

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

AUTOMATAS GENERADORES DE
SEÑALES MARKOFFIANAS

TESIS DE MAESTRIA

GERTRUDIS KURZ DE DELARA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo al Dr. Alejandro Medina por ser una aplicación de su teoría de autómatas probabilísticos, y

a los Profesores E. Fortét y A. Blanco-Lapierre por haber proporcionado la herramienta matemática en una forma directamente aplicable al experimento.

Como signo de gratitud por las ideas que me proporcionó el trabajo de estos investigadores y, en particular, por la ayuda personal del Dr. Alejandro Medina que me permitió vencer muchas dificultades.

Introducción.

En el presente trabajo se trata de describir un método práctico para la generación de un tipo particular de señales estocásticas, las llamadas señales markoffianas, que tienen la particularidad de poder caracterizarse completamente por una serie de parámetros bien definidos. Señales estocásticas de este tipo forman desde luego un conjunto muy reducido dentro de la enorme variedad de las señales estocásticas posibles. Están representadas por dos tipos solamente, los poissonianos, caracterizables por un solo parámetro bien definido, y las markoffianas, caracterizables por una matriz de parámetros bien definidos que, en el caso estacionario o sea, de estadística constante en el tiempo al que limitamos nuestro análisis, determina completamente todas las propiedades estadísticas de la señal. Pueden considerarse estos dos tipos de señales estocásticas como los más sencillos y básicos para los demás. Son, de hecho, las únicas señales estocásticas que se prestan a un análisis matemático exhaustivo, mientras que el resto ha podido analizarse solamente con referencia a su comportamiento asintótico.

Tenemos, desde luego, a nuestra disposición un gran número de fuentes naturales de señales estocásticas, las fuentes de "ruido" p. ej., pero éstas nos proporcionan por lo general una mezcla no separable de señales de estadística diferente que pueden describirse nada más globalmente y cuyos efectos sobre diversos dispositivos físicos ni pueden reproducirse, ni describirse y menos todavía, interpretarse de una manera clara. Sabemos resolver problemas de "separación de señal y ruido" porque lo único que interesa en este caso es la relación entre señal y ruido pero el cuadro cambia completamente en caso de que la "señal" misma que nos interesa, es un proceso estocástico, sea porque conocemos sus características solamente hasta cierta probabilidad, sea que se trata de un fenómeno colectivo con un número muy grande de variables, que todavía no sabemos describir de otra manera que por una distribución probabilística y que no siempre nos da la información deseada si la reducimos al caso asintótico de la distribución normal.

Si consideramos este problema como analógico al problema que se presenta para señales o procesos causales, sea de tipo luminoso, acústico, eléctrico, térmico u otro, se presentan de hecho las mismas dificultades con las señales producidas por fuentes naturales, que aquí tampoco nos llevan a resultados claros y reproducibles. No intentamos probar nuestros circuitos eléctricos con rayos, ni se sacan las características de un micrófono o de una bocina con sonidos de piano, de canto, o de una orquesta; tampoco las de un dispositivo óptico con luz blanca. Analizamos todos estos dispositivos primero con señales simples, caracterizadas, por lo menos hasta cierta aproximación, por una sola frecuencia y amplitud, para llegar a obtener de los resultados de este análisis conclusiones sobre los efectos de señales naturales sobre los mismos dispositivos. Prosiguiendo por analogía en el caso de las señales estocásticas, habrá que trabajar con señales puras que representen un solo tipo de estadística, como se encuentran en señales poissonianas, caracterizadas por un solo parámetro, señales que pueden considerarse como equivalentes a las señales monocromáticas en el caso óptico; o en electrónica, a las salidas de un "generador de señales", u otras análogas, todas ellas generadas artificialmente y caracterizadas por un solo parámetro medible y además, ajustable a un valor dado. Visto de esta manera, las señales markoffianas, el siguiente paso en complicación, podrán compararse, en el caso eléctrico por ejemplo, con señales de onda cuadrada o triangular; de hecho no hay que buscar una correspondencia 1:1, en vista de la gran variedad de las señales estocásticas que hace corresponder toda una clase de éstas a un solo tipo de señales causales.

La dificultad en la construcción de fuentes artificiales de señales estocásticas proviene del hecho bien conocido de que no hay manera en general de generar fenómenos estocásticos a partir de dispositivos macroscópicos. Tenemos que partir de un proceso natural, atómico o nuclear, conformándolo de tal manera que se obtenga el tipo deseado. Para las señales poissonianas disponemos afortunadamente de varios procesos naturales que corresponden al proceso de Poisson o a procesos derivados del proceso de Poisson (1), que nos permiten obtener directamente o a través de filtros adecuados, señales de estadística poissoniana. Este problema ya puede considerarse como resuelto. Se han publicado

en los últimos años varios trabajos sobre el asunto, que parten en su mayoría, de la señal producida por un diodo de ruido ⁽²⁾, ⁽³⁾, ⁽⁴⁾.

Nosotros usamos señales poissonianas como estímulos en el generador markoffiano empleando a este fin un dispositivo de contadores Geiger colocados alrededor de una muestra radioactiva, tomándose la señal entre las terminales de una resistencia que conecta los contadores a su fuente de alta tensión. Este dispositivo viene descrito en detalle en el trabajo que se publicó sobre el primer generador markoffiano construido en el Laboratorio de Cibernética de la C.N.E.N. (⁵)

Tratándose de un problema resuelto, los detalles de la generación de señales poissonianas no se discuten en el presente trabajo para no alargar indebidamente el texto. Sin embargo, se dará la descripción del dispositivo que hace posible ajustar la probabilidad de cada una de estas señales a un valor fijo, predeterminado e independiente de las características de la señal entrante, porque este dispositivo es básico no solamente para el generador markoffiano pero también para algunas de sus posibles aplicaciones.

Hay que mencionar, sin embargo, que la generación de señales estocásticas artificiales puede resolverse también por simulación con computadora y en el presente trabajo se ataca el problema de la generación markoffiana también de esta manera. El método aplicado es el mismo que se usó para la construcción del generador, traduciéndose además las reglas de construcción en instrucciones de máquina. En lo que se refiere a la generación de señales poissonianas por computadora puede considerarse el problema como resuelto hace tiempo, por lo menos para máquinas relativamente grandes. En estos programas se trata de hecho de una producción de señales periódicas pero con un período suficientemente largo para que no se repita antes de haber entregado la señal en su longitud deseada. Estas señales pseudoestocásticas representan una buena aproximación a señales poissonianas siempre y cuando la longitud del período, que depende esencialmente de la longitud de la palabra de la máquina usada, cumpla las condiciones del problema. En este trabajo se usó para la generación poissoniana uno de los programas elaborado en el Instituto de Petróleos (⁶), debidamente modificado para servir en la pe-

queña IBM 1130, por el Sr. Javier Fernández, Investigador en el Instituto de Petróleos y en el Laboratorio de Cibernética de la C.N.E.N., a quien quiero expresar mis agradecimientos por su colaboración en este trabajo que hizo posible la programación y comprobación de la estadística de la generación markoffiana.

En mi opinión, la generación de señales markoffianas programada por el método descrito en este trabajo, que permite controlar directamente los parámetros que determinan completamente la estadística de la señal, puede prestar bastante servicio en la solución con computadora, de problemas de control y de aprendizaje, permitiendo tal vez ciertos mejoramientos en los métodos de búsqueda de la programación heurística, nombre dado a diferentes procedimientos que permiten que la máquina encuentre por sí misma las reglas para resolver un problema, buscando la solución adecuada entre un conjunto dado de soluciones posibles. La literatura muy amplia que existe en este campo ofrece un gran número de soluciones diferentes pero todas tienen en común que la máquina hace experimentos y cambia su conducta de acuerdo con los resultados positivos o negativos de éstos. Para empezar, cuando todavía no tiene "experiencia" recibe, o una serie de reglas fijas para su búsqueda, o trabaja con un "método de Monte Carlo" buscando al azar. Esto se logra, generando una serie de números estocásticos por programa, que sirven de instrucciones cifradas para dirigir los movimientos de la máquina en su espacio de experimentos. Se usa, por lo general, una señal totalmente incoherente con cierta distribución de las probabilidades de los símbolos que representan las instrucciones, escogida según los conocimientos a priori sobre el problema y modificable según los resultados del aprendizaje. A pesar de que en la práctica, los factores con que se trabaja son raras veces totalmente independientes, el método se encontró en muchos casos superior en comparación con un procedimiento basado en reglas fijas porque no limita de antemano al campo de búsqueda; sin embargo, el uso de señales incoherentes puede conducir a búsquedas muy largas y a veces sin resultado. De hecho hay varios intentos de introducir aparte de las probabilidades de los factores aislados, probabilidades de conjunto de varios factores. Usándose señales markoffianas para la búsqueda, con la posibilidad de controlar probabilidades condicionales, pueden introducirse además de las variables

del proceso, relaciones conocidas o aprendidas entre estas variables, lo que parece ser más semejante al método de búsqueda de un ser vivo. El método que usamos para la generación markoffiana permite en efecto controlar la señal a partir de las probabilidades condicionales que determinan su estadística y hace posible cierto control sobre el grado de coherencia. Experiencias prácticas que se obtuvieron en la investigación del tráfico telefónico en Viena (7), simulando las llamadas con señales markoffianas, daban muy buenos resultados. El programa hecho por el Sr. Javier Fernández a base de nuestro método viene brevemente discutido en el texto y reproducido en extenso en el apéndice.

El método en cuestión está basado en la teoría de autómatas finitos del Dr. Alejandro Medina (8), en lo particular en la parte dedicada a autómatas probabilísticos. Además se emplean en este trabajo métodos de diseño desarrollados en la "Lógica dependiente del tiempo" del mismo autor (9) resumidas en un Informe del Laboratorio de Cibernética de la CIEN., pero presentados en todo detalle en varios seminarios y conferencias en la CIEN. y la Facultad de Ciencias de la UNAM.

El tratamiento matemático de los procesos de Markoff sigue las líneas trazadas en el ya mencionado libro de Bleno-Lepierre y Fortét (4), refiriéndose además a textos de Kolmogorov y su escuela (10), (11).

1.- Ruidos y Lenguajes.

En ambos casos se trata, por lo general, de procesos estocásticos, la diferencia proviene del punto de vista del cual se consideran.

Ruidos: Si el proceso estocástico en cuestión viene mezclado con otro proceso, causal a veces, pero no necesariamente, y el propósito es de hacer observaciones sobre el segundo proceso, entonces el primero representa para mí un disturbio, una componente indeseable que trato de reducir o de eliminar, si posible, para poder observar el segundo proceso en toda su pureza. Llamo entonces el primer proceso ruido, el segundo señal y me propongo filtrar la señal del ruido. Se ve que en este caso no interesapara nada las características particulares del ruido en cuestión, a menos que su conocimiento pueda ayudar en el diseño de un mejor filtro. Para el constructor de filtros, un ruido puede así consistir en cualquier cosa, hasta en un proceso perfectamente causal, en tanto que sea un fenómeno indeseable que acompaña otro fenómeno que se requiere observar y cuya observación, debido al ruido, se hace más difícil o imposible. Una revisión de todos los problemas en que el físico o ingeniero tiene que preocuparse de los procesos estocásticos, nos hace ver qué problemas de ruido se presentan en todos lados y muy frecuentemente; abundan también métodos experimentales para atacarlo. Sin embargo, procesos estocásticos comprendidos como ruidos, se definen exclusivamente a partir de la señal que impurifican y no tienen características propias. Como en este trabajo. Nos interesan precisamente las características de los procesos estocásticos y las técnicas experimentales para averiguarlas, reproducirlas y modificarlas, no conviene tratar estos procesos como ruidos y podemos eliminar de antemano los problemas de ruido y las técnicas con que se resuelven, de los asuntos que habrá que considerar.

Lenguajes: Un lenguaje en su forma más general está caracterizado por un conjunto discreto de símbolos, llamado su alfabeto $A(s_1 s_2 \dots s_n)$, asignándose a cada símbolo una cierta probabilidad $p(s_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) con que ocurre en el lenguaje, y un conjunto de reglas $R(f_1 f_2 \dots f_n)$ que determinan que tipo de secuencias de los s_i se consideraran pertenecientes al lenguaje y con que probabilidad pueden ocurrir. Una secuencia

de un cierto número r de símbolos del alfabeto se llama un mensaje de longitud r . El lenguaje consiste entonces de la totalidad de mensajes posibles que pueden formarse con su alfabeto y que satisfacen las reglas R . Como no se especifica, lo que son los símbolos, se pueden describir de esta manera no solamente lenguajes hablados o escritos, pero cualquier serie de eventos que ocurren en un sistema físico y sujetos a ciertas leyes estadísticas. Visto en esta forma, la observación de un sistema físico durante un intervalo de tiempo dado, nos coloca en la posición de recibir una señal del sistema, que representará un trozo de su lenguaje. Naturalmente, la posibilidad de describir de esta manera una observación o experimentación, no implicará siempre su conveniencia. Es útil cuando el fenómeno observado contiene elementos no previsible y puede caracterizarse solamente por su estadística. Una señal periódica p. ej. en que el conocimiento del primer período permite predecir todos los símbolos que vendrán en secuencia, puede entenderse como un caso particular de un lenguaje en que la parte estocástica queda limitada a la longitud de un período, después del cual la señal ya no nos dice nada de nuevo, o en otras palabras, ya no contiene ninguna información. Pero es evidente que para un tratamiento de señales periódicas, el formalismo de los lenguajes no es el más adecuado. Sin embargo tiene cierta importancia cuando se requiere generar con computadora una señal pseudostocástica. En principio, ninguna máquina puede generar una señal aperiódica, porque debido a la longitud finita m de su palabra, puede producir a lo más $2^m - 1$ diferentes palabras si se trata de una máquina binaria, tal que secuencias de longitud $\leq m$ tendrán que repetirse si no antes, por lo menos después de haber pasado todas las palabras diferentes posibles. Sin embargo, en una máquina de alta capacidad 2^m será un número muy grande y permite generar una señal con un período tan largo que equivaldrá para todos los propósitos prácticos a una señal estocástica.

Se sigue de todas maneras de lo anterior que el formalismo de los lenguajes nos ofrece un cuadro suficientemente general para la descripción de toda clase de procesos estocásticos a variables y tiempos discretos para adoptarlo para estos casos, considerando aparte los procesos estocásticos continuos. Hay que distinguir, sin embargo, en am

dos casos entre procesos estacionarios, cuya estadística no varía con el tiempo, y procesos no estacionarios dependientes del tiempo. Para los lenguajes eso último significa que las probabilidades y a veces también las reglas, no dependen solamente de los símbolos pero también del tiempo. En vista de las aplicaciones que me parecen de mayor interés limitaré el tratamiento de la generación markoffiana al caso estacionario y particularmente a los procesos del tipo discreto, es decir a lenguajes con un número finito de símbolos discretos. Las aplicaciones de la teoría de autómatas finitos (los únicos que pueden construirse) a la generación de señales estocásticas bien definidas, se refieren precisamente al caso estacionario y discreto. Para la generación de señales markoffianas continuas se usan otros métodos, algunos bastante más sencillos, que fueron descritos brevemente en otro trabajo⁽¹²⁾.

2.- COHERENCIA Y CLASIFICACION DE LOS LENGUAJES.

El concepto de coherencia, tomado de los lenguajes hablados, puede definirse sin dificultad para el lenguaje generalizado como fué introducido en el párrafo anterior. El concepto intuitivo de coherencia implica cierto grado de dependencia entre la ocurrencia de un símbolo y los símbolos que habian ocurrido anteriormente. Matemáticamente esta relación puede expresarse mediante las probabilidades condicionales.

Llamaremos $p(k/i)$ la probabilidad condicional de la ocurrencia del símbolo s_k cuando antes había ocurrido el símbolo s_i . La probabilidad conjunta (llamada también probabilidad a priori) o probabilidad absoluta) de la secuencia (s_1, s_k) será entonces

$$p(s_1, s_k) = p(s_1) p(s_k / s_1)$$

escrito brevemente

$$p(1, k) = p(1) p(k/1) \dots \dots \dots (1-1)$$

Semejantemente, $p(k/i, r)$ será la probabilidad condicional de la ocurrencia del símbolo s_k después de haber ocurrido la secuencia (s_1, s_r) y, en forma general, será

$p(k/i_1 i_2 \dots i_m)$ la probabilidad condicional de la ocurrencia del símbolo s_k después de haber ocurrido la secuencia de longitud m de símbolos $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m})$.

$$p(i_1 i_2 \dots i_m, k) = p(i_1 i_2 \dots i_m) \cdot p(k/i_1 i_2 \dots i_m) \dots (1-2)$$

Si no consideramos por el momento las condiciones particulares en el empiezo y final de una señal, tendrán que cumplirse las condiciones

$$\sum_{k=1}^n p(k/i_1 i_2 \dots i_m) = 1 \quad (1-3)$$

válidas para toda secuencia de longitud m que ocurre en el lenguaje. (1-3) significa simplemente que después de cualquier secuencia de símbolos, sigue siempre algún símbolo del alfabeto. Las ecuaciones (1-3) se llaman también condiciones marginales.

Sumando sobre todos los símbolos del alfabeto, tenemos desde luego, para las probabilidades absolutas

$$\sum_{i=1}^n p(s_i) = 1 ; \sum_{k=1}^n p(s_i, s_k) = 1 \dots \dots \text{etc.} \dots (1-4)$$

La coherencia de un lenguaje puede entonces caracterizarse por la longitud máxima del mensaje que determina la probabilidad condicional del símbolo siguiente. Sea r esta longitud máxima, entonces para un mensaje de longitud $r+1$, el primer símbolo ya no

influye sobre la probabilidad condicional del símbolo que sigue después del mensaje:

$$P(K/i_1 i_2 \dots i_{k+1}) = P(K/i_2 i_3 \dots i_{k+1})$$

pero $P(K/i_1 i_2 \dots i_k) \neq P(K/i_2 i_3 \dots i_k) \dots (4-5)$

Se dice entonces que el lenguaje tiene un alcance de coherencia, r , o un alcance ergódico r .

Esta clasificación resulta bastante adecuada para lenguajes de estructura simple o no los que se analizan en este trabajo. Para las estructuras muy complejas de los lenguajes hablados hay que introducir las probabilidades en cuestión por lo menos a tres diferentes niveles, letras, palabras y frases, o.u. con sus probabilidades absolutas y condicionales y sus alcances de coherencia. Evidentemente este análisis estadístico no será suficiente para estudios lingüísticos pero basta alimentar una computadora con este tipo de información obtenida de trozos largos de varios idiomas para que la máquina determine de un mensaje particular que le llega p. ej. por radio, en qué idioma fue transmitido o si se trata de un mensaje en clave, si otros detalles dependientes naturalmente de la longitud del mensaje de muestreo. La utilidad del análisis estadístico que se aplica mucho a problemas de cifrado y decifrado de mensajes, consiste en la circunstancia de que introduce criterios objetivos que no dependen del grado de familiaridad que tiene el individuo que recibió el mensaje, con el lenguaje en que fue transmitido. Con estas consideraciones fue p. ej. instalada la primera rastreadora receptora de señales que lleguen desde el espacio a la tierra para ser analizados por computadoras respecto a su coherencia eventual.

Regresando a los lenguajes simples, podemos definir como lenguaje de coherencia cero el lenguaje (o proceso) poissoniano en que la probabilidad de la ocurrencia de un símbolo es independiente del símbolo anterior, y por lo tanto de cualquier secuencia de símbolos que ocurrió anteriormente, así que

para la señal poissoniana con $r = 0$ vale: $p(k/1) = p(k) \dots (4-6)$

Sigue la señal con un primer grado de coherencia, la señal

Markoffiana de primer orden con $r = 1$, cuyas características serán:

$$P(K/i) \neq P(K)$$

pero $P(K/i_1 i_2 \dots i_m) = P(K/i_m)$ para todo $m \geq 1 \dots (1-7)$

Semejantemente para la señal Markoffiana de 2. orden,

$$P(K/i_1 i_2) \neq P(K/i_2) \neq P(K)$$

pero $P(K/i_1 i_2 \dots i_{m-1}, i_m) = P(K/i_{m-1} i_m)$ para todo $m \geq 2 \dots (1-8)$

hasta la señal Markoffiana de orden r con

$$P(K/i_1 i_2 \dots i_r) \neq P(K/i_2 \dots i_r) \neq \dots \neq P(K/i_r) \neq P(K)$$

pero

$$P(K/i_1 i_2 \dots i_m) = P(K/i_{m-(r-1)} i_{m-(r-2)} \dots i_m)$$
 para todo $m \geq r \quad (1-9)$

El conjunto de probabilidades condicionales diferentes que caracterizan un lenguaje dado se llama también la ley temporal de este lenguaje.

Esta clasificación puede extenderse a las señales Markoffianas no estacionarias, caso en que las probabilidades condicionales dependen del tiempo en que ocurren las diferentes secuencias en cuestión.

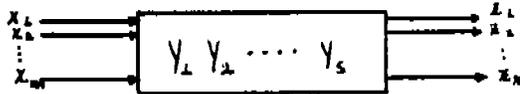
Esta clasificación no es la única posible. Su inconveniente o falta de generalidad consiste en que su validez depende de la unidad de tiempo en que se mide la señal. Suponiendo p. ej. que la unidad de tiempo fijada del lado transmisor sea el doble de lo que se ha fijado del lado receptor, entonces una secuencia transmitida como $a \ a \ b \ a$ será recibida en la forma $a \ a \ a \ a \ b \ a \ a \ a \ a$ lo que da claramente diferentes valores para las probabilidades condicionales en los dos lados y también diferentes alcances de coherencia. Esta dependencia de la unidad del tiempo en que se mide la señal se ve todavía más clara si se trata de aplicar esta misma clasificación a señales continuas, lo que hace indispensable introducir un tiempo cuantizado y un acuerdo previo entre lado transmisor y receptor sobre la unidad en que se miden los intervalos de tiempo cuantizado. Dicho en otras palabras, la interpretación y clasificación del mensaje depende del "tiempo de reloj" escogido. En el caso de señales con símbolos discretos la introducción de un reloj no ofrece mayores dificultades. Para el caso continuo otro tipo de clasific-

ción llega a veces a resultados más simples evitándose así trabajar exclusivamente con señales muestradas y Sinoronicadas. Siendo el tema de este trabajo la generación de señales Markoffianas del tipo discreto, las condiciones distintas del caso continuo quedan aquí nada más mencionadas para especificar no solamente las ventajas pero también las limitaciones del método que se va exponer en los capítulos que siguen.

Cap. 2. ANALOGIA FORMAL ENTRE AUTOMATAS Y PROCESOS MARKOFFIANOS

1.- Las ecuaciones e invariantes de un autómata finito, determinista

Describimos el autómata como un dispositivo caracterizado por un conjunto $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ de estímulos o entradas, un conjunto $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ de respuestas o salidas y un conjunto $Y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ de variables internas, cuyas combinaciones determinan los estados internos, o simplemente los estados, del autómata.



Bajo el impacto de los estímulos x el autómata sufre transiciones entre sus estados que dependen de los valores de los estímulos y del estado en que se encontraba el autómata en el momento de la acción del estímulo. Suponemos el tiempo cuantizado en intervalos arbitrarios pero fijos, llamados "momentos", que pueden sin pérdida de generalidad, tomarse como iguales. En cada momento las variables tienen un valor bien definido y no se hace ninguna hipótesis sobre estos valores en instantes intermedios entre dos momentos.

Los movimientos del autómata entre sus estados se describen por sus ecuaciones canónicas en la forma

$$y(t+1) = F(x(t), y(t))$$

$$z(t) = G[y(t)]$$

o, más brevemente

$$y^{(1)} = F(y, x) \quad \dots \quad (2-1)$$

$$z = G(y) \quad \dots \quad (2-2)$$

usando el índice $\text{sup}(1)$ para designar el momento inmediatamente después del momento, al que se refieren las variables sin índice.

(2-1) representa un sistema de ecuaciones que describe cada estado como una función del estado anterior y de los estímulos que ocurrieron en el estado anterior. (2-2) da las salidas como funciones del estado al mismo momento, funciones unívocas, tal que la secuencia de las salidas refleja fielmente la de los estados. Las salidas pueden así con-

considerarse como una representación distinta del mismo proceso y no requieren un tratamiento separado.

Interpretamos las variables de (2-1) como variables lógicas dependientes del tiempo que solamente pueden tomar los valores 0 y 1 y las ecuaciones como ecuaciones lógicas que describen para c.u. de los n estados A_i del autómata las condiciones para que éste se encuentre al momento $t+1$ precisamente en el estado A_i ($i=1, 2, \dots, n$). Conceptualmente no haría diferencia en introducir en vez de las variables $y_i, y_i^{(1)}$ directamente las variables de estado A_i . Pero como los A_i pueden por lo general expresarse mediante las combinaciones de un conjunto más pequeño de variables internas y_i se introdujeron las ecuaciones de estado en términos de las variables internas que los determinan unívocamente. Las transiciones del autómata en su espacio fase que es precisamente el espacio de sus estados, pueden así verse también como transformaciones $y \rightarrow y^{(1)}$ de sus variables internas condicionadas por los valores que toman los estímulos x en cada caso. Interpretando de esta manera $y^{(1)}$ como la x -transformada de y , podemos dar al sistema de ecuaciones canónicas una forma muy cómoda para las consideraciones subsecuentes. Introducimos un vector de estado E para el momento t y un vector $E^{(1)}$ para $t+1$ cuyos componentes serán los n estados del autómata, A_i y $A_i^{(1)}$ resp. ($i=1, 2, \dots, n$) y una matriz X de dimensiones $n \times n$, cuyos términos son los estímulos que inducen las transiciones $E \rightarrow E^{(1)}$. Entonces el sistema (2-1) puede escribirse en la forma

$$E^{(1)} = X \circ E \quad \dots (2-3)$$

en donde la operación "o" designa las operaciones lógicas a ejecutar para evaluar c.u. de las transiciones descritas globalmente por el sistema (2-3). Estas consisten como se demuestra en lo que sigue, en efectuar la multiplicación matricial lógica definida por la siguiente regla: Proceder como en el caso de la multiplicación matricial ordinaria, pero reemplazando cada multiplicación por la conjunción lógica correspondiente, además cada adición por la alternación lógica correspondiente.

