Solitons** (ESs). These solitons have been found in nonlinear optical systems, such as optical fibers or liquid crystals. The distinctive characteristic of the ESs is that they possess internal frequencies that are contained (or embedded) in the frequency range of the small-amplitude linear wave capable of propagating in this type of systems.

Until the year 2003 ESs had only been found in continuous systems, and nobody had considered the possibility that **Embedded Lattice Solitons** (ELs) could also exist in discrete systems. The aim of the present thesis was to investigate if ELs indeed exist.

The outcome of this investigation was positive, and we found two different discrete systems with *exact* ELs. In one of these systems the ELs turned out to be isolated and unstable solutions, but in the second case the ELs are stable and occur in families.

The unstable ELs were found in a system described by a discrete version of a generalized nonlinear Schrödinger (NLS) equation. This extended NLS equation contains second and fourth order dispersive terms, as well as cubic and quintic nonlinearities. This equation describe the propagation of very short (sub-picosecond) optical pulses in optical fibers with saturable nonlinearities.

The stable ELs were found in a discrete version of a complex modified Korteweg-de Vries (cmKdV) equation. This equation was found while studying the propagation

of light in liquid crystal. In this case we found two types of ELSs that we called *single embedded* and *double embedded*. These two types of ELSs are both stable, but behave differently upon perturbations.

A distinctive characteristic of the two systems with ELSs that we found in the present study is that in both cases the interactions with the *nearest and next-nearest neighbors* (NNN) are taken into account. The introduction is a novelty in discrete systems with soliton solutions.

Another interesting property of the two discrete systems studied in this thesis is that both of them have exact dark solitons. However, the stability and other properties of these dark solitons were not studied in this work.

CAPITULO 1.

INTRODUCCIÓN

La inquietud que dió origen al presente trabajo fue la posible existencia de solitones embebidos en sistemas discretos, es decir, en sistemas donde la coordenada espacial sólo puede tomar valores enteros.

Los solitones embebidos en medios continuos fueron descubiertos en 1997 por Fujioka y Espinosa³⁰, su característica principal es: Existen dentro del intervalo de frecuencias de las ondas lineales de amplitud infinitesimal asociadas al sistema. Infringiendo así una regla que hasta entonces se consideraba "obligada" para los solitones. Sin embargo, estos nuevos solitones eran soluciones aisladas; es decir, dado un medio solamente se podía encontrar un solo solitón.

La búsqueda de la existencia de solitones embebidos en otros sistemas, llevó al encuentro de familias de ellos. En Rodriguez⁷² se reportan no sólo solitones embebidos, sino solitones doblemente embebidos y familias de ellos.

Sabiendo que las versiones discretas de ecuaciones continuas que poseen soluciones solitónicas también presentan solitones, el siguiente paso de esta línea de investigación fue el diseño de dos ecuaciones discretas asociadas a los sistemas con solitones embebidos. Este es el tema de la presente tesis. La primera ecuación discreta encontrada presenta solitones regulares, solitones embebidos y dos solitones con distinta forma si las propiedades del medio lo permiten; los solitones aquí son estáticos. Por otra parte, la segunda ecuación discreta encontrada nos conduce a la presencia de familias de solitones que pueden moverse a través de la red y que son embebidos y doblemente

embebidos. En ambos casos se comprobó que al pasar de un medio discreto a un medio continuo, las ecuaciones discretas se transformaban en las ecuaciones originales, esto es, en las ecuaciones continuas con solitones embebidos.

Algo en lo que hay que poner énfasis es: Los resultados obtenidos difieren de los resultados de los modelos continuos, característica usual que se presenta en la discretización de las ecuaciones continuas.

Para las simulaciones numéricas de las ecuaciones encontradas se utilizó el método de Runge-Kutta de 4° orden y la transformada de Fourier rápida (FFT).

Al presente trabajo se le encuentran las siguientes deficiencias: No se hicieron las simulaciones numéricas de los solitones oscuros en ambas ecuaciones y faltó investigar si dado cualquier pulso inicial, éste decae en un solitón. Debemos mencionar además que nos fue imposible encontrar las hamiltonianas asociadas a las ecuaciones trabajadas.

Se deja para investigaciones posteriores el demostrar la integrabilidad del segundo sistema, ya que lo sugiere la presencia de una familia continua de solitones que se mueven y la elasticidad de las colisiones. Otros resultados que deben ser profundizados son: La familia ampliada de solitones y la relación de los números de onda con la oscilación amortiguada de los solitones perturbados. Además es necesario estudiar el mapeo originado por estas ecuaciones.

Esta tesis es el resultado del trabajo presentado en los siguientes artículos:

S. González-Pérez-Sandi, J. Fujioka, B.A. Malomed. *Embedded solitons in dynamical lattices*. Physica D, **197** (2004) 86-100.

B.A. Malomed, J. Fujioka, A. Espinosa-Cerón, R.F. Rodríguez and S. González. *Moving embedded lattice solitons*. Chaos. **16** (2006) 013112.

y está organizada de la siguiente manera:

El capítulo 2 es una breve reseña de los sistemas no lineales que, de manera natural, han conducido a la presencia de solitones y de conductas dinámicas diferentes.

En el capítulo 3 encontramos los antecedentes de este trabajo y vemos la definición de los solitones brillantes y oscuros. Se hace un resumen de cada una de las ecuaciones continuas asociadas a las desarrolladas aquí, siendo la parte fundamental de este capítulo presentar a los solitones embebidos o doblemente embebidos, así como la estabilidad, la unicidad y la presencia de familias de solitones.

En el capítulo 4 presentamos la obtención de las ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas a partir de la relación de dispersión. Utilizamos la idea de los operadores espaciales y temporales en su versión discreta.

La existencia de solitones embebidos o doblemente embebidos y la posibilidad de tener familias de solitones en redes no lineales es estudiada en el capítulo 5.

El último capítulo está dedicado a las conclusiones.

También presentamos un apéndice donde se demuestra el porque los solitones embebidos de las ecuaciones estudiadas no radían a menos que sean perturbados. Uno dedicado a las tres ecuaciones discretas que a mi parecer son las más importantes. Y otro dedicado a la ergodicidad.

CAPITULO 2.

SISTEMAS NO LINEALES.

Un sistema dinámico es aquel cuyos estados evolucionan en el tiempo o en el espacio. Los estados del sistema están descritos por un número de variables dinámicas que dependen del tiempo o de la posición. Cuando la evolución del sistema es continua, las variables se describen mediante una ecuación diferencial; mientras que si es discreta, ésta evolución viene expresada por medio de iteraciones entre las variables. Al definir un estado del sistema, las variables se dividen en dependientes e independientes; las primeras son funciones de las segundas, que vienen siendo las coordenadas de la posición y el tiempo.

Un sistema no sólo está descrito por éstas variables dinámicas, sino también por algunas variables, las cuales llamamos parámetros, que nosotros podemos controlar.

El comportamiento del sistema puede ser diferente para distintos valores de los parámetros; por ej. para un cierto rango de valores de los parámetros, el movimiento de un sistema puede ser armónico, y fuera de ese intervalo su movimiento puede ser caótico.

Esta diferencia de comportamientos llevó a la clasificación de los sistemas físicos:

I.- En lineales:

- Como el caso de la cuerda donde el principio de superposición es válido, esto es, cualquier onda puede ser expresada como la suma de ondas armónicas con diferentes frecuencias. El comportamiento oscilatorio del sistema permanece aún cuando se cambie la magnitud de los parámetros que definen al sistema.

- En el caso del resorte lineal, donde al aplicar una fuerza sobre el sistema éste responde de manera proporcional a la magnitud de la fuerza.

II.- En los no lineales encontramos:

- Lo anterior no se cumple.
- Las ecuaciones de evolución en el tiempo presentan términos en la variable dependiente del estilo z^2 , $z(\partial z/\partial x)$, etc., que no son términos lineales.
- Las propiedades del sistema dependen directamente del estado en él que se encuentra. Por ejemplo, en un medio óptico el espectro de oscilaciones depende no sólo de los parámetros del sistema, sino también de la onda que se propaga en él.

La no linealidad en los sistemas hace difícil su estudio, no obstante genera una gran diversidad de fenómenos no triviales, como son los solitones y el caos. El estudio extensivo que se llevó a cabo en la segunda mitad del siglo XX sobre los solitones y el caos se debe a la aparición de las fibras ópticas y las computadoras, ya que sin éstas tecnologías, las teorías de los solitones y del caos no se hubieran desarrollado como lo hicieron.

En 1914, Debye sugirió que la conductividad térmica de una red es finita, debido al carácter inarmónico de las fuerzas no lineales en los resortes que unen los puntos de la retícula. El efecto neto de las interacciones (colisiones de fonones) debería manifestarse por sí mismo en una ecuación de difusión con un coeficiente de transporte finito.

Enrico Fermi, John Pasta y Stan Ulam (FPU) retomaron la idea en 1955, proponiendo un modelo para el estudio de la conductividad térmica. El modelo utilizado

fue una retícula unidimensional formada por partículas unidas por resortes, que eran débilmente no lineales, cuyos extremos están fijos. La hipótesis de FPU era demostrar que la energía se repartiría entre los modos normales de vibración, alcanzando el sistema un estado estacionario, en el cual todos los estados con la misma energía fueran igualmente probables. El estudio se llevó a cabo por medio de una simulación numérica.

Los resultados obtenidos por Fermi, Pasta y Ulam, no correspondieron a sus expectativas. FPU encontraron que, al poner la energía en unos pocos modos bajos de vibración, la energía no tuvo la tendencia a dispersarse a los otros modos.

El modelo utilizado tiene como hamiltoniana

$$H = \sum_{l=1}^N \left[p_l^2 + \frac{1}{2} (q_{l+1} - q_l)^2 + \frac{\alpha}{3} (q_{l+1} - q_l)^3 + \frac{\beta}{4} (q_{l+1} - q_l)^4 \right], \quad (2..1)$$

donde q_l y p_l son las coordenadas y momentos de la partícula l , con α y β parámetros de acoplamiento no lineal, y donde la masa m , la constante armónica del resorte k y el tiempo t han sido eliminados por medio de una transformación.

Cuando $\alpha = 0$, se dice que el modelo es un $\beta - FPU$ y si $\beta = 0$ se le conoce como $\alpha - FPU$.

Los autores dan diferentes valores a α y β , y diferentes condiciones iniciales. En particular estudiaron el caso $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{4}$ y $A_1 = 4 \sum_{l=0}^{32} \text{Sen}(l\pi/32)$, consideraron una red de 32 partículas, y excitaron el modo más bajo de vibración. Al contrario de lo que suponían, encontraban que sólo los modos comprendidos entre el primero y el sexto eran excitados. Después de un cierto tiempo, llamado tiempo de retorno, el sistema regresaba al modo fundamental con una energía de aproximadamente 3% menos que la inicial.

FPU reconocieron que el resultado era sorprendente debido a 2 hechos:

- 1.- No sigue los cánones de la mecánica estadística, la cual asegura que este sistema no lineal debería exhibir una aproximación al equilibrio con una repartición de la energía entre todos los grados de libertad.
- 2.- Parece invalidar el teorema sobre la ergodicidad de los sistemas no lineales (ver apéndice C).

Tratando de dar una explicación a los resultados obtenidos por FPU, los investigadores se encontraron con 2 líneas de estudio: Los solitones y el caos.

2.1 Los solitones.

Los solitones son un tipo de ondas que debían desaparecer y sin embargo permanecen. Tenían que desaparecer por la no linealidad del sistema, pero los términos no lineales son compensados por los términos dispersivos haciendo posible su existencia.

Estas ondas fueron descubiertas en 1834 por James Scott Russell en un canal de agua profunda, empero fueron bautizadas hasta 1965. J. S. Russell observó que el agua acumulada en la proa de un bote proseguía su curso cuando el bote era frenado repentinamente. Este cúmulo de agua tenía forma de secante hiperbólica y recorría grandes distancias sin cambiar su forma.

También constató que si la cantidad de agua acumulada era suficiente, se podían formar una o más ondas solitarias viajeras independientes, cuya altura y rapidez eran diferentes. Estas ondas interactuaban entre sí y al final recuperaban su forma y su rapidez inicial sin cambio aparente.

Observó que a mayor amplitud de la onda, ésta tenía una mayor rapidez.

Boussinesq, en 1872, y Rayleigh, en 1876, encontraron que la solución viene dada como una secante hiperbólica cuadrada. Boussinesq descubrió una cantidad conservada que él llamó momento de inestabilidad.

En 1895 Diederik Korteweg y Hendrik de Vries hacen público su estudio sobre ondas largas débilmente no lineales, esto es, hallaron la ecuación que rige la elevación de la superficie libre del agua relativa a la profundidad d que no sufre disturbios. Dicha ecuación es conocida ahora como la KdV:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

donde $u(x, t)$ representa la amplitud pequeña de las ondas largas sobre la superficie libre del agua, T es la tensión superficial, ρ la densidad del agua y d profundidad del tanque de agua. Quedando

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{gd} \text{ la velocidad de fase de las ondas largas lineales,} \\ \epsilon &= v \left(\frac{d^2}{6} - \frac{T}{2g\rho} \right) \text{ parámetro de dispersión,} \\ \gamma &= \frac{3v}{2d} \text{ parámetro no lineal.} \end{aligned}$$

Los autores encontraron como solución:

$$u(x, t) = k^2 \operatorname{Sech}^2(k(x - ct)),$$

quedando la amplitud como función del número de onda. Los términos dispersivos y no lineales de la ecuación están balanceados⁽¹⁾.

¹Esta ecuación presenta además soluciones multisolitónicas y multiracionales, esto es N-Solitones y N-Racionales.

Para 1939, Yakov Frenkel y Tatiana Kontorova⁷⁶ presentaron un modelo para el estudio de las dislocaciones estacionarias en cristales y su movimiento. El problema presentado por los autores está en una dimensión discreta, la posición de los átomos, con un potencial periódico espacial

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n - \frac{\kappa}{2\pi} \text{Sen}(2\pi u_n),$$

cuya versión continua es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A \text{Sen}(2\pi u), \quad (2..3)$$

conocida como la ecuación de Sine-Gordon, SG⁽²⁾.

Las soluciones más conocidas de la SG son lo que hoy se conoce como "kink" y "antikink" dadas por

$$u(x, t) = 4 \text{Tan}^{-1} \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right],$$

donde el signo (+) está asociado con "kink" que decae por la izquierda. El signo (-) nos da "antikink", decayendo por la derecha. La $v \in (-1, 1)$.

Otra solución es lo que se conoce como "breather"

$$u(x, t) = 4 \text{Tan}^{-1} \left[\frac{\sqrt{1 - w^2}}{w} \frac{\text{Sen}(wt)}{\text{Cosh}((x - x_0) \sqrt{1 - w^2})} \right],$$

está exponencialmente localizada en el espacio, siendo periódica en el tiempo.

En 1955 apareció el trabajo de FPU considerado como el punto de partida para el desarrollo de la teoría de solitones.

²Utilizando las transformaciones de Bäcklund, se puede encontrar una solución nueva a partir de una solución vieja o inicial y permite la construcción de soluciones multisolitónicas.

Fue en 1961 cuando Gross y Pitaevskii, de manera separada, publicaron la ecuación no lineal de Schrödinger, NLS

$$j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + u(r)\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (2.4)$$

para estudiar "la función de onda" de las partículas de un condensado de Bose en un gas diluido. Donde $\psi(r, t)$ es "la función de onda", \hbar la constante de Planck, m la masa de los átomos, $u(r)$ potencial de atrapamiento y g es una cantidad proporcional a la longitud de dispersión entre colisiones y $j = \sqrt{-1}$.

La versión más conocida y estudiada es en una dimensión y viene dada por

$$j\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm |u|^2u = 0, \quad (2.5)$$

donde $u(x, t)$ es una función compleja de variables reales. Por lo que la magnitud y la fase de esta función son gobernadas por la ecuación. Las soluciones resultan ser ondas solitarias viajeras.

Cuando la NLS es usada como modelo de paquete de ondas clásicas en campos como la hidrodinámica, la acústica no lineal y ondas en plasmas, sus soluciones son libres del carácter cuántico. Ella describe la evolución de la envolvente de un tren de ondas y contiene en ella, la solución de ondas viajeras incorporando el concepto de un paquete de ondas.

Este paquete de ondas fundamental es fuertemente dispersivo, casi monocromático y débilmente no lineal. La ecuación en sí representa un balance entre la dispersión lineal, la cual tiene la tendencia a fragmentar el paquete de ondas, y el efecto de enfocamiento debido a la no linealidad cúbica, mirada como una interacción de la onda consigo misma.

Perring y Skymore, en 1962, utilizaron la ecuación SG como modelo para partículas elementales en la materia. Su estudio numérico del problema, muestra la perfecta recuperación de la forma y rapidez de dos ondas solitarias viajeras que colisionan dando una descripción analítica exacta de éste fenómeno.

Para 1965, Norman Zabusky y Martin Kruskal, siguiendo el trabajo de FPU, presentaron su estudio numérico de masas unidas por resortes no lineales y cuya ecuación resultó ser la KdV. Las condiciones que los autores usaron para la simulación numérica son: Una onda sinusoidal como condición inicial y condiciones de frontera periódicas.

Martin Kruskal y Norman J. Zabusky (ZK) al hacer una aproximación al continuo del problema $\alpha - FPU$ encontraron que la ecuación de movimiento en el límite de orden más bajo toma la forma:

$$Q_{tt} = Q_{xx} + \varepsilon Q_x Q_{xx}, \quad (2.6)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales.

Al considerar que la velocidad de la onda c depende de la derivada espacial Q_x , esto es $c^2 = 1 + \varepsilon Q_x$, la conducta generada por la ecuación 2.6, para $\varepsilon > 0$, es la de un pulso asimétrico que se mueve hacia la derecha, cuyo frente va cambiando hasta convertirse en un frente de choque vertical, instante en el cual la ecuación deja de ser válida.

ZK trataron de evitar este comportamiento e introdujeron un término dispersivo:

$$Q_{tt} = Q_{xx} + \varepsilon Q_x Q_{xx} + \beta Q_{4x}. \quad (2.7)$$

Por conveniencia, ellos se quedan con las condiciones de frontera periódicas, restringuen su atención a ondas que viajan en una sola dirección y escogen un sistema de referencia

que se mueve con $c = 1$. Haciendo los siguientes cambios de variable: $x = \sigma + t$, $t = \tau/\varepsilon$ y $Q_x = Q_\sigma = 2u$ y despreciando los términos proporcionales a ε^2 , los autores obtuvieron la ecuación conocida como la KdV:

$$u_\tau + u_\sigma u + \delta^2 u_{3\sigma} = 0. \quad (2.8)$$

ZK integraron numéricamente la ecuación 2.8, usando como condición inicial una función coseno y condiciones de frontera periódicas.

Una sorpresa fue lo que obtuvieron al observar sus resultados, ya que la forma inicial deviene en un número finito de pulsos, con alturas y velocidades diferentes. Los autores muestran que las ondas más altas viajan más rápido. Si dos de estas ondas chocan, ellas reaparecen con su forma y su velocidad inicial. El carácter no lineal de la interacción se manifestaba en la posición que tenían después del choque, ya que si la colisión no hubiera existido, estarían en otra posición.

Encontraron que para un cierto tiempo, estos pulsos casi se sobreponen todos, obteniendo la forma inicial y el tiempo que tarda en ocurrir esto, correspondiente al tiempo de retorno encontrado por FPU. A la mitad de este tiempo, los pulsos se dividen en dos grupos cuyos miembros se enciman entre sí, formando el segundo armónico. Los demás armónicos son formados de manera semejante.

Para excitaciones de longitudes de onda larga, la aproximación de ZK provee un buen acercamiento a lo encontrado por FPU, mientras que para longitudes de onda corta, ésta aproximación ya no es válida.

Para Zabusky y Kruskal, el hecho de que las ondas recobrarán su forma y velocidad después del choque, les sugirió la idea de que las ondas tenían una identidad propia

y decidieron llamarlas *solitones*, de manera semejante a las partículas elementales.

Fueron estos resultados los que le abrieron la puerta a lo que hoy se conoce como Teoría de Solitones. Aún cuando no fueron Zabusky y Kruskal los que los descubrieron.

También en 1965, M. Rich, W. M. Visscher y D. N. Payton estudiaron numéricamente la propagación de ondas en una retícula no lineal, usando potenciales Lenard-Jones. El estudio se realizó en redes de 1 y 2 dimensiones con muchas impurezas de diferentes masas, encontrando que la transferencia de energía fue generalmente aumentada por la introducción de los términos de interacción no lineales. Estos resultados fueron explicados considerando que la energía se acumulaba en forma de solitones.

Debido a las propiedades encontradas por Zabusky y Kruskal, en 1967 Gardner, Greene, Kruskal y Miura³², piensan que existen simetrías escondidas y leyes de conservación que están conectadas con estas propiedades y desarrollan lo que ahora se conoce como Método de Dispersión Inversa⁽³⁾. GGKM encuentran una cantidad infinita de cantidades conservadas y logran resolver el problema de condiciones iniciales para la ecuación KdV.

También en 1967, McCall y Hahn⁵³ descubrieron el fenómeno de transparencia autoinducida⁽⁴⁾. Ellos asumieron un medio formado por átomos con dos niveles no

³En resumen:

- La dinámica de la ecuación KdV es mapeada sobre un problema de dispersión lineal asociado, donde cada valor característico del problema lineal corresponde a la rapidez de un solitón particular de la KdV.
- Se calcula la evolución en el tiempo de los datos de dispersión lineal asociados.
- El cálculo de dispersión inversa determina la evolución en el tiempo de la dinámica de la KdV de los datos de dispersión evolucionados.

Una manera simplificada de este método se puede encontrar en J. Fujioka³⁰

⁴La transferencia autoinducida es producida por inversión de la población atómica por el paso de un pulso, retornando a su estado inicial cuando el pulso termina de pasar. Este proceso es realizable si

degenerados y despreciaron el efecto de ensanchamiento. El proceso puede ser descrito en términos de una ecuación SG. En este caso la x es la distancia desde el comienzo del medio, t es el tiempo retardado y la envolvente del campo eléctrico $E(x, t)$ es proporcional a $\partial u / \partial x$.

En 1972, Zakharov y Shabat hallaron que la ecuación 2.5 es integrable por el método de dispersión inversa, demostrando así que el método puede ser usado en diferentes ecuaciones.

La solución más simple (con el signo +) es un pulso exponencialmente localizado, es decir, un solitón dado por:

$$u_{sb}(x, t) = \eta \operatorname{Sech}(\eta(x - ct - x_0)) e^{j(cx - wt + \phi_0)},$$

donde $w = (c^2 - \eta^2)/2$ es la frecuencia intrínseca del solitón, η es la amplitud, c su velocidad, x_0 y ϕ_0 son la coordenada del centro del solitón y su fase a $t = 0$.

Estos solitones existen en la región de frecuencias donde los modos de radiación son ausentes. Esto es, si linearizamos la ecuación y encontramos su relación de dispersión, encontramos la región de frecuencias permitidas de las ondas lineales de amplitud infinitesimal asociadas al problema no lineal. Los solitones regulares no pueden tener su frecuencia intrínseca dentro de esta región, ya que esto haría que el solitón perdiera energía emitiendo ondas lineales (radiación).

La ecuación 2.5 tiene también soluciones de la forma de ondas continuas, CW

$$u_{cw}(x, t) = \eta e^{\pm j\eta^2 t}, \eta \in \mathbb{R}.$$

este toma sitio en un tiempo corto comparado con el tiempo de memoria de fase del medio y también depende de la intensidad del pulso.

Para el signo $(-)$, la ecuación 2..5 presenta la siguiente solución

$$u_{sd}(x, t) = \eta [(Cos\theta) Tanh [\eta ((Cos\theta) (x - ct))] + jSen\theta] e^{j\eta^2 t},$$

donde η es la amplitud de las ondas continuas que están en el fondo, θ el valor mínimo del campo en el centro de la solución y c su velocidad. Esto es, ésta onda se mueve sobre las ondas continuas.

Paralelamente a este trabajo, Hasegawa y Tappert³⁶, publicaron en 1973, un trabajo que se convirtió en punta de lanza para uno de los desarrollos tecnológicos más importantes del siglo XX: las telecomunicaciones. Demostrando que la envolvente⁽⁵⁾ de una onda de luz, que se propaga en una fibra óptica en distancias grandes, puede ser descrita por la ecuación 2..5.

El desarrollo de la nueva tecnología implicó que se consideraran variantes de la NLS. La descripción de pulsos ultra cortos llevó a la inclusión de términos dispersivos adicionales como son: $j\varepsilon_3\partial^3u/\partial t^3$, $\varepsilon_4\partial^4u/\partial t^4$. Y en el estudio de los pulsos intensos o de fibras dopadas con semiconductores se consideraron términos no lineales de orden superior como: $\gamma_1|u|^2u$, $\gamma_2|u|^4u$, $\gamma|u|^2/(1 + \Gamma|u|^2)$.

Estas tres ecuaciones (KdV, SG, NLS) dieron lugar a lo que hoy se conoce como Teoría de Solitones, y se encuentran en los siguientes campos de investigación:

La KdV

- Física de Plasmas.⁸⁷

⁵La interacción de dos ondas cuyas frecuencias difieren ligeramente presentan un patrón de interferencia de longitud de onda larga. Esta superposición de ondas puede ser vista como el producto de dos ondas. La primera, tiene un número de onda y una frecuencia que son el promedio de los números de onda y de las frecuencias originales, respectivamente. La segunda se le conoce como envolvente, viaja con la velocidad de la onda mas rápida y su longitud de onda es mas larga.

- Redes eléctricas y líneas de transmisión no lineales.⁷¹

La SG

- Propagación de defectos en cristales.⁵⁰
- Dominio de paredes en materiales ferroeléctricos y ferromagnéticos.⁷⁶
- Partículas elementales en una dimensión.⁷⁶
- Transparencia autoinducida de pulsos cortos.¹⁸
- Propagación de unidades de cuantos de flujo magnético sobre las líneas de transmisión largas de Josephson.⁵⁴

La NLS

- Propagación de paquetes de ondas hidrodinámicas en aguas profundas.³⁷
- Pulsos no lineales de luz en una fibra óptica.^{4, 5}
- Una onda plana de autoenfoco en dos dimensiones.⁵⁷
- Una onda monocromática automodulada en una dimensión.⁹³
- Ondas de Langmuir en plasmas.⁹²

Además se han encontrado diversos tipos de solitones:

- Algebraicos o racionales.
- Soluciones aisladas o en secuencia.

- Kink, antikink y breather.
- Temporales o espaciales.
- Los *Boomeron*, *Trappon*, *Compactons*, *loop soliton* y *cusp soliton* (las referencias se encuentran en Scott⁷⁶).
- Brillantes u oscuros.
- Regulares, embebidos o doblemente embebidos.

