UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN EL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, PLANTEL AZCAPOTZALCO, DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS

PRESENTA: FRANCISCO RAMÓN RUZ ÁVILA

ASESOR: M. en C. ALEJANDRO RAÚL REYES ESPARZA

NAUCALPAN DE JUÁREZ **MAYO DEL 2008**

AGRADECIMIENTOS

Al Director de esta tesis, M. en C. Alejandro Raúl Reyes Esparza por sus ideas y recomendaciones que me ayudaron a estructurar y dar coherencia a esta tesis; por la formación y dirección que me ha proporcionado su conocimiento, experiencia y amistad durante mi travesía académica; finalmente, por los constantes momentos de paciencia y motivación.

Al M. en C. Juan B. Recio Zubieta por todas las muestras de confianza y oportunidades de conocimiento que tantas veces me ha obsequiado.

A la Dra. Asela Carlón Monroy por sus valiosos consejos, sugerencias y observaciones que sirvieron para enriquecer este trabajo.

Al Dr. Sergio Cruz Ramos por el interés en compartir sus conocimientos y experiencias, sus reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas y por su incalculable apoyo académico.

Al Dr. Miguel Mercado Martínez por su contribución a esta tesis y por la excelente disposición que tiene conmigo.

A todos aquellos que siempre me han apoyado y sembraron en mi sentimientos de amistad.

DEDICATORIA

Gracias a Laura, mi compañera y esposa, por su entrega, confianza y sincero amor que siempre me brinda, pues sólo ella hace que cada día merezca la plenitud de ser vivido.

A mis hijas, Laura Abril y Haydeé, porque son el estímulo más poderoso que me impulsa seguir adelante en la construcción del proyecto de vida de nuestra familia.

ÍNDICE

ABSTRACT.

The accomplishment of this work consists in the elaboration of a proposal in teaching quadratic functions, which belongs to Unit I of the subject of Mathematics II from the brought up 2001 Study Scheme, of the Colegio de Ciencias y Humanidades of the Universidad Nacional Autonoma de Mexico.

The activities carried out in this work, besides helping the professor doing a planning of the teaching-learning processes of the quadratic functions, were in order to determine if with didactic material elaborated by the professor, the students can achieve in a more significant way the learning's indicated in the program of the subject mentioned before.

The learning's indicated in the program allow students to review what was developed in the classroom and to exercise the procedures and methods characteristic of the thematic one.

In pedagogical terms the work done with the students who worked with the didactic material of the proposal, allowed to characterize them as a scholar group in which it was possible to promote a propitious atmosphere for the construction and socialization of the knowledge; about the grades given as art of the evaluation, this students gained a better result.

These results allows to propose the convenience that the professor or a group of professors, use the curriculum as a tool in order to make the didactic materials which allow them to carry out their pedagogical intervention inside and outside the classroom, in a more precise and concise way.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se realiza una descripción del proceso de elaboración y aplicación de la propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas desarrollada con la finalidad de obtener el grado de Maestría en Educación, en la especialidad de Matemáticas.

El trabajo está integrado por cuatro capítulos, las conclusiones que se derivan de los mismos y por dos anexos, que a continuación se describen.

En el primer capítulo se realiza una descripción del Plan de Estudios Reestructurado y los programas estudios de las asignaturas de Matemáticas I a IV del Colegio de Ciencias y Humanidades; se expresa la concepción de la matemática que se tiene en el CCH; y, se proporcionan algunos datos característicos de la población estudiantil a la que están dirigidos tanto los programas como el Plan de Estudios.

En el segundo capítulo se inicia con algunas consideraciones acerca del constructivismo y las representaciones semióticas para continuar con el currículo como una herramienta de trabajo de los profesores y la importancia de los materiales curriculares como una manera en la que el currículo escolar es desarrollado; después se procede a describir como se realiza el trabajo en el aula con los materiales; posteriormente, se habla de la relación que existe entre los materiales y la enseñanza para arribar a la necesidad de una evolución de los mismos; finalmente, se enfatiza que a través de la elaboración de los materiales se puede coadyuvar con los programas existentes sobre la formación de los profesores.

En el tercer capítulo se realiza una descripción de la propuesta de enseñanza elaborada, ubicando en el Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades y en los Programas de Estudios de las asignaturas a las funciones cuadráticas; se describe el propósito, aprendizajes y contenidos que debe cumplir la propuesta y finalmente se realiza una descripción tanto de la propuesta de enseñanza como del cuaderno de trabajo que la acompaña.

En el cuarto capítulo se muestra el proceso de implementación o aplicación de la propuesta, se describen los resultados obtenidos en este trabajo y se realiza un breve análisis estadístico de los mismos.

En las conclusiones se mencionan algunos juicios que se pueden derivar para explicar que la propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas es susceptible de ser aplicada en el Colegio de Ciencias y Humanidades, además de que se expresan algunas propuestas a través de las cuales se podría dar inicio a otras formas de trabajo en el área de matemáticas.

En el anexo A se incluye el cuaderno de trabajo que acompaña la propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas. En el anexo B se incluye el examen que se utilizó para la evaluación en los grupos en los que se aplicó la propuesta.

CAPITULO 1

MARCO REFERENCIAL

1.1 El Plan de Estudios Ajustado.

En el año de 1997 se realizó una revisión del Plan de Estudios que el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México venía utilizando desde su establecimiento en 1971.

Esta revisión generó un nuevo Plan de Estudios que se denominó Plan de Estudios Actualizado, que se le representó con las siglas de PEA; este nuevo Plan de Estudios modificó de manera determinante la orientación y el contenido de las asignaturas que se imparten en el área de matemáticas, pero conservó la idea de que la enseñanza debía estar regida por el principio de "Aprender a Aprender para poder aprovechar las posibilidades que ofrece la educación a lo largo de la vida" (Delors,1996, p. 102).

La aplicación del Plan de Estudios Actualizado trajo como consecuencia que en la práctica los profesores que impartían las asignaturas de matemáticas en los diferentes planteles no culminarán los programas respectivos debido a la extensión de los contenidos en cada una de las 7 unidades que conformaban el programa en relación con el tiempo disponible a lo largo del semestre y a las grandes diferencias en las múltiples reacciones de sus alumnos ante partes específicas del programa escolar.(Jackson, 2001, p.101)

Posteriormente, en el año de 2001 se realizó una revisión del Plan de Estudios Actualizado a partir de la experiencia generada por los 4 años de aplicación. Esto dio lugar al Plan de Estudios Ajustado que se encuentra vigente.

En el Plan de Estudios Ajustado se conservó la orientación y el enfoque del Plan de Estudios Actualizado pero se disminuyeron los contenidos que se debían tratar en cada asignatura, al reducir a 5 el número de unidades temáticas a desarrollarse durante el primer, segundo y tercer semestre escolar; para el cuarto semestre el número de unidades es de cuatro.

El cambio fundamental que se da en el nuevo Plan de Estudios es la modificación de las orientaciones generales de los cursos obligatorios del área de Matemáticas en los cuatro primeros semestres, como se establece en el documento de Programas de Estudio de Matemáticas:

> "En los cuatro primeros semestres del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, se incluyen los cursos obligatorios del área de Matemáticas que los estudiantes deberán acreditar y que abarcan los conocimientos básicos de cinco importantes ejes de desarrollo temático: **Álgebra, Geometría Euclidiana, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones**. A través de estos cuatro cursos, se brinda al alumno un panorama de los principales aspectos del conocimiento y del quehacer matemático que le permitirán acceder posteriormente a conocimientos más especializados, tanto en el ámbito de estos mismos ejes temáticos como en el de otros, entre los que están incluidos el Cálculo Diferencial e Integral y la Probabilidad y Estadística. (CCH, 2002, p.5)

Ello permite que los primeros cuatro cursos se puedan contemplar como un todo, tal y como se indica en el documento señalado anteriormente:

> "Estos cuatro cursos constituyen un todo en su conjunto, de modo que de un semestre a otro se recuperan conocimientos adquiridos previamente, ya sea trabajándolos desde otro nivel de profundidad y extensión, o remitiéndose a su aplicación en otro contexto o temática, o incluso abordándolos desde una nueva perspectiva (por ejemplo, el estudio analítico de los objetos geométricos)" (Ibid.)

Así mismo, se propone que en el transcurso de estos cuatro cursos obligatorios, así como en los siguientes dos cursos, se ponga mayor énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos y en el desarrollo de habilidades matemáticas, tal y como se expresa en el documento citado:

> “Además, en concordancia con los principios educativos del Colegio, más que privilegiar la memorización de un cúmulo de contenidos matemáticos (subdivididos en muchas ocasiones en múltiples casos y fórmulas especiales) y la repetición de definiciones o la práctica irreflexiva de algoritmos, interesa poner énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas; entre estas últimas están: Generalización (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); Formalizar “Material Matemático” (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); Reversibilidad de Pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); Flexibilidad de Pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); Visualización Espacial (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada). (CCH, 2002, pp. 5-6)

Es indudable que los contenidos temáticos que se incluyen en los programas de las asignaturas que conforman los diferentes Planes de Estudio, en la diversidad de instituciones en las que se imparte el ciclo bachillerato en nuestro país son comunes y que la diferenciación entre éstas se da en la forma en que se presentan y trabajan con los estudiantes, es decir, en la manera en que se enfocan, tanto en forma disciplinaria como de manera didáctica tales contenidos.(CCH, 2002, p.7)

1.2 Concepción de la Matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

En particular, en el Colegio de Ciencias y Humanidades

> “la concepción de la Matemática conlleva una intención del para qué queremos enseñarla y cómo contribuye a la formación de un sujeto capaz de buscar y adquirir por si mismo nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica, sistemática y constructiva. (Ibid)

Por ello se considera que la Matemática como disciplina:

- “**Posee un carácter dual:** Es una ciencia y una herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico.
- **Manifiesta una gran unidad.** No obstante la diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas presentan métodos, principios y estrategias comunes. Muchos de los conceptos y procedimientos de cualesquiera de sus ramas, se vinculan, complementan o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.
- **Contiene un conjunto de simbologías propias** bien estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, algebraica, por ejemplo) que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades,

> relaciones, comportamientos, leyes, etc. Aspecto que contribuye a avanzar en su construcción como ciencia y a extender el potencial de sus aplicaciones. (CCH, 2002, pp.7-8)

Aunado, a este carácter dual de la Matemática, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, también, se pretende generar el desarrollo de habilidades del pensamiento que posibiliten al alumno avanzar por su cuenta en la adquisición de otros conocimientos. Por lo que se propone que en la práctica educativa se consideren los siguientes elementos:

- "Introducir el estudio de los contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no contemplen de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar.
- Analizar los enunciados de los diferentes problemas planteados, de manera conjunta estudiante-profesor, con la finalidad de que el alumno adquiera paulatinamente esta habilidad y con el tiempo sea capaz de realizarla de manera independiente.
- Proporcionar diversos ejemplos, con la intención de presentar numerosas oportunidades para que el alumno atienda el desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y atienda la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.
- Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos, cuidando que éstos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se sistematicen y complementen finalmente con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos. Las precisiones teóricas se establecerán cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su comprensión.
- Propiciar sistemáticamente el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática, como entre éstas y la expresión verbal.

- Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la Matemática.
- Fomentar el trabajo en equipos para la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; la discusión razonada, y la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados.(CCH, 2002, PP. 8-9)

Con los enfoques disciplinarios y didácticos, descritos anteriormente, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, se pretende que los egresados, considerando el eje temático de funciones, estarán capacitados para:

- “Comprender y manejar los conceptos de variable, variación y relación funcional.
- Comprender y manejar la vinculación entre los parámetros de la representación algebraica de una función y sus registros tabular y gráfico.
- Analizar las características de una función dada: crecimiento o decrecimiento, puntos o intervalos donde no están definidas, tendencias, simetrías en sus gráficas, valores extremos.
- Identificar los rasgos distintivos de diversas formas de variación (lineal, cuadrática, polinomial, exponencial, periódica, entre otras) y, en consecuencia, del tipo de función asociada y sus características.
- Identificar y analizar la información que proporciona una gráfica sobre el comportamiento general de una situación a la que representa.
- Describir el significado de características de una función en el contexto de una situación o problema del cual surge esta.
- Construir el modelo que describe mejor una situación o fenómeno que involucra variación y utilizar los conocimientos adquiridos sobre funciones para analizar e incluso predecir el comportamiento de tal situación o fenómeno.

- Valorar el concepto de función para la representación, estudio y análisis de situaciones y fenómenos físicos, biológicos y sociales que involucran variación. (CCH, 2005, p.15)

Una vez que se ha descrito de manera general en que consisten los programas de las cuatro primeras asignaturas del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias, en lo que respecta a las matemáticas, así como la caracterización de que se analizarán éstos a través de ejes temáticos, los enfoques didácticos y disciplinarios y lo que se espera que los egresados puedan lograr, en el eje temático de las funciones. Es necesario dar una descripción breve de la población estudiantil con la que se llevará a la práctica tanto los programas de las asignaturas como el Plan de Estudios en su conjunto.

1.3 Características de la población estudiantil.

La población estudiantil con la que se va a desarrollar e instrumentar el Plan de Estudios en su conjunto y los programas de las asignaturas en lo particular, esta conformada por jóvenes de ambos sexos cuyas edades oscilan en el intervalo de 14 a 20 años, independientemente de que puedan existir casos especiales en los que su edad sea mayor a los 20 años.

En general los alumnos adscritos al Colegio de Ciencias y Humanidades viven en la zona metropolitana de la Cd. de México; las zonas habitacionales desde donde se desplazan a la escuela son las regiones más cercanas al plantel al que asisten. Por ejemplo, en el Plantel Azcapotzalco, aproximadamente entre un 30 a 40 % de sus estudiantes viven en el Distrito Federal y entre un 60 y 70 % de los alumnos provienen de los municipios conurbados al Distrito Federal; Destacan los municipios de Atizapán de Zaragoza, Cuautitlán y Tultitlán del Estado de México, en los últimos años.

A partir de sondeos con los alumnos se ha podido determinar que sus familias están integradas por los padres y 2 o 3 hijos, que el nivel de escolaridad de los padres es del bachillerato o más y que el ingreso económico familiar es mayor de 5 pero menor de 10 salarios mínimos. Sin embargo, es necesario señalar que también se presentan casos distintos en los que las familias están desintegradas, cuyos padres no tienen estudios mayores a la secundaria o que su ingreso es menor a los 5 o mayor de los 10 salarios mínimos.(CCH, 2005a).

En promedio los alumnos dedican una o dos horas al estudio de los temas desarrollados en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se llevó a cabo en el aula y dedican tres o más horas a ver la televisión.

Una vez que se conoció el Plan de Estudios y los programas de las asignaturas de Matemáticas I a IV, a los cuales en conjunto se les denomina el currículum del Área de Matemáticas, así como las características de la población estudiantil en las que se van ha desarrollar, se analizó la forma en que se debería instrumentar con los estudiantes de manera tal que permitiera que éstos obtuvieran e hicieran suyos los contenidos que deben desarrollarse en estos semestres.

Una de las dificultades iniciales que se obtuvo al revisar los programas de las asignaturas de Matemáticas I a IV es la insuficiencia de materiales didácticos que permitieran instrumentar y desarrollar el currículum, si se considera que es a través de los cuales se expresa el enfoque y el contenido temático.

CAPITULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1 Acerca del Constructivismo.

El constructivismo expresa que el hombre conoce a partir de que él mismo construye su aprendizaje; construcción que se realiza mediante la participación activa y consciente de la persona, apoyado en sus estructuras sicológicas ya conformadas, en otras palabras, la única fuente del conocimiento es la estructuración de las formas de pensamiento. Para Tovar (2001), el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano.

Al hacer referencia al constructivismo existe la necesidad de considerar las aportaciones de Jean Peaget y Lev Semionovitch Vygostky, quienes destacaron la importancia de la acción (actividad) en la formación del pensamiento o construcción del conocimiento.

Wadsworth (1989) señala que para Piaget la construcción del conocimiento sucede al realizar acciones físicas o mentales con los objetos, los que, cuando se produce el desequilibrio, provocan la asimilación y el ajuste de dichas acciones y, en consecuencia, la construcción de esquemas o conocimiento. Un esquema es una estructura cognoscitiva que organiza una situación concreta tal como la percibe el organismo y la clasifica de acuerdo a sus características para posteriormente ser utilizado en una situación similar; cuando el individuo integra a sus esquemas existentes nuevos elementos perceptuales, motores o conceptuales, es decir, nueva información a su conocimiento se lleva a cabo el proceso de asimilación; el ajuste o acomodación es la transformación del esquema anterior con la nueva información para crear un nuevo esquema; la equilibración o adaptación es un estado de armonía entre la asimilación y el ajuste.

Para Piaget, el aprendizaje es la reestructuración interna del pensamiento y por lo tanto, la construcción de los tres tipos de conocimiento: El conocimiento físico de los objetos (tamaño, forma, peso, textura, etc.) se obtiene por experiencias activas con los mismos; el conocimiento lógico-matemático se construye mediante la reflexión acerca de las experiencias con los objetos. Estos dos conocimientos se obtienen a partir de las acciones con los objetos y no mediante la lectura o de escuchar el discurso del profesor. El conocimiento social se construye con las interacciones con otras personas y no de las acciones efectuadas con los objetos.

La actividad es un proceso de transformación del entorno a través del uso de instrumentos mediadores

> "Vygotsky considera que el hombre no se limita a responder a los estímulos sino que actúa sobre ellos, transformándolos. Ello es posible gracias a la mediación de instrumentos…" (Pozo, 1997, p.194)

Para Vygotsky, los instrumentos de mediación o mediadores transforman la realidad modificando activamente las condiciones ambientales a través de la interacción del sujeto con su entorno. De acuerdo al carácter de la actividad que se realice, existen dos tipos diferentes de instrumentos de mediación: la herramienta que modifica al estímulo al actuar materialmente sobre él y la cultura o medio social externo como un sistema de signos (dibujo, escritura, lectura, lenguaje hablado, uso de sistemas numéricos, etc.) y símbolos que no modifica al estímulo sino a la persona que lo interioriza, y es a través de éste, que modifica a los objetos.

> "La función de la herramienta no es otra que la de servir de conductor de la influencia humana en el objeto de la actividad; se halla externamente orientada y debe de acarrear cambios en los objetos. Es un medio a través del cual la actividad humana externa aspira a dominar y triunfar sobre la naturaleza. Por otro lado el signo no cambia absolutamente nada en el objeto de una operación psicológica. Así pues, se trata de un medio de actividad interna que aspira a dominarse a si mismo; el signo, por consiguiente, está internamente orientado."(Vygostky, 1988, p. 91)

El libro y el cuaderno de trabajo se elaboraron de acuerdo a un conocimiento que asegura el cumplimiento de los propósitos generales enmarcados para la unidad 1 de Matemáticas II con la finalidad de que el alumno (usuario) lo haga suyo. Estos dos productos los utiliza el alumno en acciones dirigidas para el cumplimiento de una actividad (orientación externa) y el profesor los usa para dirigir al alumno en la construcción de significados matemáticos (orientación interna) motivo de la actividad de enseñanza. De esta manera, el libro y el cuaderno de trabajo se convierten en instrumentos de mediación que al llevar a cabo la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas y realizar las actividades señaladas en ella, la mediación trasciende a los instrumentos convirtiéndose en una mediación mental, en un instrumento sicológico de tipo simbólico, por lo tanto la mediación es semiótica.

2.2 Registros semióticos de representación.

Shteerman (1984) manifiesta que durante centenares de siglos antes de nuestra era, cuando los homínidos irrumpen en el escenario del régimen comunal primitivo durante el desarrollo de la humanidad, traen consigo la construcción del lenguaje como medio para establecer la comunicación necesaria en la colectividad llamada gens. Un hombre por si solo y hasta un pequeño grupo, eran incapaces de asegurarse su existencia.

> "La vida del hombre no sería posible si éste hubiera de valerse solo del cerebro y las manos, sin los instrumentos que son producto social. La vida material del hombre está "mediatizada" por los instrumentos y de la misma manera, también su actividad sicológica esta "mediatizada" por eslabones producto de la vida social, de los cuales el más importante es el lenguaje."(Vygotsky, 2003, p.8)

En la evolución de este régimen social y mediante la transformación de lo concreto a lo abstracto, se evidenció el lenguaje y su escritura simbólica a través de esquemas de representación.

Según Duval(1999) las principales actividades cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas necesitan de la utilización de sistemas de expresión y de representación diferentes a los del lenguaje común o de las imágenes, por lo tanto, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para establecer una comunicación, sino también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática. Para que una persona exteriorice todo el conjunto de imágenes y concepciones que tiene sobre un objeto o situación y lo que les está asociado, solamente dispone de las representaciones semióticas (para el caso de las funciones cuadráticas los signos son: el enunciado en lenguaje común, la fórmula algebraica, la tabla y la gráfica).

> Dada la necesidad de las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas fundamentales y la implicación recíproca de las representaciones mentales y de las representaciones semióticas ……….no hay noésis[1] sin sémiosis; es la sémiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis.”(Duval, 1999, p.5)

Los objetos matemáticos como el número, el punto, el segmento, la función, etc. son representados a través de la escritura, una notación, un símbolo, un trazo una figura, etc.(Duval, 1993, p.118) en consecuencia, es importante no confundir a los objetos matemáticos con su representación pues con el tiempo, existe una pérdida de su comprensión; así el objeto representado es lo más importante y no sus diferentes representaciones semióticas posibles.(Duval, 1998, p.174).

---

[1] Duval define a la sémiosis como la aprenhensión o a la producción de una representación semiótica y a la noésis a la aprenhensión conceptual de un objeto. En Duval R. **Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento**, Grupo Editorial Iberoamérica. p. 176.

2.3 El currículum como herramienta de trabajo.

La revisión del currículum del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México con el objeto de considerar la elaboración de una propuesta de enseñanza que permita coadyuvar a la producción de materiales didácticos, es indispensable partir de que:

> "un currículum supone siempre, de forma explícita o tácita, una respuesta a las preguntas qué enseñar, cómo y por qué. Cuando un profesor asume una propuesta curricular, ya sea de buen grado o no, ya sea de creación propia o ajena, está asumiendo una forma de responder a las exigencias de su trabajo, esto es, una forma de resolver lo que [se] debe hacer en clase con los alumnos." (Contreras, 1991)

Tomando en cuenta la idea antes expresada, es posible considerar al currículum como la guía del quehacer educativo de los profesores , el que define en gran parte su trabajo docente, es decir, bajo esta misma idea, es la principal herramienta de trabajo del profesor, junto con el conocimiento de los contenidos y la elaboración de respuestas a múltiples preguntas.