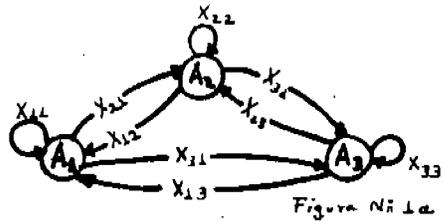
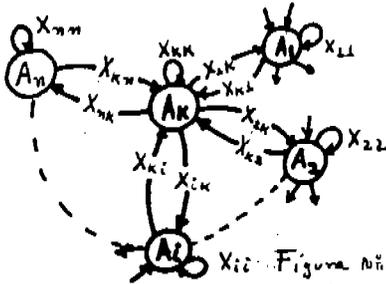
Para ilustrar el formalismo, se da en Fig. 1 el diagrama de flujo de un autómata de n estados en la forma que resultó adecuada para el caso general de un generador mar-

koffiano de 1. orden. El método se ilustra primero para este caso, generalizándolo después para órdenes mayores.

El modelo de Fig. 1 es un esquema general en que se supone 1.-: que haya transiciones posibles de cada estado hacia todos los estados del autómata. De este esquema puede fácilmente derivarse cualquier esquema particular que contiene p. ej. "prohibidas" ciertas transiciones. Basta hacer antitautólogas todas las x que inducen transiciones prohibidas para que éstas nunca ocurran. La 2. suposición es: qué estímulos asignados a diferentes estados de partida, son independientes. Quiero decir, que si X_{k_3} p. ej. induce la transición $A_3 \rightarrow A_k$ tal que ésta siempre ocurre cuando el autómata se encuentra en el estado A_3 y $x_{k_3} = 1$, el valor de x_{k_3} no tiene influencia sobre el movimiento del autómata, si éste se encuentra en cualquier otro estado que no sea A_3 . Tenemos así a cada estado A_i asignado un conjunto de n estímulos $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ni}$ que actúan exclusivamente cuando el autómata se encuentra en A_i . Lo que resulta en un número total de n^2 estímulos, el max. que puede actuar sobre un autómata de n estados. A pesar de esta consecuencia muy inconveniente de la suposición 2.-, fué necesario construir el autómata de esta manera para poder controlar el orden de coherencia.

De hecho cualquier interdependencia entre transiciones a partir de diferentes estados puede expresarse a base de este esquema general, por ecuaciones adicionales entre las x . Si se hace p. ej. $X_{k_1} = X_{k_2}$ para un cierto número de valores de k , entonces para estos valores de k una x que actúa sobre A_1 actuará también sobre A_2 . Se ve, que el esquema, es así muy adecuado para describir cualquier autómata con todo detalle de su estructura interna, dado que el sistema de ecuaciones de restricción en las x determina el grado de intercorrelación para cada subconjunto de sus estados.

El esquema Fig. 1 representa así el caso más general y cualquier conclusión deducida de este modelo será por tanto válida para los demás. Se ilustra además en Fig. 1a el mismo esquema para $n = 3$, para aclarar mejor el tipo de notación que empleamos.



Escribimos ahora explícitamente para cada estado final $A_k^{(1)}$ la ecuación correspondiente de (2-3); ésta se obtiene por inspección del diagrama de flujo Fig. 1, en forma de una alternación de todas las condiciones para que el autómata se encuentre en A_k al tiempo $t+1$ en el estado A_k . El autómata se encontrará en A_k al tiempo $t+1$, si estaba en A_1 al tiempo t y $x_{11} = 1$; o si estaba en A_2 y $x_{22} = 1$; o; o si estaba en A_n y $x_{nn} = 1$, razonamiento expresado para cada $k = 1, 2, \dots, n$ por la ecuación lógica (*)

$$A_k^{(1)} = A_1 \cdot X_{k1} \vee A_2 \cdot X_{k2} \vee \dots \vee A_n \cdot X_{kn} = \bigvee_{i=1}^n A_i \cdot X_{ki} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2-4)$$

Este sistema de ecuaciones, escrito en la forma (2-3) con

$$E = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad E^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \dots (2-5)$$

$$\text{se hace } \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad \dots (2-6)$$

(*) Notación usada en este trabajo para las operaciones lógicas: "v" para alternación (o inclusiva), "." para la conjunción, "x" para la tautología, "x̄" para la antitautología, "x'" para "no x" o la negación de x.

y semejantemente $\bigwedge_{i=1}^n X_i$ para la conjunción. $\bigvee_{i=1}^n X_i = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n$

que es completamente equivalente a (2-4) si aplicamos la regla de la multiplicación matricial lógica a la operación "o".

Sin embargo, para que (2-4) y (2-6) representen las ecuaciones de un autómata posible, las variables de estado y de estimulación deben de cumplir ciertas condiciones, válidas para todo autómata finito e invariantes en el tiempo:

I.- El autómata se encuentra siempre en uno de sus estados.

II.- El autómata se encuentra nunca en dos diferentes estados al mismo tiempo.

La tautología I), da para t y t + 1 las ecuaciones lógicas:

$$\begin{aligned}
 & A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = 1 \\
 & A_1^{(t)} \vee A_2^{(t)} \vee \dots \vee A_n^{(t)} = 1 \\
 \text{o sea } & \bigvee_{i=1}^n A_i = 1 \qquad \bigwedge_{i=1}^n A_i^{(t)} = 1 \dots (2-7)
 \end{aligned}$$

La antitautología II) estipula para todo i, k = 1, 2 ... n

$$\left. \begin{aligned}
 & A_i \cdot A_k = 0 \\
 & A_i^{(t)} \cdot A_k^{(t)} = 0
 \end{aligned} \right\} \text{ si } i \neq k \dots (2-8)$$

Los estados A_i introducen así en cada momento una partición en el espacio fase, formando un conjunto exhaustivo con elementos disjuntos o mutuamente exclusivos.

De I) y II) se sigue para los estímulos x que parten del mismo estado:

Ia.- No todos los n estímulos x_{ki} que parten del mismo estado A_i pueden tomar el valor 0 al mismo tiempo.

Porque si $x_{ki} = 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$, en algún momento y el autómata se encuentra en éste momento en A_i no pasará a ninguno de sus estados al tiempo t+1, en violación con I.

IIa) De los n estímulos que parten de un mismo estado A_i solamente uno puede asumir el valor 1.

Caso contrario, el autómata podrá pasar al mismo tiempo a dos diferentes estados, en violación con II.

Los n estímulos asignados al mismo estado, pueden por tanto no ser independientes y tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$X_{1i} \vee X_{2i} \vee \dots \vee X_{mi} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots (2-9)$$

$$X_{ki} \cdot X_{mi} = 0 \quad \text{si } k \neq m \quad (k, m = 1, 2, \dots, m) \quad \dots (2-10)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Se sigue para los vectores de estado y las columnas de la matriz X_i Tienen uno y solo un 1 en algún lugar y 0 en los demás lugares.

Debido a las restricciones (2 - 7, 8, 9,10) la operación "o" en (2-6) se reduce a la multiplicación matricial ordinaria cada vez que se sustituyen por las variables sus valores en 0 y 1, circunstancia que puede aprovecharse en el programa para la generación markoffiana en computadora.

Para el caso del 1. orden, se introduce para las salidas, que nos entregarán la señal markoffiana con sus símbolos respectivos, la convención que sigue:

Cada vez que el autómata se encuentra en el estado A_i aparece en su salida el símbolo S_i del mismo índice. Las secuencias de símbolos siguen así fielmente las secuencias de estados y cualquier relación deducida para variables de estado puede reescribirse en términos de las salidas, o sea de los símbolos correspondientes, sustituyendo

$$S_i = Z_i = A_i \quad (2-11)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

2.- Autómatas Probabilistas.

Para pasar ahora de autómatas deterministas a autómatas probabilistas asignamos a cada estímulo x_{ki} una cierta probabilidad $p(x_{ki})$ con que toma el valor 1 y la complementaria, para que tome el valor 0, que será, desde luego, la misma con que la negación de x_{ki} o sea X'_{ki} toma el valor 1.

$$p(X_{ki}) = P(X_{ki} = 1) \dots \dots (2-12)$$

$$p(X'_{ki}) = P(X_{ki} = 0) = 1 - p(X_{ki}) \dots (2-13)$$

con $0 \leq p(X_{ki}) \leq 1 \dots \dots (2-14)$

Hacemos así corresponder a la matriz lógica X cuyos términos son los estímulos del autómata, una matriz algebraica K cuyos términos serán las probabilidades de estos estímulos. Puede considerarse este peso como una generalización de la matriz X, cuyos términos pueden asumir solamente los valores 0 y 1, mientras que los términos de K pueden variar entre 0 y 1.

De manera semejante introducimos para la probabilidad de que el autómata se encuentre en el estado A_1 , o sea que A_1 tome el valor 1, las expresiones $p(A_1)$ y $p(A_1^{(1)})$ resp.

3.- Teoremas sobre probabilidades de funciones lógicas.

Para poder relacionar teoremas lógicos referente a señales y estados del autómata con teoremas algebraicos referente a sus probabilidades, basta aplicar algunos teoremas y definiciones básicas del cálculo de probabilidades, resumidas aquí brevemente:

1.- La Probabilidad de un evento imposible es cero;

$$p(\emptyset) = 0 \dots \dots (2-14)$$

2.- La probabilidad de un evento que siempre ocurre, es la unidad:

$$p(X) = 1 \dots \dots (2-15)$$

3.- Sea que sea el evento A, vale para su probabilidad $p(A)$, si existe:

$$0 \leq p(A) \leq 1 \dots \dots (2-16)$$

y para su complemento, o su negación A'

$$p(A') = 1 - p(A) \dots \dots (2-17)$$

4.- Si $E = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ representa un conjunto de eventos mutuamente exclusivos, tal que $A_i \cdot A_k = \emptyset$ para todo $i \neq k$ entonces

$$p(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = \sum_{i=1}^n p(A_i) \dots (2-18)$$

Si, además, el conjunto es exhaustivo, tal que

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = X$$

entonces
$$p(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = \sum_{i=1}^n p(A_i) = 1 \dots (2-19)$$

5.- Si x_i, x_k son dos eventos independientes con probabilidades $p(x_i)$ y $p(x_k)$ entonces vale para la probabilidad de su conjunción lógica:

$$p(x_i \cdot x_k) = p(x_i) \cdot p(x_k) \dots (2-20)$$

Puede aplicarse lo anterior también a la secuencia temporal de los eventos x_1 y x_k , (x_i, x_k) siempre cuando la ocurrencia del evento x_k sea independiente de la ocurrencia de x_i y no varía con el tiempo.

Para una secuencia de r eventos independientes (x_1, x_2, \dots, x_r) tendremos por tanto

$$p(x_1, x_2, \dots, x_r) = p(x_1) p(x_2) \dots p(x_r) \dots (2-21)$$

expresión que para eventos independientes será obviamente independiente del orden en que ocurren los eventos x_i .

6.- Definimos para el caso general de secuencias de eventos

la probabilidad condicional $p(x_k/x_i)$ como la probabilidad de que ocurra x_k , cuando antes ya ocurrió x_i .

Tenemos entonces para la conjunción lógica de los eventos x_i, x_k o para la probabilidad de la secuencia (x_i, x_k)

$$p(x_i, x_k) = p(x_i \cdot x_k) = p(x_i) p(x_k/x_i) \dots (2-22)$$

lo que se reduce a (2-20) si se trata de eventos independientes. La probabilidad conjunta $p(x_i, x_k)$ dependerá en el caso general evidentemente del orden en que ocurren los elementos de la secuencia.

Esajeradamente para una secuencia de longitud r

$$p(x_1, x_2, \dots, x_r) = p(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) p(x_r/x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \dots (2-23)$$

En caso de eventos independientes las probabilidades condicionales se reducen a las probabilidades absolutas, o probabilidades a priori, de los eventos en cuestión

$$P(x_k/x_1) = P(x_k)$$

$$P(x_r/x_1x_2 \dots x_{r-1}) = P(x_r) \quad \dots \quad (2-24)$$

5.) y 6.) permitan relacionar las probabilidades de conjunciones de eventos con las probabilidades de los eventos aislados y con las probabilidades condicionales si los eventos no son independientes. Semejantemente hemos relacionado con los teoremas anteriores, las probabilidades de alternaciones de eventos con las probabilidades de los eventos aislados correspondientes, estableciendo de esta manera una correspondencia entre expresiones lógicas y algebraicas que basta para resolver nuestro problema.

4.- Señales markoffianas estacionarias de 1.º orden.

Serán resumidas aquí brevemente una serie de resultados bien conocidos de la teoría de los procesos de Markoff (1), (1'), referentes al caso estacionario del 1.º orden, en tanto que serán pertinentes para el tema del presente trabajo.

A) La señal estacionaria de primer orden está completamente determinada por su matriz de Markoff M , cuyas términos son las probabilidades condicionales $p(k/i)$. De (1-7) obtenemos para el 1.º orden

$$p(k/i) \neq p(k) \quad \text{--- (2-25)}$$

$$p(k/i_1 i_2 \dots i_m) = p(k/i_m) \quad \text{para todo } m \geq 1 \quad \text{--- (2-26)}$$

La matriz de Markoff para una señal de n símbolos es una matriz $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} p(1/1) & p(1/2) & p(1/3) & \dots & p(1/n) \\ p(2/1) & \dots & \dots & \dots & p(2/n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ p(n/1) & \dots & \dots & \dots & p(n/n) \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2-27)$$

cuyos términos, de acuerdo con (1-3), deben de cumplir las condiciones marginales

$$\sum_{k=1}^n p(k/i) = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots (2-28)$$

lo que introducimos para la matriz M la condición: La suma de cada columna es 1.

Como los términos de M determinan completamente la señal, pueden calcularse de ellos todos los demás parámetros característicos de la estadística de la señal, p.ej. las probabilidades absolutas de los símbolos aislados $p(i) = p(s_1)$, las de las secuencias de dos símbolos o digramas $p(i,k) = p(s_1 s_2)$ para todo $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, etc.

Tenemos de (1-4)

$$\sum_{i=1}^n p(i) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^n p(i,k) = 1 \quad \dots (a)$$

Además de (2-22)

$$p(i,k) = p(i) p(k/i) \quad \dots (b)$$

$$\text{De } \sum_{k=1}^n p(i,k) = \sum_{k=1}^n p(i) p(k/i) = p(i) \sum_{k=1}^n p(k/i) \text{ sigue por (2-28):}$$

$$p(i) = \sum_{k=1}^n p(i,k) \quad \dots (2-29)$$

Semejantemente

$$\sum_{k=1}^n p(1,k) = p(k) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad \dots (2-29a)$$

Substituyendo (b) en (2-29a) se obtiene un sistema de n ecuaciones para las n incógnitas $p(1)$ cuyas coeficientes son las $p(k/i)$ dadas:

$$\sum_{k=1}^n p(k/i) p(1) = p(k) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad \dots (2-30)$$

En este sistema los $p(1) = p(s_1)$ son las probabilidades del primer símbolo de los digramas $(s_1 s_k)$, los $p(k) = p(s_k)$ los del segundo símbolo que ocurre un tiempo después. Tratándose de una señal estacionaria, estas probabilidades absolutas no cambian con el tiempo tal que, para el mismo símbolo, no hay diferencia entre $p(1)$ y $p(k)$. Puede entonces escribirse el sistema (2-30) en la forma:

$$\begin{aligned} - p(1) [1 - p(1/1)] + p(2) p(1/2) + \dots + p(n) p(1/n) &= 0 \\ p(1) p(2/1) - p(2) [1 - p(2/1)] + \dots + p(n) p(2/n) &= 0 \quad \dots (2-30a) \\ p(1) p(n/1) + p(2) p(n/2) + \dots - p(n) [1 - p(n/n)] &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones no son independientes debido a las condiciones marginales (2-28). Además, puede verse por inspección que el determinante de (2-30a) se anula, cuando se introducen las condiciones (2-28). Quiere decir que el sistema (2-30a) de n ecuaciones homogéneas tiene solución no trivial. El determinante es de rango $(n-1)$ como, fuera de (2-28), no existen restricciones para los coeficientes. Agregando a $(n-1)$ ecuaciones arbitrariamente seleccionadas de (2-30a) la ecuación

$$\sum_{i=1}^n p(i) = 1$$

pueden calcularse las probabilidades absolutas $p(i)$ para todo $(i = 1, 2, \dots, n)$. Por Substitución de los $p(i)$ en: $p(i,k) = p(i) p(k/i)$, pueden calcularse las probabilidades absolutas de todos los digramas $p(i,k)$.

Las probabilidades de las secuencias de longitud mayor se obtienen por recurrencia. Tenemos p.ej. para los trigramas:

$$p(i,k,l) = p(i,k) p(l/ik) = p(i,k) p(l/k) \quad (i,k,l = 1,2,\dots,n)$$

lo que permite calcularles a partir de las probabilidades conocidas de los digramas y puede seguirse de la misma manera hasta secuencias de cualquier longitud r ,

evaluándolas a partir de las probabilidades de las secuencias de longitud $r-1$, evaluadas en un paso anterior.

B) De lo anterior sigue, que el generador markoffiano de primer orden tiene que realizar en su salida una señal que reproduce los términos de una matriz de Markoff dada. Con la convención (2-11), la secuencia $(s_1 s_k)$ en la salida del generador corresponde a la secuencia $(A_1 A_k)$ de sus estados, y por tanto la probabilidad condicional $p(k/1)$ corresponde a la probabilidad de transición $A_1 \rightarrow A_k$, cuando el autómata se encuentra previamente en el estado A_1 . Esta transición ocurre con $x_{k1} = 1$, cuya probabilidad es, por definición (2-12) $p(x_{k1})$.

Basta entonces asignar a las probabilidades con que los estímulos del autómata toman el valor 1 los valores de los términos de la matriz M de la señal que se requiere generar, para obtener esta señal en la salida del autómata. Para construir nuestro generador tal que pueda producir cualquier señal markoffiana de 1. orden, dada por su matriz M , hay que realizar los estímulos x como señales poissonianas con probabilidades ajustables a los términos de la matriz M .

$$p(x_{ki}) = p(s_k/s_i) = p(k/i) \quad \dots \quad (2-34)$$

El número de estados del autómata será igual al número de símbolos n del alfabeto de la señal que se requiere generar, necesitándose para construir el autómata de acuerdo con el esquema de Fig. 1 un número n^2 de estímulos x_{ki} . Una vez resuelto estos problemas, el diseño del autómata puede efectuarse con los métodos bien conocidos del diseño lógico a partir del sistema de ecuaciones lógicas dadas por (2-6).

El sistema de ecuaciones algebraicas (2-30) puede representarse en una manera formalmente idéntica al sistema de ecuaciones lógicas (2-6) si introducimos un vector P , cuyos componentes serán las probabilidades $p(s_1)$ de los símbolos s_1 que ocurren al tiempo t , semejantemente, un vector $P^{(1)}$ con componentes $p(s_k)$ para los símbolos s_k que ocurren al tiempo $t+1$:

$$P = \begin{bmatrix} p(n_1) \\ p(n_2) \\ \vdots \\ p(n_n) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix}_t \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix}_{t+1} \quad \dots (2-32)$$

dando (2-30) en la forma:

$$\begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} p(1/1) & p(1/2) & \dots & p(1/n) \\ p(2/1) & p(2/2) & \dots & p(2/n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(n/1) & p(n/2) & \dots & p(n/n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix}_t \quad \dots (2-33)$$

sistema algebraico formalmente anlogo al sistema lgico (2-6) que, en su forma vectorial

$$P^{(1)} = M P \quad \dots (2-34)$$

es anlogo a (2-3)

$$E^{(1)} = X o E.$$

Esta analogia formal que siempre existe, significa con las convenciones estipuladas en (2-11a) y (2-31), que ambos sistemas de ecuaciones representan una descripci3n matemtica diferente del mismo sistema fisico, descripci3n en t3rminos de estados y estmulos en la forma lgica, en t3rminos de las probabilidades de los mismos estados y estmulos en la forma algebraica.

Para comprobar que se trata, en efecto, del mismo sistema fisico, se demuestra en el p3rrafo que sigue que, hechas las asignaciones (2-11) resp. (2-11a) y (2-31), pueden deducirse todas las propiedades caracterfsticas del sistema algebraico de las propiedades caracterfsticas del sistema lgico.

5.- La Correspondencia entre autómatas y señal markoffiana de 1. orden.

Condiciones: Cada vez que el autómata se encuentra en el estado A_1 , aparece en su salida el símbolo s_1 (1=1,2,...n): $s_1 = s_1 = A_1 \dots (2-11)$

Sigue: $p(s_1) = p(A_1) \dots (2-11a)$

Los términos de la matriz X de excitaciones asumen el valor 1 con una probabilidad $p(x_{k1})$ igual al término correspondiente de la matriz N, matriz de Markoff de las probabilidades condicionales:

$$p(x_{k1}) = p(s_k/s_1) \quad (1, k = 1, 2, \dots, n) \quad \dots (2-31)$$

Señal markoffiana de 1. orden.

1.- La probabilidad condicional $p(s_k/s_1)$ depende solamente del símbolo s_1 y no de símbolos anteriores a s_1 .

2.- Las probabilidades absolutas $p(s_1)$ cumplen la condición

$$\sum_{s_1} p(s_1) = 1$$

3.- Las probabilidades condicionales cumplen las condiciones marginales:

$$\sum_{k=1}^n p(s_k/s_1) = 1 \quad (1=1, 2, \dots, n)$$

Autómata

1.- El estímulo x_{k1} actúa solamente cuando el autómata se encuentra en el estado A_1 con salida s_1 . La transición que ocurre con probabilidad $p(x_{k1}) : A_1 \rightarrow A_k$ para los estados,

$$s_1 \rightarrow s_k \text{ para las salidas,}$$

no depende de la manera como el autómata llegó al estado A_1 .

2.- Los estados forman un conjunto exhaustivo con elementos disjuntos:

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = I \quad \dots (2-7)$$

$$A_i \cdot A_k = \emptyset \quad \text{si } i \neq k \quad \dots (2-8)$$

sigue de (2-19):

$$\sum_{i=1}^n p(A_i) = \sum_{s_1} p(s_1) = 1$$

3.- Los estímulos asignados a un mismo estado A_1 como punto inicial de una transición, forman un conjunto exhaustivo y son mutuamente exclusivos:

$$x_{11} \vee x_{21} \vee \dots \vee x_{n1} = I \quad \dots (2-9)$$

$$x_{k1} \cdot x_{m1} = \emptyset, \text{ si } m \neq k \quad \dots (2-10)$$

Sigue de (2-19):

$$\sum_{k=1}^n p(x_{k1}) = \sum_{s_1} p(s_k/s_1) = 1 \quad (1=1, 2, \dots, n)$$

Las probabilidades de los estados y estímulos del autómata cumplen así todas las condiciones que rigen las probabilidades absolutas y condicionales de la señal markoffiana.

Cap. 3 Construcción del generador de 1. orden

1.- Los estímulos

Los estímulos x_{ki} deben de ser señales poissonianas para no introducir en la señal de salida una correlación extra que no será determinada por la estructura del autómata. Como además, cada grupo de n señales x_{ki} asignadas al mismo estado k_i y formando una columna de la matriz X no son independientes pero son sujetas a las condiciones (2-9) y (2-10) no podemos generar en el caso general las señales x directamente. Hay que partir de un conjunto de señales poissonianas independientes y formar los x_{ki} de las combinaciones lógicas de estas señales independientes, que llamaremos m_{ir} . Para formar los x_{ki} de una columna de X ($k=1, 2, \dots, n$, i fija) como un conjunto exhaustivo con elementos disjuntos, partimos de los términos de la FCA (forma canónica alterna) de los m_{ir} , porque los términos de la FCA forman a su vez un conjunto exhaustivo de elementos disjuntos. En estas condiciones, los x en conjunto deben de contener todos los términos de la FCA de los m_{ir} y no deben de tener términos comunes.

Para averiguar el número de señales m_{ir} que necesitamos para formar los x_{ki} de una columna de X , consideramos las columnas de la matriz K correspondientes. Como cada columna de K tiene solamente 1 condición restrictiva, su número de parámetros independientes será $(n-1)$ y el número de señales independientes m_{ir} será también $n-1$ por columna, para el caso general de una matriz K arbitraria.

Una posible solución para la formación de n señales x_{ki} con las combinaciones de los $(n-1)$ señales independientes m_{ir} es la que sigue. Cumple las condiciones y permite además calcular fácilmente las probabilidades de los m_{ir} a partir de las probabilidades $p(k_i)$, por ser iguales a los términos de K

$$\begin{aligned}
 x_{k1} &= m_{i1} \\
 x_{k2} &= m'_{i1} \cdot m_{i2} \\
 x_{k3} &= m'_{i1} \cdot m'_{i2} \cdot m_{i3} \\
 &\vdots \\
 x_{kn} &= m'_{i1} \cdot m'_{i2} \cdot \dots \cdot m'_{i,n-1}
 \end{aligned}
 \quad \text{--- (3-1)}$$

Se verifica fácilmente que la alternación de los x_{ki} es tautológica y que los x_{ki} son mutuamente exclusivos. Para las probabilidades tendremos por (2-17) y (2-20) y dado que todos los m son independientes:

$$\begin{aligned} p(x_{ki}) &= p(m_{ki}) \\ p(x_{ki}) &= [1 - p(m_{i1})] p(m_{i2}) \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$p(x_{ki}) = [1 - p(m_{i1})][1 - p(m_{i2})] \dots [1 - p(m_{i, n-1})]$$

que permite calcular los $p(m_{iR})$ por recursión, empezando con la primera que es inmediata, dado que cada ecuación siguiente contiene solamente una nueva incógnita, comparado con la anterior.

De (3-2) introduciendo un cambio sencillo en la forma algebraica mediante la introducción de las condiciones marginales en términos de los $p(x_{ki})$, se obtienen la probabilidad $p(m_{iR})$ en la forma que sigue:

$$\begin{aligned} p(m_{iR}) &= \frac{p(x_{ki})}{p(x_{ki}) + p(x_{k+1, i}) + \dots + p(x_{ni})} = \\ &= \frac{p(x_{ki})}{\sum_{k=1}^n p(x_{ki})} \quad (k=1, 2, \dots, (n-1)) \quad (3-3). \\ &\quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Esta deducción de las relaciones correspondientes entre señales x y señales m de un lado y entre probabilidades $p(x)$ y probabilidades $p(m)$ del otro lado, a partir de la teoría general de autómatas fué desarrollada con más detalles en mi publicación (15) por lo que se presenta aquí solamente como un breve resumen sin introducir las pruebas matemáticas. Encontré, después de haberla publicado que la relación (3-3) ya era conocida (14) y ha sido utilizada para el mismo propósito como en el trabajo presente. Con todo el resentimiento por lo bien conocido de mi "descubrimiento", es, sin embargo, muy confortable de ver, que el cuadro teórico de nuestro método es bastante sólido para que detalles no considerados previamente caigan en su lugar y para permitir entre otros, que una fórmula construida originalmente más o menos "ad hoc" para cierto propósito, se

encuentra como una consecuencia de la correspondencia básica entre autómatas y procesos markoffianos. Precisamente lo contrario sucedió cuando traté de relacionar la estructura lógica de las señales producidas por autómatas acoplados, que se discuten en cap. 8, con alguna estructura algebraica ya trabajada en el campo de los procesos estocásticos. Las probabilidades de estas señales no quieren corresponder a nada conocido en esta rama.