A los solitones conocidos como algebraicos o racionales, así como las soluciones aisladas o en una secuencia (estas últimas se les conoce como cadena de solitones o solitones periódicos), se les encuentra como soluciones de las ecuaciones KdV, mKdV, KP (es una extensión de la KdV que presenta una dimensión espacial más) y la BO cuya solución es conocida como solitón de Benjamín-Ono.

El nombre de solitones *temporales* o *espaciales* depende en donde esta ocurriendo el confinamiento de luz cuando la onda se propaga. En los primeros éste confinamiento ocurre en el tiempo, para los segundos se tiene en el espacio. Ambos tipos de solitones se transmiten en los medios ópticos que presentan efecto Kerr, esto es, medios donde el índice de refracción sufre cambios no lineales debido a la intensidad de la luz. La dependencia del índice de refracción con respecto a la intensidad del haz lleva al auto-enfoque (auto-desenfoque) espacial y a la auto-modulación temporal del haz⁴⁴.

Un progreso rápido en el desarrollo de las comunicaciones ópticas ha convertido a los solitones temporales en el candidato principal para el diseño de sistemas modernos de transmisión de ondas de luz⁴⁴.

Los principales solitones espaciales⁷⁶ son haces ópticos que están autoatrapados en el espacio en la dirección transversal ortogonal a la dirección de propagación. En un medio no lineal de auto-desenfoco se pueden encontrar los solitones de anillo (ellos son ondas solitarias oscuras con simetría de anillo).

Otro tipo de solitones es el descubierto en un cristal fotorefractivo (PR) parcial dentro de un campo eléctrico de externo. Ellos son conocidos como solitones espaciales PR. Cuando son solitones estables en un cristal PR se conocen como solitones de proyección. Es conocido que el efecto de difusión de cargas fotoexcitadas lleva a la curvatura de la trayectoria de los solitones PR, dando lugar a los solitones auto-curvados.

En el campo de la memoria óptica se encuentran los solitones de cavidad. Cuando se tienen materiales con no linealidad no-instantánea (interna) se tienen los solitones incoherentes que son multimodos y auto-atrapados.

Un fenómeno interesante se presenta en la formación de solitones por el atrapamiento mutuo de ondas que interactúan, a este tipo de solitones se le conoce como solitones caminantes. Cuando se tienen pulsos localizados en tres dimensiones en un medio de auto-enfoque con dispersión anómala sin cambios en el espacio o tiempo se les conoce como Balas de luz.

Algunos experimentos donde pueden ser vistos los solitones son:

I La ecuación de SG puede ser estudiada por medio de un dispositivo mecánico que consiste de un alambre de torsión horizontal del cual pende la cuerda de un péndulo que puede girar alrededor del alambre⁷¹.

II Se puede construir un modelo de una línea de transmisión mecánica usando una banda elástica (liga) y alfileres. Ella sirve como una aproximación continua a la ecuación de SG donde se pueden observar los "kinks". Al aumentar la masa en la cabeza de los alfileres, se transforma en la ecuación SG discreta con un pequeño término disipativo extra, $\Gamma \partial \theta_n / \partial t$ que puede ser ignorado a primera aproximación^{21, 71}.

III Kuwabara⁴⁸ diseña un tanque de agua donde pueden ser observados los solitones que fueron descubiertos por Russell. Tiene una longitud (m) mucho mayor que su ancho (cm) y su altura (cm). La altura del agua en el tanque es de pocos centímetros, el tanque posee un compartimento de pared móvil que contiene una cantidad de agua cuya altura es mayor a la del resto del tanque inicialmente, al moverse ésta pared se genera una acumulación de agua como en el caso de la proa del experimento original. Cuando es frenada, ésta acumulación sigue moviéndose dando origen a los solitones.

2.2 Caos.

El otro descubrimiento fue hecho por Boris Chirikov al reconocer que los datos iniciales usados por FPU situaban al sistema en la región de estabilidad de KAM, esto es, el sistema FPU exhibe la conducta esperada para un sistema cercanamente integrable. También presentó evidencias teóricas de que si FPU hubieran aumentado la no linealidad, ellos hubieran encontrado Caos.

Esto puede ser visto al considerar un sistema $\alpha - FPU$ con tres partículas y

condiciones de frontera periódicas, cuya hamiltoniana viene dada por:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 p_l^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 (Q_{l+1} - Q_l)^2 + \frac{\alpha}{3} \sum_{l=1}^3 (Q_{l+1} - Q_l)^3, Q_4 = Q_1, \quad (2..9)$$

haciendo algunas transformaciones,^{7, 28, 81} se obtiene:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3, \quad (2..10)$$

que corresponde al problema de Hénon-Heiles, cuyas propiedades caóticas ya han sido estudiadas.

Para la hamiltoniana 2..10 se tiene:

- 1.- La energía es una cantidad que se conserva, $H = E$.
- 2.- p_1 está determinado a partir de $E = E(q_1, q_2, p_1, p_2)$.
- 3.- Las órbitas pueden ser trazadas en un espacio de tres dimensiones.
- 4.- Si $q_1 = 0$ y $p_1 > 0$, los puntos de intersección de la órbita con el plano (q_2, p_2) para cada valor de la energía, presentan una imagen global de la conducta orbital.

Hénon-Heiles usan la energía como un parámetro.

Para $E = 1/12$, encuentran unas curvas que parecen existir en todas partes, indicando la posibilidad de una constante de movimiento diferente a la energía y la integrabilidad del sistema y su no ergodicidad.

Ahora para $E = 1/8$, las curvas persisten en la vecindad de los puntos fijos a lo largo de los ejes q_2 y p_2 , ellas corresponden a órbitas periódicas, pero además, los autores encontraron que las órbitas en esta región generaron una dispersión de puntos

en el plano y que dos condiciones iniciales cercanas produjeron órbitas cuya distancia de separación creció exponencialmente con el tiempo.

Cuando $E = 0.1667 < 1/6$, los puntos llenaron casi todo el plano, existiendo curvas cerradas muy pequeñas en la vecindad de los puntos fijos. Para $E = 1/6$ el movimiento ya no es acotado escapando al infinito.

Este comportamiento está considerado como una evidencia de la transición al caos en un sistema de dos cuerpos, ya que el cambio de conducta de estable a caótica es abrupto.

Como un resumen y a pesar de lo que parece, el descubrimiento de los solitones fue opacado por la teoría del caos, sin embargo, el desarrollo de las fibras ópticas le dió un gran impulso.

CAPITULO 3.

LOS ANTECEDENTES.

Los antecedentes de la presente tesis, fueron los trabajos siguientes:

Uno de 1997 presentado por J. Fujioka y A. Espinosa-Cerón²⁹ . Y el segundo por Rodriguez et al^{72, 24, 22} del año 2003.

En ellos aparecen por primera vez los solitones brillantes embebidos y doblemente embebidos. Es por eso que damos un breve resumen de ellos, así como el por qué surgen los nombres de solitones brillantes y oscuros.

3.1 Solitones Brillantes y Solitones Oscuros.

Un solitón espacial, en el campo de la óptica, es aquel donde la luz está atrapada en el espacio y en la dirección transversal a la dirección de propagación.

En una guía de ondas ópticas, la luz está confinada en el espacio. Esto se debe a un balance entre la difracción y la refracción del medio homogéneo. La propagación de la luz en una guía de ondas óptica está descrita por una ecuación de onda lineal inhomogénea, las soluciones son modos característicos localizados espacialmente, llamados modos de la guía.

El mismo resultado se obtiene al considerar efectos no lineales, como el cambio del índice de refracción del medio; de manera que el índice sea más grande en la región donde la intensidad del haz sea mayor. En este caso el haz está creando su propia guía de ondas y está atrapado en ella.

El solitón espacial puede ser pensado como el modo fundamental de esta guía de ondas.

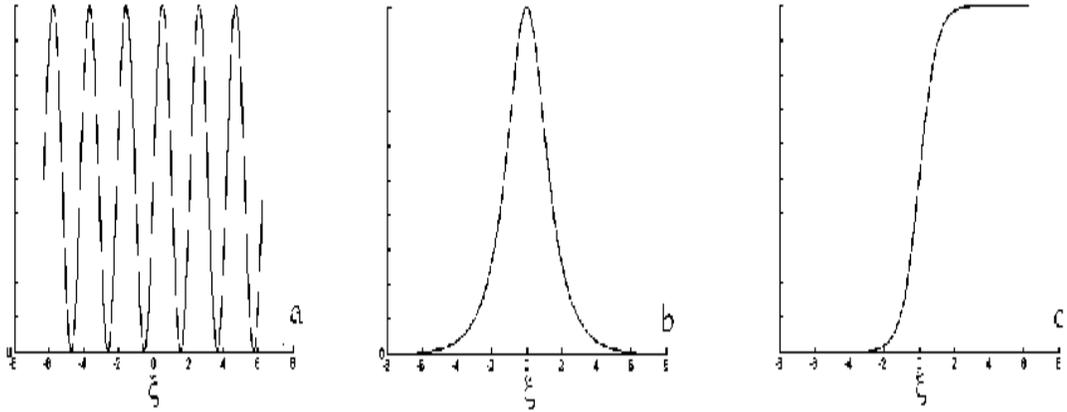


Figure 3.1: a) Onda Viajera. b) Solitón Brillante. c) Solitón Oscuro.

La ecuación principal que gobierna la evolución del campo óptico en medios no lineales es la conocida NLS, que puede ser escrita de forma adimensional como:

$$j \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \gamma |u|^2 u = 0, \quad (3.1)$$

si aquí reemplazamos la variable z por t obtenemos la ecuación original de cuántica, o podemos cambiar el término $(\beta_2/2)(\partial^2 u/\partial x^2)$ por $(\beta_2/2)(\partial^2 u/\partial t^2)$ dando origen a los solitones temporales (representan pulsos ópticos que mantienen su forma durante la propagación, su existencia está ligada a las fibras ópticas), con β_2 el parámetro de dispersión de la velocidad de grupo y γ el parámetro de no linealidad. En los solitones espaciales $\beta_2 = \gamma = 1$, mientras que en los solitones temporales $\beta_2 = \pm 1$, $\gamma = 1$. Donde $u(x, z)$ es la amplitud de la envolvente del haz, y suponemos variando lentamente con z .

La ecuación 3.1 puede ser solucionada exactamente usando el método de dispersión inversa.

La definición de solitones brillantes y oscuros se da a partir de las soluciones de la ecuación 3.1.

Para el signo (+) se tienen los solitones brillantes y para el signo (-) los solitones oscuros.

Se le llama solitón brillante porque corresponde a un pulso de luz⁷¹ y la solución más simple que preserva su forma viene dada por

$$u(x, z) = a \operatorname{Sech} [a(x - vz)] e^{j(vx + (a^2 - v^2)z/2)}, \quad (3.2)$$

donde v es la velocidad transversal del solitón que se propaga haciendo un ángulo con el eje z .

Cuando $v = 0$ se tiene el modo fundamental de la guía de ondas autoinducida por la propagación del haz. Si el haz tiene ésta forma, toda la energía estará contenida en éste modo y el haz se propagará sin cambios en su forma. Cuando la forma del haz inicial no es exactamente así, parte de la energía deberá ser puesta en los modos acotados de orden alto o en los modos de radiación de la guía de onda no lineal, los cuales fueron encontrados si se resolvió el problema por medio del método de dispersión inversa.

Cuando $v \neq 0$ se encuentra que los solitones brillantes forman una familia de dos parámetros (a, v) . Algunos experimentos donde se presentan solitones brillantes pueden ser encontrados en Mollenauer et al⁶⁰.

En la ecuación que gobierna los solitones temporales se encuentran no sólo los solitones brillantes ($\beta_2 = -1$, régimen de dispersión anómalo) sino también solitones oscuros ($\beta_2 = 1$, régimen de dispersión normal).

En el contexto de la óptica, un solitón oscuro corresponde a un hoyo en la onda continua (ver capítulo anterior) portadora de la luz; la posición donde la luz está ausente⁷¹ Este solitón viene dado por

$$u(x, z) = u_0 \{(\text{Cos}\phi) \text{Tanh} [u_0 (\text{Cos}\phi) (x - u_0 (\text{sen}\phi) z) + j (\text{Sen}\phi)]\} e^{-ju_0 z}, \quad (3..3)$$

donde ϕ está relacionado con el cambio de fase que sufre el solitón oscuro. La u_0 es la amplitud de las ondas continuas donde viaja (el "background").

La comparación de 3..2 y 3..3 muestra que el término $u_0 \text{Sen}\phi$ juega el rol de la velocidad del solitón en la dirección x . Y representa la velocidad relativa del solitón oscuro con respecto a las ondas continuas sobre las que viaja. Como podemos observar en la ecuación 3..3, la rapidez del solitón oscuro depende de su amplitud.

Cuando $\phi = 0$ tenemos un solitón oscuro estacionario

$$u(x, z) = u_0 \{\text{Tanh} [u_0 x]\} e^{-ju_0 z},$$

él no se mueve con respecto a su fondo, recibiendo el nombre de solitón negro dado que sufre un cambio de fase en $x = 0$ y la intensidad cae a cero en ese punto. Cuando $\phi \neq 0$ se les llama grises.

Los solitones brillantes tienen una fase constante, mientras los oscuros cambian su fase a través de su anchura (la $\text{tanh}(x)$ es antisimétrica).

Algunos experimento para solitones oscuros en un circuito fueron realizados por Muroya et al⁶² .

A pesar de que la denominación de brillantes y oscuros nació en la óptica, ahora en cualquier campo donde se presenten solitones cuya estructura matemática venga dada por 3..2 y 3..3 reciben esos nombres.

3.2 Solitones Embebidos (SE).

En el capítulo 2 se mencionan las ecuaciones KdV, la SG y la NLS como las detonantes del desarrollo de la teoría de solitones. Y en la sección anterior encontramos que la ecuación NLS presenta como soluciones a lo que ahora se conoce como los solitones brillantes y los solitones oscuros.

Y como ya se mencionó, la NLS presenta solitones cuya frecuencia intrínseca está fuera del rango de las frecuencias lineales permitidas al sistema, ya que si esto no ocurriera el solitón desaparecería emitiendo ondas, esto es, en forma de radiación. Pero, en 1997 se propuso una modificación de esta ecuación cuyo aporte principal fueron "los pulsos semejantes a un solitón que no emiten radiación a pesar de tener un número de onda inmerso en el espectro lineal del sistema"^{29, 22} .

A este tipo de pulsos se les llamó solitones embebidos y su característica principal es que su frecuencia o su velocidad de fase intrínsecas caen en la región de las frecuencias o velocidades de fase lineales asociadas al sistema no lineal. Ellos resultan ser estados excepcionales por esta característica ya que sólo emitirán ondas lineales si son perturbados.

Estos solitones fueron identificados en 1997 por J. Fujioka y A. Espinosa-Cerón²⁹ . Los autores los encontraron en modelos ópticos no lineales que incluían no linealidades cúbicas y quintas, y posteriormente fueron descubiertos en hidrodinámica y en la dinámica de cristales líquidos.

Fujioka y Espinosa-Cerón estudiaron la ecuación generalizada de Schrödinger:

$$j \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0, \quad (3.4)$$

que describe la propagación de pulsos intensos muy cortos en materiales tipo no-Kerr, donde $u(z, t)$ es la envolvente del campo eléctrico que varía lentamente y donde ε_i y γ_i son constantes. En la descripción de pulsos de luz en fibras ópticas la z corresponde a la distancia a lo largo de la fibra y la t es el tiempo retardado.

Al intercambiar $z \rightarrow t$ y $t \rightarrow z$ en la ecuación 3.4, se tiene una ecuación que gobierna la evolución espacial de haces ópticos compactos (tight optical beam) en una guía de onda plana con los términos no lineales cúbico y quinto y donde el término $\partial^4 u / \partial z^4$ es una corrección a la aproximación paraxial usual. La aplicación de este modelo fue obtenido de manera experimental por F. Smektala et al⁷³ y por C. Zhan⁹⁰

La 3.4 con ε_i y $\gamma_i > 0$ tiene tanto soluciones tipo solitones brillantes como solitones oscuros dados por:

Solitones Brillantes	Solitones Oscuros
$u(z, t) = A_1 \text{Sech}(\frac{t}{w_1}) e^{jk_1 z}$	$u(z, t) = A_2 \text{Tanh}(\frac{t}{w_2}) e^{jk_2 z}$
$A_1^2 = \frac{\gamma_1}{2\gamma_2}$	$A_2^2 = 4\sqrt{3\varepsilon_4/2\gamma_2}/w_2^2$
$k_1 = \frac{5\gamma_1^2}{32\gamma_2}$	$k_2 = -\frac{3\varepsilon_2^2}{50\varepsilon_4} - \frac{\varepsilon_2\gamma_1}{25\varepsilon_4} \sqrt{3\varepsilon_4/2\gamma_2} + \frac{6\gamma_1^2}{25\gamma_2}$
$w_1^2 = 14\varepsilon_4/\varepsilon_2$	$w_2^2 = \frac{20\varepsilon_4}{\varepsilon_2 + 2\gamma_1\sqrt{3\varepsilon_4/2\gamma_2}}$

Donde la velocidad y el número de onda dados por $\frac{1}{w_1}$, k_1 y $\frac{1}{w_2}$, k_2 , respectivamente, son de los solitones brillantes y oscuros, y donde los coeficientes ε_i y γ_i satisfacen la siguiente relación para los solitones brillantes:

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} = \frac{24\gamma_2}{49\gamma_1^2}.$$

Como se dijo antes, la característica principal de estos solitones es la presencia de la frecuencia intrínseca del solitón dentro del intervalo de las frecuencias de los modos de radiación y que, a pesar de ello, el solitón no radía, esto es, el solitón está embebido.

La ecuación 3.4, con $\gamma_2 = 0$ presenta soluciones tipo solitón que no radian si $\varepsilon_2 < 0$ y $\varepsilon_1, \gamma_1 > 0$ y cualquier solución con $\varepsilon_2 > 0$ emitirá radiación ya que las ondas lineales asociadas al sistema se presentarían en esta región. Para $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_1 > 0$ se tienen soluciones tipo onda solitaria si ambos γ_1 y γ_2 son positivos o negativos. Cuando son negativos la solución es inestable y una ligera perturbación en su altura la lleva a dispersarse o a estallar en una distancia finita.

Los autores realizaron su estudio por medio de una simulación numérica para los solitones brillantes que son embebidos .

El espectro de frecuencias, que están permitidas en este sistema, se encuentra al obtener la relación de dispersión lineal

$$\pm k_1 = \varepsilon_4 \omega^4 - \varepsilon_2 \omega^2, \quad (3.5)$$

ella nos da los números de onda que se presentarían en las ondas radiadas por el solitón si este se perturbara.

Estas simulaciones se hicieron dando una amplitud más grande y más pequeña que la solución exacta y su comportamiento fue observado en un tiempo suficientemente largo. Encontraron que el solitón más grande decaía al solitón exacto, mientras que el solitón más pequeño no mostraba tendencia a estabilizarse. La radiación emitida se encuentra en los valores dados por 3.5. Comprobaron, además, que si el solitón no es perturbado, no emite radiación.

También encuentran que la altura y el ancho del solitón oscilan de manera amortiguada, concluyendo que este comportamiento se debe a la emisión de radiación.

Estos *SE* son de gran utilidad ya que presentan una resistencia extraordinaria

a las perturbaciones que pueden desintegrarlos. Matemáticamente, estos solitones embebidos son soluciones semiestables y son únicos.

Un poco después, en 1999, fueron encontrados otros dos sistemas que presentan este tipo de solitones, uno por Champneys, Malomed y Friedman, y el otro por Yang, Malomed y Kaup⁸⁵. Fue en este año que se acuñó el nombre de Solitones Embebidos.

3.3 Solitones embebidos, doblemente embebidos y familias.

Las ecuaciones KdV, NLS y SG son ecuaciones que aparecen en la teoría de los cristales líquidos (LC).

La KdV describe medios con términos dispersivos y no lineales débiles, mientras la NLS contempla situaciones donde la no linealidad es débil y el término dispersivo es fuerte, tal como se presentan en la propagación de señales en fibras ópticas de LC.

A diferencia de la ecuación 3.4, la ecuación presentada en esta sección surge de modelar la propagación de pulsos ópticos a través de una fibra cilíndrica de cristal líquido con las moléculas alineadas y teniendo un medio tipo Kerr, Fig. 3.2. Ella es una versión compleja de la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (mKdV).

Este modelo fue presentado por Rodriguez et al^{72, 24, 22} en el año 2003 y muestra que los modos magnéticos transversales están gobernados por

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \gamma |u|^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.6)$$

la cual difiere de la ecuación 2.2 en:

- $u(z, t)$ es una función compleja.
- Aquí consideramos el tiempo retardado.

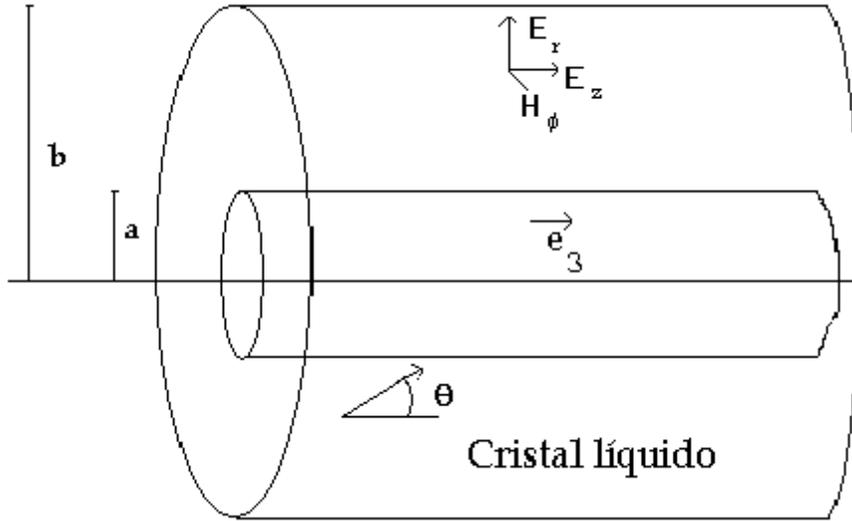


Figure 3.2: Un haz de luz, cuyas componentes TM se muestran, propagándose en una guía de ondas cilíndrica.

- Se intercambiaron las variables $t \rightarrow z$ y $x \rightarrow t$.
- Aquí tenemos $\gamma|u|^2\partial u/\partial t$ y en la otra se estudia $u\partial u/\partial x$.

Esta ecuación presenta solitones brillantes y oscuros dados por:

Brillantes	Oscuros
$u(z, t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t-az}{w}\right) e^{j(qz+rt)}$	$u(z, t) = B \operatorname{Tanh}\left(\frac{t-bz}{v}\right) e^{j(Qz+Rt)}$
$A^2 w^2 = 6\varepsilon/\gamma$	$B^2 v^2 = -6\varepsilon/\gamma$
$a = 3\varepsilon r^2 - \frac{1}{6}\gamma A^2$	$b = 3\varepsilon R^2 - \frac{1}{6}\gamma B^2$
$q = \frac{1}{2}\gamma A^2 r - \varepsilon r^3$	$Q = \gamma B^2 R - \varepsilon R^3$
ε y γ deben tener signos iguales	ε y γ tienen signos contrarios

La condición sobre los parámetros ε y γ se debe precisamente al balance entre

la no linealidad y la dispersión. Donde la velocidad y el número de onda intrínseco

son: $\frac{1}{w}$, $q + ar$ y $\frac{1}{v}$, $Q + bR$ para para los solitones brillantes y oscuros respectivamente.

Para ambos tipos de solitones podemos observar que la solución presenta cinco parámetros, teniendo tres como función de los otros dos, generando así una familia de solitones de dos parámetros. Para los solitones brillantes, estas familias pueden ser vistas de la siguiente manera: Dado los valores de ε y γ se fija el producto $A^2 w^2 = cte.$, y por lo tanto, obteniendo una infinidad de valores de A y w tales que su producto siempre será el mismo. Ahora bien, para que tanto a como q se mantengan iguales es necesario variar r . De manera similar pueden verse las familias de los solitones oscuros.

Los autores encuentran que el número de onda intrínseco es $(q + ar)$ para los solitones brillantes y que la relación de dispersión lineal es

$$k = \varepsilon\omega^3 - a\omega, \quad (3.7)$$

de aquí concluyen que, el rango de los números de onda permitidos a las ondas lineales son el conjunto de los reales y por lo tanto, el número de onda intrínseco del solitón está inmerso en este intervalo.

Este hecho nos dice que todos los solitones brillantes estan embebidos de acuerdo al criterio de la frecuencia.

El recíproco de la velocidad de fase asociada a una onda plana de amplitud infinitesimal

$$u_0 = \rho e^{j(kz - \omega(t - az))}, \quad (3.8)$$

viene dado por:

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{k}{\omega} + a,$$

mientras la velocidad de fase recíproca obtenida por medio de la relación de dispersión

es:

$$\frac{k}{\omega} = \varepsilon\omega^2 - a,$$

de donde

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \varepsilon\omega^2,$$

concluyendo que los solitones brillantes están embebidos de acuerdo al criterio de velocidades de fase si $a\varepsilon > 0$. Esto es, el solitón presenta una velocidad que se encuentra contenida en el intervalo de la velocidad de fase de las ondas lineales permitidas al sistema.

Cuando se cumplen las dos condiciones anteriores, $a\varepsilon > 0$ y $(q + ar)$ real, entonces se dice que el solitón brillante está doblemente embebido. Ahora, si $a\varepsilon < 0$ sólo tenemos al solitón embebido en su número de onda.

El estudio numérico de un solitón brillante embebido que es perturbado muestra:

- El solitón tiene una velocidad recíproca diferente a la exacta, ya que ella depende de la amplitud.
- Se genera una onda de radiación de amplitud pequeña emitida por la parte derecha del pulso.
- Al sacar el espectro de Fourier de esta onda se encuentra que corresponde a las frecuencias de radiación predichas por: $\varepsilon\omega^3 - a\omega \mp (q + ar) = 0$.
- Al considerar amplitudes por arriba y por debajo de la amplitud exacta, encontraron que los solitones se estabilizaban en amplitudes diferentes a la exacta.

Concluyendo así que los solitones brillantes son estables.

Al perturbar al solitón doblemente embebido, los autores^{24, 22} encuentran que se mueve a lo largo de su eje temporal y que su amplitud oscila al igual que su ancho. El amortiguamiento de esta oscilación es muy lento, requiriendo un tiempo mayor para ver su estabilización. La presencia de un tren de ondas de amplitud muy pequeña se presenta en el lado derecho del solitón y el espectro muestra las frecuencias donde se tiene resonancia con las ondas lineales tanto en su frecuencia como en su velocidad de fase.