> "Por eso mismo, podemos hablar también del currículum como del problema profesional con el que se encuentran todos los profesores. En definitiva, lo que uno anda buscando siempre, como si fuera la piedra filosofal, es aquella manera de plantearse la acción de enseñanza que contenga todas aquellas virtudes educativas que le pedimos a la práctica de nuestro trabajo." (Ibid)

Estas ideas se enlazan necesariamente con la intencionalidad de lograr que los egresados del ciclo bachillerato obtengan un conocimiento en el área de las matemáticas que les sea útil en su futuro profesional. Es decir, se debe valorar, la forma de instrumentar el Plan de Estudios en general y los programas de las asignaturas en particular, teniendo en cuenta:

> "Cómo conseguir que lo que se aprende en la escuela tenga un valor para los alumnos más allá de las paredes del aula. Qué contextos de relación en el aula hacen posible que aprender sea una actividad con un orden manejable, pero no aburrido. Qué actividades pueden tener la capacidad de intrigar al alumno y de enseñarle a la vez algo valioso. Todos éstos son problemas educativos con los que siempre se enfrenta un profesor, y suelen ser también algo a lo que trata de responder, con mayor o menor fortuna, todo proyecto curricular." (Ibid)

2.4 Los materiales curriculares.

Para intentar coadyuvar a alcanzar una mejora constante en la calidad de la enseñanza, al profesor se le ofrece una manera de como desarrollar su labor docente en el interior del aula, presentándole una propuesta de actividades a desarrollar con determinados materiales bajo una cierta selección de conocimientos, sin embargo, los materiales curriculares pueden ser de diferentes tipos por la:

> "doble característica del currículum; como herramienta y como problema. Un tipo muy usual de materiales son aquéllos que presentan lo que tienen de herramienta, pero dicen poco acerca de los problemas que intentan resolver. Es un currículum que intenta funcionar como un instrumento; se supone que sabiendo cómo funciona obtenemos de él lo que es capaz de darnos. En este caso, el currículum se expresa en el repertorio de actividades y materiales y en lo que podríamos llamar las instrucciones de uso: especificación de actuaciones, pasos y procedimientos ya decididos que se pretende que el profesor aplique. Lo más habitual es que este tipo de materiales se justifique ante sus

> posibles usuarios por su capacidad de conseguir resultados de aprendizaje.” (Contreras, 1991)

Comúnmente, el valor que se le proporciona a un material depende de los resultados obtenidos, es decir, depende de que los alumnos aprendan lo que se pretende enseñar a través de los materiales cuando éstos se utilizan durante el desarrollo de determinada actividad.

Para que a un profesor se le facilite entender el significado de todo el trabajo que realiza con la finalidad de una mejora continua, es necesario que el currículum exprese claramente los valores educativos que se deben de desarrollar a través de ciertas actividades y no ver el currículum sólo como respuesta a un problema educativo que únicamente exprese que hay que hacer y como hacerlo.

> Algunas preocupaciones a las que los mismos materiales tratan de dar muchas veces respuesta no están sólo en los aprendizajes sino en la forma en que se aprende, en los valores que en sí tienen las experiencias de relación y de actividad, tanto para el profesor como para los alumnos.(Ibid.)

Es decir, los materiales deben considerar en su elaboración el enfoque disciplinario y didáctico que contiene el programa de estudios de una asignatura y de un Plan de Estudios.

Para que una actividad sea amena para nuestros alumnos es necesario que exista una relación de significatividad, o sea, no dependa del contenido de la actividad en sí, sino en su relación cotidiana. Sin embargo, cada una de las actividades que se proponga debe estar en relación con la forma en que la entiende el profesor y su interpretación durante el desarrollo de la clase.

Para valorar una propuesta curricular, ésta tiene que ser revisada continuamente en la relación existente entre el conocimiento que se establece, las actividades que sugiere realizar y los materiales que han de utilizarse, con el tipo de conocimiento que quiere favorecer, las actitudes que quiere promover, las contingencias que pueden aparecer durante su desarrollo y las situaciones en las que hay que buscar nuevas posibilidades; lo anterior genera la probabilidad de que los profesores puedan expresar únicamente un tipo de valoración.

Esta valoración es a través de manifestar todos los acuerdos y errores que se detectaron en la puesta en práctica de la propuesta curricular; estos juicios dependerán de los resultados obtenidos, pero sin realizar un análisis de cuales son los factores que los determinaron. Podemos saber, por tanto, que un procedimiento no funciona o no consigue los resultados esperados, pero no sabemos por qué, cómo reconducir nuestra práctica, por consiguiente, no podemos aprender de nuestra experiencia, porque nuestra herramienta de trabajo nos lo impide.

2.5 El trabajo en el aula con materiales didácticos.

Es importante considerar cuales son los recursos con los que cuenta un profesor para el desarrollo de su actividad en el aula y lo único que se observa es que solo cuenta con la bibliografía recomendada en el programa de estudios; de la cual los textos sugeridos hacen alusión solamente a los contenidos temáticos y no al enfoque disciplinario y didáctico con el que se diseñó el programa de estudios; Esto dificulta a los profesores desarrollar adecuadamente los cursos que se les han asignado pues:

> “los profesores y alumnos dependen en gran medida, para el desarrollo de su actividad en las aulas, de un conjunto organizado de materiales que en la mayoría de los casos se diferencian por «áreas» curriculares

> y que incluyen normalmente una relación de objetivos que se quieren conseguir, el contenido temático de la disciplina o área de conocimiento, las actividades apropiadas del profesor y de los alumnos, así como las respuestas correctas que éstos deben producir, e incluso algunas pruebas de evaluación sobre los productos del aprendizaje. Tales materiales constituyen preelaboraciones de la práctica de la enseñanza, que facilitan y simplifican la tarea docente."(Martínez, 1991)

Es necesario señalar que el profesor debe cumplir con el desarrollo del currículum a lo largo del ciclo escolar y esto, "tiene de traducción en un determinado modelo de exigencias profesionales a los profesores, (que) no corresponde a menudo con la formación de que se les dota y las condiciones del contexto de realización del trabajo." (Ibid)

Para contar con los materiales educativos existen dos alternativas: o los elaboran las compañías editoriales o los profesores. En el caso de la primera opción conduce a lo siguiente: Una editorial o empresa externa se encarga de la elaboración de materiales curriculares y esto conlleva a que los objetivos, procesos y criterios de evaluación que contempla un determinado conjunto de materiales han sido definidos por personas ajenas a la institución educativa. Sería incompleto el análisis si no hiciéramos referencia al hecho de que las escuelas son un importante mercado lucrativo. Los materiales curriculares constituyen un fuerte volumen de capital que genera importantes beneficios, consecuentemente, ello va a producir comportamientos empresariales regidos por la lógica del beneficio: publicidad, creación de necesidades donde no las hay, encarecimiento, caducidad, burocratización y centralización de recambios y adaptaciones, agresividad comercial, etc.

En el caso de la segunda opción es necesario resaltar la idea de la alienación del conocimiento profesional de los profesores mediante una determinada forma de estructuración del currículum en materiales para uso en las aulas. Con ello se está indicando igualmente la fuerte vinculación entre el desarrollo práctico del currículum y la construcción del pensamiento práctico de los profesores.

2.6 Los materiales y la enseñanza.

En un sentido amplio, en el medio educativo los materiales se refieren a cualquier instrumento u objeto que pueda servir como recurso para que, mediante su manipulación, observación o lectura se ofrezcan oportunidades de aprender algo, o bien con su uso se intervenga en el desarrollo de alguna función de la enseñanza.

Es decir, los materiales proporcionan contenidos para su aprendizaje y sirven para estimular y dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje, total o parcialmente. Así, por ejemplo, el material sirve no sólo para construir conceptos, ideas, etcétera, sino también para promover el interés del alumno, guiarle en un determinado proceso de pasos a seguir, señalarle lo fundamental de lo accesorio, ejercitarle en unas destrezas, etc.

También, los materiales potencialmente relacionan cultura y formas de conectarse con ella; inciden en el contenido y en el proceso pedagógico mediante lo que se comunica. A su vez, seleccionan de entre lo que es comunicable aquello que realmente comunican.

Para expresar en conjunto esta idea se recurrirá al señalamiento que al respecto hace Sacristán (1991): ….consideramos que en la selección, uso y papel dominantes desempeñados por los materiales están implicadas las formas de entender la comunicación cultural, hábitos profesionales individuales y colectivos de los profesores, hábitos de consumo, intenciones explícitas y ocultas de controlar el contenido de la escolaridad y mecanismos económicos.

2.6.1 Formas de comunicar.

La educación escolarizada es un proceso de socialización cultural alejado de las actividades de producción material y cultural o de las relaciones sociales y obliga a que los sujetos se relacionen con los procesos y productos culturales a través de ciertos *mediadores*; como ya se planteó, la asimilación de la cultura se produce por medio de un proceso de intermediación.

Sacristán (1991), en su trabajo recurre al señalamiento que Lundgren (1983), hace con respecto a esta idea: "… cuando los procesos de reproducción se separan de la producción, aquélla se realiza por medio de la *representación* de ésta en un «texto» que debe ser portado por un mediador, porque pasa a ser una reproducción simbólica. Este es el valor de los materiales y ésa es la condición pedagógica fundamental a la que sirven: están llamados a ser soportes de la representación de la reproducción. A su vez, en la escolaridad actual ese texto de la reproducción se formula fuera del proceso reproducción educativa, y, lo mismo que ocurre con todo el currículum, los portadores del «texto» serán configurados fuera del proceso pedagógico. Es decir, el que elabora el soporte mediador fuera del ámbito pedagógico es un agente fundamental a tener en cuenta para entender el contenido de la práctica pedagógica y la práctica misma."

Los materiales, son los medios depositarios de la cultura, útiles en el proceso educativo, bien los consuma directamente el alumno o lo haga mediante la apropiación previa por parte de los docentes. Ante cualquier opción, el alumno en contacto directo con el material mediador o el profesor como intermediario de esa mediación, existe una alternativa pedagógica decisiva.

Desde una perspectiva cultural, los materiales son recursos necesarios para la función de conocimiento de la cultura en la enseñanza. El problema pedagógico es el de abrir el espectro de mediadores culturales y el de favorecer los usos pedagógicos más adecuados para el desarrollo de los individuos.

La cultura se ha plasmado y se puede expresar bajo distintas codificaciones que, en la vida y en la escuela, sirven para acercarse a ella, si bien es un hábito cultural el que las formas escritas de comunicación sean ahora las dominantes en los usos escolares, como en otro momento lo fueron las de transmisión oral.

2.6.2 El material didáctico como producto.

Los materiales didácticos tienen entre sus funciones, delimitar el contenido que se va a enseñar, misión que unos pueden desempeñar mejor que otros. Esta virtualidad no es ajena a que un sistema escolar realice la selección de medios didácticos en favor de aquellos que mejor pueden cumplir esta función.

Los materiales didácticos son objetos que se elaboran con el fin de darles un uso pedagógica, obviamente, pero, antes que nada, son productos vendidos y comprados; es decir: forman parte de una actividad económica. Como cualquier otro objeto, los productos culturales que son los materiales didácticos se generan y expanden dentro de un proceso social. Esta característica marca alguna de sus peculiaridades y condiciones de uso; entre consumidores (profesores, alumnos, padres, centros) y productores existe una relación muy desigual. Los primeros no están organizados ni tienen muchos recursos para incidir como demandantes en ese mercado. Teóricamente sí pueden hacerlo: bastaría, por ejemplo, un profesorado que exigiese materiales distintos a los existentes para que el productor intentara darles satisfacción, dado que las empresas especializadas hoy se rigen en general más por la lógica del mercado que por motivaciones ideológicas, si bien éstas pueden no desaparecer del todo, como ocurre con la edición de libros en general, medios de comunicación, etc.

2.7 La evaluación de los materiales.

Se ha sido reiterativo en denominar como materiales didácticos a las diferentes herramientas o utensilios que utilizan los profesores y los alumnos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, algunos investigadores han realizado una clasificación de los mismos

> "Unos tienen un carácter globalizado, articulante y orientativo de todo el proceso (materiales curriculares, libros de texto, por ejemplo) y otros son elementos vicarios, de carácter auxiliar (ordenadores, material de laboratorio, retroproyectores, diapositivas, etc.). Los materiales no son un fin en sí mismos, por lo que ya desde aquí estamos refiriéndonos a un criterio de valoración que no se encuentra exclusivamente en su calidad sino en el modelo de enseñanza que se persigue, en la finalidad a la que se los destina, en el modo de utilizarlos y en las repercusiones que su uso conlleva. En definitiva, solamente su uso, puesto al servicio de un proceso de enseñanza-aprendizaje y analizado desde una concepción determinada de éste, permitirá entender si resultan útiles, estériles o incluso, perjudiciales." Santos(1991).

Es necesario hacer una evaluación asentada en una pluralidad de recolección de evidencias y firmemente arraigada en cuestiones de valor. En definitiva, aquello que nos pueda permitir decir que los mejores materiales pueden convertirse en los peores y que no hay materiales en si mismos didácticos. Todo depende de la concepción que los sustente, de la intención con que se utilicen y de las condiciones de dicho uso.

Para Santos (1991) la evaluación de un material se realiza mediante los siguientes criterios:

> “— *Observar* cómo esos materiales orientan la práctica, cómo ayudan al profesor a ponerla en cuestión, cómo potencian una serie de actividades y de estrategias de pensamiento y de acción, cómo favorecen la discusión..., será un camino que permita recoger datos significativos y relevantes para la cuestión.
> — *Preguntar* a los protagonistas (profesores y alumnos sobre todo, y también padres) qué valor atribuyen a los materiales, qué facilidades o dificultades encuentran en su uso, qué aspectos potencian y cuáles atrofian..., será otro sendero que nos lleve a buen fin.
> — *Contrastar* la utilización de unos materiales con la de otros, sean éstos de carácter descendente o ascendente (llamo ascendentes a los que han sido elaborados por los profesores y por los alumnos, frente a los que tienen el marchamo de la aprobación legal) ayudará a conocer las particularidades de ambos, si se somete a discusión y a un análisis compartido sus virtualidades didácticas.”

2.7.1 El uso de los materiales.

La evaluación del uso que se hace de los materiales, permite ver su potencialidad educativa, sobre todo cuando se realiza una evaluación en diversos contextos. Puede ser que los materiales didácticos no sean auxiliadores eficaces en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya sea porque el profesor haga una utilización mecánica de ellos o porque no los adapte a las capacidades de los alumnos, o porque los materiales resulten ininteligibles para los alumnos. Más aún, puede ser que un uso excesivamente servil del material impida una dinámica viva y reflexiva por parte del profesor como orientador del proceso de aprendizaje.

Por eso, se propone el uso de materiales curriculares a raíz de la actividad escolar. Materiales que pueden ser sometidos a la discusión de otros profesionales y que pueden multiplicar las ejemplificaciones surgidas de la experiencia. En ese sentido, los materiales producidos tienen unas características inversas a las de los materiales impuestos.

2.7.2 Los materiales en el marco de la propuesta.

Algunos elementos importantes que deben considerarse en el diseño de la propuesta de material didáctico son las respuestas al qué, dónde, cómo y cuándo; el qué se refiere a los objetivos que se han planteado, el dónde se va a llevar a cabo, el cómo a su disponibilidad y qué materiales se van a utilizar. Estos materiales son los apoyos necesarios para lograr los objetivos por el gran impacto que presentan en la planeación de la práctica docente de los profesores

> "en la planeación, el profesor toma determinadas decisiones que le sirven como guión, como rutina para enfrentarse a la fase interactiva de una forma ordenada y no errática y superar la sobrecarga que ……le supondría procesar toda la información de lo que sucede en el aula" (Pozo, 2006,p.83)

De esta manera, la propuesta de material didáctico es una organización de conocimientos a desarrollar; así, los materiales se pueden entender como:

> "aquellos artefactos que, en unos casos utilizando las diferentes formas de representación simbólica y en otros como referentes directos (objeto), incorporados en estrategias de enseñanza, coadyuvan a la reconstrucción del conocimiento aportando significaciones parciales de los conceptos curriculares. Los materiales representan uno de los componentes fundamentales del currículum y sólo tienen sentido cuando están plenamente integrados en el proyecto, tanto en la fase de diseño, como en la interactiva y, por supuesto, en la de evaluación. Los

> materiales, pues, no son autónomos, sino que están supeditados, por un lado a los requerimientos concretos del proyecto curricular y, por otro, a las reglas institucionales y del grupo de clase que determinan las prácticas pedagógicas en los centros.“ (San Martín, 1991)

2.8 La formación de los profesores.

La mayor parte de los esfuerzos de las Administraciones y del conjunto de la comunidad educativa, cada uno en sus ámbitos respectivos, deben de conseguir que el sistema educativo favorezca el máximo desarrollo personal de los alumnos, se adapte a sus necesidades específicas, responda a las exigencias de la sociedad y colabore con la compensación de las desigualdades. Todo ello por medio de la provisión de mayores recursos humanos y materiales a los centros educativos, del apoyo a la formación y promoción profesional de los docentes, y del desarrollo de un nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, el que los profesores elaboren los materiales didácticos lleva a una nueva forma de entender el proceso de enseñanza, junto con las medidas destinadas a favorecer la práctica profesional y la motivación de los profesores, puede contribuir en mayor medida a que aumente el número de alumnos que aprendan con éxito.

Lo anterior otorga mayores posibilidades a los profesores para que organicen el conjunto de las enseñanzas en una etapa educativa de acuerdo con el entorno social y cultural de la escuela, las características de los alumnos y los criterios pedagógicos del profesorado que reconoce la importancia de atender los ritmos de aprendizaje propios de los alumnos, en resumen, reconoce un papel más relevante al profesor y a los equipos de profesores para adoptar decisiones curriculares.

Esta opción supone dos consecuencias importantes. En primer lugar, los profesores han de adoptar las decisiones oportunas sobre qué contenidos van a concretarse en cada ciclo o curso con el fin de garantizar la coherencia de los aprendizajes de los alumnos; en segundo lugar, las Administraciones educativas deberán proporcionar a los profesores suficientes modelos, orientaciones, capacitación y actualización para que esta tarea pueda realizarse con eficacia.

Las Administraciones educativas deberán incorporar en su programa de formación de profesores, la preparación de los mismos para que sean capaces de organizar los contenidos y de adecuarlos a las características de su entorno y a sus alumnos. Igualmente deberán indicar quienes son los responsables de coordinar estas tareas en los centros educativos y los tiempos que deberán dedicarse a este objetivo dentro de su horario de trabajo.

El proceso de elaboración de un material educativo conlleva necesariamente a la formación de profesores. Es importante subrayar la interdependencia de ambos procesos; Una buena política de formación de profesores debe conducir a que estas actividades se orienten hacia equipos de profesores para modificar su práctica docente y para mejorar su competencia dentro de este modelo de enseñanza-aprendizaje.

Marchesi (1991) propone que todos los materiales que se centran en el proceso de enseñanza y aprendizaje para un grupo concreto de alumnos de un ciclo o curso específico de una etapa educativa., son materiales que tienen, por lo tanto, como interlocutor no a un equipo docente sino a un profesor individual, y que no se refieren a temas generales que trascienden las áreas específicas sino que, por el contrario, están focalizados en alguna o algunas de ellas.

2.9 Un programa como guía de la actividad educativa.

De acuerdo con Gil (1991) el currículo es la expresión de un conjunto de actividades desde el punto de vista constructivista a través de las cuales los conocimientos y las habilidades pueden ser construidos; La más importante implicación del modelo constructivista en el diseño curricular es «concebir el currículum, no como un conjunto de conocimientos y habilidades, sino como el *programa de actividades* a través de las cuales dichos conocimientos y habilidades pueden ser construidos y adquiridos».

El desarrollo de un programa-guía de actividades, es decir, de un programa de actividad dirigida, ha de constituir un trabajo colectivo para los alumnos, en el doble sentido de formación de equipos (organización de la clase en pequeños grupos) y de frecuentes intercambios entre grupos, con la participación del profesor como «portavoz de otros muchos colegas». (Ibid).

Con la finalidad de tener un conocimiento general, los programas-guía deben de contener problemas que necesitan un mayor tiempo de dedicación a su solución y desde diferentes ángulos, al contrario de los problemas resueltos en el transcurso de la clase. El aprendizaje de las ciencias necesita de cambios conceptuales y epistemológicos profundos donde el aprendizaje superficial no tiene cabida.

El diseño de programas-guía de actividades que hagan posible la construcción de conocimientos por los alumnos y genere actitudes positivas hacia el aprendizaje, constituye un trabajo de actividades reflexivas en el que necesariamente han de implicarse los profesores.

Uno de los criterios necesarios a establecer, es el relativo a la importancia de considerar durante la elaboración del material de un programa-guía, que el conjunto de contenidos temáticos que se van a incorporar estén ordenados de manera secuencial, si se considera que:

> “La secuenciación de contenidos constituye uno de los retos más importantes para los profesores. Son muchos los problemas que se suscitan y existen variedad de puntos de vista desde los que se pueden abordar. Es pues una cuestión de opciones que, además, no debe tener una respuesta definitiva. Será la experiencia, adecuadamente evaluada, la que permite ir modificando o ajustando la propuesta a los distintos contextos, a la variedad de problemas educativos.” (ICE, 1990).

Además de que

> “Las actividades que se seleccionen deben tener una función clara: promover la adquisición de un concepto o procedimiento, ampliar la forma de ver situaciones y problemas, poner en cuestión determinadas ideas, valores o actitudes, aplicar conocimientos ya adquiridos a situaciones nuevas o consolidar y sintetizar aprendizajes realizados”(Del Carmen, 1996, p. 191)

CAPÍTULO 3

LA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

3.1 Ubicación de las funciones cuadráticas.

En el programa de estudios de la asignatura de matemáticas II se establece que:

> “las unidades que se trabajan en este curso, corresponden fundamentalmente a **los ejes de funciones, Geometría Euclidiana y Trigonometría;** sin embargo, el Álgebra se sigue manejando a través de los contenidos de estas cinco unidades, y por otra parte se sientan los cimientos para abordar la temática correspondiente a la Geometría Analítica que se estudiará en el semestre siguiente.
>
> El segundo semestre de matemáticas se inicia con el estudio de la función cuadrática, lo que permite, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir ahora un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y, por otro, vincular estas funciones con las ecuaciones cuadráticas que recién ha trabajado el alumno, aspecto que enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones.” (CCH, 2002, p.28)

Es prudente señalar que durante el primer semestre, en el curso de matemáticas I,

> “se comienza a trabajar el concepto de función y el manejo del plano Cartesiano, entretejiéndolos con la búsqueda de representaciones (algebraica, tabular y gráfica) para estudiar diversas situaciones que involucran cambio.” (CCH, 2002, p.15)

Además, que posteriormente en el curso de matemáticas IV

> “por medio del estudio de diversas funciones, se consolidan e integran conceptos y procedimientos de los ejes temáticos que el alumno ha venido asimilando en los cursos anteriores, tanto en el manejo de

> expresiones algebraicas y del plano cartesiano, como en el estudio de relaciones numéricas entre objetos geométricos. Corresponde a este semestre profundizar y ampliar el concepto de función; identificar sus elementos; incorporar la notación funcional; realizar un análisis cualitativo en el que se establecen relaciones entre los parámetros de la representación algebraica, la gráfica y la forma de variación de la función en cuestión; explorar simetrías y transformaciones en el plano e introducir la noción de función inversa y con ello, fomentar el desarrollo de la reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o de un proceso de pensamiento). Las funciones que se estudian corresponden a distintos tipos de variación, lo que permite mostrar al alumno una amplia gama de aplicaciones de esta importante herramienta matemática.” (CCH, 2002, p.56)

A partir del estudio de las funciones cuadráticas en el segundo semestre es posible retroalimentar la idea de función gestada mediante la introducción del concepto de función lineal ,en el primer semestre, por lo que con los procesos de enseñanza-aprendizaje que se dan en el aula y con la elaboración de una propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas como un material complementario, los alumnos pueden seguir construyendo el concepto de función, el cual utilizarán en el curso de matemáticas IV.

Una vez que se estableció elaborar una propuesta de enseñanza para las funciones cuadráticas que corresponde a la Unidad 1 del programa de estudio de la asignatura de Matemáticas II del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México se procedió a establecer las características que debería de cumplir tal propuesta.