Respecto a la obtención de los estímulos x_{ki} : Hay que generar para cada grupo de n señales x_{ki} ($k = 1, 2, \dots, n$) que corresponden al mismo estado A_i un número de $(n-1)$ señales poissonianas independientes m_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$), y realizar con ellas los x_{ki} de acuerdo con (3-1), después de haber ajustado las probabilidades de los m_{ki} a los valores dados por (3-3).

2.- Ejemplos de diseño de generadores de 1. orden.

Ilustramos el procedimiento del diseño con 2 ejemplos, el primero para el caso general de 3 símbolos, el segundo para un modelo "cíclico" de 4 símbolos.

Se llama cíclica una señal en que toda longitud de una secuencia que empieza y termina con el mismo símbolo, tiene el mismo divisor, no contando el último símbolo repetido en evaluar la longitud de la secuencia. Para el autómata generador de una señal cíclica ésto significa que para todos los caminos cerrados entre sus estados, el número de transiciones en que se descomponen, es divisible entre el mismo número entero. Según el valor del divisor común se habla de ciclos de 2, 3, etc. Esta condición implica la prohibición de ciertas transiciones entre estados y de ciertas secuencias entre símbolos.

1.- Caso general de 3 símbolos.

Número de símbolos: $n = 3$

El autómata tiene 3 estados A_1, A_2, A_3 y 3 salidas s_1, s_2, s_3 . Cada vez que se encuentra en un estado A_i aparece el símbolo s_i ($i = 1, 2, 3$) en su salida. Suponiendo que haya transiciones posibles entre todos los estados, el autómata tendrá $n^2 = 9$ estímulos x_{ki} subdivididos de 3 en 3, cada conjunto de 3 estímulos asignado a uno de los 3 es-

tado tal que cada estímulo tiene efecto solamente si el autómat. se encuentra en el estado correspondiente. El diagrama de flujo se muestra en Fig. 1a. de Cap. 2 y se reproduce aquí para más facilidad de lectura.

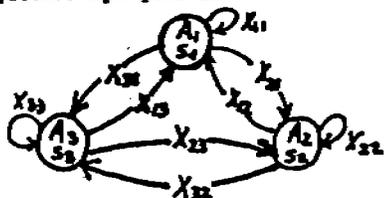


Fig. 1a.

El sistema de ecuaciones lógicas es como sigue:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(1)} &= A_1 \cdot X_{11} \vee A_2 \cdot X_{12} \vee A_3 \cdot X_{13} \\
 A_2^{(1)} &= A_1 \cdot X_{21} \vee A_2 \cdot X_{22} \vee A_3 \cdot X_{23} \\
 A_3^{(1)} &= A_1 \cdot X_{31} \vee A_2 \cdot X_{32} \vee A_3 \cdot X_{33} \\
 &\dots (3-5)
 \end{aligned}$$

Los 3 estados se representan como las combinaciones de 2 variables internas q_1, q_2 para el tiempo t , Q_1, Q_2 para el tiempo $t+1$, haciéndose las asignaciones:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= q_1' \cdot q_2 & A_1^{(1)} &= Q_1 \cdot Q_2 \\
 A_2 &= q_1 \cdot q_2' & A_2^{(1)} &= Q_1 \cdot Q_2' \quad \dots (3-6) \\
 A_3 &= q_1 \cdot q_2 & A_3^{(1)} &= Q_1 \cdot Q_2 \\
 Q &= q_1' \cdot q_2' & Q &= Q_1' \cdot Q_2'
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3-6) en (3-5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= q_1' \cdot q_2 \cdot X_{11} \vee q_1 \cdot q_2' \cdot X_{12} \vee q_1 \cdot q_2 \cdot X_{13} \\
 Q_1 \cdot Q_2' &= q_1' \cdot q_2 \cdot X_{21} \vee q_1 \cdot q_2' \cdot X_{22} \vee q_1 \cdot q_2 \cdot X_{23} \\
 Q_1 \cdot Q_2 &= q_1' \cdot q_2 \cdot X_{31} \vee q_1 \cdot q_2' \cdot X_{32} \vee q_1 \cdot q_2 \cdot X_{33} \\
 Q &= q_1' \cdot q_2'
 \end{aligned}$$

Sistema que puede resolverse para las incógnitas Q_1, Q_2 :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= q_1' \cdot (X_{21} \vee X_{31}) \vee q_2' \cdot (X_{12} \vee X_{32}) \vee q_1 \cdot q_2 \cdot (X_{23} \vee X_{33}) \\
 Q_2 &= q_1' \cdot (X_{11} \vee X_{31}) \vee q_2' \cdot (X_{12} \vee X_{32}) \vee q_1 \cdot q_2 \cdot (X_{13} \vee X_{33})
 \end{aligned}$$

De (2-9) tenemos: $X_{11} \vee X_{21} \vee X_{31} = \bar{X}^i$ ($i = 1, 2, 3$)

por tanto $X_{21} \vee X_{31} = X_{11}^i$ y simplificando de la misma manera las demás alternaciones en los x , obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1^i \cdot X_{11}^i \vee q_2^i \cdot X_{12}^i \vee q_1 \cdot q_2 \cdot X_{13}^i \\ Q_2 &= q_1^i \cdot X_{21}^i \vee q_2^i \cdot X_{22}^i \vee q_1 \cdot q_2 \cdot X_{23}^i \end{aligned} \quad \dots\dots (3-7)$$

Usando memorias j-k para representar las variables q se deducen de (3-7) las siguientes expresiones para las entradas j y k de c.u. de las dos memorias; aplicando el método bien conocido (13) de solución gráfica por medio de diagramas de Veitch y Karnaugh:

$$\begin{aligned} Q_1: j_1 &= X_{11}^i \vee q_2^i & Q_2: j_2 &= X_{22}^i \cdot q_1^i \quad \dots\dots (3-7a) \\ K_1 &= q_2 \cdot X_{13} \vee q_2^i \cdot X_{12} & K_2 &= q_1^i \cdot X_{21} \vee q_1 \cdot X_{23} \end{aligned}$$

Para cumplir las condiciones (2-9) y (2-10) introducimos las variables independientes m_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) y expresamos según (3-1) las variables x en términos de las variables m :

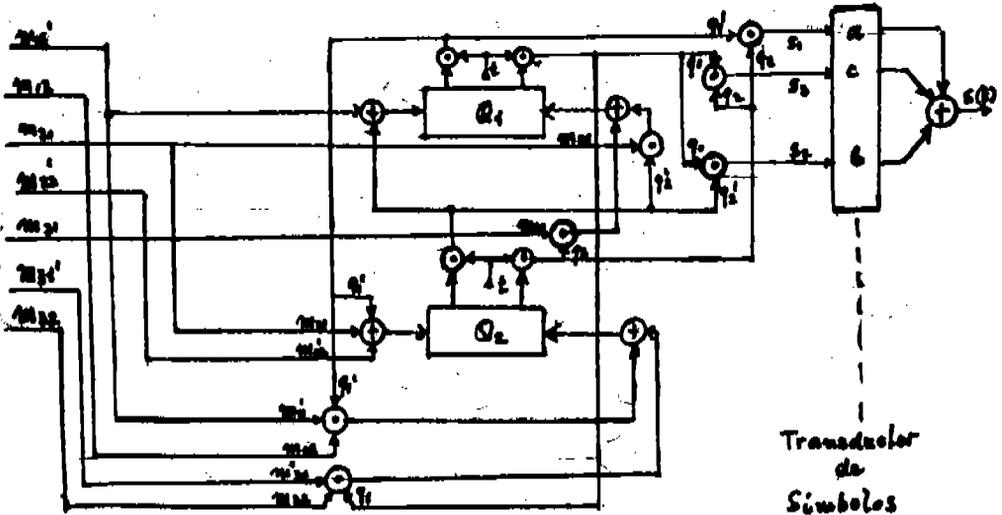
$$\begin{aligned} X_{11} &= m_{11} & X_{12} &= m_{21} & X_{13} &= m_{31} \\ X_{21} &= m_{11}^i \cdot m_{12} & X_{22} &= m_{21}^i \cdot m_{22} & X_{23} &= m_{31}^i \cdot m_{32} \quad \dots\dots (3-8) \\ X_{31} &= m_{11}^i & X_{32} &= m_{21} \vee m_{22}^i \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones obtenidas para j,k de Q_1 y Q_2 se obtienen las ecuaciones de diseño en la forma:

$$\begin{aligned} Q_1: j_1 &= m_{11}^i \vee q_2^i \\ K_1 &= q_2 \cdot m_{31} \vee q_2^i \cdot m_{21} \quad \dots\dots\dots (3-9) \\ Q_2: j_2 &= m_{21} \vee m_{22}^i \vee q_1^i \\ K_2 &= q_1^i \cdot m_{11}^i \cdot m_{12} \vee q_1 \cdot m_{31}^i \cdot m_{32} \end{aligned}$$

Construyendo el autómeta correspondiente a este sistema de ecuaciones, tenemos que sincronizar las salidas de Q_1 y Q_2 con una señal de pulso de reloj que nos da los tiempos t con que se definieron las variables. Los estados A_1 y las salidas correspondientes s_1 se obtienen entonces de (3-6); las 3 salidas pasarán finalmente a un dispositivo de transducción que produce los símbolos en la forma requerida (p.ej. 3 voltajes diferentes, 3 sonidos, 3 señales luminosas etc.).

Diagrama Lógico del Automata Fig. 1a



- Q_1, Q_2 : memorias j-k
- t : pulsos de reloj
- ⊙ : dispositivo de Conjunción
- ⊕ : " de Alternación

Fig. 2

II.- Autómata cíclico de 4 símbolos

Con 4 símbolos puede encontrarse una estructura tal que cada camino cerrado se compone de un múltiplo de 2 transiciones. El diagrama de flujo se muestra en la Fig. 3. El

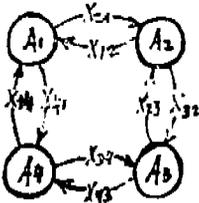


Fig. 3.

autómata tiene 4 estados y 4 salidas
 A_i ($i = 1..4$), s_i ($i = 1..4$)
 y quedan prohibidas las transiciones de longitud 1 y 3 lo que basta para excluir los demás que tuvieron una longitud no divisible entre 2.

Por tanto no ocurren transiciones

$$A_i \rightarrow A_k \quad \text{si } k \equiv i \pmod{2} \quad \dots (3-10)$$

Debido a las restricciones (3-10), de cada estado hay solamente 2 transiciones posibles. A cada estado se asigna así un conjunto de 2 estímulos que deben de cumplir las condiciones de invariancia. Representando estos 2 estímulos por una variable binaria y su negación quedarán cumplidas las condiciones (2-9), (2-10) trivialmente con

$$\begin{aligned} X_i \vee X_i' &= \mathcal{1} \\ X_i \cdot X_i' &= \mathcal{0} \end{aligned} \quad \dots (3-11)$$

No se necesita recurrir en este caso a las variables s_i , las 4 señales x_i ya son señales independientes. Asignamos a cada estado A_i un estímulo x_i , tal que

$$\begin{aligned} X_{21} &= X_1 & X_{32} &= X_2 & X_{43} &= X_3 & X_{14} &= X_4 \\ X_{44} &= X_1' & X_{12} &= X_2' & X_{23} &= X_3' & X_{34} &= X_4' \end{aligned} \quad \dots (3-12)$$

con $X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{44} = X_{31} = X_{42} = X_{13} = X_{24} = \mathcal{0}$

El sistema de ecuaciones para los estados A_i toma la forma

$$\begin{aligned} A_1^{(k)} &= A_2 \cdot X_2' \vee A_4 \cdot X_4 \\ A_2^{(k)} &= A_3 \cdot X_3' \vee A_1 \cdot X_1 \\ A_3^{(k)} &= A_4 \cdot X_4' \vee A_2 \cdot X_2 \\ A_4^{(k)} &= A_1 \cdot X_1' \vee A_3 \cdot X_3 \end{aligned} \quad \dots (3-13)$$

Introduciendo como en el ej. anterior 2 variables internas q_1, q_2 y q_1', q_2' resp., se puedan expresar los 4 estados mediante las 4 combinaciones de las variables

internas, y sustituyendo en (3-13), se obtiene un sistema de ecuaciones para las incógnitas Q_1 y Q_2 .

$$A_1 = q_1 \cdot q_2'$$

$$A_2 = q_1' \cdot q_2$$

$$A_3 = q_1 \cdot q_2$$

$$A_4 = q_1' \cdot q_2'$$

$$A_1^{(n)} = Q_1' \cdot Q_2'$$

$$A_2^{(n)} = Q_1' \cdot Q_2$$

$$A_3^{(n)} = Q_1 \cdot Q_2$$

$$A_4^{(n)} = Q_1 \cdot Q_2'$$

----- (3-14)

$$Q_1' \cdot Q_2' = q_1' \cdot q_2 \cdot X_2' \quad \vee \quad q_1 \cdot q_2' \cdot X_1$$

$$Q_1' \cdot Q_2 = q_1' \cdot q_2' \cdot X_1 \quad \vee \quad q_1 \cdot q_2 \cdot X_2'$$

$$Q_1 \cdot Q_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot X_2 \quad \vee \quad q_1' \cdot q_2' \cdot X_1'$$

$$Q_1 \cdot Q_2' = q_1' \cdot q_2' \cdot X_1' \quad \vee \quad q_1 \cdot q_2 \cdot X_2$$

$$Q_1 = q_1' \cdot q_2' \cdot X_1' \quad \vee \quad q_1' \cdot q_2 \cdot X_2 \quad \vee \quad q_1 \cdot q_2 \cdot X_2 \quad \vee \quad q_1 \cdot q_2' \cdot X_1'$$

--- (3-15)

$$Q_2 = q_1 \cdot q_2' \cdot X_1 \quad \vee \quad q_1' \cdot q_2 \cdot X_2 \quad \vee \quad q_1 \cdot q_2 \cdot X_2' \quad \vee \quad q_1' \cdot q_2' \cdot X_1'$$

Usando memorias j-k se obtiene finalmente:

$$Q_1: j_1 = q_2 \cdot X_2 \quad \vee \quad q_2' \cdot X_1'$$

$$K_1 = q_2 \cdot X_2' \quad \vee \quad q_2' \cdot X_1$$

..... (3-16)

$$Q_2: j_2 = q_1 \cdot X_1' \quad \vee \quad q_1' \cdot X_1$$

$$K_2 = q_1 \cdot X_2 \quad \vee \quad q_1' \cdot X_2'$$

Con este sistema se traza el diagrama lógico que sirve de base para la construcción del autómata (Fig. 4).

Diagrama Lógico del Automata Ciclico.

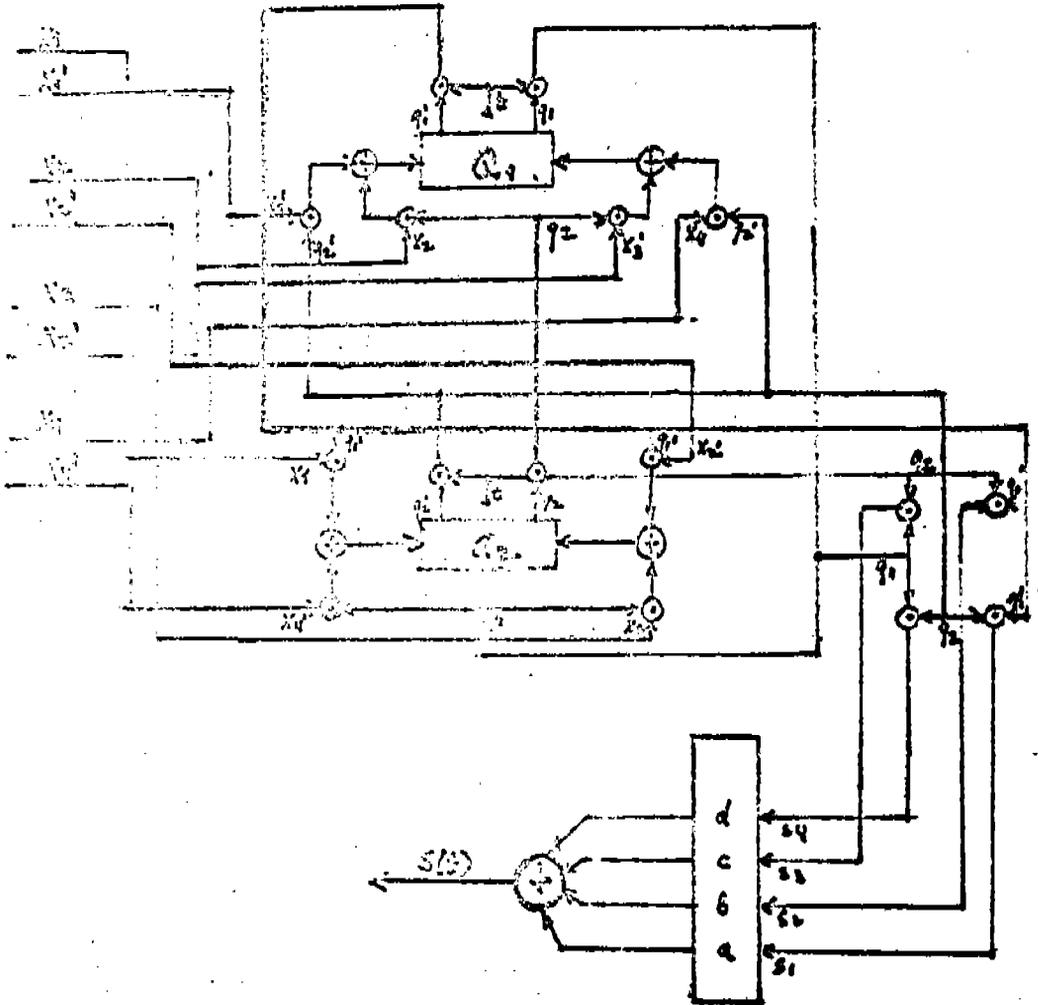


Fig. 1

Cap. 4 Señales markoffianas de orden $k > 1$.

La matriz que determina la estadística de una señal de orden r tiene los términos $p(k/i_1 i_2 \dots i_r)$ sujetos a las condiciones (1-5), (1-9) de la clasificación en Cap. 1:

$$p(k/i_1 i_2 \dots i_r) \neq p(k/i_2 i_3 \dots i_r)$$

$$p(k/i_1 i_2 \dots i_m) = p(k/i_{m-(r-1)} i_{m-(r-2)} \dots i_m) \text{ para } m \geq r$$

en donde $(i_1 i_2 \dots i_r)$ son cualesquier secuencias posibles de símbolos del alfabeto.

Para poder aplicar el mismo método de diseño para señales de orden $r > 1$, hay que introducir una transformación en el cifrado del alfabeto que reduce la señal de orden r en los símbolos originales, a una de 1. orden en los nuevos símbolos. Sea $r = 2$: Introducimos un alfabeto B cuyos símbolos r_1, r_2, \dots se definen como los diégramas que pueden formarse con los símbolos s_1 del alfabeto original $A(s_1, s_2, \dots, s_n)$. El nuevo cifrado tiene que hacerse de manera que haya una correspondencia unívoca entre los dos cifrados, (con alfabeto A con alfabeto B) si ambos se refieren a la misma secuencia. Si numeramos los símbolos r del alfabeto B de manera que

$$r_{ik} = (s_1 s_k) \quad (4-1)$$

entonces, p. ej. la secuencia $s_1 s_3 s_1 s_3 s_5$ se convierte en

$$r_{13} r_{31} r_{13} r_{35} \text{ cifrada en el alfabeto B.}$$

Tenemos para n símbolos del alfabeto A, n^2 símbolos del alfabeto B, en caso que todos los diégramas $s_1 s_k$ puedan ocurrir en el lenguaje. La traducción desde A a B es siempre posible con la numeración especificada. Pero lo inverso es cierto solamente si admitimos para los r solamente secuencias del tipo $(r_{ik} r_{kn}) = (s_1 s_k s_n)$

en que el segundo índice del primer símbolo r es igual al primer índice del segundo símbolo r . Serán prohibidas las secuencias del tipo $(r_{st} r_{ik})$ con $t \neq i$.

$$p(r_{ik}/r_{st}) = 0, \text{ si } t \neq i \dots\dots\dots (4-2)$$

sigue para la probabilidad conjunta

$$p(r_{st} r_{ik}) = p(r_{st}) p(r_{ik}/r_{st}) = 0 \dots\dots\dots (4-3)$$

En los símbolos r la señal de segundo orden se convierte así en una de primer orden y los términos de la matriz de Markoff serán entonces

$$p(r_{ik}/r_{st}) = p(S_n/S_m S_i) \dots\dots\dots (4-4)$$

$$\text{con } p(r_{ik}/r_{st}) = 0 \text{ para todo } s \neq i \dots\dots\dots (4-5)$$

De esta manera el caso de 2. orden puede ahora tratarse de la misma manera como el caso anterior de 1. orden. Pueden usarse las mismas asignaciones con excepción de las referente a las salidas que reproducen los s_1 originales. Además no todas las transiciones entre los estados serán ahora posible haciéndose los x que corresponden a transiciones prohibidas antitautológicas. El autómata que genera la señal de n símbolos de 2. orden tendrá así las características:

<u>Símbolos originales:</u>	<u>Salidas</u>	<u>estados</u>
s_1, s_2, \dots, s_n	s_1, s_2, \dots, s_n	(S_i, S_n) : Número de estados = n^2

Convención para las salidas: Cada vez que el autómata se encuentra en el estado (s_1, s_k) aparece en la salida el símbolo s_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Los n estados (s_1, s_k) , ($k = 1, 2, \dots, n$) tendrán por lo tanto la misma salida.

Transiciones posibles a partir de un estado (s_1, s_k)
 $(S_i, S_k) \longrightarrow (S_n, S_m) \quad (m = 1, 2, \dots, n)$

lo que corresponde a n estímulos $x_{m, ik}$ que salen de cada estado (s_1, s_k) . Tomemos en total n^3 señales $x_{m, ik}$. A c.u. de los n^2 estados se asigna un conjunto de n estímulos, que actúan solamente cuando el autómata se encuentra en éste estado:

$$\text{Conjunto de estímulos } x_{m, ik} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \text{ asignado al estado } A_{ik} = (S_i, S_k) \\ (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

correspondientes a las transiciones $A_{ik} \longrightarrow A_{km}$. Ocurre la transición $A_{ik} \longrightarrow A_{km}$ cuando el autómata se encuentra en el estado A_{ik} , y $x_{m, ik} = 1$.

Para mantener la analogía formal entre matrices lógicas y matrices algebraicas, escribimos las probabilidades condicionales de 2. orden, $p(m/ik)$, en términos de los nuevos símbolos

$$p(m/ik) = p[(km)/(ik)] \quad \dots\dots(4-6)$$

$$\text{con } p[(sm)/(ik)] = 0, \text{ si } s \neq k \quad \dots\dots(4-7)$$

Las $p[(km)/(ik)]$ forman una matriz $n^2 \times n^2$, que definimos como la matriz de Markoff de la señal. Sus términos, aún de segundo orden en los símbolos originales, serán de primer orden en los símbolos recifrados. Esta matriz tendrá ceros en todos los lugares $s \neq k$ de acuerdo con (4-7).

A los estímulos $x_{m,ik}$ se asignan, igual como en el caso de 1. orden, las probabilidades

$$p(x_{m,ik}) = p(x_{m,ik} = 1) \quad \dots\dots (4-8)$$

que se hacen iguales a los términos correspondientes de la matriz de Markoff

$$p(x_{m,ik}) = p[(km)/(ik)] = p(m/ik) \quad \dots\dots (4-9)$$

Con estas definiciones, el procedimiento para formular las ecuaciones del sistema y obtener el diagrama del circuito, será el mismo como en el caso de 1. orden.

Semejantemente se procede para la

Señal markoffiana de orden $r > 2$

Mediante un cambio de cifrado, la señal se reduce a una de 1. orden en los nuevos símbolos que corresponden a todas las secuencias de longitud r que pueden formarse con los símbolos originales. En caso que todas estas secuencias puedan ocurrir en el lenguaje, el nuevo alfabeto tendrá n^r símbolos.

El autómata-generador tendrá entonces n^r estados con n salidas, una para cada símbolo del alfabeto original. Llamamos los estados:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r} = (s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r}) \quad \dots\dots (4-10)$$

en donde $(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r})$ será alguna secuencia de longitud r . La salida que corresponde a este estado será el último símbolo de la secuencia: s_{i_r} .

Las transiciones posibles a partir de este estado serán de la forma

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r} \longrightarrow A_{i_1 i_2 \dots i_r k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

es decir, que el autómata puede pasar desde c.u. de sus n^F estados, a n estados diferentes, lo que corresponde a n estímulos $x_{k, i_1 i_2 \dots i_r}$ asignados al estado $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ y actuandé solamente cuando el autómata se encuentra en este estado. Por tanto, el número total de estímulos x será n^{F+1} .

Cada grupo de n estímulos x , asignado al mismo estado, se construye a partir de $(n-1)$ señales poissonianas independientes m , que son las entradas del autómata. Tendremos en total $(n-1)n^F$ entradas de señales independientes m . Los estímulos x construidos a partir de las mismas se obtienen, igual como en el caso de 1. orden, de las ecuaciones (3-1). Las probabilidades de las señales x se hacen iguales a los términos de la matriz de Markoff $n^F \times n^F$, que tiene ceros en todos los lugares correspondientes a transiciones prohibidas. Los términos de M tienen la forma $p(k/i_1 i_2 \dots i_n) = p[(i_1 i_2 \dots i_n k) / (i_1 i_2 \dots i_n)]$ con $p[(k_1 k_2 \dots k_n) / i_1 \dots i_n] = 0$ para todo $(k_1 k_2 \dots k_n) \neq (i_1 i_2 \dots i_n)$.

En resumen:

<u>n símbolos originales</u>	<u>n salidas</u>	<u>n^F estados</u>	<u>n^{F+1} estímulo x n por cada estado</u>	<u>$(n-1)n^F$ entradas independientes m</u>
$s_i (i=1, 2, \dots, n)$	$s_i (i=1, 2, \dots, n)$	$A_{i_1 i_2 \dots i_r}$	formados, cada grupo $x_{k_i} (i=1, 2, \dots, n)$, de $n-1$ señales m .	$(n-1)$ para cada estado.

Las probabilidades de las señales independientes m se calculan para cada conjunto $x_{k_i} (k=1, 2, \dots, n)$ de las ecuaciones (3 - 2) como en el caso de 1. orden.