Su estudio muestra que tanto el embebimiento en la velocidad de fase como en el de la frecuencia, tienen la misma importancia en el proceso.

CAPITULO 4.

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS FINITAS Y LA RELACIÓN DE DISPERSIÓN .

En el estudio de la propagación de ondas en un medio, se considera generalmente que la permitividad o la velocidad de fase de la onda se mantienen constantes con respecto a la frecuencia temporal. Sin embargo, en muchos casos, la permitividad o el índice de refracción, que son propiedad del medio donde se propaga la onda, son funciones de la frecuencia o la longitud de onda, que son las propiedades de la onda que se propaga en el medio.

Cuando el índice de refracción del medio, η , depende de la frecuencia de la onda, ω , es frecuente hablar de la relación de dispersión; que viene dada como una función de $k(\omega)$, donde k es el número de onda.

Por ej.: En los medios ópticos, los materiales usados cambian sus propiedades al aplicarseles un campo externo, por lo que su índice de refracción depende del campo aplicado. En otros medios, la geometría influye en la onda que se propaga.

La relación de dispersión puede escribirse en cualquiera de las siguientes formas:

$$\omega = W(k),$$

$$k = K(\omega),$$

y haciendo el desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto (ω_0, k_0) encontramos la relación de dispersión usada en la descripción de un pulso óptico que se propaga en

un medio no lineal:

$$\omega = \omega_0 + \beta_1(k - k_0) + \beta_2(k - k_0)^2 + \beta_3(k - k_0)^3 + \beta_4(k - k_0)^4 \theta, \omega_0 > 0, (4.1)$$

$$\omega = -\omega_0 + \beta_1(k + k_0) - \beta_2(k + k_0)^2 + \beta_3(k + k_0)^3 - \beta_4(k + k_0)^4, \omega_0 < 0 (4.2)$$

donde la ω es función de k y donde las β s son proporcionales a las parciales de ω con respecto a k evaluadas en el punto (ω_0, k_0) . Estas ecuaciones describen una región pequeña en la curva de dispersión, alrededor del punto. Hay que recordar que una onda que se propaga en la dirección $+z$ tiene $(\pm\omega, \pm k)$, mientras que una onda que se propaga en la dirección $-z$ presenta $(\mp\omega, \pm k)$.

Dependiendo del sistema estudiado, uno tendrá diferentes términos en las ecuaciones 4.1 y 4.2. Por ej. en las ecuaciones que representan propagaciones bidireccionales se tienen usualmente términos cuadráticos.

Haciendo

$$\Omega = \omega - \omega_0,$$

$$\kappa = k - k_0,$$

que representan las bandas alrededor de (ω_0, k_0) , en la ecuación 4.2 se cambia el signo $-$ por el $+$. Podemos escribir

$$\Omega = \beta_1\kappa + \beta_2\kappa^2 + \beta_3\kappa^3 + \beta_4\kappa^4. (4.3)$$

que replaza a las ecuaciones 4.1 y 4.2, ya que los signos de esta última se incluyen en las β s.

Ahora bien, si consideramos una onda dada por

$$u_n = \rho e^{j(\omega t - kn\Delta x)}, (4.4)$$

con ρ la amplitud infinitesimal, la frecuencia ω , la k constante de propagación, con t el tiempo continuo y n un índice discreto que representa la posición de las partículas en un medio discreto, podemos encontrar los siguientes operadores

$$k^m \rightarrow \frac{1}{(-j)^m} \Delta_m, \quad (4.5)$$

$$\omega \rightarrow -j \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.6)$$

donde $m = 1, 2, 3, 4$ y Δ_m son los operadores en diferencias finitas mencionados en esta tesis (ver siguiente capítulo). El operador temporal, ecuación 4.6, es igual al utilizado en medios continuos.

Conociendo la relación de dispersión, uno puede hallar la ecuación diferencial parcial asociada a una onda en el medio utilizando los operadores anteriores. Haciendo esto para 4.3, donde utilizamos los operadores con estas nuevas variables, κ y Ω , obtenemos la siguiente ecuación:

$$-j \frac{\partial u_n}{\partial t} = \beta_1 \left(\frac{1}{-j} \right) \Delta u_{en} + \beta_2 \left(\frac{1}{-j} \right)^2 \Delta_2 u_n + \beta_3 \left(\frac{1}{-j} \right)^3 \Delta_3 u_n + \beta_4 \left(\frac{1}{-j} \right)^4 \Delta_4 u_n, \quad (4.7)$$

agrupando términos

$$-j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta_1 \Delta \right) u_n = -\beta_2 \Delta_2 u_n - \beta_3 j \Delta_3 u_n + \beta_4 \Delta u_{en}, \quad (4.8)$$

y haciendo la siguiente transformación:

$$T = t + \beta_1 n \Delta x,$$

podemos escribir

$$-j \frac{\partial}{\partial T} u_n = -\beta_2 \Delta_2 u_n - \beta_3 j \Delta_3 u_n + \beta_4 \Delta u_n. \quad (4.9)$$

Como se menciono antes, las β 's son proporcionales a las derivadas parciales de ω con respecto a k evaluadas en el punto (ω_0, k_0) . Aquí β_1 es la velocidad de grupo y β_2 es una medida de la dispersión de la velocidad de grupo (GVD). A los términos β_3 y β_4 se les conoce como términos de dispersión de 3° (TOD) y 4° orden respectivamente.

Ahora bien, cuando la velocidad de fase, ω_0/k_0 , es igual a la velocidad de grupo, β_1 , se dice que el medio es no dispersivo. Y podemos escribir la ecuación de onda cinemática:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + v \Delta u_n = 0$$

aquí β_3 y β_4 son despreciados ya que el pulso es cuasimonocromático y su forma es practicamente una delta.

Si se tiene la envolvente de un pulso que se mueve a la velocidad de grupo β_1 , la β_2 es la responsable de que el pulso se ensanche, de ahí el nombre de dispersión de la velocidad de grupo. Dependiendo del signo de β_2 tenemos dos tipos de dispersión. Si $\beta_2 > 0$, se dice que se tiene el régimen de dispersión normal, donde las componentes de frecuencia alta (tendiendo al azul) viajan más lentamente que las componentes de frecuencia baja (tendiendo al rojo). Cuando $\beta_2 < 0$, se tiene el régimen de dispersión anómalo, aquí las frecuencias altas viajan más rápido que las bajas. A la longitud de onda en la que $\beta_2 = 0$, se le conoce como longitud de onda de dispersión cero⁸, λ_d , aún cuando no implica que la dispersión desaparezca totalmente, ya que existe una corrección debida al factor β_3 . También se utiliza β_3 cuando se tienen pulsos ultra cortos ($T_0 < 1ps$), aún cuando $\beta_2 \neq 0$ ⁵.

El régimen de dispersión anómalo es de considerable interés para el estudio de

efectos no lineales. Ya que es en este régimen en el que las fibras ópticas soportan a los solitones brillantes por medio del balance entre términos dispersivos y no lineales.

Una consecuencia de la presencia de TOD, es la distorsión del pulso de manera tal que se vuelve asimétrico, con una estructura oscilatoria en uno de sus lados⁵. Cuando $\beta_3 > 0$ y $\beta_2 = 0$ las oscilaciones se presentan en el borde derecho del pulso y sus oscilaciones decaen a cero. Cuando $\beta_3 < 0$ y $\beta_2 = 0$ esta estructura se presenta en el otro borde. Dependiendo del valor de β_2 las oscilaciones tenderán a desaparecer y el pulso presentará una larga cola.

El término β_4 se utiliza cuando β_2 y β_3 se compensan entre sí y también se recurre a él cuando $\beta_2 \rightarrow 0$, ya que es determinante para el cálculo del ancho de banda⁵.

Los efectos dispersivos de orden alto pueden distorsionar los pulsos ópticos ultracortos en los regímenes tanto lineales como no lineales por lo que su inclusión se hace cerca de λ_d .

La ecuación 4.9 resulta ser la ecuación parcial lineal diferencial y en diferencias finitas asociada a la relación de dispersión dada por las ecuaciones 4.1 y 4.2. En esta ecuación tenemos una mezcla de términos reales e imaginarios, por lo que la ecuación puede ser separada en dos, la parte real y la parte imaginaria.

Sin embargo, la ecuación 4.9 no posee a los solitones como solución, por lo que es necesario agregar los términos no lineales que nos permitirán obtenerlos:

$$j \frac{\partial u_n}{\partial T} + \beta_2 \Delta_2 u_n - j \beta_3 \Delta_3 u_n + \beta_4 \Delta_4 u_n = f(u_n, |u_n|^2, |u_n|^4, \Delta u_n), \quad (4.10)$$

donde la $f(u_n, |u_n|^2, |u_n|^4, \Delta u_n)$ es una función no lineal.

Para el presente estudio se recurre a dos funciones no lineales que dependen de los valores de las β s.

Cuando $\beta_3 = 0$:

$$f(u_n, |u_n|^2, |u_n|^4, \Delta u_n) = -\frac{1}{2}\gamma_1|u_n|^2(u_{n+1} + u_{n-1}) + \frac{2}{3}\gamma_2|u_n|^4(u_{n+2} + u_{n-2} + 4\alpha(u_{n+1} + u_{n-1})), \quad (4..11)$$

donde los coeficientes γ_1 y γ_2 están relacionados con la no linealidad en la curva de dispersión alrededor del punto (ω_0, k_0) . Esto es, a la ecuación 4..9 se le agregan los términos :

$$\frac{\partial\omega}{\partial(u_n)}|u_n|^2 \text{ y } \frac{\partial^2\omega}{\partial(u_n)^2}|u_n|^4$$

que equivale a decir que la ω es función de la amplitud finita de la onda, dependiente tanto de la velocidad de fase como del ancho del pulso⁴⁶. El término $|u_n|^2(u_{n+1} + u_{n-1})$ se debe a la dependencia del índice refractivo con la intensidad, llevando a lo que se conoce como fenómeno de auto-modulación de la fase, el cual hace que un pulso pueda experimentar un ensanchamiento espectral al viajar a través de la fibra, pero su forma permanece sin cambios. Al introducir los términos que están entre paréntesis en 4..11, nos queda la siguiente ecuación:

$$j\frac{\partial u_n}{\partial T} = -\varepsilon_2\Delta_2 u_n - \varepsilon_4\Delta_4 u_n - \frac{1}{2}\gamma_1|u_n|^2(u_{n+1} + u_{n-1}) + \frac{2}{3}\gamma_2|u_n|^4(u_{n+2} + u_{n-2} + 4\alpha(u_{n+1} + u_{n-1})), \quad (4..12)$$

donde β_2 y β_4 han sido sustituidos por $-\varepsilon_2$ y ε_4 , respectivamente, y donde γ_1 y γ_2 son proporcionales a $\partial\omega/\partial(u_n)$ y $\partial^2\omega/\partial(u_n)^2$, respectivamente.

Como se verá en el próximo capítulo, esta ecuación tiene solitones como solución.

Cuando $\beta_2 = \beta_4 = 0$, tomaremos:

$$f(u_n, |u_n|^2, |u_n|^4, \Delta u_n) = \frac{\sigma |u_n|^2}{12(\Delta x)} [\rho(u_{n+1} - u_{n-1}) - \delta(u_{n+2} - u_{n-2})]. \quad (4.13)$$

En este caso, el término no lineal $|u|^2 \Delta u$ se puede obtener si sustituímos, en la ecuación 4.9, β_1 por $\beta_1(1 - \sigma |u_n|^2 / \beta_1)$, donde el término adicional sale de considerar que se propaga una onda en un medio no lineal y ella induce una polarización cúbica, $P = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3$; lo que equivale a decir que el índice de refracción cambia en una cantidad proporcional a la intensidad óptica.

Este es un efecto que envuelve una gran variedad de procesos importantes que incluyen el auto-enfoque de un haz de laser, la auto-modulación de la fase, la reflexión de la fase conjugada, el cambio de autofrecuencia encontrado en pulsos ultracortos obtenidos debido a la ganancia de Ramman que es atribuida a las vibraciones moleculares asociadas con la susceptibilidad no lineal y los solitones.

Fue necesario la introducción de ρ y δ para conseguir la expresión 4.13, por lo tanto obtenemos:

$$\frac{\partial u_n}{\partial T} = \varepsilon_3 \Delta_3 u_n + \frac{\sigma |u_n|^2}{12(\Delta x)} [\rho(u_{n+1} - u_{n-1}) - \delta(u_{n+2} - u_{n-2})], \quad (4.14)$$

donde ε_3 toma el lugar β_3 y donde se canceló j en la ecuación 4.9 antes de formar esta ecuación.

Tanto para la ecuación 4.12 como para la 4.14, las diferencias finitas son las trabajadas en el siguiente capítulo.

CAPITULO 5.

SOLITONES EMBEBIDOS EN UNA RED.

Como ya se mencionó los *Solitones Embebidos (SE)* se descubrieron en 1997,²⁹ a partir de entonces se han encontrado en varios modelos no lineales continuos.

Los *SE* son soluciones complejas de ecuaciones diferenciales parciales asociadas a las fibras ópticas, entre otros medios, y el carácter de *embebido* se debe a que estos solitones presentan las siguientes características:

- Para los modelos ópticos no lineales el número de onda intrínseco del solitón está *inmerso o embebido* en el espectro continuo correspondiente a los modos de radiación.²⁹
- En el caso de la hidrodinámica se dice que están *embebidos* porque su velocidad de fase está contenida en el intervalo de velocidades de fase asociadas a las ondas lineales⁸⁶.
- En los medios dinámicos de cristales líquidos, se tiene que los *SE* están *doblemente embebidos*, ya que tanto su número de onda como su velocidad de fase toman valores que le son permitidos a las ondas lineales⁷².

Existen, además, otras propiedades interesantes de los *SE* como son:

- 1.- Existencia de familias continuas de *SE*, esto es, existen uno o más parámetros del solitón que pueden variar sin necesidad de cambiar al sistema.
- 2.- La estabilidad de estas familias: Se considera estable si su forma no se desvía grandemente bajo pequeñas perturbaciones e inestable si esto no ocurre.

3.- Su movimiento a través de la red es con velocidad constante y arbitraria.

Hasta antes de este trabajo (2004) sólo se tenían solitones regulares descritos por ecuaciones diferenciables y en diferencias no lineales, con excepción de dos casos:

- Los llamados "Phantom breathers"⁶¹ cuyos armónicos de orden alto caen en la banda de fonón, pero ellos sólo existen en redes finitas donde el espectro lineal es discreto y por lo tanto sus armónicos pueden encontrar espacio entre estas frecuencias para poder existir.
- En las redes de Frenkel-Kontorova se encontraron de manera numérica "kinks" embebidos, no así su expresión analítica.

Sabiendo que existen ecuaciones discretas que provienen de las ecuaciones continuas y que si la continua presentaba solitones se esperaba que también la discreta los presentara, nació la inquietud de pasar las ecuaciones 3.4 y 3.6 a versiones discretas que presentaran solitones. Para obtenerlas fue útil estudiar la ecuación de Ablowitz-Ladik (AL-NLS), ya que observando su estructura, se diseñaron las presentadas en esta tesis.

El siguiente paso fue investigar la existencia de *Solitones Embebidos o doblemente Embebidos en una Red (SER)*, esto es, encontrar SE en medios discretos y ver si ellos presentan las propiedades mencionadas arriba.

5.1 Una Ecuación mNLS discreta.

Como se sabe que soluciones semejantes a las encontradas en los sistemas continuos pueden ser esperadas en los sistemas discretos equivalentes y conociendo que la

ecuación, mencionada en el capítulo 3:

$$j \frac{\partial r}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 r}{\partial x^4} + \gamma_1 |r|^2 r - \gamma_2 |r|^4 r = 0 \quad (5.1)$$

posee *Solitones Embebidos*, donde se han intercambiado las variables x y t con respecto a las referencias^{29, 23} y siendo su expresión:

$$r(x, t) = A \operatorname{Sech}(Bx) e^{jCt} \quad (5.2)$$

se procedió a encontrar una ecuación discreta que presentara *Solitones Embebidos* y que en el límite $\Delta x \rightarrow 0$, se comportará como la continua³⁴.

5.1.1. La ecuación y sus soluciones.

La ecuación debe presentar tanto términos no lineales como términos dispersivos, asegurando así un sistema cuyas soluciones puedan ser tipo solitón. Esta ecuación viene dada por:

$$j \frac{\partial r_n}{\partial t} + \varepsilon_2 \Delta_2 r_n + \varepsilon_4 \Delta_4 r_n + \gamma_1^0 |r_n|^2 (r_{n+1} + r_{n-1}) - \gamma_2^0 |r_n|^4 (r_{n+2} + r_{n-2} + 4\alpha (r_{n-1} + r_{n+1})) = 0, \quad (5.3)$$

donde:

$$\Delta_2 r_n = (r_{n-1} + r_{n+1} - 2r_n) / (\Delta x)^2 \quad (5.4)$$

$$\Delta_4 r_n = (r_{n+2} + r_{n-2} - 4(r_{n+1} + r_{n-1}) + 6r_n) / (\Delta x)^4 \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{\varepsilon_2}{(\Delta x)^2}; \quad \varepsilon_4^0 = \frac{\varepsilon_4}{(\Delta x)^4}; \quad \gamma_1^0 = \frac{1}{2}\gamma_1; \quad \gamma_2^0 = \frac{2}{3}\gamma_2$$

con

$$r_n = r(n\Delta x, t)$$

que es una función de valor complejo la cual depende de la variable discreta n y del tiempo t continuo. Los coeficientes ε_2 , ε_4 , γ_1 , γ_2 , α y Δx son parámetros reales, donde Δx está asociada a la separación entre los puntos de la retícula.

Al comparar la ecuación 5.3 con la 5.1 vemos que los términos lineales $\varepsilon_2\Delta_2r_n$ y $\varepsilon_4\Delta_4r_n$ son justo las versiones en diferencias finitas de los términos lineales en 5.1.

El primer término no lineal en 5.3 tiene la forma de la expresión no lineal introducida por Ablowitz y Ladik cuando estudiaron la ecuación de Schrödinger no lineal (NLS) en su versión discreta² y el término de 5º orden es mucho más complicado que el mostrado en 5.1. Este tipo de no linealidad no había sido estudiado anteriormente.

La ecuación 5.3 tiene como soluciones pulsos de diferentes tipos:

1.- Solitones Brillantes, cuya expresión analítica es:

$$r_n = A \operatorname{Sech}(Bn\Delta x) e^{-jCt}, \quad (5.6)$$

2.- Solitones Oscuros, dados por:

$$r_n = E \operatorname{Tanh}(Fn\Delta x) e^{-jGt}. \quad (5.7)$$

Estos pulsos se muestran en las Fig.3.1 (b) y (c) respectivamente. Aquí A y E son las amplitudes, B y F son el número de onda y C y G son las frecuencias intrínsecas.

En los solitones brillantes, la solución 5.6, se tiene:

$$A^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_4}{\gamma_2^0}} \frac{\operatorname{Senh}^2(2B\Delta x)}{(\Delta x)^2}, \quad (5.8)$$

$$C = -2\varepsilon_2^0 (\operatorname{Cosh}(B\Delta x) - 1) - 4\varepsilon_4^0 (\operatorname{Cosh}(B\Delta x) - 1)^2, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
0 = & Cosh^6(B\Delta x) - \left(\frac{(\gamma_1^0)^2}{4\gamma_2^0 \varepsilon_4^0} + 1\right)Cosh^4(B\Delta x) + \left(\frac{\varepsilon_2^0}{4\varepsilon_4^0} - 1\right)Cosh^3(B\Delta x) \\
& + \frac{1}{4}Cosh^2(B\Delta x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2^0}{4\varepsilon_4^0} - 1\right)Cosh(B\Delta x) + \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_2^0}{4\varepsilon_4^0} - 1\right)^2, \quad (5..10)
\end{aligned}$$

que también puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{(\gamma_1^0)^2}{\gamma_2^0} = & \varepsilon_4^0 \frac{\left[\frac{\varepsilon_2^0}{4\varepsilon_4^0} - 1 + Cosh(B\Delta x)Cosh(2B\Delta x)\right]^2}{Cosh^4(B\Delta x)} \cdot \\
& \cdot \frac{[4Cosh^2(B\Delta x)(4\alpha Cosh(B\Delta x) + Cosh(2B\Delta x))]}{Cosh(2B\Delta x)(4Cosh^2(B\Delta x) - 1)}, \quad (5..11)
\end{aligned}$$

determinando las relaciones existentes entre los parámetros del sistema y los coeficientes de la solución. No obstante el conjunto de coeficientes de la ecuación $\{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \Delta x\}$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

- ε_4 y γ_2 deben tener el mismo signo (dado que el valor de A^2 debe ser positivo, ecuación 5..8).
- $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \gamma_1, \gamma_2$ y Δx deben ser tales que la ecuación 5..10 (considerada como un polinomio de grado sexto en $z = Cosh(B\Delta x)$) debe tener al menos una solución real más grande que uno, de ella puede ser obtenido el valor de B ; como se puede ver la α no entra en la determinación del valor del $Cosh(B\Delta x)$.
- Sin embargo, el valor de α debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{1 - 2Cosh^2(B\Delta x)}{16Cosh^3(B\Delta x)}, \quad (5..12)$$

donde el valor de $Cosh(B\Delta x)$ es determinado por la ecuación 5..10.

La ecuación 5..12 nos dice que α no es un parámetro libre sino que depende de los otros parámetros.

Ahora, para las soluciones tipo solitón oscuro, tenemos las siguientes relaciones entre los parámetros del solitón y los de la ecuación:

$$E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_4}{\gamma_2^0}} \frac{Tanh^2(2F\Delta x)}{(\Delta x)^2}, \quad (5..13)$$

$$\begin{aligned} 0 = & [4\varepsilon_4^0 - \varepsilon_2^0] Tanh^{10}(F\Delta x) \\ & + 3 [4\varepsilon_4^0 - \varepsilon_2^0] Tanh^8(F\Delta x) \\ & + \left[8\varepsilon_4^0 - 2\varepsilon_2^0 - 4\gamma_1^0 (\Delta x)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_4^0}{\gamma_2^0}} \right] Tanh^6(F\Delta x) \\ & + \left[-4\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2 (\Delta x)^2 - 4\gamma_1^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_4^0}{\gamma_2^0}} \right] Tanh^4(F\Delta x) \\ & + \left[-20\varepsilon_4^0 + 3\varepsilon_2^0 + 4\gamma_1^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_4^0}{\gamma_2^0}} \right] Tanh^2(F\Delta x) \\ & + \left[\varepsilon_2^0 + 4\gamma_1^0 \sqrt{\frac{\varepsilon_4^0}{\gamma_2^0}} \right], \end{aligned} \quad (5..14)$$

$$G = 2\varepsilon_2^0 Tanh^2(F\Delta x) + 2\varepsilon_4^0 [Tanh^2(2F\Delta x) - 4Tanh^2(F\Delta x)], \quad (5..15)$$

$$\alpha = - \left(\frac{1}{16} \right) Sech^2(F\Delta x). \quad (5..16)$$

Al igual que para los solitones brillantes tenemos 3 limitaciones:

- 1.- Los parámetros ε_4 y γ_2 deben tener el mismo signo (dada la ecuación 5..13).
- 2.- Los valores de $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \gamma_1, \gamma_2$ y Δx deben ser tales que la ecuación 5..14 (considerada como un polinomio de grado quinto en $z = Tanh^2(F\Delta x)$), tenga al menos una solución real en el rango $(0, 1)$. De esta solución obtenemos el valor de F , y de la misma manera que para el solitón brillante, la α no determina $Tanh^2(F\Delta x)$.

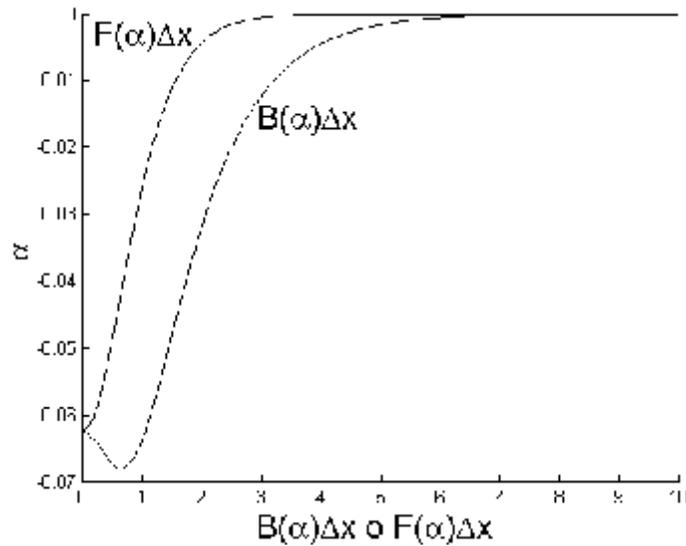


Figure 5.1: Las funciones $\alpha(B\Delta x)$ y $\alpha(F\Delta x)$, las cuales son definidas, respectivamente, por las ecuaciones 5.12 y 5.16.

3.- El valor de α debe satisfacer la ecuación 5.16, y por lo tanto no es un parámetro independiente. La gráfica de la función $\alpha(F\Delta x)$ es la curva superior de la Fig.5.1, como se mencionó antes. Y de ella concluimos que α deberá estar en el intervalo $[-1/16, 0)$ si queremos soluciones tipo solitones oscuros.