3.2 Propósitos, aprendizajes y contenidos que debe cumplir la propuesta.

El objetivo de este apartado es presentar de manera breve una forma en la que se describe los contenidos matemáticos que un estudiante del ciclo bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades debe conocer, durante el desarrollo del curso en el aula de la Unidad 1, denominada Funciones Cuadráticas, como parte del curso de la Asignatura de Matemáticas II del Plan de Estudios de la Institución.

Del programa de la asignatura de Matemáticas II, establecido en junio del 2004 y correspondiente a las páginas 32 y 33 del documento, la Unidad 1 es la siguiente:

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMATICA
El alumno: • Explora, en una situación o problema que da lugar a una función cuadrática, las condiciones, valores, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etc. de manera que obtenga información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica. • Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. • Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada. • Reconoce las diferencias de los dos tipos de variación que conoce (lineal y cuadrática). • Distingue una ecuación cuadrática de una función cuadrática.	• Se sugiere iniciar con problemas de movimiento o geométricos. • Se pueden modelar funciones cuadráticas a partir de tablas sobre este tipo de comportamiento, como arreglos de números triangulares, rectangulares, pentagonales o el patrón de comportamiento del número de diagonales en un polígono. • También ayuda la elaboración de gráficas en clase, localizando puntos con ayuda de la calculadora. Después de una práctica formativa, se sugiere el trazado de gráficas con el apoyo de la computadora, se recomienda también el uso de Excel para tares fuera del aula.	• Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas. • Comparación de la función cuadrática con la función lineal. • Intersecciones de la gráfica de una función cuadrática con el eje x. • Estudio gráfico y analítico de la función: $y = ax^2 + bx + c$, casos particulares: $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = a(x - h)^2$, $y = a(x - h)^2 + k$. • Concavidad, máximo o mínimo. • Problemas de máximos y mínimos. Resolución algebraica.

• Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con **el *eje x***, con la naturaleza de las raíces. En particular identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas. • Transita por los diferentes tipos de registro de la función cuadrática (tabular, algebraico y gráfico). • Encuentra el significado del papel que juegan los parámetros en el comportamiento de una gráfica: **-** En el modelo $\boldsymbol{y = ax^2}$, analiza el impacto de la constante ***a***, y deduce la orientación de la parábola, según la constante ***a*** sea mayor o menor que cero. - En el modelo $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$ comprende el papel del parámetro ***c***, en la traslación de la gráfica $\boldsymbol{y = ax^2}$ hacia arriba o hacia abajo del eje ***x,*** según se le asignan valores positivos o negativos a ***c***. - En el modelo $\boldsymbol{y = a(x - h)^2}$, interpreta el papel del parámetro ***h***, como la forma para desplazar la parábola $\boldsymbol{y = ax^2}$ a la derecha o la izquierda, según el valor de ***h*** sea positivo o negativo. - En el modelo $\boldsymbol{y = a(x - h)^2 + k}$, deduce que el impacto de los parámetros ***h*** y ***k*** es el de trasladar y desplazar la parábola $\boldsymbol{y = ax^2}$. • Integra a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría**.** • Se ejercita en la técnica de completar cuadrados.	• Se puede sugerir a los alumnos después de algunos ejemplos, cómo aprovechar la propiedad de simetría de las funciones cuadráticas para graficar de manera más rápida. • Mediante el análisis de distintos ejemplos tanto del comportamiento del registro tabular como de las gráficas correspondientes, se pueden revisar los conceptos de máximo y mínimo. • En la expresión $\boldsymbol{y = ax^2}$, se analizarán las posibilidades del parámetro ***a*****:** $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{a < 0}$, $\boldsymbol{\lvert a \rvert > 1}$, $\boldsymbol{\lvert a \rvert < 1}$ y su relación con la orientación y abertura de la gráfica correspondiente. • Es conveniente resaltar la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización, de diversos contextos, por ejemplo; numéricos, de áreas, costos y ganancias.	

• Expresa una función cuadrática escrita en la forma general ***$y = ax^2 + bx + c$,*** en la forma estándar ***$y = a(x - h)^2 + k$***; y puede describir su gráfica a partir del análisis de sus parámetros. • Otorga significado a las coordenadas del vértice en términos del valor máximo o mínimo de la función. • Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática. • Interpreta el comportamiento de la gráfica dentro del contexto de una situación dada**.**		

En primer lugar, la propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas debe posibilitar cumplir los propósitos establecidos para esta unidad, es decir, el material elaborado debe, como se señala en el programa de estudio de la asignatura de matemáticas II, para la Unidad 1:

> "Continuar con el estudio de funciones a partir del estudio de situaciones que varían en forma cuadrática; contrastar este tipo de variación con la lineal. Analizar el comportamiento de la gráficas de funciones cuadráticas en términos de sus parámetros e iniciar la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos." (CCH, 2002, p.32)

En segundo lugar se debe elaborar una propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas que promueva que el alumno logre el conjunto de aprendizajes establecidos en el programa de estudios.

En tercer lugar en la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas se deben integrar los contenidos temáticos que se establecen en el programa de estudios.

En cuarto lugar en el diseño de propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas se tiene que considerar el tiempo en el que, de acuerdo con el programa de estudios de la asignatura, se debe desarrollar la unidad en el aula. Por ello, el tiempo en el que se puede desarrollar la propuesta de enseñanza en el aula es, como lo indica el programa de estudios, de 15 horas que corresponde a 9 sesiones: seis de dos horas y tres de una hora.

En quinto lugar en la elaboración de la propuesta se debe utilizar un lenguaje comprensible para los estudiantes; de manera tal, que sin renunciar a la notación propiamente matemática los contenidos temáticos sean accesibles para ellos.

Considerando los cinco criterios establecidos en las líneas anteriores se elaboró la propuesta de enseñanza de funciones cuadráticas.

3.3 La propuesta de enseñanza.

La propuesta de enseñanza de las funciones cuadráticas se encuentra estructurada en 6 secciones, en las cuales se presenta una o más series de ejercicios con la solución respectiva a cada una de las preguntas que los integran, y un examen diagnóstico y su solución.

La primera sección denominada Introducción se inicia con tres problemas relativos al área de unas superficies rectangulares con el objeto de obtener su expresión funcional, a manera de introducción a la temática.

En la segunda sección denominada Funciones Cuadráticas se caracterizan las expresiones funcionales obtenidas de los problemas iniciales como funciones cuadráticas, con el fin mostrar que la característica de la gráfica de estas funciones es una parábola y señalar los elementos que se pueden distinguir de ella.

En la tercera sección relativa a la Gráfica de una Función Cuadrática se les muestra a los alumnos como elaborar la gráfica de una función cuadrática utilizando las funciones obtenidas de los problemas iniciales. Insistiendo en la conveniencia de elaborar una tabla de valores que contenga la columna de la variable independiente y la de la variable dependiente como una forma concentrada de mostrar la información que permitirá elaborar la gráfica.

En la cuarta sección que se nombra como Raíces de la Ecuación Cuadrática asociada a la Función Cuadrática se le explica a los alumnos que los puntos de intersección de la gráfica con el eje de las x corresponden a la solución de la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática, cuando ésta es igual a cero, esto es cuando $f(x) = 0$.

En la quinta sección se estudia el comportamiento de los parámetros de la función cuadrática cuando se expresa de la forma:

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

En la sexta y última sección se enseña la forma en que se determina el vértice de la parábola.

En el examen diagnóstico se presentan algunos reactivos para que el estudiante pueda verificar el aprendizaje obtenido durante el desarrollo de la unidad y pueda, en su caso, revisar las secciones que considere conveniente.

FUNCIONES CUADRATICAS

1.1 INTRODUCCIÓN

En diversos textos de Matemáticas de educación media superior, es común encontrar problemas de diferente índole que conducen al planteamiento de una función cuadrática. Algunos de estos problemas son los siguientes:

Problema 1

Un granjero tiene 120 metros de malla de alambre y con ello desea cercar un terreno de forma rectangular. Determine la función que representa el área cercada.

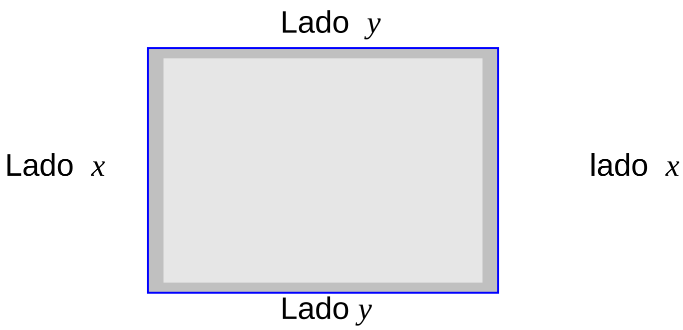


Figura 1. Esquema del problema 1.

La solución que se propone es la siguiente:

De la figura 1 se observa que el perímetro del terreno rectangular es igual a 120 metros corresponde a dos veces el lado $\boldsymbol{x}$ más dos veces el lado $\boldsymbol{y}$**,** por lo tanto el modelo matemático equivalente es:

2 veces la longitud del lado $\boldsymbol{x}$ + 2 veces la longitud del lado $\boldsymbol{y}$ = 120 metros

$$2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 120$$

Se considera al valor de $\boldsymbol{y}$ como la variable dependiente, de tal manera que despejando $\boldsymbol{y}$ de la ecuación anterior se tiene que:

$$2\boldsymbol{y} = 120 - 2\boldsymbol{x}$$

$$y = \frac{120}{2} - \frac{2x}{2}$$

$$y = 60 - x$$

Por otra parte, al recordar que el área de la superficie de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura, es decir:

Área de un rectángulo = (base)(altura)

Área de un rectángulo = (la longitud del lado y) (la longitud del lado x)

Por lo tanto, la expresión algebraica es:

$$\text{Área} = (\text{lado } x)(\text{lado } y)$$

$$A = x\, y$$

$$A = x\,(60 - x)$$

$$A = 60x - x^2$$

En consecuencia, la función que representa el área cercada es la expresión:

$$A(x) = 60\,x - x^2$$

Problema 2

Un granjero tiene 120 m de malla de alambre y con ello desea cercar tres lados de un terreno en forma rectangular, utilizando una barda como límite del cuarto lado. Determine la función que representa el área cercada.

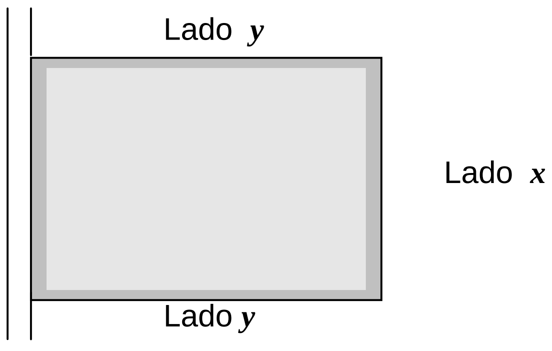


Figura 2. Esquema del problema 2.

Se propone la siguiente solución:

Si se observa el contorno del terreno rectangular que se desea cercar, está determinado por los 120 metros que son iguales a dos veces la longitud del lado y, más una vez la longitud del lado x, por lo tanto el modelo matemático equivalente es:

2 veces la longitud del lado y + 1 vez la longitud del lado x = 120 metros

$$2y + x = 120$$

Como en el caso anterior, se considera al valor de y como la variable dependiente, de tal manera que al despejarla de la ecuación anterior se tiene que:

$$2y = 120 - x$$

$$y = \frac{120}{2} - \frac{x}{2}$$

$$y = 60 - \frac{1}{2}x$$

Por otra parte, es necesario recordar que el área de la superficie de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura, es decir:

Área de un rectángulo =(base)(altura)

Área de un rectángulo = (la longitud del lado y) (la longitud del lado x)

Como el lado $y = 60 - \frac{1}{2}x$, entonces la expresión algebraica correspondiente es:

$$\text{Área} = (\text{lado } x)(\text{lado } y)$$

$$A = x\,y$$

$$A = x\left(60 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$A = 60x - \frac{1}{2}x^2$$

De esta manera, la función que representa el área cercada es la expresión:

$$A(x) = 60x - \frac{1}{2}x^2$$

Problema 3

Un granjero con 120 m de malla de alambre desea cercar sólo dos de los lados (uno ancho y otro largo) de un terreno de forma rectangular. ¿Cuál es la función que representa el área cercada?, como se muestra en la siguiente figura.

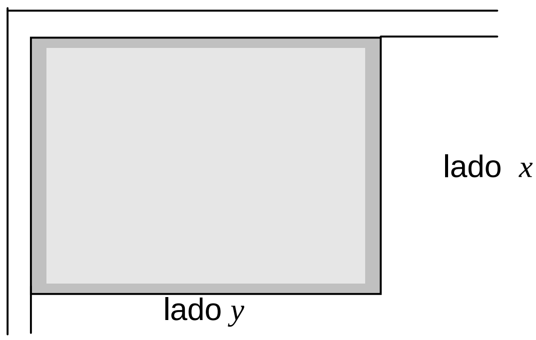


Figura 3. Esquema del problema 3

Propuesta de solución

De la figura 3 se deduce que el contorno del terreno rectangular que se va a cercar está determinado por los 120 metros que ocupará en cubrir la longitud del lado x más la longitud del lado y, por lo tanto el modelo matemático equivalente es:

La longitud del lado x + la longitud del lado y = 120 metros

$$x + y = 120$$

El valor de y se considera como la variable dependiente así es que al despejarla de la ecuación anterior se tiene que:

$$y = 120 - x$$

Como el lado $y = 120 - x$, entonces la expresión algebraica correspondiente al área es:

$$\text{Área} = (\text{lado } x)(\text{lado } y)$$

$$A = x\ y$$

$$A = x\,(120 - x)$$

$$A = 120\,x - x^2$$

Así que, la función representativa del área cercada es:

$$A(x) = 120\,x - x^2$$

NOTA IMPORTANTE

Las tres funciones obtenidas anteriormente se expresan de la siguiente manera:

$$A(x) = 60\,x - x^2 \quad \textbf{ó} \quad A(x) = -x^2 + 60\,x$$

$$A(x) = 60\,x - \tfrac{1}{2}\,x^2 \quad \textbf{ó} \quad A(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 60\,x$$

$$A(x) = 120\,x - x^2 \quad \textbf{ó} \quad A(x) = -x^2 + 120\,x$$

1.2 Función cuadrática.

Las tres expresiones anteriores se clasifican como funciones cuadráticas, que se definen como aquellas **"cuyos valores están dados por un polinomio cuadrático, ax^2 + bx + c , donde a, b y c son números reales y a es diferente de cero".**[1]

Una función cuadrática puede tener una de las siguientes formas:

$y = a\,x^2$; $a \neq 0$; a es un número real

$y = a\,x^2 + b\,x$; $a \neq 0$; a, b son números reales

$y = a\,x^2 + c$; $a \neq 0$; a, c son números reales

$y = a\,x^2 + bx + c$; $a \neq 0$; a, b, c son números reales

[1] Dolciani, Berman, Nooton (1992) Álgebra Moderna y Trigonometría. Tomo II, Edit. Publicaciones Cultural S.A. pag. 226.

Hay que recordar que la gráfica de una función cualquiera es el lugar geométrico de todos aquellos puntos cuyas coordenadas se obtienen considerando una x (variable independiente) del dominio de la función y con esa x se calcula el valor de su imagen y, de acuerdo a la regla de correspondencia.

La gráfica de la función cuadrática se obtiene asignando un valor a x y determinando los valores que corresponden a y a través de la regla de correspondencia que es expresada por la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c \quad ; a \neq 0$$

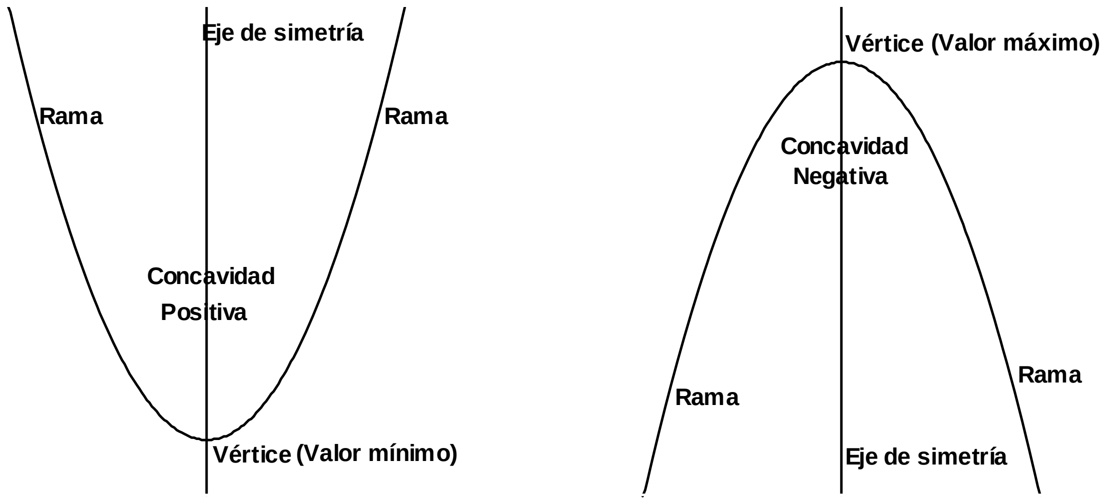


Figura 4. Elementos de una parábola.

Al trazar la curva por los puntos colocados en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica correspondiente, la cual se denomina **parábola**. Como se observa, esta gráfica tiene como características especiales: dos “ramas”, un vértice, un eje de simetría, una concavidad y un valor máximo o mínimo.

1.3 Gráfica de una función cuadrática.

A continuación se grafican cada una de las funciones obtenidas para los tres primeros problemas.

Problema 4

Grafica la función $y = -x^2 + 60x$

Solución

Para obtener los puntos (x, y) que permitan realizar la gráfica que corresponde a la función, es necesario elaborar una tabla de los valores de x y y; los valores de x se proponen, mientras que los valores de y se obtienen al sustituir el valor de x en la expresión.

Así, si $x = -10$ entonces $y = -x^2 + 60x = -(-10)^2 + 60(-10) = -100 - 600 = -700$

Cualquier otro valor de y se obtiene en forma similar. En la siguiente tabla se presentan algunos valores y en la figura siguiente se muestran como se grafican.

x	$y = -x^2 + 60x$
-10	- 700
0	0
10	500
20	800
30	900
40	800
50	500
60	0
70	- 700

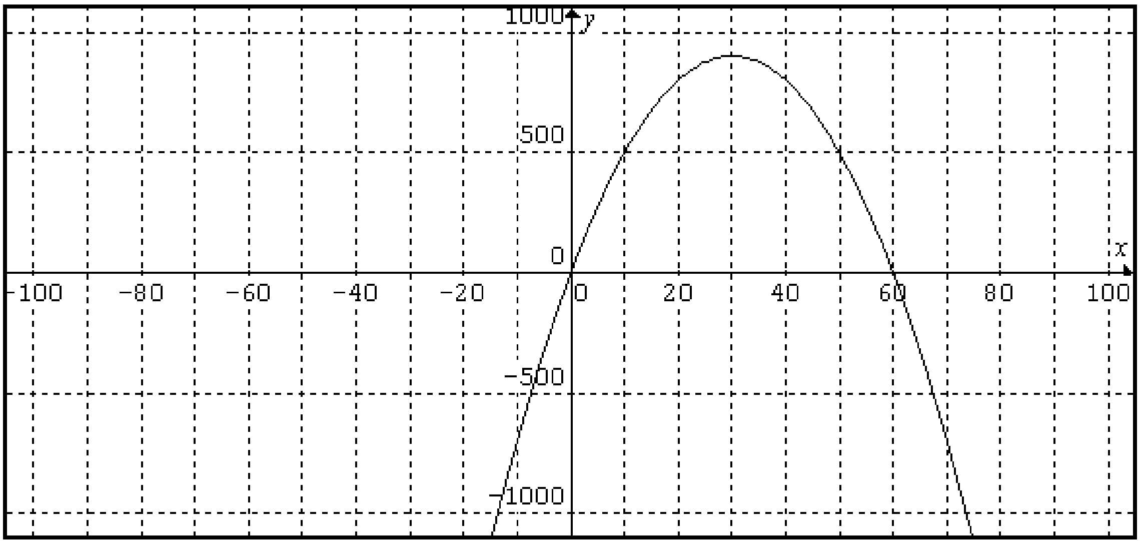


Figura 5. Gráfica que corresponde a la función cuadrática del problema 1

Problema 5.

Grafica la función $y = -\frac{1}{2}x^2 + 60\,x$

Solución

Para graficar la función es necesario obtener los valores de las variables, como se presenta en la siguiente tabla.

x	$y = \frac{1}{2}\ x^2 + 60\ x$
- 10	- 650
0	0
20	1000
40	1600
60	1800
80	1600
100	1000
120	0
130	- 650

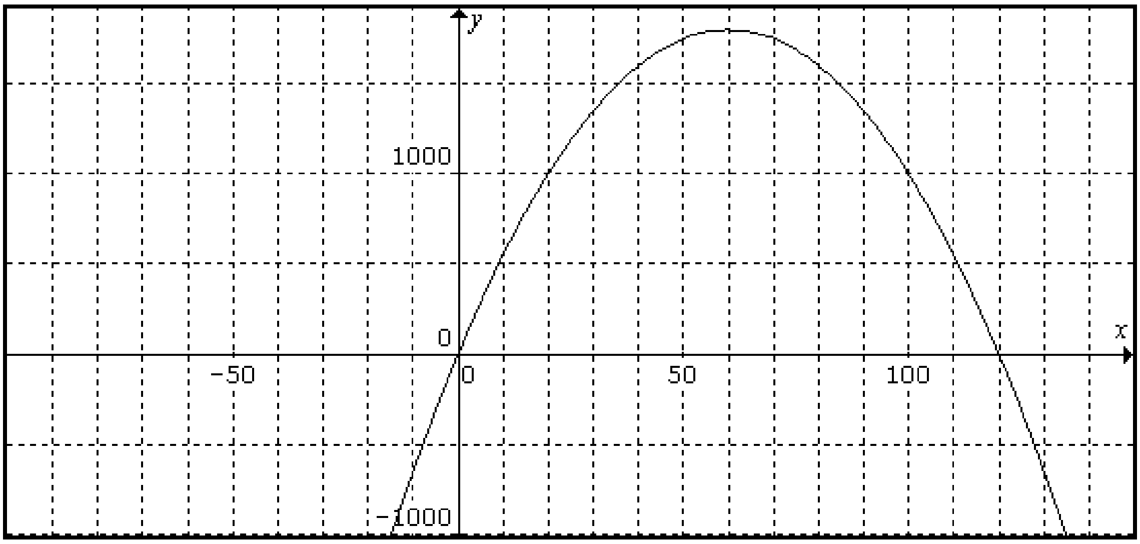


Figura 7. Gráfica que corresponde a la función cuadrática del problema 2

Serie de ejercicios 1

Completa las expresiones siguientes escribiendo las características de la parábola obtenida en la figura que corresponde al problema 2.

El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (_____ , _____)

Las ramas de la parábola abren hacia ________________

Cuando las ramas abren hacia arriba, entonces **a** es ____________________

La ecuación del eje parabólico o eje de simetría es x = _______________

La concavidad de la parábola es ___________________

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor máximo. ¿De cuánto es este valor máximo? ________________

Si se compara esta función $y = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} + 60\,\boldsymbol{x}$ con $y = ax^2 + bx + c$, entonces el valor del coeficiente del término cuadrático **a** es ____________, el valor del coeficiente del término lineal **b** es igual a ____________ y el valor del término **c** es igual a ____________

Elabora la gráfica del problema 3.