El crecimiento tan fuerte del número de estados y estímulos con el número de orden de la señal, limita en la práctica las posibilidades de construir generadores para señales de orden mayor que 2 o 3. Hasta la programación en computadora tiene en este caso limitaciones bastante serias, debidas al gran número de señales poissonianas independientes, que se necesitan como entradas. En capítulo 8 se discute otro procedimiento, que permite aumentar el orden de coherencia sin aumento del número de entradas.

Ejemplos para el 2. orden

Trataré en un primer ejemplo el caso general de 2.orden con 3 símbolos ,hasta la obtención del sistema de ecuaciones lógicas del autómata.La deducción de un diagrama de construcción se hará en cambio, solamente para un caso particular con un número menor de estados,dado que el procedimiento es exactamente el mismo y al caso general ya tiene un número de ecuaciones y variables demasiado grande para ser todavía ilustrativo.

1.- Caso general de 3 símbolos.

$n = 3 \quad r = 2$

Número de símbolos originales (s_i) = Número de salidas s_i ($i=1,2,3$)

Llamemos los símbolos : $s_1 = a$
 $s_2 = b \quad \dots\dots (4-7)$
 $s_3 = c$

para evitar el uso de índices múltiples en la notación.

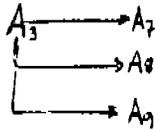
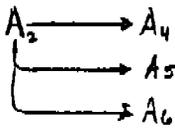
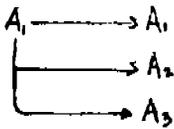
Cambio de cifrado,introduciendo los símbolos r_i ($i=1,2,..9$)

con las asignaciones como sigue:

$r_1 = (aa)$	"	corresponda al estado A_1	con salida a
$r_2 = (ab)$	"	" A_2	" b
$r_3 = (ac)$	"	" A_3	" c
$r_4 = (ba)$	"	" A_4	" a
$r_5 = (bb)$	"	" A_5	" b
$r_6 = (bc)$	"	" A_6	" c
$r_7 = (ca)$	"	" A_7	" a
$r_8 = (cb)$	"	" A_8	" b
$r_9 = (cc)$	"	" A_9	" c

Hay 3 transiciones posibles desde cada estado, del tipo $(s_i s_k) \rightarrow (s_k s_m)$ y son prohibidas las del tipo $(s_i s_k) \rightarrow (s_j s_m)$ con $j \neq k$.

Transiciones posibles:



... y, semejante para los demás.

El diagrama de flujo del autómata se muestra en fig. 5

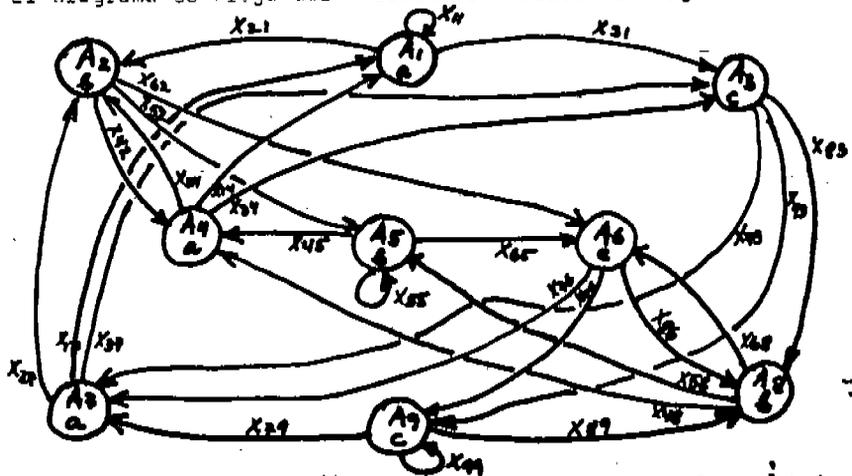


Fig. 5

La matriz de Markoff M es de 1. orden en los símbolos r .

Es una matriz $n^2 \times n^2$, en nuestro caso 9×9 :

$$M = \{ p(k_{km} / r_{ij}) \} \quad \dots (4-9)$$

en donde

$$p(k_{jm} / r_{ij}) = p(s_m / s_i s_j) \quad \dots (4-10)$$

traducida en los símbolos originales,

$$p(k_{km} / r_{ij}) = 0 \text{ si } j \neq k \quad \dots (4-10a)$$

Con la notación (4-8), M tiene la forma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \rho(r_1/r_1) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_4) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_3) & 0 & 0 \\
 \rho(r_2/r_4) & 0 & 0 & \rho(r_2/r_4) & 0 & 0 & \rho(r_2/r_3) & 0 & 0 \\
 \rho(r_3/r_4) & 0 & 0 & \rho(r_3/r_4) & 0 & 0 & \rho(r_3/r_3) & 0 & 0 \\
 0 & \rho(r_4/r_2) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_2) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_2) & 0 \\
 0 & \rho(r_5/r_2) & 0 & 0 & \rho(r_5/r_2) & 0 & 0 & \rho(r_5/r_2) & 0 \\
 0 & \rho(r_6/r_2) & 0 & 0 & \rho(r_6/r_2) & 0 & 0 & \rho(r_6/r_2) & 0 \\
 0 & 0 & \rho(r_3/r_3) & 0 & 0 & \rho(r_3/r_3) & 0 & 0 & \rho(r_3/r_3) \\
 0 & 0 & \rho(r_4/r_3) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_3) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_3) \\
 0 & 0 & \rho(r_4/r_3) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_3) & 0 & 0 & \rho(r_4/r_3)
 \end{array}$$

----- (4-11)

Se cumplen las condiciones marginales en los nuevos símbolos

$$\sum_{k=1}^2 \rho(r_k/r_k) = d \quad (i=1,2, \dots, 6) \quad \text{----- (4-12)}$$

si éstas se cumplen en los símbolos originales.

Los vectores de estado E y $E^{(n)}$ y la matriz de excitación (X) serán resp.

$$E = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \end{array} = \begin{array}{c} (aa) \\ (ab) \\ (ac) \\ (ba) \\ (bh) \\ (bc) \\ (ca) \\ (ch) \\ (cc) \end{array} \quad E^{(n)} = \begin{array}{c} A_1^{(n)} \\ \vdots \\ A_9^{(n)} \end{array} \quad \text{----- (4-13)}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & 0 & x_{17} & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & x_{24} & 0 & 0 & x_{27} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 & x_{34} & 0 & 0 & x_{37} & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & 0 & 0 & x_{45} & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{58} & 0 \\ 0 & x_{62} & 0 & 0 & x_{65} & 0 & 0 & x_{68} & 0 \\ 0 & 0 & x_{73} & 0 & 0 & x_{76} & 0 & 0 & x_{79} \\ 0 & 0 & x_{83} & 0 & 0 & x_{86} & 0 & 0 & x_{89} \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & 0 & x_{96} & 0 & 0 & x_{99} \end{bmatrix} \quad \text{--- (4-14)}$$

y el sistema de ecuaciones lógicas del autómata nos da otra vez (2-7):

$$E^{(1)} = X \circ E$$

o sea

$$A_k^{(1)} = \bigvee_{i=1}^9 A_i \cdot X_{ki} \quad \text{--- (4-15)}$$

que resulta en este caso como:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= A_1 \cdot X_{11} \vee A_4 \cdot X_{14} \vee A_7 \cdot X_{17} \\ A_2^{(1)} &= A_1 \cdot X_{21} \vee A_4 \cdot X_{24} \vee A_7 \cdot X_{27} \\ A_3^{(1)} &= A_1 \cdot X_{31} \vee A_4 \cdot X_{34} \vee A_7 \cdot X_{37} \\ A_4^{(1)} &= A_2 \cdot X_{42} \vee A_5 \cdot X_{45} \vee A_8 \cdot X_{48} \\ A_5^{(1)} &= A_2 \cdot X_{52} \vee A_5 \cdot X_{55} \vee A_8 \cdot X_{58} \\ A_6^{(1)} &= A_2 \cdot X_{62} \vee A_5 \cdot X_{65} \vee A_8 \cdot X_{68} \\ A_7^{(1)} &= A_3 \cdot X_{73} \vee A_6 \cdot X_{76} \vee A_9 \cdot X_{79} \\ A_8^{(1)} &= A_3 \cdot X_{83} \vee A_6 \cdot X_{86} \vee A_9 \cdot X_{89} \\ A_9^{(1)} &= A_3 \cdot X_{93} \vee A_6 \cdot X_{96} \vee A_9 \cdot X_{99} \end{aligned} \quad \text{--- (4-15a)}$$

Para cumplir las condiciones de invariación (2-9), (2-10), los x deben de formarse, como en los casos anteriores, a partir de un conjunto de señales poissonianas independientes. Para cada conjunto de 3 señales x_{ki} asignado al mismo estado A_i , se escogen 2 señales m_{i1} , m_{i2} para construir las señales x_{ki} de acuerdo con (3-1):

$$\begin{array}{l|l} x_{11} = m_{11} & x_{41} = m_{21} \\ x_{21} = m_{11} \cdot m_{12} & x_{51} = m_{21} \cdot m_{22} \\ x_{31} = m_{11} \cdot m_{12} & x_{61} = m_{21} \cdot m_{22} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{y semejantemente} \\ \text{para los demás.} \\ \dots\dots (4-16) \end{array}$$

El número de entradas m independientes, con 2 entradas para cada estado, será 18 en total. Aplicando (4-16) se forman a partir de ellas las 27 señales x . Cualquier caso de segundo orden puede resolverse basado en este ejemplo y, con la generalización introducida en pag. 37 de este capítulo, cualquier caso de orden mayor.

El método es así perfectamente general y sistemático y da una rutina que puede programarse para cualquier número de símbolos y cualquier orden de coherencia, a ser ejecutado por una computadora en el momento que el procesamiento a mano ya se hace demasiado pesado. Las dificultades no son de tipo matemático pero, como ya mencionado, de tipo práctico.

II.- Caso particular de 2. orden con 3 símbolos.

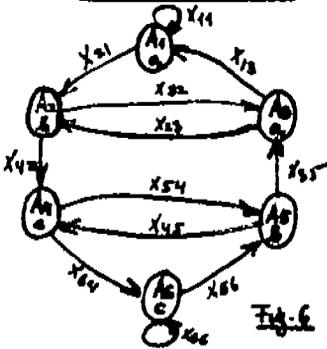
Presento aquí un modelo que se usará más adelante en el análisis de la función de correlación y de las características de estructura de estos autómatas.

Introducimos en el modelo general del ejemplo anterior las siguientes prohibiciones adicionales:

En la señal a generar no ocurran las secuencias: (ac), (ca), (bb).

Con esto, el número de estados se reduce de 9 a 5:

Diagrama de Flujo



- A₁ = (aa) con salida a
- A₂ = (ab) con salida b
- A₃ = (ba) con salida a ----- (4-17)
- A₄ = (bc) con salida c
- A₅ = (cb) con salida b
- A₆ = (cc) con salida c

Fig. 6

De los 27 términos de la matriz de Markoff se anulan 15 y quedan nada más los 12 términos:

- $p(a/aa)$ $p(a/ab)$ $p(a/ba)$ $p(b/bc)$ $p(a/cb)$ $p(b/cc)$
- $p(b/aa)$ $p(c/ab)$ $p(b/ba)$ $p(c/bc)$ $p(c/cb)$ $p(c/cc)$

Con las condiciones marginales:

$$\begin{aligned}
 p(a/aa) + p(b/aa) &= 1 & p(a/ba) + p(b/ba) &= 1 & p(a/cb) + p(c/cb) &= 1 \\
 p(a/ab) + p(c/ab) &= 1 & p(b/bc) + p(c/bc) &= 1 & p(b/cc) + p(c/cc) &= 1 \\
 & & & & \dots & (4-18)
 \end{aligned}$$

Los estímulos x se reducen a 2 para cada estado y pueden representarse por 1 variable y su negación. Se necesitan de esta manera nada más 6 señales poissonianas independientes (x_1, x_2, \dots, x_6) afirmadas y negadas y no hay necesidad de introducir las señales \bar{x} .

Donamos:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_{11} & x_2 &= x_{32}, & x_3 &= x_{13}, & x_4 &= x_{54}, & x_5 &= x_{35}, & x_6 &= x_{66}, \\
 x_1' &= x_{21}, & x_2' &= x_{42}, & x_3' &= x_{23}, & x_4' &= x_{64}, & x_5' &= x_{45}, & x_6' &= x_{56}, \\
 & & & & & & & & & & & \dots & (4-19)
 \end{aligned}$$

cumplíendose las condiciones de invariencia en la forma trivial:

$$\begin{aligned}
 x_i \vee x_i' &= 1 \\
 x_i \cdot x_i' &= \emptyset
 \end{aligned}$$

Con esta notación el sistema de ecuaciones del autómata toma la forma:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(n)} &= A_1 \cdot X_1 \vee A_2 \cdot X_2 \\
 A_2^{(n)} &= A_1 \cdot X_1' \vee A_3 \cdot X_3' \\
 A_3^{(n)} &= A_2 \cdot X_2 \vee A_4 \cdot X_4 \quad \dots (4-20) \\
 A_4^{(n)} &= A_2 \cdot X_2' \vee A_5 \cdot X_5' \\
 A_5^{(n)} &= A_4 \cdot X_4 \vee A_6 \cdot X_6' \\
 A_6^{(n)} &= A_4 \cdot X_4' \vee A_6 \cdot X_6
 \end{aligned}$$

Representando los 6 estados mediante las combinaciones de 3 variables internas q_1, q_2, q_3 para el tiempo t ; Q_1, Q_2, Q_3 para el tiempo $t+1$; y tabulando para mayor comodidad las asignaciones de las combinaciones a los estados, se obtienen por substitución las ecuaciones en términos de las nuevas variables que se resuelven para las incógnitas Q_i .

Estados	q_1	q_2	q_3	salidas
A_1	1	0	0	a
A_2	1	0	1	b
A_3	1	1	0	a
A_4	0	0	1	c
A_5	1	1	1	b
A_6	0	1	1	c
\emptyset	0	0	0	
\emptyset	0	1	0	

....(4 - 21)

La solución del sistema se obtiene en la forma:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= q_1 \vee q_1 \cdot q_2' \cdot X_2 \vee q_1 \cdot q_2 \cdot X_5 \vee q_1' \cdot q_2' \cdot X_4 \vee q_1' \cdot q_2 \cdot X_3' \\
 Q_2 &= q_1' \vee q_2' \cdot q_3 \cdot X_2 \vee q_2 \cdot q_3 \cdot X_5 \\
 Q_3 &= q_1' \vee q_2' \cdot q_3' \cdot X_1' \vee q_2 \cdot q_3' \cdot X_2' \vee q_2' \cdot q_3 \cdot X_6' \vee q_2 \cdot q_3 \cdot X_6'
 \end{aligned}$$

--- (4-22)

y, representando las variables internas como memorias j-k:

$$Q_1: j_1 = q_2 \cdot x_6' \vee q_2' \cdot x_4 \vee q_3'$$

$$K_1 = (q_2 \cdot x_5' \vee q_2' \cdot x_2') \cdot q_3$$

$$Q_2: j_2 = q_3 \cdot x_2 \vee q_1'$$

----- (4-23)

$$K_2 = (q_3' \vee x_5') \cdot q_1$$

$$Q_3: j_3 = q_2 \cdot x_3' \vee q_2' \cdot x_1' \vee q_1'$$

$$K_3 = (q_2 \cdot x_5 \vee q_2' \cdot x_2) \cdot q_1$$

Para formar las salidas, consideramos que los estados A_1 tienen de dos en dos la misma salida. Tendremos p.ej. en la salida el símbolo \underline{a} si el autómata se encuentra en A_1 o en A_3 , es decir, la salida \underline{a} se obtiene por la alternación de estos dos estados, o más bien, por la alternación de sus expresiones en las variables q , tomadas de la tabla (4-21).

$$\text{Salida } \underline{a} = q_1 \cdot q_2' \cdot q_3' \vee q_1' \cdot q_2 \cdot q_3' = q_1 \cdot q_3'$$

Semejantemente para salidas \underline{b} y \underline{c} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a} = q_1 \cdot q_3' \\ \underline{b} = q_1 \cdot q_3 \\ \underline{c} = q_1' \cdot q_3 \end{array} \right.$$

.....(4-24)

Las asignaciones se escogieron de tal manera que las salidas puedan expresarse en términos de dos variables solamente.

El diagrama lógico del circuito trazado a partir de las ecuaciones (4-23), se muestra en Fig. 7.

Diagrama lógico del circuito del modelo Fig.6 (2.orden,3 símbolos)

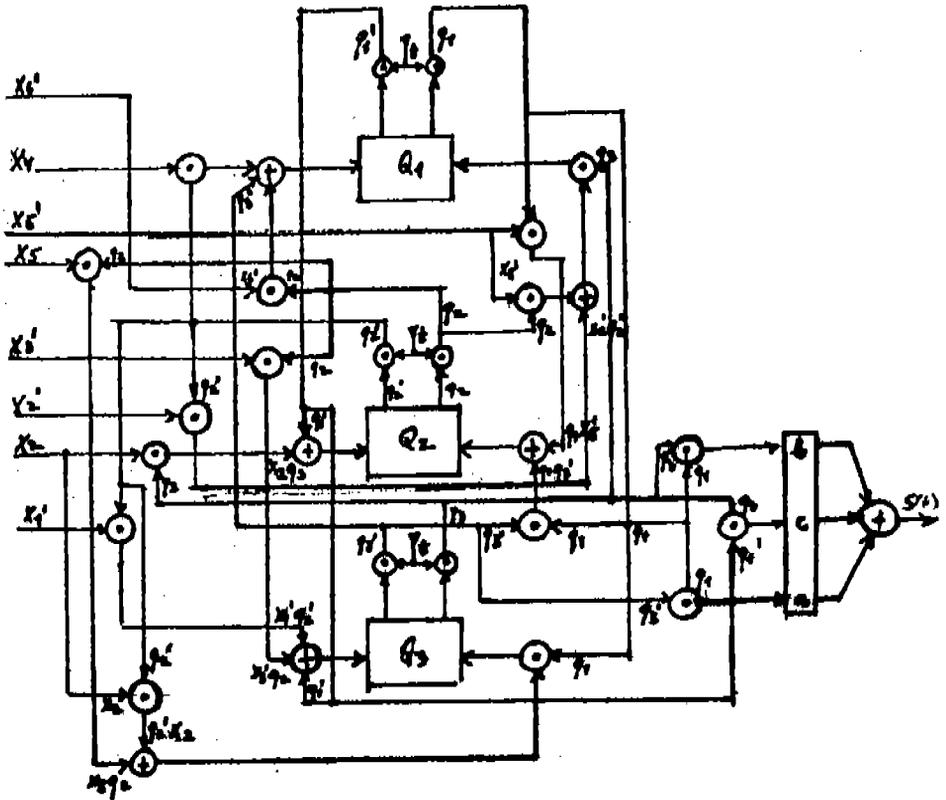


Fig. 7

Circuitos Electrónicos

1.- Los circuitos del autómat

Estos se construyen de acuerdo con los diagramas lógicos de diseño Fig. 2, 4,7 para los autómatas de 1. orden de Fig. 1A, y 3 y el autómat de 2. orden de Fig. 6a, de manera perfectamente convencional si se usan elementos electrónicos para su realización. Puede verse en los diagramas lógicos, que estos circuitos, contienen solamente memorias J-K que se realizan con multivibradores biestables y unidades elementales de decisión, como conjunciones y alternaciones. No fue necesario construir negadores, porque las variables a_j y m_{1j} del diagrama, se tomaron en el dispositivo construido para mis experimentos, todos a la salida de multivibradores biestables que entregan a sus 2 salidas cada señal en su forma afirmada y negada. Los diagramas de los circuitos electrónicos de las unidades requeridas se muestran en Fig. (8)

En los circuitos de conjunción y alternancia no se usaron diodos como lo habíamos hecho en nuestro primer montaje, por razones puramente prácticas. Fue necesario evitar las pequeñas fluctuaciones en el nivel de la señal que ocurren fácilmente con circuitos a diodos, si no se introduce algún control del nivel. Este último ya resultó más costoso que el ahorro que puede lograrse mediante la actualmente muy pequeña, diferencia entre el precio de un transistor y el de un diodo. Los circuitos de Fig. 84 y Fig. 86 tienen además la ventaja de una impedancia de salida muy baja, por lo tanto no ocasionan ningunas dificultades en acoplamiento con varias entradas de circuitos a estimular con las señales de estas salidas.

Se trata de circuitos montados con elementos activos individuales y esto no exclusivamente por la razón que el laboratorio no disponía de circuitos integrados, pero también porque esta forma es más adecuada cuando se trata de un montaje experimental en el cual se requieren hacer mediciones en cualquier punto del circuito. Para este tipo de realización, puede decirse que los diagramas lógicos de diseño de Fig. 2,4,7 representan los autómatas especificados en su forma más simple, en que el número necesario de elementos fue reducido a un mínimo.

Resulta, que esta "filosofía" cambia radicalmente si consideramos la realización de los mismos autómatas con circuitos integrados. Para disminuir el número de variables hemos representado las n variables de estado A_j por las combinaciones de k variables internas a_j , en donde k es el entero más pequeño con que se cumple

$$2^k \geq n.$$

La reducción del número de variables y por tanto del número de puertas $j-k$ a construir, se hace tanto más apreciable cuanto mayor será n . El precio a pagar es la pérdida de la uniformidad de las ecuaciones. Si ilustramos la situación con el autómata de n estados de Fig. 1, su sistema de ecuaciones en términos de las variables A_j se da en (2-4) como $A_k^{(n)} = A_1 \cdot X_{k1} \vee A_2 \cdot X_{k2} \vee \dots \vee A_n \cdot X_{kn} \quad (k=1,2,\dots,n)$

De (2-4) pueden deducirse las ecuaciones para las entradas de las memorias j-k que representarían ahora las variables A_{km} ⁽¹⁾

$$g_{km} = A_{k1} \cdot X_{km1} \vee \dots \vee A_{k,m-1} \cdot X_{km,m-1} \vee A_{k,m+1} \cdot X_{km,m+1} \vee \dots \vee A_{kn} \cdot X_{kmn} = \bigvee_{i=1}^n A_{ki} \cdot X_{kmi}$$

$$K_{km} = A_{km} \cdot X_{kmi} \dots \dots \dots (5-1)$$

Habría que construir n memorias, pero todas de la misma estructura (5-1) es decir, se trata de construir un circuito n veces repetido.

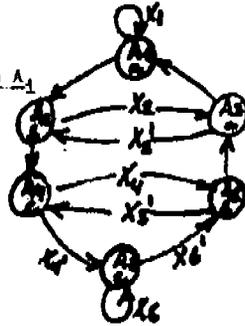
El aumento del número de variables de n -> n+1 se efectúa en agregar 1 circuito más y $\frac{1}{2}$ término más en c.u. de los j_m .

Comparando con este resultado las ecuaciones obtenidas para las entradas j,k de las variables internas Q que introdujimos en la síntesis anterior, puede verse que la estructura de las ecuaciones cambia cada vez, que se introduce una variable más. En el subítema general de 3 estados, calculado como 1. ejemplo, puede verse en (3-7b) que de las ecuaciones para las entradas j,k, que se conserva todavía algo de la simetría del sistema original. Pero esto ya no es el caso en el modelo Fig. 6a de 2. orden en que las tres expresiones para las entradas de las tres memorias ya no se obtienen una de otra por simples cambios de índices. Con elementos integrados. Será así más fácil realizar el subítema a partir de su sistema original de ecuaciones, que de intentar la síntesis de las variables auxiliares q_j en este caso. Mostramos en Fig. 7y⁸ las ~~estructuras~~ lógicas de los nuevos subítemas de Fig. 1y⁷ pero para la síntesis de los A_j en vez de los q_j .

Una observación muy semejante se hizo a la hora de programar el sistema de ecuaciones de los subítemas. Mientras que la programación del sistema en las variables A_j resultó muy sencilla y que no había dificultad para entender el programa a cualquier número de variables y de introducir condiciones adicionales para casos particulares, la programación de las variables q_j resultó mucho más complicada;

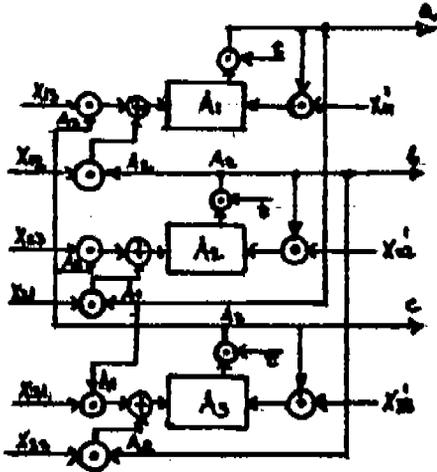
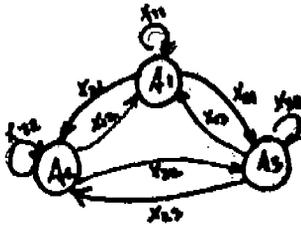
así que no intentamos de introducirlos como variables auxiliares en el cálculo. La ventaja de esta introducción, que consiste en disminuir el número de multiplicaciones a efectuar entre los renglones de una matriz de puros 0 y 1, y un vector que consiste de un 1 y puros ceros, es de poco interés en computación. El método de simplificación resultó en este caso ser un método de complicación y se eliminó en el programa.

Síntesis de las Variables de estado A_1
 Automatas Fig. 1a y 6a.



$$\begin{aligned}
 f_1 &= A_1 x_3 & K_1 &= A_1 x_4' \\
 f_2 &= A_1 x_4' \vee A_2 x_5' & K_2 &= A_1 \\
 f_3 &= A_1 x_2 \vee A_2 x_5 & K_3 &= A_2 \\
 f_4 &= A_1 x_4 \vee A_2 x_5' & K_4 &= A_1 \\
 f_5 &= A_1 x_4 \vee A_2 x_5' & K_5 &= A_2 \\
 f_6 &= A_1 x_4' & K_6 &= A_2 x_5'
 \end{aligned}$$

--- (5-2)



$$\begin{aligned}
 f_1 &= A_1 x_{22} \vee A_2 x_{23} & K_1 &= A_1 x_{21}' \\
 f_2 &= A_1 x_{21} \vee A_2 x_{23} & K_2 &= A_2 x_{22}' \dots (5-2) \\
 f_3 &= A_1 x_{21} \vee A_2 x_{22} & K_3 &= A_2 x_{23}'
 \end{aligned}$$

Fig. 9

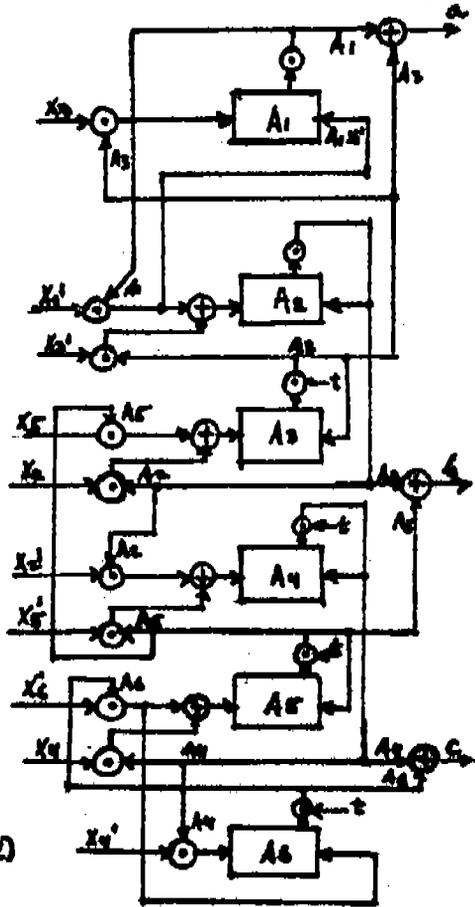


Fig. 10

2.- Ajuste de las Probabilidades.