En la Fig.5.1 la curva inferior corresponde al valor de α como función de $B\Delta x$, mientras la superior tiene que ver con la ecuación 5.16. Observando, podemos inferir que para tener una solución tipo solitón brillante, es necesario que la α se encuentre en el rango de valores $[-(2/3)^{1/2}/12, 0)$. Además, al seleccionar α en el intervalo $[-(2/3)^{1/2}/12, -1/16]$ podemos obtener dos solitones diferentes con los mismos parámetros en la ecuación. En el caso de los solitones oscuros la $\alpha \in [-1/16, 0)$ y por lo tanto en el rango de $[-1/16, 0)$ podemos encontrar un solitón brillante y un solitón

oscuro. Resumiendo:

- La ecuación 5.3 tiene 6 parámetros $\{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \Delta x\}$. La solución tipo solitón brillante viene dada por 5.6. La relación entre las constantes de la solución y los parámetros de ella vienen expresados en las ecuaciones 5.8-5.12; uno de los parámetros no es independiente $\alpha \in -(2/3)^{1/2}/12, 0)$. Para la solución tipo solitón oscuro se utiliza las ecuaciones 5.13-5.16 y su expresión viene dada por 5.7, $\alpha \in -1/16, 0)$.
- Dos solitones brillantes coexisten al mismo tiempo si se restringe el intervalo de α , esto es, $\alpha \in -(2/3)^{1/2}/12, -1/16$, y, por lo tanto, dos de los parámetros quedan como función de los demás. No existe ningún rango donde coexistan dos solitones oscuros. Como un ejemplo de lo anterior, escogimos el valor de $\alpha = -0.065$, lo que nos lleva a los valores $B_1 = 0.954$ y $B_2 = 0.310$, si consideramos $\Delta x = \gamma_2 = \varepsilon_4 = 1$, entonces tenemos $\varepsilon_2 = 14.16$ y $\gamma_1 = 5.64$. Al sustituir estos valores en las ecuaciones 5.8 y 5.9, obtenemos los valores de $A_1 = 3.647$, $A_2 = 0.732$, $C_1 = -14.857$ y $C_2 = -1.385$, quedando determinados los dos solitones brillantes.
- Para tener al mismo tiempo, un solitón brillante y un solitón oscuro, debemos escoger la α en el intervalo $[-1/16, 0)$, y volviendo a tener dos parámetros que quedan como función de los restantes. Como ejemplo: si $\alpha = -0.05$, implica que $B_1 = 1.452$ y $F_1 = 0.481$, tomando $\Delta x = \varepsilon_4 = \gamma_2 = 1$, encontramos $\varepsilon_2 = 15.289$ y $\gamma_1 = -7.544$, lo que nos lleva a obtener $A_1 = 10.077$, $C_1 = -44.634$, $E_1 = 0.825$ y $G_1 = 5.627$. Pero también obtenemos $\varepsilon_2 = -7.289$ y $\gamma_1 = 5.730$ que nos conduce a $A_2 = 10.077$, $C_2 = 11.992$, $E_2 = 0.825$ y $G_2 = -3.405$. Este es un resultado

importante dado que existen pocos sistemas con esta propiedad. En sistemas continuos, esto se presenta en medios periódicos⁶⁵, y en sistemas descritos por la ecuación 5.1 o una ecuación similar que envuelva terminos dispersivos de tercer orden²³.

- Pero estos solitones no se mueven ni presentan familias.

5.1.2. Relación de Dispersión lineal.

Para saber si estos solitones son embebidos o no, se requiere encontrar el rango de frecuencias donde las ondas lineales asociadas al sistema existen. Introduciendo una onda plana, cuya amplitud es infinitesimal

$$r_n = \rho e^{j(kn\Delta x - \omega t)},$$

en la parte lineal de la ecuación 5.3, encontramos la relación de dispersión lineal asociada a ella:

$$\omega = 2\varepsilon_2^0(1 - \text{Cos}(k\Delta x)) - 4\varepsilon_4^0(1 - \text{Cos}(k\Delta x))^2, \quad (5.17)$$

resultando un polinomio de grado 2 en $\text{Cos}(k\Delta x)$. Como el $\text{Cos}(\theta)$ es una función par, implica que tenemos dos soluciones en el intervalo $[-1/2\Delta x, 1/2\Delta x]$. Y su velocidad de grupo viene dada por:

$$\frac{d\omega}{dk} = (\Delta x) \text{Sen}(k\Delta x) [2\varepsilon_2^0 - 8\varepsilon_4^0(1 - \text{Cos}(k\Delta x))]. \quad (5.18)$$

Si analizamos la ecuación 5.17, se observa que la frecuencia ω es una función periódica del número de onda k con período $2\pi/\Delta x$, esto significa que para una ω dada, la k no está unívocamente determinada. Sin embargo, al quedarnos en el rango

$-\pi \leq k\Delta x \leq \pi$ obtenemos toda la información, ya que las k 's que no se encuentren en este intervalo, son de ondas que se propagan en la misma dirección y $k\Delta x \rightarrow k\Delta x + 2\pi$ ¹¹

El rango de valores de ω está acotado y depende de los valores de $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ y Δx .

Definamos:

$$\omega_m \equiv 4\varepsilon_4^0, \quad (5..19)$$

$$D \equiv \frac{\varepsilon_2^0}{2\varepsilon_4^0}, \quad (5..20)$$

lo que nos permite escribir la relación de dispersión⁽¹⁾ como:

$$\frac{\omega}{\omega_m} = D [1 - \text{Cos}(k\Delta x)] - [1 - \text{Cos}(k\Delta x)]^2. \quad (5..21)$$

En la Fig.5.2. graficamos la relación de dispersión para 5 valores diferentes de D y donde consideramos que $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 > 0$.

De estas gráficas podemos inferir lo siguiente:

(i) Si $0 < D < 2$, implica que $0 < \varepsilon_2 (\Delta x)^2 < 4\varepsilon_4$, y la relación de dispersión nos da tanto frecuencias negativas como positivas, que se encuentran en el intervalo:

$$\omega_{\min} \equiv 4\varepsilon_2^0 - 4\omega_m < \omega < 2\varepsilon_2^0 - \omega_m. \quad (5..22)$$

(ii) Si $2 \leq D < 4$, entonces $4\varepsilon_4 < \varepsilon_2 (\Delta x)^2 < 8\varepsilon_4$, el rango de frecuencias contiene sólo valores positivos,

$$0 \leq \omega \leq 2\varepsilon_2^0/\omega_m. \quad (5..23)$$

¹Esta relación de dispersión no se parece a la trabajada en el capítulo anterior, sin embargo, si nosotros desarrollamos en serie la función $\text{Cos}(\theta)$ y agrupando las potencias, obtenemos la ecuación 4..5 al hacer $\beta_1 = \beta_3 = 0$.

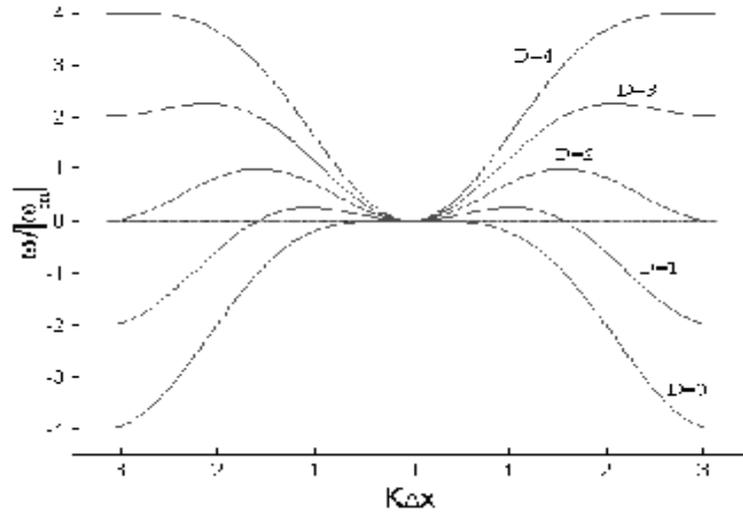


Figure 5.2: La relación de dispersión 5.21 con $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 > 0$ y cinco valores diferentes de D .

(iii) Si $D \geq 4$, con $\varepsilon_2 (\Delta x)^2 > 8\varepsilon_4$, la frecuencia siempre es positiva:

$$0 \leq \omega \leq 4\varepsilon_2^0 - 4\omega_m. \quad (5.24)$$

Si recordamos la ecuación 5.9, vemos que los solitones brillantes tienen un valor negativo como frecuencia intrínseca, $C < 0$, en el caso de $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 > 0$, la posibilidad de tener solitones brillantes embebidos en una Red (*SER*) sólo se presenta para $0 < D < 2$ y $\omega_{\min} < C < 0$. Esto significa que si perturbamos el solitón, este emitirá radiación en una frecuencia $\omega = C$. El solitón embebido que no es perturbado no presenta radiación por ser una de sus propiedades (ver apéndice A).

No se presentan *SER*'s cuando $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_4 > 0$ y $D \geq 2$.

Cuando $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 < 0$, obtenemos que las frecuencias en la relación de disper-

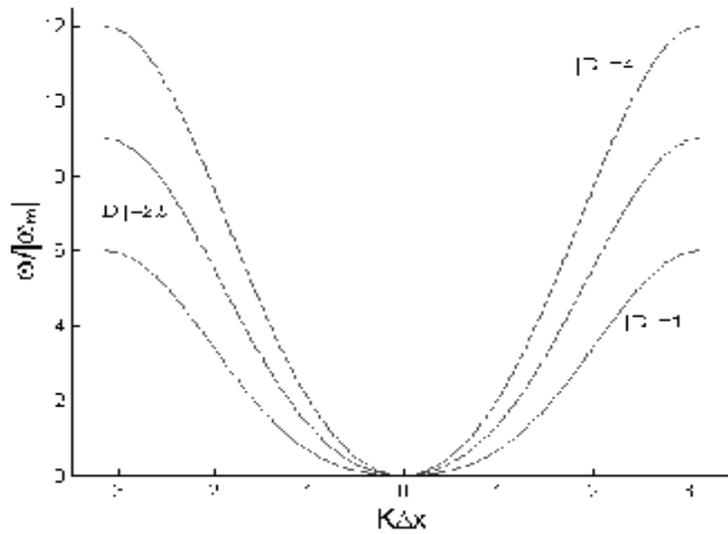


Figure 5.3: La relación de dispersión, ecuación 5.21 con $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_4 < 0$, para tres diferentes valores de D .

sión sólo son positivas y se localizan en el intervalo:

$$0 \leq \omega \leq 4\varepsilon_2^0 - 4\omega_m. \quad (5..25)$$

La Fig.5.3 nos muestra esto, como en este caso C , ecuación 5.9, puede ser positiva o negativa, los *SER*'s existen si los coeficientes Δx , ε_i y γ_i impliquen un valor positivo de C que se encuentre contenido en el rango mostrado en 5..25.

Cuando

$$|D| < \text{Cosh}(B \Delta x) - 1. \quad (5..26)$$

encontramos que $C < 0$ si $\varepsilon_2^0 > 0$ y $\varepsilon_4^0 > 0$, ahora cuando $\varepsilon_2^0 > 0$ y $\varepsilon_4^0 < 0$ se tiene que C puede ser positiva o negativa.

Y cuando

$$3 - \text{Cosh}(B \Delta x) > D > 1 - \text{Cosh}(B \Delta x) \quad (5..27)$$

se tienen solitones embebidos, resumiendo los casos $\varepsilon_2^0 > 0$ y $\varepsilon_4^0 \leq 0$.

De la Fig. 5.2, vemos que si $\omega = C < 0$ se tienen los valores $\pm k\Delta x$ y tendríamos un soliton que al ser perturbado emitiría radiación. El valor de k se encuentra con

$$k = \frac{1}{\Delta x} C \cos^{-1} \left[1 - \frac{\varepsilon_2^0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_4^0 C}{(\varepsilon_2^0)^2}} \right)}{4\varepsilon_4^0} \right]. \quad (5..28)$$

Es interesante observar que la separación entre los puntos de la red, Δx , puede influir para que un solitón sea embebido o no. Consideremos, por ejemplo, los casos mostrados en la Tabla 1.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>
ε_2	1	1
ε_4	24/49	24/49
γ_1	1	1
γ_2	1	1
Δx	2	1
A	2.73010	0.91513
B	0.61870	0.43659
C	-0.52655	-0.21203
α	-0.057320	-0.06660
ω	[0, 0.5102]	(-3.8367, 0.0408)

Tabla 1. Parámetros que corresponden a: Solitones regulares (caso 1) $D > 4$ y embebidos (caso 2) $0 < D < 2$.

La única diferencia entre ambos casos es la Δx , que es un parámetro de la ecuación. Para el caso 1 se tiene un valor de 2, mientras que para el caso 2 el valor de

$\Delta x = 1$. En el caso 1 el parámetro $D = 49/12 > 2$, definido en 5..20 y por lo tanto el solitón, 5..6, es no embebido (las frecuencias lineales son todas positivas mientras que $C < 0$). Ahora para el caso 2, las ecuaciones 5..9, 5..22 y 5..20 implican que $C = -0.212$, $\omega_{\min} = -3.837$ y $D = 49/48 < 2$, lo que nos lleva a $\omega_{\min} < C < 0$, y por lo tanto, el solitón es embebido y emitirá radiación al ser perturbado.

Uno puede considerar que $\Delta x = 1$ y variar los parámetros ε_2 y ε_4 de manera tal que los resultados anteriores se mantengan.

5.1.3. Paso al continuo o el límite de longitud de onda larga.

Hasta el momento hemos considerado longitudes de onda que son del orden de la distancia entre los puntos de la retícula, lo que permite observar lo discreto del medio. Sin embargo, al considerar longitudes de onda más grandes, podemos considerar que el medio se vuelve continuo; por lo que se va investigar que ocurre cuando hacemos $\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ y $n\Delta x = cte$.

Sea $u(x, t)$ una función compleja cuyos valores coinciden con aquellos de la función $r(n\Delta x, t)$ en los puntos de la red, $x = n\Delta x$. Tomando t fija y expandiendo en serie de Taylor la función $u(x, t)$ alrededor de los puntos de la retícula, vemos que $r_{n\pm m}$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_{n\pm m} &= r((n \pm m) \Delta x) = u((n \pm m)\Delta x, t) \\ &= u(n\Delta x, t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^l u^{(l)}(n\Delta x, t)}{l!} (m\Delta x)^l, \end{aligned} \quad (5..29)$$

donde $m = 1, 2, \dots$, $u^{(l)}(n\Delta x, t) = \partial^l u(x, t) / \partial x^l$ evaluada en $(n\Delta x, t)$ y Δx es la distancia entre partículas.

Recordando que las expresiones para $\Delta_2 r_n$ y $\Delta_4 r_n$ son las diferencias finitas

definidas en las ecuaciones 5..4 y 5..5 en lugar de la segunda y la cuarta derivada, y son obtenidas a partir de la serie de Taylor.⁴⁰

Utilizando la ecuación 5..29 obtenemos:

$$r_{n+1} + r_{n-1} = 2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2l}, \quad (5..30)$$

$$r_{n+2} + r_{n-2} = 2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (2\Delta x)^{2l}. \quad (5..31)$$

Por consiguiente:

$$\Delta_2 r_n = u^{(2)}(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2(l-1)} \quad (5..32)$$

y

$$\Delta_4 r_n = u^{(4)}(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=3}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (2^{2l} - 4) (\Delta x)^{2(l-2)}. \quad (5..33)$$

Sustituyendo estas expresiones en 5..3, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= j \frac{\partial u(n\Delta x, t)}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(u^{(2)}(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2(l-1)} \right) \\ &+ \varepsilon_4 \left(u^{(4)}(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=3}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (2^{2l} - 4) (\Delta x)^{2(l-2)} \right) \\ &+ \gamma_1^0 |u(n\Delta x, t)|^2 \left(2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2l} \right) \\ &- \gamma_2^0 |u(n\Delta x, t)|^4 \left[2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (2\Delta x)^{2l} \right] \\ &- 4\alpha\gamma_2^0 |u(n\Delta x, t)|^4 \left[2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2l} \right], \quad (5..34) \end{aligned}$$

por lo que ahora podemos determinar qué pasa con esta ecuación cuando tomamos el límite $\Delta x \rightarrow 0$.

Al tomar este límite, debemos tener en cuenta que el punto $x = n\Delta x$ está fijo,

aún cuando $\Delta x \rightarrow 0$, provocando que n deba incrementarse. O sea, estamos pasando de un medio discreto a un medio continuo.

Teniendo en mente lo anterior, procedemos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} j \frac{\partial u(n\Delta x, t)}{\partial t} = j \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (5..35)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_2 \left(u^{(2)}(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2(l-1)} \right) \\ = \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (5..36)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_4 \left(u^{(4)}(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=3}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (2^{2l} - 4) (\Delta x)^{2(l-2)} \right) \\ = \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}, \end{aligned} \quad (5..37)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_1^0 |u(n\Delta x, t)|^2 \left(2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2l} \right) \\ = \gamma_1 |u(x, t)|^2 u(x, t), \end{aligned} \quad (5..38)$$

antes de encontrar el límite del siguiente término, démonos cuenta que α también depende de Δx y por lo tanto se debe considerar:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\text{Cosh}(B\Delta x))$$

Volviendo a 5..10, esto para el caso de solitones brillantes, vemos que B depende explícitamente de Δx , teniéndose que hacer primero

$$y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{Cosh}[B(\Delta x)\Delta x]$$

quedando la ecuación 5..10 como:

$$y^6 - y^4 - y^3 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = 0$$

La única raíz real de esta ecuación es $y = 1$, la ecuación 5.12 implica:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\text{Cosh}(B\Delta x)) = \frac{1 - 2y^2}{16y^3} = -\frac{1}{16}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_2^0 |u(n\Delta x, t)|^4 \left[2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (2\Delta x)^{2l} \right]$$

$$= \frac{4}{3} \gamma_2 |u(x, t)|^4 u(x, t) \quad (5.39)$$

y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8}{3} \alpha \gamma_2 |u(n\Delta x, t)|^4 \left[2u(n\Delta x, t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u^{(2l)}(n\Delta x, t)}{(2l)!} (\Delta x)^{2l} \right]$$

$$= \frac{-1}{3} \gamma_2 |u(x, t)|^4 u(x, t). \quad (5.40)$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 5.34 se recupera la ecuación 5.1 cuya solución, para solitones brillantes, viene dada por:

$$u(x, t) = A \text{Sech}(Bx) e^{-jCt} \quad (5.41)$$

con

$$A^2 = \frac{6\gamma_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} \sqrt{6\gamma_2 \varepsilon_4}}{5\gamma_2}, \quad (5.42)$$

$$B^2 = \frac{6\gamma_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} \sqrt{6\gamma_2 \varepsilon_4}}{10\sqrt{6\gamma_2 \varepsilon_4}}, \quad (5.43)$$

$$C = -\frac{3\gamma_1^2}{50\gamma_2} - \frac{2\sqrt{6}}{25} \frac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\sqrt{\gamma_2 \varepsilon_4}} + \frac{9\varepsilon_2^2}{100\varepsilon_4}. \quad (5.44)$$

Estos coeficientes deben corresponder a los obtenidos para la ecuación 5.3 al sacar el límite $\Delta x \rightarrow 0$. Para verificar esto haremos el desarrollo en serie de potencias de las funciones $\text{Senh}(B\Delta x)$, $\text{Cosh}(B\Delta x)$ y $\text{Senh}^2(2B\Delta x) / (\Delta x)^2$:

$$\text{Senh}(B\Delta x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(B\Delta x)^{2i-1}}{(2i-1)!}, \quad (5.45)$$

$$Cosh(B\Delta x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(B\Delta x)^{2i}}{(2i)!} + 1, \quad (5.46)$$

$$\frac{Senh^2(2B\Delta x)}{(\Delta x)^2} = \left[2B + 2B \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(2B\Delta x)^{2(i-1)}}{(2i-1)!} \right]^2, \quad (5.47)$$

y lo utilizaremos en las ecuaciones 5.8, 5.9 y 5.11 para calcular el límite $\Delta x \rightarrow 0$, obteniendo:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} A^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3\varepsilon_4}{2\gamma_2}} \left[\frac{Senh(2B\Delta x)}{(\Delta x)} \right]^2 = \sqrt{\frac{3\varepsilon_4}{2\gamma_2}} 4B^2, \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} C &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2\varepsilon_2}{(\Delta x)^2} (Cosh(B\Delta x) - 1) + \frac{4\varepsilon_4}{(\Delta x)^4} (Cosh(B\Delta x) - 1)^2 \right) \\ &= -\varepsilon_2 B^2 - \varepsilon_4 B^4, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3\gamma_1^2}{8\varepsilon_4\gamma_2}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\varepsilon_2(\Delta x)^2}{4\varepsilon_4} - 1 + Cosh(B\Delta x)Cosh(2B\Delta x) \right]}{(\Delta x)^2 Cosh^2(B\Delta x)} \\ &= \frac{\varepsilon_2}{4\varepsilon_4} + \frac{5B^2}{2}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

de este último calculamos el valor de

$$B^2 = \frac{2}{5} \left[\sqrt{\frac{3\gamma_1^2}{8\varepsilon_4\gamma_2}} - \frac{\varepsilon_2}{4\varepsilon_4} \right] = \frac{6\gamma_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} \sqrt{6\varepsilon_4\gamma_2}}{10\sqrt{6\varepsilon_4\gamma_2}},$$

que al sustituir en las expresiones para A^2 y C se obtienen las ecuaciones 5.42, 5.43 y 5.44.

Al rehacer lo anterior para el caso de los solitones oscuros²², se tiene que:

$$Tanh(F\Delta x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_n (F\Delta x)^{2n-1}$$

donde B_n son los números de Bernoulli. Para este caso se tomarán en cuenta las ecuaciones de la 5.13 a la 5.16 y se recordará que α es función de la $Sech^2(F\Delta x)$, obteniéndose:

$$z = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Tanh^2(F\Delta x),$$

$$z^5 + 3z^4 + 2z^3 - z^2 - 5z = 0,$$

donde las raíces reales son $z = 0, 1$. Si $z = 1$ implica que $F\Delta x \rightarrow \pm\infty$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ se tiene que $F \rightarrow \pm\infty$, lo que nos lleva a tener una onda plana como solución a la ecuación 5.3, por lo tanto sólo nos queda $z = 0$, quedándonos los parámetros como:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \left(\frac{1}{16} \right) \text{Sech}^2(F\Delta x) \right) \\ &= -\frac{1}{16} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 - z) \\ &= -\frac{1}{16}, \\ E^2 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3\varepsilon_4 \text{Tanh}^2(2F\Delta x)}{2\gamma_2 (\Delta x)^2}} \\ &= 4\sqrt{\frac{3\varepsilon_4}{2\gamma_2}} F^2, \end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{2\varepsilon_2}{(\Delta x)^2} \text{Tanh}^2(F\Delta x) + \frac{2\varepsilon_4}{(\Delta x)^4} [\text{Tanh}^2(2F\Delta x) - 4\text{Tanh}^2(F\Delta x)] \right] \\ &= -\frac{3}{50} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_4} - \frac{\varepsilon_2 \gamma_1}{25\varepsilon_4} \sqrt{\frac{3\varepsilon_4}{2\gamma_2}} + \frac{6}{25} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

donde

$$F^2 = \frac{\varepsilon_2 + 2\gamma_1 \sqrt{\frac{3\varepsilon_4}{2\gamma_2}}}{20\varepsilon_4}. \tag{5.53}$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ y $n\Delta x = cte.$, en la relación de dispersión lineal obtenemos

$$\omega = \varepsilon_2 k^2 - \varepsilon_4 k^4$$

y por lo tanto

$$k^2 = \frac{\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 - 4\varepsilon_4 \omega}}{2\varepsilon_4},$$

obteniéndose la bicromacidad que se presenta en el continuo²³.

5.1.4. Radiación.

Como se ha visto hasta ahora la ecuación 5.3 tiene dos tipos de solitones de red brillantes: Embebidos y regulares. Estos solitones son idénticos en la forma (ambos son descritos por la ecuación 5.6), pero ellos responden de manera diferente a las perturbaciones. Para comprobar esto se va a realizar un análisis numérico utilizando el método de Runge-Kutta de 4° orden para integrar la ecuación 5.3, así como la transformada rápida de Fourier (FFT) para la obtención de su espectro.

Vamos a considerar los solitones cuyos parámetros están listados en la Tabla 1. El análisis numérico se realizará perturbando ligeramente estos solitones al cambiar su amplitud y seguiremos su evolución en el transcurso del tiempo.

Para el Caso 1 de la Tabla 1, proponemos como condición inicial:

$$r_n = A_0 \text{Sech}(B_0 n \Delta x) \quad (5.54)$$

donde $A_0/A = 1.15$ y $B_0 = B$ (A y B son los valores listados en la Tabla 1), la solución numérica de la ecuación 5.3 muestra que la altura del pulso oscila en el tiempo, como podemos observar en la Fig.5.4, al graficar el punto central de la solución como función del tiempo.

La oscilación es tal que la altura del pulso retorna a su valor inicial $A_0 \approx 3.14$ al final de cada ciclo, y esta nunca cae por debajo de este valor.

La forma del pulso al tiempo $t = 100$ se muestra en la Fig.5.5 donde comprobamos que las colas del pulso decrecen de manera monótona, sin visos de radiación emitida ya que $C < 0$ y $\omega_{\min} = 0.12755$. Para corroborar esto, calculamos la FFT al final del tiempo, $t = 100$, ver Fig.5.6, donde podemos apreciar una *Sech*.

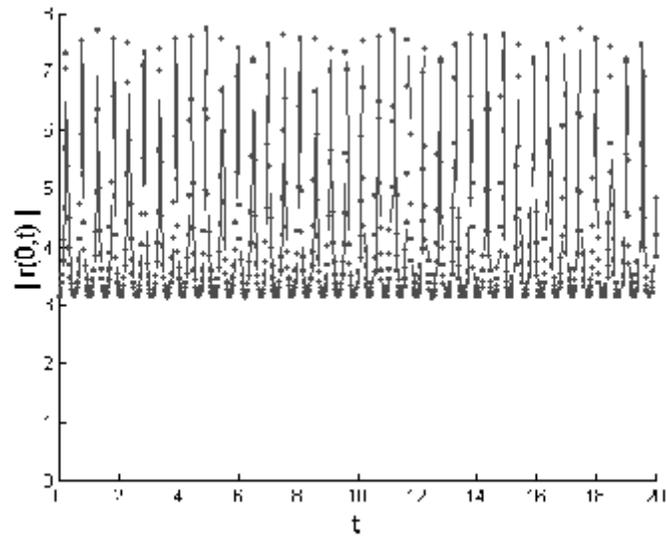


Figure 5.4: La amplitud, como función del tiempo, de un solitón de red perturbado regular, cuya condición inicial está dada por la ecuación 5.54, con $A_0 = 3.14$ y $B_0 = 0.61870$.

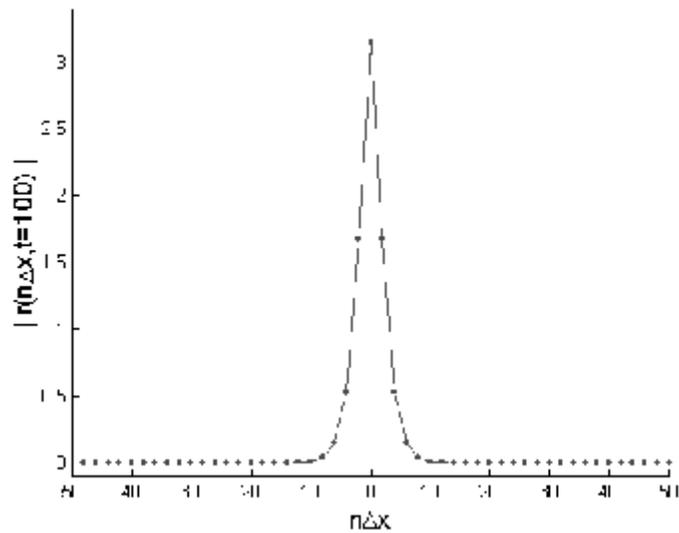


Figure 5.5: El perfil del solitón perturbado de la Fig.5.4 a $t = 100$.

