



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

---

# Estudio teórico de un ferrofluido entre placas paralelas verticales

---

Tesis

*que para obtener el grado de*

**Ingeniero Mecánico**

*presenta*

**Oscar Raúl Enríquez Paz y Puente**

Director de tesis: Dr. Roberto Zenit Camacho

Codirector de tesis: Dr. Francisco Ricardo da Cunha

México D.F., julio de 2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

A mis padres, Malú y Oscar, por darme todo incondicionalmente. ¡Esto sólo es posible gracias a ustedes!

A mi hermana, Gabriela, por su amor, apoyo y complicidad en tantas aventuras.

A Daniela, por su amor y valentía para emprender esta empresa que nos depara cosas que aún no podemos imaginar.

A toda mi familia, los que están y los que ya no, por estar pendientes de mis pasos y por tantos momentos compartidos.

A Roberto Zenit, asesor y amigo, por ser un ejemplo a seguir y creer en mí hasta en momentos en que yo mismo dudaba.

A Francisco da Cunha, por la hospitalidad y guía durante la realización de este trabajo.

A mis amigos: Baxter, Cacho, Jero, Flipper, Marifer, Marina, Luzma, Anahí, Holda, Piñu, Lucy, Borrego, Adri, Juan Francisco y a los que me di cuenta que olvidé justo cuando imprimí la tesis, por tantos años de amistad e innumerables momentos memorables.

A Lloyd, Diane, Ed y Carol por adoptarme, ser una familia para mí y por estimular tanto mi intelecto.

A todos los profesores y profesoras que durante veinte años han intentado que yo aprenda alguna cosa.

A Celine, Bernardo, Fede, René, Enrique, Charly, Ian, Rodrigo, Adriana, Mónica y Juan Carlos por su amistad y por lo que cada uno me ha enseñado. Ha sido un honor trabajar junto a ustedes.

A Nacho, por su gran amistad e invaluable apoyo.

A los sinodales, Félix Núñez, Sergio Cuevas, Javier Cruz y Francisco Solorio, por sus aportaciones a este trabajo.

A la UNAM, por el orgullo que siento de formar parte de esta gran institución.

A la Universidade de Brasília, por abrirme sus puertas durante un fantástico año.

# Resumen

Este trabajo es un estudio teórico de la forma y altura de una columna de fluido ferromagnético entre dos placas planas, paralelas y verticales en respuesta a un campo magnético vertical constante. La formulación se basa en una extensión de la ecuación de Young-Laplace para un ferrofluido incompresible, combinada con la ecuación de la curvatura promedio de una superficie libre bidimensional. Esto constituye un problema acoplado hidrodinámico-magnético, descrito por una ecuación diferencial no lineal de segundo grado que describe la forma del menisco formado entre el ferrofluido y el aire. De acuerdo con esta formulación hay dos parámetros físicos relevantes en la ecuación gobernante: el número de Bond y el número de Bond magnético. Para resolver la ecuación no lineal se empleó el método de Runge-Kutta de cuarto orden acoplado con el método de Brent; tal algoritmo encuentra la convergencia de la solución verificando que se satisfaga la condición de frontera asociada al ángulo de contacto con la pared. Se evaluó la influencia de los parámetros relevantes en la altura y forma del menisco y se comparó la solución numérica con el análisis asintótico para números de Bond pequeños. El análisis realizado mostró muy buena concordancia entre los resultados obtenidos por los dos métodos.

# Motivación

En los últimos cuarenta años, el estudio de fluidos con propiedades magnéticas ha cobrado mucha importancia debido al creciente número de aplicaciones tecnológicas que se han desarrollado para ellos. Suspensiones de partículas ferromagnéticas sólidas en un medio líquido pueden constituir fluidos estables y magnetizables conocidos como fluidos magnéticos o ferromagnéticos [1]. Si bien durante este tiempo se ha generado una cantidad considerable de literatura especializada y se ha avanzado mucho en el entendimiento de sus propiedades y comportamiento (al grado de que el estudio de estos fluidos sea considerado como una rama de la mecánica de fluidos), el conocimiento sobre los fluidos ferromagnéticos se encuentra lejos de ser total.

Algunas de las aplicaciones tecnológicas actuales de los ferrofluidos son: tapones herméticos entre regiones que contienen fluidos a diferentes presiones, empaques líquidos en ejes que rotan a altas velocidades, rodamientos que funcionan por medio de levitación pasiva de cuerpos no magnéticos, sistemas de absorción de vibraciones, transductores y procesos de separación de materiales. De manera más reciente, se han realizado investigaciones del flujo de líquidos magnéticos dentro de medios porosos, enfocados al control de dicho flujo por medio de campos magnéticos [2].

En este trabajo, se investiga de manera teórica la altura que una columna de fluido ferromagnético puede alcanzar dentro de un espacio angosto cuando las fuerzas de capilaridad no son suficientes para elevarla considerablemente, por medio de la aplicación de un campo magnético vertical. A diferencia de otros trabajos de ascensión capilar de fluidos magnéticos [2], no se investiga el posicionamiento de una sola gota de fluido dentro de un capilar, sino la elevación de una columna cuando existe una reserva de fluido magnético a la entrada, a través del modelado matemático del fenómeno y la resolución numérica de las ecuaciones obtenidas.

# Índice general

<b>i. Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>iii. Resumen</b>	<b>III</b>
<b>ii. Motivación</b>	<b>V</b>
<b>iv. Símbolos y unidades</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Fluidos y electromagnetismo . . . . .	3
1.1.1. Electrohidrodinámica . . . . .	3
1.1.2. Magnetohidrodinámica . . . . .	4
1.1.3. Ferrohidrodinámica . . . . .	4
1.2. Tipos comunes de respuestas magnéticas . . . . .	5
1.2.1. Diamagnetismo . . . . .	6
1.2.2. Paramagnetismo . . . . .	6
1.2.3. Ferromagnetismo . . . . .	6
1.3. Otros tipos de respuestas magnéticas . . . . .	7
1.3.1. Antiferromagnetismo . . . . .	7
1.3.2. Ferrimagnetismo . . . . .	7
1.3.3. Superparamagnetismo . . . . .	8
1.4. Conceptos y unidades de magnetismo . . . . .	8
1.4.1. Definición de campo magnético . . . . .	8
1.4.2. Campo externo de una fuente bipolar . . . . .	11
1.4.3. Fuerza magnética y torque . . . . .	12
1.4.4. Energía de interacción entre dos dipolos . . . . .	14
1.4.5. Susceptibilidad magnética de un material . . . . .	15
1.4.6. Ecuaciones electrostáticas de Maxwell . . . . .	15
1.5. Conceptos de mecánica de fluidos . . . . .	18
1.5.1. Ecuaciones de conservación . . . . .	18
1.5.2. Ecuación de Young-Laplace . . . . .	18
1.5.3. Ángulo de contacto y capilaridad . . . . .	19

1.6.	Los ferrofluidos . . . . .	20
1.6.1.	Requisitos para la estabilidad . . . . .	20
1.6.2.	Preparación . . . . .	24
1.6.3.	Propiedades físicas . . . . .	24
1.6.4.	Tensor de esfuerzos magnéticos . . . . .	26
1.7.	Aplicaciones tecnológicas de los ferrofluidos . . . . .	27
1.7.1.	Tapones y empaques . . . . .	27
1.7.2.	Rodamientos y soportes . . . . .	28
1.7.3.	Amortiguadores . . . . .	29
1.7.4.	Transductores . . . . .	30
1.7.5.	Procesos de separación . . . . .	30
1.7.6.	Conversión de energía . . . . .	30
<b>2.</b>	<b>Modelo Teórico</b>	<b>31</b>
2.1.	Descripción del problema . . . . .	31
2.2.	Formulación matemática . . . . .	32
<b>3.</b>	<b>Resolución de la ecuación</b>	<b>37</b>
3.1.	Suposiciones iniciales . . . . .	37
3.2.	Descripción del algoritmo numérico . . . . .	38
3.2.1.	Método de Runge-Kutta . . . . .	39
3.2.2.	Método de Brent . . . . .	40
3.2.3.	Parámetros de entrada . . . . .	41
3.2.4.	Función de campo magnético . . . . .	41
3.2.5.	Intervalo de solución para $D$ . . . . .	42
3.2.6.	Paso de integración . . . . .	42
3.2.7.	Escalas adimensionales de longitud . . . . .	43
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>45</b>
4.1.	Fluido no magnético . . . . .	45
4.2.	Campo constante . . . . .	46
4.2.1.	Solución asintótica con $B_0$ pequeño . . . . .	46
4.2.2.	Solución numérica . . . . .	47
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajos a futuro</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>
	<b>A. Programas en Matlab</b>	<b>55</b>
	<b>B. Presentaciones en congresos</b>	<b>63</b>

# Símbolos y unidades

$p$  intensidad de polo magnético [ $A^2 \cdot m \cdot T^{-1}$ ]

$\rho_s$  densidad superficial de polos magnéticos [ $A^2 \cdot m^{-1} \cdot T^{-1}$ ]

$\mu_0$  permeabilidad magnética del vacío [ $4\pi \times 10^{-7} H \cdot m^{-1}$ ]

$\mu$  permeabilidad magnética de un material [ $H \cdot m^{-1}$ ]

$\mathbf{r}$  vector de posición [ $m$ ]

$\mathbf{H}$  vector campo magnético [ $H \cdot m^{-1}$ ]

$\mathbf{B}$  vector campo de inducción magnética [ $T$ ]

$\mathbf{M}$  vector magnetización [ $H \cdot m^{-1}$ ]

$\mathbf{m}$  momento dipolar [ $A^2 \cdot m^2 \cdot T^{-1}$ ]

$r, H, B, M$  magnitudes de los vectores  $\mathbf{r}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{M}$

$\chi$  susceptibilidad magnética (adimensional)

$\sigma$  tensor de esfuerzos [ $Pa$ ]

$\gamma$  tensión superficial [ $N \cdot m^{-1}$ ]

$\alpha$  ángulo de contacto [grados]

$\rho$  densidad [ $kg \cdot m^{-3}$ ]

$\eta$  viscosidad cinemática [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]

$P$  presión [Pa]

$\bar{\kappa}$  curvatura media de una superficie (adimensional)

$Bo$  número de Bond (adimensional)

$Bo_M$  número de Bond magnético (adimensional)

$k$  constante de Boltzmann ( $1.3806 \times 10^{-23} [J \cdot K^{-1}]$ )

# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis trata del modelado matemático de la altura de equilibrio y forma de un menisco de fluido ferromagnético entre dos placas planas y paralelas en respuesta a la influencia de un campo magnético vertical. Para poder llevar a cabo tal modelado es necesario combinar conceptos de mecánica de fluidos y electromagnetismo, los cuales son presentados en este capítulo.

### 1.1. Fluidos y electromagnetismo

La combinación de electromagnetismo con la mecánica de fluidos clásica es relativamente nueva dentro de la investigación en física. Sin embargo, ha adquirido mucha importancia desde su surgimiento debido a la gran variedad de posibles aplicaciones en áreas tan diversas como fusión nuclear controlada, ingeniería de reactores químicos, medicina, impresión de alta velocidad, aerodinámica, astrofísica, entre otras. Existen tres grandes divisiones en el estudio de las interacciones entre fluidos y campos eléctricos o magnéticos:

1. electrohidrodinámica (EHD)
2. magnetohidrodinámica (MHD)
3. ferrohídrodinámica (FHD)

#### 1.1.1. Electrohidrodinámica

La electrohidrodinámica puede ser considerada como un área de la mecánica de fluidos que se ocupa de los efectos de fuerzas eléctricas, o bien como una parte de la electrodinámica que estudia la influencia de medios en movimiento dentro de campos eléctricos [3, 4]. Aunque el término es relativamente nuevo, el área de estudio no lo es, pues se considera que es tan antigua como el estudio mismo de la electricidad. Sin embargo, fue en el siglo XX cuando se acuñó el término y se comenzaron a publicar trabajos presentando modelos analíticos basados en experimentos planeados cuidadosamente. Lo que diferencia a esta rama de las otras dos, es que la inducción magnética no es importante en los casos estudiados y por lo tanto las leyes empleadas son esencialmente las de la electrostática.

### 1.1.2. Magnetohidrodinámica

El campo de aplicación de la magnetohidrodinámica es la interacción entre campos electromagnéticos y fluidos conductores de electricidad no magnetizables. Históricamente, se dice que Faraday fue el primero en incursionar en el área al intentar medir la diferencia de potencial eléctrico existente entre las orillas del río Támesis en 1832. Sin embargo, dicha corriente eléctrica era demasiado pequeña para ser medida con los instrumentos disponibles en el momento. Fue hasta 1851 que William Hyde Wollaston consiguió medir el voltaje inducido por la interacción de las aguas del Támesis con el campo magnético terrestre. En 1937, Hartmann llevó a cabo experimentos con mercurio en presencia de campos magnéticos intensos.

El término MHD data de 1942 y fue acuñado por el físico sueco Hannes Alfvén, quien en 1970 ganó el premio Nobel de física por su “trabajo fundamental y descubrimientos con aplicaciones fructíferas en diferentes partes de la física de plasmas”. Una de las principales áreas de interés de esta disciplina es el flujo de gases ionizados a altas temperaturas en presencia de campos electromagnéticos, lo cual tiene aplicaciones en astrofísica, aerodinámica supersónica y física nuclear.

### 1.1.3. Ferrohidrodinámica

El término ferrohidrodinámica fue introducido en un artículo con ese nombre publicado en 1964 por J.L. Neuringer y R.E. Rosensweig en la revista *Physics of Fluids*. El área fue definida como el “tratamiento fenomenológico de la dinámica y termodinámica de fluidos magnéticos altamente polarizables en presencia de campos magnéticos no uniformes”. Los fluidos empleados en el trabajo habían sido sintetizados en laboratorios. La motivación inicial era la conversión de calor en trabajo prescindiendo de partes mecánicas. Conforme la capacidad de producir fluidos de este tipo aumentó, se descubrieron muchas otras aplicaciones para ellos, la mayoría de las cuales se basa en el posicionamiento y control remoto del fluido por medio de campos magnéticos.

La principal diferencia de la ferrohidrodinámica y la magnetohidrodinámica reside en que en MHD la fuerza de cuerpo que actúa sobre el fluido es la fuerza de Lorentz, la cual surge de la interacción de una corriente eléctrica con un campo magnético. En contraste, en FHD no es necesario que exista corriente eléctrica en el fluido; la fuerza de cuerpo incidente es debida a la polarización, la cual requiere que el material sea magnetizado en presencia de gradientes de campo magnético o discontinuidades. En el caso de la electrohidrodinámica, la fuerza se origina por la acción de un campo eléctrico sobre cargas libres. En FHD no suele haber cargas eléctricas libres. Sin embargo, existe una analogía entre EHD y FHD: el caso de fluidos eléctricamente polarizables bajo la influencia de campos eléctricos. La diferencia en este caso es la magnitud de la respuesta, que suele ser mucho mayor en FHD.

El mayor interés en la ferrohodinámica se debe a la enorme respuesta magnética del fluido. Como consecuencia de esto, es posible observar una serie de fenómenos impresionantes como la aparición de picos en la superficie libre una vez que se rebasa cierto nivel crítico de magnetización, la formación espontánea de patrones (que parecen laberintos) cuando el fluido es confinado en un espacio angosto, la generación de esfuerzos antisimétricos en campos rotatorios, relaciones extrañas de flotación tales como la autolevitación de un imán inmerso y la refrigeración por convección mejorada con ferrofluidos que poseen un momento magnético dependiente de la temperatura.

### **Fluidos Ferromagnéticos**

Existen varios tipos de fluidos que son de interés para la ferrohodinámica. El principal es el ferrofluido coloidal. Un coloide consiste de dos fases, una dispersa y una continua. La fase dispersa está compuesta de partículas o gotas pequeñas y se encuentra distribuida uniformemente en la fase continua. Dentro de los coloides es posible incluir a suspensiones que precipitan de manera muy lenta. Un verdadero ferrofluido, sin embargo, nunca se precipita, aunque es posible encontrar ligeros gradientes de concentración después de una exposición prolongada a un campo de fuerza (gravitacional o magnética). Las razones que hacen posible la estabilidad de una suspensión de este tipo se discuten más adelante.

Otros fluidos empleados con éxito son soluciones de sales paramagnéticas de tierras raras. Éstas tienen la desventaja de requerir el uso de campos relativamente intensos para generar reacciones apreciables. Ciertas sustancias puras como el oxígeno líquido se comportan como fluidos magnéticos; sin embargo, como éstas existen sólo a temperaturas criogénicas, aún no han visto aplicaciones factibles. Finalmente se tiene el caso de los materiales granulares, que han sido incorporados a la FHD. En este caso el sistema es seco pero presenta comportamiento de fluido.

Ya que el fluido tratado en esta tesis es del tipo coloidal, en adelante el término ferrofluido será utilizado para denotar exclusivamente un ferrofluido coloidal.

El interés de este trabajo es en un problema específico en el área de la FHD. Antes de describir el comportamiento y propiedades de los ferrofluidos es necesario hacer un breve repaso de los distintos tipos de comportamiento magnético y conceptos de magnetismo.

## **1.2. Tipos comunes de respuestas magnéticas**

Cuando un material es expuesto a un campo magnético, las fuerzas magnéticas creadas por el movimiento de sus electrones se verán afectadas. Las respuestas de los materiales pueden ser muy diferentes, dependiendo de factores como la estructura atómica y molecular y el campo magnético asociado a los átomos. Dicho campo tiene tres orígenes: el movimiento orbital de los electrones, el cambio en este movimiento debido a un campo magnético externo y el giro del electrón. En la mayoría de los átomos, los electrones se encuentran apareados. Los electrones en cada par giran en direcciones opuestas, cancelando sus campos magnéticos mutuamente y por lo tanto el átomo no presenta un momento magnético neto. Hay, sin embargo, materiales que tienen algunos elec-

trones desapareados, lo cual origina un pequeño campo magnético neto y les confiere una mayor susceptibilidad a reaccionar ante la presencia de un campo externo. La respuesta de la mayoría de los materiales se puede clasificar como diamagnética, paramagnética o ferromagnética. Adicionalmente, se puede hablar de otros tres tipos de comportamientos que son el ferrimagnetismo, antiferromagnetismo y superparamagnetismo.

### 1.2.1. Diamagnetismo

Los materiales diamagnéticos tienen una susceptibilidad muy pequeña y negativa hacia los campos magnéticos. Un material de este tipo es ligeramente repelido por un campo magnético, y el material no mantiene propiedad magnética alguna cuando el campo es removido. Este comportamiento se explica por el apareamiento de todos los electrones en el material, que resulta en ausencia de un campo magnético neto en cada átomo. La mayoría de los elementos de la tabla periódica son diamagnéticos, incluyendo al oro, plata y cobre.

### 1.2.2. Paramagnetismo

Los materiales paramagnéticos tienen susceptibilidad magnética pequeña y positiva. Son atraídos por un campo magnético pero no retienen las propiedades magnéticas cuando son retirados de la influencia de éste. La respuesta paramagnética se debe a la presencia de algunos electrones desapareados y a que la energía asociada al momento magnético es menor que la energía térmica, lo cual ocasiona que al quitar el campo magnético los momentos magnéticos de los átomos se desordenen de manera aleatoria. Algunos ejemplos de materiales son el magnesio, molibdeno, litio y tantalio.

### 1.2.3. Ferromagnetismo

Los sólidos ferromagnéticos tienen susceptibilidad magnética grande y positiva y pueden retener sus propiedades magnéticas cuando ya no están sometidos a un campo magnético. Los materiales ferromagnéticos están compuestos de dominios, en los cuales los momentos magnéticos de cada uno de sus átomos están orientados en la misma dirección, lo cual se debe a cierta cantidad de electrones desapareados. La división en dominios es necesaria para minimizar la energía, que sería muy grande si todo el material estuviese magnetizado en la misma dirección. Sin embargo los dominios nunca serán demasiado pequeños ya que también se requiere energía para crear las divisiones entre éstos. La estructura de paredes entre los dominios mostrada en la figura (1.1) es una simplificación; en realidad la transición en la dirección del momento atómico se da a través de aproximadamente 100 átomos.