Problema 6.

Construye una tabla y la gráfica de la función $y = x^2$.

Solución.

Al comparar la función dada ($y = x^2$) con la función $y = \mathbf{a}\,x^2 + \mathbf{b}\,x + \mathbf{c}$, se observa que el coeficiente **a** = 1, por lo tanto **a** > 0 ; el valor de **b** = 0 y **c** = 0.

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Los puntos de la tabla son

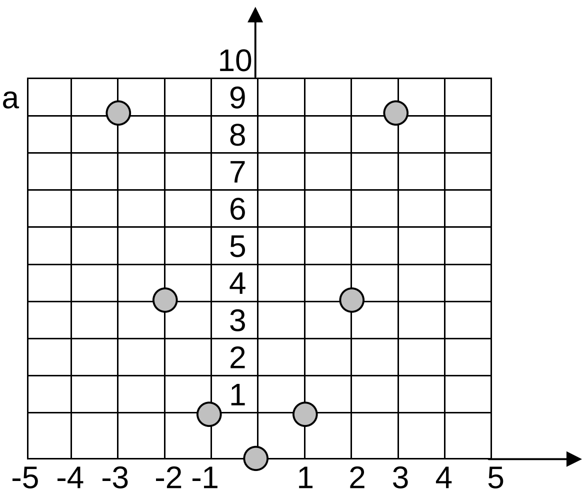


Figura 8. Puntos que corresponden a la función $y = x^2$

Actividad

Con una línea une los puntos de la tabla ubicados en el plano cartesiano para obtener la gráfica que corresponde a una parábola.

Observa la gráfica y comprueba las siguientes conclusiones a las que se llegan:

- El vértice se encuentra en el origen V(0,0).

- El eje de simetría es el eje de las ordenadas, es decir, la parábola es simétrica al eje y, por lo tanto la ecuación del eje de simetría es $x = 0$
- La concavidad es positiva.
- Las ramas de la parábola abren hacia arriba; el valor de **a** > 0.
- Tiene un valor mínimo igual a cero.

Problema 7.

Construye la tabla y la gráfica de la función $y = -x^2$

Solución

Al comparar la función dada $y = -x^2$ con la función $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$, observa que el coeficiente **a** = -1, por lo tanto **a** < 0 ; el valor de **b** = 0 y **c** = 0, así que la gráfica correspondiente es la siguiente:

x	$y = -x^2$
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9

Los puntos de la tabla son

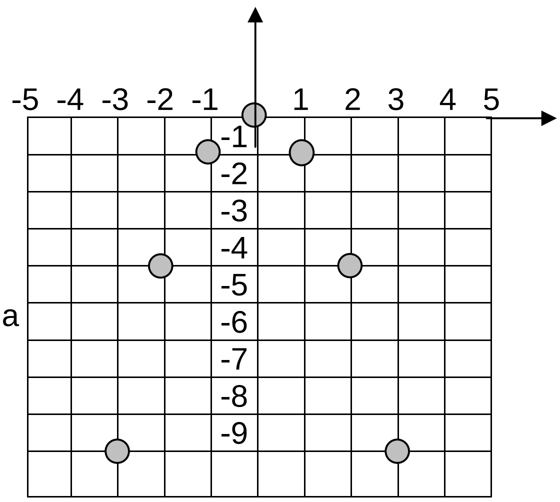


Figura 9. Puntos correspondientes a la función $y = -x^2$

Actividad

Con una línea une los puntos de la tabla que han sido localizados en el sistema de coordenadas cartesianas de la gráfica anterior.

Observa la gráfica y comprueba las siguientes conclusiones a las que se llegan:

- 🕮 El vértice se encuentra en el origen V(0,0).
- 🕮 El eje de simetría es el eje de las ordenadas, es decir, la parábola es simétrica al eje $\boldsymbol{y}$, por lo tanto la ecuación del eje de simetría o eje parabólico es $x = 0$
- 🕮 Las ramas se abren hacia abajo (a < 0)
- 🕮 Tiene un valor máximo igual a cero.
- 🕮 Su concavidad es negativa.

Ejercicio 1.2

Compara entre sí, las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$. Señala lo que tienen en común y lo que tienen de diferente.
¿Cuáles son las cosas comunes?

¿Cuáles son las cosas diferentes?

¿A qué conclusión se llega?

Problema 8.

Grafica las funciones $\boldsymbol{y = x^2}$ y $\boldsymbol{y = x}$ en un mismo sistema de coordenadas cartesianas para observar como son sus variaciones.

Solución

x	$y = x^2$	$y = x$
-2	4	-2
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	2

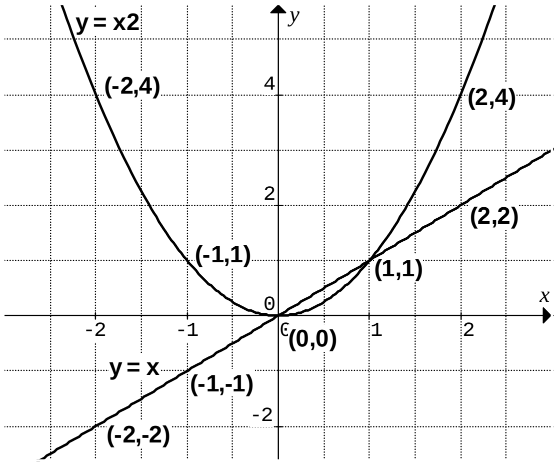


Figura 10. Gráfica de las funciones: $y = x^2$ y $y = x$

Problema 9.

Grafica las funciones $\mathbf{y = x^2 + 1}$**;** $\mathbf{y = x + 1}$ en un mismo sistema de coordenadas cartesianas para observar como son sus variaciones.

Solución

x	$y = x^2 + 1$	$y = x + 1$
-2	5	-1
-1	2	0
0	1	1
1	2	2
2	5	3

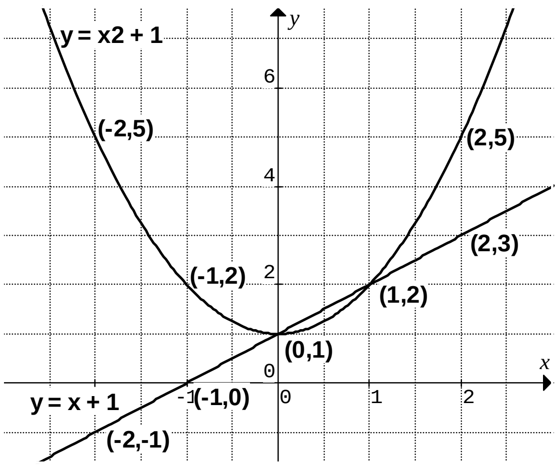


Figura 11. Gráfica las funciones $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$

En los dos sistemas anteriores se observa que en la gráfica de la función lineal, si aumenta el valor de las abscisas (x), entonces el valor de las ordenadas (y) también aumenta, por lo tanto se dice que esta función lineal es creciente.

La gráfica de la función lineal permite ver que si el incremento de la $\boldsymbol{x}$ es constante, el incremento de la ordenada $\boldsymbol{y}$**,** también es constante.

La rama izquierda de la parábola en ambos sistemas de coordenadas cartesianas anteriores son decrecientes, pues al aumentar los valores de las abscisas, como consecuencia, disminuyen los valores de las ordenadas; esto se observa hasta que la rama de la parábola llega al vértice.

Después del vértice, hacia la derecha, la rama de la parábola comienza a crecer, es decir, al aumentar los valores de las abscisas (x), los valores de las ordenadas aumentan. Como se puede ver, **el crecimiento cuadrático es mucho mayor que el crecimiento lineal**.

La observación anterior se puede hacer también a través de las tablas respectivas de las funciones lineales y cuadráticas.

	Función cuadrática	Función Lineal
x	$y = x^2$	$y = x$
-4	16	-4
-3	9	-3
-2	4	-2
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	2
3	9	3
4	16	4

A la variable x se le asignan valores de uno en uno, desde -4 hasta el valor de 4 (ver la primera columna de la tabla de la izquierda).

Al comparar la función lineal $y = x$ con la función $y = x^2$ se observa que la variable x cambia de uno en uno, la función lineal cambia también de uno en uno, pero la función cuadrática lo hace de forma diferente.

Actividad

Escriba sus observaciones para la tabla siguiente:

	Función cuadrática	Función Lineal
x	$y = x^2 + 1$	$y = x + 1$
-4	17	-3
-3	10	-2
-2	5	-1
-1	2	0
0	1	1
1	2	2
2	5	3
3	10	4
4	17	5

Es importante señalar que la función cuadrática, de manera similar a la función lineal, expresa una relación entre dos variables: una independiente, generalmente la x, y otra dependiente, generalmente la y. Esto indica que el valor de la variable dependiente, es decir la y, dependerá siempre del valor de la variable x que se considere. También, es necesario observar, a partir de los problemas anteriores, que la gráfica de una función, la tabla de valores y la expresión algebraica son tres formas distintas de representar una misma función problema.

1.4 Raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática.

La gráfica de una función cuadrática permite encontrar de forma visual la solución de la ecuación cuadrática que se obtendría al igualar la variable dependiente, la y, a cero. A continuación se expresa la forma de determinar las raíces de la ecuación cuadrática que se obtiene al hacer cero la variable y.

Ejemplo

Obtén la tabla de valores y la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$.

Solución

En la tabla siguiente se presentan los valores de las variables.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	-7	-8	-9	-8	-7	0	7	16

En la figura siguiente se observa la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 8$.

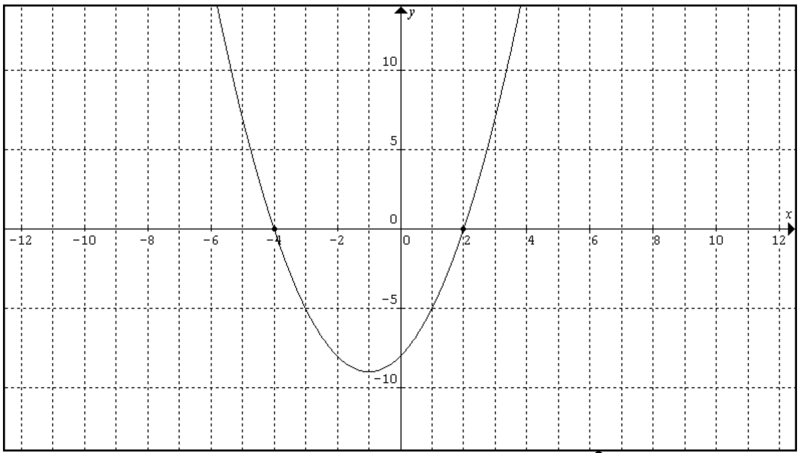


Figura 12. Gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 8$

Al hacer cero la variable y de la función cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Esta ecuación se puede resolver por factorización y se tendrá:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

De donde se obtiene que:

$$x + 4 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0$$

Al resolver estas ecuaciones:

$$x = -4 \quad \text{y} \quad x = 2$$

Al observar la figura anterior se puede determinar que la parábola intersecta al eje de las abscisas en los puntos x = - 4   y x = 2. De ahí se desprende que a partir de la gráfica de una función cuadrática se puede obtener las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función.

Ejemplo

Determina las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$$y = x^2 - 3x - 10$$

Solución

En la tabla siguiente se presentan los valores de la función $y = x^2 – 3x – 10$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	30	18	8	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0

En la siguiente figura se expresa la gráfica de la función $y = x^2 – 3x – 10$

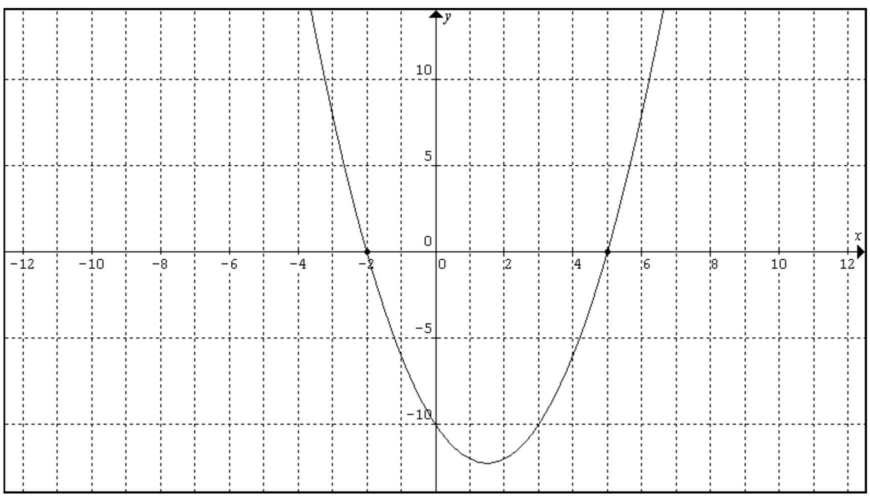


Figura 13. Gráfica de la función $y = x^2 – 3x – 10$

Al observar la figura la solución de la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática es: $x = -2$ y $x = 5$.

Ejemplo

Determina las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

Solución

En la tabla siguiente se presentan los valores de las variables.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	49	36	25	16	9	4	1	0	1

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 9$

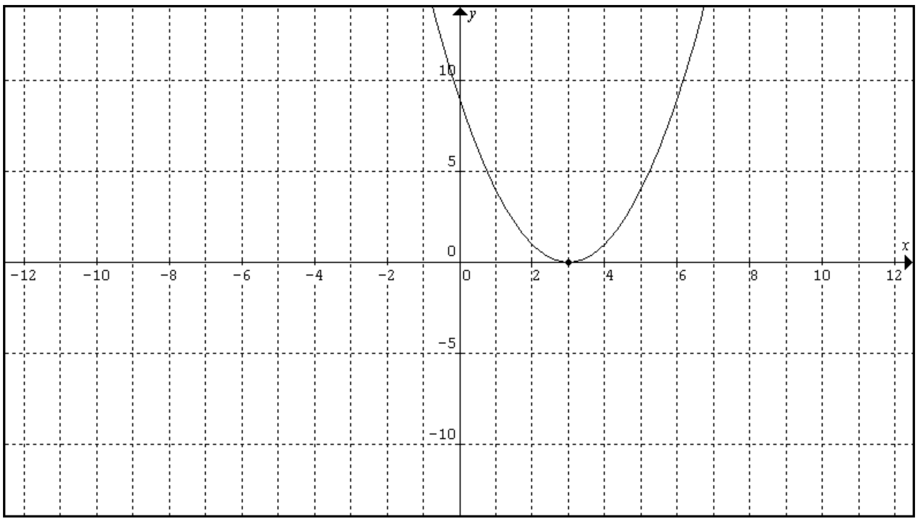


Figura 14. Gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 9$

De la figura se observa que la gráfica sólo intersecta al eje de las abscisas en el punto x =3, por lo que la ecuación cuadrática asociada a la función $x^2 - 6x + 9 = 0$, tiene una raíz doble en el punto $x = 3$, es decir, dos raíces reales e iguales.

Ejemplo

Determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$$y = x^2 + 2x + 3$$

Solución

En la siguiente tabla se presentan los valores de las variables.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11	18

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = x^2 + 2x + 3$

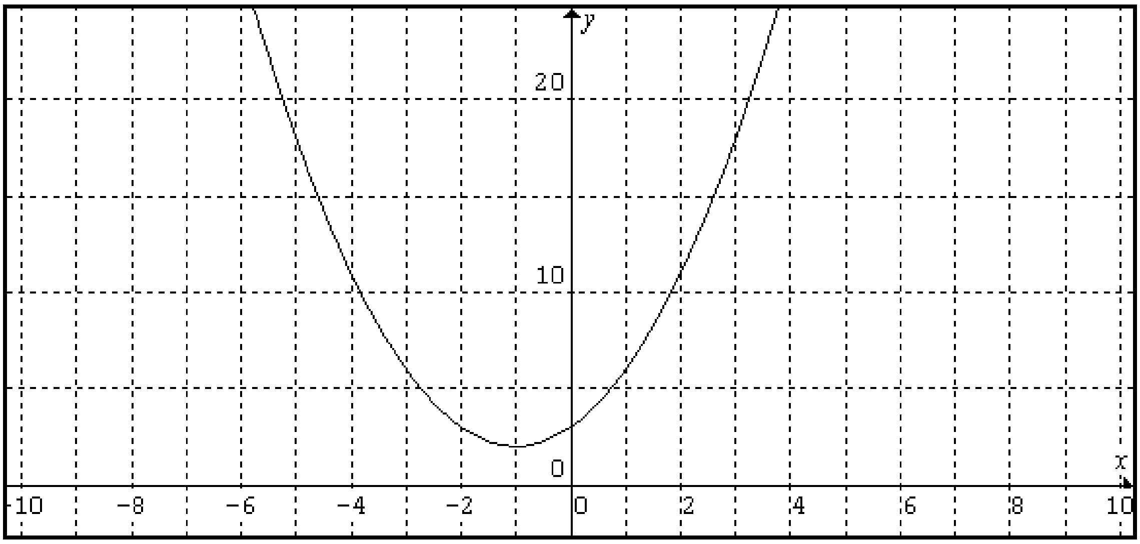


Figura 15. Gráfica de la función $y = x^2 + 2x + 3$

De la figura anterior se puede observar que la gráfica de la función no se intersecta con el eje de las abscisas, lo cual indica que las raíces de la ecuación cuadrática necesariamente son números complejos.

Para verificar que las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 3 = 0$ son complejas, se utilizará la fórmula general para obtener el valor de estas raíces.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Por lo que, se confirma que las raíces de la ecuación cuadrática son números complejos.

En conclusión se puede expresar lo siguiente: la intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje de las xs determina las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función; si la intersección se da en dos puntos las dos raíces son números reales, si la intersección se da en un solo punto la raíz es doble y es un número real, y, si no existe intersección las dos raíces son números complejos.

Ejercicio 1.3

Determina las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática, por medio de su gráfica. Indica si las raíces son reales o complejas.

1.- $y = x^2 + 3x - 10$

2.- $y = x^2 - x - 30$

3.- $y = x^2 + 2x + 1$

4.- $y = x^2 + 3x + 8$

5.- $y = x^2 - 4x + 4$

1.5 Análisis de comportamiento de los parámetros de la función cuadrática.

Para analizar los parámetros de una función cuadrática se partirá de la función $y = x^2$.

La grafica de esta función se presenta en la siguiente figura.

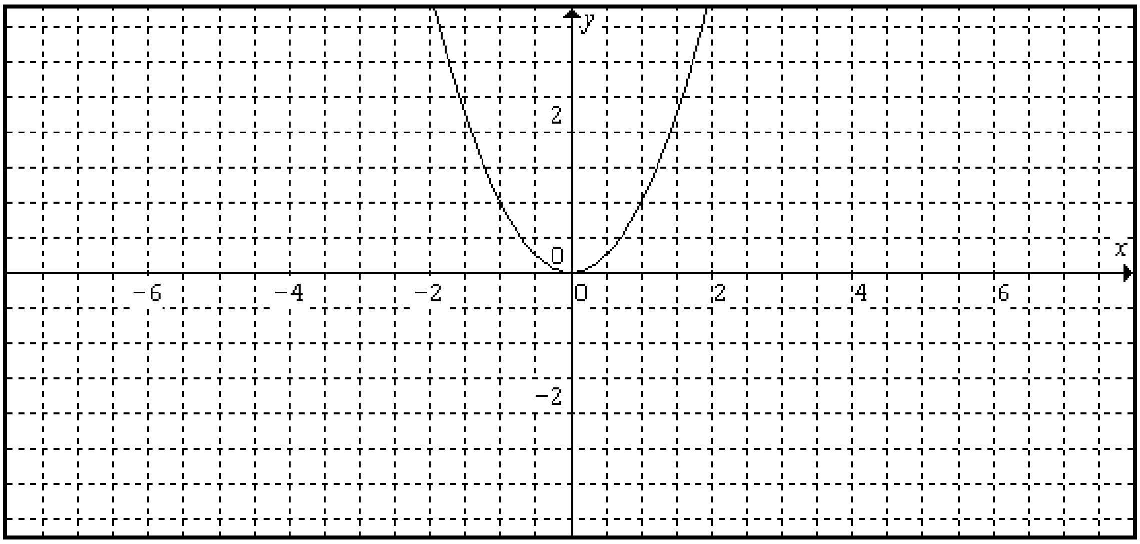


Figura 16. Gráfica de la función $y = x^2$.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = 3x^2$.

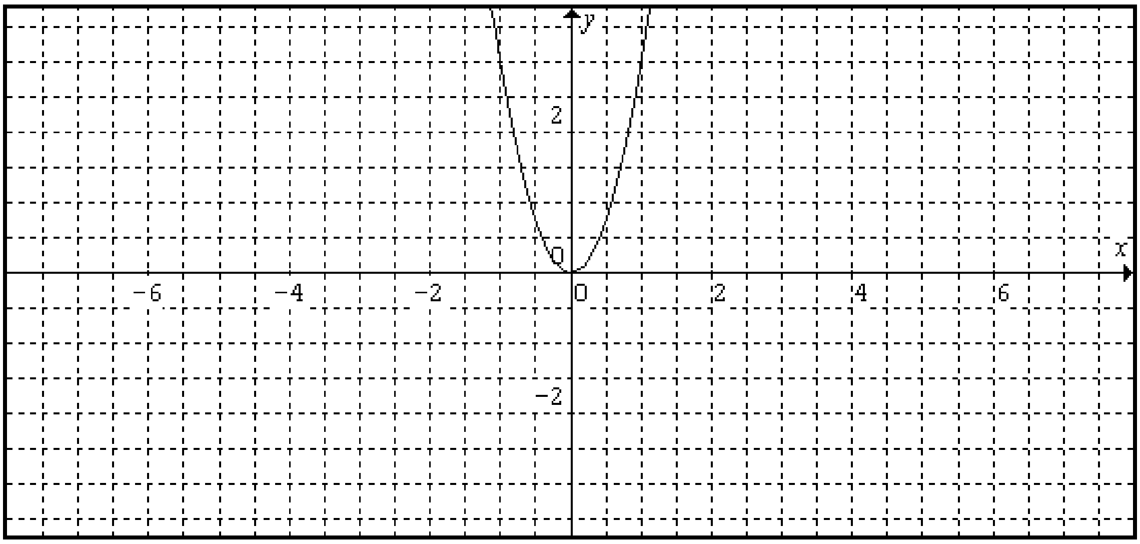


Figura 17. Gráfica de la función $y = 3x^2$.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}x^2$.