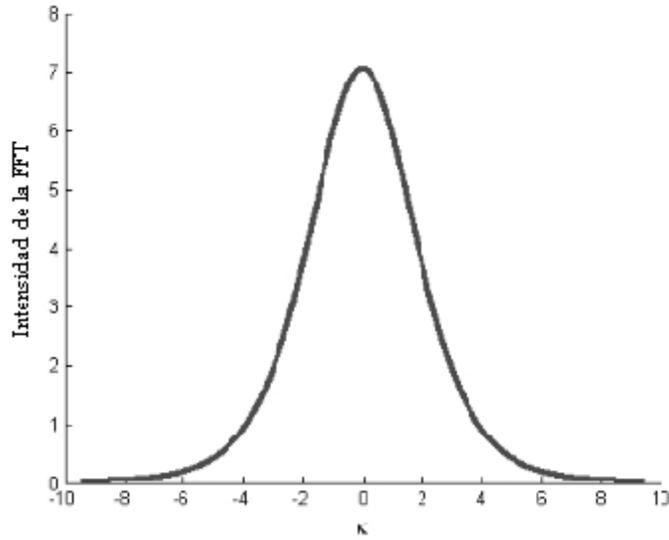


Figure 5.6: La intensidad de la FFT del solitón perturbado de la Fig.5.4.

Es importante recordar que los SE 's del continuo presentan el siguiente comportamiento cuando son perturbados: Un aumento en su amplitud ocasiona que el solitón se relaje rápidamente hasta alcanzar una forma no perturbada, deshaciéndose de alguna radiación^{85, 14}, ahora que si la amplitud es menor que la del solitón sin perturbar, este emitirá radiación hasta desaparecer.

Para comprobar si el comportamiento es similar en nuestro caso discreto, la simulación también fue corrida para un solitón de red embebido perturbado, Caso 2 de la Tabla 1, esto es, la C está contenida en el intervalo de las ondas lineales permitidas, $\omega(k) = C$, y cuyo número de onda resulta ser $k = \pm 1.69$, ecuación 5.28. Tomando una amplitud $A_0/A = 0.95$ y $B_0 = B$ (donde A y B son los valores listados en la Tabla 1).

La forma de la solución obtenida numéricamente a $t = 200$ se muestra en la

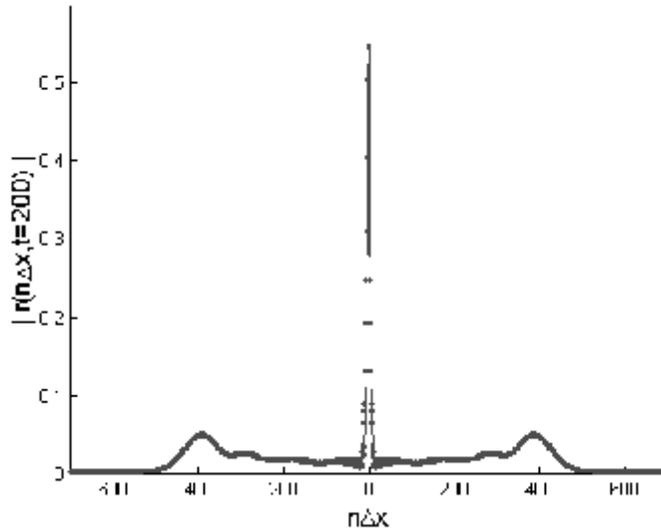


Figure 5.7: Perfil de un solitón embebido ligeramente perturbado cuya condición inicial es dada por la ecuación 5.6, con $A_0 = 0.87$ y $B_0 = 0.43659$.

Fig.5.7, donde observamos dos pequeñas "alas" simétricas de radiación emitida por el pulso perturbado.

La FFT de esta solución es presentada en la Fig.5.8, como se mencionó en la sección 5.1.2. Ella expone dos picos simétricos con respecto al central que corresponden a los picos de radiación con $k = \pm 1.65$, una pequeña diferencia entre lo esperado y lo encontrado se explica por medio de la desviación no lineal de la amplitud finita de la radiación emitida.

Una serie de instantáneas sobrepuestas, Fig.5.9, muestra que las "alas" se propagan a una velocidad constante, $v_{frente} = 2.4$, calculada a partir de los datos numéricos. Al compararla con la velocidad de grupo lineal 5.18 evaluada en el número de onda de resonancia: $d\omega/dk|_{k=1.69} = \pm 2.36$, vemos que es casi la misma.

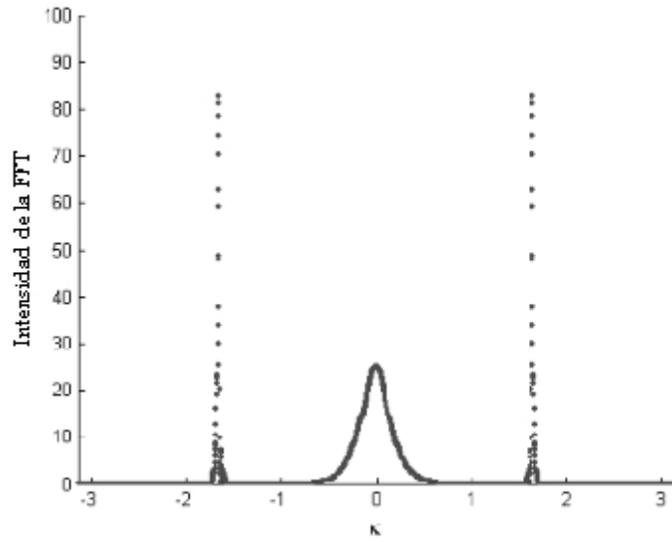


Figure 5.8: La intensidad de la FFT del solitón cuyo perfil es mostrado en la Fig.5.7.

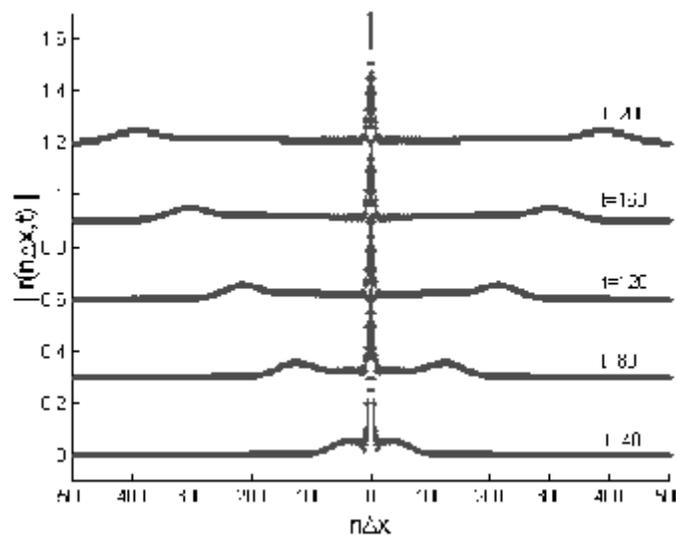


Figure 5.9: Perfiles del mismo solitón embebido perturbado de la Fig.5.7 para diferentes tiempos, donde podemos observar como se propagan las "alas".

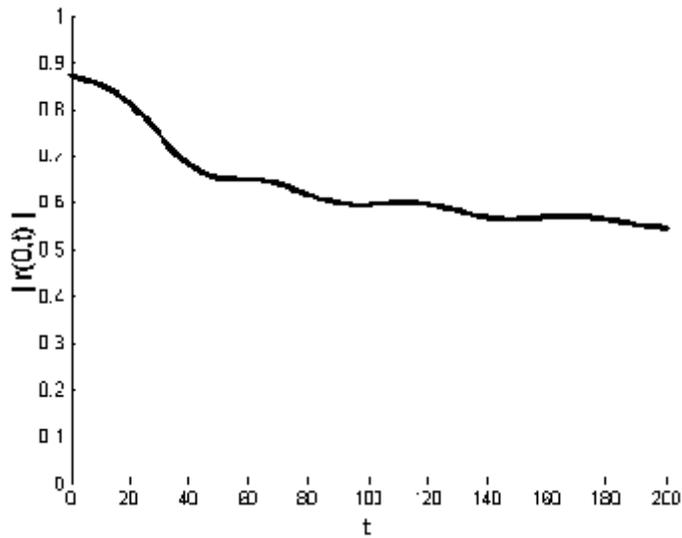


Figure 5.10: La amplitud, como función del tiempo, del mismo solitón de las Figs. 5.7 a 5.9.

Con el paso del tiempo la amplitud del soliton perturbado cambia debido a la emisión de radiación, la Fig.5.10 nos muestra que cuando $t \in [0, 40)$ el decaimiento parece ser exponencial y para $t \geq 40$ ya no es posible asegurarlo.

Comparando la Fig.5.4 y la Fig.5.10, apreciamos la diferencia en el comportamiento de los solitones de red estudiados: Un solitón perturbado regular oscila manteniendo su amplitud media, mientras un solitón embebido y perturbado emite radiación decreciendo la amplitud de su centro.

5.2 Una Ecuación mKdV discreta.

En el sistema anterior encontramos la existencia de *SER*, pero en ese caso, estos solitones no se mueven ni presentan familias por lo que es necesario estudiar otro sistema en la búsqueda de estas propiedades.

Sabemos que la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \sigma |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5..55)$$

tiene soluciones que se mueven; soluciones tipo solitones embebidos, doblemente embebidos y familias de solitones.

Consideremos ahora, una ecuación diferencial y en diferencias finitas

$$\frac{\partial r_n}{\partial t} = \varepsilon_3^0 [(r_{n+2} - r_{n-2}) - 2(r_{n+1} - r_{n-1})] + \sigma_0 |r_n|^2 [\rho (r_{n+1} - r_{n-1}) - \delta (r_{n+2} - r_{n-2})] \quad (5..56)$$

con

$$\varepsilon_3^0 = \frac{\varepsilon_3}{2(\Delta x)^3}; \sigma_0 = \frac{\sigma}{12\Delta x}. \quad (5..57)$$

y donde $r_n(t)$ es una función compleja y $\varepsilon_3^0, \sigma_0, \delta$ y ρ son constantes reales.

Al hacer lo mismo que en *paso al continuo*, uno encuentra que la 5..56 se transforma en:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{6} (\rho - 2\delta) \sigma |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5..58)$$

convirtiéndose en la ecuación 5..55 al considerar $\rho - 2\delta = 6$. Esta ecuación es la estudiada en Rodríguez⁷².

El coeficiente σ puede tener valores positivos o negativos dependiendo de la aplicación física. Un ejemplo de esto puede verse en la propagación de luz en guías de onda de cristales líquidos donde el coeficiente es positivo⁷², y es negativo en el estudio llevado a cabo por medio de una expansión de escala múltiple de las ondas fuertemente dispersivas en medios débilmente no lineales²⁰.

La ecuación 5..56 puede ser vista como una extensión de la de Ablowitz-Ladik

(AL-NLS)¹ (ver el Apéndice B), ya que si hacemos el siguiente cambio de variable:

$$r_n(t) = (-j)^n R_n(t)$$

llegamos a:

$$\begin{aligned} 0 = & j \frac{\partial R_n}{\partial t} + 2\varepsilon_3^0(R_{n+1} + R_{n-1}) - \rho\sigma_0|R_n|^2(R_{n+1} + R_{n-1}) \\ & + j\varepsilon_3^0(R_{n+2} - R_{n-2}) - \delta\sigma_0|R_n|^2(R_{n+2} - R_{n-2}). \end{aligned} \quad (5..59)$$

El primer renglón de esta ecuación corresponde a la ecuación AL-NLS. En el siguiente renglón, el primer término adicional (término lineal) es tomado en cuenta en las difracciones de red de orden-alto⁴³, este término puede ser inducido por el acoplamiento entre los átomos y sus segundos vecinos por un gradiente de fase aplicado a lo largo de este. Ahora, el término no lineal adicional lo podemos considerar como una corrección genérica de tercer orden en la difracción de la red.

5.2.1. Las Soluciones.

Al igual que en el ejemplo estudiado anteriormente, esta ecuación presenta tanto solitones brillantes como solitones oscuros.

Para los solitones brillantes se tiene:

$$r_n(t) = A \operatorname{Sech} \left(\frac{n\Delta x - at}{w} \right) e^{j(qt + Qn\Delta x)}, \quad (5..60)$$

donde encontramos las siguientes expresiones para A, a, w y q en términos de los parámetros de la ecuación 5..56:

$$A^2 = \frac{\theta}{\rho\sigma_0} \left(2 - \frac{\delta}{\rho} \right), \quad (5..61)$$

$$\operatorname{Cosh}^2 \left(\frac{\Delta x}{w} \right) = \frac{\delta}{2\rho}, \quad (5..62)$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\Delta x} &= -2\varepsilon_3^0 \frac{w}{\Delta x} \text{Cos}(2Q\Delta x) \text{Senh}\left(\frac{2\Delta x}{w}\right) \\ &\quad + 4\varepsilon_3^0 \frac{w}{\Delta x} \text{Cos}(Q\Delta x) \text{Senh}\left(\frac{\Delta x}{w}\right),\end{aligned}\quad (5..63)$$

$$\begin{aligned}q &= 2\varepsilon_3^0 \text{Sen}(2Q\Delta x) \text{Cosh}\left(\frac{2\Delta x}{w}\right) \\ &\quad - 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}(Q\Delta x) \text{Cosh}\left(\frac{\Delta x}{w}\right),\end{aligned}\quad (5..64)$$

concluyendo que el parámetro Q queda libre, y donde $1/w$ es el número de onda y $q + Qa$ la frecuencia intrínseca.

Ahora al fijar δ y ρ tendremos lo siguiente:

- La ecuación 5.62 nos dice que $\delta > 2\rho$ para la existencia de $\pm w$. La ecuación 5.61 requiere que δ y ρ tengan el mismo signo y que sea opuesto a ε_3^0 .
- La amplitud queda fija dada la ecuación 5.61.
- Sin embargo, los parámetros a y q quedan como función de Q , generando una familia de solitones, esto es para la misma ecuación se tienen infinidad de solitones.
- Los valores de la velocidad, ecuación 5.63, estarán siempre en el rango

$$\left| \frac{a}{\Delta x} \right| \leq \left| 2\varepsilon_3^0 \frac{w}{\Delta x} \text{Senh}\left(\frac{2\Delta x}{w}\right) \right|.$$

En el caso de Solitones oscuros, la solución viene expresada por:

$$r_n(t) = BT \text{anh}\left(\frac{n\Delta x - bt}{v}\right) e^{j(pt+sn\Delta x)},\quad (5..65)$$

con las siguientes relaciones:

$$B^2 = \frac{3\varepsilon_3^0}{\sigma_0} \left(\sqrt{\frac{2}{\delta\rho}} - \frac{1}{\rho} \right),\quad (5..66)$$

$$\text{Tanh}^2\left(\frac{\Delta x}{v}\right) = \sqrt{\frac{2\rho}{\delta}} - 1, \quad (5..67)$$

$$\frac{b}{\Delta x} = -\frac{2\varepsilon_3^0 v}{\Delta x} \left[\text{Cos}(2s\Delta x) \text{Tanh}\left(\frac{2\Delta x}{v}\right) - 2\text{Cos}(s\Delta x) \text{Tanh}\left(\frac{\Delta x}{v}\right) \right], \quad (5..68a)$$

$$p = 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}(s\Delta x) \left[\text{Cos}(s\Delta x) \left(1 - \text{Tanh}^2\left(\frac{2\Delta x}{v}\right)\right) - \left(1 - \text{Tanh}^2\left(\frac{\Delta x}{v}\right)\right) \right], \quad (5..69)$$

quedando libre s , y donde $1/v$ es el número de onda y $p + sb$ la frecuencia intrínseca.

Fijando δ y ρ concluimos:

- La amplitud queda fija dada la ecuación 5..66.
- La ecuación 5..67 nos dice

$$\delta \leq 2\rho \leq 4\delta.$$

- Los parámetros b y p quedan como función de s , y por lo tanto se genera una familia de solitones.
- Los valores de la velocidad, ecuación 5..68a, estarán siempre en el intervalo

$$\left| \frac{b}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{4\varepsilon_3^0 v}{\Delta x} \right|.$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ y $n\Delta x = cte.$, si w y v son diferentes de cero e indeterminados, entonces la ecuación 5..62 se hace igual a 1 y la ecuación 5..67 tiende a cero, los valores de δ y ρ resultan ser -4 y -2 , quedando así los 2 parámetros indeterminados que se tienen en el continuo.

La búsqueda de la hamiltoniana para poder obtener la ecuación 5..56, nos lleva

a:

$$H = j\varepsilon_3^0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2r_m^*(r_{m+1} - r_{m-1}) - r_m^*(r_{m+2} - r_{m-2})], \quad (5..70)$$

donde se utilizan el paréntesis de Poisson definido por:

$$\{B, C\} = j \sum_m \left(\frac{\partial B}{\partial r_n} \frac{\partial C}{\partial r_n^*} - \frac{\partial B}{\partial r_n^*} \frac{\partial C}{\partial r_n} \right) \left(1 - \frac{\delta\sigma_0}{\varepsilon_3^0} |r_n|^2 \right) \quad (5..71)$$

y cuya definición implica $\{r_n, r_m\} = \{r_n^*, r_m^*\} = 0$, y

$$\{r_n, r_m^*\} = j \left(1 - \frac{\delta\sigma_0}{\varepsilon_3^0} |r_n|^2 \right) \delta_{nm}. \quad (5..72)$$

Sin embargo, este hamiltoniano sólo es válido cuando $\rho = 2\delta$. Cuando esto ocurre nos encontramos que no existen solitones. Y en el caso de los solitones oscuros nos lleva a tener $\frac{\Delta x}{v} \rightarrow \pm\infty$.

La norma definida por:

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\varepsilon_3^0}{\sigma_0\delta} \ln\left(1 - \frac{\delta\sigma_0}{\varepsilon_3^0} |r_n|^2\right) \right]$$

se conserva.

5.2.2. Relación de Dispersión lineal.

La determinación correcta del número de onda resonante hace necesario tomar en cuenta que los solitones se están moviendo y por lo tanto, la frecuencia intrínseca debe ser comparada con el espectro lineal de las ondas lineales permitidas en el sistema de referencia que se mueve junto con el solitón^{23, 72}.

Como en la ecuación anterior sólo vamos a estudiar el caso de los solitones brillantes.

En este sistema de referencia la coordenada $n\Delta x$ es remplazada por $n\Delta x - at$, implicando que la frecuencia definida está incluyendo el corrimiento Doppler.

Sea

$$r_n(t) = \rho e^{j(\Omega t - k(n\Delta x - at))},$$

una onda plana con una amplitud infinitesimal ρ que al sustituirse en la parte lineal de la ecuación 5.56 nos da la relación de dispersión lineal asociada a ella:

$$\Omega(k\Delta x) = 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}(k\Delta x) [1 - \text{Cos}(k\Delta x)] - (k\Delta x) \left(\frac{a}{\Delta x} \right), \quad (5..73)$$

donde el último término es el corrimiento Doppler. Esta función existe para todos los reales, $k\Delta x \in (-\infty, \infty)$.

La frecuencia intrínseca del solitón brillante es evaluada a partir de la ecuación 5.60, esto es, si nos fijamos en un punto del solitón vemos que éste viaja con una velocidad a y la trayectoria que sigue se obtiene al hacer $n\Delta x = at$ en esta ecuación, quedando $r_n(t) = Ae^{j(q+Qa)t}$.

Comparando este resultado con una onda plana $r_n = \rho e^{j(kn\Delta x - \omega t)}$, encontramos que la frecuencia intrínseca del solitón es $-\omega = (q + Qa)$.

Si queremos que este solitón en movimiento este embebido, necesitamos que su frecuencia intrínseca este contenida en el rango de valores de la función $-\Omega(k\Delta x)$.

Siempre tendremos solitones de red embebidos que se mueven ya que $a \neq 0$ implica que se tiene el eje real entero como argumento de $-\Omega(k\Delta x)$.

Cuando $a = 0$, el solitón es estático y la función $\Omega(k\Delta x)$ es periódica de período 2π , siendo embebido si existe una solución real que corresponda a la condición de resonancia dada al hacer $q = \Omega(k\Delta x)$, esto es:

$$q = 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}(k\Delta x) [1 - \text{Cos}(k\Delta x)], \quad (5..74)$$

por lo que el intervalo de q en el cual se tienen solitones embebidos es:

$$|q| \leq 3\sqrt{3}\varepsilon_3^0.$$

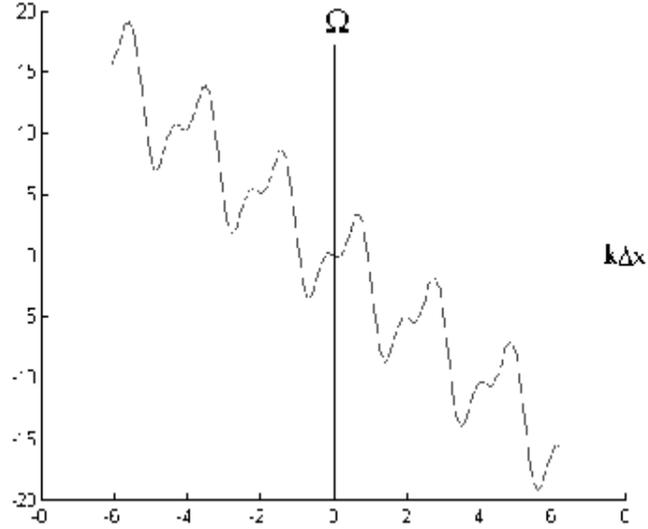


Figure 5.11: Relación de Dispersión asociada a la ecuación 5.56

La Fig. 5.11 muestra la función $\Omega(k\Delta x)$.

También vamos a mostrar que algunos de los solitones embebidos, de los mencionados anteriormente, se mueven con velocidades contenidas en el rango de velocidades de fase permitidas a los modos lineales.

De la ecuación 5.73 se sigue que la velocidad de fase, $\Omega(k\Delta x)/k\Delta x$, de estos modos (definidos en el sistema de laboratorio) es:

$$v(k\Delta x) = \frac{4\epsilon_3^0}{k\Delta x} \text{Sen}(k\Delta x)[1 - \text{Cos}(k\Delta x)], \quad (5..75)$$

cuyo comportamiento se exhibe para diferentes ϵ_3 en la Fig. 5.12.

Cuando la velocidad del solitón ($V = a/\Delta x$) se encuentra en el intervalo de esta función, esto es:

$$V = \frac{a}{\Delta x} = \frac{4\epsilon_3^0}{k\Delta x} \text{Sen}(k\Delta x)[1 - \text{Cos}(k\Delta x)], \quad (5..76)$$

encontramos solitones que están embebidos debido a su velocidad de fase para un cierto

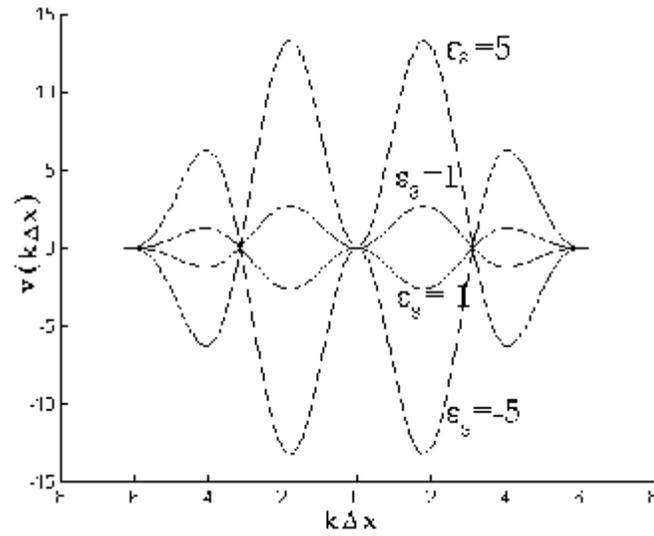


Figure 5.12: Velocidad de fase para diferentes ε_3 .

valor de $k\Delta x$. La solución de la ecuación 5.76 podrá o no existir dependiendo de los valores ε_3^0 , ρ , δQ y Δx . El comportamiento de esta velocidad puede ser visto en la Fig. 5.13 para diferentes valores de Δx .

De lo anterior se puede inferir que la ecuación 5.56 presenta:

- Los solitones cuya frecuencia interna está en el rango de la función $-\Omega(k\Delta x)$, y cuyas velocidades no están contenidas en el intervalo de la función $v(k\Delta x)$. Esto es, solitones embebidos debido a su frecuencia.
- Y los solitones doblemente embebidos; que tienen su número de onda en el rango de $-\Omega(k\Delta x)$ y además tienen su velocidad en el intervalo de $v(k\Delta x)$.
- Se tienen familias de estos solitones.

5.2.3. Espectro de emisión para solitones embebidos y perturbados.

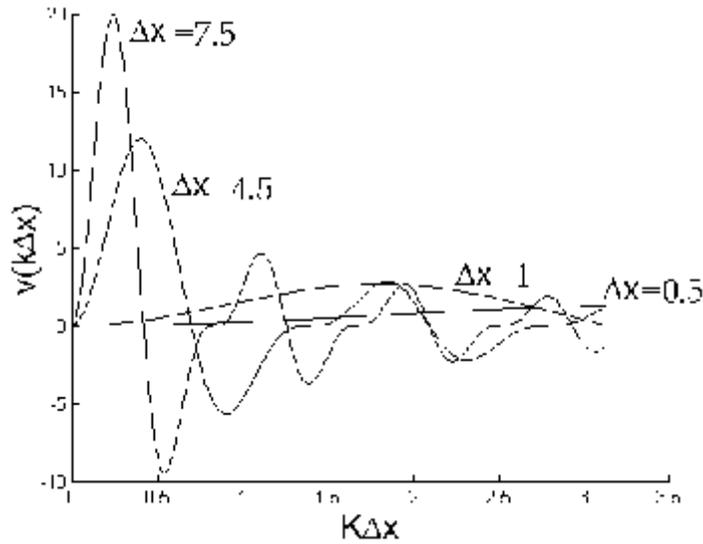


Figure 5.13: La función $V(k\Delta x)$ para diferentes Δx y $\varepsilon_3^0 = 1$.