La teoría ferromagnética fue comprendida sólo después de la fundamentación de la teoría cuántica, con la explicación de Werner Heisenberg en 1928. De acuerdo con esta mecánica el momento magnético atómico o spin es el principal contribuyente para el campo magnético molecular. Heisenberg demostró que cuando los momentos en átomos vecinos cambian de alineación paralela a alineación antiparalela existe también un cambio en la distribución de carga en dichos átomos, lo

cual altera la energía electrostática del sistema. En algunos casos, la alineación paralela es favorable energéticamente; y esto es conocido como ferromagnetismo.

El ferromagnetismo se presenta en el hierro, níquel, cobalto y muchas de sus aleaciones; también en algunas tierras raras como el gadolinio y en algunos intermetálicos como el oro-vanadio. Existe una temperatura para cada material, llamada temperatura de Curie, por encima de la cual se pierde la propiedad de ferromagnetismo y su comportamiento se torna paramagnético.

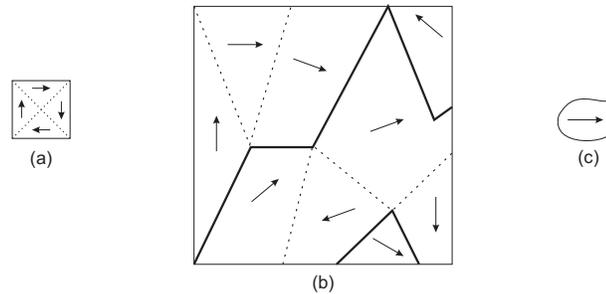


Figura 1.1: Estructuras de dominios ferromagnéticos para un monocristal (a), un policristal (b) y un subdominio (c).

## 1.3. Otros tipos de respuestas magnéticas

### 1.3.1. Antiferromagnetismo

En el antiferromagnetismo, los momentos magnéticos de los electrones se alinean en un patrón regular con giros en dirección opuesta a los vecinos. Generalmente los materiales antiferromagnéticos presentan esta propiedad a bajas temperaturas y para cada uno de ellos existe una temperatura de transición por encima de la cual se desordenan y se vuelven típicamente paramagnéticos. Esa temperatura es conocida como temperatura de Néel. El comportamiento antiferromagnético a bajas temperaturas normalmente se manifiesta con propiedades como las del diamagnetismo pero en ocasiones se puede presentar un comportamiento ferrimagnético. Los materiales antiferromagnéticos son relativamente poco comunes, estando entre ellos algunos superconductores y algunas moléculas orgánicas en circunstancias especiales. Ejemplos más cotidianos de estos materiales son el cromo, la aleación de hierro con manganeso y el óxido de níquel.

### 1.3.2. Ferrimagnetismo

En los materiales ferrimagnéticos, como en los antiferromagnéticos, los momentos magnéticos adyacentes se encuentran alineados y son opuestos; sin embargo, en este caso dichos momentos son de tamaños desiguales y por lo tanto aún existe magnetización espontánea. Estos materiales son similares a los ferromagnéticos pues pueden mantener sus propiedades magnéticas por debajo de la temperatura de Curie y se vuelven paramagnéticos por encima de ella, aunque también existe una temperatura, inferior a la de Curie, a la cual los momentos opuestos adyacentes son iguales,

resultando en un momento magnético neto de cero. A esto se le llama punto de compensación magnética. El ferrimagnetismo se observa en algunas ferritas compuestas de óxidos de hierro y otros elementos como aluminio, cobalto, níquel, manganeso y cinc; también en algunos granates minerales como el ytrio con hierro.

### 1.3.3. Superparamagnetismo

El superparamagnetismo es un fenómeno en el cual los materiales magnéticos exhiben un comportamiento similar al paramagnético aún a temperaturas por debajo de la de Curie o la de Néel. En este caso la energía necesaria para cambiar la dirección del momento magnético de una partícula es similar a la energía térmica presente.

Normalmente las fuerzas de acoplamiento en los materiales ferromagnéticos provocan que los momentos magnéticos de átomos adyacentes se alineen, resultando en campos magnéticos internos grandes, lo cual es la diferencia entre el comportamiento ferromagnético y paramagnético. A temperaturas mayores que la de Curie (o de Néel en el caso de los antiferromagnéticos) la energía térmica es mayor que la de magnetización, provocando la fluctuación aleatoria de los momentos magnéticos. Como ya no existe un orden magnético el campo interno neto es cero y el material presenta comportamiento paramagnético. Si el material no es homogéneo se puede observar una mezcla de grupos paramagnéticos y ferromagnéticos, lo cual representa un estado superparamagnético. Esto ocurre cuando el material está compuesto de dominios muy pequeños. Para estos materiales, aún cuando la temperatura sea menor a la de Curie o la de Néel (en cuyo caso la energía térmica no es suficiente para vencer las fuerzas de acoplamiento magnético entre los átomos) la energía térmica es suficiente para cambiar la dirección del vector magnetización del dominio entero. Por lo tanto el material se comporta macroscópicamente de forma paramagnética, pero en vez de que cada átomo sea independientemente influenciado por un campo magnético externo, el momento del dominio entero tiende a alinearse con dicho campo. La energía necesaria para cambiar la dirección de la magnetización, y por lo tanto la temperatura a la que el material se vuelve superparamagnético, dependen de las propiedades del material y son proporcionales al tamaño de los dominios magnéticos. En la figura (1.2) se presenta un esquema simple de los diferentes tipos de comportamiento magnético.

## 1.4. Conceptos y unidades de magnetismo

### 1.4.1. Definición de campo magnético

El concepto de *polos magnéticos* es útil para entender el comportamiento magnético, aunque no exista tal cosa como un polo magnético aislado en la naturaleza. En 1785, Charles Coulomb determinó experimentalmente que los polos iguales se repelen mientras que los opuestos se atraen con una fuerza proporcional al producto de la magnitud de los polos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Dos polos magnéticos puntuales de intensidad  $p$  y  $p'$ , separados en el vacío por una distancia  $r$  estarán sometidos a una fuerza de magnitud  $pp'/4\pi\mu_0r^2$ , medida en

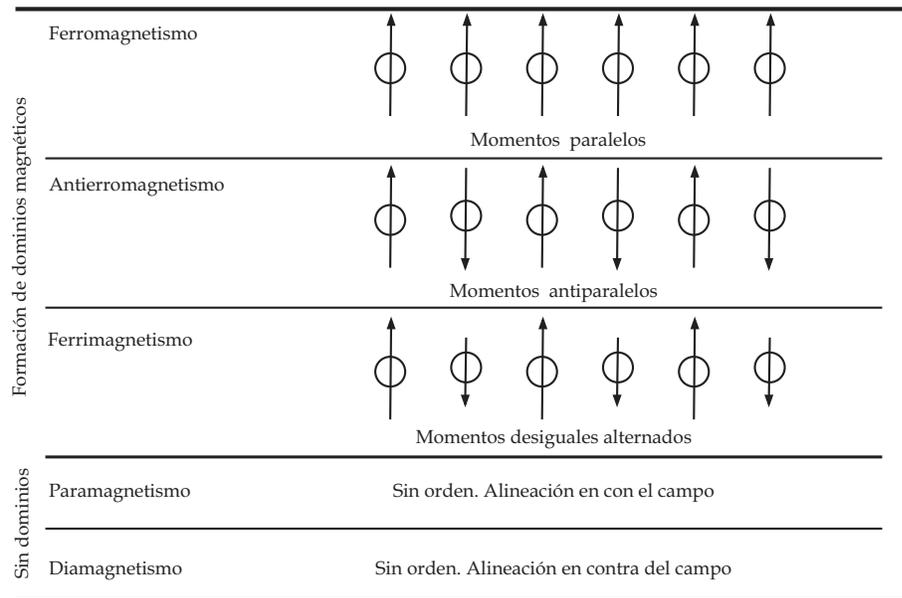


Figura 1.2: Diferentes tipos de comportamiento magnético.

newtons (N). La dirección de la fuerza es la línea recta que conecta los polos y el sentido depende del signo de cada polo. La fuerza que cualquier arreglo de polos ejerce sobre un polo puntual unitario en cualquier posición es igual en magnitud y dirección al *campo magnético*  $\mathbf{H}$  en ese punto. Por lo tanto, alrededor de un polo puntual  $p$  el campo magnético es, según la ley de Coulomb,

$$\mathbf{H} = \frac{p\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{p\mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3} \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de  $p$  a  $p'$  y  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{r}$ .

La constante de proporcionalidad  $1/4\pi\mu_0$  depende del sistema de unidades empleado, el cual, en este trabajo será en todo momento el Sistema Internacional (SI), a menos que se especifique lo contrario. La cantidad  $4\pi$  es arbitrariamente introducida al factor de proporcionalidad de la ley de Coulomb con el objetivo de cancelar un  $4\pi$  que aparece en las ecuaciones de Maxwell, que serán presentadas más adelante. El campo magnético  $\mathbf{H}$  tiene unidades de amperios por metro. El parámetro  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío, que tiene el valor  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ , donde H representa el henrio, que es la unidad del SI para la inductancia.

El concepto de campo magnético  $\mathbf{H}$  simplifica la descripción detallada de condiciones externas. Por ejemplo, en vez de decir que cierto experimento fue llevado a cabo a una distancia y orientación respecto a un imán construido bajo ciertas especificaciones, es posible decir que el dispositivo experimental fue ubicado en cierta posición dentro de un campo  $\mathbf{H}$ .

Un *campo de inducción*  $\mathbf{B}$  (en teslas) es definido de tal forma que en el vacío  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ . De la ecuación (1.1) y la definición de  $\mathbf{B}$ , el campo de inducción que rodea a un polo de intensidad  $p$  está dado por  $\mathbf{B} = p\hat{\mathbf{r}}/4\pi r^2$ . El campo  $\mathbf{B}$  puede ser representado como líneas de inducción. En un campo uniforme  $\mathbf{B}$  de intensidad unitaria, se dice que una línea, o Weber (Wb), cruza cada metro cuadrado de superficie perpendicular. Por lo tanto,  $\mathbf{B}$  tiene unidades de Webers por

metro cuadrado, conocidas como teslas. Otras unidades para  $\mu_0$  son tesla-metro por amperio, y las unidades de intensidad polar en este caso teslas por metro cuadrado. El número de líneas que cruzan una esfera que rodea un polo puntual  $p$  es dado por  $\phi = 4\pi r^2 B = p$ , de forma que de un polo unitario en SI emana solamente una línea de inducción magnética.

El vector *magnetización*  $\mathbf{M}$  denota el estado de polarización de la materia magnetizada. Si un polo magnético de intensidad uniforme  $p$  tiene un área  $a$  ( $m^2$ ) la intensidad de magnetización es  $M = p/a\mu_0 = \rho_s/\mu_0$ , donde  $\rho_s$  es la densidad superficial de polos magnéticos. Considere una barra de material ferromagnético cortada en dos (figura 1.3), con sus mitades separadas una distancia muy pequeña en dirección transversal a la de magnetización. En las caras que fueron separadas aparecen polos magnéticos. El campo en la ranura es la superposición del campo que emana por los polos norte a la izquierda y el campo debido a los polos sur de la derecha. Ya que cada polo norte emite una línea de inducción, por simetría  $p/2a$  líneas cruzan cada unidad de área de la ranura perpendicularmente debido a la presencia de polos en la cara norte, y  $p/2a$  líneas adicionales se encuentran presentes por la influencia de la cara sur, sumando un total de  $p/a = \mu_0 M$  líneas. El campo magnético  $\mathbf{H}$  contribuye otro  $\mu_0 M$  al campo de inducción en la ranura, de forma que la inducción total en el espacio que separa las barras es

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.2)$$

Si se vuelven a juntar las mitades  $\mathbf{B}$  permanece igual ya que las líneas del campo  $\mathbf{B}$  son curvas continuas que salen del extremo norte del material y entran por el extremo sur, y dentro de la barra el campo  $\mathbf{B}$  está dirigido de norte a sur. Como ya se mencionó, no existe tal cosa como un polo magnético aislado en la naturaleza. La barra del ejemplo y todos los materiales magnéticos se presentan en forma dipolar. En cualquier medio dipolar magnetizado el número de polos norte siempre será igual al número de polos sur.

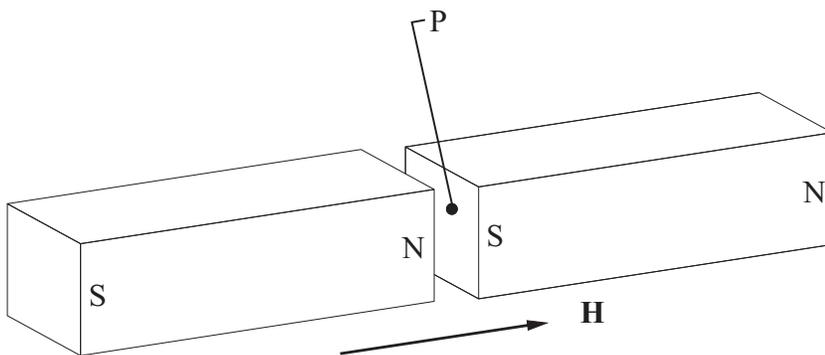


Figura 1.3: Barra ferromagnética cortada en dos

### 1.4.2. Campo externo de una fuente bipolar

Dos polos puntuales iguales en magnitud y opuestos en signo forman un dipolo magnético. Asimismo un pequeño volumen de material que tenga una magnetización uniforme y significativa formará un dipolo por medio de la aparición de polos superficiales de intensidad  $\pm\rho_s$  en los extremos del mismo. Considere el volumen de la figura (1.4), cuya longitud y orientación están especificadas por el vector  $\mathbf{d}$ . El campo magnético en un punto  $P$  puede ser encontrado por medio de la aplicación de la ley de Coulomb y suponiendo la superposición de los campos. El resultado es:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s a_d}{4\pi\mu_0} \left( -\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{d} + \mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{d} + \mathbf{r}$ . Aunque esta relación es válida para cualquier separación  $d$ , lo que se quiere es una buena aproximación del campo cuando la separación  $d$  es pequeña comparada con  $r$ .

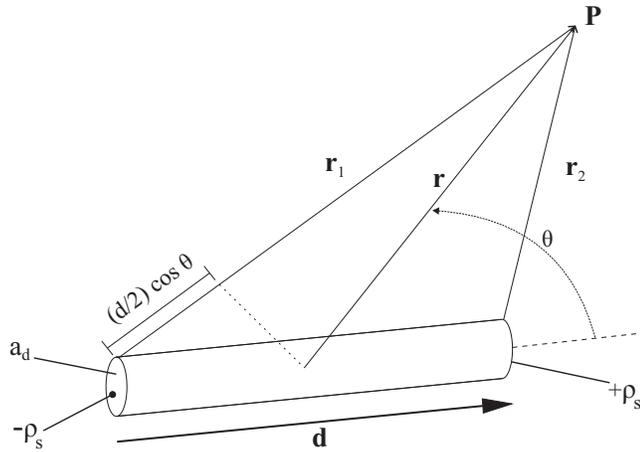


Figura 1.4: Campo magnético en el punto P debido a un dipolo

Cuando  $d \ll r$  podemos escribir

$$r_1 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta, \quad r_2 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta$$

Por el teorema del binomio,

$$r_{1o2}^{-3} \approx \left( r \pm \frac{d}{2} \cos \theta \right)^{-3} = r^{-3} \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)^{-3} \approx r^{-3} \left( 1 \mp \frac{3d}{2r} \cos \theta \right)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \frac{\rho_s a_d}{4\pi\mu_0 r^3} \left[ \left( -\frac{1}{2}\mathbf{d} - \mathbf{r} \right) \left( 1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta \right) + \left( -\frac{1}{2}\mathbf{d} + \mathbf{r} \right) \left( 1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta \right) \right] \quad (1.4)$$

Cancelando términos comunes tenemos,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \frac{\rho_s a_d d}{4\pi\mu_0 r^3} \left( -\hat{\mathbf{d}} + 3\hat{\mathbf{r}} \cos\theta \right) \quad (1.5)$$

donde  $\hat{\mathbf{d}}$  es el vector unitario  $\mathbf{d}/d$ . Sin embargo,  $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \cos\theta$ ,  $\rho_s = \mu_0 M$  y  $V = a_d d$ , así que el resultado anterior se puede escribir como

$$\frac{\mathbf{H}(\mathbf{r})}{M} \approx \frac{V}{4\pi r^3} [-\hat{\mathbf{d}} + 3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] \quad (1.6)$$

Por lo tanto el campo magnético de un dipolo puntual decae como  $r^{-3}$ , siendo de un rango menor al  $r^{-2}$  de la ley de Coulomb.

### 1.4.3. Fuerza magnética y torque

La descripción de la fuerza magnética que experimenta un cuerpo magnetizado será necesaria para desarrollar posteriormente el tensor que caracteriza el estado de esfuerzos de un fluido magnético. Consideremos un pequeño volumen cilíndrico de materia polarizada magnéticamente (figura 1.5) cuyo eje geométrico  $\mathbf{d}$  se encuentra alineado con el vector de magnetización  $\mathbf{M}$ . Se aplica un campo  $\mathbf{H}_0$  y polos con densidad  $\rho_s = \mu_0 \mathbf{M}$  aparecen en igual número e intensidad en los extremos, de área  $a_d$ . Un volumen  $\delta V$  del elemento es  $a_d d$ . El campo  $\mathbf{H}_0$  puede ser considerado como la fuerza en un punto unitario; por lo tanto la fuerza a la que está sujeto el elemento volumétrico es

$$-\mathbf{H}_0 \rho_s a_d + (\mathbf{H}_0 + \delta \mathbf{H}_0) \rho_s a_d = \delta \mathbf{H}_0 \rho_s a_d \quad (1.7)$$

donde  $\delta \mathbf{H}_0$  es el cambio de  $\mathbf{H}_0$  en la dirección  $\mathbf{d}$ . Por lo tanto  $\delta \mathbf{H}_0 = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 = (d/M)(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0$ , y la densidad de fuerza de Kelvin está dada por

$$\text{densidad de fuerza} = \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 \quad (1.8)$$

De la definición de momento dipolar  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \rho_s a_d \mathbf{d} = \mu_0 \mathbf{M} a_d d \quad (1.9)$$

podemos ver que  $\mu_0 \mathbf{M}$  representa el vector momento por unidad de volumen, donde  $a_d d$  es el volumen del elemento.

El torque  $\delta \mathbf{T}$  que actúa sobre un volumen pequeño de material polarizado magnéticamente puede ser obtenido para un campo magnético espacialmente uniforme, es decir, para el cual  $\delta \mathbf{H}_0 = 0$ . Basta sumar los momentos con respecto a un origen  $O$ , el cual tiene un vector de posición  $\mathbf{r}_1$  respecto a la cara sur del volumen y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$  respecto a la cara norte. De esta forma

$$\delta \mathbf{T} = \rho_s a_d (-\mathbf{r}_1 \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{H}_0) = \rho_s a_d \mathbf{d} \times \mathbf{H}_0$$

y como  $\rho_s a_d \mathbf{d} = \mu_0 \mathbf{M} \delta V$ , el torque por unidad de volumen es

$$\text{densidad de torque} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_0 \quad (1.10)$$

Esta expresión es independiente de la elección del origen.

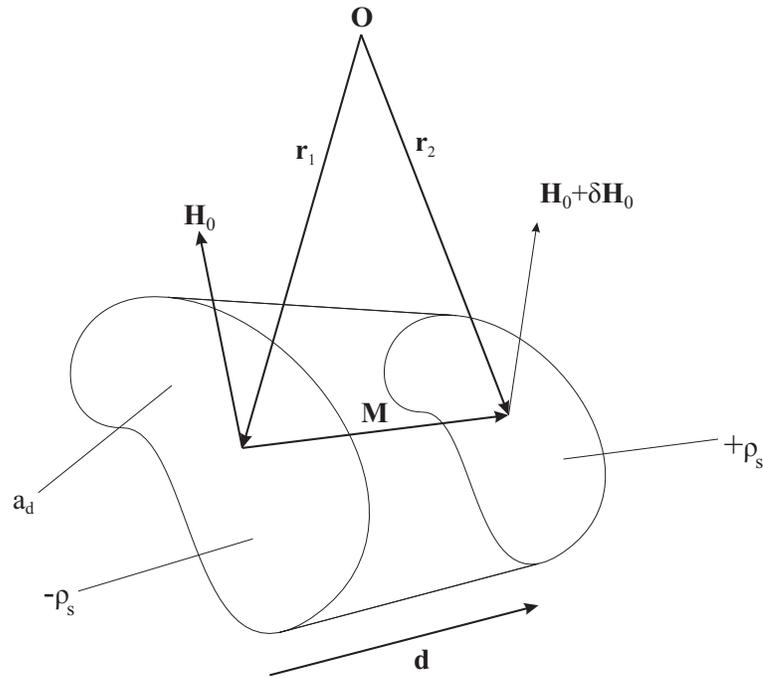


Figura 1.5: Fuerza y torque magnéticos en un elemento de materia polarizada.