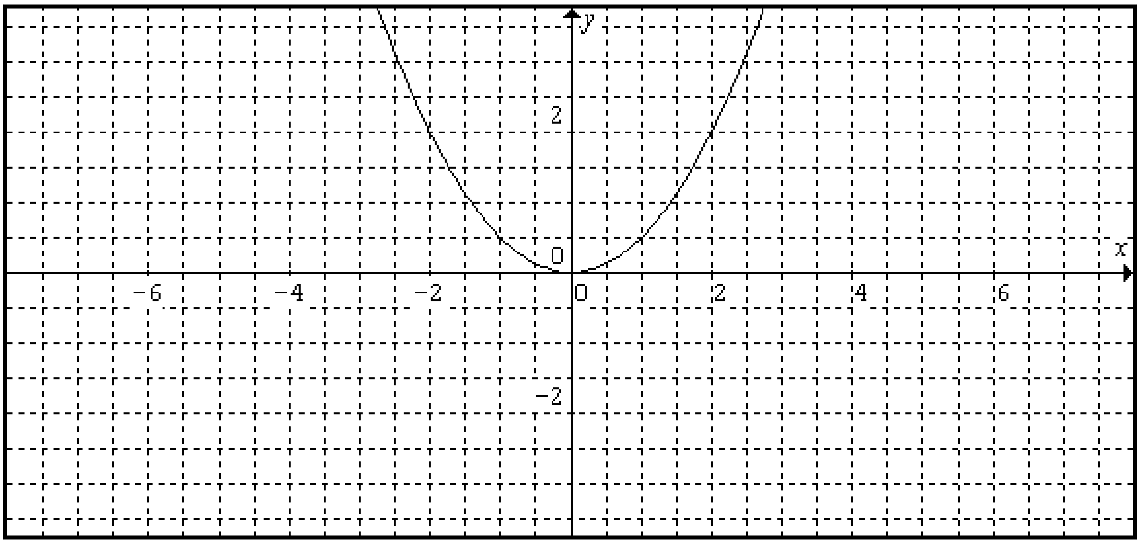


Figura 18. Gráfica de la función $y = \frac{1}{2}x^2$.

De las tres figuras anteriores, 16,17 y 18, se observa que si el coeficiente de la x^2 es mayor que 1, genera que la gráfica se comprima hacia el eje de las ordenadas, en cambio si el coeficiente es menor que 1 pero mayor que cero genera que la gráfica se expanda. Ya se observó anteriormente que si el coeficiente es menor que cero se invierte la concavidad o las ramas abren hacia abajo.

Actividad

En un mismo plano cartesiano traza las tres gráficas anteriores para comparar y verificar el papel que juega el coeficiente ***a*** en la función cuadrática.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = x^2 + 3$.

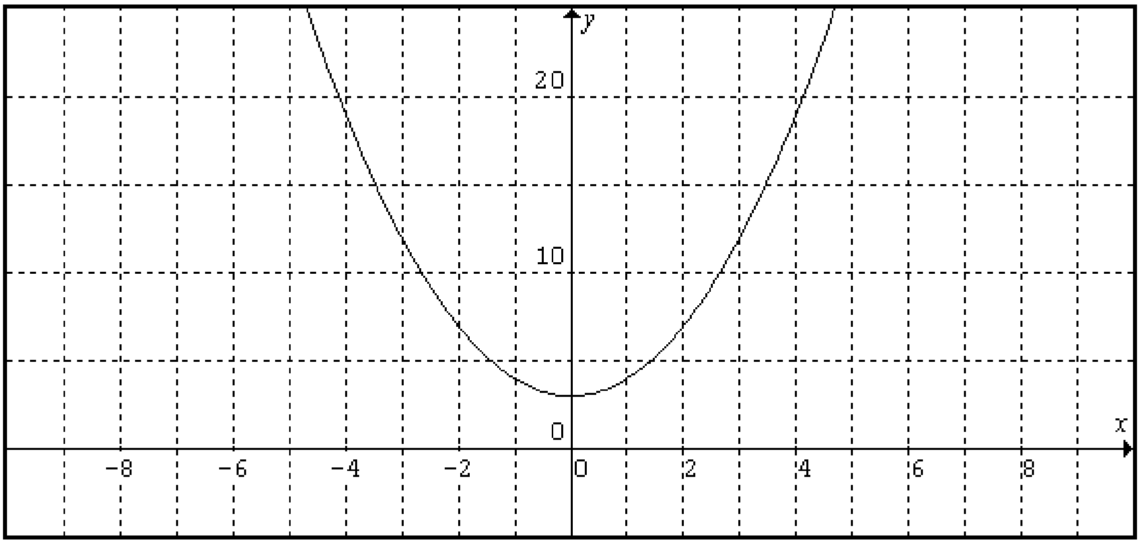


Figura 19. Gráfica de la función $y = x^2 + 3$.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = x^2 - 3$.

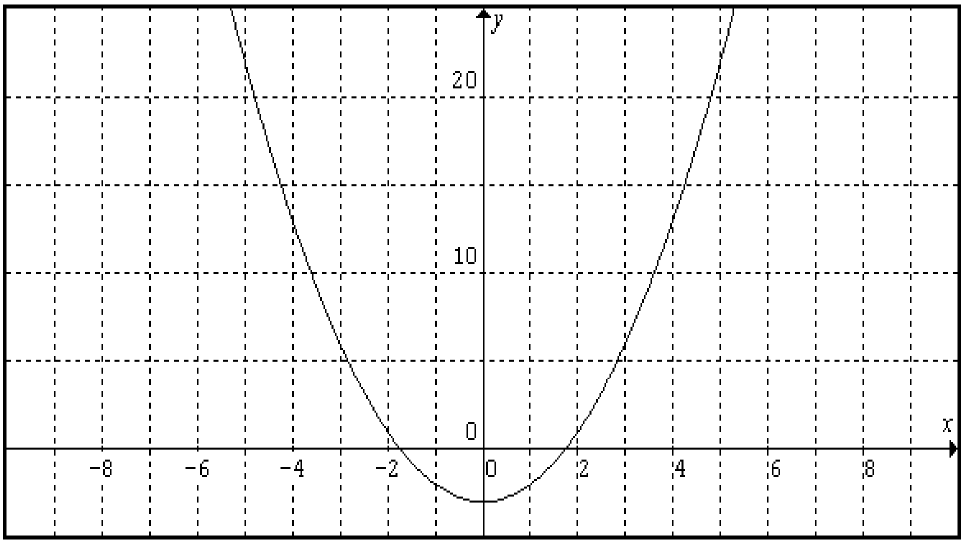


Figura 20. Gráfica de la función $y = x^2 - 3$.

De las figuras19 y 20, se observa que el término independiente genera que la gráfica se desplace hacia arriba del origen de coordenadas si es positivo o hacia abajo si es negativo.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = (x + 3)^2$.

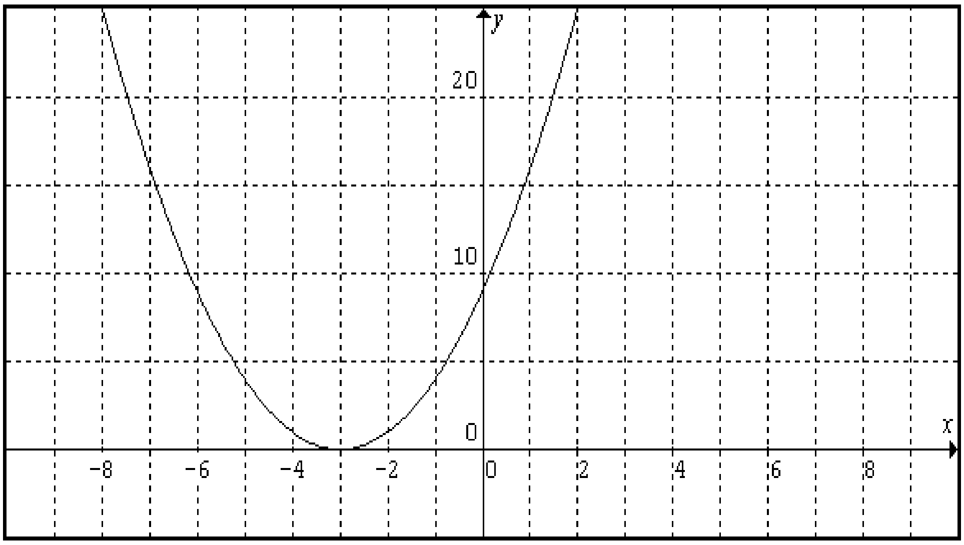


Figura 21. Gráfica de la función $y = (x + 3)^2$.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función $y = (x - 3)^2$.

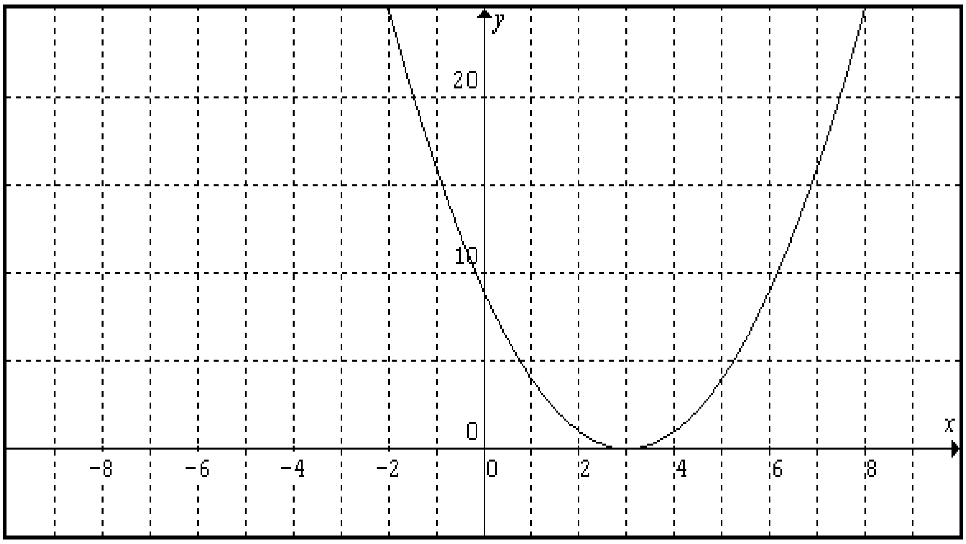


Figura 22. Gráfica de la función $y = (x - 3)^2$.

De las dos figuras anteriores se observa que el número al interior del paréntesis genera que se desplace hacia la izquierda si el número es positivo o hacia la derecha si el número es negativo.

Así, en general una función cuadrática se escribe de la forma $y = \mathbf{a}(x + \mathbf{b})^2 + \mathbf{c}$, en donde el coeficiente **a** genera que la gráfica se expanda o se angoste, el valor de **b** provoca un desplazamiento a la derecha o a la izquierda y finalmente, el número **c** hace que la gráfica se desplace hacia arriba o hacia abajo.

Ejercicio 1.4

1.- Compara las gráficas de la funciones $y = x^2$, $y = 5\,x^2$, $y = 1/5\,x^2$ y anota tus observaciones.

2.- Compara las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 + 1$ y escribe el resultado de tus observaciones

3.- Compara las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 1)^2$. ¿Cuáles son las diferencias entre ellas?

1.6 El vértice de una parábola.

Un punto muy importante de una parábola es su vértice, que generalmente se representa por V (h, k), y se puede obtener de las dos siguientes formas:

1. Método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

En este método se encuentran dos casos los cuales son:

Caso número 1. Cuando el coeficiente del término cuadrático es la unidad, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Encuentra el vértice de la parábola:

$$y = x^2 - 4x + 1$$

a) A la expresión de la derecha se le suma y se le resta al mismo tiempo el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la expresión (-4)

$$y = x^2 - 4x \mathbf{+ (-2)^2 - (-2)^2} + 1$$

b) Los primeros tres términos corresponden a un trinomio cuadrado perfecto que se factoriza como un binomio al cuadrado:

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = (x - 2)^2$$

por lo tanto se obtiene que:

$$y = x^2 - 4x \mathbf{+ (-2)^2 - (-2)^2} + 1$$

$$y = \mathbf{(x - 2)^2} - (-2)^2 + 1$$

$$y = \mathbf{(x - 2)^2} - 4 + 1$$

$$y = (x - 2)^2 - 3$$

que al compararla con $y = a(x - h)^2 + k$

c) El vértice tendrá las coordenadas:

$$V\ (h, k) = V\ (2, -3)$$

Esto se observa en la siguiente figura.

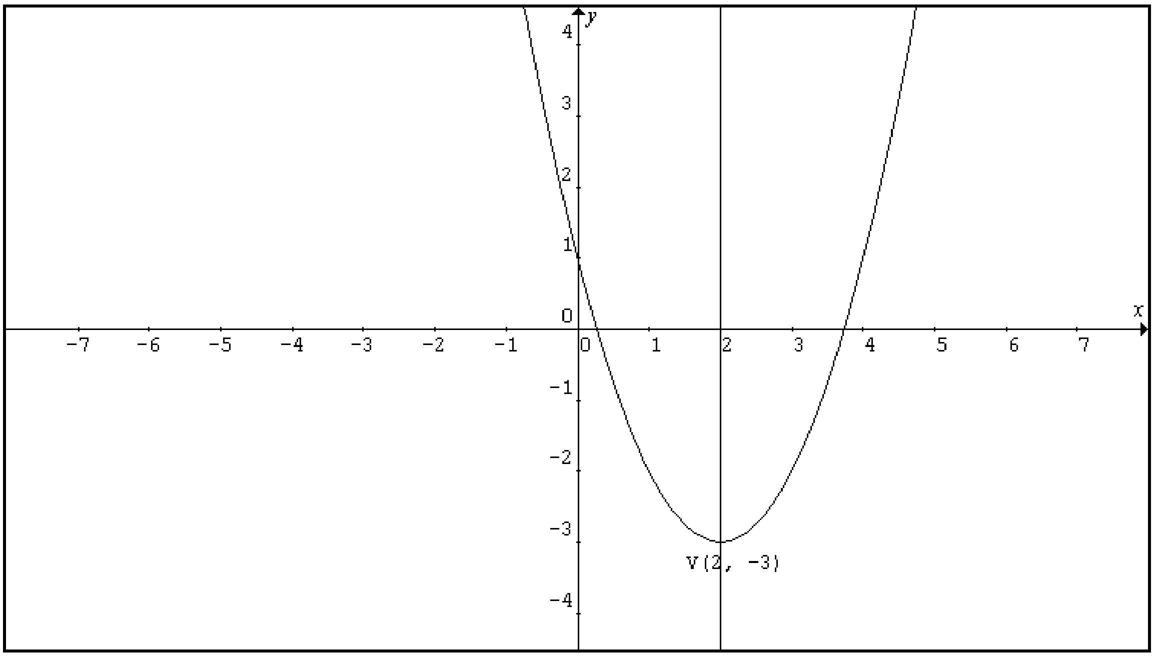


Figura 23. Gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 1$.

Caso número 2: Cuando el coeficiente del término cuadrático es diferente de la unidad

Ejemplo

Obtén el vértice de la parábola $y = -3x^2 - 6x - 2$

a) Se agrupan los términos cuadrático y lineal:

$$y = (-3x^2 - 6x) - 2$$

b) El binomio que esta adentro del paréntesis se factoriza con el coeficiente del término cuadrático

$$y = -3(x^2 + 2\,x) - 2$$

c) Dentro del paréntesis se completa el trinomio cuadrado perfecto, aplicando el paso (a) del ejemplo anterior, sumar y restar el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal

$$y = -3(x^2 + 2\,x + 1^2 - 1^2) - 2$$

d) Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$y = -3[(x + 1)^2 - 1] - 2$$

e) Al realizar la multiplicación indicada se tiene:

$$y = -3(x + 1)^2 + 3 - 2$$

$$y = -3(x + 1)^2 + 1$$

se compara con la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

f) El vértice es V (-1, 1) el cual se observa en la siguiente figura.

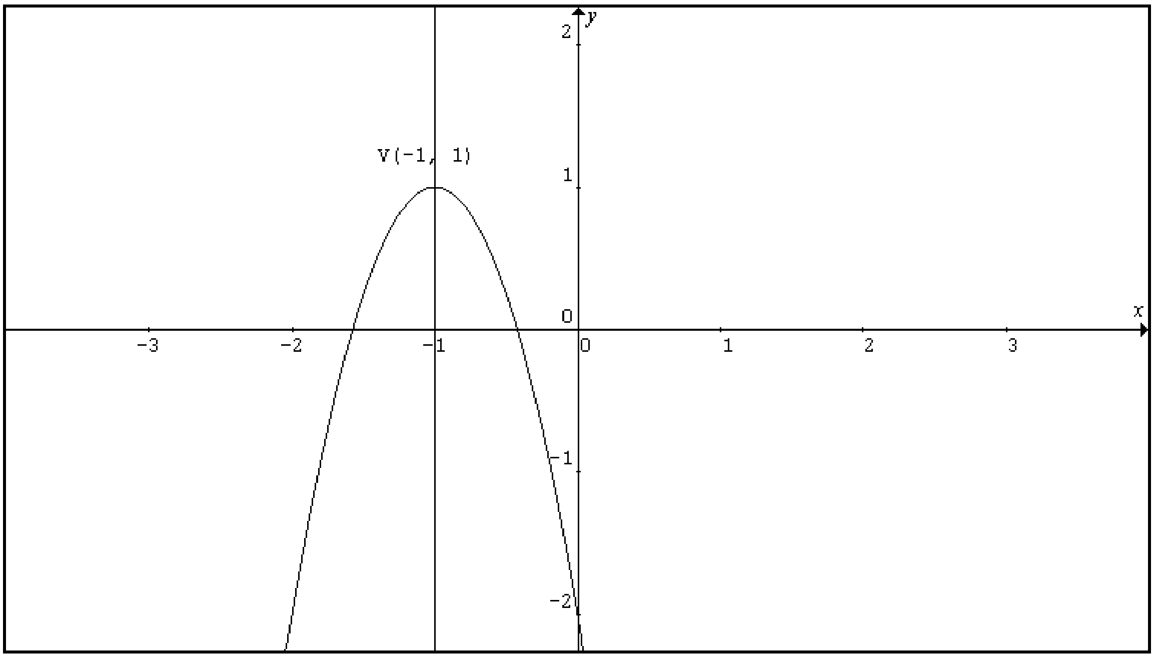


Figura 24. Gráfica de la función $y = -3\,x^2 - 4\,x - 2$

2. El otro método para obtener el vértice de la parábola es el siguiente;

a) La función cuadrática se puede expresar de la forma $y = a(x-h)^2 + k$. En donde h y k son las coordenadas del vértice V(h , k) de la parábola.

La función cuadrática de la forma $y = a(x-h)^2 + k$ se desarrolla:

$$y = a(x^2 - 2hx + h^2) + k$$

$$y = a x^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

$$y = a x^2 - (2ah) x + (a h^2 + k)$$

Posteriormente se compara con la función $y = a x^2 + bx + c$ para obtener el valor de ***h*** y ***k:***

$$-2 a h x = b x$$

$$-2 a h = b \qquad\qquad a h^2 + k = c$$

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad k = c - a h^2$$

$$k = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$k = c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a}$$

Por lo tanto, el vértice V (h , k) de la gráfica que corresponde a la función cuadrática $y = a x^2 + b x + c$ se obtiene mediante V ($-\frac{b}{2a}$, $c - \frac{b^2}{4a}$).

Problema 10

Determina el vértice de la parábola que corresponde a la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 1$.

Solución

Si la función cuadrática dada $y = x^2 - 4x + 1$ se compara con

$y = a x^2 + b x + c$ puede determinarse que

a = 1, b = -4 y c = 1 , valores que al sustituirse en

$$V\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$$ se obtiene

$$V\left(\frac{4}{2}\ ,\ 1 - \frac{16}{4}\right)$$

$$V\ (2\ ,\ 1 - 4)$$

Por lo tanto, el vértice es el punto V (2 , -3)

ejercicio 1.5

Determina las coordenadas que corresponden al vértice de la parábola cuya función es: $y = x^2 - 2x + 3$.

Esta función cuadrática $y = x^2 - 2x + 3$ se compara con

$y =$ ___________________________

de donde se determina que a = ________ b = ______ y c = ______

los valores de a, b y c se sustituyen en

$$V\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$$ obteniendo

V (- ____ , 3 - ______)

V (, 3 – 1)

V (, 2)

Serie de ejercicios 6

Utiliza las dos formas anteriores, determina el vértice de la parábola para cada una de las funciones cuadráticas siguientes:

- $y = x^2 + 6x + 7$
- $y = x^2 - 6x + 13$
- $y = x^2 + 4x + 1$
- $y = x^2 - 2x$
- $y = x^2 + 2x$

Observaciones

Si se conoce el coeficiente del término cuadrático (**a**) y el vértice V (h , k) de la parábola puede determinarse las características restantes.

Si **a > 0** (número positivo), entonces las ramas abren hacia arriba y por lo tanto el vértice corresponde a un mínimo.

Si **a < 0** (número negativo), entonces las ramas abren hacia abajo y por lo tanto el vértice corresponde a un máximo.

Si **a > 0** (número positivo), entonces las ramas abren hacia arriba y por lo tanto tiene una concavidad positiva.

Si **a < 0** (número negativo), entonces las ramas abren hacia abajo y por lo tanto tiene una concavidad negativa.

La ecuación del eje de simetría está dada por $x = h$.

El valor correspondiente al máximo o mínimo se determina mediante **f (h) = k.**

Problema 11.

Determina las características de la gráfica que representa a la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 1$ si se conoce que su vértice es V (2 , -3).

Solución

De la función cuadrática se observa que el coeficiente del término cuadrático **a = 1** , por lo tanto **a > 0** , entonces:

- 🕮 Las ramas abren hacia arriba.
- 🕮 El vértice corresponde a un mínimo.
- 🕮 Tiene una concavidad positiva.

La ecuación del eje parabólico o eje de simetría es $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$, es decir, $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$

El valor correspondiente al mínimo es $f(x) = k$, o sea, **f (2) = -3**

Ejercicio 1.7

De cada una de las siguientes funciones cuadráticas determina:

a) El coeficiente del término cuadrático,

b) la dirección de las ramas,

c) la concavidad,

d) si tiene un mínimo o un máximo,

e) las coordenadas del vértice,

f) el eje de simetría, y

g) el valor del mínimo o máximo.

1. $y = x^2 + 6x + 7$

2. $y = x^2 - 6x + 13$

3. $y = x^2 + 4x + 1$

4. $y = x^2 - 2x$

5. $y = x^2 - 2x$

6. $y = 2x^2 - 12x + 19$

7. $y = 3x^2 - 18x + 26$

8. $y = 4x^2 - 8x + 7$

9. $y = 3x^2 - 12x + 10$

10. $y = 2x^2 - 12x + 13$

SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

Ejercicio 1.1

El vértice es el punto (60, 1800)

Las ramas de la parábola abren hacia abajo

Si las ramas de la parábola abren hacia arriba entonces a > 0.

El eje de simetría esta en $x = 60$.

La concavidad es negativa.

El punto máximo se encuentra en $k = 1800$.

Ejercicio 1.2

Las cosas comunes es que ambas gráficas representan una parábola con vértice en el origen.

Las cosas diferentes es que en la gráfica de $y = x^2$ las ramas abren hacia arriba mientras que las de $y = -x^2$ abren hacia abajo.

El signo negativo invierte el sentido de las ramas.

Ejercicio 1.3

1.- Las raíces son reales, $x = 2$ y $x = -5$.

2.- Las raíces son reales, $x = 6$ y $x = -5$.