Ya que las frecuencias intrínsecas de los solitones de la ecuación 5.56 caen dentro del espectro de los modos normales de vibración del sistema, uno esperaría que la resonancia se presentara entre los solitones y los modos lineales, dando paso a la emisión de radiación resonante. No obstante, el hecho distintivo de los *SER* es precisamente la ausencia de esta radiación (ver apéndice A).

Como se vió en la sección anterior, cuando un solitón es perturbado éste emitirá radiación, a un número de onda dado por $-\Omega(k\Delta x) = \omega$. En otras palabras, los números de onda estarán definidos por:

$$q + aQ = 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}(k\Delta x) [1 - \text{Cos}(k\Delta x)] - ak.$$

Ahora, si sustituimos $-k\Delta x$ en lugar de $k\Delta x$ en la ecuación anterior:

$$q + aQ = -(4\varepsilon_3^0 \text{Sen}(k\Delta x) [1 - \text{Cos}(k\Delta x)] - ak), \quad (5.77)$$

esto es, obtenemos $\pm\omega$.

Se llevaron a cabo simulaciones numéricas para tres casos. Los parámetros calculados pueden verse en la Tabla.2.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
ε_3^0	1	-4.8	-1
ρ	-0.4	4.8	0.4
δ	-0.85	10.3	0.85
Q	0.61	7.9	0.61
Δx	3	0.4	3
A	0.56	0.381	0.56
a	7.75	15.812	7.75
w	12.12	1.503	12.12
q	-5.103	-0.771	-5.103

Tabla 2. Parámetros que corresponden a solitones: Caso 1, doblemente embebido.

Caso 2, embebidos. Caso 3, doblemente embebido.

Para perturbar los solitones, nosotros resolvemos la ecuación 5.56 numéricamente proponiendo como condición inicial:

$$r_n(t=0) = A_0 \operatorname{Sech}\left(\frac{n\Delta x}{w}\right) e^{j(Qn\Delta x)} \quad (5.78)$$

donde A_0 no es la amplitud exacta del solitón.

En el caso 1, la Fig.5.14 nos muestra que el parámetro a dado en la Tabla 2, está en el rango de la función 5.76, ya que el máximo de $a(= V\Delta x)$ es 7.967, y con ello tenemos un solitón doblemente embebido.

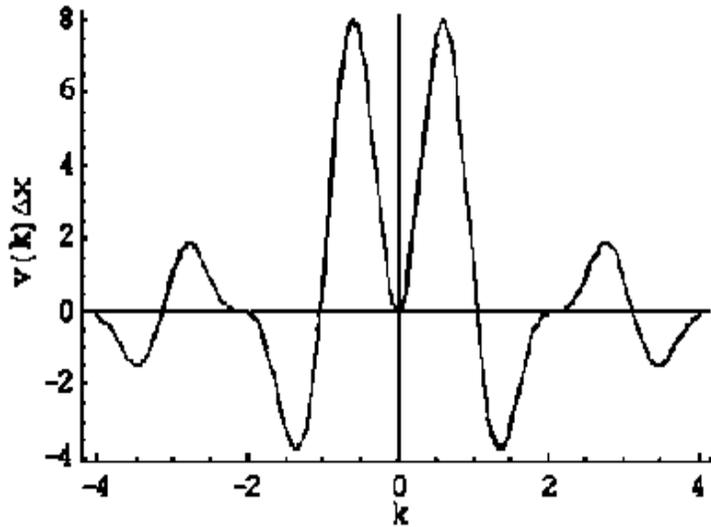


Figure 5.14: La velocidad de fase de las ondas lineales (veces Δx) como función de κ (ecuación 5.76) para $\varepsilon_3 = 1$ y $\Delta x = 3$.

El solitón perturbado tiene una amplitud de $A_0/A = 1.143$, siendo más grande que la amplitud exacta (ver Tabla 2). De acuerdo a la ecuación 5.77, el solitón emitirá radiación en los números de onda mostrados en la Fig.5.15

La solución numérica de la ecuación 5.56 para un tiempo $t = 20$, se muestra en la Fig.5.16. Y en la Fig.5.17 encontramos la zona de Brillouin, $-\pi/\Delta x < k < \pi/\Delta x$, de su espectro de potencia. La componente central de esta figura es la transformada de Fourier del solitón no perturbado, presentando, además, dos bandas simétricas de radiación que se localizan en $0.07 \leq |k/2\pi| \leq 0.13$. Estas bandas contienen todos los números de onda de resonancia esperados, excepto el valor de -0.008 que se encuentra dentro de la banda central. La simetría de las bandas de radiación está relacionada con la conducta oscilante de la solución de la ecuación 5.77 la cual nos dice que es posible

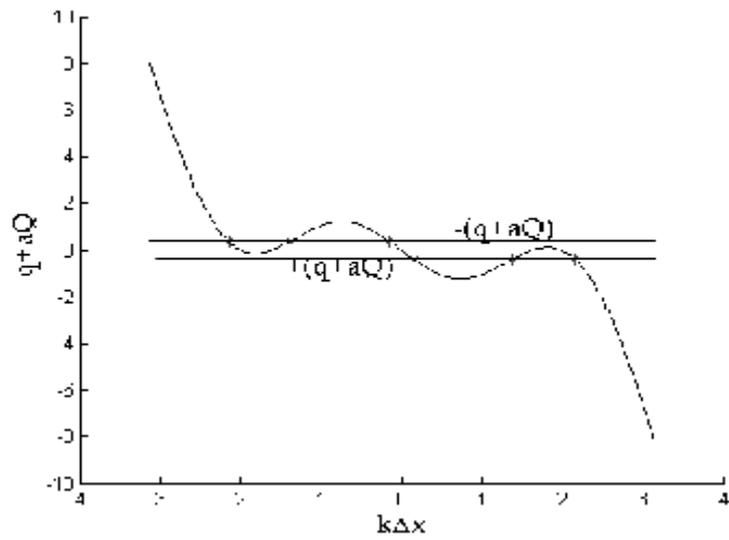


Figure 5.15: La ecuación 5.81, para el Caso 1 de la Tabla 2. Los asteriscos muestran los números de onda donde se presentará la radiación al ser perturbado el solitón.

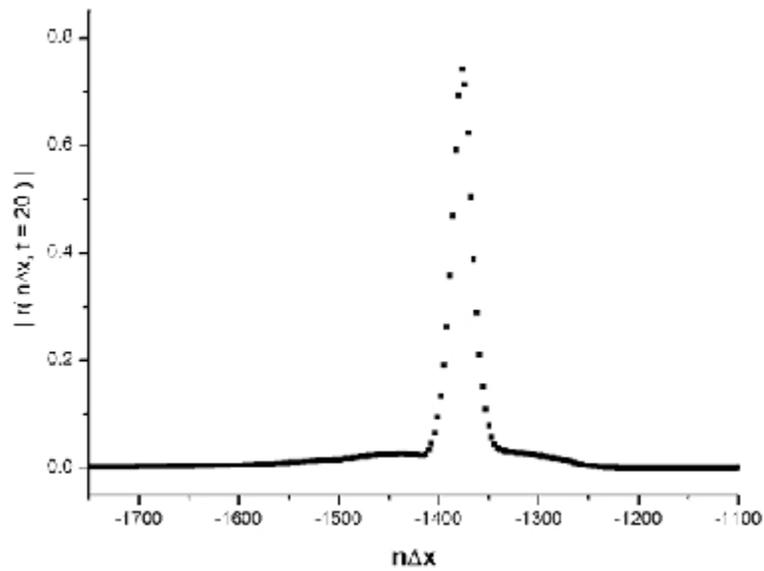


Figure 5.16: El solitón de red doblemente embebido, al tiempo $t = 20$, cuya condición inicial es dada por la ecuación 5.78 con $A_0/A = 1.143$. Los demás parámetros son los de la Tabla 2 Caso 1.

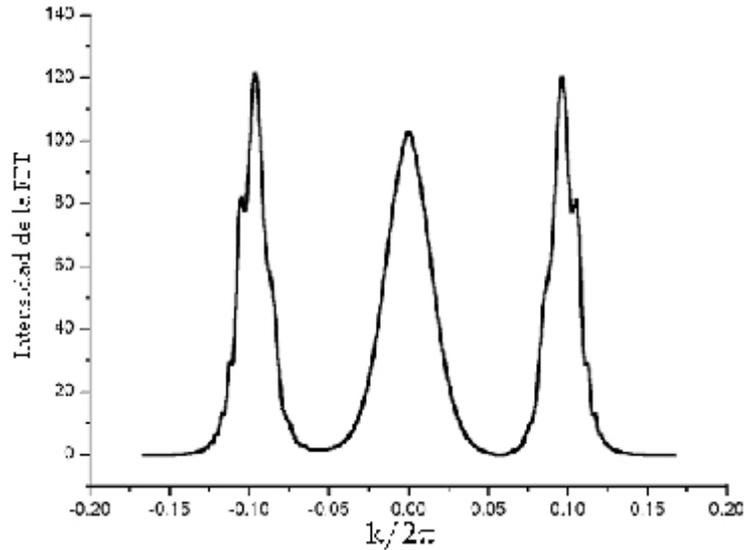


Figure 5.17: La intensidad de la FFT correspondiente al solitón doblemente embebido de la Fig.5.15

excitar los modos de fonón con frecuencias $\pm\omega$, dando lugar a la presencia simétrica en los números de resonancia.

Un segundo ejemplo, caso 2, es un solitón embebido cuyos parámetros se presentan en la Tabla 2.

Para confirmar que no está embebido en el intervalo de velocidades de fase (veces Δx) permitido para los modos lineales, 5.75, mostramos la Fig.5.18. De ella resulta evidente que el parámetro del solitón $a = 15.812$ no pertenece al rango permitido.

La solución numérica de la ecuación 5.56 correspondiente a la condición inicial ecuación 5.78 con $A_0/A = 0.919$, demuestra que el pulso perturbado emite un tren de ondas del lado izquierdo, debido a que ε_3 es negativo, como se puede apreciar en la Fig.5.19.

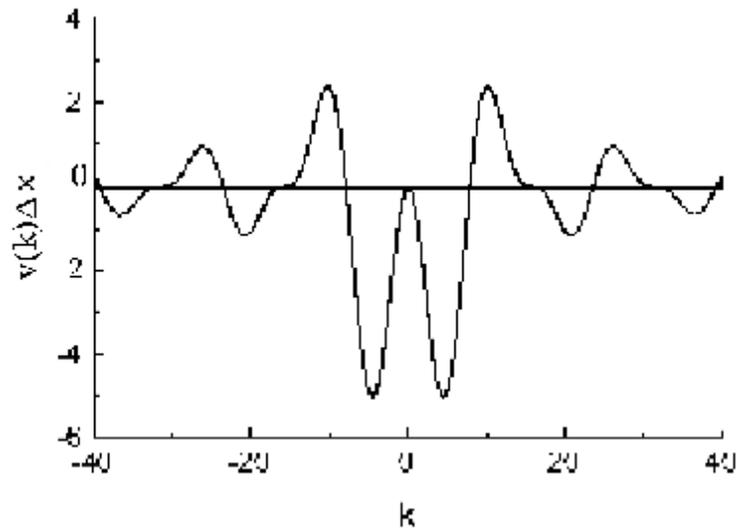


Figure 5.18: La velocidad de fase de las ondas lineales (veces Δx) como una función de κ . Para el caso 2 de la Tabla 2.

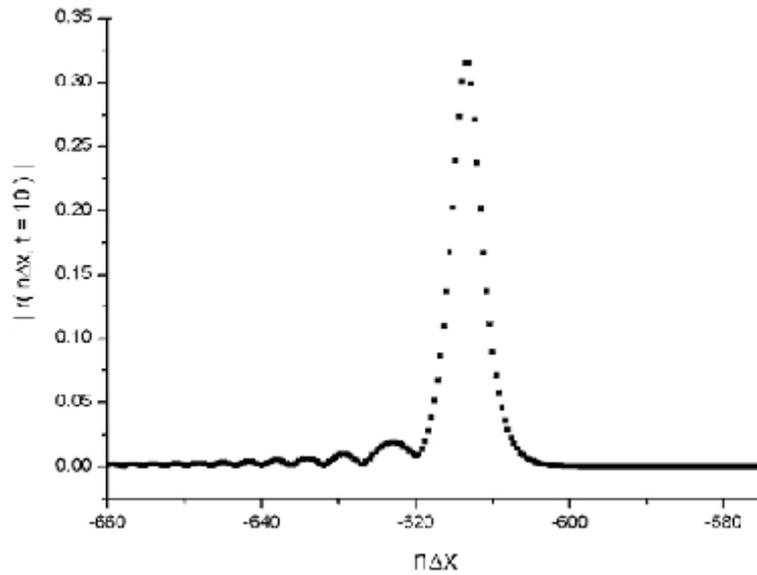


Figure 5.19: Se muestra el solitón de red embebido y perturbado al tiempo $t = 10$. Este evoluciona de la condición inicial dada por la ecuación 5.78, con los parámetros del caso 2 de la tabla 2 y con $A_0/A = 0.919$.

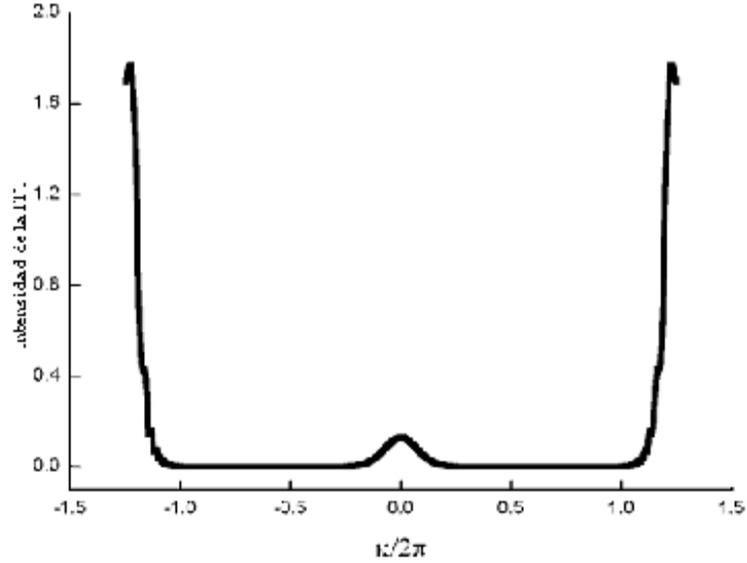


Figure 5.20: La intensidad de la FFT del solitón embebido y perturbado cuya solución numérica corresponde a la Fig.5.19.

La condición 5.77 nos da dos números de onda resonantes localizados en $k/2\pi = \pm 1.249$, este valor es muy cercano a uno de los extremos de la primera zona de Brillouin, $|k/2\pi| \leq 1/(2\Delta x) = 1.25$. Para observar esto, sacamos el espectro de potencia de la solución numérica, Fig.5.20, encontrándonos dos picos simétricos localizados en ± 1.23 .

5.2.4. Estabilidad de los solitones embebidos.

Como se acaba de ver, un *SER* perturbado que es estable linealmente emite radiación, provocando que su amplitud decaiga y por lo tanto su estabilidad se verificará en una simulación que involucre tiempos muy grandes.

Es importante mencionar que en el modelo continuo, ecuación 5.58, las soluciones son estables dado que la ecuación permite una familia continua de *SE* con energía arbitraria, y por lo tanto, el solitón perturbado puede desprenderse de una parte de

su energía y caer en una solución SE con energía más pequeña⁷². Para los modelos continuos que presentan SE aislados, es posible que un pulso perturbado radíe hasta desaparecer por no existir un solitón estable con menor energía al cual decaer. Este proceso es conocido como "semiestabilidad" o inestabilidad no lineal y se presenta en los modelos continuos que contienen no linealidades $\chi^{(2)} : \chi^{(3)}$.

Por lo anterior, aseguramos la estabilidad de un SER si al perturbarlo éste se relaja, liberando energía por radiación y transformándose en un solitón estable. Dentro de los límites dados por las ecuaciones 5.60-5.64, este proceso no parece factible ya que las soluciones exactas presentan un único valor en la amplitud. Sin embargo, podría pasar que esta familia sea un subconjunto de unas soluciones más generales que contengan solitones múltiples. La posible existencia de una familia extendida de solitones es un asunto fundamental por sí mismo, que además nos proporcionará la estabilidad mencionada arriba⁷².

Para clarificar el eventual destino de los solitones perturbados de la ecuación 5.56, presentaremos algunos ejemplos.

Comenzamos con el Caso 1 de la Tabla 2, al poner una amplitud es $A_0/A = 1.143$, en la condición inicial, la amplitud máxima del pulso perturbado empieza a oscilar y con el paso del tiempo, ver Fig.5.21 curva superior, esta oscilación se va apagando debido a la radiación emitida, y el solitón perturbado tenderá a acomodarse en una forma estacionaria. Ahora, cuando la amplitud es $A_0/A = 0.857$, la máxima amplitud del pulso empieza a ser más pequeña que la altura máxima del solitón exacto, siendole imposible al pulso transformarse en el solitón exacto, Fig.5.21 curva inferior. Ella nos muestra que el pulso de amplitud inferior presenta una oscilación amortiguada

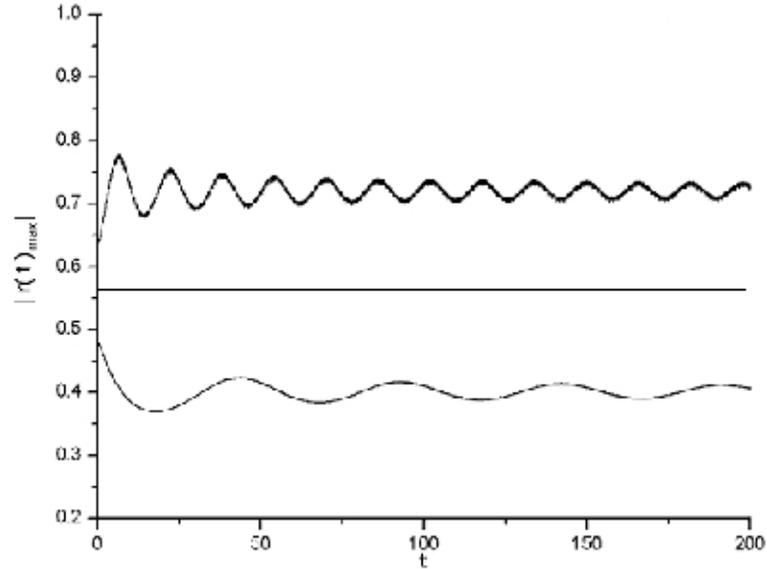


Figure 5.21: La evolución en el tiempo de la amplitud máxima alcanzada por el solitón. La curva superior nos muestra el caso de un solitón cuya amplitud inicial es mayor a la exacta, $A_0/A = 1.143$. La curva inferior corresponde a un solitón cuya amplitud inicial es menor que la exacta, $A_0/A = 0.857$. La línea recta representa la amplitud del solitón exacto. Son solitones doblemente embebidos con los parámetros de la Tabla 2 Caso 1.

de período mayor que la otra curva, pulso de amplitud más grande, y cuya amplitud decae rápidamente llevándonos a concluir que se aproximará a un estado de equilibrio. Por lo tanto, la conducta expuesta indica que los solitones de red doblemente embebidos son pulsos completamente estables y que los solitones exactos parecen ser un subconjunto de una familia más amplia de solitones discretos.

Para la estabilidad de los solitones de red embebidos vamos a utilizar el caso 2 de la Tabla 2. Comenzaremos con la condición inicial dada por 5.78, con una amplitud $A_0/A = 1.089$. Como se puede apreciar en la Fig.5.22 curva superior, este pulso tiende

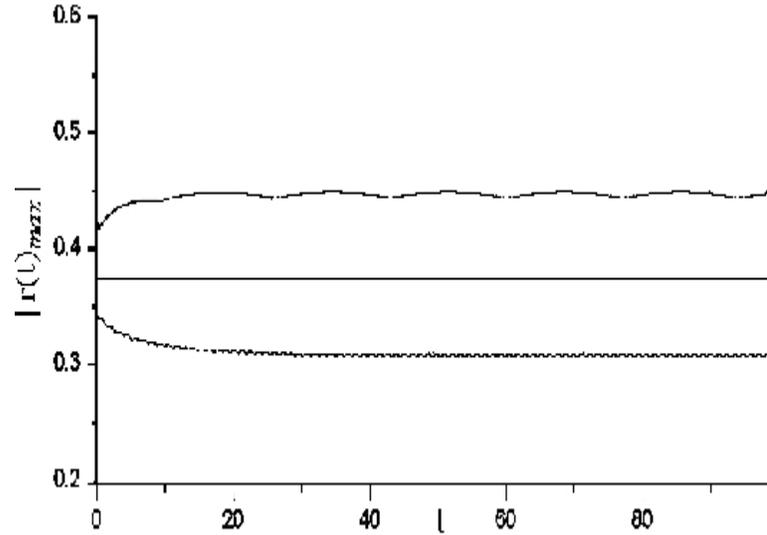


Figure 5.22: La evolución en el tiempo de la máxima amplitud alcanzada por el solitón embebido y perturbado de la Tabla 2 Caso 2. La curva superior corresponde a una amplitud inicial mayor que la exacta, $A_0/A = 1.089$ y la curva inferior a una amplitud de $A_0/A = 0.905$, menor que la exacta. La línea recta representa la amplitud del solitón exacto.

a estabilizarse ya que su altura máxima tiende a una constante. La curva inferior de esta misma figura, nos muestra la evolución de un pulso cuya amplitud inicial es $A_0/A = 0.905$, transformándose rápidamente en un pulso estable. De la figura podemos concluir que si el pulso inicial tiene una amplitud más grande que la del solitón exacto, el pulso alcanzado en el estado estacionario deberá tener una amplitud más grande que la del solitón exacto. Y si su amplitud es menor, entonces el pulso tendrá una amplitud menor que la del solitón exacto. Una conducta similar se presentó en los *SE* de la ecuación 5.55⁷². De nueva cuenta observamos que los pulsos perturbados se estabilizan en pulsos cuyas amplitudes no son de la familia de los solitones exactos

dados por las ecuaciones 5.60-5.64, reforzando la idea de que estos solitones pertenece a una familia ampliada.

Al comparar las Fig.5.21 y la Fig.5.22, encontramos una diferencia muy notoria entre ellas; la forma en que evoluciona la amplitud máxima del solitón. En ambas figuras se observa que la amplitud oscila, sin embargo, las oscilaciones en la Fig. 5.22 son muy pequeñas, practicamente se puede decir que la amplitud es constante. Esta diferencia cuantitativa puede deberse al hecho de que los solitones doblemente embebidos presentan resonancia, ecuación 5.77, en seis números de onda, mientras que los solitones embebidos sólo tienen dos.

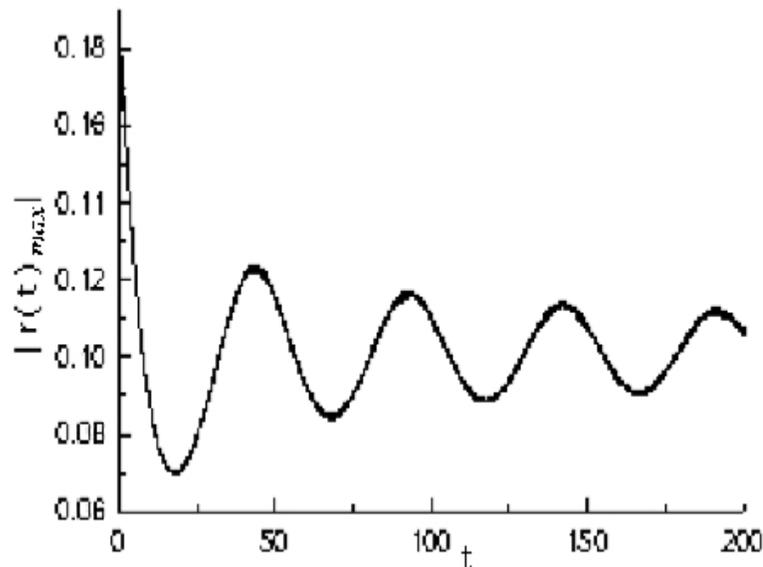


Figure 5.23: La evolución en el tiempo de la máxima amplitud del solitón perturbado del Caso 3 de la Tabla 2, con una condición inicial dada por 5.78, y una $A_0/A = 0.857$.

Un ejemplo adicional es el Caso 3 de la Tabla 2. Para esta simulación se escogio una condición inicial dada por 5.78, con una amplitud menor, $A_0/A = 0.857$. Como

podemos ver en la Fig.5.23, su comportamiento es similar al mostrado en la Fig.5.21, o sea, presenta una oscilación amortiguada, que se estabilizará en un solitón estacionario, el cual no pertenece a la familia de soluciones exactas, por lo que su expresión analítica no la conocemos.

Una conclusión es que las simulaciones hechas con diferentes parámetros no muestran solitones inestables aún cuando las perturbaciones sean grandes.

5.2.5. Colisión entre solitones embebidos.

Cuando dos solitones colisionan entre sí, ellos emergen del choque sin sufrir cambios, excepto en su fase. Para comprobarlo utilizamos la familia de soluciones generada por las ecuaciones 5.60-5.64 y vamos a tomar los parámetros del Caso 2 de la Tabla 2.

La Fig.5.24 muestra la simulación numérica que confirma esto. Esta familia tiene una amplitud de $A = 0.381$ y un ancho de $w = 1.503$, pero ellos difieren en la velocidad, la cual es controlada por el parámetro Q . Para la simulación se tomó un solitón que se mueve a la derecha, con $Q_1 = 3.315$ y $a_1 = 15.7$, y un segundo solitón que se mueve hacia la izquierda con $Q_2 = 7.9$ y $a_2 = -9.0$. Inicialmente, estos solitones están situados en $n\Delta x = -20$ y $n\Delta x = 12$, respectivamente, esto es, sus máximos se encuentran en esa posición.

En la Fig.5.25 mostramos la forma de los solitones a $t = 11$. En ella comprobamos que lejos del punto de colisión no existe radiación emitida y ellos presentan la altura inicial. Los centros de los solitones se localizan en $n\Delta x = -78.6$ y $n\Delta x = 139.2$, si ellos no hubiesen colisionado, ellos se encontrarían en $n\Delta x = -87$ y $n\Delta x = 152.7$, respectivamente.