Para materiales magnéticos “suaves”  $M$  es paralelo a  $H_0$ . La magnetización de saturación de un material puramente ferromagnético es la magnetización de los dominios del material,  $M_d$ . Las curvas de magnetización de materiales “suaves” y “duros” son muy diferentes, como se muestra en la figura (1.6). El comportamiento mostrado en la figura (1.6b) se conoce como histéresis.  $M_r$  es la retentividad o remanencia y  $H_c$  es la coercitividad del material. Los imanes permanentes están hechos de materiales duros y por lo tanto retienen cierto momento magnético cuando ya no se les está aplicando un campo.

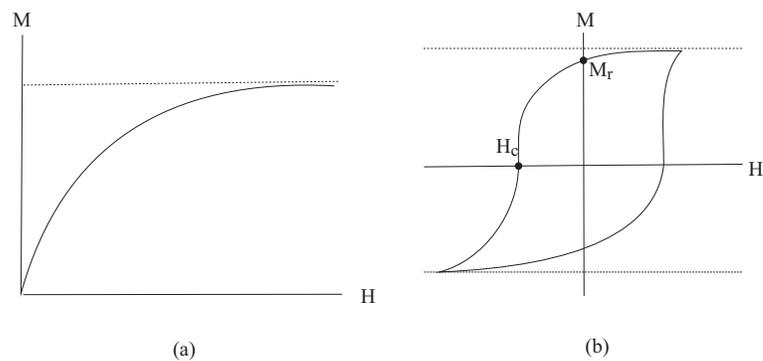


Figura 1.6: Curvas de magnetización para materiales suaves (a) y duros (b).

#### 1.4.4. Energía de interacción entre dos dipolos

De la ecuación (1.8) se tiene que la fuerza por unidad de volumen que actúa en un volumen de material dipolar en un campo magnético externo  $\mathbf{H}_0$  es  $\mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0$ , o de la definición de  $\mathbf{m}$ , la fuerza total es

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0 \quad (1.11)$$

Por medio de una identidad vectorial  $(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0$  puede ser reescrita como

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0 = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0) - \mathbf{H}_0 \cdot \nabla\mathbf{m} - \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{H}_0) - \mathbf{H}_0 \times (\nabla \times \mathbf{m}) \quad (1.12)$$

Si  $\mathbf{m}$  es constante esto se simplifica a

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0 = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0) - \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{H}_0) \quad (1.13)$$

Cuando no hay flujo de corriente eléctrica  $\nabla \times \mathbf{H}_0$  es cero. En ese caso, para un dipolo con momento  $\mathbf{m}$ , la fuerza  $\mathbf{F}$  puede ser derivada de una energía  $E_h$  por medio de

$$\mathbf{F} = -\nabla E_h \quad (1.14)$$

donde

$$E_h = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0) \quad (1.15)$$

La ecuación anterior describe la energía de un dipolo puntual de momento  $\mathbf{m}$  como función de su orientación y posición en el campo  $\mathbf{H}_0$ . Ahora se puede considerar la energía de interacción de dos dipolos como se muestra en la figura (1.7). Si el polo (1) es considerado como la fuente del campo magnético sentido por (2), entonces

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{M_1 V_1}{4\pi r^3} [-\hat{\mathbf{d}}_1 + 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] \quad (1.16)$$

Sustituyendo esta ecuación y la relación  $\mathbf{m}_2 = \mu_0 M_2 V_2 \hat{\mathbf{d}}_2$  en (1.15) se obtiene la expresión para la energía de interacción entre dos dipolos puntuales

$$E_{dd} = \frac{\mu_0(M_1 V_1)(M_2 V_2)}{4\pi r^3} [\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2 - 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (1.17)$$

donde  $E_{dd}$  es una forma particular de  $E_h$ , la cual puede ser escrita como

$$E_{dd} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3}{r^5} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) \right] \quad (1.18)$$

Esta expresión será útil para evaluar la estabilidad coloidal de una suspensión de partículas magnéticas en un fluido.

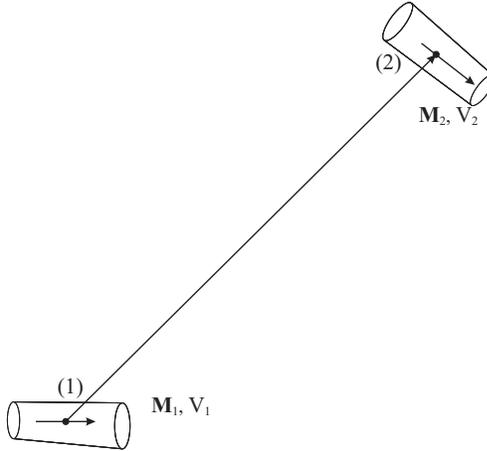


Figura 1.7: Interacción de dos dipolos puntuales con vectores  $\mathbf{M}$  orientados arbitrariamente.

#### 1.4.5. Susceptibilidad magnética de un material

Los vectores magnetización  $\mathbf{M}$  y campo magnético  $\mathbf{H}$  se relacionan por medio de la expresión

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (1.19)$$

donde  $\chi$  es un número adimensional conocido como la *susceptibilidad magnética* de un material, el cual indica qué tanto se polarizará un material en presencia de un campo magnético externo.

La susceptibilidad magnética se relaciona con la permeabilidad magnética de la siguiente forma

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (1.20)$$

La relación entre  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  en la ecuación (1.2) se puede entonces reescribir como

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (1.21)$$

La susceptibilidad magnética no es necesariamente escalar ni lineal. En el caso de materiales magnéticamente anisotrópicos dicha propiedad debe ser expresada por medio de una cantidad tensorial, cuyas componentes pueden ser variables y no lineales. Sin embargo, en este trabajo, se utilizará el modelo lineal y escalar.

#### 1.4.6. Ecuaciones electrostáticas de Maxwell

Como fue mencionado anteriormente, una de las características importantes de la ferrohidro-dinámica es que no suele existir corriente eléctrica en los fluidos. De esta forma el tratamiento electromagnético es un poco más simple al no tener que tomar en cuenta las interacciones entre corrientes eléctricas y campos magnéticos. Así entonces, las ecuaciones a ser empleadas serán las ecuaciones de Maxwell en el límite magnetostático.

La expresión de la ley de Coulomb para el magnetismo fue presentada en la ecuación (1.1). Aplicando esta ecuación al caso mostrado en la figura (1.8), sabiendo que  $\mathbf{H}$  puede ser considerado como la densidad de líneas de campo, el flujo de líneas a través de un elemento diferencial de superficie  $d\mathbf{S}$  es

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{p}{4\pi\mu_0} d\Omega \quad (1.22)$$

donde  $d\Omega = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}/r^3$  es el ángulo sólido en estereorradianes abarcado por  $d\mathbf{S}$ . El flujo de campo a través de una superficie cerrada es entonces

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{4\pi} \frac{p}{4\pi\mu_0} d\Omega = \frac{p}{\mu_0} \quad (1.23)$$

ya que el ángulo sólido de una esfera completa es  $4\pi$  estereorradianes.

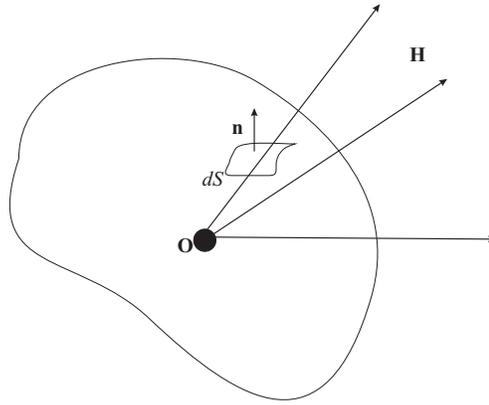


Figura 1.8: Superficie cerrada imaginaria  $S$  con un polo puntual en el origen.

Para un número  $N$  de polos dentro de  $S$ , donde el  $i$ -ésimo polo contribuye en  $\mathbf{H}_i$  al campo total, se tiene que

$$\sum_{i=1}^N \oint_S \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{\mu_0} \quad (1.24)$$

e introduciendo la sumatoria en la integral

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{\mu_0} \quad (1.25)$$

de donde se puede ver que el campo magnético  $\mathbf{H}$  es la suma de las contribuciones de cada polo  $p_i$ , cada uno de los cuales puede tomar valores positivos o negativos. Este resultado puede ser generalizado para una distribución continua de polos caracterizada por una densidad volumétrica de polos, definida como  $\rho_V = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$ . El número de polos en un elemento  $dV$  es  $\rho_V dV$ , así que

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho/\mu_0 dV \quad (1.26)$$

donde  $V$  es el volumen contenido por la superficie  $S$ .

Aplicando el teorema de la divergencia,  $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ , al lado izquierdo de la ecuación (1.26)

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_V / \mu_0 \quad (1.27)$$

Sustituyendo la definición de  $\rho_V$  en esta ecuación se obtiene que  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ , e introduciendo esto en la definición  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  se ve que el campo de inducción cumple con la propiedad

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.28)$$

Este resultado es una de las ecuaciones de Maxwell, llamada *ley de Gauss* para el régimen magnetostático. De la forma de esta ecuación es posible inferir que el vector  $\mathbf{B}$  es análogo al vector velocidad de un fluido incompresible. Por consiguiente el campo de inducción puede ser visualizado como un flujo incompresible: la cantidad que fluye hacia dentro de un volumen arbitrario es exactamente igual a la cantidad que fluye hacia el exterior de éste; nada se acumula dentro. Además, las líneas del campo  $\mathbf{B}$  no terminan, éstas deben formar curvas cerradas o extenderse infinitamente lejos.

Para encontrar el otro resultado que será útil en el tratamiento matemático posterior, es necesario expresar la ley de Coulomb, ahora para el campo en una posición  $\mathbf{r}$  debido a un conjunto de polos  $p_i$  localizados en posiciones  $\mathbf{r}_i$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (1.29)$$

Ahora se quiere encontrar el rotacional de  $\mathbf{H}$ , para lo cual habrá de evaluarse una suma de términos del siguiente tipo. Usando la identidad vectorial  $\nabla \times (c\mathbf{A}) = c\nabla \times \mathbf{A} + \nabla c \times \mathbf{A}$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \nabla \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)] \quad (1.30)$$

Por cálculo directo

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0 \quad y \quad \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^5}$$

y como el producto entre vectores paralelos es cero, se obtiene que

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (1.31)$$

Ésta es la segunda ecuación de Maxwell que será utilizada, la *ley de Ampère*, para el caso magnetostático.

## 1.5. Conceptos de mecánica de fluidos

### 1.5.1. Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones que serán utilizadas para el modelado del comportamiento del fluido son las ecuaciones de conservación de momento lineal en forma diferencial, las cuales, en su forma más general son

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (1.32)$$

donde  $D/Dt$  representa una derivada material,  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidad y  $\sigma$  el tensor de esfuerzos. Dicho tensor requiere de consideraciones especiales en el caso de un fluido ferromagnético, ya que en este caso las fuerzas de campo presentes no serán únicamente las debidas a la gravedad. El desarrollo de tal tensor está descrito posteriormente.

### 1.5.2. Ecuación de Young-Laplace

#### Tensión superficial

Las moléculas de un líquido se encuentran sujetas a fuerzas de atracción que aparecen por la presencia de moléculas vecinas del mismo tipo. El balance de dichas fuerzas para una molécula en el interior es estadísticamente nulo. Sin embargo, las moléculas de la superficie libre tienen un número menor de vecinos, lo que ocasiona que éstas sientan una fuerza neta que las ‘jala’ hacia el interior del fluido. De acuerdo con el principio de menor energía, la superficie libre de un líquido siempre tenderá a adoptar la forma que le permita tener la menor superficie. En el caso de una gota libre, esta forma será esférica. La magnitud de la fuerza que controla la forma de la superficie libre es conocida como tensión superficial, la cual tiene unidades de energía por unidad de área o fuerza por unidad de longitud ( $J/m^2$  o  $N/m$ ). Mientras más fuertes sean los enlaces entre las moléculas del líquido, mayor será dicha fuerza. La tensión superficial es una propiedad medible que tiene valores diferentes para cada interfase de fluidos (líquido-líquido o líquido-gas)

#### Presión en la curvatura de una superficie

La ecuación de Young-Laplace relaciona la forma de la interfase entre dos fluidos con la diferencia de presión a lo largo de dicha superficie. La ecuación es

$$\Delta P = 2\bar{\kappa}\gamma \quad (1.33)$$

donde  $\gamma$  es el valor de la tensión superficial y  $\bar{\kappa}$  es la curvatura media de la superficie, cuya definición recordamos del cálculo con coordenadas rectangulares como

$$\bar{\kappa} = \frac{y''}{2(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (1.34)$$

Aquí  $y'$  y  $y''$  representan la primera y segunda derivadas de  $y$  con respecto a  $x$  respectivamente.

Al igual que en las ecuaciones de conservación, en este caso será necesario adaptar la ecuación para tomar en cuenta la acción de la magnetización del ferrofluido.

### 1.5.3. Ángulo de contacto y capilaridad

Es común que exista un tercer componente en la interfase entre dos fluidos. Sea que estos se encuentren en un contenedor, o sobre una superficie, habrá un sólido presente e interactuando con ellos. El concepto empírico e intuitivo de líquidos que *mojan* o *no mojan* está relacionado con el ángulo que se forma en una interfase sólido-líquido-gas. Una vez más, este valor es dependiente de los fluidos y el sólido involucrados. Este parámetro sirve como condición de frontera para la integración de la ecuación de Young-Laplace y será utilizado posteriormente en el desarrollo del modelo teórico. La figura (1.9) muestra el punto donde se mide el ángulo de contacto  $\alpha$ . Para una configuración cuando el líquido *moja*, el ángulo de contacto es menor o igual que  $90^\circ$ ; para el caso en que el fluido *no moja*, el ángulo es mayor que  $90^\circ$ .

Una buena descripción de los factores termodinámicos que determinan el ángulo de contacto puede ser encontrada en [5].

Cuando un líquido entra en contacto con una pared sólida vertical o inclinada respecto a la horizontal, la superficie del líquido puede presentar una elevación o depresión de forma que se establezca el contacto con el ángulo característico para el fluido y el material involucrados. La manifestación de tal comportamiento es apreciable cuando el fluido se encuentra confinado en tubos delgados o en espacios angostos. A este fenómeno se le conoce como *capilaridad*.

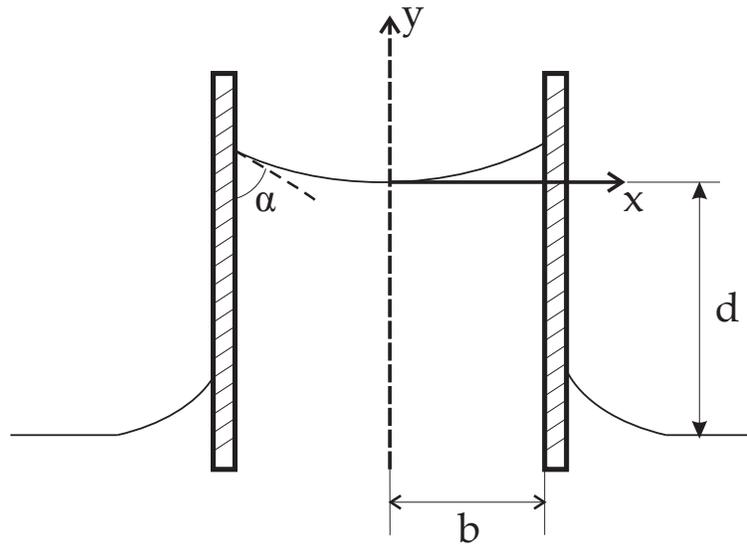


Figura 1.9: Menisco formado entre un líquido y un gas en un capilar.

Considere el arreglo mostrado en la figura (1.9), donde un capilar de radio  $b$  es inmerso en un líquido con una superficie libre. La interfase líquido-gas formará un menisco de sección axial aproximadamente uniforme. Es conveniente, en este momento, definir un parámetro adimensional que relaciona la presión hidrostática con la presión capilar: el *número de Bond* ( $Bo$ )

$$Bo = \frac{\Delta\rho g b}{\gamma/b} = \frac{b^2}{l_c^2} \quad (1.35)$$

donde  $\Delta\rho = \rho_{liq} - \rho_{gas}$  y  $l_c^2 = \gamma/\Delta\rho g$ ; por lo que este número también puede ser considerado como

la razón entre las dos escalas características de longitud. De la figura, se hace evidente que cuando  $b \ll l_c$  el radio de curvatura de la superficie es aproximadamente uniforme e igual a  $b/\cos\theta$ . La tensión en esta superficie de curvatura pronunciada produce un salto de presión considerable en la interfase, lo cual también es evidente, pues si  $b \ll l_c$ ,  $Bo \ll 1$ , lo cual implica que la presión capilar es mayor que la hidrostática. Esto ocasionará un levantamiento de la columna de líquido, cuya altura de equilibrio  $d$  está sujeta a la condición

$$\rho g d = \delta p = \frac{2\gamma \cos\theta}{b}$$

i.e.

$$d = \frac{2l_c^2 \cos\theta}{b} \quad (1.36)$$

donde se puede ver que la altura de la columna es inversamente proporcional al radio del capilar [6].

## 1.6. Los ferrofluidos

Como ya se mencionó, un ferrofluido es una suspensión coloidal estable. En este caso la fase dispersa está compuesta por partículas magnéticas y la fase continua es un líquido no magnético. Las propiedades de un ferrofluido son profundamente influenciadas por el movimiento browniano de las partículas y el hecho de que cada partícula se encuentra permanentemente magnetizada. Además de las partículas y el líquido, el tercer ingrediente, esencial para el ferrofluido, es un agente polimérico de cadena larga que recubre por adsorción cada partícula magnética individualmente, de forma que impida la aglomeración de la fase dispersa. La estabilidad de la suspensión es crucial para que el fluido sea apto para las aplicaciones comerciales así como para estudios científicos. Estos fluidos no existen en la naturaleza y su síntesis en laboratorios fue posible poco tiempo antes de la publicación por Neuringer y Rosensweig de 1964 [4].

### 1.6.1. Requisitos para la estabilidad

Es necesario considerar ciertos mecanismos físicos sencillos involucrados con la estabilidad de un ferrofluido. Es posible deducir criterios de estabilidad basados en el análisis dimensional de las energías involucradas

- Energía térmica =  $kT$
- Energía magnética =  $\mu_0 M H V$
- Energía gravitacional =  $\Delta\rho V g L$

donde  $k = 1.38 \times 10^{-23} N \cdot m \cdot K^{-1}$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta en kelvines,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $V$  el volumen para una partícula esférica de diámetro  $d$  y  $L$  es la altura en el campo gravitacional. Las razones entre estos términos son cantidades adimensionales que proveen información sobre la posibilidad de estabilidad de los ferrofluidos.