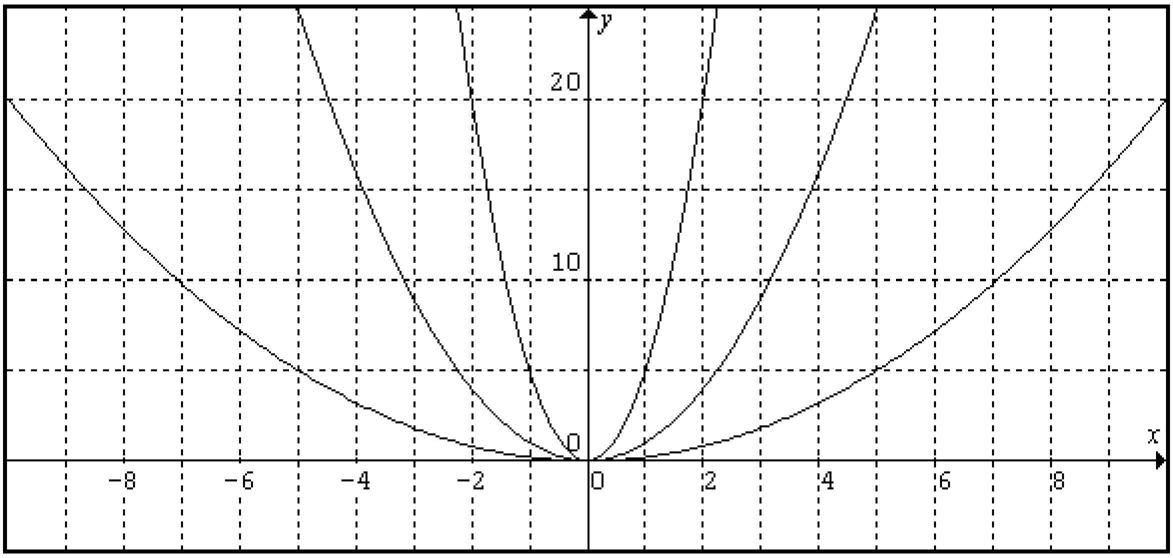
3.- La raíz es doble y real, $x = -1$

4.- Las raíces son complejas, $x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{87}}{2}$

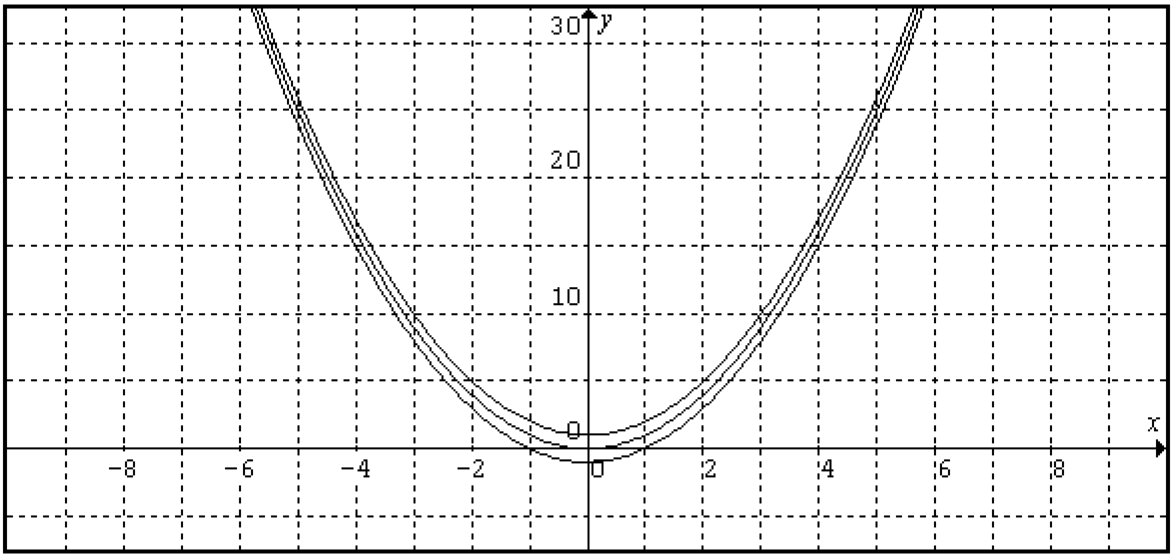
5.- La raíz es doble y real, $x = 2$.

Ejercicio 1.4

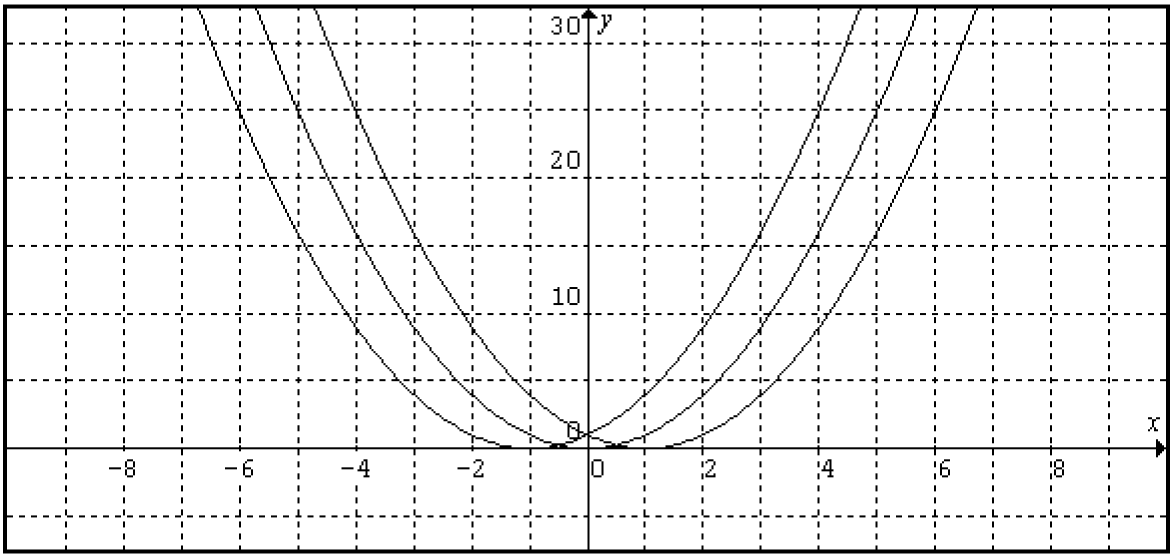
1.- Gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = 5\,x^2$, $y = 1/5\,x^2$.



2.- Gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^2$ -1, $y = x^2 + 1$.



3.- Gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 1)^2$.



Ejercicio 1.5

Se compara con: $y = a x^2 + b x + c$

A = 1, b = -2, c = 3

V = $\left(-\frac{-2}{2(1)}, 3 - \frac{(-2)^2}{4(1)} \right)$

V = $\left(-\frac{-2}{2}, 3 - \frac{4}{4} \right)$

V = $\left(\frac{2}{2}, 3 - 1 \right)$

V = (1, 2)

Ejercicio 1.6

1.- V (-3 , -2)

2.- V (3 , 4)

3.- V (-2 , -3)

4.- V (1 , -1)

5.- V (-1 , -1)

Ejercicio 1.7

1.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(-3, -2), f) x = -3, g) -2

2.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(3, 4), f) x = 3, g) 4

3.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(-2,-3), f) x = -2, g) -3

4.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(1, -1), f) x = 1, g) -1

5.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V -1,-1), f) x = -1, g) -1

6.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(3, 1), f) x = 3, g) 1

7.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(3, -1), f) x = 3, g) -1

8.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(1, 3), f) x = 1, g) 3

9.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(2, -2), f) x = 2, g) -2

10.- a) a>0, b) Hacia arriba, c) Positiva, d) Mínimo, e) V(3, -5), f) x = 3, g) -5

EXAMEN DIAGNÓSTICO

Leer con cuidado cada una de las preguntas antes de proceder a su solución.

1.- Elabora la gráfica de la función $y = x^2 - 4x - 5$

2.- En la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x - 1$ ¿Las ramas abren hacia arriba o hacia abajo?

3.- Determina el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 3$

4.- ¿La parábola $y = -x^2 + 5x + 6$ tiene concavidad positiva o negativa?

5.- ¿La parábola $y = 4x^2 + 5x - 8$ tiene máximo o tiene mínimo?

6.- Determina la ecuación del eje de simetría de la parábola $y = x^2 + 8x + 16$

7.- Determina el valor mínimo de la parábola $y = x^2 - 5x + 1$

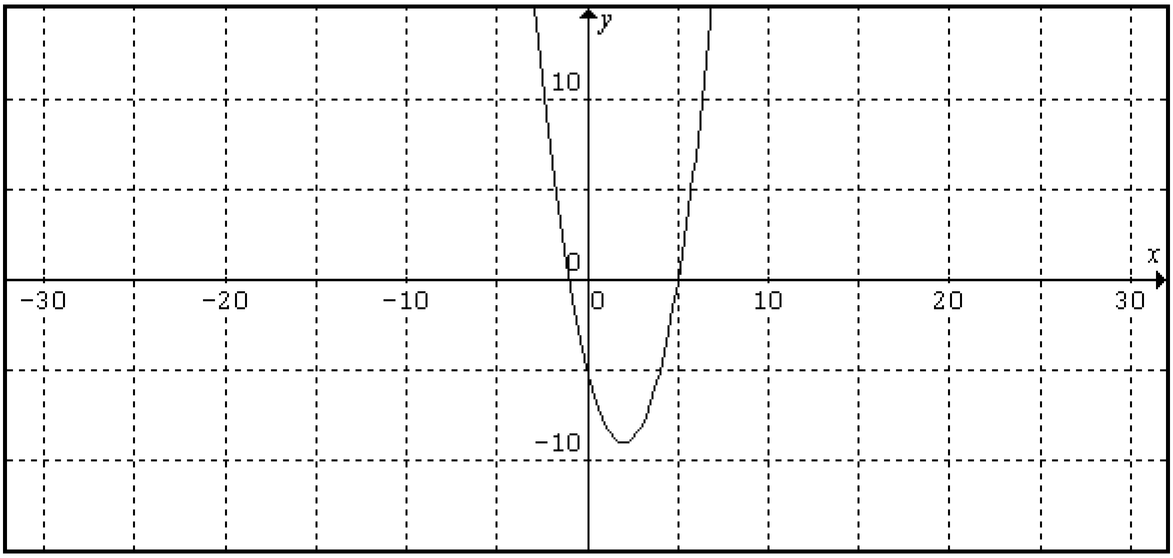
8.- Determina el valor máximo de la parábola $y = -x^2 - 6x$

9.- Determina las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la parábola: $y = x^2 + 3$

10.- Compara las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = (x - 5)^2$, $y = x^2 + 2$, $y = (x - 2)^2 + 5$ y escribe tus observaciones.

SOLUCIÓN AL EXAMEN DIAGNÓSTICO

1.- La gráfica de la función $y = x^2 - 4x - 5$ es:



2.- Hacia arriba.

3.- El vértice es: V = (- 3, - 6)

4.- concavidad negativa.

5.- Tiene un mínimo.

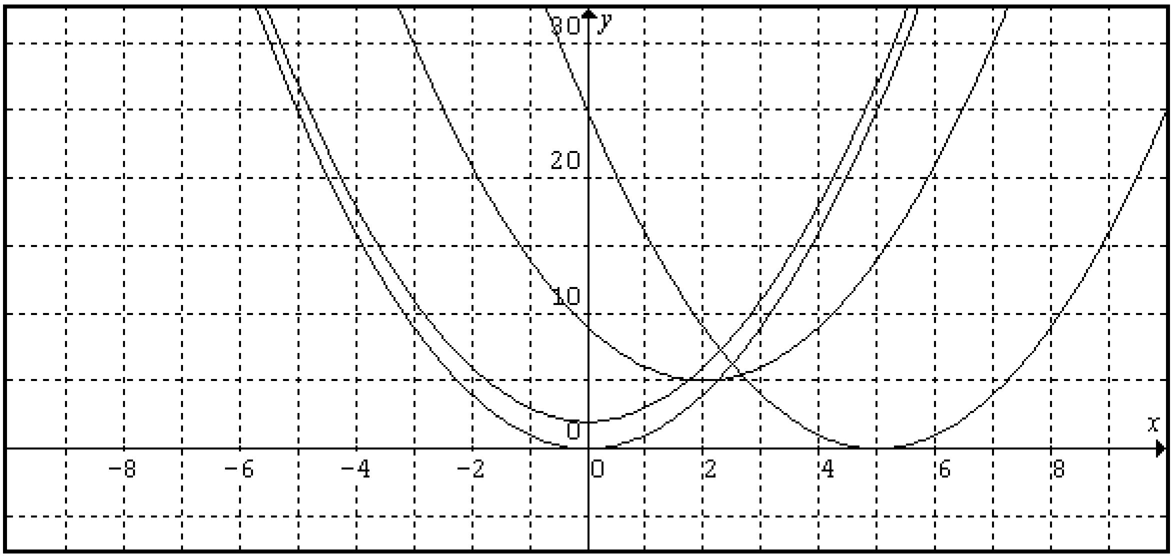
6.- El eje de simetría es: x = - 4

7.- el valor mínimo es: $\left(\frac{5}{2}, \frac{-21}{4}\right)$

8.- El vértice es: V = (- 3, 9)

9.- La raíces son complejas x = $\pm i\sqrt{3}$

10.- Las gráficas de las funciones son:



La gráfica de $y = (x - 5)^2$ se encuentra desplazada 5 unidades hacia la derecha del origen; la gráfica de $y = x^2 + 2$ se encuentra desplazada dos unidades hacia arriba; finalmente, la gráfica de $y = (x - 2)^2 + 5$ se encuentra desplazada 2 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia arriba.

Antes de iniciar el proceso de aplicación de la propuesta de enseñanza el M. en C. Juan B. Recio Zubieta sugirió la elaboración de un cuaderno de trabajo para los alumnos como un complemento al material generado.

3.4 El cuaderno de trabajo.

Por ello, se procedió a la elaboración del Cuaderno de Trabajo dirigido a los alumnos considerando que éste debe tener las mismas características que el material que integra la propuesta. El cuaderno de trabajo elaborado se presenta en el Anexo A de este trabajo.

El cuaderno de trabajo correspondiente a la Unidad 1 ésta integrado por cinco secciones, en cada una de las cuales se proponen al estudiante algunos ejercicios en los que se le guía para lograr el aprendizaje de los procedimientos que se emplean en esta temática.

En la primera sección se analizan las características de las parábolas.

En la segunda sección se expresa la forma de elaborar la gráfica de una parábola.

En la tercera sección se muestra como obtener las raíces de la ecuación cuadrada asociada a la función cuadrática.

En la cuarta sección se realiza el análisis del comportamiento de las funciones cuadráticas.

En la quinta sección se presenta la determinación del vértice de una parábola.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez elaborada la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas se consideró la necesidad de aplicar este material durante el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula para poder determinar la utilidad del mismo.

4.1 Implementación o aplicación de la propuesta.

Con este objetivo durante el periodo lectivo 2005 se implementó la propuesta de la siguiente forma:

A partir de la impartición de la asignatura en tres grupos del primer año del ciclo Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, en el Plantel Azcapotzalco y considerando que la temática de funciones cuadráticas corresponde a la Unidad 1 del programa de estudios de la asignatura de Matemáticas II, se diferenciaron estos grupos para realizar este trabajo denominando a uno de ellos como el grupo testigo, otro de ellos como el grupo del libro y al último como el grupo del libro y el cuaderno de trabajo.

El común denominador de los tres grupos es que durante el desarrollo del proceso de enseñanza, el profesor del curso sería el mismo y por consecuencia se realizaría una planeación e instrumentación del tema de manera similar, con los mismos errores o aciertos de parte del profesor, por lo cual se reducían las variables a controlar.

El tiempo señalado en el programa institucional es de 15 horas en el aula, divididos en 9 sesiones de las cuales 6 sesiones son de 2 horas (sesiones 1, 2, 4, 5, 7 y 8), y 3 sesiones de una hora (sesiones 3, 6 y 9; esta última es para la evaluación).

La forma utilizada para organizar la enseñanza y el aprendizaje en el salón de clases, tienen como elementos a: la creación del ambiente para aprender, la orientación de la atención, la interdependencia social, el procesamiento de la información, la recapitulación o repaso de lo que se aprende, la evaluación y la elaboración de la bitácora COL (Comprensión Ordenada del Lenguaje).

Al grupo testigo, que para fines de este trabajo se denominó grupo A, se le proporcionó el contenido temático únicamente a través de la exposición del profesor y de la interacción propia del aula durante el desarrollo de la temática.

En este trabajo, al grupo que se denominó grupo B se le entregó el material escrito de la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas, además de la exposición del profesor y la interacción propia del aula durante el desarrollo de la temática. El libro se utilizó privilegiando el procesamiento de la información donde el alumno se enfrenta al contenido de la enseñanza, para lo cual necesita de estrategias que le permitan la elaboración significativa de lo que aprende.

La primera sesión consistió en la presentación de tres problemas que conducen a establecer una función cuadrática así como su definición; la sesión siguiente se realizó la construcción de la tabla y la elaboración de la gráfica de una función cuadrática; en la tercera sesión se hizo la comparación de la gráfica de una función lineal con la gráfica de una función cuadrática; la cuarta sesión se refiere a la determinación de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a una función cuadrática; la quinta sesión corresponde al análisis del comportamiento de los parámetros de la función cuadrática; las dos sesiones siguientes se trabajo en la terminación del vértice de una parábola y la octava sesión es para determinar las características de una función cuadrática.

El tercer grupo se designó como grupo C, al cual se le entregó el material escrito de la propuesta, el cuaderno de trabajo elaborado para complementar la propuesta además de la exposición del profesor y la interacción propia del aula durante el desarrollo de la temática. El cuaderno de trabajo se utilizó con la presentación y constancia en la ejecución de la estrategia consistiendo en la exposición y ejecución de ejemplos, para después realizar una práctica guiada y finalizar con la práctica independiente.

Antes de iniciar la aplicación de la propuesta se elaboraron los reactivos que constituyeron el instrumento que se utilizó como parte de la evaluación, el cual se aplicó a los tres grupos en condiciones similares; es decir, que los alumnos contarían con la misma cantidad de tiempo para tratar de contestarlo. El conjunto de reactivos elaborados se agruparon en el documento que se denominó examen de la unidad 1 (anexo B).

4.2 Los resultados de la aplicación de la propuesta.

Los resultados que se obtuvieron al aplicar el examen para la evaluación de la unidad se presentan a continuación, en las tablas denominadas Grupo A, Grupo B y Grupo C, las cuales corresponden a las calificaciones obtenidas por los alumnos del Grupo A, B o C, respectivamente.

Grupo A

2	0	6	0	0
6	2	4	0	6
6	2	2	4	4
8	4	2	3	6
2	5	0	6	2
3	6	2	8	0
4	4	2	10	6
7	4	2	2	4
7	4	0	2	8
0	4	3	2	4

Grupo B

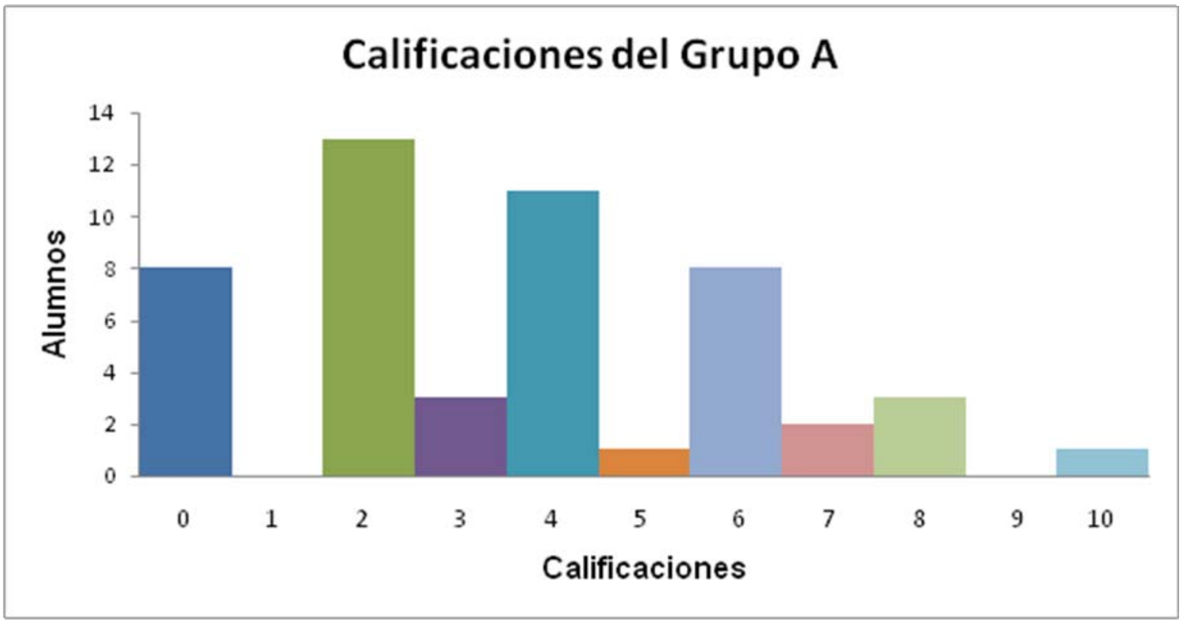
2	2	9	5	2
7	7	6	0	6
2	4	4	10	10
9	5	6	3	8
10	9	7	4	8
10	5	6	5	10
7	10	6	9	9
7	4	2	7	10
9	5	7	9	5
10	7	5	9	4

Grupo C

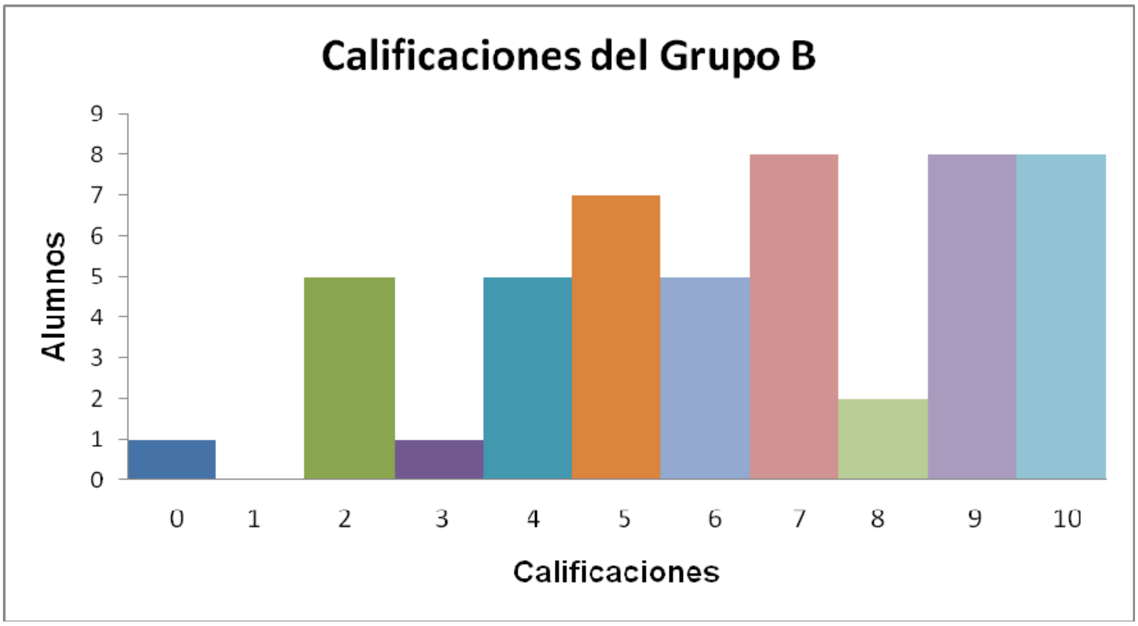
6	2	6	2	4
5	10	9	3	5
3	2	10	10	6
8	3	2	10	9
8	8	8	8	10
5	7	7	10	9
10	6	10	10	6
6	7	6	8	8
7	7	10	8	10
10	7	10	9	9

Una representación gráfica de los resultados obtenidos para cada uno de los grupos se presenta a continuación:

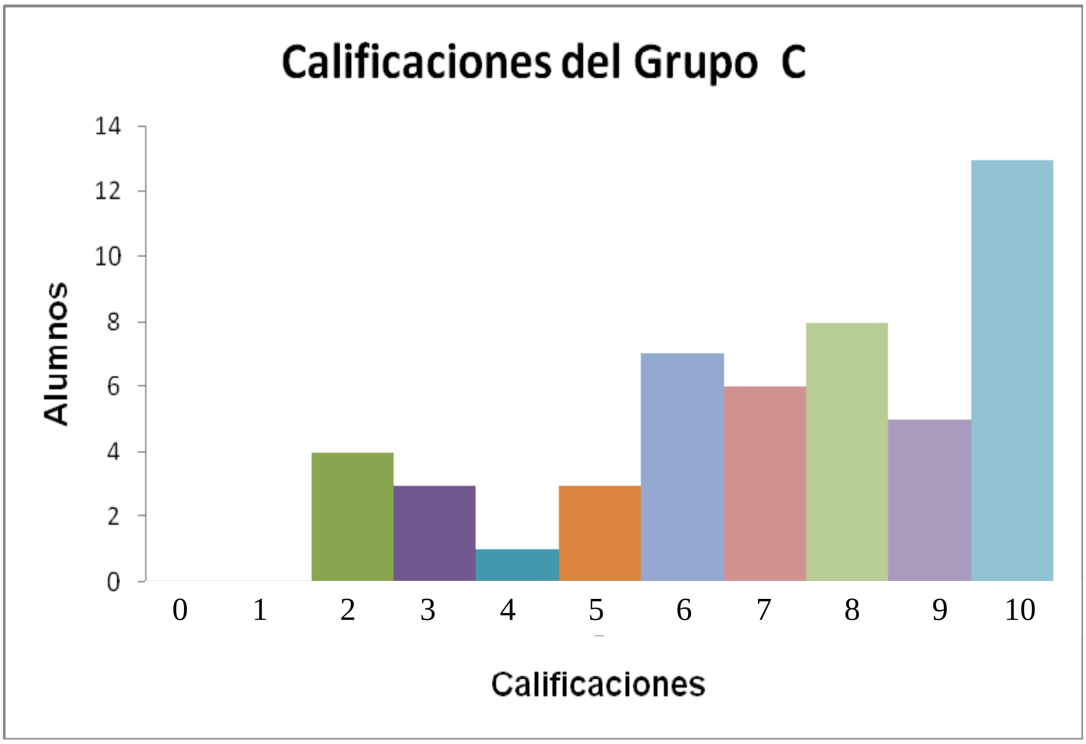
Las calificaciones del grupo A se muestran en la siguiente gráfica.