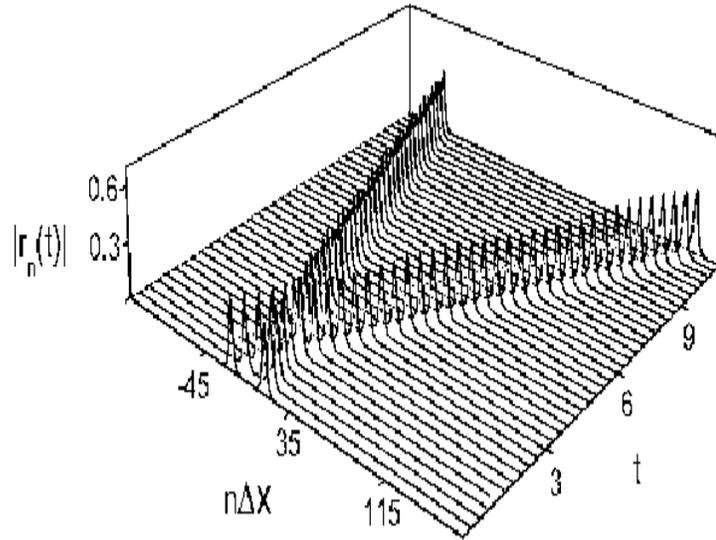


Figure 5.24: Evolución en el tiempo de dos solitones que colisionan, sus parámetros corresponden al caso 2 de la tabla 2. El movimiento de los solitones está determinado por $Q_1 = 3.315$, $a_1 = 15.7$ y $Q_2 = 7.9$, $a_2 = -9.0$, respectivamente.

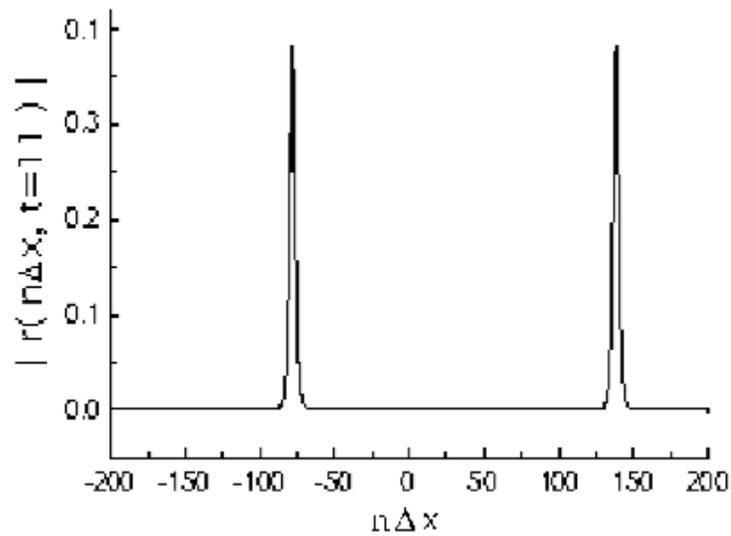


Figure 5.25: El perfil de los solitones después de la colisión, Fig. 4.24, al tiempo $t = 11$.

CAPITULO 6.

CONCLUSIONES

El objetivo del presente trabajo fue la búsqueda de solitones embebidos, doblemente embebidos y la presencia de familias de solitones en medios discretos.

En sistemas continuos, los solitones embebidos son usualmente soluciones aisladas o aparecen en familias continuas,^{72, 86} pero no se conocen ejemplos donde existan dos solitones aislados de distinta forma.

Para la ecuación diferencial y en diferencias finitas 5.3 obtuvimos algunos resultados semejantes y otros completamente diferentes a la ecuación continua:

- Ella da origen a solitones de red brillantes y oscuros, igual que la continua.
- Si los coeficientes de la ecuación satisfacen ciertas condiciones, existen solitones brillantes embebidos, se presenta algo parecido en el continuo.
- Sin embargo, también se encontraron dos solitones brillantes diferentes y ellos pueden o no ser embebidos, resultado que no se encuentra en el caso continuo.
- Más aún, se determinó que si se cumplen algunas condiciones podemos tener un solitón brillante y un soliton oscuro para el mismo sistema, no obstante, esto no quiere decir que puedan ser generados al mismo tiempo.

Se demostró que el modelo discreto, ecuación 5.3, se reduce, en el límite de espaciamiento de red igual a cero, a la ecuación continua investigada con anterioridad, ecuación 5.1. Simultáneamente, las soluciones de los *SER*-brillantes de la ecuación

5.3 van a las soluciones SE de la ecuación 5.1. Lo mismo que las soluciones tipo solitón oscuro.

Como se mencionó antes, la respuesta a la perturbación de los solitones de red brillantes de la ecuación 5.3 fue estudiada por medio de simulaciones. Encontrándose que los solitones regulares brillantes (los no embebidos) oscilan al ser distorsionados, pero sin emitir radiación alguna. Por otro lado, si el solitón de red es embebido, al considerar una perturbación donde la amplitud usada sea más pequeña que el valor exacto de la solución, se presenta radiación en un número de onda y una velocidad de grupo que fueron predichas por la condición de resonancia lineal y es casi monocromática (para el caso continuo la radiación emitida por el SE continuo es bicromática²³).

El siguiente punto fue mostrar la existencia de familias de solitones como solución y que ellos pueden ser embebidos o doblemente embebidos. Para ello se utilizó la ecuación 5.56. Para esta ecuación discreta se encontró que las soluciones son una familia de solitones de red exactos, con las siguientes características:

- Los solitones embebidos de la ecuación 5.56 no son soluciones aisladas, marca la diferencia con la ecuación anterior, ellas forman una familia de un parámetro continuo (esta es una diferencia frente al caso continuo, ya que allí tenemos una familia de dos parámetros).
- Estos solitones se pueden mover con una velocidad constante arbitraria, en un cierto intervalo, sin ser impedidos por lo discreto de la red. Por otro lado, la familia presenta la misma amplitud.
- Excepto para una parte de la subfamilia de velocidad cero, el resto de los solitones

son embebidos ya que su frecuencia interna se encuentra en la banda de fonones (calculada en un sistema de referencia que se mueve con el solitón, y que contiene el correspondiente corrimiento Doppler). Cuando la velocidad es cero, se debe de cumplir la desigualdad $|q| \leq 3\sqrt{3}\varepsilon_3^0$ para tener solitones embebidos.

- Las simulaciones hechas muestran que todos los solitones son estables.
- Las soluciones de solitones exactos con una amplitud fija, constituyen un subconjunto de una familia más grande de solitones discretos que se mueven y que son obtenidos de manera numérica. Esto es, al ser perturbado el solitón exacto en su amplitud, este se relaja a un solitón estacionario que no pertenece a la familia original.
- El resultado de una colisión completamente elástica entre solitones que se mueven, conocida de manera exacta, es un cambio en la posición final.

Finalmente, es conveniente enfatizar que en el presente trabajo se presentan los primeros solitones embebidos discretos (y exactos) conocidos hasta hoy.

BIBLIOGRAFIA

1. M. J. Ablowitz and J. F. Ladik. *J. Math. Phys.* **17** (1976) 1011-1018.
2. M. J. Ablowitz and J.F. Ladik. *Stud. Appl. Math.* **55** (1976) 213.
3. D. Acheson. *From Calculus to Chaos. An introduction to Dynamics* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
4. G. P. Agrawal. *Fiber-Optic Communication Systems*. (Wiley, New York, 2002).
5. G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, New York, 2001) 3^a edición.
6. G. B. Arfken y H. J. Weber. *Mathematical Methods for physicists* (Academic Press, New York, 1995) 4^a edición.
7. E. Atlee Jackson. *Perspectives of nonlinear dynamics. Vol.2.* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
8. P. P. Banerjee. *Nonlinear Optics. Theory, numerical modeling and applications* (Marcel Dekker, New York, 2004).
9. R. W. Boyd. *Nonlinear Optics* (Academic press, New York, 1992).
10. E. O. Brigham. *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall, New Jersey, 1974).
11. L. Brillouin. *Wave Propagation in periodic structures, electric filters and crystal lattices* (Dover Publications, New York, 2003) 2^a edición.

12. P. N. Butcher y D. Cotter. *The Elements of nonlinear Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
13. A. Campa and A. Giasanti, Phys. Rev. E **58** (1998) 3585.
14. A. R. Champney, B. A. Malomed, J. Yang, D. J. Kaup, Physica D **152-153** (2001) 340.
15. G. Chen, X. Dong. *From Chaos to Order. Methodologies, Perspectives and Applications* (World Scientific Singapore, 1998) Series on Nonlinear Science. Serie A, vol. 24.
16. R. Y. Chiao, E. Gamire and C. H. Townws. *Self-trapping of Optical Beams* Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 479-480.
17. D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, Opt. Lett. **13** (1988) 794.
18. P. J. Cuadrey, J. D. Gibbon, J. C. Eilbeck and R. K. Bullough. *Exact multi-soliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equation.* Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 237-238.
19. B.Davies. *Exploring Chaos, theory and experiment* (Perseus Book, Boston, 1999).
20. A. Degasperis, S. V. Manakov and P. M. Santini. *Multiple-scale perturbation beyond the nonlinear Schrödinger equation. I* Physica D. **100** (1997) 187-211.
21. S. Dusuel, P. Michaux and M. Remoissenet. *From kinks to compacton-like kinks.* Phys. Rev. E. **57** (1998) 2320-2360.

22. Aurea Espinosa Cerón. *Propagación de la radiación cuasimonocromática emitida por solitones ópticos resonantes*. Tesis Doctoral (Universidad del Estado de México, Toluca, 2003).
23. A. Espinosa-Cerón, J. Fujioka and A. Gomez-Rodríguez, Phys. Scripta. **67** (2003) 324.
24. A. Espinosa-Cerón, J. Fujioka, A. Gomez-Rodríguez, Rev. Mex. Fís. **49** (2003)493.
25. S. Flach and C. R. Willis, Phys. Rep. **295** (1998) 181-264.
26. H. Flaschka. *The Toda lattice. II. Existence of integrals*, Phys. Rev. B. **9** (1974) 1924-1925.
27. H. Flaschka. *On the Toda lattice. II*, Prog. Theo.Phys. **51** (1974) 703-716.
28. J. Ford. *The Fermi-Pasta-Ulam problem: Paradox turns discovery*, Phys. Rep., **213** (1992) 271-310.
29. J. Fujioka and A. Espinosa, J. Phys. Soc. Jap. **66** (1997) 2601.
30. J. Fujioka. *NLS una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger* (Fenomec, UNAM, 2003).
31. J. Fujioka, A. Espinosa-Cerón and R. F. Rodríguez. *A survey of embedded solitons*, Rev. Méx. Fís. **52** (2006) 6-14.
32. C. S. Gardner, πJ. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura. *Method for solving the Koteweg-de Vries equation*. Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095-1097.

33. H. Georgi. *The physics of waves*, (Prentice Hall, USA, 1993).
34. S. González-Pérez-Sandi, J. Fujioka, B. A. Malomed. *Embedded solitons in dynamical lattices*, Physica D. **197** (2004) 86-100.
35. C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke. *Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics*, Science 238 (1987) 632-638. El mismo artículo se encuentra en: Ed. B. L. Hao. Chaos II (World Scientific, Singapore, 1990) 256-262.
36. A. Hasegawa and F. Tappert. *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23** (1973) 142-144.
37. H. Hasimoto and H. Ono. *Nonlinear Modulation of Gravity Wave*. J. Phys. Soc. Jap. **33** (1972) 805-811.
38. M. Hénon. *Integrals of the Toda lattice*, Phys. Rev. B. **9** (1974) 1921-1923.
39. F. B. Hildebrand. *Introduction to numerical Analysis*, (Dover Publications, New York, 1987) 2^a edición.
40. M. J. James, G. M. Smith and J. C. Wolford. *Métodos numéricos aplicados a la computación digital con fortran*. (Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, 1973).
41. T. Kapitaniak and S. R. Bishop. *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos*, (J.Wiley & Sons, England, 1999).

42. P. G. Kevrekidis, R. ϕ . Rasmussen and A. R. Bishop, *Int. J. Mod. Phys. B.* **15** (2001) 2833.
43. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, A. Saxena, A. R. Bishop and D. J. Frantzeskakis, *Physica D.* **183** (2003) 87.
44. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal. *Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals*, (Academic Press, New York, 2003).
45. G. Kopidakis and S. Aubry, *Physica D.* **130** (1999) 155.
46. A. Korpel and P. P. Banerjee. *A Heuristic Guide to Nonlinear Dispersive Wave Equations and Soliton-type solutions*. *Proc. IEEE.* **72** (1984) 1109-1130.
47. J. A. Krumhansl. *Unity in the science of physics*, *Physics Today*. March (1991) 33-38.
48. G. Kuwabara, T. Hasegawa and K. Kono. *Water waves in a ripple tank*. *Am. J. Phys.* **54** (1986) 1002-1007.
49. G. L. Lamb Jr. *Phys. Lett. A.* **32** (1970) 251-252.
50. R. E. Peierls. *The size of a dislocation*. *Proc. Phys. Soc. Lon. A.* **52** (1940) 34.
51. E. N. Lorenz. *Deterministic non-periodic flow*, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130-141.
52. L. G. Machado, M. A. Savi and P. M. C. L. Pacheco. *Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators*, *Int. J. Solid. and Stru.* **40** (2003) 5139-5156.

53. S. L. McCall and E. L. Hahn. *Self-induced transparency*. Phys. Rev. **183** (1969) 457-485.
54. D. W. McLaughlin and A. C. Scott. *Perturbation analysis of fluxon dynamics*. Phys. Rev. A. **18** (1978) 1652-1680.
55. B. A. Malomed, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, H. E. Nistazakis and A. N. Yannacopoulos. Phys. Rev. E. **65** (2002) 056606.
56. B. A. Malomed, J. Fujioka, A. Espinosa-Cerón, R.F. Rodríguez and S. González. *Moving embedded lattice solitons*. Chaos. **16** (2006) 013112.
57. S. V. Manakov. *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves*. Sov. Phys. JETP. **38** (1974) 248-253.
58. J. B. Marion. *Classical Dynamics of particles and Systems*, (Academic Press, New York, 1970) 2^a edición.
59. J. J. Mazo, E. Trias and T. P. Orlando, Phys. Rev. B. **59** (1999) 13604.
60. L. F. Mollenauer, R. H. Stolen and J. P. Gordon. *Experimental observation de picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers*. Phys. Rev. Lett., **45** (1980) 1095-1098.
61. A. M. Morgante, M. Johansson, S. Aubry and G. Kopidakis. *Breather-phonon resonances in finite-size lattices: "phantom breathers"?*, J. Phys. A. **35** (2002) 4999-5021.

62. K. Muroya, N. Saitoh and S. Watanabe. *Experiment on lattice solitons by an nonlinear LC circuit, observation of a dark soliton*. J. Phys. Soc. Japan, **51** (1982) 1024-1029.
63. A. C. Newell and J. V. Moloney. *Nonlinear Optics*, (Addison Wesley, New York, 1992).
64. S. Nettel. *Wave Physics. Oscillations-Solitons-Chaos*, (Springer-Verlag, Boston, 1997) 2^a edición corregida.
65. T. Opatrný, B. A. Malomed and G. Kurizki, Phys. Rev. E. **60** (1999) 6137.
66. J.K. Perring and T.H.R. Skyrme. *A model unified field equation*. Nucl. Phys. **31**, (1967), 550-555.
67. M. Peyrard and A. R. Bishop. Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2755.
68. G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts and C. J. Thompson. *Integrable mapping and soliton equation*, Physica A. **126** (1988) 419-421.
69. G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts and C. J. Thompson. *Integrable mapping and soliton equation II*. Physica D. **34** (1989) 183-192.
70. L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*, (University of Texas Press, Austin, 1980).
71. M. Remoissenet. *Waves called Solitons. Concepts and Experiments*, (Springer-Verlag, Berlin, 1999) 3^a edición revisada y ampliada.

72. R. F. Rodríguez, J. A. Reyes, A. Espinosa-Cerón, J. Fujioka and B. A. Malomed. *Standard and embedded solitons in nematic optical fibers*, Phys. Rev. E. **68** (2003) 036606.
73. F. Smektala, C. Quemard, V. Couderc and A. Barthélémy, J. Non-Cryst. Solids. **274** (2000) 232.
74. A. C. Scott. *Active and Nonlinear Wave Propagation in electronics*, (Wiley-Interscience, New York, 1970).
75. A. C. Scott, F. Y. F. Chu and W. McLaughlin. *The Soliton: A new concept in applied science*, Proc. of the IEEE. **61** (1973) 1443-1483.
76. A. Scott ed. *Encyclopedia of Nonlinear Science*, (Routledge, New York, 2005).
77. A. J. Sievers, Phys. rev. Lett. **83** (1999) 223.
78. B. L. Swanson, J. A. Brozik, S. P. Love, G. F. Strouse, A. P. Shreve, A. R. Bishop, W. -Z. Wang and M. I. Salkola, Phys. Rev. Lett. **821** (1999) 3288.
79. M. Toda. *Wave propagation in anharmonic lattices*, J. Phys. Soc. Jap. **23** (1967) 501-506.
80. M. Toda. *Waves in nonlinear Lattice*, Sup. Prog. Theor. Phys. **45** (1970) 174-200.
81. M. Toda. *Theory of nonlinear lattice*, (Springer, Berlin, 1989) 2ª edición, Springer Series in Solid-State Sciences 20.
82. E. Trias, J. J. Mazo and T. P. Orlando, Phys. Rev. Lett. **84** (2000)741.

83. S. Trillo, W. Torruellas (editors). *Spatial Solitons*, (Springer, Berlin, 2001) Springer Series in Optical Sciences 82.
84. K. Yagasaki, A. R. Champneys and B. A. Malomed, *Nonlinearity*. **18** (2005) 2591.
85. J. Yang, B. A. Malomed, D. J. Kaup, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1958.
86. J. Yang, *Stud. Appl. Math.* **106** (2001) 337.
87. H. Washimi and T. Taniuti. *Propagation of ion acoustic solitary waves of small amplitude*. *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 996-998.
88. Thomas P. Weissert. *The genesis of simulation in Dynamics pursuing the Fermi-Pasta-Ulam problem*, (Springer, New York, 1997).
89. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240-243.
90. C. Zhan, D. Zhang, D. Zhu, D. Wang, Y. Li, Z. Lu, L. Zhao, and Y. Nie, *J. Opt. Soc. Am. B.* **19** (2002) 369.
91. V. E. Zakharov. *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*. *J. App. Mec. Tec. Phys.* **2** (1968) 190-194.
92. V. E. Zakharov. *Collapse of Langmuir waves*. *Sov. Phys. JETP.* **35** (1972) 908-912.
93. V. E. Zakharov and A. B. Shabat. *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*. *Sov. Phys. JETP.* **34** (1972) 62-69.

APENDICE A.

INHIBICIÓN DE LA RADIACIÓN.

Como se ha mencionado en el capítulo 5, el carácter no radiativo de un pulso es consecuencia del balance entre los términos lineales y no lineales de la ecuación:

$$\begin{aligned} & j \frac{\partial A_n}{\partial T} + \varepsilon_2 \frac{\Delta_2}{(\Delta x)^2} A_n - j \varepsilon_3 \frac{\Delta_3}{(\Delta x)^3} A_n + \varepsilon_4 \frac{\Delta_4}{(\Delta x)^4} A_n \\ &= f(A_n, |A_n|^2, |A_n|^4, \frac{\Delta}{\Delta x} A_n) \end{aligned} \quad (1.01)$$

con $A_n = A(n\Delta x, t)$ y $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \gamma_1, \gamma_2$ y σ , son constantes reales y donde $j = \sqrt{-1}$. La parte izquierda de la ecuación 1.01, son los términos lineales y la parte derecha de esta, son los términos no lineales.

El objeto de este apéndice es mostrar que las ecuaciones estudiadas no presentan radiación, para ello vamos a hacer lo siguiente.

Sea U_n^0 una solución particular de la ecuación 1.01 la cual se va a sustituir en la parte no lineal de la ecuación:

$$y_0(n\Delta x, t) = f(U_n^0, |U_n^0|^2, |U_n^0|^4, \frac{\Delta}{\Delta x} U_n^0) \quad (1.02)$$

esto nos permite transformar la ecuación 1.01 en una ecuación parcial diferencial y en diferencias inhomogénea, cuya solución viene dada por una solución particular, en este caso U_n^0 , más la solución de la homogénea, quedando:

$$A(n\Delta x, t) = U^0(n\Delta x, t) + y_h(n\Delta x, t)$$

y por lo tanto:

$$j \frac{\partial A_n}{\partial T} + \varepsilon_2 \frac{\Delta_2}{(\Delta x)^2} A_n - j \varepsilon_3 \frac{\Delta_3}{(\Delta x)^3} A_n + \varepsilon_4 \frac{\Delta_4}{(\Delta x)^4} A_n = y_0(n\Delta x, t) \quad (1.03)$$

Para ver que el solitón no radía, vamos a sacar la doble transformada a la ecuación 1.03, esto es:

$$\hat{H}(\kappa_p, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2N}\sqrt{2\pi}} \sum_{l=0}^{2N-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(l\Delta x, t) e^{j(\kappa_p l \Delta x + \omega t)} dt$$

con el par de transformadas en el tiempo dadas por:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j(\omega t)} dt \\ h(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-j(\omega t)} d\omega \end{aligned}$$

y las del espacio, como:

$$\begin{aligned} H(\kappa_p) &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{l=0}^{2N-1} h(l\Delta x) e^{j(\kappa_p l \Delta x)} \\ h(l\Delta x) &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{l=0}^{2N-1} H(\kappa_p) e^{-j(\kappa_p l \Delta x)} \end{aligned}$$

donde $\Delta x = \chi/2N$, χ es el rango en el espacio de la función.

Para obtener la doble transformada de Fourier de la ecuación 1.03 definimos a la función A_n como:

$$A_n = g\left(\frac{n\Delta x - vt}{v_0}\right) e^{j(\varpi t + sn\Delta x)} \quad (1.04)$$

sin pérdida de generalidad.

Recordando que:

$$\begin{aligned} \Delta r_n &= [\rho(r_{n+1} - r_{n-1}) - \delta(r_{n+2} - r_{n-2})] / 12\Delta x \\ \Delta_2 r_n &= (r_{n-1} + r_{n+1} - 2r_n) / (\Delta x)^2 \\ \Delta_3 r_n &= (r_{n+2} - r_{n-2} - 2(r_{n+1} - r_{n-1})) / 2(\Delta x)^3 \\ \Delta_4 r_n &= (r_{n+2} + r_{n-2} - 4(r_{n+1} + r_{n-1}) + 6r_n) / (\Delta x)^4 \end{aligned}$$

son las diferencias utilizadas en el capítulo 5. Sacando la transformada de Fourier para cada uno de los términos de la ecuación 1.03:

$$\begin{aligned}
j \frac{\partial A_n}{\partial T} &\rightarrow \frac{v_0 \omega}{v} \hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) \delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0} \\
\varepsilon_2 \Delta_2 A_n &\rightarrow \frac{2\varepsilon_2^0 v_0}{v} \left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right) \hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) \delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0} \\
j\varepsilon_3 \Delta_3 A_n &\rightarrow -\frac{4\varepsilon_3^0 v_0}{v} \text{Sen}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) \\
&\quad \cdot \left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right) \hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) \delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0} \\
\varepsilon_4 \Delta_4 A_n &\rightarrow \frac{4\varepsilon_4^0 v_0}{v} \left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right)^2 \hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) \delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0}
\end{aligned}$$

y observamos que cuando $v = 0$ y $s = 0$, resulta:

$$j \frac{\partial A_n}{\partial T} \rightarrow \sqrt{2\pi} \omega \hat{G}(v_0 \kappa_p) \delta(\varpi + \omega) \quad (1.05)$$

$$\varepsilon_2 \Delta_2 A_n \rightarrow 2\sqrt{2\pi} \varepsilon_2^0 (\text{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) \hat{G}(v_0 \kappa_p) \delta(\varpi + \omega) \quad (1.06)$$

$$j\varepsilon_3 \Delta_3 A_n \rightarrow -4\sqrt{2\pi} \varepsilon_3^0 \text{Sen}(\kappa_p \Delta x) (\text{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) \hat{G}(v_0 \kappa_p) \delta(\varpi + \omega) \quad (1.07)$$

$$\varepsilon_4 \Delta_4 A_n \rightarrow 4\sqrt{2\pi} \varepsilon_4^0 (\text{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1)^2 \hat{G}(v_0 \kappa_p) \delta(\varpi + \omega) \quad (1.08)$$

sustituyendo los términos por sus dobles transformadas 1.05-1.08 en la ecuación 1.03 y despejando $\hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) &= F(\kappa_p, \omega) + \\
&\quad \left[\frac{\hat{Y}_0(\kappa_p, \omega)}{\frac{v_0}{v} \delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0} \left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right)} \right] \\
&\quad \div \left[\frac{\omega}{\left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right)} + 2\varepsilon_2^0 \right. \\
&\quad \left. + 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\varepsilon_4^0 v_0}{v} \left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right) \right] \quad (1.09)
\end{aligned}$$

y cuando $v = 0$ y $s = 0$, se reduce a:

$$\begin{aligned}\hat{G}(v_0\kappa_p) &= F(\kappa_p, \omega) + \\ & [\hat{Y}_0(\kappa_p, \omega)] \div [\sqrt{2\pi}\delta(\varpi + \omega)] \cdot [\omega + 2\varepsilon_2^0(\text{Cos}(\kappa_p\Delta x) - 1) \\ & + 4\varepsilon_3^0\text{Sen}(\kappa_p\Delta x)(\text{Cos}(\kappa_p\Delta x) - 1) + 4\varepsilon_4^0(\text{Cos}(\kappa_p\Delta x) - 1)^2] \quad (1.010)\end{aligned}$$

para toda κ_p y ω , y donde $F(\kappa_p, \omega)$ es la transformada de Fourier de la homogénea, y donde $\hat{Y}(\kappa_p, \omega)$ es la doble transformada de 1.02.

La condición para que no se presente resonancia es:

$$|\hat{G}(v_0(s + \kappa_p))| < \infty$$

esto es, que la función $\hat{G}(v_0(s + \kappa_p))$ permanezca acotada en casi todo el rango, excepto en un conjunto de puntos (permitiendonos tener distribuciones como la delta). Cuando el denominador de 1.010 se hace cero, la resonancia se hace presente, lo que equivale a tener un pulso radiante que tiende a desaparecer con el paso del tiempo. Para que esto no suceda, es necesario que el numerador sea una función que sea múltiplo del denominador.

Ahora, en el capítulo 5 se trabajaron dos ecuaciones cuyas partes no lineales vienen dadas por:

$$\begin{aligned}y_0(n\Delta x, t) &= -\gamma_1 |U_n^0|^2 U_n^0 \gamma_1^0 |U_n^0|^2 [U_{n+1}^0 + U_{n-1}^0] \\ & + \gamma_2^0 |U_n^0|^4 [U_{n+2}^0 + U_{n-2}^0 + 4\alpha(U_{n+1}^0 + U_{n-1}^0)] \quad (1.011)\end{aligned}$$

$$y_0(n\Delta x, t) = \sigma^0 |U_n^0|^2 [\rho(U_{n+1}^0 - U_{n-1}^0) - \delta(U_{n+2}^0 - U_{n-2}^0)] \quad (1.012)$$

donde la primera se utiliza en la primera ecuación del capítulo 5 y la 1.012 en la segunda.