Las señales de entrada m_{1r} que necesitamos para formar los estímulos x , son trenes de pulsos poissonianos, que hay que ajustar para cada matriz de Markoff dada, a la probabilidad especificada por el sistema de ecuaciones (3-3).

El dispositivo construido en el lab. de Cibernética de la CNEA a este fin, consiste de un contador de anillo de 10 pasos, conectado a un multivibrador bistable y sirve para ajustar la probabilidad de las señales m_{1r} en pasos de 0,1 entre los valores 0 y 1. El dispositivo tiene 8 canales para entregar 8 señales independientes afirmadas y negadas, e.a. con su ajuste manual montado en el panel del aparato. En los casos particulares, tratados en ejemplos anteriores, en que se usan los x directamente sin que haya necesidad de funciones a partir de los m_{1r} , el conjunto de los ajustes en el panel permite leer directamente en sus carátulas los términos de la matriz de Markoff de la señal a generar. En el caso general, se calayan los $p(x_{r1})$ de (3-4) sustituyendo para los p_{ij} las lecturas correspondientes tomadas en el panel del aparato.

El dispositivo consiste de un contador de anillo y un multivibrador bistable que, interpretado como memoria j - b , se enciende al ser estimulado en entrada j y se apaga al ser estimulado su entrada k . El contador de anillo tiene 10 pasos de los cuales en cada momento uno y solo uno se encuentra en el estado 1, los demás tienen que encontrarse en el estado 0. En la medida que llegan pulsos a la entrada del contador, prenden los pasos uno tras otro, desde el 1 hasta el 10, para regresar otra vez al 1, en concordancia con la aparición de los pulsos poissonianos en su entrada, así que la secuencia de los pasos prendidos será una réplica de la secuencia de los pulsos poissonianos y sigue la misma estadística. La salida del paso 1 del contador está conectada con la entrada j del multivibrador, tal que éste prende siempre cuando el contador se encuentra en paso 1. Las salidas de los demás pasos van conectadas a través de un conmutador rotatorio a la entrada k del multivibrador que se apaga con la salida correspondiente a la posición seleccio-

nada por el conmutador. (Ver Fig. 11). Para cada grupo de 10 pulsos, el multivibrador queda prendido durante tantos intervalos entre pulso y pulso cuanto avanza el conmutador, y queda apagado durante el resto del tiempo hasta que el conmutador llegue otra vez al paso 1. La posición del conmutador indica así en unidades de $1/10$ la probabilidad con que la señal a la salida del multivibrador toma el valor 1. Esta solución sencilla de un problema bastante complicado fue ideada por el Ing. Fernando Casarena, investigador del Lab. de Cibernética de la CENSA. Quiero darle las gracias por toda la ayuda que me ha prestado, para solucionar los problemas electrónicos que ocurrieron durante este trabajo.

Contador de Anillo em Multivibradores

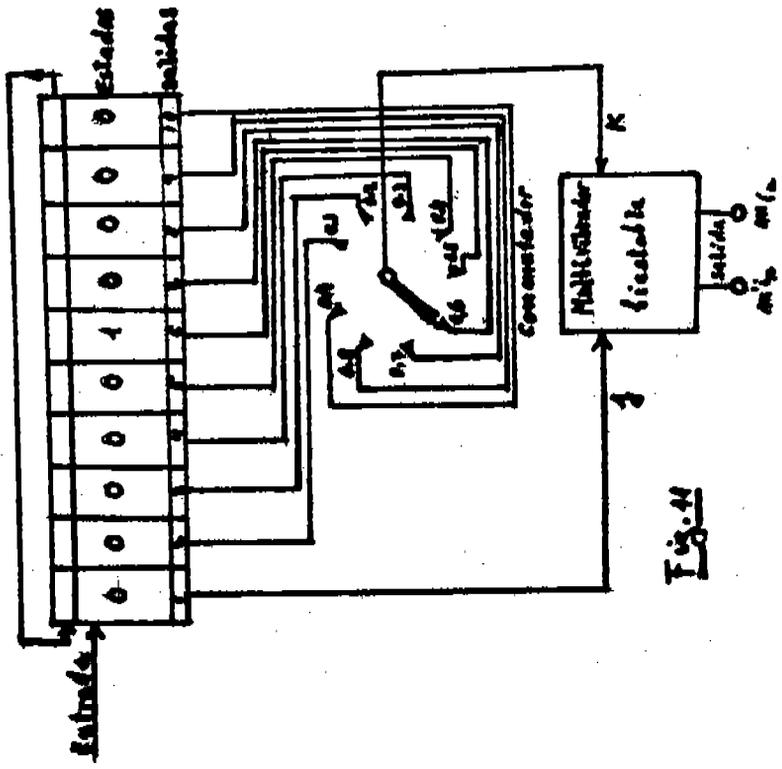
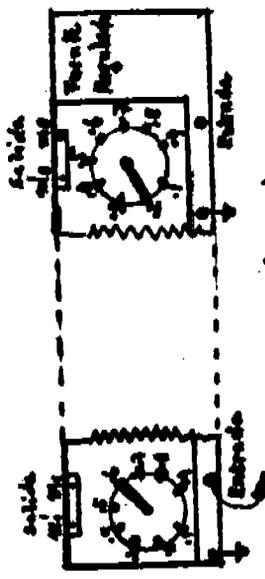


Fig. 11

Panel



8 Unidades com Saídas: emi, amc
(ex 1.2...8)

Fig. 12

Cap. 6 Valores medios - Función de Correlación

El análisis que sigue a continuación se refiere a señales markoffianas de 1. orden. Quedará así subentendido que en los casos de orden mayor que 1, se habrá efectuado previamente el cambio de cifrado definido en cap. 4, reduciendo estas señales a señales de 1. orden en los símbolos recifrados. Los símbolos s_1, s_2, \dots que aparecen en las expresiones del capítulo presente designan entonces indistintamente los símbolos del alfabeto original de una señal de 1. orden, o los símbolos recifrados de una señal de orden mayor.

Asignamos ahora a cada símbolo s_i un valor numérico S_i fijo y arbitrario, si no viene especificado como dato en un problema particular.

1.- Cadenas de Markoff

La probabilidad conjunta de una secuencia arbitraria de símbolos de un lenguaje, se da para el caso general de una señal estacionaria:

$$P(s_1 s_2 \dots s_r) = P(s_1) P(s_2 / s_1) P(s_3 / s_1 s_2) \dots P(s_r / s_1 s_2 \dots s_{r-1}) \dots (6-1)$$

Para una señal markoffiana de 1. orden

$$\text{con } P(s_k / s_1 s_2 \dots s_{k-1}) = P(s_k / s_{k-1}) \quad \text{para todo } k \geq 2$$

la expresión (6-1) tendrá la forma:

$$P(s_1 s_2 \dots s_r) = P(s_1) P(s_2 / s_1) P(s_3 / s_2) \dots P(s_r / s_{r-1}) \dots (6-2)$$

El lado derecho de esta ecuación se llama una cadena de Markoff.

2.- Ecuación de Chapman - Kolmogorov

Los términos de la matriz de Markoff nos dan las probabilidades condicionales para las transiciones inmediatas de un estado a otro, relacionando entre sí pares de símbolos subsecuentes.

Mediante la ecuación de Chapman - Kolmogorov es posible

expresar las probabilidades condicionales referente a símbolos separados por un intervalo τ arbitrario, como función de los términos de la matriz de Markoff, siendo τ cualquier múltiplo del intervalo entre dos símbolos sucesivos de la señal.

Sean t_1, t_2, t_3 , 3 tiempos ordenados, tal que $t_1 < t_2 < t_3$

y ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 3 símbolos del alfabeto, que ocurren en este orden en los tiempos t_1, t_2, t_3 respectivamente, entonces según la ecuación de Chapman-Kolmogorov será válida para cualquier tiempo intermedio t_2 y para cualquier símbolo del alfabeto que puede ocurrir en este tiempo t_2 :

$$p(q_{t_3}/s_{t_3}) = \sum_s p(q_{t_3}/s_{t_3}) p(s_{t_3}/s_{t_2}) \dots\dots (6-3)$$

Ecuación de Chapman - Kolmogorov en su forma integral, que toma la forma de una suma sobre todos los valores posibles del símbolo s_{t_2} para señales discretas.

Introducimos la matriz $M(t_2, t_1)$ con los términos $p(s_{t_2}/s_{t_1})$ (rangones s , columnas r) para dos tiempos arbitrarios t_1, t_2 tales que $t_1 < t_2$, en que s y r toman todos los valores posibles de los símbolos del alfabeto, entonces las expresiones en la ecuación (6-3) pueden verse como términos de las matrices

$$M(t_3, t_1) = \{p(q_{t_3}/s_{t_1})\}; \quad M(t_2, t_1) = \{p(s_{t_2}/s_{t_1})\}; \quad M(t_3, t_2) = \{p(q_{t_3}/s_{t_2})\}$$

y la ecuación (6-3) puede escribirse en forma matricial, dado que el lado derecho corresponde formalmente a un producto matricial:

$$M(t_3, t_1) = M(t_3, t_2) \cdot M(t_2, t_1) \dots\dots\dots(6-4)$$

Para una señal estacionaria en que la estadística de la señal es independiente del tiempo, los términos de las matrices de la ecuación (6-4) dependerán solamente del intervalo de tiempo entre el primer y segundo símbolo, pero no del tiempo a partir del cual se cuenta este intervalo.

$$\begin{array}{l} \text{Si ponemos } \tau_1 = t_2 - t_1 \\ \quad \quad \tau_2 = t_3 - t_1 \\ \quad \quad t_2 = t \end{array} \quad \text{haciéndose } \begin{array}{l} M(t_2, t_1) = M(t, t - \tau_1) = M(\tau_1) \\ M(t_3, t_1) = M(t + \tau_2, t) = M(\tau_2) \\ M(t_3, t) = M(t + \tau_2, t - \tau_1) = M(\tau_2 + \tau_1) \end{array}$$

----- (6-5)

puesto que ninguna de las tres matrices puede depender de t , resulta
 entonces: $M(\tau_1 + \tau_2) = M(\tau_2) \cdot M(\tau_1)$ } --- (6-6)
 en particular
 para $\tau_1 = \tau_2$ $M(2\tau) = M(\tau) \cdot M(\tau) = M^2(\tau)$ (6-5)

De la definición (6-5)

$$M(t, t-\tau) = M(\tau) \quad \text{la matriz } M(1) \text{ puede identificarse con}$$

la matriz M_0 de Markoff

entonces de (6-6) $M(2) = M(1) \cdot M(1) = M^2$

de lo que puede probarse por inducción

$$M(\tau) = M^{\tau} = \{p^{\tau}(S_k/S_i)\} \quad (6-7)$$

La probabilidad condicional de que ocurre algún símbolo s_k cuando τ tiempos antes había ocurrido un símbolo s_i , se expresa de esta manera como el término renglón k columna i de una matriz $M(\tau)$ que resulta de la matriz de Markoff M multiplicando M un número τ de veces con sí mismo.

Para $\tau = 0$ los términos de la matriz corresponden a símbolos s_k, s_i que ocurren al mismo tiempo, por tanto s_k, s_i tienen que ser el mismo símbolo:

$$p^0(S_k/S_i) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } s_k = s_i \\ 0, & \text{si } s_k \neq s_i \end{cases} \quad (6-7a)$$

así que $M^0 = I$, la matriz unidad de n dimensiones. Para $\tau \rightarrow \infty$ la probabilidad de la ocurrencia de s_k ya no depende de s_i .

Por tanto: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} p^{\tau}(S_k/S_i) = p(S_k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (6-7b)$

dando una matriz $M(\infty)$ en que todas las columnas serán iguales y de

la forma $\begin{bmatrix} p(S_1) \\ p(S_2) \\ \vdots \\ p(S_n) \end{bmatrix}$

En resumen:

$$\begin{aligned} M(0) &= I \\ M(1) &= M = \{p(a_k/a_1)\} \\ M(Z) &= M^Z = \{p[a_k(t+Z)/a_1(t)]\} = \{p^Z(a_k/a_1)\} \dots (6-8) \\ M(\infty) &= \{p(a_k)\} \quad \text{para todo } (i=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

Las matrices $M(Z)$ son sujetas a las condiciones marginales

$$\sum_{k=1}^n p[a_k(t+Z)/a_1(t)] = \sum_{k=1}^n p^Z(a_k/a_1) = 1$$

lo que puede deducirse de

$$p[a_1(t) = a_k(t+Z)] = p[a_1(t)] p[a_k(t+Z)/a_1(t)] \dots (6-9)$$

ecuación siempre válida como definición de la probabilidad condicional

$p[a_k(t+Z)/a_1(t)]$. Sumando sobre todos los posibles valores de $a_k(t+Z)$:

$$\sum_k p[a_1(t), a_k(t+Z)] = p[a_1(t)]$$

y aplicando (6-9)

$$\begin{aligned} \text{nos da entonces} \quad p[a_1(t)] &= \sum_k p[a_1(t)] p[a_k(t+Z)/a_1(t)] = \\ &= p[a_1(t)] \sum_k p[a_k(t+Z)/a_1(t)] = \end{aligned}$$

lo que puede escribirse

$$\text{según (6-8)} \quad p(a_1) \sum_k p^Z(a_k/a_1)$$

Segue para $p(a_1) \neq 0$

$$\sum_{k=1}^n p^Z(a_k/a_1) = 1, (i=1,2,\dots,n) \dots (6-10)$$

válido para cualquier múltiplo Z del intervalo entre dos símbolos subsecuentes.

Promediando ahora $p[a_1(t), a_k(t+Z)]$ sobre $a_1(t)$ y aplicando (6-9), sigue:

$$p[a_k(t+Z)] = \sum_{i=1}^n p[a_k(t+Z)/a_1(t)] p[a_1(t)] \dots (6-11)$$

que puede expresarse en términos de un vector P , cuyos componentes serán las probabilidades absolutas de los símbolos al tiempo t , y de un vector $P^{(Z)}$ cuyos componentes serán las probabilidades de los mismos símbolos después de Z intervalos de tiempo. Tomando los vectores P y $P^{(Z)}$ como vectores columna, la ecuación (6-11) nos da las componentes de $P^{(Z)}$ como las componentes del vector

producto de la matriz $N(z)$ con el vector columna P :

$$p(z) = N(z) \cdot P \quad \dots\dots (6-11a)$$

ecuación que corresponde a (2-34), obtenida para $z = 1$.

Para una señal estacionaria, $p(z)$ será el mismo vector que P , dado que $p(s)$ no cambia con el tiempo, entonces un Eigenvector de la matriz N para un Eigenvalor $\lambda = 1$.

3.- Valores medios.

Asignamos a cada símbolo s_i del alfabeto un valor numérico $S_i (i=1, 2, \dots, n)$. El valor medio de la señal se da por la expresión:

$$\mu = \sum_{i=1}^n S_i p(s_i) \quad \dots \quad (6-12)$$

y el valor cuadrado medio por

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n S_i^2 p(s_i) \quad \dots \quad (6-13)$$

De (6-12), (6-13) puede calcularse el cuadrado de la variancia σ^2

$$\sigma^2 = \bar{S} - \mu^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 p(s_i) - \sum_{i=1}^n S_i S_k p(s_i) p(s_k) \dots (6-14)$$

4.- Función de correlación.

Designamos con $S(t)$ el valor de la señal al tiempo t .

Tratándose de un proceso ergódico y estacionario puede definirse la función de correlación como el promedio sobre un período de tiempo suficientemente largo del producto $S(t) \cdot S(t+\tau)$, en donde $S(t)$ y $S(t+\tau)$ serán los valores que toma la señal en dos tiempos separados por un intervalo τ . Para una señal estacionaria este promedio no dependerá de t pero solamente del intervalo τ , así que la función de correlación dependerá exclusivamente de τ .

La definición de la función de correlación $C(\tau)$ se da en la forma:

$$C(\tau) = \overline{S(t)S(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} S(t)S(t+\tau) dt$$

Para la señal a símbolos discretos la integral se convierte en una suma sobre los símbolos en t y $t + \tau$. Designaremos, para evitar índices múltiples, los símbolos que ocurren en t con r_t , los que ocurren en $t + \tau$

con $s_{t+\tau}$ con sus valores respectivos R y S, escribiendo la función de correlación como

$$C(\tau) = \overline{S(t)S(t+\tau)} = \sum_{R,S} RS p(R_t, S_{t+\tau}) =$$

$$= \sum_{R,S} RS p(R_t) p(S_{t+\tau}/R_t) = \sum_{k=1}^n R_i S_k p(R_i) p^*(S_k/R_i)$$

o, regresando a la notación anterior

$$C(\tau) = \sum_{i=1}^n S_i S_k p(R_i) p^*(S_k/R_i) \dots \dots (6-15)$$

La función definida en (6-15) es simétrica en s_1 y s_k y es por tanto función par, dado que el cambio de τ a $(-\tau)$ tendrá por efecto solamente el intercambio entre s_1 y s_k . (6-15) cumple así la condición:

$$C(\tau) = C(-\tau) \dots \dots (6-16)$$

La función de autocorrelación $C(0)$ se obtiene de (6-15) sustituyendo de (6-7a) el valor de $p^*(s_k/s_i) = p^*(s_k/s_i) = \delta_{ik}$

haciéndose $i = k$ en los términos restantes:

$$C(0) = \sum_{i=1}^n S_i^2 p(R_i) = \sigma^2 \dots \dots (6-17)$$

$C(0)$, el valor max. de $C(\tau)$, es igual al valor cuadrado medio de la señal.

En el límite para $\tau \rightarrow \infty$ sigue de (6-7b)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) = \sum_{k=1}^n S_i S_k p(R_i) p(R_k) = \mu^2 \dots \dots (6-18)$$

Para fines de comparación es conveniente normalizar la función de correlación, de manera que tome el valor 1 en su máximo para $\tau = 0$ y se anula para $\tau \rightarrow \infty$.

Introducimos a ese fin la función de correlación normalizada $\phi(\tau)$ por la definición: $\phi(\tau) = \frac{C(\tau) - C(\infty)}{C(0) - C(\infty)}$ con $\phi(0) = 1$ y $\phi(\infty) = 0 \dots \dots (6-19)$

El denominador $C(0) - C(\infty) = \sigma^2 - \mu^2$ por (6-17) y (6-18)

por tanto $C(0) - C(\infty) = \sigma^2$ --- (6-20)

lo que da $\phi(\omega)$ en la forma

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sigma^2} [C(\omega) - C(\infty)] \dots (6-19a)$$

Para evaluar la función de correlación el único problema es la evaluación de los $p^{\tau}(s_k/s_1)$ para cada valor de τ . De (6-19a), sustituyendo la expresión de $C(\tau)$

$$\phi(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i S_i p(s_i) \sum_k S_k [p^{\tau}(s_k/s_i) - p(s_k)] \dots (6-21)$$

se ve que $\phi(\tau)$ tiene un factor $p^{\tau}(s_k/s_1) - p(s_k)$, que se anula en el límite. Puede introducirse un límite de tolerancia $\epsilon \ll 1$, que indique hasta que valores de τ habrá que llevar el cálculo, declarándolo como terminado una vez que

$$[p^{\tau_M}(s_k/s_i) - p(s_k)] \leq \epsilon \quad (i, k = 1, \dots, m) \dots (6-22)$$

llamando τ_M el valor de τ para el cual se cumple (6-22) por primera vez.

τ_M se define entonces como el alcance de correlación de la señal.

τ_M será siempre mayor que el grado de coherencia de la señal debido al encadenamiento (6-2). La condición $p(s_k/s_1, s_2, \dots, s_{k-2}, s_{k-1}) = p(s_k/s_{k-1})$, no quiere decir que no haya correlación entre s_k y s_{k-2} por ejemplo, pero solamente que la probabilidad condicional de s_k no depende en detalle de la evolución de la señal en el pasado, pero solamente el grado que este pasado resulte para el momento inmediatamente anterior en la aparición del símbolo s_{k-1} que presenta así para s_k un resumen de este pasado.

τ_M depende desde luego del valor que se asigna a la ϵ , que para todo propósito práctico no necesita tomarse mas pequeño que 0.1% del valor

de $C(0)$, si se requiere mucho detalle. Caso contrario, 1% puede considerarse como suficiente.

5.- Métodos de evaluación de la función de correlación.

Para calcular los términos de las matrices $M(z)$, M^2 se puede proceder por multiplicación matricial directamente, calculando sucesivamente M^2, M^3, \dots, M^N , procedimiento que resulta el más cómodo - si se hacen estos cálculos con computadora, porque el programa es así muy sencillo y, hecho con algo de criterio, necesita de poco espacio en la memoria y no gasta mucho tiempo de máquina. Sin embargo, para hacerse a mano, resulta muy laborioso y se presta, precisamente por ser muy aburrido, a errores de cálculo casi inevitables. Tiene además el gran inconveniente de no permitir una investigación sobre las relaciones que existen entre ciertas características estructurales de la señal o del autómata que la produce y la forma de la función de correlación. El segundo método consiste en diagonalizar la matriz M , obteniendo sus eigenvalores y con éstos los términos $\neq 0$ de su forma diagonal $\Delta(M)$, elevar ésta a las potencias $r=2,3,\dots,T_n$ y retransformar Δ^r a M^r . Con este método se resolvieron algunos ejemplos de 1. y 2. orden, que se muestran a continuación:

Ejemplo 1.- Generador de 1.orden, señal de 3 símbolos, caso general.

Como primer ejemplo se usa el autómata de Fig. 14, cuyo diseño se presentó en Cap. 3-2.

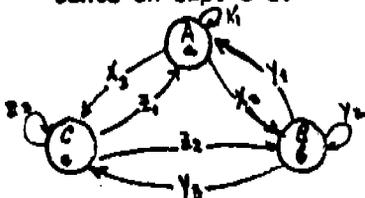


Fig 14

Para evitar el uso de índices dobles, se hizo un cambio en la notación, llamando los estados A, B, C, con salidas a, b, c respectivamente, y los estímulos que parten de A : x_1, x_2, x_3

los que parten de B: y_1, y_2, y_3

de C: x_1, x_2, x_3 .

Fig. 16 muestra el diagrama de flujo con la nueva notación.

$$\text{La matriz de Markoff } M = \begin{bmatrix} p(a/a) & p(a/b) & p(a/c) \\ p(b/a) & p(b/b) & p(b/c) \\ p(c/a) & p(c/b) & p(c/c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_1) & p(y_1) & p(z_1) \\ p(x_2) & p(y_2) & p(z_2) \\ p(x_3) & p(y_3) & p(z_3) \end{bmatrix}$$

- - - (6-23)

Calcular las probabilidades absolutas según (2-30): $\sum_{i=1}^3 p(i) p(k/i) = p(k)$
(k=1, 2, 3)

$$k=1: p(a)p(a/a) + p(b) p(a/b) + p(c) p(a/c) = p(a)$$

$$k=2: p(a)p(b/a) + p(b) p(b/b) + p(c) p(b/c) = p(b) \quad \text{--- (6-24)}$$

$$k=3: p(a)p(c/a) + p(b) p(c/b) + p(c) p(c/c) = p(c)$$

El determinante $\text{Det.}(M) = 0$. Usamos 2 de las 3 ecuaciones; p.ej. las dos primeras, completando el sistema con (1-4): $\sum_{i=1}^3 p(i) = 1$

$$p(a) + p(b) + p(c) = 1$$

$$p(a)[p(a/a)-1] + p(b)p(a/b) - p(c)p(a/c) = 0 \quad \text{--- (6-25)}$$

$$p(a) p(b/a) + p(b)[p(b/b)-1] + p(c)p(b/c) = 0$$

Sistema con determinante $\neq 0$ que puede resolverse para $p(a), p(b), p(c)$.

$$\text{Determinante } D = [1-p(a/a)+p(a/c)][1-p(b/b)+p(b/c)] - [p(a/c)-p(a/c)][p(b/a)-p(b/c)] \quad \text{--- (6-26)}$$

$$p(a) = \frac{1}{D} \{ p(a/c) [1-p(b/b)] + p(b/c) p(a/b) \}$$

$$p(b) = \frac{1}{D} \{ p(b/a) [1-p(a/a)] + p(a/c) p(b/a) \} \quad \text{--- (6-27)}$$

$$p(c) = \frac{1}{D} \{ [1-p(a/a)][1-p(b/b)] - p(a/b) p(b/a) \}$$

Para calcular las potencias M^k de la matriz M , la transformamos en su forma diagonal equivalente, resolviendo su ecuación característica

$$\text{Det. } |M - \lambda I| = 0 \quad \text{--- (6-28)}$$

que, debido a (6-7a) debe de tener una solución: $M = I$ y, por tanto, un Eigenvalor: $\lambda_1 = 1$ --- (6-29)

En nuestro caso:

$$\det |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} p(a/a) - \lambda & p(a/b) & p(a/c) \\ p(b/a) & p(b/b) - \lambda & p(b/c) \\ p(c/a) & p(c/b) & p(c/c) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{--- (6-28a)}$$

Obtenemos una ecuación de 3.º grado en λ : Dado que, por (6-29) una de sus 3 raíces tiene el valor 1, el polinomio de 3.º grado en λ tiene el factor $(\lambda - 1)$. La división entre $(\lambda - 1)$ nos da la ecuación de 2.º grado en λ :

$$\lambda^2 + [p(a/a) - p(b/a) - p(c/a)]\lambda + p(a/c)[p(b/a) - p(b/c)] + p(b/c)[p(a/b) - p(a/c)] + p(c/a)p(b/c) - p(b/a)p(c/a) = 0 \quad \text{--- (6-30)}$$

Escogiendo ahora valores numéricos para los términos de la matriz M, fijamos 7 de ellos, dejándolos libres los dos restantes para poder observar las variaciones de los eigenvalores con las variaciones de dos términos de M escogidos de manera, que éstos nos den, debido a las condiciones marginales, 1 parámetro libre.