### Estabilidad en un gradiente de campo magnético

Considere la estabilidad contra la segregación de las partículas debida a la presencia de un campo magnético externo. Las partículas serán atraídas hacia las regiones de mayor intensidad del campo magnético, mientras que la agitación térmica contrarresta la fuerza ejercida por el campo y provee un movimiento que estadísticamente permite a la partícula “conocer” todas las regiones del fluido. La energía magnética  $\mu_0 M H V$  representa la cantidad de trabajo reversible necesario para mover una partícula magnetizada de un punto en el fluido donde está presente el campo  $H_0$  a otro punto en el fluido donde no existe campo magnético:

$$W = - \int_0^{H_0} \left( \mu_0 M \frac{dH}{ds} V \right) ds \approx \mu_0 M H V \quad (1.37)$$

Siempre que una parte del fluido se encuentre fuera de la influencia del campo magnético, la estabilidad en este caso se verá favorecida si la siguiente relación se cumple:

$$\frac{\text{energía térmica}}{\text{energía magnética}} = \frac{kT}{\mu_0 M H V} \geq 1 \quad (1.38)$$

Reacomodando y sustituyendo para el volumen de una esfera, se obtiene una expresión para el tamaño máximo de las partículas:

$$d \leq (6kT/\pi\mu_0 M H)^{1/3} \quad (1.39)$$

Como ejemplo, se puede considerar un contenedor con fluido magnético con partículas de magnetita ( $Fe_3O_4$ ) sujeto al gradiente magnético de un imán permanente común:

$$H = 8 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$M = 4.46 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$T = 298 \text{ K}$$

El tamaño de las partículas, de acuerdo con la relación anterior debe ser  $d < 8.1 \text{ nm}$ . El tamaño de las partículas en coloides estables utilizados actualmente llega hasta los  $10 \text{ nm}$ . De los cálculos se puede inferir que este tamaño se encuentra en el límite superior para no comprometer la estabilidad del coloide.

Otro fenómeno físico limita la concentración de partículas en las regiones de mayor intensidad de campo magnético: los efectos estéricos (repulsión entre las partículas) constituyen un límite superior en el número de partículas concentradas [1]. Aunque se llegan a establecer gradientes de concentración en circunstancias como éstas, cuando el campo es retirado, las partículas de un fluido propiamente estabilizado se redistribuyen espontáneamente en todo el fluido en cierto período de tiempo.

### Estabilidad contra la precipitación debida a la gravedad

La fuerza de gravedad empuja a cada una de las partículas hacia abajo constantemente, mientras que la agitación térmica, una vez más, intenta mitigar este efecto y mantener a las partículas dispersas en la matriz de fluido. Esto es similar al caso anterior donde la fuerza magnética proporcionaba una fuerza unidireccional en cualquier punto dado. La influencia de la gravedad respecto a la del magnetismo es descrita por la razón:

$$\frac{\text{energía gravitacional}}{\text{energía magnética}} = \frac{\Delta\rho g L}{\mu_0 M H V} \quad (1.40)$$

Para el mismo ejemplo anterior, valores típicos de los parámetros son  $L = 0.05 \text{ m}$  y  $\Delta\rho = \rho_{\text{sólido}} - \rho_{\text{líquido}} = 4300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  con  $g = 9.78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . La razón de la ecuación (1.40) es 0.047; por lo tanto la gravedad es un factor menos importante que el magnetismo para la estabilidad del ferrofluido.

En los dos puntos anteriores se consideró la estabilidad contra la segregación o formación de gradientes amplios en la concentración de las partículas. Esto se hizo suponiendo que las partículas se encuentran dispersas, es decir, separadas de cualquier otra partícula. El siguiente análisis es sobre la complicada tarea de lograr el estado de dispersión de las partículas.

### Estabilidad contra la aglomeración magnética

Un ferrofluido suele contener alrededor de  $10^{23}$  partículas por metro cúbico, por lo que la distancia media entre las partículas no es muy grande. Si las partículas se tocan y se adhieren, la aglomeración sucedería muy rápido. Cada partícula se encuentra magnetizada permanentemente, por lo que la energía para separar dos partículas es máxima cuando se encuentran alineadas. Dicha energía, dada por la ecuación (1.18), con  $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = m^2$ ,  $(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) = m^2 r^2$  y  $m = \mu_0 M \pi d^3 / 6$  es la energía del par dipolo-dipolo.

$$E_{dd} = \frac{\pi \mu_0 M^2 d^3}{9 (l + 2)^3} \quad (1.41)$$

donde  $l = 2s/d$ , siendo  $s$  la distancia entre las superficies. Por lo tanto, cuando las partículas están en contacto, la energía dipolo-dipolo es

$$E_{dd} = \frac{1}{12} \mu_0 M^2 V \quad (1.42)$$

Una vez más, la agitación térmica será capaz de evitar la aglomeración de manera eficaz mientras mayor sea la relación

$$\frac{\text{energía térmica}}{\text{energía dipolo-dipolo}} = \frac{12kT}{\mu_0 M^2 V} \quad (1.43)$$

El tamaño máximo de las partículas en este caso es

$$d \leq (72kT/\pi\mu_0 M^2)^{1/3} \quad (1.44)$$

Para el caso analizado de las partículas de magnetita a temperatura ambiente se requiere  $d < 7.8 \text{ nm}$ . Esto muestra que las partículas de tamaño hasta  $10 \text{ nm}$  también se encuentran en el límite superior de tamaño para no aglomerarse por la influencia de la atracción magnética.

Los resultados de los cálculos del tamaño de partícula necesario para evitar la aglomeración debida al campo magnético y a la energía de magnetización establecen que se requiere un tamaño de partícula ligeramente menor al que se obtiene en la fabricación de ferrofluidos (10 nm). Existe un factor más que compromete la estabilidad de los ferrofluidos: la atracción de van der Waals. La solución para que las partículas no se precipiten debido a este último factor es también la responsable de que el fluido se mantenga estable a pesar de que las partículas sean un poco mayores de lo que deberían ser.

### Protección contra las fuerzas de atracción de van der Waals

Las fuerzas de van der Waals surgen espontáneamente entre partículas sin carga eléctrica debido a las fluctuaciones en las fuerzas dipolo-dipolo eléctrico que están siempre presentes. Dicha fuerza representa la interacción cuántico-mecánica debida a las fluctuaciones en los orbitales electrónicos de una partícula que inducen oscilaciones dipolares en una vecina. No se entrará a los detalles de la teoría cuántica necesarios para calcular la energía de fluctuación, simplemente se dirá que tal energía, de acuerdo a los cálculos de Hamaker para esferas iguales, es proporcional a  $l^{-1}$  para esferas próximas y a  $l^{-6}$  en el caso de esferas distantes. De esto se debe notar que la dependencia de  $l^{-1}$  implica que es necesaria una energía infinita para separar un par de partículas que han entrado en contacto. Así pues, la evitación del contacto es indispensable si se quiere tener un coloide estable. Afortunadamente, existe un mecanismo por medio del cual es posible evitar que el acercamiento entre las partículas llegue hasta el punto en que la atracción de van der Waals domine. Tal mecanismo es la repulsión estérica, debida a la presencia de moléculas poliméricas de cadena larga adsorbidas a la superficie de cada partícula. Los grupos polares de este recubrimiento se asocian con la superficie de las partículas química o físicamente y “disfrazan” a la superficie para que se parezca al fluido. Por lo tanto, la “cola” (parte externa del recubrimiento) se escoge con propiedades similares a las del líquido que funcionará como fase continua o matriz de la suspensión. De forma intuitiva se puede apreciar que dos partículas que se aproximan mucho tenderán a comprimir la capa de recubrimiento alrededor de cada una, de esta manera, dicho recubrimiento actúa como parachoques elástico. En la figura (1.10) se muestra una representación de una partícula que se suspende de manera estable en un ferrofluido.

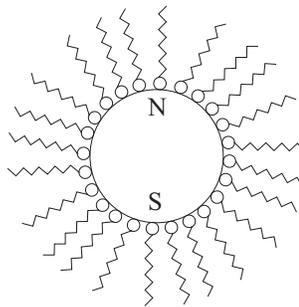


Figura 1.10: Representación de una partícula recubierta.

### 1.6.2. Preparación

Existen dos tipos de métodos para producir un coloide magnético: reducción de tamaño y precipitación, es decir, moler partículas grandes hasta volverlas muy pequeñas o producir partículas pequeñas desde el principio por medio de reacciones químicas. Es impresionante que por medio de simple molienda sea posible obtener partículas de  $10\text{ nm}$  de diámetro. El método para lograrlo fue desarrollado en 1965 por S. Papell; sin embargo, los materiales básicos han estado disponibles desde la antigüedad. El “secreto” es moler mojando las partículas con un surfactante por tiempos largos ( $1000\text{ h}$ ). En la figura se muestran esquemas básicos de los procesos de preparación físicos y químicos. Descripciones más detalladas dichos métodos pueden ser encontradas en [4, 7, 8].

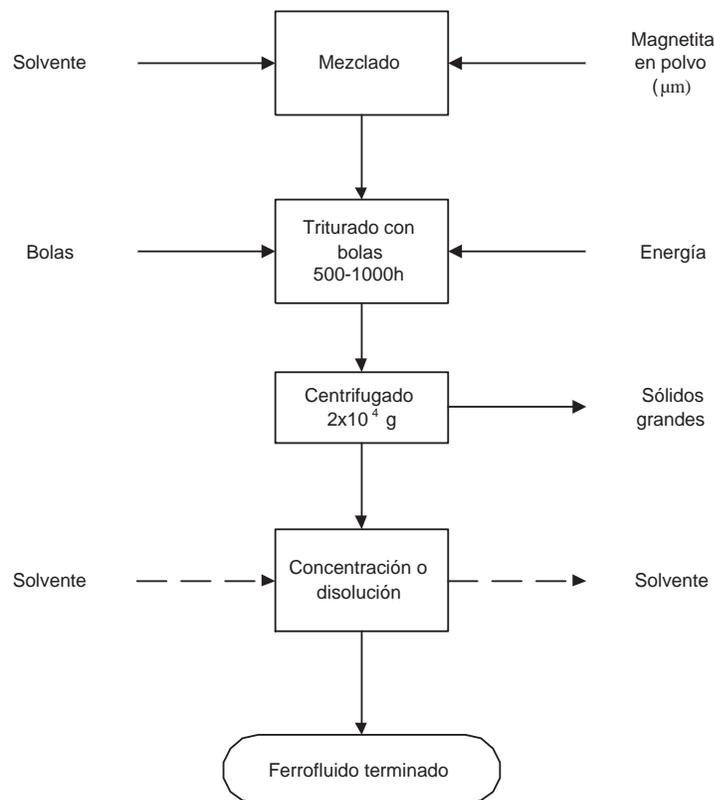


Figura 1.11: Preparación de ferrofuido por molienda de partículas.

### 1.6.3. Propiedades físicas

Las propiedades de los ferrofuidos son, como es de esperarse, una combinación de las propiedades de las partículas y el fluido. Además de las propiedades que son de interés comúnmente en mecánica de fluidos como la *densidad*  $\rho$ , *viscosidad*  $\eta$  y las ya mencionadas tensión superficial y ángulo de contacto, surgen dos propiedades importantes que son de interés en este trabajo: la susceptibilidad magnética y la magnetización de saturación del fluido.

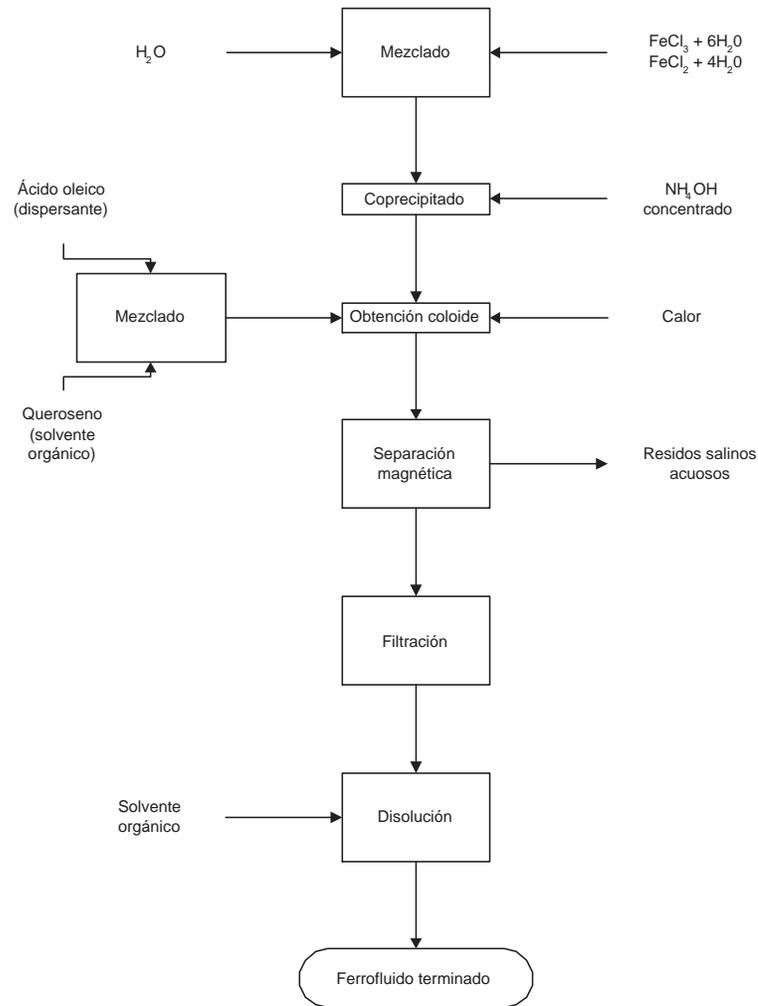


Figura 1.12: Preparación de ferrofluido por método químico.

### Susceptibilidad magnética

Contrariamente a lo sugerido por el nombre, la respuesta magnética de un ferrofluido no es ferromagnética. No obstante la respuesta de cada partícula sí lo sea, el fluido en conjunto no mantiene una magnetización cuando no se encuentra influenciado por un campo magnético. Esto es debido al movimiento browniano, que reubica aleatoriamente la posición de las partículas. De esta forma, aunque el momento magnético mantenga su orientación con respecto a la partícula, el momento magnético del fluido se anula. La respuesta magnética macroscópica de los ferrofluidos es, por lo tanto, superparamagnética, caracterizada por una susceptibilidad magnética  $\chi$  positiva y alta.  $\chi$  es función de la temperatura y puede también ser función no lineal de la magnetización. El caso considerado en este trabajo es isotérmico y con una magnetización por debajo del límite de la saturación, para lo cual es válido considerar una relación lineal  $\chi = M/H$  como fue definida anteriormente.

### Magnetización de saturación

En presencia de campos magnéticos de intensidad moderada, las partículas ferromagnéticas de la suspensión tenderán a alinear sus momentos magnéticos. Sin embargo, en este punto la energía asociada con la agitación térmica es aún equiparable a la de magnetización, por lo que el movimiento browniano consigue reorientar algunas de las partículas. Al aumentar la intensidad del campo se alcanza un punto donde los momentos magnéticos de todas las partículas se encuentran alineados y la agitación térmica tiene un efecto menor. La magnetización del fluido en este punto es lo que se conoce como *magnetización de saturación*. La fundamentación desde la mecánica estadística de esta propiedad es descrita por Rosensweig en [4].

Un fenómeno muy interesante se presenta cuando la magnetización alcanza el valor de saturación en un campo magnético aplicado de manera perpendicular a la superficie del fluido: la aparición de la *inestabilidad de campo normal*. Dicha inestabilidad consiste en la aparición de picos en la superficie del fluido. Existen varios trabajos al respecto de la aparición de las inestabilidades superficiales en los ferrofluidos y los patrones que éstas pueden formar [9, 10, 11, 12].

#### 1.6.4. Tensor de esfuerzos magnéticos

La formulación de un tensor que describa apropiadamente la influencia de la magnetización en el estado de esfuerzos de un ferrofluido ha sido objeto de varios trabajos científicos, los cuales se encuentran enumerados en las referencias. La formulación más completa, que toma en cuenta la posible compresibilidad no lineal del ferrofluido causada por la magnetización es la de Rosensweig [4], que tiene la siguiente forma

$$\sigma_m = - \left[ \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M v}{\partial v} \right)_{H,T} dH + \frac{\mu_0}{2} H^2 \right] \mathbf{I} + \mathbf{HB} \quad (1.45)$$

El primer término, que consta de dos partes, representa la presión magnética. La primera parte describe la compresión no lineal, para el caso de un posible gas ferromagnético, mientras que la segunda proviene del tensor de Maxwell que describe la propagación de esfuerzos debida a la presencia de un campo magnético, independientemente de que el material sea magnetizable o no.

El término de la extrema derecha representa el esfuerzo que aparece debido a la magnetización del material.

El desarrollo termodinámico completo del tensor de esfuerzos magnéticos puede ser consultado en [4].

Ya que el ferrofluido coloidal es incompresible, el tensor de esfuerzos empleado aquí será

$$\sigma_m = -P_m \mathbf{I} + \mathbf{HB} \quad (1.46)$$

donde  $P_m = 1/2\mu_0 H^2$ .

## 1.7. Aplicaciones tecnológicas de los ferrofluidos

Desde que la fabricación de ferrofluidos fue tecnológicamente viable, se comenzaron a desarrollar aplicaciones para estos nuevos fluidos de propiedades únicas. Se presentan aquí descripciones breves de algunas aplicaciones, probadas y en desarrollo. Los principios de funcionamiento completos de cada aplicación son descritos en [1, 7].

### 1.7.1. Tapones y empaques

El sellado de regiones que se encuentran a diferentes presiones es la más desarrollada de las aplicaciones de los ferrofluidos, disponible comercialmente desde la década de los setenta. Por medio de un soporte estacionario magnetizado, es posible sostener un anillo de ferrofluido de manera que selle el espacio entre un eje rotatorio y dicho soporte. Esto puede ser aplicado tanto a ejes hechos de material magnetizable como a ejes de materiales que no lo son. En la figura (1.13a), se muestra la configuración para un eje no magnético. Se establece un campo magnético, generado por un imán permanente, entre las puntas de la pieza polar, orientado en dirección tangencial al eje. El campo mantiene al fluido posicionado entre las puntas de la pieza polar. La figura (1.13b) muestra el arreglo para un eje magnéticamente permeable. El eje y el soporte son usados como parte de un circuito magnético de baja reluctancia. Al igual que en el caso anterior, se emplea un imán anular montado en una pieza polar estacionaria, estructurada de tal manera que el campo magnético se concentre en un pequeño volumen, donde es introducido el ferrofluido. Esta configuración puede soportar diferencias de presión de hasta  $10^5 Pa$ , lo cual puede ser aumentado por medio de la adición de pasos (Figura 1.14)

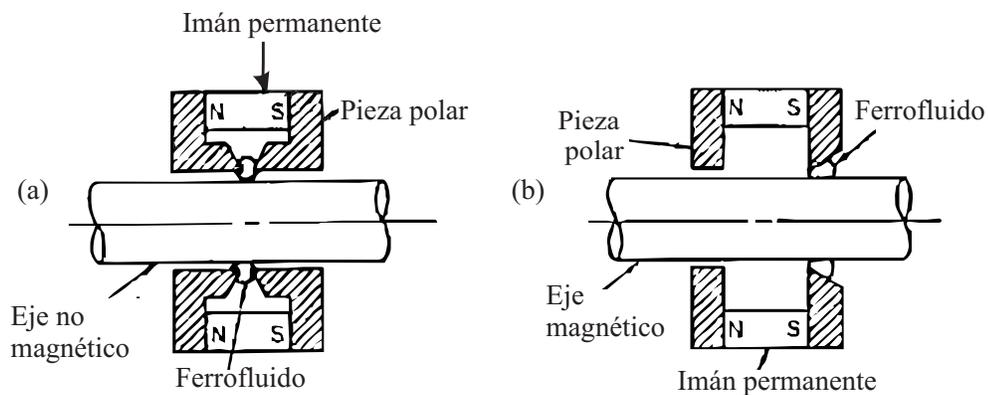


Figura 1.13: Sellos de ferrofluido para ejes rotatorios con eje no magnético (a) y eje magnético (b) [1].