Para la primera ecuación del capítulo 5, ecuación 5.3, tenemos una solución dada por:

$$U_n^0 = A \operatorname{Sech}(Bn\Delta x) e^{-jCt} \quad (1.013)$$

que sería la solución particular a la que nos referimos antes, hay que recordar que en esta ecuación tanto $\varepsilon_3 = 0$ como $\sigma = 0$, y que:

$$\varepsilon_2^0 = \frac{\varepsilon_2}{(\Delta x)^2}; \varepsilon_4^0 = \frac{\varepsilon_2}{(\Delta x)^4}; \gamma_1^0 = \frac{\gamma_1}{2}; \gamma_2^0 = \frac{2\gamma_2}{3}$$

Al evaluar la doble transformada de Fourier de la ecuación 1.02 con el término modificado, dado por 1.011, vamos a tomar en cuenta la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} y_0(n\Delta x, t) &= -\gamma_1^0 |U_n^0|^2 (U_{n-1}^0 + U_{n+1}^0) \\ &\quad + \gamma_2^0 |U_n^0|^4 (U_{n+2}^0 + U_{n-2}^0 + 4\alpha(U_{n+1}^0 + U_{n-1}^0)) \end{aligned} \quad (1.014)$$

$$= j \frac{\partial U_n^0}{\partial T} + \varepsilon_2 \frac{\Delta_2}{(\Delta x)^2} U_n^0 + \varepsilon_4 \frac{\Delta_4}{(\Delta x)^4} U_n^0 \quad (1.015)$$

sustituyendo la solución 1.013 en la ecuación 1.015 y calculando la doble transformada de Fourier se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_0(\kappa_p, \omega) &= [\sqrt{2\pi} A \delta(\omega - C)] \cdot [C + 2\varepsilon_2^0 (\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) \\ &\quad + \varepsilon_4^0 (\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1)^2] \left[\frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} e^{j\kappa_p l \Delta x} \operatorname{Sech}(Bl\Delta x) \right] \end{aligned} \quad (1.016)$$

el análisis numérico del Caso 1 Tabla 1, muestra que el cálculo numérico de la FFT de la $\operatorname{Sech}(Bn\Delta x)$ es otra $\operatorname{Sech}(\Theta\kappa_p)$, donde Θ es el nuevo argumento (ver Fig.5.6).

$$\frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} e^{j\kappa_p l \Delta x} \operatorname{Sech}(Bl\Delta x) \simeq \frac{1}{4} \operatorname{Sech}\left(\frac{\kappa_p \pi}{2B}\right)$$

el resultado de la transformada está calculado con la integral. Sustituyendo en la

ecuación 1.016, tenemos:

$$\hat{Y}_0(\kappa_p, \omega) = \left[\frac{1}{4} \sqrt{2\pi} A \operatorname{Sech}\left(\frac{\kappa_p \pi}{2B}\right) \delta(\omega - C) \right] \cdot [C + 2\varepsilon_2^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) + \varepsilon_4^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1)^2] \quad (1.017)$$

La A, B, C y α vienen dadas por las ecuaciones 5..8, 5..10, 5..9 y 5..12, respectivamente.

Sustituyendo 1.017 en 1.010 se tiene:

$$\hat{G}(v_0 \kappa_p) = \left[\frac{1}{4} A \operatorname{Sech}\left(\frac{\kappa_p \pi}{2B}\right) \frac{\delta(\omega - C)}{\delta(\varpi + \omega)} \right] \cdot [C + 2\varepsilon_2^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) + \varepsilon_4^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1)^2] \div [\omega + 2\varepsilon_2^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) + 4\varepsilon_4^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1)^2]$$

de esta ecuación podemos concluir:

1.- Si $\omega + 2\varepsilon_2^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1) + 4\varepsilon_4^0(\operatorname{Cos}(\kappa_p \Delta x) - 1)^2 = 0$, esto es, el denominador es cero. Ahora bien, esta es la relación de dispersión que se obtiene al sustituir una onda plana en la parte lineal de la ecuación 5..3 del capítulo 5, y que equivale a la ecuación 5..17 del mismo capítulo.

2.- Podemos apreciar que tanto el denominador como el numerador presentan una función delta, $\delta(\varpi + \omega)$ y $\delta(\omega - C)$, respectivamente. Para evitar indefiniciones deberemos hacer:

$$\omega = -\varpi = C$$

lo que implica que el solitón está embebido.

3.- Dado lo anterior, no se presentará resonancia cuando $\omega = C$, ya que el numerador cancelará al denominador y por lo tanto:

$$|\hat{G}(v_0 \kappa_p)| < \infty$$

y obtenemos

$$\hat{G}(v_0\kappa_p) = \frac{1}{4}ASech\left(\frac{\kappa_p\pi}{2B}\right)$$

donde $v_0 = \pi/2B$.

Para la segunda ecuación del capítulo 5, ecuación 5.56, con $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_4^0 = \gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 0$ y

$$\varepsilon_3^0 = \frac{\varepsilon_3}{2(\Delta x)^3}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{12\Delta x}$$

tenemos que la solución viene dada por

$$U_n^0 = ASech\left(\frac{n\Delta x - at}{w}\right) e^{j(qt+Qn\Delta x)}$$

que al ser sustituida en 1.012, obtenemos:

$$y_0(n\Delta x, t) = j\sigma |U_n^0|^2 \frac{\Delta}{\Delta x} U_n^0 \quad (1.018)$$

$$= j \frac{\partial U_n^0}{\partial T} - j\varepsilon_3 \frac{\Delta_3}{(\Delta x)^3} U_n^0 \quad (1.019)$$

calculando la doble transformada de Fourier de 1.019, tenemos:

$$\hat{Y}_0(\kappa_p, \omega) = \left[\frac{w}{4a} ASech\left(-\frac{w(q+\omega)\pi}{2a}\right) \delta_{Q+\kappa_p+(\frac{q+\omega}{a})=0} \right]$$

$$\cdot [\omega + 4\varepsilon_3^0 Sen\left((Q + \frac{q+\omega}{a})\Delta x\right) (Cos\left((Q + \frac{q+\omega}{a})\Delta x\right) - 1)] \quad (1.020)$$

al sustituir esta ecuación en 1.09, donde $\varepsilon_2^0 = 0$ y $\varepsilon_4^0 = 0$, se obtiene:

$$\hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) = \left[\frac{\frac{w}{4a} ASech\left(-\frac{w(q+\omega)\pi}{2a}\right) \delta_{Q+\kappa_p+(\frac{q+\omega}{a})=0}}{\frac{v_0}{v} \delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0}} \right]$$

$$\cdot [\omega + 4\varepsilon_3^0 Sen\left((Q + \frac{q+\omega}{a})\Delta x\right) (Cos\left((Q + \frac{q+\omega}{a})\Delta x\right) - 1)]$$

$$\div [\omega + 4\varepsilon_3^0 Sen\left((s + \frac{\varpi+\omega}{v})\Delta x\right) (Cos\left((s + \frac{\varpi+\omega}{v})\Delta x\right) - 1)]$$

pudiendo concluir:

1.- Tanto el numerador como el denominador presentan funciones deltas,

$$\delta_{Q+\kappa_p+(\frac{q+\omega}{a})=0}, \text{ numerador}$$

$$\delta_{s+\kappa_p+(\frac{\varpi+\omega}{v})=0}, \text{ denominador}$$

Ello nos lleva a que:

$$Q + \kappa_p = -\left(\frac{q + \omega}{a}\right)$$

$$s + \kappa_p = -\left(\frac{\varpi + \omega}{v}\right)$$

y por lo tanto:

$$Q = s$$

$$q = \varpi$$

si queremos que $\hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right)$ permanezca finita.

2.- Si $\omega + 4\varepsilon_3^0 \text{Sen}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) \left(\text{Cos}\left(\left(s + \frac{\varpi + \omega}{v}\right)\Delta x\right) - 1\right) = 0$, la función $\hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right)$ se volvería indefinida y por lo tanto se presentaría resonancia; sin embargo, esta relación fue obtenida al sustituir una onda plana de la forma $e^{j(\Omega t - k(n\Delta x - at))}$ en la parte lineal de la ecuación 5.56 y viene siendo 5.73 con $\omega = -(s + \kappa_p)v - \varpi$ en lugar de $q = -\Omega - a(Q + \kappa)$.

3.- En estos puntos la

$$\hat{G}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right) = \frac{1}{4} A \text{Sech}\left(-\frac{v_0}{v}(\varpi + \omega)\right)$$

donde A, w, q y a vienen dados por las ecuaciones 5.61, 5.62, 5.64 y 5.63.

Como se ha visto, en ambos casos, cuando la solución de las ecuaciones son solitones brillantes embebidos no se presenta radiación y por lo tanto las soluciones son estables.

APENDICE B.

ECUACIONES DISCRETAS MÁS IMPORTANTES.

2.1 La ecuación de Toda.

Siguiendo el trabajo de FPU, M. Toda propone otro potencial no lineal, cuya diferencia fundamental es: El problema de FPU es no integrable, mientras el problema de Toda lo es. Él conecta las masas puntuales de la retícula por medio de resortes cuyo potencial viene dado por:

$$\phi(r_n) = \frac{a}{b}e^{-b(r_n-D)} + a(r_n - D) - \frac{a}{b} - F, ab > 0, \quad (2.11)$$

donde D es la distancia entre las partículas inicialmente y r_n distancia entre dos partículas. El primer término de este potencial es repulsivo, el segundo es una fuerza atractiva y la F es una fuerza externa constante que actúa sobre él. El valor de la constante se encontró al hacer $\phi(r_n = D) = 0$. Ya que $r_n = D$ representa el estado natural del resorte se tiene $\phi'(r_n = D) = 0$. Para este potencial encontramos que la ecuación de movimiento asociada es:

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a e^{bD} (2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}), \quad (2.12)$$

$$= a'(2e^{-b(r_n-D)} - e^{-b(r_{n-1}-D)} - e^{-b(r_{n+1}-D)}), \quad (2.13)$$

$$a' = a - F, \quad (2.14)$$

la fuerza externa no aparece en las ecuaciones de manera explícita sino a través de a' y D .

Un tren de ondas fue una de las soluciones encontradas por M. Toda^{79, 80} .

Cuando la amplitud es mucho menor que 1, encontramos:

$$\begin{aligned} r_n &= -\frac{1}{b} \ln \left(1 + \frac{\kappa^2}{2} \text{Sen}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) \text{Cos} \left(\omega t \mp \frac{2\pi n}{\lambda} \right) \right) + D, \\ &\simeq -\frac{\kappa^2}{2b} \text{Sen}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) \text{Cos} \left(\omega t \mp \frac{2\pi n}{\lambda} \right) + D, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $\kappa \ll 1$.

Cuando las amplitudes del tren de ondas se hacen grandes y picudas el tren de ondas se transforma en una secuencia de ondas tipo pulso a intervalos iguales de λ .

Cada pulso tiene la forma de *Sech*², de hecho un solitón. Por lo que el tren de ondas es una secuencia de solitones que se mueven e interactúan mutuamente, no son independientes uno del otro y su relación de dispersión es:

$$\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{ab}{m}} \text{Sen} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right).$$

Podemos encontrar también un solitón en una red infinita, dado por:

$$e^{-b(r_n - D)} = 1 + \frac{m}{ab} [\beta^2 \text{Sech}^2(\beta t \mp \alpha n) - 2\beta\nu].$$

Cuando la forma de la onda varía lentamente comparada con la distancia entre partículas, el límite al continuo es generalmente válido y la ecuación 2.12 se transforma en⁸⁰:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0$$

con $u = \gamma r$, $\sigma = -\mu b / 4\gamma\beta N$ y $\delta^2 = \mu^3 / 24\beta N^3$. esta ecuación es conocida como la Korteweg-deVries (KdV).

Como se menciona antes, la ecuación 2.12 es integrable, y en el trabajo de M.Hénon³⁸ encontramos:

- Para una retícula periódica de N partículas, las N integrales de movimiento son

$$I_m = \sum (u_{i_1} \cdots u_{i_k})(-X_{j_1}) \cdots (-X_{j_l}),$$

$$u_i = \frac{\partial r_i}{\partial t}, \quad X_i = C e^{-(r_{i+1}-r_i)},$$

donde se satisfacen las siguientes condiciones: i) los índices $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$, que aparecen en I_m son todos diferentes y son modulo N , ii) el número de estos índices es m , esto es $k + 2l = m$. Para $N=3$ se tiene

$$I_1 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$I_2 = u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 - X_1 - X_2 - X_3,$$

$$I_3 = u_1 u_2 u_3 - u_1 X_2 - u_2 X_3 - u_3 X_1.$$

- Considerando el caso de condiciones de frontera fijas, con $2N + 2$ partículas, utilizando la concición inicial $u_{-i} = u_i$. Se encuentra las integrales de movimiento son las del sistema periódico, sin embargo, para m impares estas se vuelven cero dado que los términos simétricos se destruyen entre sí.

- En una red infinita, las integrales de movimiento vienen dadas

$$J_m = \sum_{i=0}^N \sum A(\alpha_0, \dots, \alpha_p, \beta_0, \dots, \beta_{p-1}) u_i^{\alpha_0} u_{i+1}^{\alpha_1} \cdots u_{i+p}^{\alpha_p} X_i^{\beta_0} X_{i+1}^{\beta_1} \cdots X_{i+p+1}^{\beta_{p-1}}, m : 1, 2, \dots, N$$

donde la segunda sumatoria se extiende, para una i dada, a todos los términos que satisfacen

$$p \geq 0, \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 1, \sum_{j=0}^p \alpha_j + 2 \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j = m,$$

y el coeficiente numérico

$$A(\alpha_0, \dots, \alpha_p, \beta_0, \dots, \beta_{p-1}) = \prod_{j=0}^p \frac{(\alpha_j + \beta_{j-1} + \beta_j - 1)!}{\alpha_j!} \prod_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\beta_j! (\beta_j - 1)!},$$

para encontrar las integrales de movimiento para $N \rightarrow \infty$ es necesario restarle una constante apropiada, C_m , a J_m . Para m impar, esta constante es cero, mientras que para m par es $C_m = (m-1)! / (m/2)!$, quedando las integrales de movimiento

$$K_m = J_m - NC_m.$$

Las primeras cuatro son

$$K_1 = 2\text{Senh}\alpha,$$

$$K_2 = \text{Senh}2\alpha,$$

$$K_3 = \frac{2}{3}\text{Senh}3\alpha + 2\text{Senh}\alpha,$$

$$K_4 = \frac{1}{2}\text{Senh}4\alpha + 2\text{Senh}2\alpha,$$

donde

$$u_i = \beta(\text{Tanh}\theta_i - \text{Tanh}\theta_{i-1}),$$

$$X_i = 1 + \beta^2 (1 - \text{Tanh}^2\theta_i).$$

Por lo tanto, existen infinidad de cantidades conservadas.

H.Flaschka^{26, 27} encontró las constantes de movimiento y la formula para N solitones, utilizando el método de dispersión inversa.

2.2 La ecuación no lineal de Schrödinger discreta (DNLS).

Esta ecuación apareció por primera vez en la literatura en 1959, Holstein la propone como modelo para el movimiento del polaron en cristales moleculares, sin embargo, tuvo que pasar un poco más de una década para que se volviera a utilizar, esta vez el modelo fue retomado por Davidov en los 70's para el transporte de la energía en biomoléculas. En los 80's fue llevada al campo de la físico-química en la teoría de los modos locales de pequeñas moléculas y en la óptica no lineal para modelar guías de onda no lineales acopladas y más recientemente la física de ondas de materia para la descripción de una dilución de un condensado Bose-Einstein atrapado en un potencial periódico⁷⁶.

La versión discreta de la NLS viene dada por:

$$j \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\alpha \Delta_2 u_n - \beta |u_n|^2 u_n \quad (2.26)$$

donde se toma como $j = \sqrt{-1}$ en lugar de la i como es lo común, con α y β constantes. u es una función compleja de $n\Delta x$ y t , donde n es el índice de los puntos de la red y Δx el espaciamiento entre los puntos, y con

$$\Delta_2 u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}{(\Delta x)^2}$$

el laplaciano discreto en una dimensión.

Cuando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$, se tiene un problema de enfoque no lineal, mientras que $\beta = -1$ presenta el desenfoque⁴².

La ecuación 2.26 puede ser obtenida a partir de la lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [j(\dot{u}_n u_n^* - \dot{u}_n^* u_n) - 2\alpha \left| \frac{\Delta u_n}{\Delta x} \right|^2 + \beta |u_n|^4] \quad (2.27)$$

donde u_n^* es el conjugado de u_n , llevandonos a la siguiente hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\alpha \left| \frac{\Delta u_n}{\Delta x} \right|^2 - \frac{\beta}{2} |u_n|^4 \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-j \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_n - u_{n-1})(p_n - p_{n-1}) + \frac{\beta}{2} (u_n p_n)^2 \right] \end{aligned}$$

con $p_n = \partial L / \partial \dot{u}_n$, el momento generalizado.

La norma, dada por

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2$$

tambi3n es una cantidad que se conserva. Llev3ndonos a una propiedad conocida como los Modos Intr3nsecos Localizados (ILM, por sus siglas en ingl3s). Si se propone una funci3n $u_n = v_n e^{j\phi}$, con v_n si3ndo una funci3n compleja y ϕ una constante, se encuentra que v_n satisface la misma ecuaci3n que gobierna u_n y la norma no se ve afectada, por lo que se dice que la norma es invariante o que se tienen ILM, eso es, se tiene una invarianza con respecto al cambio de fase.

Proponi3ndo como soluci3n de la ecuaci3n 2.26 a $u_n = v_n e^{j\Omega t}$, donde la dependencia en t s3lo est3 en la exponencial, uno obtiene:

$$-\Omega v_n = -\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \Delta_2 v_n - \beta |v_n|^2 v_n$$

que resulta ser un problema de estado estacionario en v_n . Existen dos m3todos para resolver el problema:

- 1.- M3todo de iteraciones de Newton-Raphson, el cual resuelve por iteraciones un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales⁴⁰.
- 2.- M3todo de iteraci3n de valores caracter3sticos⁴².

La relación de dispersión lineal se obtiene al sustituir una onda plana, $u_n = \rho e^{j(kn\Delta x + \omega t)}$ con ρ pequeña, en la parte lineal de la ecuación 2.26, esto es:

$$j \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\alpha \Delta_2 u_n$$

lo que nos conduce a la relación entre el número de onda y la frecuencia:

$$\omega = \frac{2\alpha}{(\Delta x)^2} [\text{Cos}(k\Delta x) - 1]$$

y como el $\text{Cos}\theta$ es una función par, se tienen dos valores de $k\Delta x$ que dan la misma ω , a saber $\pm k\Delta x$.

2.3 Ecuación de Ablowitz-Ladik (AL-NLS).

Una variación de la DNLS es la ecuación propuesta por M. J. Ablowitz y J. F. Ladik[?] (AL-NLS) :

$$j \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta_2 u_n - \frac{\beta}{2} |u_n|^2 (u_{n+1} + u_{n-1}) \quad (2.38)$$

que se obtiene a partir de la siguiente hamiltoniana:

$$H = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u_n^* (u_{n+1} + u_{n-1}) - \frac{2}{\beta} \ln(1 + \beta |u_n|^2)] \quad (2.39)$$

y donde se utilizaron los paréntesis de Poisson cuya relación entre las variables está dada por:

$$\{u_m, u_n^*\} = j\delta_{m,n}(1 + \beta |u_n|^2), \quad \{u_m^*, u_n^*\} = \{u_m, u_n\} = 0$$

Junto con el hamiltoniano, la norma que viene dada por:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta |u_n|^2)$$

son cantidades que se conservan.

La diferencia básica entre la DNLS y la AL-NLS son sus cantidades conservadas y su integrabilidad, mientras la primera sólo presenta al hamiltoniano y la norma como cantidades que se conservan y no es integrable, la segunda tiene una infinidad y es integrable⁴² .

Ablowitz-Ladik utilizaron el método de dispersión inversa para crear su ecuación, ellos encontraron que los solitones presentes en ella se debían a los valores discretos del espectro de dispersión que son negativos. Además encontraron que las cantidades conservadas son infinitas.

APENDICE C. ERGODICIDAD.

En 1872, Ludwig Boltzmann consideró a las partículas del gas diluído como un conjunto de objetos, que:

- 1) Se mueven al azar.
- 2) Sólo colisionan dos partículas entre sí.

Dejando así a un lado la idea de considerar que las partículas se mueven bajo ciertas fuerzas que actúan sobre ellas de manera individual. Esto lo llevó a encontrar:

- i) La ecuación cinética para un gas (ver Reichl⁷⁰).
- ii) Sus hipótesis ergódicas.

Para llevar a cabo su estudio, Boltzmann consideró un sistema de muchos cuerpos aislados tal que:

- La parte dominante del espacio fase, consiste de regiones donde las propiedades macroscópicas son muy cercanas a las propiedades de equilibrio.
- Las trayectorias del sistema consumen tiempos iguales en regiones del espacio fase de igual extensión.
- Las propiedades macroscópicas del sistema deberán esencialmente ser constantes por toda la parte admisible del espacio fase y deberán coincidir con el promedio del tiempo largo de las correspondientes cantidades microscópicas sobre las trayectorias en el espacio fase.

Tiempo después Josiah W. Gibbs incluyó:

- La evolución dinámica de un sistema aislado que inicialmente ocupa una región limitada del espacio fase, compatible con un valor prescrito de sus observables macroscópicas, deberá llevar eventualmente a una ocupación uniforme del espacio fase posible, en el sentido burdo (coarse-grained).

Sin embargo, fueron Henry Poincaré y George Birkhoff quienes dieron origen al planteamiento moderno.

En 1890, H. Poincaré probó una propiedad importante de la conducta de los sistemas dinámicos en tiempo largo. Este resultado, conocido hoy como Teorema de Recurrencia, muestra que casi todo punto, en el espacio fase de un sistema que preserva el volumen, tiene que retornar a un punto arbitrariamente cercano a su posición inicial.

Posteriormente, G. Birkhoff en 1931 presentó su Teorema Ergódico, en el cual, en términos de promedio, se establece lo siguiente:

Sí para las funciones de fase $f(X^N)$, se tiene que:

- i) El promedio en el tiempo, $\langle f \rangle_T$, existe para casi todo X^N (un conjunto de medida cero puede ser excluido).
- ii) Cuando éste existe y es igual al promedio de la extensión en el espacio fase, $\langle f \rangle_T = \langle f \rangle_S$.

Se dice que el sistema es ergódico para todas las funciones de fase $f(X^N)$.

Donde $X^N = X^N(p^N, q^N)$ son los puntos en un espacio de dimensión N ,

$$\begin{aligned}\langle f \rangle_T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(X^N(t)) dt, \\ \langle f \rangle_S &= \frac{1}{\int_{S_e} dS_e} \int_{S_e} f(X^N(t)) dS_e.\end{aligned}$$

Aquí se está considerando que la única integral de movimiento, que define una superficie en el espacio fase, es la energía total y se designa a la superficie por S_e .

Estos teoremas explican las hipótesis de Boltzmann y permiten definir lo que se conoce como flujo ergódico (el flujo de puntos de estado sobre la superficie de energía, S_e , es definido a ser ergódico si casi todos los puntos X^N sobre la superficie se mueven de tal manera que ellos pasan a través de cada vecindad finita pequeña, R_e , sobre la S_e).

Los sistemas con flujo ergódico poseen densidades únicas de probabilidad estacionarias (constantes en S_e) que caracterizan a los sistemas con energía fija en el equilibrio. Ahora, para que un sistema con flujo ergódico alcance su estado de equilibrio, se requiere de una propiedad adicional: mixing (la hipótesis de Gibbs).

Un tipo de flujo que comienza a exhibir alguna forma de irreversibilidad es un flujo mixing. El flujo mixing es caótico y causa que cualquier distribución de probabilidad inicial se disperse a través de la superficie de energía.

El flujo mixing es ergódico, pero los flujos ergódicos no siempre son mixing.

Un sistema es mixing si para todas las funciones integrales cuadradas, $f(X^N)$ y $g(X^N)$, sobre S_e , se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\int_{S_e} dS_e} \int_{S_e} f(X^N) g(X^N(t)) dS_e = \frac{\int_{S_e} f(X^N) dS_e \int_{S_e} g(X^N) dS_e}{\left(\int_{S_e} dS_e\right)^2}$$

esto asegura, que el valor promedio de una función dinámica $f(X^N)$ se aproxime a un valor estacionario en el límite $t \rightarrow \pm\infty$.

Es importante enfatizar: Que mixing da una aproximación burda a un estado estacionario. El valor de la función tiene un valor promedio en S_e , pero puede diferir de éste valor si sólo consideramos una vecindad en algún punto sobre S_e .

Resumiendo lo anterior, tenemos:

Sean A y B regiones arbitrarias finitas sobre la superficie S_e . Asumimos que todos los puntos están en A inicialmente. Si el sistema es mixing y evoluciona en el tiempo, la fracción de puntos que está en A o en B en $t \rightarrow \pm\infty$, deberá ser igual a la fracción del área en S_e ocupada por A o por B , respectivamente.

Fermi, Pasta y Ulam al considerar su sistema de osciladores inarmónicos encontraron que, al poner la energía en unos pocos modos bajos de vibración, no existió una tendencia de la energía a dispersarse en los otros modos, contradiciendo lo que esperaban, ya que suponían que el sistema alcanzaría un estado estacionario, en el cual todos los estados con la misma energía fueran igualmente probables.

Esta conducta sería completamente diferente si el sistema fuera ergódico.

Al conocerse el teorema de KAM, se encontró que la mayor parte de la superficie de energía, en el problema de FPU, es un toro invariante y el sistema exhibe una conducta, que en muchos aspectos, es similar a un sistema de osciladores armónicos no perturbados. Esto se debe a que el acoplamiento inarmónico que FPU utilizaron era débil.

Cuando el acoplamiento se incrementa, las regiones invariantes del espacio fase se rompen y en algún punto, uno esperaría encontrar una transición abrupta de la

conducta, llegando a ser caótica, y algo similar a la equipartición de la energía entre los modos.

Existen una gran variedad de sistemas oscilatorios no lineales, ya estudiados, que exhiben una transición de una conducta estable a una conducta caótica cuando ciertos parámetros son cambiados. Uno de ellos es el sistema de Hénon y Heiles (ver capítulo 2).