Las calificaciones del grupo B se muestran en la siguiente gráfica.



Las calificaciones del grupo C se muestran en la gráfica siguiente.



4.3 Análisis de los resultados.

Uno de los objetivos más importantes del análisis estadístico es descubrir las relaciones existentes entre la variables de interés, en consecuencia, la interpretación de relaciones encontradas implica cierta cautela, ya que están llenas de peligro cuando se hacen suposiciones acerca de las causas y los efectos; para la causalidad se recurre a las condiciones y la naturaleza de la aplicación de la propuesta, así como algunas consideraciones teóricas.

Un análisis estadístico incipiente de los datos obtenidos se expresa a continuación:

La media aritmética (Daniel,2000) de un conjunto de datos se obtiene mediante la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Por lo que al utilizar esta expresión se obtienen los siguientes resultados:
La media aritmética del grupo A es:

$$\bar{x} = 3.6$$

La medía aritmética del grupo B es:

$$\bar{x} = 6.45$$

La medía aritmética del grupo C es:

$$\bar{x} = 7.18$$

Si bien la media aritmética es una medida de tendencia central aplicable a las mediciones por intervalo, hay que recordar que es una medida muy sensible a los valores extremos como se observa en el resultado del grupo A y el grupo C; en el primer caso hay ocho cifras de cero y una cantidad de diez, es decir, existen 8 alumnos con calificación de cero y uno con calificación de diez, mientras que en el grupo C los valores de los extremos se podrían considerar como invertidos.

Por otro lado, la desviación estándar (Hernández, 2001) de un conjunto de datos se determina a través de la expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

Así, al emplear la expresión matemática de la desviación estándar se obtiene que:
La desviación estándar del grupo A es:

$$s = 1.8973$$

La desviación estándar del grupo B es:

$$s = 2.677$$

La desviación estándar del grupo C es:

$$s = 2.5258$$

En la bibliografía sobre los temas de estadística se señala que la desviación estándar está relacionada con la media aritmética, por lo tanto, si se comparan los resultados de los tres grupos se infieren las observaciones que a continuación se manifiestan:

a) Si bien la desviación estándar del grupo C es mayor que la del grupo A, existe entre los valores de sus respectivas medias aritméticas una gran diferencia lo que indica una mayor dispersión pero alrededor de un valor mayor.

b) La media aritmética del grupo B es menor que la del grupo C, pero en cuanto a la desviación estándar la del grupo C es menor que la del grupo B lo que se interpreta como una situación más favorable para el aprovechamiento escolar.

A partir de la anterior se puede expresar que en términos pedagógicos el trabajo realizado con los alumnos del grupo C, permitió caracterizarlo como un grupo escolar en el que se pudo promover un ambiente propicio para la construcción y socialización del conocimiento.

4.4. Observaciones.

Una vez que se ha aplicado la propuesta y realizado el análisis estadístico de los resultados obtenidos es necesario expresar algunas observaciones que se derivan de ellos.

En primer lugar es importante considerar que al aplicar la propuesta de enseñanza para las funciones cuadráticas, se esperaría obtener como uno de los resultados, la homogenización de los conocimientos en los alumnos que integran un grupo escolar. Sin embargo, los datos obtenidos, en cualquiera de los grupos analizados, nos hacen pensar que ello no es así.

En segundo lugar los resultados obtenidos evidencian que la asimilación de los conocimientos está determinado por los alumnos y que éste es individual, por lo que no se puede realizar una generalización en este sentido.

En tercer lugar los resultados sugieren, independientemente de las consideraciones anteriores, la posibilidad que el alumno obtenga un mejor conocimiento de los contenidos temáticos que se imparten en la unidad si él cuenta con un material que le permita revisar lo que se desarrollo en cada sesión de trabajo en el aula, de acuerdo con su estilo de aprendizaje y su interés por la asignatura.

En cuarto lugar los resultados anteriores posibilitan inferir que un alumno podrá obtener un mejor conocimiento de los contenidos temáticos que se imparten en la unidad si, además de contar con un material que le permita revisar lo que se desarrolló en el aula, cuenta con un material que le permite ejercitar los procedimientos y métodos característicos de la temática, de acuerdo con su estilo de aprendizaje y su interés por la asignatura.

En quinto y ultimo lugar, a partir de los resultados obtenidos, es posible plantear que la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas presentada en este trabajo, permite, en términos generales, que los alumnos del Plantel Azcapotzalco del Colegio de Ciencias y Humanidades, logren los aprendizajes relacionados con los contenidos temáticos correspondientes a la unidad 1 de la asignatura de matemáticas 2 del Plan de Estudios de la Institución.

.

CONCLUSIONES

La elaboración de la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas, correspondientes a la unidad 1 del programa de estudio vigente de la asignatura de matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, y su aplicación en el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje permiten elaborar las siguientes conclusiones.

Las actividades que se llevaron a cabo para conocer si la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas en el ciclo bachillerato es aplicable, se pudieron realizar de manera satisfactoria.

El contar con una propuesta que integra los contenidos temáticos del programa institucional coadyuva a que el profesor realice una planeación de los procesos de enseñanza-aprendizaje que se desarrollan en el interior del aula ya que cumple con la pertinencia.

Los resultados obtenidos durante la aplicación de la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas permiten expresar que ésta conlleva a propiciar el aprendizaje de los contenidos temáticos que integran esta unidad.

El análisis de los resultados obtenidos con los grupos B y C establecen que, con la implementación de la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas, los alumnos lograron los aprendizajes establecidos para la unidad del programa de la asignatura de matemáticas II del Plan de Estudios Del CCH, es decir, se cumple el propósito general de la unidad que es el de continuar con el estudio de funciones a partir del estudio de situaciones que varían en forma cuadrática, contrastar este tipo de variación con la lineal. Analizar el comportamiento de las gráficas de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros e iniciar la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos.

Finalmente, es posible establecer que la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas puede ser utilizada en los cursos de matemáticas II que se imparten en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

Por otro lado, se considera que esta propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas, como cualquier otra propuesta de enseñanza, requiere ser revisada con el objeto de ser mejorada y adaptada a las necesidades particulares del grupo de alumnos con los que se utilice.

Una forma en la que se podría mejorar la propuesta sería la de generar dos procesos de investigación que profundicen: 1) sobre cuales son los contenidos temáticos que resultan más difíciles de aprender para los alumnos, y 2) sobre cuales son los errores más comunes que expresan los alumnos al realizar la resolución de los problemas.

Así, también otra manera de extender la propuesta para la enseñanza de las funciones cuadráticas es generar una propuesta de enseñanza para cada una de las unidades temáticas que conforman los programas de estudio de las asignaturas que conforman el Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades. Esto, afortunadamente, otros compañeros lo están realizando.

ANEXO A

CUADERNO DE TRABAJO

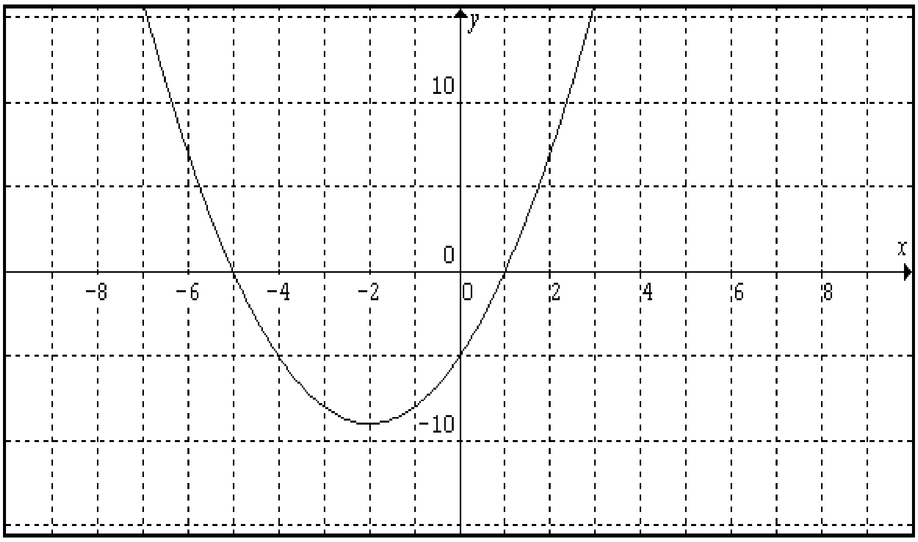
MATEMÁTICAS II

UNIDAD 1

FUNCIONES CUADRÁTICAS.

1.1 Características de la parábola.

Si se tiene la gráfica de la función $y = x^2 + 4x - 5$.



El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (- 2, 9)

Las ramas de la parábola abren hacia arriba

Si las ramas abren hacia arriba, entonces **a** es mayor que cero: a> 0.

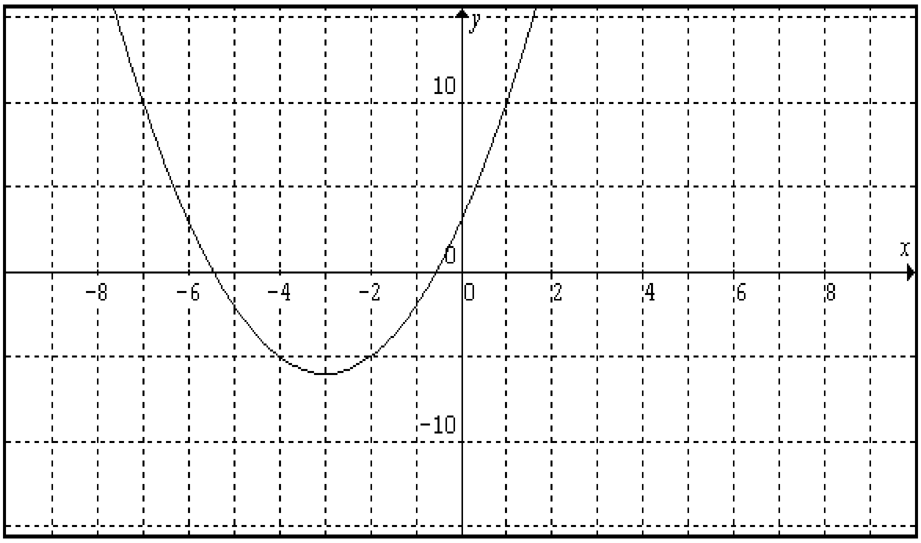
El eje parabólico o eje de simetría es x = - 2

La concavidad de la parábola es positiva.

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor mínimo en (-2, 9)

Ejercicios

1.- Si se tiene la gráfica de la función $y = x^2 + 6x + 3$.



El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (____ , ____)

Las ramas de la parábola abren hacia ______________

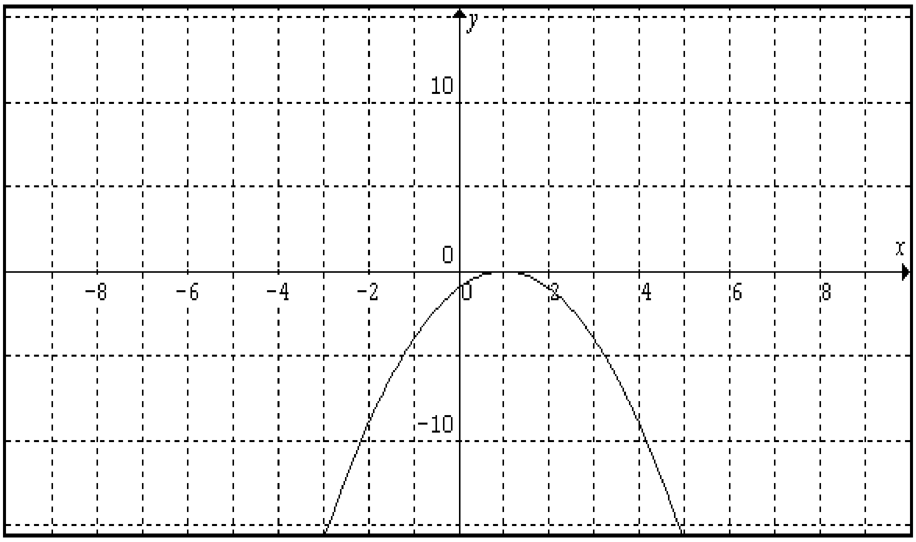
Si las ramas abren hacia arriba, entonces **a** es __________________

El eje parabólico o eje de simetría es x = _____________

La concavidad de la parábola es _________________

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor mínimo en (____ , ___).

2.- Si se tiene la gráfica de la función $y = - x^2 + 2x - 1$.



El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (____ , ____)

Las ramas de la parábola abren hacia ________________

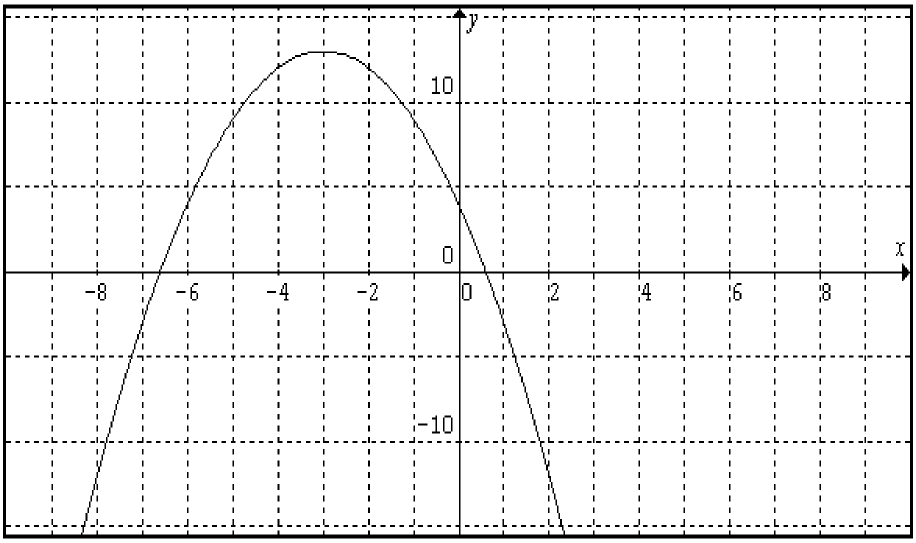
Si las ramas abren hacia abajo, entonces **a** es ____________________

El eje parabólico o eje de simetría es $x =$ _______________

La concavidad de la parábola es ___________________

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor máximo en (____ , ___).

3.- Si se tiene la gráfica de la función $y = - x^2 - 6x + 4$.



El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (____ , ____)

Las ramas de la parábola abren hacia ________________

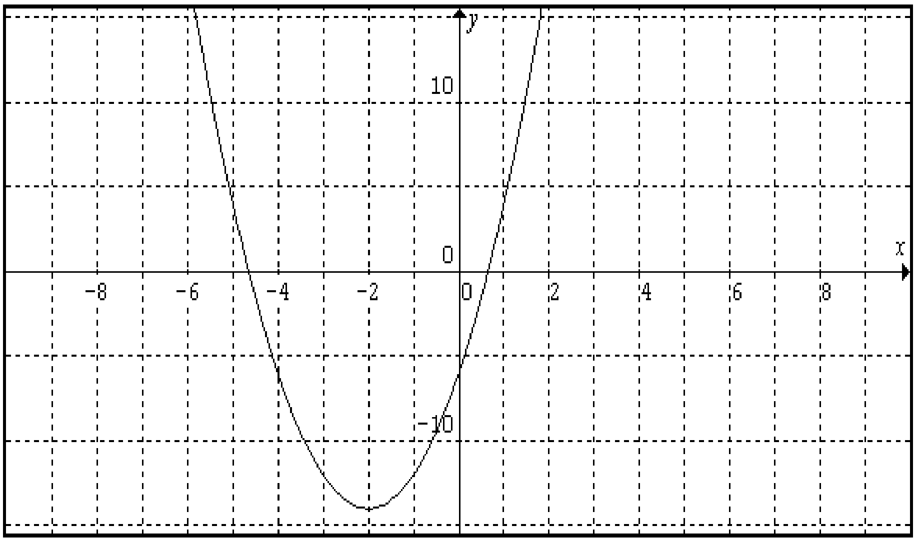
Si las ramas abren hacia abajo, entonces **a** es ____________________

El eje parabólico o eje de simetría es $x =$ _______________

La concavidad de la parábola es ___________________

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor máximo en (____ , ___).

4.- Si se tiene la gráfica de la función $y = 2x^2 + 8x - 6$.



El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (____ , ____)

Las ramas de la parábola abren hacia ________________

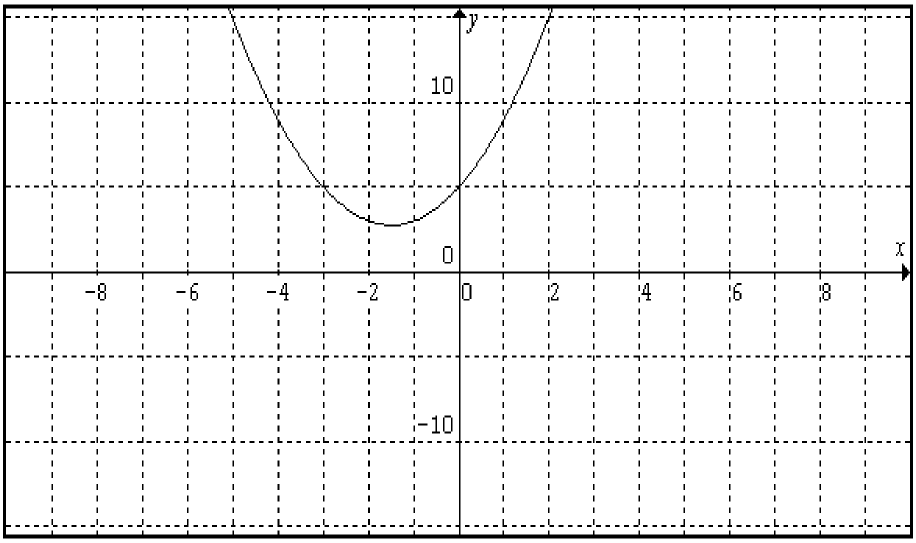
Si las ramas abren hacia arriba, entonces **a** es ____________________

El eje parabólico o eje de simetría es x = ______________

La concavidad de la parábola es ___________________

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor mínimo en (___ , ___).

5.- Si se tiene la gráfica de la función $y = x^2 + 3x + 5$.



El vértice se encuentra en el punto de coordenadas (____ , ____)

Las ramas de la parábola abren hacia ________________

Si las ramas abren hacia arriba, entonces **a** es ____________________

El eje parabólico o eje de simetría es x = ______________

La concavidad de la parábola es ___________________

Se observa que la gráfica de la función tiene un valor mínimo en (___ , ___).

1.2 Gráfica de una función cuadrática.

Para elaborar la gráfica de una función cuadrática es conveniente primero elaborar una tabla de valores que servirán de base para trazar la gráfica.

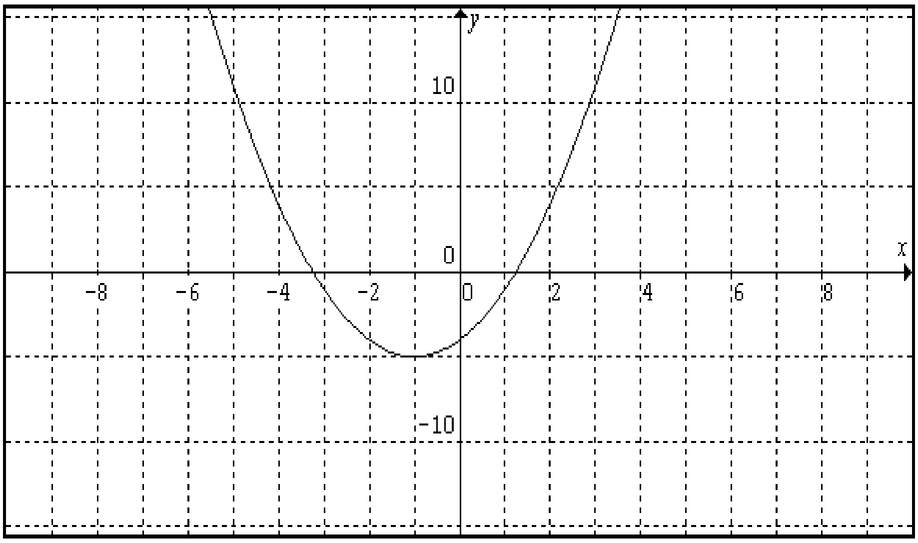
Por ejemplo, elaborar la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 4$

Solución

Primero se obtiene la tabla de valores de las variables.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

En el siguiente sistema de coordenadas se traza la gráfica de la función.