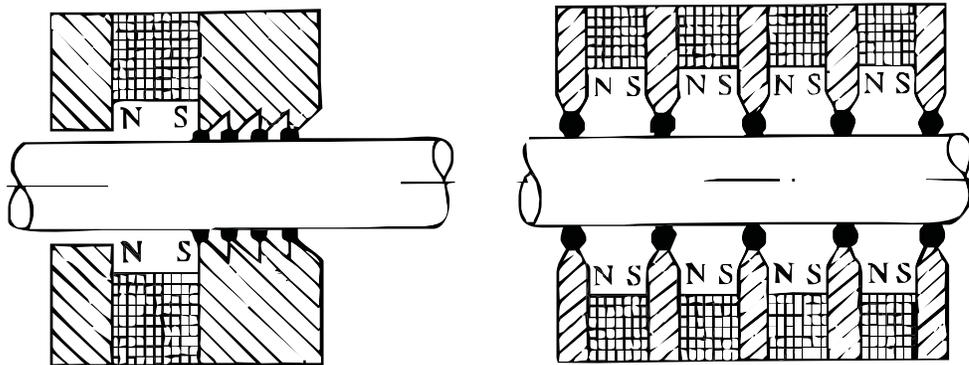


Figura 1.14: Dos tipos de sellos de pasos múltiples [7].

### 1.7.2. Rodamientos y soportes

Una propiedad interesante de los ferrofluidos es su capacidad de “levitar” objetos en su interior por medio de la flotación controlada con campos magnéticos. En un contenedor lleno de fluido magnético como el de la figura (1.15a), la presión es uniforme y constante en ausencia de campos gravitacionales y magnéticos. Al aproximar dos fuentes de campo magnético opuestas (Figura 1.15b), el campo es nulo en el centro e incrementará su intensidad hacia afuera de este punto. El fluido es atraído hacia las orillas del contenedor, pero por la propiedad de incompresibilidad del fluido y el hecho de que éste llena el contenedor por completo, tal atracción se traduce a un aumento de presión en las regiones alejadas del centro. Al introducir un cuerpo no magnético en el centro de contenedor, las fuerzas de presión sobre su superficie se encuentran distribuidas simétricamente y el objeto alcanza un estado de equilibrio estable (Figura 1.15c). Al ser desplazado de la posición de equilibrio, las fuerzas de presión quedan desbalanceadas y el cuerpo experimenta una fuerza restauradora que lo devuelve a su posición de equilibrio (Figura 1.15d). Este fenómeno se denomina levitación pasiva de un cuerpo no magnético. De manera similar, un imán permanente encuentra un punto de equilibrio dentro de un contenedor lleno de ferrofluido, en lo que se conoce como autolevitación de un imán en un fluido magnético.

Estos principios se han utilizado para desarrollar rodamientos compuestos de una camisa no magnética, imanes anulares con magnetización alternada y ferrofluido en el espacio donde normalmente estarían los balines. El soporte entre los componentes es completamente pasivo; no requiere insumo de energía, mientras que la fricción es mucho menor que en un rodamiento normal, disminuyendo de manera importante el desgaste y eliminando el ruido.

Otra aplicación con las mismas bases es la de soporte para las bobinas de sonido en bocinas de alta fidelidad, reemplazando a las partes mecánicas empleadas usualmente (Figura 1.16). Tal soporte tiene la ventaja adicional de transferir el calor de las bobinas a la estructura circundante, aumentando la capacidad disipativa de la bocina y por lo tanto la calidad del sonido. Esta aplicación fue implementada comercialmente a final de los setenta.

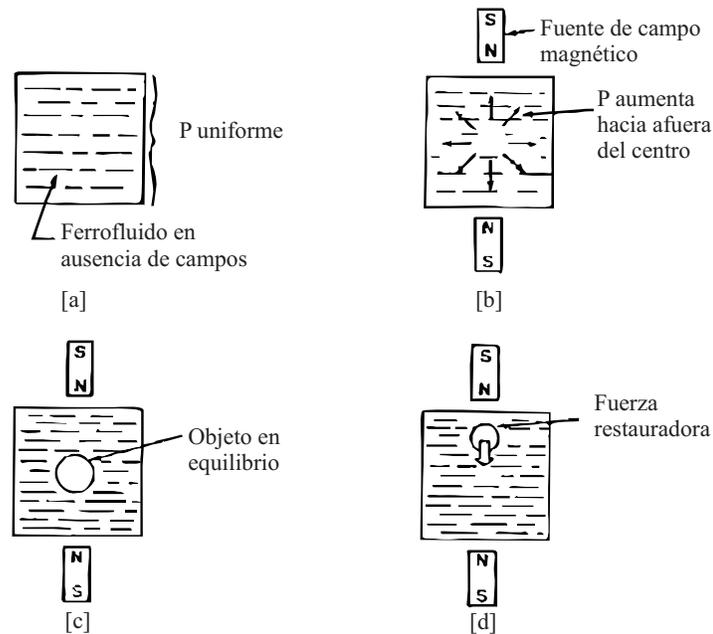


Figura 1.15: Levitación pasiva de un objeto no magnético en un ferrofluido [1].

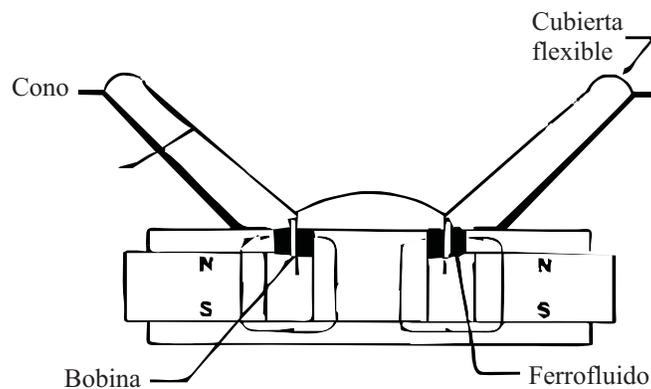


Figura 1.16: Ferrofluido como soporte de bobinas en bocinas de alta fidelidad [1].

### 1.7.3. Amortiguadores

Es posible emplear las propiedades viscosas de los fluidos magnéticos con el fin de disipar la energía cinética de movimientos indeseables a energía térmica, tanto en instrumentos delicados como en maquinaria pesada. Por ejemplo, una capa de ferrofluido entre el estator y el rotor de un motor a pasos amortigua el movimiento de éste en el arranque y frenada, reduciendo el tiempo de asentamiento del aparato. La NASA también ha desarrollado amortiguadores de este tipo para instrumentos satelitales. El mismo principio de amortiguación se emplea en trenes de levitación magnética.

#### 1.7.4. Transductores

La propiedad de magnetización lineal de los ferrofluidos bajo la influencia de campos magnéticos moderados ha sido usada como modo de transducción. Un transductor es un dispositivo que convierte una entrada de cierta naturaleza física en una salida de otro tipo. El movimiento de pistón de un ferrofluido inducido por un gradiente de campo magnético se puede aprovechar en transductores acústicos, generadores de presión y amperímetros. Aprovechando también las propiedades de levitación, se han fabricado acelerómetros y detectores de nivel.

#### 1.7.5. Procesos de separación

Otra utilidad de las propiedades de levitación, es su capacidad para separar sólidos. En un campo gravitacional, los sólidos pesados se hunden en líquidos menos densos que ellos; sin embargo, dentro de un ferrofluido y con un campo magnético aplicado se puede lograr que los cuerpos con diferentes densidades floten a alturas distintas, haciendo posible su separación. Un dispositivo diseñado con este objetivo se muestra en la figura (Figura 1.17).

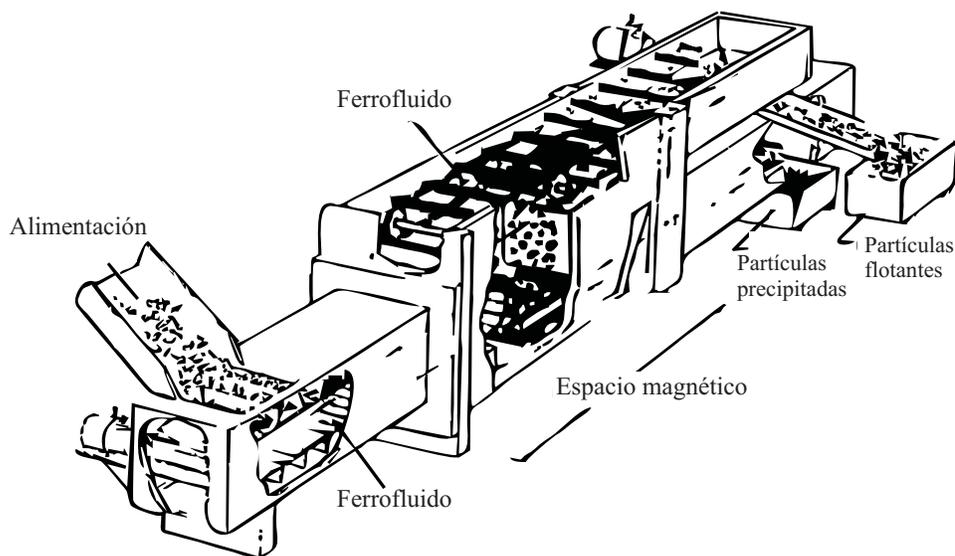


Figura 1.17: Sistema de separación por precipitación-flotación con fluidos magnéticos [1].

#### 1.7.6. Conversión de energía

La conversión de energía térmica a energía cinética es posible aprovechando la dependencia de la susceptibilidad magnética con la temperatura, aprovechando esto en sistemas de enfriamiento convectivo sin la necesidad de una bomba que mueva al fluido. Un ferrofluido a baja temperatura (alta susceptibilidad magnética) se adhiere a una fuente de campo magnético a alta temperatura. Al transferirse calor al fluido, su susceptibilidad magnética disminuye y éste se retira de la fuente, dando lugar a que fluido frío ocupe su lugar, estableciéndose así un proceso de convección termomagnética.

## Capítulo 2

# Modelo Teórico

### 2.1. Descripción del problema

El sistema considerado consiste de un recipiente lleno de ferrofluido, el cual es suficientemente grande para que la influencia de las paredes en la zona de estudio sea nula. Se insertan dos placas planas paralelas verticales, compuestas de material no magnetizable e infinitas en la dirección  $z$ , como se muestra en la figura (2.1). Por acción de la capilaridad se formará un menisco entre la superficie del ferrofluido y el aire. El menisco tiene una altura de equilibrio  $d$  y su forma está dada por  $y = f(x)$ , la cual presenta una curvatura media  $\bar{\kappa}$  y tiene un ángulo de contacto con la pared  $\alpha$ . Al hacer incidir un campo magnético vertical en este sistema, se espera que la altura y forma de la superficie entre el ferrofluido y el aire se vean afectadas, lo cual se modelará matemáticamente.

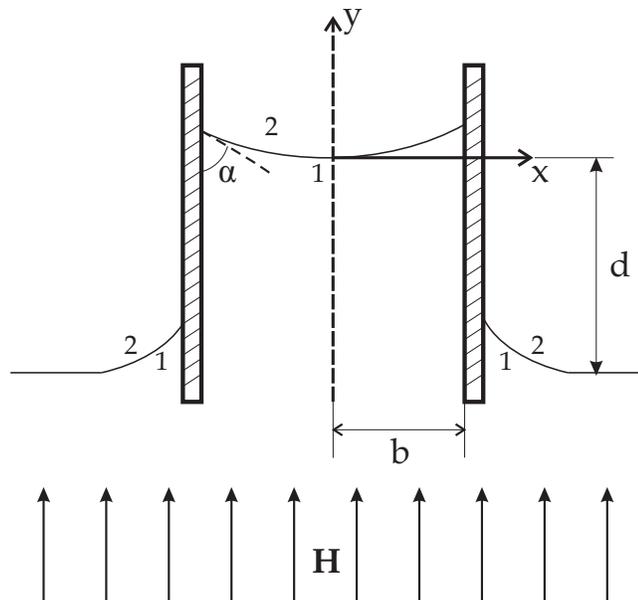


Figura 2.1: Fluido ferromagnético entre dos placas paralelas.

## 2.2. Formulación matemática

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones electromagnéticas a ser empleadas son las leyes de Maxwell para el regimen magnetostático.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2.2)$$

y la relación entre el campo magnético y el de inducción

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (2.3)$$

Por la parte de la hidrodinámica tenemos a la ecuación de conservación de momento lineal.

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.4)$$

El tensor de esfuerzos para un ferrofluido, que se obtiene juntando el tensor de esfuerzos magnéticos (Ecuación 1.46) con el tensor para un fluido no magnético newtoniano, está dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -(P_h + P_m)\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \mathbf{HB} \quad (2.5)$$

donde  $P_h$  es la presión hidrodinámica,  $P_m$  la presión magnética,  $\mathbf{I}$  el tensor identidad,  $\eta$  la viscosidad,  $\mathbf{D}$  el tensor de rapidez de deformación y  $\mathbf{HB}$  el esfuerzo debido a la magnetización.

Ya que se está evaluando el estado de equilibrio del fluido y no el proceso dinámico de elevación de la columna, el campo de velocidad  $\mathbf{u}$  es cero, lo cual nos permite cancelar el término de la izquierda en la ecuación de conservación de momento y el esfuerzo viscoso en el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ . Así, combinando las ecuaciones (2.4) y (2.5) tenemos

$$\nabla P_h = -\nabla P_m + \nabla \cdot (\mathbf{HB}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.6)$$

Con las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3) y un poco de álgebra vectorial podemos manipular la divergencia del esfuerzo debido a la magnetización

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{HB}) &= \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &= \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} \\ &= \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mu_0 \left[ \frac{1}{2} \nabla H^2 - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right] \\ &= \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \nabla P_m \end{aligned}$$

lo cual, al ser sustituido en la ecuación (2.6) resulta en

$$\nabla P_h = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \rho \mathbf{g} \quad (2.7)$$

Ahora se introduce la hipótesis de superparamagnetismo lineal del ferrofluido, es decir  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , de esta forma

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H} &= \chi(\mathbf{H} \cdot \nabla\mathbf{H}) \\ &= \chi \left[ \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) + \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right] \\ &= \chi \nabla \left( \frac{H^2}{2} \right)\end{aligned}$$

y entonces la expresión (2.7) se reduce a

$$\nabla P_h = \frac{\mu_0 \chi}{2} \nabla H^2 + \rho \mathbf{g} \quad (2.8)$$

donde se reconoce que el primer término del lado derecho corresponde al gradiente de presión magnética multiplicada por la susceptibilidad magnética del material, juntándose así la influencia del campo magnético con la magnetización del material en un solo término.

El paso siguiente es llevar a cabo el producto escalar de la ecuación anterior por  $d\mathbf{x}$ , con el fin de eliminar los gradientes y poder integrar la ecuación

$$\begin{aligned}\nabla P_h \cdot d\mathbf{x} &= \frac{\mu_0 \chi}{2} \nabla H^2 \cdot d\mathbf{x} + \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \\ dP_h &= \frac{\mu_0 \chi}{2} dH^2 + \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}\end{aligned} \quad (2.9)$$

Sabiendo que  $dH^2 = 2HdH$ , se integra la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned}\int dP_h &= \int \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} + \int \mu_0 \chi H dH \\ P_h &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{\chi \mu_0}{2} H^2 + A\end{aligned} \quad (2.10)$$

Esta es la ecuación fundamental de la hidrostática para un fluido magnético con susceptibilidad magnética constante, donde  $A$  es una constante de integración.

En la figura (2.1) las regiones marcadas con (1) representan el fluido ferromagnético y (2) es el aire. Aplicando esta ecuación al caso de estos fluidos inmiscibles se obtiene:

Fluido 1

$$P_1 = \rho_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{\chi_1 \mu_0}{2} H_1^2 + A_1$$

Fluido 2

$$P_2 = \rho_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + A_2$$

De esta forma, el salto de presión entre los dos fluidos esta dado por

$$P_2 - P_1 = (\rho_2 - \rho_1) \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} - \frac{\chi_1 \mu_0}{2} H_1^2 + A_2 - A_1 \quad (2.11)$$

Para poder determinar el valor de la constante ( $A_2 - A_1$ ) es necesario establecer condiciones de contorno. De la figura, por hidrostática, se sabe que en el punto  $y = -d$  la presión es igual en los dos fluidos. Para la condición de contorno del campo magnético, se supondrá que en ese mismo punto el campo magnético es constante. Adicionalmente, ya que el sistema es vertical, la gravedad actúa únicamente en la dirección  $y$ . Entonces, las condiciones de contorno en el punto  $y = -d$  son:

$$P_1 = P_2 = P_0 \quad (2.12)$$

$$H_1(x, -d) = H_0 = cte \quad (2.13)$$

$$\mathbf{g}(x, y) = (0, g) \quad (2.14)$$

Aplicando dichas condiciones a la ecuación (2.11) se obtiene

$$A_2 - A_1 = (\rho_1 - \rho_2)gd + \frac{\mu_0\chi_1}{2}H_0^2$$

y finalmente se tiene que

$$P_2 - P_1 = (\rho_1 - \rho_2)g(y + d) + \frac{\chi_1\mu_0}{2}[H_0^2 - H_1^2(x, y)] \quad (2.15)$$

La ecuación de Young-Laplace (Ecuación 1.33) describe el salto de presión en una interfase entre dos fluidos no magnéticos inmiscibles, debido a la tensión interfacial que se presenta entre ellos. Cuando uno de los fluidos es magnetizable, se presenta una fuerza adicional en la superficie debida a la componente normal del vector magnetización. Entonces, la ecuación de Young-Laplace cuando uno de los fluidos es magnético es [4]

$$P_2 - P_1 = 2\bar{\kappa}\gamma + \frac{\mu_0}{2}M_n^2 \quad (2.16)$$

donde  $M_n$  es la componente normal a la superficie del vector  $\mathbf{M}$ .

Recordando que por la hipótesis de superparamagnetismo lineal  $M_n = \chi_1 H_{1n}$  donde  $H_{1n} = \mathbf{H}_1 \cdot \hat{n}$ . Igualando las ecuaciones (2.15) y (2.16)

$$2\bar{\kappa}\gamma + \frac{\chi_1^2\mu_0}{2}H_{1n}^2 = (\rho_1 - \rho_2)g(y + d) + \frac{\chi_1\mu_0}{2}[H_0^2 - H_1^2(x, y)]$$

reordenando los términos y sustituyendo  $\rho_1 - \rho_2$  por  $\Delta\rho$  se obtiene

$$2\bar{\kappa}\gamma = \Delta\rho g(y + d) + \frac{\mu_0}{2}\{\chi_1[H_0^2 - H_1^2(x, y)] - \chi_1^2 H_{1n}^2\} \quad (2.17)$$

Finalmente se sustituye la definición de la curvatura media de una función (Ecuación 1.34)

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\Delta\rho g(y + d)}{\gamma} + \frac{\mu_0}{2\gamma}\{\chi_1[H_0^2 - H_1^2(x, y)] - \chi_1^2 H_{1n}^2\} \quad (2.18)$$

y se encuentra la ecuación  $y = f(x)$  que describe la forma de la superficie del ferrofluido.

Es conveniente presentar la ecuación en forma adimensional. Para tal propósito, las variables de longitud se dividen entre la mitad de la distancia de separación entre las placas ( $b$ ) y los términos de campo magnético entre la magnitud  $H_0$ . Así,  $Y = y/b$ ,  $X = x/b$ ,  $D = d/b$ ,  $\tilde{H}_1 = H_1/H_0$  y  $\tilde{H}_{1n} = H_{1n}/H_0$ . Entonces, la ecuación (2.18) adimensionalizada es

$$\frac{Y''}{(1+Y'^2)^{3/2}} = \frac{\Delta\rho gb}{\gamma/b}(Y+D) - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H_0^2}{\gamma/b} [\chi_1(1 - \tilde{H}_1^2(X,Y)) - \chi_1^2 \tilde{H}_{1n}^2(X,Y)] \quad (2.19)$$

Los términos han sido acomodados de manera que queden explícitos los dos parámetros adimensionales de importancia en la ecuación: el número de Bond ( $Bo$ ) y el número de Bond magnético ( $Bo^M$ ), los cuales son:

$$Bo = \frac{\Delta\rho gb}{\gamma/b} \quad (2.20)$$

$$Bo^M = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H_0^2}{\gamma/b} \quad (2.21)$$

El parámetro  $Bo$  es la relación entre la presión hidrostática y la presión capilar mientras que  $Bo^M$  representa la razón de presión magnética sobre el capilar.