Sea, por ejemplo,

$$\begin{aligned} p(a/a) = p(c/c) = 0,3 & \quad p(a/b) = x \\ p(a/c) = p(b/b) = 0,2 & \\ p(b/a) = 0,1 & \quad \text{--- (6-31)} \\ p(b/c) = 0,5 & \\ p(c/a) = 0,6 & \quad p(c/b) = 0,8 - x \end{aligned}$$

Puede verse fácilmente, que con estas asignaciones se cumplen las condiciones marginales: $\sum_{i=1}^3 p(a/i) = 1 \quad (i=1,2,3)$

Sustituyendo en (6-30) obtenemos:

$$\lambda^2 + 0,2\lambda - 0,11 + 0,4x = 0 \quad \text{--- (6-32)}$$

con la solución $\lambda_{2,3} = -0,1 \pm \sqrt{0,12 - 0,4x}$ --- (6-32a)

El discriminante $d = 0,12 - 0,4x$ --- (32b)

Tenemos por tanto raíces reales para $0 \leq x \leq 0,3$ y conjugadas complejas para $0,3 < x \leq 1$.

Calculamos M para dos valores de x , uno que corresponde a Eigenvalores reales, otro a Eigenvalores complejos:

Caso 1: $x = 0,2$

$$p(a/b) = 0,2$$

$$p(c/b) = 0,6 \quad \text{---(6-33a)}$$

Eigenvalores: $\lambda_1 = 1$

$$\lambda_2 = 0,1 \quad \text{---(6-34a)}$$

$$\lambda_3 = -0,3$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0,6 & 0,3 \end{bmatrix} \quad \text{---(6-35a)}$$

Caso 2: $x = 0,7$

$$p(a/b) = 0,7$$

$$p(c/b) = 0,1 \quad \text{---(6-33b)}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 0,1 + 0,4i \quad \text{---(6-34b)}$$

$$\lambda_3 = -0,1 - 0,4i$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \quad \text{---(6-35b)}$$

Forma diagonal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3 \end{bmatrix} \quad \text{---(6-36a)}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 + 0,4i & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 - 0,4i \end{bmatrix} \quad \text{---(6-36b)}$$

Calcular $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$ de (6-27)

$$p(a) = 26/117 = 2/9$$

$$p(a) = 51/137$$

$$p(b) = 37/117 \quad \text{---(6-37a)}$$

$$p(b) = 37/137 \quad \text{---(6-37b)}$$

$$p(c) = 54/117 = 6/13$$

$$p(c) = 49/137$$

Encontrar una matriz U no singular tal que

$$M = U L U^{-1} \quad \text{---(6-38)}$$

entonces $M^z = U L^z U^{-1} \quad \text{---(6-39)}$

Calcular U de $MU = UL \quad \text{---(6-38a)}$

Calcular U^{-1} por inversión de U ,

Sustituir U , U^{-1} en (6-39), lo que nos da, finalmente, los términos de M^z , escritos formalmente como $p(k/i)^z$

Los términos de M tienen la forma:

$$p(k/i)^z = p(k) + A_{ki} \lambda_1^z + B_{ki} \lambda_2^z \quad \text{---(6-40)}$$

$(i, k = 1, 2, 3)$

Obteniendo el resultado, hay que verificar: $\sum_{k=1}^3 p(k/i)^z = 1 \dots (6-10)$

$$p^0(k/i) = \delta_{ki} \quad (6-7a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(k/i)^z = p(k) \quad (6-7b)$$

Además

para z el se reproducen los términos de M .

Caso 1. - Una vez calculado $M^z = U L^z U^{-1}$

se obtiene cada término de M^z en la forma (6-40).

En la tabla 6-47 se muestran los valores de $p(k), A_{ki}, B_{ki}$, para $i, k=1, 2, 3$.

Caso 2. - Con λ_2, λ_3 complejos conjugados, conviene calcular las potencias de λ_2, λ_3 para obtener (6-40) en una forma más adecuada:

Escribimos $\lambda_{2,3} = 0,1 \pm 0,4i$ en la forma $\lambda_{2,3} = |\lambda| e^{\pm i\varphi}$ (6-41b)

$$\text{en donde } |\lambda| = \sqrt{17} = 0,4123$$

$$\varphi = 104^\circ$$

$$\lambda_{2,3}^z = |\lambda|^z e^{\pm iz\varphi} = |\lambda|^z (\cos 104z \pm i \sin 104z) \quad (6-42b)$$

Los A_{ki}, B_{ki} que aparecen en los términos de $M^z = U \lambda^z U^{-1}$ tienen valores complejos conjugados que escribimos:

$$A_{ki} = R(\alpha_{ki} + i\beta_{ki}) \quad (6-43b)$$

$$B_{ki} = R(\alpha_{ki} - i\beta_{ki})$$

en (6-47).

tabulando $R, \alpha_{ki}, \beta_{ki}$

Sustituyendo (6-41b), (6-42b), (6-43b) en (6-40), nos da:

$$p(k, i)^z = p(k) + R(0,4123)^z [(\alpha_{ki} + i\beta_{ki}) e^{iz\varphi} + (\alpha_{ki} - i\beta_{ki}) e^{-iz\varphi}] =$$

$$= p(k) + 2R(0,4123)^z [\alpha_{ki} \cos 104z - \beta_{ki} \sin 104z]$$

que escribimos en la forma:

$$p(k, i)^z - p(k) = K(0,4123)^z \left[\cos 104z - \frac{\beta_{ki}}{\alpha_{ki}} \sin 104z \right] \quad (6-44b)$$

$$K = 2R \alpha_{ki} \quad (6-45b)$$

tabulando $K, \frac{\beta_{ki}}{\alpha_{ki}}$, en (6-47).

Después de haber comprobado que los valores tabulados cumplen las

condiciones (6-7a), (6-7b), (6-10), puede calcularse la función de correlación normalizada de (6-21):

$$\phi(z) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^3 S_i p(i) \right\} \sum_{k=1}^3 S_k [p(k|i)^z - p(k)]$$

Calcular $\sigma^2 = \bar{x}^2 - \mu^2$ para $S_1=0, S_2=1, S_3=2$

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^3 S_i p(i) = p(b) + 2p(c) \\ \bar{x} &= \sum_{i=1}^3 S_i^2 p(i) = p(b) + 4p(c) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \sigma^2 = 4p(a)p(c) + p(c)[1 - 4p(c)] \quad \text{--- (4-95)}$$

Tabla 6-47

CASO 1: $\sigma^2 = 8576/117^2$					CASO 2: $\sigma^2 = 13696/137^2$						
k	i	$p(k i)^z$	$p(k)$	A_{ki}	B_{ki}	$p(k)$	R	α_{ki}	β_{ki}	K	A_{ki}/α_{ki}
1	1	$p(a/a)^z$	2/9	7/9	0	51/137	$\frac{1}{1096}$	344	0	0.6277	0
1	2	$p(a/b)^z$	"	-2/9	0	"	"	-204	-398	-0.3723	1,9510
1	3	$p(a/c)^z$	"	-2/9	0	"	"	-204	287	-0.3723	-1,4069
2	1	$p(b/a)^z$	37/117	-719	6/13	37/137	"	-148	270	-0.2700	-1.8243
2	2	$p(b/b)^z$	"	2/9	6/13	"	"	400	0	0.7300	0
2	3	$p(b/c)^z$	"	219	-7/13	"	"	-148	-278	-0.2700	1.8784
3	1	$p(c/a)^z$	6/13	0	-6/13	49/137	"	-196	-283	-0.3577	1.4439
3	2	$p(c/b)^z$	"	0	-6/13	"	"	-196	402	-0.3577	-2.0510
3	3	$p(c/c)^z$	"	0	7/13	"	"	352	0	0.6423	0

Se verifica en ambos casos: $\sum_{i=1}^3 p(i) = 1$
 (6-7a)
 $\sum_{k=1}^3 p(k) = 2/3$
 (6-7b)
 $\sum_{k=1}^3 p(k)^2 = p(a)$

Para $z=1$, (6-40) reproduce los términos originales de la matriz M.

Sustituyendo los valores tabulados en $\phi(z)$ obtenemos finalmente:

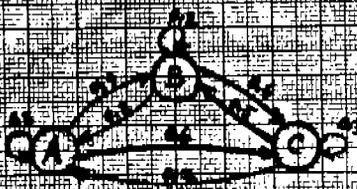
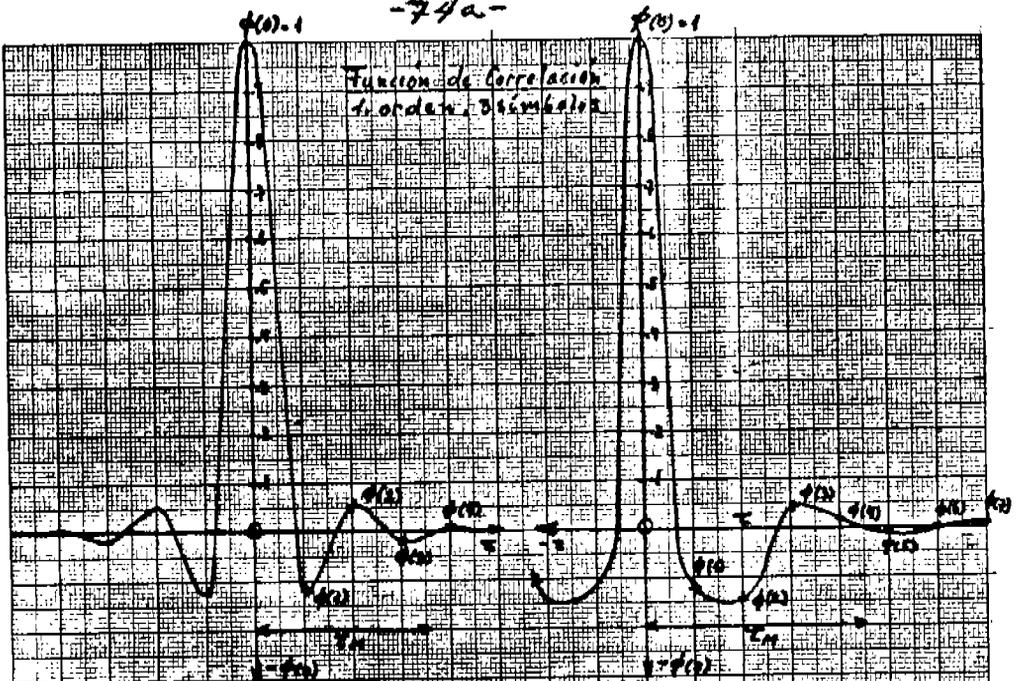
Caso 1 : $\phi(z) = 0.9396 (0.1)^z + 0.5604 (-0.3)^z$ --- (6-48a)

Caso 2 : $\phi(z) = (0.4123)^z [\cos 104z - 0.04572 \sin 104z]$ --- (6-48b)

En tabla 6-49 se muestran los valores de $\phi(z)$ para $z = 1, 2, \dots, z_M$

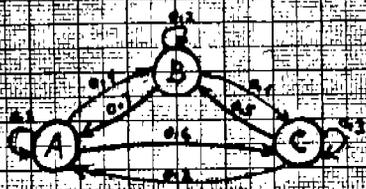
Tabla 6-49	Caso 1	Caso 2	$\phi(z_M) \leq 0.01 \phi(0)$ --- (6-50)
$\phi(0)$	1.0	1.0	
$\phi(1)$	-0.12416	-0.41803	Caso 1: $3 < z_M < 4$
$\phi(2)$	0.05483	-0.14645	
$\phi(3)$	-0.01469	0.04928	Caso 2: $4 < z_M < 5$
$\phi(4)$	0.00452	0.01506	
$\phi(5)$		-0.01138	
$\phi(6)$		-0.00023	
$\phi(7)$		+0.00200	

El alcance de correlación z_M tiene en ambos casos un valor aproximado de 4 tiempos o una longitud de 4 símbolos. Las gráficas de $\phi(z)$ se muestran en Fig.(13) y Fig.(14)



Red. $\lambda=0.1$, $\mu=0.1$
Estructura de longitud 2

Fig. 73



Red. $\lambda=0.1$, $\mu=0.1$
Estructura de longitud 3

Fig. 74

Las peticiones marcadas sobre las flechas muestran la distribución de las probabilidades condicionales.

Ejemplo 2: Generador de 2.orden, 3 símbolos, caso particular (ver Fig.(6a), Cap.4).

Calculamos la función de correlación para el generador Fig.(6a), cuyo diseño presentamos en Cap.4, par.II.

Símbolos originales del lenguaje: a, b, c

a los cuales asignamos los valores: $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 2$

Símbolos recifrados: (aa), (ab), (ba), (bc), (cb), (cc).

Estados: (AA), (AB), (BA), (BC), (CB), (CC)

Salidas: a b a c b c

Estímulos: x z y v u w

Ver Fig.(6b), idéntica con Fig.(6a) excepto por la notación modificada por razones de mayor claridad.

La ecuación $E^{(1)} = X \cdot E$ (2-3)

se cumple para un vector de estados:

$$E = \begin{pmatrix} (AA) \\ (AB) \\ (BA) \\ (BC) \\ (CB) \\ (CC) \end{pmatrix}$$

y el correspondiente para $E^{(1)}$ (1)

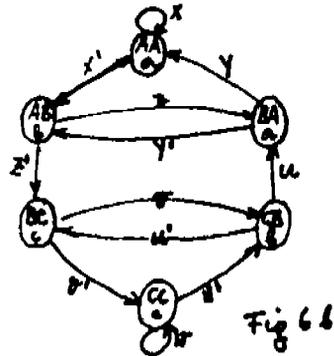


Fig 6 b

y una matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ x' & 0 & y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & z' & 0 & 0 & u' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & v' & 0 & w \end{pmatrix} \quad (6-51)$$

Igualando $p(x)$, $p(y)$... con los términos correspondientes de la matriz M dada, obtenemos para las probabilidades:

$$\begin{bmatrix} p(aa) \\ p(ab) \\ p(ba) \\ p(bc) \\ p(cb) \\ p(cc) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x) & 0 & p(y) & 0 & 0 & 0 \\ p(x') & 0 & p(y') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(z) & 0 & 0 & p(u) & 0 \\ 0 & p(z') & 0 & 0 & p(u') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(v) & 0 & p(w) \\ 0 & 0 & 0 & p(v') & 0 & p(w') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p(aa) \\ p(ab) \\ p(ba) \\ p(bc) \\ p(cb) \\ p(cc) \end{bmatrix} \quad \text{--- (6-52)}$$

que nos permite calcular los $p(i,k)$, usando 5 de las ecuaciones de (6-52) junto con

$$\sum_{i,k} p(i,k) = p(aa) + p(ab) + p(ba) + p(bc) + p(cb) + p(cc) = 1$$

El determinante de este sistema tiene el valor:

$$D = p(x')p(z') [p(v') + 2p(w')] + p(u)p(w') [p(y) + 2p(x')] \quad (6-54)$$

y los $p(i,k)$ resultan como sigue:

$$\begin{aligned} p(aa) &= 1/D p(y) p(u) p(w') \\ p(ab) &= p(ba) = 1/D p(x') p(u) p(w') \quad \text{--- (6-55)} \\ p(bc) &= p(cb) = 1/D p(x') p(z') p(w') \\ p(cc) &= 1/D p(z') p(v') p(x') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con } p(x) &= p(a/aa) & p(x') &= p(b/aa) \\ p(y) &= p(a/ba) & p(y') &= p(b/ba) \\ p(z) &= p(a/ab) & p(z') &= p(c/ab) \quad \text{--- (6-56)} \\ p(u) &= p(a/cb) & p(u') &= p(c/cb) \\ p(v) &= p(b/bc) & p(v') &= p(c/bc) \\ p(w) &= p(c/cc) & p(w') &= p(b/cc) \end{aligned}$$

De los $p(i,k)$ pueden calcularse los $p(i) = \sum_k p(i,k)$.

La función de correlación para la estructura de Fig. (68) se calculó para 2 casos, usándose los mismos valores para $p(x), p(y), p(v), p(w)$ en ambos casos, pero asignando valores diferentes a $p(u)$ y $p(z)$.

Caso 1: $p(x) = 0.9$ $p(u) = 0.1$ Caso 2: $p(x) = 0.9$ $p(u) = 0.8$
 $p(y) = 0.3$ $p(z) = 0.9$ $p(y) = 0.3$ $p(z) = 0.2$
 $p(v) = 0.7$ $p(v) = 0.7$
 $p(w) = 0.1$ $p(w) = 0.1$

Sustituyendo estos valores en (6-55) resultan en ambos casos los mismos valores para los $p(i,k)$ y los $p(i)$. Si $p(a) = p(b) = 0.4090$ que

G^2 tendrá también el mismo valor en ambos casos.

$$p(aa) = 9/22 = 0.4090$$

$$p(ab) = p(ba) = p(bc) = p(cb) = 3/22 = 0.1364 \quad \text{--- (6-57)}$$

$$p(cc) = 1/22 = 0.0454$$

$$\text{de donde: } p(a) = p(aa) + p(ab) = 6/11 = 0.5455$$

$$p(b) = p(ba) + p(bc) = 3/11 = 0.2727 \quad \text{--- (6-58)}$$

$$p(c) = p(bc) + p(cc) = 2/11 = 0.1818$$

$$\mu = 7/11, \quad \bar{S}^2 = 19/22$$

$$\sigma^2 = \bar{S}^2 - \mu^2 = \frac{11}{2 \times 11^2} = 0.45869 \quad \text{--- (6-59)}$$

Resolviendo la ecuación característica para c.u. de las matrices M obtenemos los Eigenvalores λ :

Caso 1

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -0.79, \quad \lambda_3 = 0.6968$$

$$\lambda_4 = 0.94018, \quad \lambda_{5,6} = -0.9235 \pm 0.0783i$$

Caso 2

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -0.28, \quad \lambda_3 = 0.71157$$

$$\lambda_4 = 0.89938, \quad \lambda_{5,6} = 0.0911 \pm 0.6620i$$

que permiten evaluar, como en el ejemplo anterior los términos de M^m
 $M^m = \{p_{ik}(m)\}^T$ y la función de correlación. Indico aquí solamente el resultado final:

$$\phi(z) = -0.00124 \lambda_2^{|z|} + 0.01984 \lambda_3^{|z|} +$$

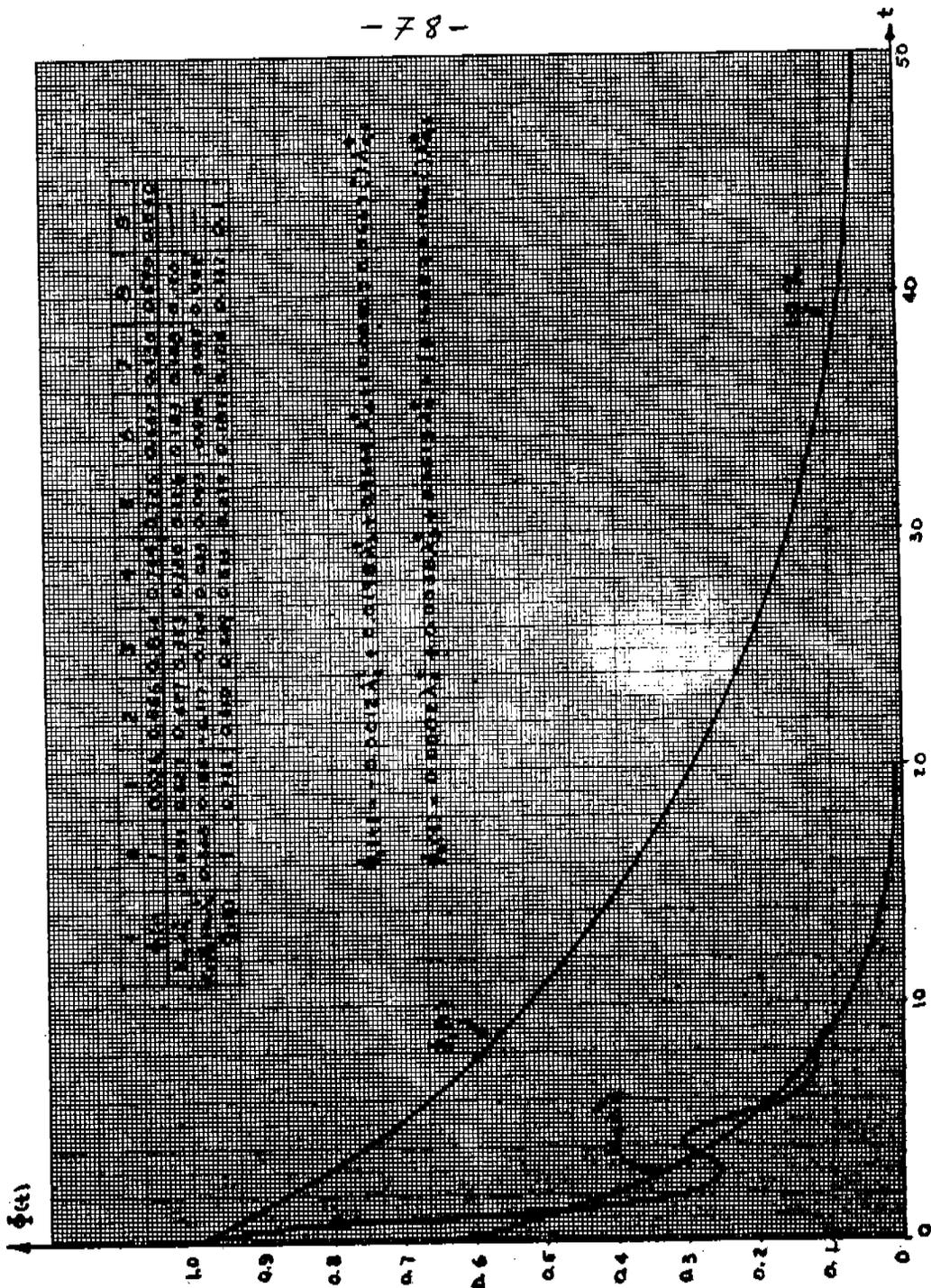
$$+ 0.96992 \lambda_4^{|z|} +$$

$$+ (0.00818 \mp 0.06667i) \lambda_{5,6}^{|z|}$$

$$\phi(z) = 0.0002 \lambda_2^{|z|} + 0.0038 \lambda_3^{|z|} +$$

$$+ 0.65125 \lambda_4^{|z|} +$$

$$+ (0.1688 \mp 0.1166i) \lambda_{5,6}^{|z|}$$



En caso 1, $\phi(\tau)$ coincide después de aproximadamente 7 tiempos con el término en la raíz dominante λ_4
 $\phi(\tau) = 0.96492 \lambda_4^{\tau}$ haciéndose despreciables las contribuciones de las demás raíces.

$\phi(\tau)$ tendrá en este caso la forma de una exponencial decreciente.
 (Ver Fig. 15)

Para evaluar el alcance de correlación τ_M ponemos:

$$\begin{aligned} \phi(\tau_M) &= \frac{1}{100} \phi(0) \\ \log \phi(\tau) &\sim \log 0.96492 + \tau \log \lambda_4 \\ \log \phi(\tau_M) &= -2 \\ \tau_M &\approx 75 \end{aligned}$$

Comparando estos resultados con los obtenidos para autómatas de 1. orden, Fig. (13) y Fig. (14) puede observarse el aumento muy apreciable del alcance de correlación, τ_M , con el orden de coherencia de la señal.

Las diferencias en la forma de las curvas Fig. 15, Fig. 16 están relacionadas con la distribución de las probabilidades de transición en el autómata. En caso 1, todo camino cerrado de longitud mayor que 2 que puede trazarse entre los estados del autómata, será compuesto de transiciones que ocurren con probabilidades bajas. Promediando sobre toda la longitud del camino cerrado, se obtienen valores menores que 1/2 para todos estos caminos. En cambio, la distribución de las probabilidades condicionales en el caso 2 favorece la ocurrencia de los caminos de longitud 4, 5, 6

En caso 2, $\phi(\tau)$ tiene una parte oscilante superpuesta a la curva $0.65425 \lambda_4^{\tau}$ debido a la raíz dominante λ_4 . La contribución de las raíces λ_2, λ_3 es despreciable para $\tau > 3$.

(Ver Fig. 16)
 Obtenemos τ_M como en el caso 1:

$$\begin{aligned} \phi(\tau_M) &= \frac{1}{100} \phi(0) \\ \log[\phi(\tau)] &\sim \log 0.65425 + \tau \log \lambda_4 \\ \log \phi(\tau_M) &= -2 \\ \tau_M &\approx 20 \end{aligned}$$

AB-BC-CB-BA-AB AB-BC-CC-CB-BA-AB AB-BC-CC-CB-BA-AA-AB,

correspondiendo a las secuencias de símbolos bcbab, bc(c)ba, bc(c)ba(a), escribiendo en paréntesis los símbolos con posibles repeticiones. Promediando los valores de las probabilidades de transición sobre toda la longitud del camino cerrado se obtienen los valores 0,75; 0,68; 0,54 respectivamente, es decir, valores mayores de 1/2. Esta relación entre caminos cerrados de alta probabilidad y la aparición de Eigenvalores complejos que producen oscilaciones en la función de correlación, puede observarse en todas las estructuras y a cualquier orden de coherencia de los autómatas generadores del tipo discutido en este trabajo. La significación de éste y otro tipo de ciclos en el autómata se discute más detalladamente en el capítulo siguiente.

Puede concluirse de lo anterior que es posible controlar el tipo de correlación de la señal por la selección adecuada de uno o dos parámetros, selección que puede hacerse muy a menudo por simple inspección de la estructura del autómata y de la distribución de los valores de los demás parámetros.

En el caso del autómata Fig. 6 se hizo una exploración completa de las variaciones de los 6 Eigenvalores en función de las variaciones de los dos parámetros $p(u)$, $p(z)$, haciendo $p(z) = 1 - p(u)$.

El método que se usó para obtener las migraciones de los 6 Eigenvalores en el plano complejo cuando $p(u)$ varía en el intervalo $0 \leq p(u) \leq 1$ es el método bien conocido en síntesis y teoría del control de los diagramas de polos y ceros. El procedimiento usado se describe en el apéndice, el resultado se muestra en Fig. 47.