La ecuación en su forma adimensional final es

$$Y'' = (1+Y'^2)^{3/2} \left\{ Bo(Y+D) + Bo^M [\chi_1(1 - \tilde{H}_1^2) - \chi_1^2 \tilde{H}_{1n}^2] \right\} \quad (2.22)$$

Uno de los casos interesantes a ser estudiados en la solución de la ecuación es el de números de Bond altos ( $Bo > 1$ ), cuando la influencia de la capilaridad no es suficiente para elevar la columna de fluido, con el fin de determinar la elevación debida a la presión magnética ( $Bo^M > 1$ ).

### Condiciones de contorno

La primera condición de contorno está dada por el punto donde se ubicó el sistema de referencia, en la base del menisco:

$$Y(0) = 0$$

posteriormente, se hace la suposición de que la forma de la superficie es simétrica respecto al eje  $y$ , de esta forma, la integración de la ecuación se hace en el intervalo  $(0, b)$ . La simetría implica que el punto  $(0,0)$  será un mínimo o un máximo de la curva y por lo tanto

$$Y'(0) = 0$$

y para la tercera condición se considera que el ángulo de contacto ( $\alpha$ ) es un parámetro medible, dado como una propiedad del sistema. Así, en el punto de contacto con la pared ( $Y = 1$ )

$$Y'(1) = \cot \alpha \quad (2.23)$$

## Capítulo 3

# Resolución de la ecuación

La ecuación (2.22) es una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden y altamente no lineal, con condiciones en el origen y en la frontera. Una ecuación de tales características no puede ser resuelta analíticamente. Si bien se hará un análisis de casos especiales para los cuales sí es posible hallar una solución asintótica, la ecuación en su forma general requiere del uso de métodos numéricos para su resolución. En este caso, dada la presencia de condiciones de frontera en dos puntos distintos, se optó por un método de estimación-corrección, que emplea dos métodos numéricos sencillos acoplados para resolver el problema. Los métodos utilizados fueron el Runge-Kutta de cuarto orden ligado con una variación del método de Brent.

### 3.1. Suposiciones iniciales

Puesto que no se encontraron intentos previos para resolver esta ecuación en la literatura especializada, se hicieron varias suposiciones con el fin de simplificar matemáticamente la resolución. Si bien estas premisas pueden ser en algunos casos un tanto arriesgadas, fue posible, a través de ellas, lograr un entendimiento del comportamiento del modelo matemático.

#### Suposiciones magnéticas

- La susceptibilidad magnética ( $\chi$ ) es constante.

Este parámetro indica qué tanto se magnetizará un material cuando sea sometido a un campo magnético  $\mathbf{H}$  (Ecuación 4.2). Tal propiedad de la materia es inversamente proporcional a la temperatura y puede también ser una función no lineal del campo magnético. Se supone entonces que el caso estudiado es isotérmico, eliminando la variación de la susceptibilidad con la temperatura. Además, en la figura (1.6a) se puede apreciar que antes de tender al límite asintótico de magnetización, la curva para materiales “suaves” puede ser aproximada por una recta tangente de pendiente ( $\chi$ ) constante. Recordemos que los materiales superparamagnéticos no retienen momento magnético al ser retirados de la influencia del campo y que la respuesta de los ferrofluidos es de este tipo, por lo que es apropiado considerarlos como materiales magnéticamente suaves.

- El campo magnético en el punto  $Y = -D$  es constante.

Se partió del supuesto de que a la altura de la superficie libre del fluido que se encuentra por fuera de las placas el campo magnético es constante y a partir de aquí se pueden introducir funciones con variaciones lineales u oscilatorias. La justificación de tal suposición (Ecuaciones 2.14 y 2.15) es puramente matemática. Para poder determinar el salto de presión y desarrollar la ecuación hasta su forma final era necesario imponer una condición de frontera para el campo magnético. Las opciones más simples eran cero o una constante. Se optó por la segunda ya que tiene más sentido físico.

### Suposiciones geométricas

- El origen del sistema de coordenadas se localiza en la base del menisco.
- El menisco y el campo magnético son simétricos respecto al eje  $Y$ .

Con estas dos suposiciones se fuerza a que las condiciones iniciales  $Y(0)$  y  $Y'(0)$  sean cero; la primera por simple localización del origen y la segunda por el hecho de que si el menisco es simétrico (lo cual implica también una condición de suavidad en la curva), la función debe presentar un máximo o un mínimo en el origen. De esta forma también se logra reducir el trabajo de integración numérica a la mitad del dominio. El rango de  $x$  para el que se integra es  $[0, b]$ , y por la forma en que se hizo adimensional ( $X = x/b$ ) el rango se vuelve  $[0, 1]$ .

## 3.2. Descripción del algoritmo numérico

La ecuación de segundo orden (2.22) puede ser transformada en un sistema de dos ecuaciones de primer orden, de la siguiente manera

$$V' = (1 + V^2)^{3/2} \left\{ Bo(Y + D) + Bo^M [\chi_1(1 - \tilde{H}_1^2) - \chi_1^2 \tilde{H}_{1n}^2] \right\} \quad (3.1)$$

$$Y' = V \quad (3.2)$$

Un sistema de este tipo puede ser resuelto por medio del método de Runge-Kutta [13]. Sin embargo, dicho método sirve para resolver únicamente problemas donde las condiciones de contorno están dadas en un solo punto. En el caso que se pretende resolver, existen dos condiciones en el origen y una en la frontera. Por lo tanto, para poder aplicar este método es necesario modificar las condiciones. Tal modificación se lleva a cabo introduciendo una estimación para la altura de equilibrio  $D$  y definiendo una función que corresponda a la condición en la frontera, la cual será evaluada utilizando el método de Brent [13]. Dicha función es

$$f(D) = Y'(1) - \cot \alpha \quad (3.3)$$

Es claro que cuando  $f(D) = 0$  la condición del ángulo de contacto con la pared estará satisfecha.

El algoritmo numérico es el siguiente

1. Definir los parámetros de entrada  $Bo$ ,  $Bo^M$ ,  $\chi$ ,  $\alpha$  y el error máximo que será tolerado
2. Definir la función que describe el campo magnético  $\mathbf{H}$
3. Acotar el intervalo para la solución del valor de  $D$
4. Definir el paso de integración para el método de Runge-Kutta
5. Ejecutar el método de RK con una estimación para  $D$  dentro del intervalo acotado
6. Evaluar la función de la condición de frontera (Ecuación 3.3)
7. Obtener una corrección para  $D$  con el método de Brent
8. Volver al paso 5 e iterar hasta que la evaluación en 6 tenga un error menor a la tolerancia establecida.

### 3.2.1. Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta propaga una solución a lo largo de un intervalo por medio de evaluaciones intermedias dentro de un *paso de integración*  $h$ , posteriormente utiliza esa información para ajustar una expansión en serie de Taylor del orden deseado.

La base de este algoritmo proviene del método de Euler, el cual consiste en reescribir los  $dx$  y  $dy$  como  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , convirtiendo la ecuación diferencial en fórmulas algebraicas que describen cómo cambia la variable dependiente  $y$  cuando  $x$  da un *paso* de tamaño  $h$  [13]. Partiendo desde un punto  $x_s$  para el cual se conoce  $y_s$  (condiciones iniciales), el siguiente valor de  $y$  se aproxima como  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ , donde  $h$  es el tamaño del *paso* mencionado. Este método es más importante por lo que representa teóricamente que por su eficiencia en la implementación numérica.

El método más empleado para la integración de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales conocidas es el Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) [13], que requiere de cuatro evaluaciones en cada paso  $h$ . Si bien éste, como cualquier otro método, no es apto para todos los problemas, es un buen punto de partida. Suele funcionar casi siempre, especialmente cuando la velocidad de cómputo no es una prioridad. Si se combina con una buena rutina de ajuste del tamaño del paso de integración se puede conseguir un método robusto.

Las fórmulas para el RK4 son:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
 k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
 k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)
 \end{aligned}$$

Un paso del RK4 se lleva a cabo introduciendo los valores de las variables independientes y los de las variables dependientes y sus derivadas en un punto para el cual se conocen (condiciones iniciales). Después de una evaluación se obtienen nuevos valores en el otro extremo del paso de tamaño  $h$ . Esto se repite hasta cubrir todo el intervalo en el cual se requiere integrar la ecuación.

### 3.2.2. Método de Brent

Existen varios métodos para encontrar numéricamente las raíces de una ecuación. El éxito de los mismos depende del conocimiento que se tenga de la función a resolver, lo cual conduce hacia la elección del método más apropiado. Es conveniente tener una estimación de dónde se puede encontrar la raíz, para poder proveer al método numérico de una buena aproximación inicial o bien para “atrapar” la raíz dentro de un intervalo pequeño en el cual se buscará la solución.

En este trabajo se probaron dos métodos distintos, el de Newton-Raphson y el de Brent. El primero no funcionó, si bien era posible dar una aproximación inicial razonablemente buena. La razón de su falla fue la gran sensibilidad de la ecuación a los cambios en el parámetro  $D$  (altura de equilibrio). En ocasiones, un pequeño cambio en el valor de dicho parámetro provocaba que la evaluación en el método de Runge-Kutta tendiese a infinito haciendo imposible la convergencia del método acoplado de Newton-Raphson. Por esta razón se optó por acotar la solución dentro de un intervalo y encontrarla por medio del método de Brent, el cual combina bisección e interpolación cuadrática inversa para encontrar una raíz previamente acotada. Se dice que una raíz de una función  $f(x)$  está acotada en un intervalo  $(a, b)$  si  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signo contrario.

El método de Brent fue desarrollado por Wijngaarden, Dekker y otros en el Centro Matemático de Amsterdam en los años 60 y posteriormente perfeccionado por Brent [13]; de ahí que por razones prácticas se conozca al método por este nombre. Mientras que el método de bisección reduce el intervalo de acotación a la mitad en cada paso y los métodos de la secante y falsa posición pueden pasar varios ciclos acercando los límites del intervalo lentamente para aproximarse a la raíz (suponiendo un comportamiento aproximadamente lineal de la función), la interpolación cuadrática inversa utiliza los tres pares de puntos del paso anterior para ajustar una función inversa de segundo orden. Esto es, se toma  $x$  como una función de  $y$  cuyo valor en  $y = 0$  es considerado como la siguiente estimación de la raíz  $x$ . Además, el método contempla un plan de “emergencia” en caso de que la siguiente estimación se salga del intervalo  $(a, b)$  de acotación, el cual es realizar un paso de bisección. Si los tres pares de puntos considerados son  $[a, f(a)]$ ,  $[b, f(b)]$  y  $[c, f(c)]$  (con  $c$  contenido en  $(a, b)$ ), la fórmula de interpolación es:

$$x = \frac{[y - f(a)][y - f(b)]c}{[f(c) - f(a)][f(c) - f(b)]} + \frac{[y - f(b)][y - f(c)]a}{[f(a) - f(b)][f(a) - f(c)]} + \frac{[y - f(c)][y - f(a)]b}{[f(b) - f(c)][f(b) - f(a)]}$$

Igualando  $y$  a cero se obtiene el resultado para la siguiente estimación de la raíz como

$$x = b + P/Q$$

donde, en términos de

$$R = f(b)/f(c)$$

$$S = f(b)/f(a)$$

$$T = f(a)/f(c)$$

se tiene que

$$P = S[T(R - T)(c - b) - (1 - R)(b - a)]$$

$$Q = (T - 1)(R - 1)(S - 1)$$

En la práctica  $b$  es la mejor aproximación a la raíz y  $P/Q$  debe ser una corrección pequeña. Los métodos cuadráticos funcionan bien sólo cuando las funciones se comportan suavemente; se corre el riesgo de obtener un estimado muy equivocado si  $Q$  es demasiado pequeño. El método de Brent se protege contra este problema manteniendo los límites del intervalo y verificando que la corrección  $P/Q$  efectivamente esté contenida en  $(a, b)$ , de lo contrario, los límites se redefinen empleando un paso de bisección.

### 3.2.3. Parámetros de entrada

Como fue mencionado anteriormente, los parámetros de entrada para la resolución de la ecuación (2.22) son el número de Bond ( $Bo$ ), número de Bond Magnético ( $Bo^M$ ), susceptibilidad magnética ( $\chi$ ), ángulo de contacto ( $\alpha$ ) y el error máximo que será tolerado ( $e$ ). Conviene recordar que  $Bo = \Delta\rho gb^2/\gamma$  representa la relación entre presión hidrostática y presión capilar y  $Bo^M = \mu_0 H_0^2 b/2\gamma$  la presión magnética sobre presión capilar.

Para evaluar únicamente la influencia del  $Bo$  y  $Bo^M$ , se decidió fijar los parámetros  $\chi$  y  $\alpha$  y resolver la ecuación para diferentes valores de los primeros dos. El error absoluto permitido fue  $10^{-5}$ . Tanto la susceptibilidad magnética como el ángulo de contacto, son propiedades del fluido; la segunda depende también del material involucrado.

### 3.2.4. Función de campo magnético

Se simuló la aplicación de un campo magnético constante y vertical ( $\mathbf{H} = [0, H_0]$ ), que puede ser proporcionado por un arreglo de bobinas de Helmholtz en un posible trabajo experimental a futuro. Se intentó resolver también para campos no lineales, pero se encontró que el método de estimación-corrección no consigue converger ante la introducción de más funciones no lineales en la ecuación.

### 3.2.5. Intervalo de solución para $D$

A fin de acotar la raíz de la función (2.23) se llevó a cabo un “barrido” para encontrar un cambio de signo en el resultado de dicha función. Se comenzó introduciendo un valor pequeño para la altura de equilibrio  $D$  al método de Runge-Kutta para la integración de la ecuación y posteriormente evaluando la función  $f(D)$ . Para la siguiente evaluación se aumentaba el valor de  $D$  sumando un factor pequeño. Al encontrar un cambio de signo en  $f(D)$ , la rutina se detiene y almacena los dos últimos valores de  $D$ . Tal barrido se realizó dejando fijo el número de Bond y aumentando el bond Magnético. El resultado de la inspección previa se utilizó como punto de partida para la siguiente iteración, ya que se tenía identificado que la altura  $D$  aumenta con el  $B_0^M$ .

En los casos en que se utilizó un campo constante la obtención del intervalo de solución fue muy rápida. Sin embargo, en los casos donde el campo magnético empleado era decreciente, esto se convirtió en la parte más complicada de la resolución, ya que la introducción de una no linealidad más en la ecuación diferencial la volvió extremadamente sensible a los cambios de  $D$ , provocando que en ocasiones el valor de  $Y'$  en la integración de la ecuación tendiese a infinito. Para este caso se adaptó la rutina de búsqueda. El barrido comenzaba con un aumento en  $D$  del tamaño que hubiese dado resultado en el caso de campo magnético constante para parámetros similares. Si el valor obtenido en la evaluación de  $f(D)$  era infinito, se regresaba al último resultado finito y a partir de ahí se disminuía el factor sumado a  $D$ , iterando hasta lograr obtener un intervalo con cambio de signo y valores finitos.

### 3.2.6. Paso de integración

Un elemento importante de un buen método integrador de ecuaciones diferenciales es un control adecuado del tamaño del paso de integración. Un paso demasiado grande puede propiciar la pérdida de detalles relevantes en la forma de la curva solución, mientras que uno demasiado pequeño usa recursos computacionales innecesarios.

El paso de integración óptimo se eligió por medio de la identificación de las escalas de longitud relevantes para el problema. A través de la comparación entre dichas escalas se determinó cual de ellas era la menor en cada caso, y simplemente se definió el tamaño de  $h$  como cien veces menor que la escala mínima. Los resultados obtenidos con esta escala se compararon con los de utilizar un paso diez veces menor que éste para comprobar que realmente no hubiese pérdida de detalles. Se prefirió este método sobre el paso de integración adaptativo recomendado en la literatura ya que tal procedimiento aumentaba considerablemente el tiempo de cómputo sin ofrecer resultados mejores que la rutina elegida.

### 3.2.7. Escalas adimensionales de longitud

Las escalas de longitud empleadas fueron: longitud capilar y longitud magnética. Recordando la primera definición que se dio del número de Bond (Ecuación 1.35), este parámetro adimensional puede ser evaluado como  $b^2/l_c^2$ , donde  $l_c = \sqrt{\gamma/\Delta\rho g}$  es la escala de longitud capilar. De aquí se deriva que la primera escala adimensional de longitud considerada en la definición del tamaño del paso de integración sea

$$\tilde{l}_c = \frac{1}{\sqrt{Bo}} = \frac{l_c}{b}$$

El número de Bond magnético (Ecuación 2.21) puede ser interpretado de manera análoga como la razón entre  $b$  (la separación de las placas) y una escala de longitud magnética  $l_m = \gamma/\mu_0 H_0^2$ , de lo cual se obtiene la segunda distancia adimensional característica

$$\tilde{l}_m = \frac{1}{2Bo^M} = \frac{l_m}{b}$$

Finalmente, el paso de integración se determina como

$$h = 0.01 \times \text{mín}[\tilde{l}_c, \tilde{l}_m]$$

# Capítulo 4

## Resultados

El modelo matemático y el algoritmo para resolverlo descritos anteriormente se emplearon para describir la forma y la altura de una columna de fluido ferromagnético en equilibrio confinada entre dos placas planas y paralelas (Figura 2.1). En este capítulo se muestra cómo la ecuación (2.22) se reduce a la solución conocida para la altura de un fluido en un capilar cuando no se aplica campo magnético [6]. Posteriormente se presentan los resultados de aplicar un campo magnético constante, evaluando la influencia de los parámetros  $Bo$  y  $Bo^M$ . Como forma de validar la resolución numérica, se obtuvo una solución asintótica para fluido magnético bajo un campo constante cuando el número de Bond es pequeño.

### 4.1. Fluido no magnético

El caso más simple que se puede analizar es el de un fluido no magnético, el cual se puede resolver analíticamente y su solución es bien conocida. Partiendo de nuestro modelo para la forma y la altura del menisco (Ecuación 2.22), eliminando los términos magnéticos se tiene

$$Y'' = (1 + Y'^2)^{3/2} Bo(Y + D) \quad (4.1)$$

volviendo a la definición de curvatura (Ecuación 1.34) esto se puede reescribir como

$$2\kappa = Bo(Y + D) \quad (4.2)$$

Se sabe que la condición para tener una elevación capilar importante es que la escala de longitud capilar sea mayor que la distancia entre las placas, es decir  $Bo < 1$ . En este caso la forma del menisco se puede considerar esférica (circular en 2 dimensiones) y por lo tanto su curvatura es constante e igual a  $1/R$ . Aquí la curvatura adimensional es ( $\bar{\kappa} = b/R$ ); además, se sabe que  $\cos \alpha = b/R$ , donde  $\alpha$  es el ángulo de contacto. Por lo tanto  $\bar{\kappa} = \cos \alpha$ , lo cual, sustituido en la expresión anterior da

$$2 \cos \alpha = BoY + BoD \quad (4.3)$$

Finalmente, como la altura de equilibrio  $D$  se definió en el punto donde  $Y = 0$ , sustituyendo  $Bo$  por su definición y ordenando se llega a

$$D = \frac{2\gamma \cos \alpha}{\Delta \rho g b^2} \quad (4.4)$$

que es la solución para la altura capilar de un fluido no magnético cuando  $Bo < 1$  encontrada en la literatura [6].

## 4.2. Campo constante

### 4.2.1. Solución asintótica con $Bo$ pequeño

En el desarrollo del modelo matemático se impuso la condición de contorno de que el campo magnético fuese constante en  $Y = -D$ . Para el caso de campo magnético constante en todo el espacio y número de Bond pequeño, es posible, por medio de simplificaciones, obtener una solución del modelo. La comparación de esta solución con la numérica permite tener una idea de la calidad de nuestro algoritmo numérico. La ecuación (2.22) es

$$Y'' = (1 + Y'^2)^{3/2} \left\{ Bo(Y + D) + Bo^M [\chi_1(1 - \tilde{H}_1^2) - \chi_1^2 \tilde{H}_{1n}^2] \right\}$$

Recordando que por la forma en que se volvió adimensional el modelo  $\tilde{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{H}_1/H_0$ ; si se aplica un campo vertical constante  $\mathbf{H}_1 = (0, H_0)$  y además suponemos que  $\mathbf{H}_{1n} = \mathbf{H}_1$ , entonces  $\tilde{H}_1^2 = \tilde{H}_{1n}^2 = 1$ , por lo que la ecuación anterior se simplifica a la forma.

$$Y'' = (1 + Y'^2)^{3/2} \left[ Bo(Y + D) - Bo^M \chi_1^2 \right]$$

Si ahora se considera que  $D \gg Y$  (lo cual es cierto cuando  $Bo$  es pequeño) y se sustituye el primer término del lado derecho por los dos primeros términos de su expansión en serie binomial<sup>1</sup> se llega a

$$Y'' = \left( 1 + \frac{3}{2} Y'^2 \right) \left( BoD - Bo^M \chi_1^2 \right)$$

La expansión y simplificación realizada es válida si  $|Y'| < 1$  pues en ese caso los términos de orden 2 en adelante se vuelven muy pequeños.

Con el fin de reordenar la expresión anterior y hacerla visualmente más simple se sustituye  $B = BoD - Bo^M \chi_1^2$  y entonces se tiene

$$Y'' - \frac{3}{2} B Y'^2 = B$$

Esta ecuación, aunque continúa siendo no lineal, se puede integrar. Para la integración se usó el paquete Maple con las condiciones de contorno geométricas antes establecidas ( $Y(0) = Y'(0) = 0$ ). Si consideramos a  $D$  como un valor conocido, la solución a esta ecuación es:

---

<sup>1</sup> $(x + a)^v = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} x^k a^{v-k}$

$$Y(X) = -\frac{\ln \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{3}{2}} B X \right)^2 \right]}{3B} \quad (4.5)$$

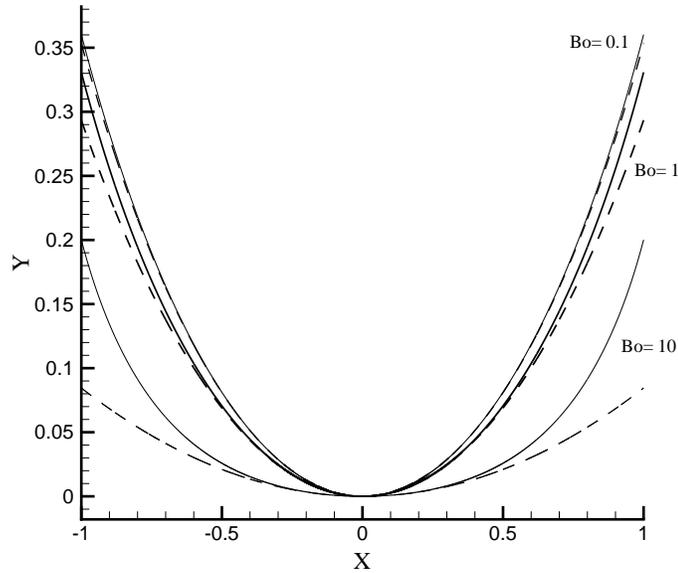


Figura 4.1: Formas del menisco obtenidas numérica (—) y analíticamente (---) ( $Bo^M = 10$ ,  $\chi = 1$ ,  $\alpha = 50$ ).

En la figura (4.1) se puede apreciar que en el caso de  $Bo = 0.1$  las soluciones numérica y analítica son casi iguales. De manera coherente con las suposiciones hechas para simplificar la ecuación, cuando el número de Bond es mayor que uno, éstas se alejan, pues el término  $BoY$  ya no es despreciable.

Al no haber más soluciones analíticas este es el único punto de referencia que se tiene para probar la eficiencia del método numérico. Para poder asegurar o refutar su utilidad es necesario hacer trabajo experimental y comparar los resultados obtenidos. Por ahora, los resultados aquí presentados sugieren que el algoritmo empleado es adecuado.

#### 4.2.2. Solución numérica

Una vez comprobada la capacidad del método numérico para arrojar resultados creíbles para el caso de campo magnético constante, se hicieron pruebas para varios parámetros; éstos fueron:  $Bo = [0.1, 1, 10]$ ,  $Bo^M = [1, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 100]$ ,  $\chi = [1, 2]$ ,  $\alpha = 50^\circ$  y  $e < 10^{-5}$ .

Bashtovoi, et. al [2] reportan una elongación para una gota de fluido magnético que asciende magnéticamente dentro de un capilar. En el caso aquí resuelto, como se considera que a la entrada de las placas hay una fuente ilimitada de fluido, la columna consigue ascender sin que el menisco

se elongue. Las formas mostradas anteriormente (Figura 4.1) se mantienen constantes para cada valor de  $Bo$  cuando se hacen variar  $Bo^M$  y  $\chi$ . (Figura 4.3). La influencia del ángulo de contacto en la forma del menisco no se muestra pues es evidente que al cambiar la condición de contacto con la pared, la forma de la superficie se verá modificada, lo cual es un resultado bien documentado [5]. Debido a que el valor del ángulo de contacto varía para cada pareja sólido-líquido, no se encontraron datos en la literatura para este valor en los fluidos ferromagnéticos; por lo tanto se utilizó arbitrariamente el valor de  $50^\circ$ . Esta elección no afecta los resultados pues la influencia de  $\alpha$  en la altura del menisco es fácilmente calculable, como se mostró en la expresión (4.4). Los valores de susceptibilidad magnética empleados (1 y 2) fueron tomados del libro de Blums, Cebers y Maiorov [8], donde se encuentra la gráfica mostrada en la figura (4.2)

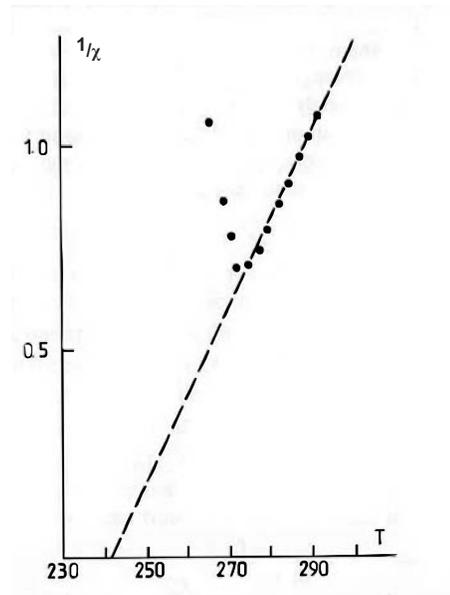


Figura 4.2: Susceptibilidad magnética como función de la temperatura (K) de un coloide de dietilacetato y cobalto [5] (● resultados experimentales).

La altura total como función del número de Bond magnético se muestra en la figura (4.4), con el eje de las ordenadas en escala logarítmica y las abscisas en escala normal. Para  $Bo^M = 0$ , la altura está dada por la expresión (4.4), la cual puede ser escrita como  $D_C = 2 \cos \alpha / Bo$ .

Con el fin de eliminar la influencia de la capilaridad en la altura del menisco, se sustrajo el valor de  $D_C$  en cada una de las curvas, obteniéndose así una gráfica de altura magnética ( $D_M = D - D_C$ ) como función del  $Bo^M$ , presentada en escala logarítmica (Figura 4.5(a)).

Se encontró que la relación entre la altura magnética y el Bond magnético es:

$$D_M = \frac{\chi^2}{Bo} Bo^M \quad (4.6)$$

De esta forma, la altura total se puede escribir como:

$$D = \frac{2 \cos \alpha}{Bo} + \frac{\chi^2}{Bo} Bo^M \quad (4.7)$$

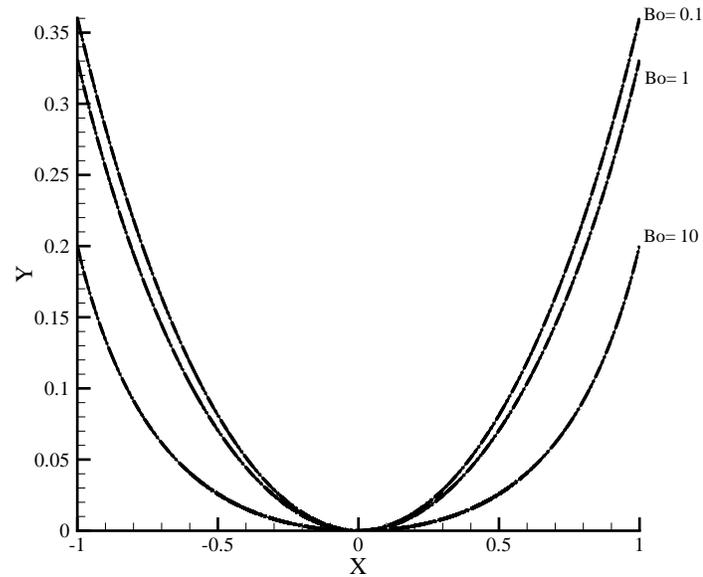


Figura 4.3: Formas del menisco variando  $Bo^M$  y  $\chi$

Se observa que para números de Bond grandes, cuando la elevación capilar es despreciable, el fluido alcanza alturas considerables gracias al campo magnético. El resultado (4.6) no se había reportado anteriormente en la literatura. Finalmente, para comprobar que la escala presentada en este resultado es correcta, se normaliza la altura magnética de la siguiente manera:

$$\hat{D}_M = \frac{D_M}{\frac{\chi^2 Bo_M}{Bo}}$$

y se muestra como en la gráfica de  $\hat{D}_M$  contra  $Bo_M$  todas las líneas de la altura magnética se agrupan en una sola (Figura 4.5(b)).

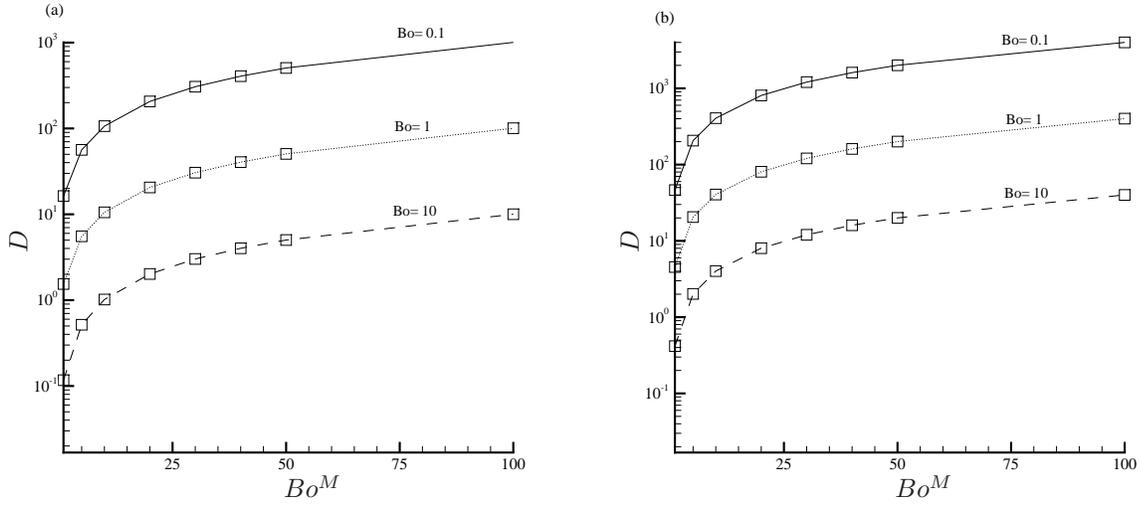


Figura 4.4: Altura total como función del  $Bo^M$  para  $\chi = 1$  (a)  $\chi = 2$  (b)

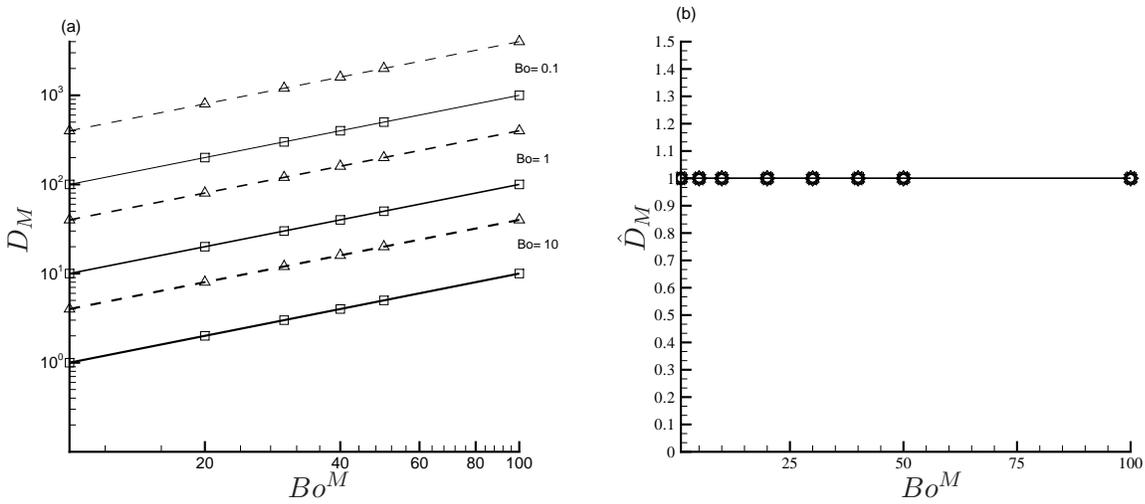


Figura 4.5: Altura magnética como función del  $Bo^M$  para  $\chi = 1$  (—)  $\chi = 2$  (---) (a) y altura magnética normalizada (b)

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajos a futuro

Este trabajo representa un primer intento de modelar y resolver numéricamente el fenómeno de la ascensión magnética de un fluido ferromagnético entre dos placas planas y paralelas, sujeto a la influencia de un campo magnético vertical. Se encontró que la forma del menisco depende exclusivamente de los parámetros capilares ( $Bo$ ,  $\alpha$ ), que la altura de equilibrio  $D$  se puede separar en dos componentes: capilar ( $D_C$ ) y magnética ( $D_M$ ) y que se puede identificar la función que determina la altura magnética. El resultado es satisfactorio ya que se halló una expresión que probablemente describe acertadamente la altura de equilibrio de acuerdo con los parámetros magnéticos, lo que hasta ahora no se había reportado en la literatura.

Se intentó resolver el modelo considerando campos magnéticos oscilatorios y de un imán permanente, pero se encontró que para estos casos el método numérico no era apropiado. Resultados reportados en la literatura [14] sugieren la posibilidad de que la forma del menisco responde a las oscilaciones espaciales del campo, lo cual es muy interesante y vale la pena considerar para una investigación tanto teórica como experimental posterior.

La solución se planteó con métodos numéricos muy sencillos, que si bien no son usualmente utilizados para resolver problemas de valor de frontera, se logró acoplarlos para resolver el modelo. Otro posible trabajo posterior es resolver el mismo modelo por un método diseñado específicamente para este tipo de problemas, como puede ser el de diferencias finitas, lo cual también permitirá evaluar campos magnéticos no lineales.

El problema dinámico de la ascensión hasta alcanzar la altura de equilibrio es también un problema interesante que puede ser atacado en trabajos subsecuentes. Para esto, es necesario considerar la viscosidad del fluido así como su campo de velocidades.

# Bibliografía

- [1] R.E. Rosensweig. Fluid dynamics and science of magnetic liquids. *Advances in Electronics and Electron Physics*, 48, 1979.
- [2] V. Bashtovoi, P. Kuzhir, and A. Reks. Capillary ascension of magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 252, 2002.
- [3] J.R. Melcher and G.I. Taylor. Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses. *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, 1, 1969.
- [4] R.E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Dover, USA, 2a edition, 1997.
- [5] P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Capillarity and Wetting Phenomena. Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer, USA, 1a edition, 2004.
- [6] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, England, 1a edition, 1979.
- [7] B.M. Berkovsky, V.F. Medvedev, and M.S. Krakov. *Magnetic Fluids: Engineering Applications*. Oxford University Press, England, 1a edition, 1993.
- [8] E. Blums, A. Cebers, and M.M. Maiorov. *Magnetic Fluids*. Walter de Gruyter, Berlin, 1a edition, 1997.
- [9] M.D. Cowley and R.E. Rosensweig. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 30, 1967.
- [10] Y. Fukuda and N. Douhara. Study on interfacial phenomena of magnetic fluids. *JSME International Journal*, 48(4):735–742, 2005.
- [11] A. Gailītis. Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 82(3):401–413, 1977.
- [12] C.W. Miller and E.L. Jr. Resler. Magnetic forces and surface instability in ferromagnetic fluids. *The Physics of Fluids*, 18(9):1112–1118, 1975.
- [13] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, England, 2a edition, 1992.

- [14] R.E. Zelazo and J.R. Melcher. Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 39(1):1–24, 1969.
- [15] F. Bitter. *Introduction to Ferromagnetism*. Mc Graw Hill, New York, 1a edition, 1937.
- [16] R. Philippe. *Electrical and Magnetic Properties of Materials*. Artech, England, 1a edition, 1988.
- [17] T.G. Cowling. *Magnetohydrodynamics*. A. Hilger, England, 2a edition, 1976.
- [18] R.E. Rosensweig, S. Elborai, S.H. Lee, and M. Zahn. Ferrofluid meniscus in a horizontal or vertical magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 289, 2005.
- [19] R.E. Rosensweig. Directions in ferrohydrodynamics. *Journal of Applied Physics*, 57(1):4259–4264, 1985.

## Apéndice A

# Programas en Matlab

La programación del algoritmo numérico diseñado para resolver el problema planteado en este trabajo se llevó a cabo en el programa Matlab. Primeramente se escribieron dos funciones que representan a las ecuaciones (3.1) y (3.2).

```
function [f]=f(y,v,x,Bo,D, Ji,BoM)
f=(1+v^2)^(1.5)*(Bo*(y+D)-BoM*Ji^2);
```

```
function [g]=g(y,v,x,Bo,D, Ji,BoM)
g=v;
```

Se decidió escribir una rutina con el método de Runge-Kutta en lugar de utilizar la función ya programada en Matlab para integrar ecuaciones diferenciales por este método. Al final de la misma se evalúa la condición de contacto con la placa.

```
%Función que resuelve las ecuaciones del menisco por medio del método
%Runge-Kutta de cuarto orden y evalúa la condición de contorno en X = 1
```

```
%PARAMETROS DE ENTRADA:
%D = altura de equilibrio (adimensional)
%Bo = número de Bond gravitacional
%theta = ángulo de contacto con la pared
%Ji = susceptibilidad magnética
%BoM = número de Bond magnético
%n = número de puntos para la intergación numérica
```

```
%PARAMETROS DE SALIDA:
%a = y'(1) - cot(theta)
%x = distancia del centro a la placa (adimensional)
```

```

%y = descripción de la forma del menisco
%v = derivada de y respecto a x

function [a,x,y,y2,v]=F_menisco(D,Bo,theta, Ji,BoM,n)

x=linspace(0,1,n);
y=zeros(1,n);
v=zeros(1,n);
dx=x(2)-x(1);
B=Bo*D-Ji^2*BoM;

%método de Runge-Kutta
for i=1:n-1

    k1=g(y(i),v(i),x(i),Bo,D,Ji,BoM);
    l1=f(y(i),v(i),x(i),Bo,D,Ji,BoM);

    k2=g(y(i)+0.5*dx*k1,v(i)+0.5*dx*l1,x(i)+0.5*dx,Bo,D,Ji,BoM);
    l2=f(y(i)+0.5*dx*k1,v(i)+0.5*dx*l1,x(i)+0.5*dx,Bo,D,Ji,BoM);

    k3=g(y(i)+0.5*dx*k2,v(i)+0.5*dx*l2,x(i)+0.5*dx,Bo,D,Ji,BoM);
    l3=f(y(i)+0.5*dx*k2,v(i)+0.5*dx*l2,x(i)+0.5*dx,Bo,D,Ji,BoM);

    k4=g(y(i)+dx*k3,v(i)+dx*l3,x(i)+dx,Bo,D,Ji,BoM);
    l4=f(y(i)+dx*k3,v(i)+dx*l3,x(i)+dx,Bo,D,Ji,BoM);

    y(i+1)=y(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)*dx/6;
    v(i+1)=v(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)*dx/6;

    dy=y(i+1)-y(i);
    y2(i+1)=-1/(3*B)*log(cos(sqrt(6)/2*B*x(i+1))^2);
end

%evaluar la condición de contorno en X=1
a=v(n)-cot(theta*pi/180);

```

El programa escrito para encontrar el intervalo de acotación para la solución de  $f(d)$  llama a las 3 rutinas anteriores, realiza una integración con pocos pasos y determina el cambio de signo que marca los límites del intervalo, guardando los resultados para ser usados por el programa que

resuelve la ecuación.