Variación de h en las
 curvas de nivel sobre O (ordenada h)
 $h = 0$ (curva de $h = 0$)

Región más oscura

1 $(19 \text{ (A)} - 0,77 \text{ (B)}) / (1,6 \text{ (A)} + 3,1 \text{ (B)} + 1,0 \text{ (C)})$ $0,112$
 2 $(1,0 \text{ (A)} + 0,34 \text{ (B)} + 0,07 \text{ (C)}) / (0,11 \text{ (A)} + 0,05 \text{ (B)} + 0,05 \text{ (C)})$ $0,015$
 Expresión derivada de ecuación con las expresiones
 1 y 2 (A, B, C) dadas en el caso particular de $h = 0$

h	A	B	C	h
0	1	0,7222	0,9	0
∞	0,7733	∞	∞	∞
0,034	0,8806	0,7149	-4,193	-2,732
0,4736	0,8283	0,69	-4,87	-3,49
0,9715	0,8223	0,83	-6,07	-5,08
0,5	0,8222	0	-4,1	-4,788

40- $\frac{1}{2}$ las curvas de nivel
 con ascendencia $\Delta h = 0,1$

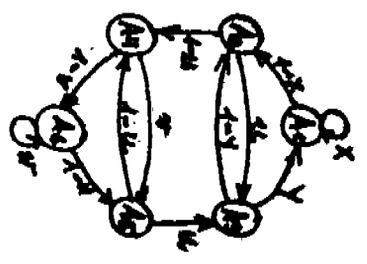
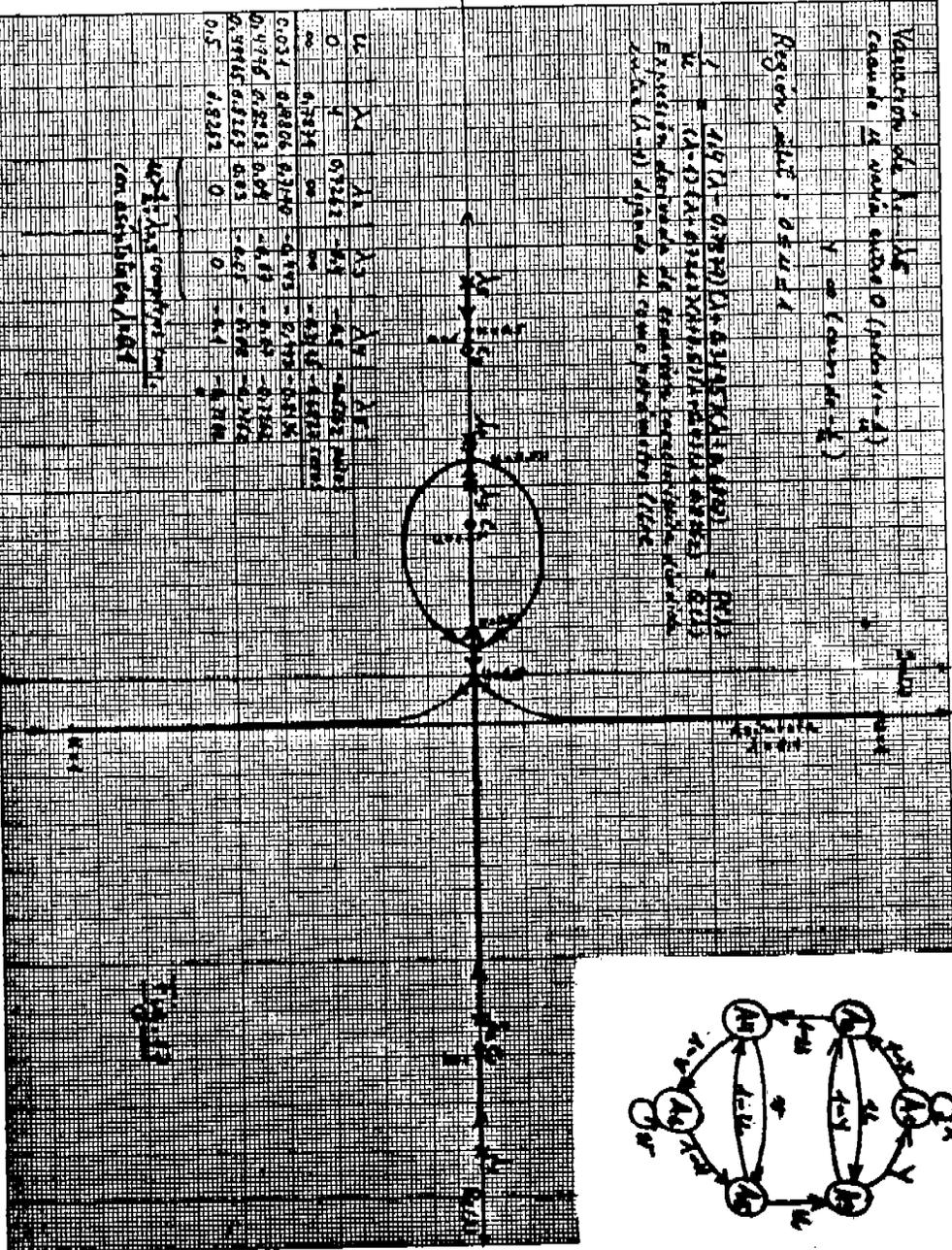


FIG. 13

Eigenvalores y Estructuras Cíclicas1.1. Cadenas regulares y ciclos permanentes.

En el caso general, la ecuación característica $\Delta(\lambda) = 0$ de una matriz de Markoff tiene n raíces que pueden ser simples o múltiples, reales o complejas, pero que cumplen siempre las condiciones que siguen:

- Por lo menos una de las raíces λ tiene el valor 1.
- Los módulos $|\lambda|$ de las raíces λ no pueden ser mayores que 1.
- En caso que existan raíces λ, ρ tales que $\rho \neq 1, |\rho| = 1$, éstas serán raíces de la unidad.

Existe entonces un entero positivo $s \leq n$ tal que

$$\rho^s = 1 \quad \text{--- (7-1)}$$

Las raíces de mod. 1 y $\neq 1$, tendrán así la forma

$$\rho = e^{i 2\pi \frac{h}{s}} \quad \text{--- (7-2)}$$

con $h = 1, 2, \dots, s-1$.

Puede comprobarse que la ocurrencia de raíces $\rho \neq 1$ de módulo 1 corresponde a estructuras llamadas "cíclicas" en que cada camino cerrado que puede trazarse entre los estados del autómata es algún múltiplo de uno y el mismo número entero $d > 1$. En tal estructura todos los caminos cerrados que regresan al autómata a su estado inicial, tienen un max. divisor común que es precisamente el orden de las raíces $\rho = \sqrt[d]{1}$.

En caso de ciclos de longitud 2, es decir, que el más pequeño camino cerrado que hace regresar un estado a sí mismo, sea de 2 transiciones, la matriz M tendrá un eigenvalor $\lambda_1 = -1$, con $\lambda_1^2 = 1$.

Para ciclos de longitud 3 aparecen Eigenvalores $\rho_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}$ tal que $\rho^3 = 1$, etc. Ver Fig. (3a) y Fig. (4a) como ejemplos de estructuras de este tipo:

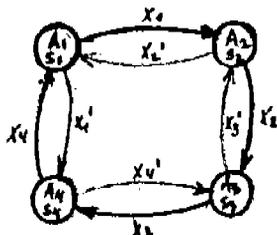


Fig. 3a

$\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\lambda_{3,4} = \pm [(p(x_1) - p(x_2)) / (p(x_3) - p(x_4))]$

Un autómata de estructura cíclica tiene un movimiento periódico superpuesto a sus movimientos estocásticos. Existe en este caso una transformación endomórfica que transforma el autómata probabilístico en un autómata determinista y periódico. En el caso del autómata Fig (3a) p. ej. una transformación T tal que

$T(A_1) = T(A_2) = B_1$
 $T(A_3) = T(A_4) = B_2$



Fig. 14

nos dará una estructura Fig.(14)

con estímulos tautólogos

$y_1 = x_1 \vee x_1' \vee x_2 \vee x_2' = *$
 $y_2 = x_3 \vee x_3' \vee x_4 \vee x_4' = *$

que ocurren con probabilidad $p(y) = 1$, correspondientes a una estructura periódica. La función de correlación del autómata original coincide en el límite $T \rightarrow \infty$ con la del autómata transformado.

Semejantemente puede reducirse el autómata de Fig.(18) a la estructura Fig.(20)

mediante la transformación:

$T(A_1) = T(A_2) = A$ $x = x_1 \vee x_1' \vee x_2 \vee x_2'$
 $T(B_1) = T(B_2) = B$ $y = y_1 \vee y_1' \vee y_2 \vee y_2'$
 $T(C_1) = T(C_2) = C$ $z = z_1 \vee z_1' \vee z_2 \vee z_2'$



Fig 20

El autómata tiene así una medida intrínseca dada por la longitud del ciclo básico, aparte de la medida impuesta por los pulsos de un reloj exterior.

Definición : Una cadena de Markoff se llama "regular" si el Eigenvalor $\lambda_1 = 1$ de su matriz M es simple y si no ocurren Eigenvalores de módulo 1 distintos de $\lambda_1 = 1$.

Debido a que el caso no regular, cíclico, implique ciertas prohibiciones para las transiciones, como p. ej. las de un estado a sí mismo, que se reflejan en la ocurrencia de ceros en ciertos lugares de la matriz M , puede ~~establecerse~~ establecerse un criterio para identificar un proceso regular de Markoff sin la necesidad de resolver primero la ecuación característica $\Delta(\lambda) = 0$. Para un proceso regular existe siempre un índice $k = k_0$ y un valor de $\tau = \tau_0$ tal que los términos de la matriz M^{τ_0} $p_{ik}(\tau)^{\tau_0}$ serán positivos y distintos de 0 para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir que el renglón k_0 de la matriz M^{τ_0} ya no contiene ningún 0, lo que significa la posibilidad de alcanzar el estado A_{k_0} en τ_0 pasos a partir de cualquier estado A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) del autómata. Esta condición no pueda, evidentemente, ser cumplida en caso de una estructura cíclica. Para $\tau_0 = 1$ se tendrá el caso particular de un proceso regular en que todos los términos de la matriz original M serán positivos y distintos de 0, haciendo posible transiciones directas entre todos los estados del autómata.

La forma general de los términos de M^{τ} es un polinomio en las raíces

$$p_{ik}(\tau) = \pi_{ik} + \sum_{j=1}^m q_{ki,j} \sigma_j^{\tau} + \sum_{j=1}^h Q_{ki,j}(\tau) \sigma_j^{\tau} \dots \quad (7-3)$$

en donde σ_j son raíces de mod. 1 distintas de 1,

σ_j son raíces de módulo < 1 , que pueden ser simples o múltiples de multiplicidad α_j ($j = 1, 2, \dots, h$), $h \leq n-1$. π_{ik} y $q_{ki,j}$ son constantes. $Q_{ki,j}(\tau)$ son polinomios en τ cuyo grado será a lo más $\alpha_j - 1$. Serán por tanto constantes en caso que todos los σ_j fueran simples y distintas.

π_{ik} será independiente de i , es decir, del estado anterior, en caso que $\lambda_i = 1$ es una raíz simple. Esto implica que para todo proceso regular π_{ik} será independiente de i . Resulta, que ésto se cumple también en el caso semi-regular que corresponde a un conjunto de estados del autómatá en que cada estado A_j puede verse como un posible sucesor y, también, como un posible antecesor de cualquier estado A_i ($i=1, 2, \dots, n$) del autómatá. El caso semi-regular implica así que existen para cada estado valores de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ tal que puede ocurrir la transición $A_i \rightarrow A_j$ en τ_1 pasos y la transición $A_j \rightarrow A_i$ en τ_2 pasos. Dado que esta condición se cumple para todos los modelos que consideremos en este trabajo ponemos $\pi_{ik} = \rho_{ik}$, independiente de i .

En el caso no cíclico, no habrá raíces $\rho_j \neq 0$ y la expresión (7-3) se reduce a $p(k/i)^F = p(k) + \sum_{j=1}^n Q_{ij}(\tau) \rho_j^F$ (7-3a) que converge a $p(k)$, aún en el caso que ocurren raíces múltiples.

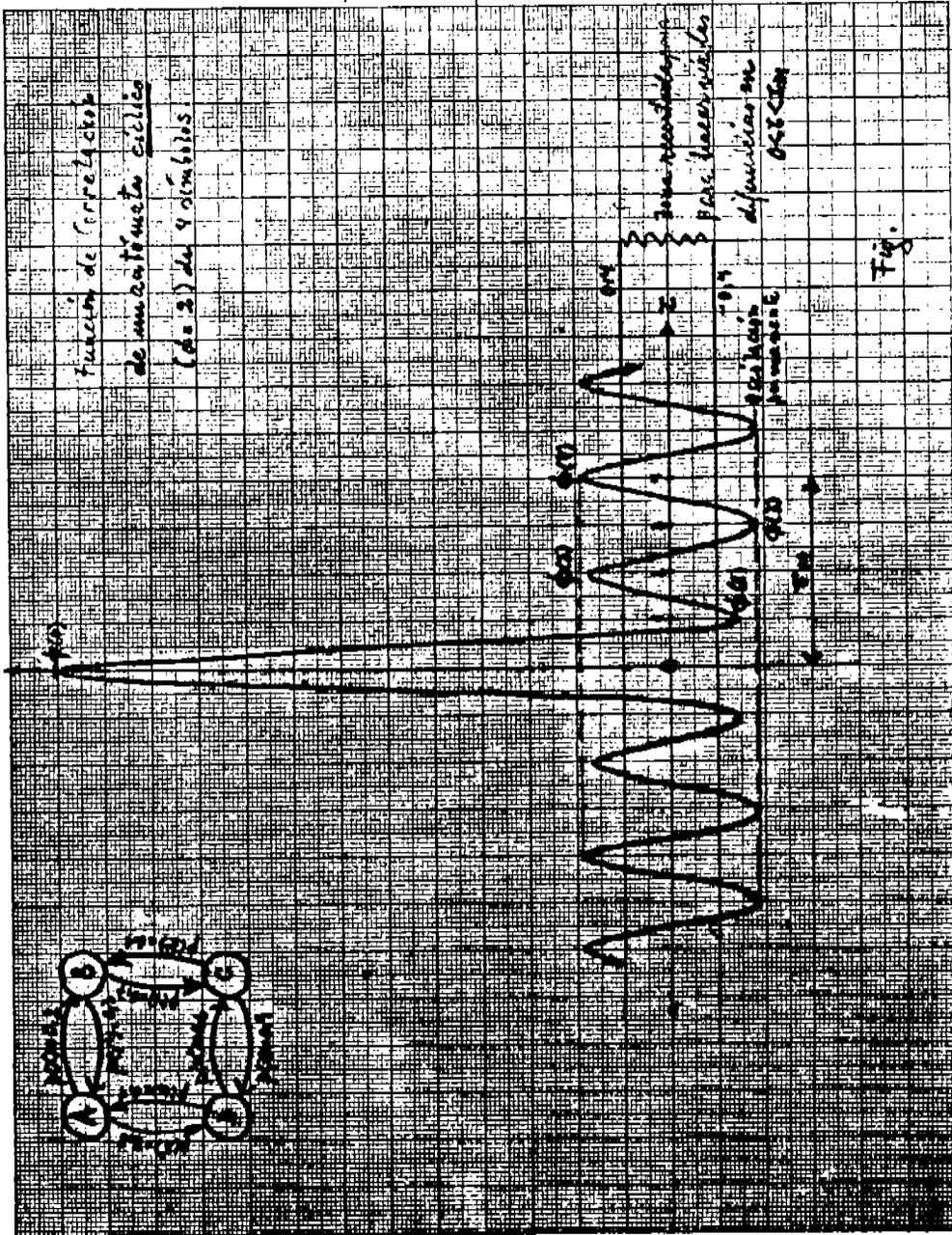
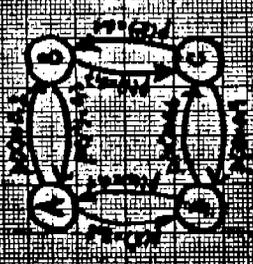
El comportamiento de $p(k/i)^F$ y de la función de correlación resultante fué ilustrado para este caso por los dos ejemplos analizados en el párrafo anterior.

La ocurrencia de raíces $\neq 1$ de módulo 1, hace que los $p(k/i)^F$ tienden en el límite para $F \rightarrow \infty$ hacia funciones periódicas cuya media aritmética converge hacia $\pi_{ik} = p(k)$

$$\lim_{F \rightarrow \infty} \frac{1}{F} \sum_{i=1}^F p(k/i)^F = \pi_{ik}$$

La función de correlación tiene un carácter oscilatorio con amplitud constante después de haber transcurrido τ_{A1} , el alcance de correlación, que se refiere a la componente estocástica del proceso. (Fig(2a))

Función de Transferencia
de un sistema cíclico
(de 2) de 4 símbolos



2.- Ciclos atenuados.

Además de los fenómenos cíclicos permanentes que nos conducen a funciones asintóticamente periódicas, se encuentran en las señales markoffianas otros efectos cíclicos que se producen, cuando la ocurrencia de transiciones a lo largo de ciertos caminos cerrados, que pueden trazarse entre los estados del autómata, esté favorecida por una distribución adecuada de las probabilidades condicionales. Estos efectos no dependerán exclusivamente de la estructura del autómata como es el caso con los ciclos permanentes descritos en el párrafo anterior, pero también de la distribución de las probabilidades que impone o no, la realización de las posibilidades inherentes en la estructura. Puede haber varios tipos de estos caminos cerrados dentro de la misma estructura. De hecho, las posibilidades crecen con el número de símbolos y el grado de coherencia de tal manera que se hace a veces difícil de identificar el camino cerrado responsable de cierto fenómeno cíclico. Como sea, la selección del ciclo que será realizado, entre todos los posibles, ocurre cuando su probabilidad se hace mayor que la complementaria de los caminos alternos. Para dar un nombre a estos fenómenos cíclicos, que ocurren no con certeza como los ciclos permanentes, pero solamente con cierta probabilidad, los llamaré de aquí en adelante: Circulaciones.

Estas circulaciones hacen aparecer, si su longitud es mayor que 2, pares de Eigenvalores complejos conjugados en el espectro de la matriz M , o Eigenvalores negativos si la longitud es 2, todos de módulo menor que 1, así que no modifican el carácter regular de una cadena sin ciclos permanentes. Desde luego puede haber señales que tengan al mismo tiempo ciclos permanentes y circulaciones. En la función de correlación las circulaciones producen oscilaciones atenuadas y ésta tiende, si no ocurren ciclos permanentes, asintóticamente hacia una constante.

Las circulaciones, que aparecen con cierta irregularidad y serán complicadas, de caso en caso por ligeras variaciones, introducen un elemento de ritmo en la señal emitida por el autómata, mientras que los ciclos permanentes le imponen una medida intrínseca.

Esta interpretación, inevitablemente subjetiva, como todo lo que se refiere a ritmo, que es un concepto muy difícil de definir a pesar del hecho que todo el mundo sabe de que se trata, puede sin embargo, justificarse con otra interpretación subjetiva: porque si traducimos los símbolos de la señal a diferentes sonidos, el oído es perfectamente capaz de percibir estos elementos de ritmo y distinguir uno de otros.

Para mostrarlo, he grabado en cinta trozos de señales generadas con computadora correspondientes a diferentes tipos de autómatas markoffianos de 1. y 2. orden con y sin ciclos y circulaciones. Las muestras grabadas vienen listadas en Pag. 91-94, junto con el diagrama del autómata a que corresponden y la señal escrita en símbolos abc..., además de la reproducción de la señal grabada en papel pintado.

Quiero mencionar también que existen unos trabajos muy interesantes hechos en los Laboratorios de la Bell Telephone (46), que consisten en generar una serie de patrones visibles con señales estocásticas de diferentes tipos de estadística, con el fin de examinarles respecto a su distinguibilidad por el ojo. El experimento se hizo con una cámara de TV, barriando una área rectangular, como de costumbre, en dirección vertical y horizontal, usando la señal estocástica generada con computadora, como señal de video. Con tres niveles de voltaje pueden obtenerse 3 tonos, blanco, negro y gris, que serán en este caso los símbolos a, b, c de la señal. Desde luego pueden usarse también varios tonos de gris o pueden hacerse los experimentos con TV en colores, en cuyo caso el núme-

ro de símbolos podrá hacerse bastante mayor. La comparación entre patrones generados con diferentes tipos de señales estocásticas se hace de la manera siguiente: De una área rectangular de barrido se usan $3/4$ con un primer tipo de señal estocástica, y el último $1/4$ con una señal de estadística diferente y la pregunta es, con qué claridad el ojo es capaz de percibir la separación. Comparando por ejemplo, una señal poissoniana con una markoffiana, la separación entre los dos patrones se hace perfectamente nítida. Sin embargo, en la comparación de tipos diferentes de señales markoffianas los resultados no son siempre fáciles de interpretar, en mi opinión, porque el autor usa como elementos de estadística probabilidades conjuntas en vez de probabilidades condicionales. Tengo la sospecha que en los casos que den patrones perfectamente distinguibles, esto se debe a diferentes elementos "rítmicos" contenidos en las señales. Para verificarlo, será necesario reconstruir el "autómata" lo que no es posible a partir de las indicaciones dadas en los artículos mencionados.

Espero poder repetir este tipo de experimentos, pero con señales generadas de acuerdo con el método descrito en el presente trabajo y con el programa hecho en las líneas de este método. Entre otro, porque una prueba visual es siempre ~~mejor~~ convincente y, además, es más cómoda ~~para~~ reproducirla.

3.- Señales programadas.

Las señales programadas a la cuales se asignó, según el número de símbolos, cierta secuencia de sonidos, corresponden a los modelos descritos a continuación y mostrados en Fig. (21-25) con su diagrama de flujo y los valores de las probabilidades de transición anotadas arriba de las flechas. Para indicar eventuales ciclos atenuados (circulaciones) se trazaron con raya gruesa todas las flechas que corresponden a probabilidades $> 0,5$.

Modelo 1: autómata de 1.orden, 3 símbolos (Fig. 21)

Modelo 5a: autómata de 2. orden, 3 símbolos (Fig. 22) asignada la misma secuencia de sonidos.

Modelo 2, modelo 3: autómata de 1.orden, 4 símbolos con ciclo permanente a divisor $d = 2$ (Fig. 23). La diferencia entre los dos modelos consiste nada más en el valor de las probabilidades de transición.

Modelo 7a: autómata de 2.orden, 4 símbolos (Fig. 23)

A los símbolos de los modelos 2, 3, 7a fué asignada la misma secuencia de sonidos y fueron grabados uno a continuación de otro.

Modelo 4: autómata de 1.orden, 6 símbolos, ciclo permanente a divisor $d = 3$ (Fig. 24)

Modelo 5b: misma estructura con los mismos valores de probabilidades como 5a. (Fig. 24)

pero entendido en este caso como autómata de 1.orden con 6 símbolos, asignándose a cada estado una salida y por tanto un sonido diferente. Se usó la misma señal programada como en 5a con las salidas correspondientes.

Fuó asignada la misma secuencia de sonidos a los modelos 4 y 5b.

Modelo 6: autómata de 1.orden, 8 símbolos, ciclo permanente a divisor $d=2$ (Fig. 25)

Modelo 7b: Misma estructura y probabilidades que 7a, pero tomado como autómata de 1.orden con 8 símbolos (Fig. 25). Mismo programa.

Modelo 8: Autómata 1.orden, 8 símbolos, estructura de 6 ligeramente modificada para eliminar el ciclo permanente, manteniendo los mismos valores para las probabilidades (Fig. 26).

2 Muestras de 3 símbolos: a. b. c

I. -

0.1 0.3 0.15 0.2 0.25

V

0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2

V a. -

Fig 22



3 Muestras de 4 símbolos

I.
 ciclo
 4. orden

Sample I consists of a graph with four nodes arranged in a square. The nodes are labeled with numbers: top-left (1), top-right (2), bottom-left (3), and bottom-right (4). Edges connect the nodes in a cycle: 1-2, 2-4, 4-3, and 3-1. Weights are indicated on the edges: 1-2 (0.1), 2-4 (0.2), 4-3 (0.3), and 3-1 (0.4). To the right of the graph is a musical staff with a treble clef, showing a sequence of notes corresponding to the weights: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4. Below this are two more musical staves, each with a treble clef, showing a continuous sequence of notes.

II
 ciclo
 4. orden

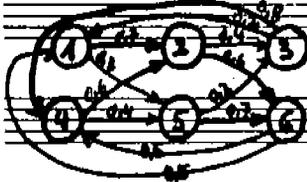
Sample II consists of a graph with four nodes arranged in a square. The nodes are labeled with numbers: top-left (1), top-right (2), bottom-left (3), and bottom-right (4). Edges connect the nodes in a cycle: 1-2, 2-4, 4-3, and 3-1. Weights are indicated on the edges: 1-2 (0.6), 2-4 (0.7), 4-3 (0.8), and 3-1 (0.9). To the right of the graph is a musical staff with a treble clef, showing a sequence of notes corresponding to the weights: 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Below this are two more musical staves, each with a treble clef, showing a continuous sequence of notes.

III (2. orden)
 ciclo (4. orden)

Sample III consists of a graph with four nodes arranged in a square. The nodes are labeled with numbers: top-left (1), top-right (2), bottom-left (3), and bottom-right (4). Edges connect the nodes in a cycle: 1-2, 2-4, 4-3, and 3-1. Weights are indicated on the edges: 1-2 (0.3), 2-4 (0.4), 4-3 (0.5), and 3-1 (0.6). To the right of the graph is a musical staff with a treble clef, showing a sequence of notes corresponding to the weights: 0.3, 0.4, 0.5, 0.6. Below this are two more musical staves, each with a treble clef, showing a continuous sequence of notes.

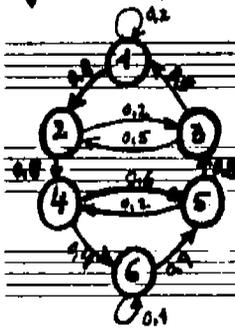


2 Muestras con 6 Símbolos : 1, 2, 3, 4, 5, 6



IV - 4 notas
nota 1, 2, 3

Musical notation for the first system, consisting of two staves. The first staff has a treble clef and a key signature of one flat. The notes are: C4 (quarter), D4 (quarter), E4 (quarter), F4 (quarter), G4 (quarter), A4 (quarter), B4 (quarter), C5 (quarter). The second staff has a treble clef and a key signature of one flat. The notes are: C4 (quarter), D4 (quarter), E4 (quarter), F4 (quarter), G4 (quarter), A4 (quarter), B4 (quarter), C5 (quarter). The first staff ends with a double bar line.