%Este programa determina el intervalo de acotación para la solución de la  
 %función de condición de frontera  $f(D)=Y'(1)-\cot(\text{alfa})$ . Comienza con una  
 %estimación inicial de la altura D y realiza una integración rápida (con  
 %pocos puntos) para obtener un resultado aproximado, detectar un cambio de  
 %signo en  $f(D)$  y encontrar límites de acotación.

```
clear all;
```

```
close all;
```

```
clc;
```

```
Ji=2;
```

```
theta=50;
```

```
Bo=10;
```

```
BoM=[1 5 10 20 30 40 50 100];
```

```
D1=Ji^2/Bo*BoM;
```

```
for i=1:8
```

```
    n=100;
```

```
    Dint=round(D1);
```

```
    D=linspace(D1,2*D1+10,100*(Dint+10));
```

```
    for k=1:100*(Dint+10)
```

```
        F=F_menisco(D(k),Bo,theta,Ji,BoM(i),n);
```

```
        G(k)=F
```

```
        if k>1
```

```
            if G(k)*G(k-1)<0
```

```
                break
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    a=int2str(BoM(i));
```

```
    c=int2str(Bo);
```

```
    d=int2str(theta);
```

```
    f=int2str(Ji*10);
```

```
    res=[D(k-1:k)' G(k-1:k)'];
```

```
    pause
```

```
    name=strcat('DF_Bo',c,'_Bom',a,'_a',d,'_Ji',f,'.dat');
```

```
    save (name,'res','-ascii','-tabs')
```

```
    D1=Ji^2*BoM(i+1)/Bo
```

end

Finalmente, el programa principal emplea los resultados del anterior y emplea las 3 primeras rutinas para resolver la ecuación de la altura y forma del menisco y presentar las gráficas.

```
% Programa donde se ingresan los parámetros de entrada para las ecuaciones
% del menisco. Llama a las funciones que describen la forma del menisco y
% a la función que las resuelve por el método de Runge-Kutta.
% Posteriormente aplica el método de Brent para encontrar la convergencia
% de la solución
%%%%%%%%%%

clear all;
close all;
clc;
%suceptibilidad magnética
Ji=2;
%ángulo de contacto
theta=50;
%número de Bond
Bo=10;
%número de Bond Magnético
BoM=[1 5 10 20 30 40 50 100];
%número de puntos para la integración
n=0.01*min(1/sqrt(Bo),1/(2*BoM));

%cambia el BoM
for i=1:8
    close all
    %convertir los parámetros actuales a cadenas de caracteres para abrir
    %el archivo necesario
    a=int2str(BoM(i));
    c=int2str(Bo);
    e=int2str(Ji*10);

    named=strcat('E:\Oscar\Tesis\Resultados\Uniforme\Bo',c,'\Chutes\DF_Bo'
    ,c,'_Bom',a,'_a50_Ji',e,'.dat');

    %abrir el archivo que contiene el intervalo de acotación de la raíz y
```

```

%obtener los valores inicial y final
data=load (named)
ultimo=size(data,1);
D1=min(data(ultimo-1,1),data(ultimo,1))
D2=max(data(ultimo-1,1),data(ultimo,1))

%evaluar la función de la condición de controno en X=1 para el límite
%superior del intervalo de acotación. Si el resultado es negativo se
%aumenta el intervalo hasta que el resultado sea positivo
F2=F_menisco(D2,Bo,theta, Ji,BoM(i),n)
if F2<0
    while F2<0
        D2=D2+5;
        F2=F_menisco(D2,Bo,theta, Ji,BoM(i),n)
    end
end

%punto medio del intervalo
D3=(D2+D1)/2;
%valor inicial de la función en el punto medio
F3=1;
%evalua la función f(D) en el límite inferior del intervalo
F1=F_menisco(D1,Bo,theta, Ji,BoM(i),n);
F1

%itera hasta encontrar el 0 de la función con un error absoluto de
%10e-5
while abs(F3)>1e-5
    F3=F_menisco(D3,Bo,theta, Ji,BoM(i),n);
    F3
    %calcular los coeficientes del método de Brent
    R=F3/F2;
    S=F3/F1;
    T=F1/F2;
    P=S*(T*(R-T)*(D2-D3)-(1-R)*(D3-D1));
    Q=(T-1)*(R-1)*(S-1);
    %calcular la nueva D según el método de Brent
    D4=D3+0.5*P/Q;

    %si f(D) en el punto medio es positiva y si el resultado de la

```

```

%misma se sale del intervalo, deja igual el límite superior del
%intervalo; si no se sale, cambia el limite superior al punto medio
if F3>F1<0
    if F3>F2
        D2=D2;
    else
        D2=D3
        F2=F3
    end
    %si f(D) en el punto medio es negativa y si se sale del limite
    %inferior de intervalo deja el límite inferior igual si está dentro
    %del intervalo, cambia el límite inferior al punto medio
else
    if F3<F1
        D1=D1;
    else
        D1=D3
        F1=F3
    end
end
%si f(D) se salió del intervalo o si la nueva estimación de D queda
%fuera del mismo, escoje una D aleatoria dentro del intervalo; si
%no, usa la nueva estimación de D
if (F3>F2)——(F3<F1)——(D4>D2)
    D3=D1+rand(1)*(D2-D1)
else
    D3=D4;
end
%sale del ciclo cuando abs(f(D))<1e-5
end

%obtiene todos los datos del menisco con la altura correcta
[F,X,Y,Y2,V]=F_menisco(D3,Bo,theta, Ji,BoM(i),n);

%gráfica de la forma del menisco
close all
plot(X,Y,'b-',X,Y2,'r-')

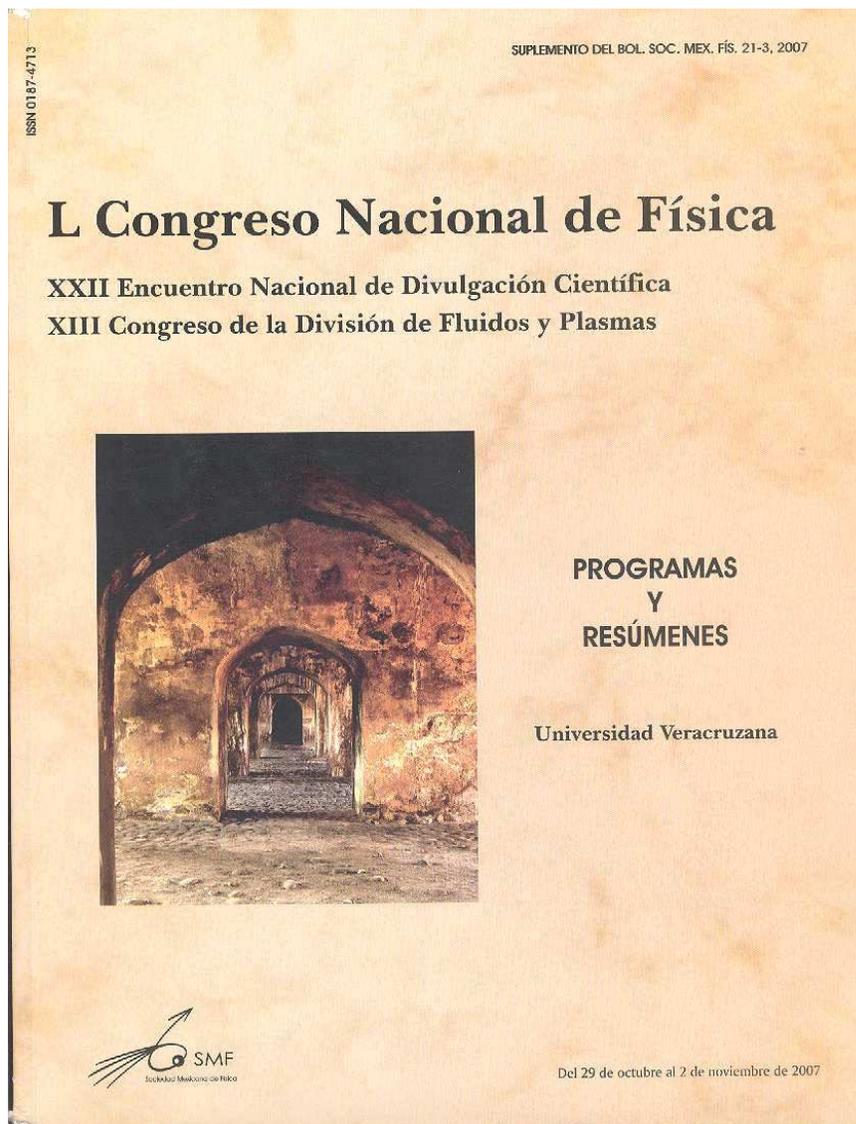
%pausa para ver las gráficas
pause

```

```
%guardar los resultados
a=int2str(BoM(i));
c=int2str(theta);
d=int2str(Bo);
f=int2str(Ji*10);
res=[X' Y' Y2' V'];
res2=[D3 F3 Bo BoM(i)];
name=strcat('res_Bo',d,'_Bom',a,'_a',c,'_Ji',f,'.dat');
save (name,'res','-ascii','-tabs')
name=strcat('res2_Bo',d,'_Bom',a,'_a',c,'_Ji',f,'.dat');
save (name,'res2','-ascii','-tabs')
end
```

## Apéndice B

# Presentaciones en congresos



simplified picture of this flow geometry consists of a cylindrical array of cyclonic and anti-cyclonic vortices columns aligned with the rotation axis of the spherical container. When the ratio of viscous to Coriolis forces (known as Ekman number) is not "too small" (typical for geodynamo simulations) then the Ekman pumping is the main source of the axial flow having its maximum at the middle of each column and changing its sign from one vortex to the next. However, in the limit of vanishing values of Ekman ( $10^{-15}$  is a typical value for the Earth's core) the main source of the axial flow component is the geometrical  $\beta$ -effect due to the spherical shape of the container. This implies that the axial flow component is maximum at the borders of the columns and not at their centres. Understanding the corresponding dynamo mechanisms of the mentioned flows, could be determining in the comprehension of the geodynamo process. We analysed these corresponding mechanisms following the lines of the mean field approach. A direct consequence of our analysis is that the dynamo process at small Ekman numbers can not be a simple extrapolated from the results obtained at moderate Ekman numbers.

#### S.IV.9 DEVELOPING MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOW IN A TWO-DIMENSIONAL DUCT.

*Michel A. Rivero, Sergio Cuevas, Eduardo Ramos, Centro de Investigación en Energía-UNAM.* We study numerically the flow of an electrically conducting fluid in a two-dimensional duct formed with two parallel insulating plates exposed to a non-uniform magnetic field. The applied field is normal to both walls and is assumed to be present only in a section of the duct. The fluid motion inside the magnetic field induces an electric current in the direction normal to both, the flow and the applied field. The interaction of the current and the field generates a Lorentz force that opposes the motion of the fluid. We describe the evolving flow as the fluid passes through the section of the channel where the magnetic field is present for different flow conditions. The most noticeable modification of the flow is the generation of a diverging-converging effect in the zone of non-uniform magnetic field. The developing length is approximately equal to the width of the channel.

#### S.IV.10 A THEORETICAL STUDY OF MAGNETIC PRESSURE DRIVEN FLOW IN A NARROW CHANNEL.

*O.R.E. Paz y Puente, Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM, H.J.G. Couto Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, R. Zenit, Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM, F.R. Cunha, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília.* In this work the shape and height of a ferrofluid meniscus in a narrow channel composed of two vertical flat plates in response to a vertical, spatially oscillatory, magnetic field are theoretically

studied. The formulation is based on an extension of the Young-Laplace equation for an incompressible ferrofluid combined with the mean curvature equation for a two-dimensional free surface. The formulation results in a hydrodynamic-magnetic coupled problem governed by a nonlinear second order differential equation to describe the meniscus shape. According to this formulation, there are two relevant physical parameters in the governing equation: the gravitational Bond number and a new parameter called magnetic Bond number. To solve the nonlinear equation a fourth order Runge-Kutta method with an adaptive integration step, coupled with a Secant method is used. The numerical procedure has the advantage of accelerating the convergence of a solution by checking if the boundary condition associated with the contact angle is satisfied. The influence of the magnetic Bond number on the height and shape of the ferrofluid column is evaluated for different oscillation regimes of the magnetic field. Results indicate that it is possible to make the fluid column rise even in the absence of common surface tension capillary effects.

**Keywords.** meniscus shape, magnetic fluid, magnetic bond number, free surface.

### SESIÓN V: FENÓMENOS INTERFACIALES Y MICROFLUJOS.

Miércoles 31, 8:30-11:40

Moderadora: Guadalupe Huelisz, CIE-UNAM

#### S.V.1 EFECTOS DE LA PRESENCIA DE FRONTERAS EN LA DINÁMICA DE GOTAS EN FLUJOS GENERADOS POR MOLINOS DE DOS RODILLOS.

*Escalante Velázquez Carlos A., Reyes Huesca Marco y Geffroy Aguilar Enrique, Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM.* La dinámica de una gota inmersa en un segundo fluido ha sido estudiada ampliamente por su relevancia en un gran número de aplicaciones con suspensiones; sin embargo, poco trabajo se ha hecho considerando el efecto de fronteras, los cuales consideran principalmente flujos cortantes simples generados por fronteras planas. En este trabajo se estudia la dinámica de una gota colocada en el punto de estancamiento del campo de flujo estacionario generado por molinos de dos rodillos corrotacionales (TRMs), en donde se tiene más deformación que vorticiación. Los parámetros que determinan el comportamiento de la gota en un campo de flujo son el número capilar  $Ca$ , el tipo de flujo,  $\alpha$ , y el cociente de viscosidades,  $\lambda$ . Los efectos de la cercanía de la fronteras se considera con el cociente del diámetro inicial de la gota entre la distancia que separa las superficies de los rodillos,  $l$ . Las simulaciones numéricas de la dinámica de gotas bidimensionales en TRMs se realizaron con el método de elemento de frontera (BFM). Los valores de los parámetros fueron  $\lambda=1$ , y diferentes valores de  $Ca$ ,  $\alpha$  y  $l$ . Los estudios

# BULLETIN

OF THE **AMERICAN PHYSICAL SOCIETY**

PROGRAM OF THE 60th ANNUAL MEETING OF THE  
DIVISION OF FLUID DYNAMICS

November 18–November 20, 2007

Salt Lake City, Utah



**U**  
THE  
UNIVERSITY  
OF UTAH

Utah State  
UNIVERSITY

University of Idaho

**BYU**  
BRIGHAM YOUNG  
UNIVERSITY

November 2007

Volume 52, No. 17

APS  
physics

structures. A gradual transition to approximately linear rate-dependence is observed upon increasing the wall-fluid interaction. A pronounced upward curvature in the shear rate dependence of the slip length is reported for the shear flow of the polymer melt. We found that the slip length can be well described by a function of a single variable, which is a combination of the in-plane structure factor, contact density and temperature of the first fluid layer near the solid wall. Extensive simulations show that this scaling holds in a wide range of shear rates and wall-fluid interactions for both simple fluids and short polymer chains. A relation to recent slip flow experiments is discussed. Reference: N.V. Priezjev, "Rate-dependent slip boundary conditions for simple fluids," Phys. Rev. E 75, 051605 (2007).

## 17:02

**EN 5 Study of liquid flows over solid surfaces by particle nanovelocimetry\*** CEDRIC BOUZIGUES, PATRICK TABELING, CNRS UMR 7083 ESPCI CNRS UMR 7083 ESPCI TEAM, In nanometric flows, interactions of the liquid with the surface become important. However, only indirect measurements of the slip length or the Debye length have been yet performed. Here we used near-field imaging of nanoparticles to observe water flows over solid surfaces. Water containing fluorescent nanoparticles was driven in microchannels and illuminated by an evanescent wave. Three-dimensional positioning of tracers allows the reconstruction of particle concentration and diffusion coefficient and of flow speed with 30 nm accuracy from 20 to 300 nm over the surface. We probed energy landscape over the surface which allows the first local *in situ* determination of surface potential and Debye length. We moreover directly measured slip length  $L_s$ . On hydrophilic surfaces, slippage is negligible but on smooth hydrophobic surface  $L_s = 29 \pm 10$  nm. This constitutes the first direct observation of slippage in a water flow. Altogether our results provide a novel insight into the behavior of fluids close of solid surfaces. The application of the tools we developed could be extended to study of composite surfaces and electro-osmotic flows.

\*This work was supported by Agence Nationale pour la Recherche

## 17:15

**EN 6 A Theoretical Study of Magnetic Pressure Driven Flow in a Narrow Channel** O.R.E. PAZ Y PUENTE, *Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México* H.L.G. COUTO, *Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília* R. ZENIT, *Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM* F.R. CUNHA, *Departamento de Engenharia Mecânica, UnB* Shape and height of a ferrofluid meniscus in a narrow channel composed of two vertical flat plates in response to a vertical, spatially oscillatory, magnetic field are theoretically studied. The formulation is based on an extension of the Young-Laplace equation combined with the mean curvature equation for a two-dimensional free surface. The formulation results in a hydrodynamic-magnetic problem governed by a nonlinear second order differential equation. According to this formulation, there are two relevant physical parameters in the equation; the gravitational Bond number and a new parameter: the magnetic Bond number. To solve the equation, an adaptive integration step, fourth order Runge-Kutta coupled with a Secant method is used. This procedure accelerates the convergence of a solution by checking if the boundary condition associated with the contact angle is satisfied.

Influence of the magnetic Bond number on the height and shape of the ferrofluid column is evaluated for different oscillation regimes of the magnetic field. Results indicate that it is possible to make the fluid column rise even in the absence of common surface tension capillary effects.

## 17:28

**EN 7 The fluid-coupled motion of micro and nanoscale elastic objects** C. CARVAJAL, M.R. PAUL, *Dept. of Mechanical Engineering, Virginia Tech* We consider two closely spaced elastic objects immersed in a viscous fluid subject to thermal (Brownian) driving and external driving. For Brownian driving the objects exhibit cross-correlations in equilibrium fluctuations in displacement through the long-range effects of fluid motion. For external driving, one object is driven to oscillate while the adjacent object is passive. We model the system as two simple harmonic oscillators whose motion is coupled through the fluid. For external driving we demonstrate the feasibility of shaker-based actuation for nanoscale systems. For Brownian driving the cross-correlations are determined using a thermodynamic approach based upon the fluctuation-dissipation theorem. We perform full numerical simulations of the fluid-solid interactions that include the precise geometries of interest. We then develop analytical expressions using simplified geometries and the unsteady Stokes equations. The analytics are compared with the numerics to develop insight into the fluid-coupled dynamics over a range of experimentally relevant parameters including object separations and frequency based Reynolds numbers.

## 17:41

**EN 8 Experimental Verification of Diffusion-Induced Bias in Mean Velocity Using Near-Wall Velocimetry with Quantum Dots\*** S. POUYA, M. KOCHESFAHANI, *Michigan State University* A. GREYTAK, M. BAWENDI, D. NOCERA, *Massachusetts Institute of Technology* Results from recent simulations of the Brownian motion of nanoparticles next to a wall have shown that the mean velocity measured from their displacement would tend to overestimate the actual mean fluid velocity depending on the separation time between the two successive realizations of particles. This effect is most serious for highly diffusive nanoparticles. We report experimental verification of this phenomenon by measuring the motion of quantum dots (QDs) within a 100 nm evanescent layer above the surface of a 200 micron microchannel carrying an aqueous solution of QDs in pressure-driven flow. Experimental results are compared with Brownian simulations based on Langevin equations and conditions adopted from the experiment. It is shown that the simulation results agree with the experimental data once the diffusion coefficient in the simulation is matched to the one observed in the experiment.

\*This work was supported by the CRC Program of the National Science Foundation, Grant Number CHE-0209898.