V - 6
6. notas
6 notas en 6 notas

Musical notation for the second system, consisting of three staves. The first staff has a treble clef and a key signature of one flat. The notes are: C4 (quarter), D4 (quarter), E4 (quarter), F4 (quarter), G4 (quarter), A4 (quarter), B4 (quarter), C5 (quarter). The second staff has a treble clef and a key signature of one flat. The notes are: C4 (quarter), D4 (quarter), E4 (quarter), F4 (quarter), G4 (quarter), A4 (quarter), B4 (quarter), C5 (quarter). The third staff has a treble clef and a key signature of one flat. The notes are: C4 (quarter), D4 (quarter), E4 (quarter), F4 (quarter), G4 (quarter), A4 (quarter), B4 (quarter), C5 (quarter). The first staff ends with a double bar line.

Fig. 24

3 Muestras de 8 símbolos

Diagram 1: A 2x4 grid of nodes (1-8). Values: 1-5 (0.4), 2-6 (0.2), 3-7 (0.3), 4-8 (0.4). Vertical values: 1-2 (0.6), 2-3 (0.5), 3-4 (0.7), 5-6 (0.7), 6-7 (0.5), 7-8 (0.6). Musical staff: VI - 1. Onda circular.

Diagram 2: A 3x3 grid of nodes (1-9). Values: 1-5 (0.4), 2-6 (0.2), 3-7 (0.3), 4-8 (0.4). Vertical values: 1-2 (0.5), 2-3 (0.5), 3-4 (0.5), 5-6 (0.5), 6-7 (0.5), 7-8 (0.5). Musical staff: VIII - 1. Onda circular.

Diagram 3: A 4x2 grid of nodes (1-8). Values: 1-2 (0.3), 2-3 (0.4), 3-4 (0.4), 4-5 (0.4), 5-6 (0.4), 6-7 (0.4), 7-8 (0.4). Musical staff: VII - 8 1. Onda circular.

Fig. 25

Tratamos en Cap. 4 el generador para señales markoffianas de orden mayor que 1. La solución que allí se propone tiene el mérito de ser perfectamente general y matemáticamente correcta y el defecto de ser poco práctica para generar señales de un alto grado de coherencia. El uso de circuitos integrados alivia solamente en parte la dificultad del número tan grande de piezas que se necesitan para realizar la construcción. Una solución por programa en computadora no tiene limitaciones prohibitivas en tanto a la complejidad de estructura del autómata, pero es difícil bastante si el número de señales independientes y incoherentes de entrada se hace muy grande.

Parece, que al método mismo, propuesto en cap. 4, sugiere otra solución más factible en ambos casos de realización, por dispositivo construido o por programa. Nuestras señales de entrada tienen que ser independientes e incoherentes para evitar de introducir en la señal generada una correlación extra además de la correlación debida a la estructura del autómata. Hay por tanto otra fuente para actuar sobre el grado de coherencia de la señal generada que la estructura lógica del autómata generador, a saber la coherencia que puede existir entre las señales que se usan como estímulos. Podemos p. ej. partir de 2 estructuras hechas para generar señales markoffianas de primer orden, estimular la primera, de acuerdo con el método descrito en capítulos anteriores, con señales poissonianas independientes para obtener a su salida cierto número de señales con intercorrelación bien conocida y alimentar con estas señales como estímulos al segundo dispositivo de primer orden. Es evidente que a la salida de este último se obtendrá una señal de un grado de coherencia mayor que 1 y esto con un número de entradas que se reduce a lo necesario para la 1. unidad. Desgraciadamente con los métodos matemáticos actualmente disponibles en este campo, no hay manera de averiguar, el valor de este grado e la orden de la señal markoffiana que, respecto a su coherencia, estuviera equivalente a esta señal obtenida por acoplamiento de estructuras markoffianas.

La situación es como sigue: Tenemos una estructura de, décimos, 2 partes c.u. de ellas perfectamente definida con una receta dada para su construcción. Podemos describir una manera físicamente realizable sin dificultad, de su acoplamiento. Esta estructura da una señal de salida cuyas características estadísticas puedan obtenerse por mediciones o conteos que consisten a su vez en operaciones perfectamente definidas y realizables y que nos darán las probabilidades absolutas y condicionales de una señal markoffiana equivalente a la señal generada, es decir podemos averiguar experimentalmente la matriz de Markoff que la determina y cuyos términos tendrán ciertas relaciones con los términos de las dos matrices de los constituyentes del autómata completo. Lo que no tenemos es un método matemático que permite calcular de antemano los términos de la nueva matriz en función de los términos de las matrices constituyentes. Para usar una analogía con los procesos periódicos: No existe algo que corresponde al análisis de Fourier para representar una señal estocástica cualesquiera en términos de una serie de componentes "armónicas" markoffianas. Yo hice varios intentos con diferentes tipos de acoplamientos y trabajando sobre las ecuaciones lógicas de la señal resultante que pueden desde luego obtenerse por aplicación sucesiva de la multiplicación matricial lógica, definida en capítulos anteriores, sin poder encontrar, aún con acoplamientos bastante rebuscados, la operación correspondiente al análisis de Fourier. Los matemáticos consultados por mí afirman, que el problema no puede resolverse con los métodos matemáticos actuales. Queda entonces abierta a la investigación matemática.

Sin embargo, al hecho⁽⁴⁾ que es posible medir todos estos parámetros que por el momento no pueden calcularse de los datos, sugiere un método práctico de solución.

Primero respecto a la clasificación de las señales estocásticas basada en su descripción por una ley temporal, o por el conjunto de todas las probabilidades con-

dicionales distintas, que pueden formarse con las secuencias de sus símbolos. Esta clasificación permite comparar entre sí toda clase de señales markoffianas hasta su límite inferior, la señal poissoniana. Pero no pueden clasificarse dentro de este cuadro señales estocásticas generadas de otra manera que a partir de una matriz de Markoff dada. Me parece posible agregar a este grupo de señales clasificables, el grupo de señales resultantes de estructuras markoffianas acopladas, o. u. determinada por un conjunto de matrices, cuyos elementos serán las matrices markoffianas de sus partes acopladas.

Segundo, para resolver experimentalmente en unos casos típicos, el problema de encontrar señales markoffianas equivalentes estadísticamente a las señales producidas por estructuras markoffianas acopladas. Como estas últimas pueden generarse en máquina, dado que se trata de una serie de operaciones describibles con toda precisión y por tanto reducibles a un algoritmo, no es problema evaluar por conteo sus parámetros característicos. De hecho, el programa que fué elaborado para generar y analizar señales markoffianas, contiene ya todos los cálculos y pruebas necesarias a este propósito. Para dar un ejemplo de los pasos a seguir:

Suponemos que la señal desconocida corresponda a una señal markoffiana de orden 3. Entonces, para un trozo de longitud adecuada, la máquina hará un conteo del número de veces que aparezca cada símbolo, cada digrama, trigrama, cuádrigrama y pentagrama en el trozo, calculando la probabilidad absoluta de e. u. por división entre el número total de cada categoría. Hecho esto, calcula a partir de las probabilidades conocidas $p(i, k)$ de los digramas y de las probabilidades también conocidas $p(i)$ de los símbolos aislados, las probabilidades condicionales de 1. orden:

$$p(k/i) = \frac{p(i, k)}{p(i)}$$

Semejantemente para las probabilidades condicionales

de segundo orden: $p(k/i_1, i_2) = \frac{p(i_1, i_2, k)}{p(i_1, i_2)}$

las de tercero orden: $p(k/i_1, i_2, i_3) = \frac{p(i_1, i_2, i_3, k)}{p(i_1, i_2, i_3)}$

las de orden 4: $p(k/i_1, i_2, i_3, i_4) = \frac{p(i_1, i_2, i_3, i_4, k)}{p(i_1, i_2, i_3, i_4)}$ que serán iguales entre sí, si nada más difieren por el primer símbolo i_1 . Además serán iguales a la probabilidad condicional correspondiente del paso anterior de orden 3:

$$p(k/i_1, i_2, i_3, i_4) = p(k/i_2, i_3, i_4)$$

Esta serie de conteos y pruebas se hizo por programa para un ejemplo de 1. orden (ver cap.9) para comprobar experimentalmente la estadística de la señal. Comparando los valores obtenidos por conteo con los valores teóricos, se encontró para los valores representativos, es decir para valores resultantes de un número suficientemente grande de casos contados, un error de ~~1/2~~ promedio con un max. de 4%. Para llegar a este resultado fue, sin embargo, necesario trabajar con un trozo de señal relativamente largo (30 000 símbolos para una señal de 1. orden de 3 símbolos) para evitar que en el conteo de los trigramas los menos probables aparecieran con una frecuencia demasiado baja. Para llegar hasta los pentagramas, la longitud del trozo tendrá que tomarse todavía bastante más grande.

Con la investigación experimental de una serie de ejemplos típicos de señales producidas por autómatas acoplados, podrán acumularse una serie de datos permitiendo comparar sistemáticamente las matrices de las señales resultantes con las matrices de sus componentes. Será de ayuda tal vez, para encontrar una expresión matemática adecuada y calculable a partir de los datos originales, para las características de la señal resultante y evitar la molestia, de hacer en cada caso la muy laboriosa prueba estadística.

A mi parecer valdría la pena de hacer el experimento porque creo que señales estocásticas bien definidas con un grado de coherencia relativamente alto, podrán ser de cierta utilidad en la investigación de lenguajes, formales y naturales, como también en la investigación del reconocimiento de patrones, dado que los elementos "rituales" de los cuales se habló en el Cap. 7 se hacen más nítidos en la medida que aumenta el grado de coherencia de la señal que los contiene. En caso que el procedimiento experimental muestre resultados bastante prometedores, hay siempre la esperanza que el problema despierte el interés de un matemático que lo resuelva de manera sistemática para evitar lo laborioso y poco elegante del que sufre en este caso el procedimiento experimental.

Antes de terminar este capítulo, unas palabras sobre la función de correlación de la señal a investigar: Desde luego, dos señales que tienen la misma función de correlación no serán necesariamente estadísticamente equivalentes. La igualdad de la función de correlación es una condición necesaria pero no suficiente para la equivalencia. Sin embargo, el alcance de correlación da un criterio útil para fijar un límite superior para el grado de coherencia que puede esperarse en una señal desconocida, punto que se discute en el capítulo 4, pág. 53, que trata sobre la función de correlación de las señales markoffianas. Además en la búsqueda de una señal markoffiana, equivalente estadísticamente con la señal desconocida, pueden excluirse como candidatos todas las señales que no tienen la misma función de correlación como la señal a investigar. Tendrá entonces sentido de evaluar la función de correlación de la señal en cuestión antes de empezar con el trabajo restante del experimento.

CAPITULO 9. La Programación (Generación de señales, Pruebas y Cálculos).

1.- Comprobación de la Estadística de la Señal Generada.

La prueba experimental que confirma que la estadística de la señal resultante corresponde a los valores predeterminados, se hizo mediante una serie de conteos en un trozo de 30.000 símbolos de una señal generada con el procedimiento descrito en este trabajo. Usamos a este fin una señal generada por programa en una computadora. Dado que el programa sigue fielmente todos los pasos del diseño del generador-automata puede considerarse la prueba como válida para el diseño en general, independientemente de que, si este diseño se usó para construir un aparato o para hacer un programa. Las operaciones de conteo y de evaluación de las características estadísticas pertinentes, se hicieron también por programa en computadora.

Podemos obtener por conteo los valores de las probabilidades absolutas de los símbolos y de cualquier secuencia de símbolos. Los valores de las probabilidades condicionales se calculan entonces a partir de los de las probabilidades absolutas. Usamos para la prueba el modelo de Fig. 4a de 1. orden con 3 símbolos con una matriz de Markoff

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.8 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{-- (9-1)}$$

Con este modelo se comprobó que, dentro de ciertas tolerancias,

- a) Los valores experimentales obtenidos para $p(i_2/i_1)$ ($i_1, i_2 = 1, 2, 3$), coinciden con los términos correspondientes de la matriz M.
- b) Los valores experimentales de $p(i_3/i_1i_2)$ no dependen de i_1 . Serán iguales entre sí todos los $p(i_3/i_1i_2)$ que difieran solamente por el símbolo i_1 .
- c) $p(i_3/i_1i_2) = p(i_3/i_2)$ ($i_1, i_2, i_3 = 1, 2, 3$), así que los $p(i_3/i_1i_2)$ coinciden a su vez con los términos de M.

Necesitamos por tanto evaluar $p(i_2/i_1)$ y $p(i_3/i_1i_2)$ para toda combinación posible de los símbolos, quiere decir, que habrá que extender el conteo desde el número de los símbolos aislados hasta el número de secuencias de 3 símbolos, para obtener los valores $N(i)$, $N(i_1i_2)$, $N(i_1i_2i_3)$, ($i_1i_2i_3 = 1,2,3$) que nos dan los valores de las probabilidades absolutas

$$p(i) = \frac{N(i)}{N} \quad p(i_1i_2) = \frac{N(i_1i_2)}{N-1} \quad p(i_1i_2i_3) = \frac{N(i_1i_2i_3)}{N-2}$$

..... (9-2)

con $N = 30.000$, que es suficientemente grande para que se pueda despreciar el error introducido en hacer iguales a N los tres denominadores de (9-2).

Pueden entonces evaluarse las probabilidades condicionales requeridas, usando:

$$p(i_2/i_1) = \frac{p(i_1i_2)}{p(i_1)} = \frac{N(i_1i_2)}{N(i_1)} \quad \dots \quad (9-3)$$

$$p(i_3/i_1i_2) = \frac{p(i_1i_2i_3)}{p(i_1i_2)} = \frac{N(i_1i_2i_3)}{N(i_1i_2)} \quad \dots (9-4)$$

Hemos extendido las pruebas también a las señales binarias de los estímulos x_{ki} y de sus formantes poissonianas n_{ir} , obteniendo por conteo los valores experimentales de $p(n_{ir})$ y de $p(x_{ki})$ y comprobando:

a) que los valores experimentales $p(n_{ir})$ corresponden a los valores calculados según (3-3);

b) que las probabilidades de c.u. de las n_{ir} son uniformemente distribuidas;

c) que los valores de las probabilidades absolutas $p(x_{ki})$ obtenidos directamente por conteo del número de unos que contiene la muestra examinada, reproducen a su vez los términos correspondientes de la matriz de Markoff N .

Los resultados del conteo vienen listados a continuación:

Tabla I

	Conteo de $N(i)$	$p(i) = \frac{N(i)}{N}$ Valor experimental	$p(i)$ calculado según (6-26), (6-27) de los términos de N Valor teórico	error en %
$i=1$	12163	0,40443	0,40187	+ 0,89 %
$i=2$	6885	0,22950	0,23364	- 1,80 %
$i=3$	10952	0,36507	0,36448	+ 0,16 %

Tabla II

Conteo de Diagramas $N(i_1, i_2)$

	$i_2 = 1$	$i_2 = 2$	$i_2 = 3$
$i_1 = 1$	1220	2386	8557
$i_1 = 2$	2140	3407	1338
$i_1 = 3$	8802	1092	1057

Tabla III

$p(i_2/i_1)$ evaluado de $N(i)$ y $N(i_1, i_2)$ contados. (En paréntesis los términos correspondientes de N).

	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$	$i_1 = 3$
$i_2 = 1$	0,10031 (0,1)	0,31083 (0,3)	0,80372 (0,8)
$i_2 = 2$	0,19618 (0,2)	0,49486 (0,5)	0,09971 (0,1)
$i_2 = 3$	0,70355 (0,7)	0,19434 (0,2)	0,09652 (0,1)

Tabla IIIa

Error en % del término de N

$i_2 = 1$	0,31 %	3,61 %	0,46 %
$i_2 = 2$	- 1,91 %	- 1,03 %	- 0,29 %
$i_2 = 3$	0,51 %	- 2,83 %	- 3,48 %

Conteo de Trigramas $N(i_1 i_2 i_3)$ $i_2 = 1$ $i_2 = 2$ $i_2 = 3$

TABLA IV

$i_3 = 1$	$i_1 = 1$	333	714	6891
	" 2	220	1091	1080
	" 3	667	395	631
$i_3 = 2$	$i_1 = 1$	297	1217	850
	" 2	424	1633	142
	" 3	1725	557	120
$i_3 = 3$	$i_1 = 1$	870	435	855
	" 2	1496	693	116
	" 3	6190	280	106

$P(i_1/i_2)$ evaluado de
 $N(i_1 i_2)$ y $N(i_1 i_2 i_3)$ contados.
 (En paréntesis los términos
 correspondientes de N)

TABLA V $i_2 = 1$ $i_2 = 2$ $i_2 = 3$

$i_3 = 1$	$i_1 = 1$	0,09262 (0,1)	0,37986 (0,5)	0,80533 (0,8)
	" 2	0,10881 (")	0,32023 (")	0,80720 (")
	" 3	0,10079 (")	0,30679 (")	0,78621 (")
$i_3 = 2$	$i_1 = 1$	0,19427 (0,2)	0,22008 (0,5)	0,09700 (0,1)
	" 2	0,12814 (")	0,47922 (")	0,10613 (")
	" 3	0,19529 (")	0,51009 (")	0,11353 (")
$i_3 = 3$	$i_1 = 1$	0,71214 (0,7)	0,19070 (0,2)	0,09728 (0,1)
	" 2	0,69909 (")	0,28048 (")	0,08670 (")
	" 3	0,70227 (")	0,16216 (")	0,10029 (")

TABLA V a.

Error en % de los términos correspondientes de M		$i_2 = 1$	$i_2 = 2$	$i_2 = 3$
$i_3 = 1$	$i_1 = 1$	- 7.4 %	-0.2 %	+ 0.7 %
	= 2	+ 2.8 %	+ 6.7 %	+ 0.9 %
	= 3	+ 0.8 %	+ 2.3 %	- 1.7 %
$i_3 = 2$	$i_1 = 1$	- 2.8 %	+ 2.0 %	- 3.0 %
	= 2	- 0.9 %	- 4.1 %	+ 6.1 %
	= 3	- 2.0 %	+ 2.0 %	+13.5 %
$i_3 = 3$	$i_1 = 1$	+ 1.9 %	- 4.6 %	- 2.4 %
	= 2	- 0.1 %	+ 0.2 %	-13.3 %
	= 3	+ 0.5 %	- 8.4 %	0.3 %

Desde luego, los errores son mayores en resultados en que intervienen los trigramas que en los resultados basados solamente en los diagramas y las frecuencias de los símbolos aislados. Para estos últimos los errores max. no llegan al 4 %, (ver Tabla IIa), valor muy bajo para una aproximación en probabilidades y raras veces encontrado en pruebas estadísticas con señales naturales. Supongo que es precisamente el carácter artificial de la señal que permite un control permanente sobre sus parámetros estadísticos, que explica una aproximación tan buena a los valores estipulados. Los errores mayores en los valores derivados de los trigramas se explican fácilmente por una comparación de la dicha tabla con la del conteo de los trigramas $N(i_1, i_2, i_3)$. Ocurren con trigramas de tan baja probabilidad que aparecen en un conteo sobre 30.000 con frecuencias menores o iguales a 120, lo que es apenas suficiente por ser todavía representativo en una prueba de estadística. Comparado con los trigramas, el conteo de los diagramas da en todos los casos frecuencias mayores que 1000, llegando así a resultados más confiables. Puede verse en este ejemplo que una prueba sobre la estadística de la señal generada por este tipo de autómatas, necesita como mínimo un trazo de 30.000 símbolos, si no se usan términos casi iguales en la matriz de Markoff.

Sin embargo, hasta los errores no representativos de 13% no pueden considerarse como exagerados en una aproximación por probabilidad y pueda concluirse de la prueba

que el generador da una señal con la estadística estipulada.

En tanto a los estímulos x_{ad} , el conteo daba resultados con un error de -3.0% en un valor, otro con +1.36 %, los restantes 7 valores todos con errores menores de 1%.

2.- Algunas Observaciones sobre los Programas.

No es posible dar en estas páginas un análisis de los diferentes programas de computación empleados en este trabajo, sin prolongar demasiado el texto que ya quedó, aún así, bastante extendido. Tampoco sería apropiado incluir esta parte del trabajo en mi tesis porque mi colaboración en ella consistía principalmente en proporcionar el material a programar, mientras que los programas mismos fueron elaborados por el Sr. Javier Fernández en lo que se refiere a la generación de las señales y el conjunto de pruebas sobre su estadística y por el joven físico Adalberto Burmaster que hizo el programa para la parte algebraica, relacionada con la evaluación de la función de correlación de las señales. Ambos programas se incluyen en el apéndice, a título de documentación.

Quiero, sin embargo, mencionar unos detalles y unas posibles aplicaciones de estos programas. Referente a la generación de las señales: La única dificultad sería encontrada en esta parte consistía en la producción, como primer paso, de una colección de señales poissonianas independientes y esto en condiciones, en que desviaciones aún ligeras del carácter poissoniano de las señales o cualquier intercorrelación entre las mismas, conducirían a errores apreciables en la señal markoffiana resultante. La mayoría de los programas llamados de "técnica de Monte Carlo" no están hechos para trabajar en estas condiciones a menos que se disponga de una máquina muy grande a memoria extensa. Para evitar esta clase de limitaciones, el Sr. Fernández modificó uno de estos programas de tal manera que puede dar actualmente en la IBM 1130 una serie de longitud mayor que 500.000 de números estocásticos, antes de repetir el período. La longitud máxima con el programa original fue de

16.000, longitud que había que recortar todavía según el número de señales independientes que tenían que generarse al mismo tiempo.

La posibilidad de aplicar la generación de señales markoffianas en técnicas de búsqueda para controles adaptables y sistemas de aprendizaje aumenta sin duda si no se necesitan máquinas gigantes para su realización.

Tomando en cuenta que este programa fue hecho con el propósito principal de comprobar la estadística de la señal generada, es evidente que contiene una serie de instrucciones referentes exclusivamente a las pruebas que pudieran eliminarse si se tratara solamente de generar señales determinadas. Sin embargo, debido precisamente a estas instrucciones de prueba, puede servir el mismo programa con algunas ligeras modificaciones, a encontrar una señal estocástica desconocida, de tipo estacionario, a símbolos discretos, una señal markoffiana equivalente, determinada por una matriz evaluada por el mismo programa. Esta posibilidad ya fue mencionada en la discusión de autómatas acoplados en Capítulo 8. La eliminación de las instrucciones de prueba será así una simplificación muy relativa. Una simplificación absoluta consistiera sin embargo en la eliminación del Fortran como lenguaje de programación en este caso en que el problema original quedó formulado en el lenguaje de lógica proposicional que es el lenguaje propio de la computadora moderna, así que el Fortran introduce en este caso solamente una doble traducción supérflua.

El programa elaborado para la parte algebraica permite, a partir de una matriz de Markoff dada, evaluar las probabilidades absolutas $p(i)$, las potencias M^n hasta su forma asintótica, los valores numéricos de los coeficientes de la ecuación característica $\Delta(\lambda) = 0$ y, finalmente, la tabla de la función de correlación. Es fácil ver, que, junto con el primer programa que permite encontrar la matriz M de una señal markoffiana equivalente a una señal desconocida, este segundo programa hace posible la realización de un correlador para señales discretas, ventaja no despreciable, en vista de que no contamos con ningún dispositivo de esta clase ni en la Universidad, ni en otras instituciones de enseñanza en el país.

En conclusión: La cantidad de problemas no resueltos que surgieron de esta investigación, es bastante mayor que la que se intentó resolver con ella.

Bibliografía

- (1) A. Blanc-Lapierre et R. Fortet: "Théorie des Fonctions Aléatoires" Ed. Masson et Cie.
Paris 1953
- (2) Svoboda J.: "Elektrische Erzeugung von Zufallsprozessen mit vorgegebenen statistischen Eigenschaften" Archiv elektr. Übertr. 16 (1962) 135-148
- (3) H. Donko, R. Eier: "Erzeugung einer Zufallsfunktion mit kontinuierlicher Gleichverteilung" StP 3/II 1967
- (4) G.M. White: "An Electronic Probability Generator" Gen. Electric Research Lab. Report
Fr. 58-RL-2101
- (5) Gertrudis Kurs de Delara y Antonio Elguísabal: "Bisefo y Construcción de un Generador Markoffiano. Rev. Mex. Fis. Vol. XI, 4, 1962
- (6) IBM DATA Processing Techniques "Random Number Generation and Testing"
Form C 20 - 8011
- (6A) Guadalupe Aurora Ruiz: "Pruebas para Generadores de Números Aleatorios" (Tesis de Actuario, Fac. de Ciencias, 1969, Universidad Nacional Autónoma de México.)
- (7) (14) "Experimentelle Stochastische Prozesse" (StP) Forschungsberichte des Instituts für Niederfrequenztechnik der Technischen Hochschule, Wien.
Vorstand Prof. Dipl.-Ing. Dr. G. Kraus, Forschungslleitung Dipl.-Ing. Dr. Wolfgang Wehrmann.
1965 - 1968.
- G. Kraus: "Experimentelle stochastische Prozesse" Archiv elektr. Übertr. 21 (1967)
19-22
"Experimentelle stochastische Prozesse zur Nachbildung technischer Vorgänge" Nachrichtentechnische Fachberichte, Bd. 33, 1967
- W. Wehrmann: "Elektronische Erzeugung und Mathematische Beschreibung einer Klasse stochastischer Prozesse. Nachrichtentechn. Fachberichte, Bd. 33, 1967
- A. Graal, W. Wehrmann: "Die Messung statistischer Parameter stochastischer Prozesse" StP 2/II 1967
- W. Wehrmann: "Korrelationsanalyse stochastischer, durch stationäre Markoffsche Ketten bestimmter Prozesse" Arch. elektr. Übertr. 21 (1967)
- (8) Dr. Alejandro Medina: "Logical Analysis of Organisation in Finite Automata"
Rev. Mex. Fis. Vol. XV, 1, 1966

- (9) A. Medina : Time Dependent Logic.Laboratory Report 1962,
Comisifa Nacional de Energia Nuclear.
- (10) A.N.Kolmogorov:"Foundations of the Theory of Probability" 2 nd ed.1956
Chelsea Publ.
- (11) B.V. Gnedenko:"The Theory of Probability", 2 nd ed. 1962,Chelsea Publ.
- (12) G.Kurz de Delara:"Markoffian Signal Generators" ACTA INEKO 1967,ME-224,I ,13
ed.Hungarian Academy of Science.
- (13) Montgomery Phister:" Logical Design of Digital Computers" John Wiley,N.Y.,1959.
- (14) Gertrudis Kurz de Delara:Generation of Markoffian Signals with a Finite
Number of Discrete Symbols. Rev.Mex.Fis.,Vol.IVI.,3,1967
- (15) B.Jules: " Visual Pattern Discrimination" IRE Trans.Vol.IT-8,Nr.2
February 1962.