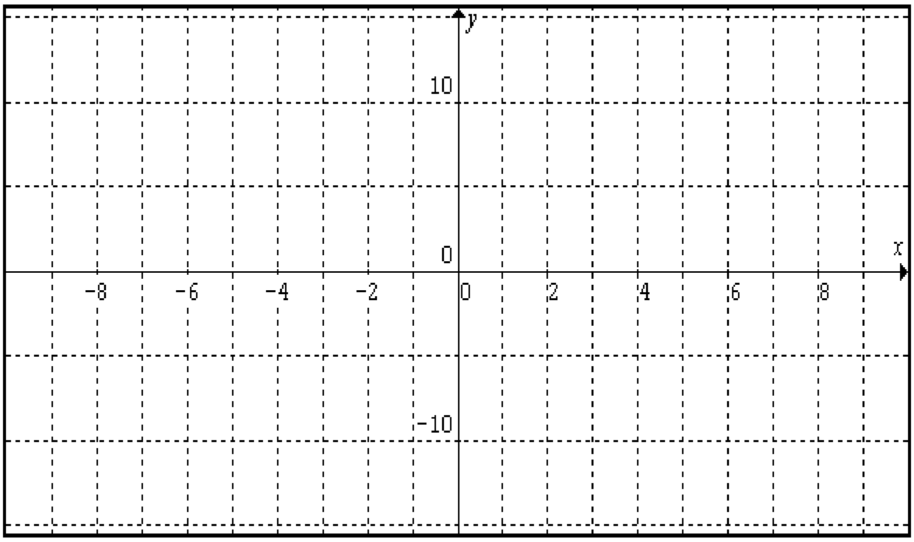
Ejercicios

1.- Elaborar la gráfica de la función $y = x^2 + 4x - 3$

Solución

Primero se elabora la tabla de valores de las variables:

Con estos datos se traza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.

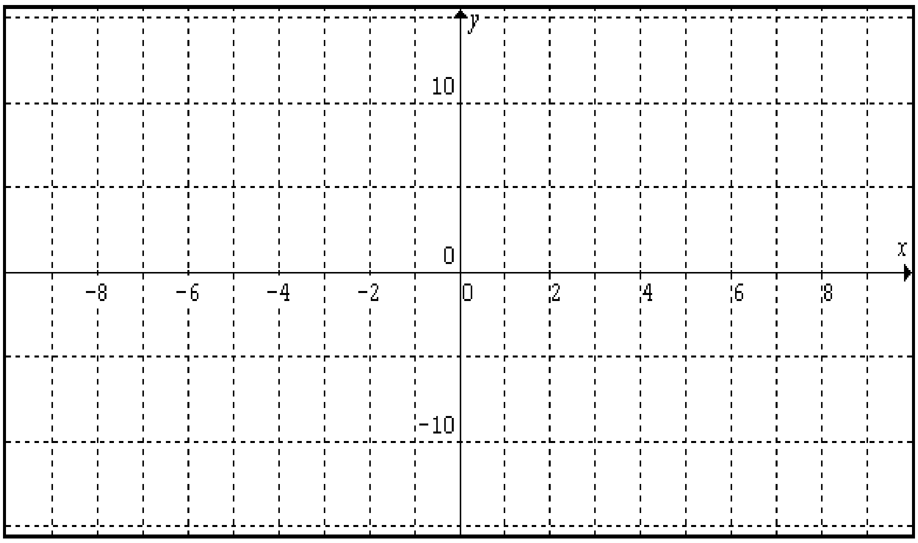


2.- Elaborar la gráfica de la función $y = -x^2 + 5x + 3$

Solución

Primero se elabora la tabla de valores de las variables:

Con estos datos se traza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.

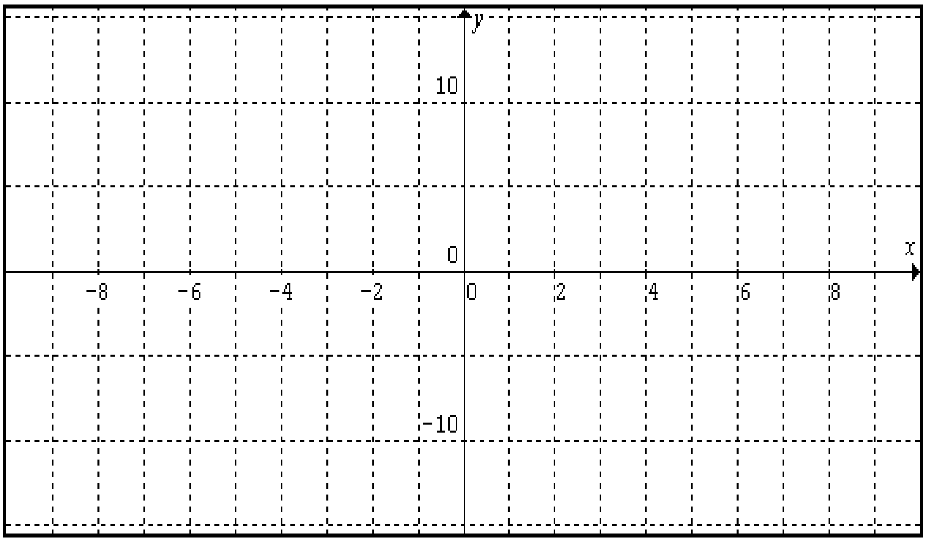


3.- Elaborar la gráfica de la función $y = 3x^2 - 6x - 7$

Solución

Primero se elabora la tabla de valores de las variables:

Con estos datos se traza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.

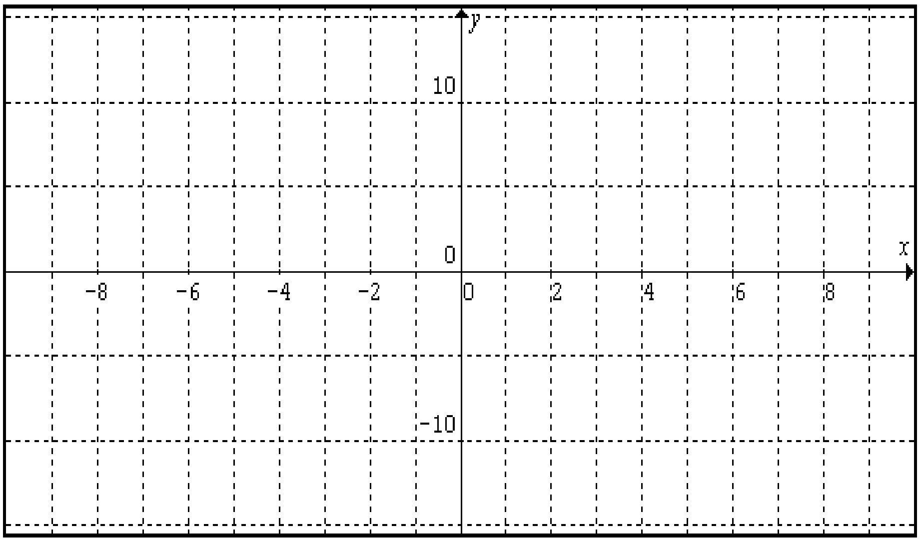


4.- Elaborar la gráfica de la función $y = -2x^2 + 5x + 8$

Solución

Primero se elabora la tabla de valores de las variables:

Con estos datos se traza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.

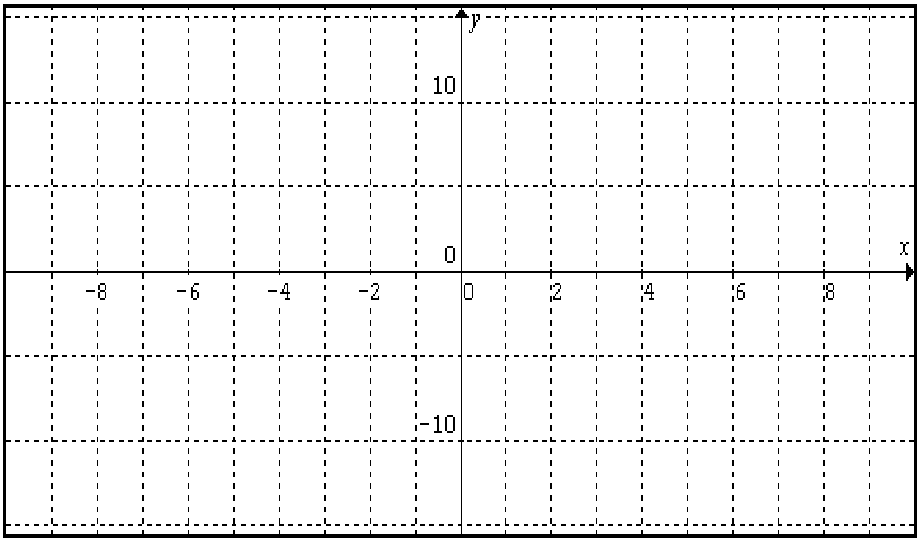


5.- Elaborar la gráfica de la función $y = x^2 + 6x - 8$

Solución

Primero se elabora la tabla de valores de las variables:

Con estos datos se traza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.



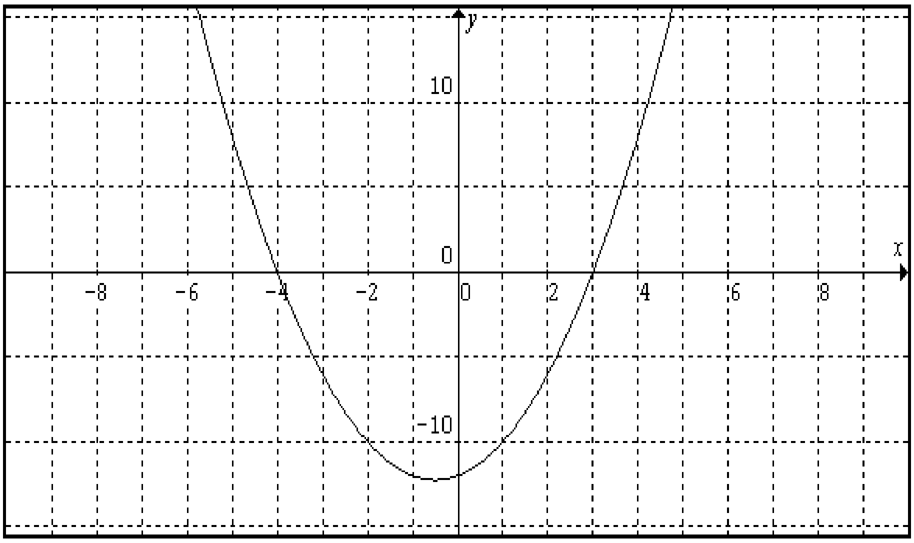
1.3 Raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática.

Por ejemplo, para determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función $y = x^2 + x - 12$, es necesario elaborar la tabla de valores con los cuales se traza la gráfica y ubicar los puntos de intersección de la gráfica con el eje de las abscisas.

Así, los valores de las variables se encuentran en la siguiente tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	12	18

Con estos datos se traza la gráfica de la función.



Las raíces de la ecuación cuadrática son: x_1 = - 4 y x_2 = 3.

Las raíces son: reales.

Ejercicios

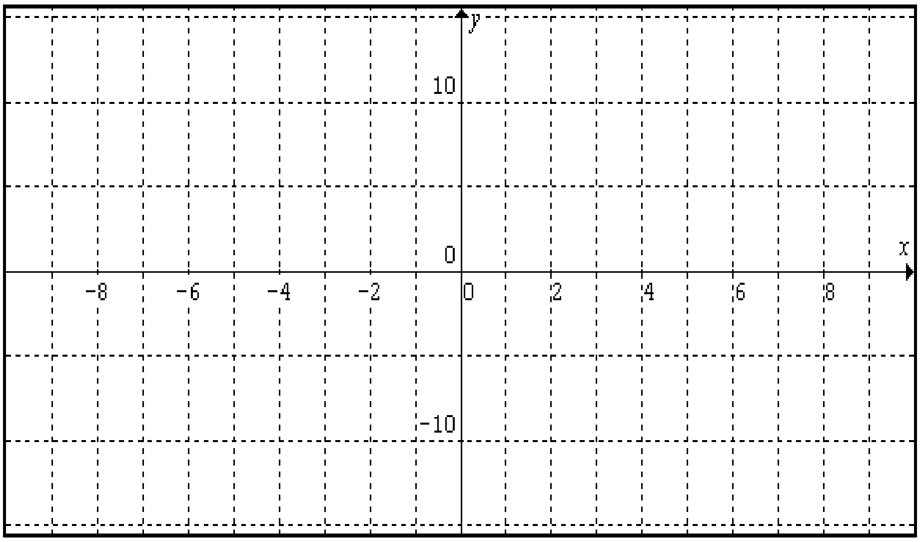
1.- Determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$y = x^2 + 3x + 2$

Solución

Los valores de las variables se encuentran en la siguiente tabla:

Con estos datos se traza la gráfica de la función.



Las raíces de la ecuación cuadrática son: x_1 =______ y x_2 =______

Las raíces son:____________

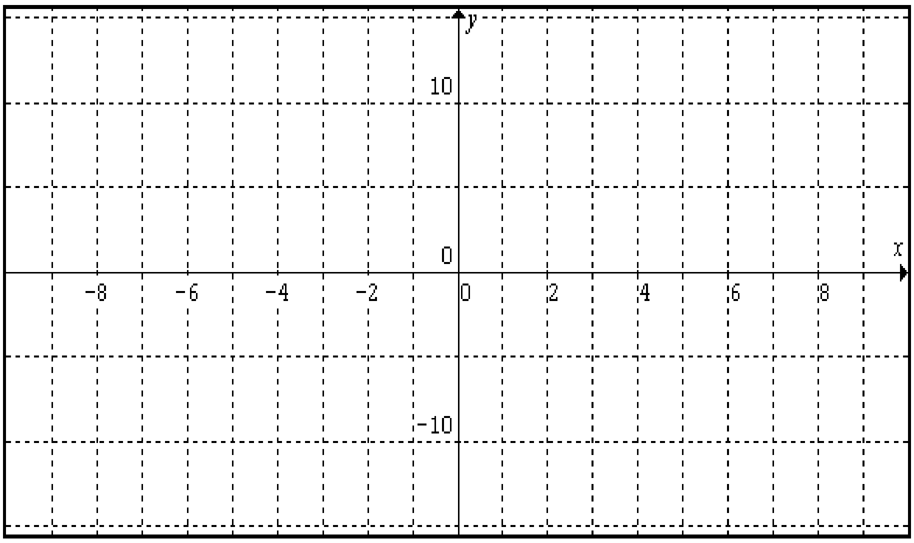
2.- Determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$y = - x^2 + 4x + 2$

Solución

Los valores de las variables se encuentran en la siguiente tabla:

Con estos datos se traza la gráfica de la función.



Las raíces de la ecuación cuadrática son: x_1 =______ y x_2 =______

Las raíces son:_____________

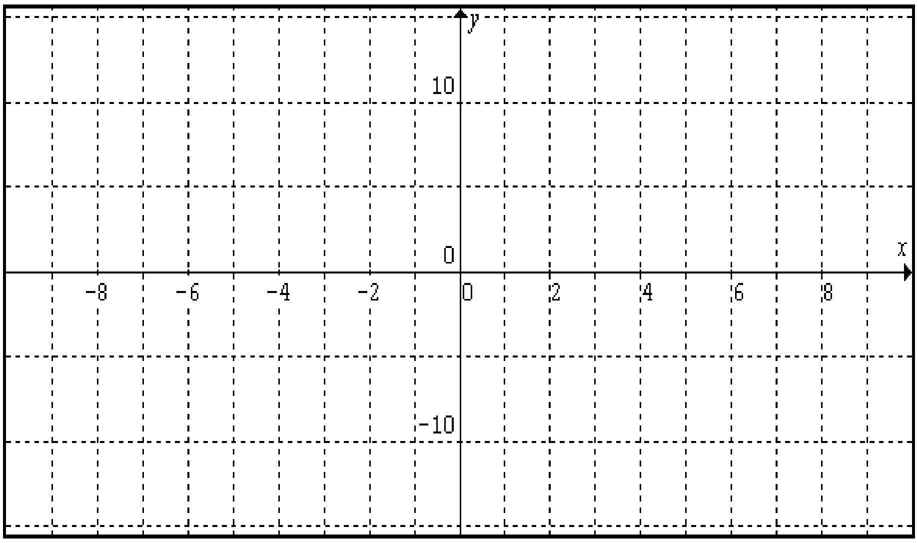
3.- Determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$y = x^2 - 8x + 2$

Solución

Los valores de las variables se encuentran en la siguiente tabla:

Con estos datos se traza la gráfica de la función.



Las raíces de la ecuación cuadrática son: x_1 =______ y x_2 =______

Las raíces son: _____________

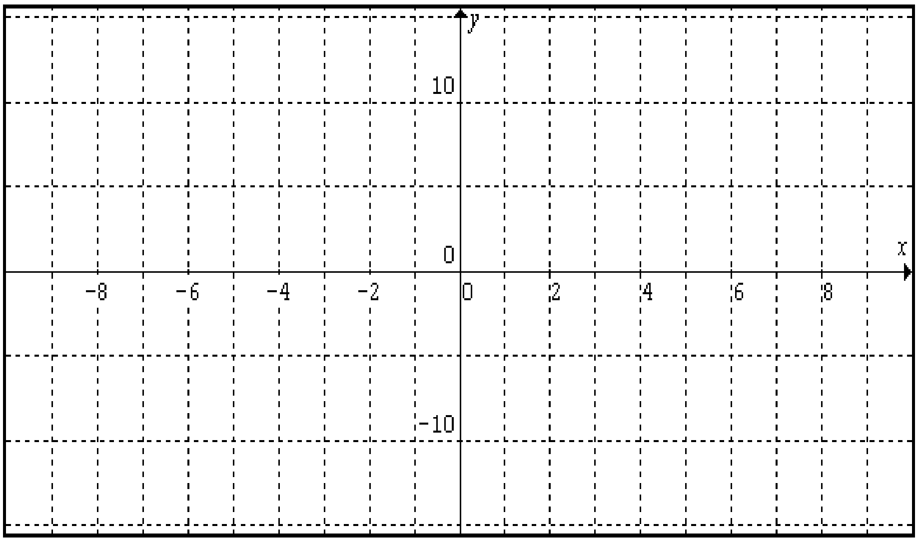
4.- Determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$y = - x^2 + 6x - 11$

Solución

Los valores de las variables se encuentran en la siguiente tabla:

Con estos datos se traza la gráfica de la función.



Las raíces de la ecuación cuadrática son: x_1 =______ y x_2 =______

Las raíces son: ______________

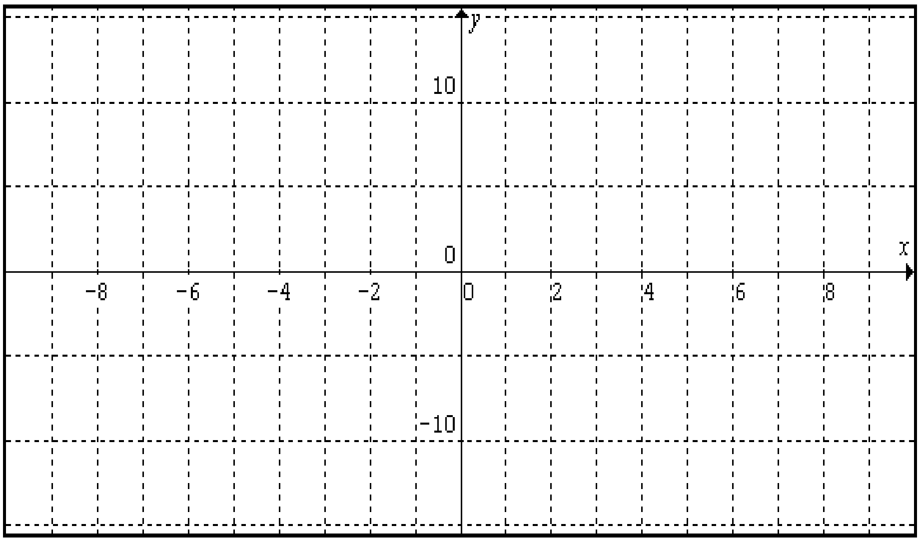
5.- Determinar las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función:

$y = x^2 + 3x + 5$

Solución

Los valores de las variables se encuentran en la siguiente tabla:

Con estos datos se traza la gráfica de la función.



Las raíces de la ecuación cuadrática son: x_1 =______ y x_2 =______

Las raíces son: ____________

1.4 Análisis del comportamiento de las funciones cuadráticas.

En la matemática es común realizar comparaciones entre los diferentes objetos que se están analizando. Para realizar esta comparación se parte de un esquema, objeto o gráfica conocida y se ubican las diferencias a partir de ésta.

Así, en el caso de las funciones cuadráticas la gráfica que se toma como base es la de $y = x^2$, a partir de ella se realizan las comparaciones.

Por ejemplo, si se consideran las funciones $y = x^2$, $y = x^2 + 4$, $y = x^2 - 2$, se elaboran las tablas de valores correspondientes y posteriormente sus gráficas en un mismo sistema de coordenadas.

La tabla de valores de la función $y = x^2$ es:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

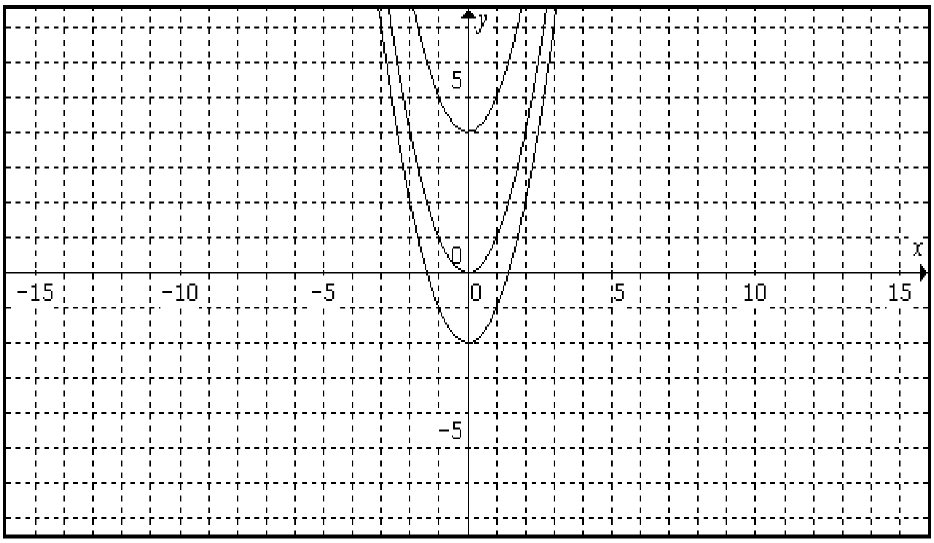
La tabla de valores de la función $y = x^2 + 4$ es:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	13	8	5	4	5	8	13

La tabla de valores de la función $y = x^2 - 2$ es:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	-1	-2	-1	2	7

La gráfica de las tres funciones es:



La gráfica de $y = x^2 + 4$ se encuentra desplazada 4 unidades hacia arriba a diferencia de la de $y = x^2 - 2$ que esta 2 unidades debajo de $y = x^2$.

Ejercicios

1.- Analizar el comportamiento de las funciones $y = (x + 4)^2$, $y = (x - 3)^2$ con respecto a la función $y = x^2$.

Solución

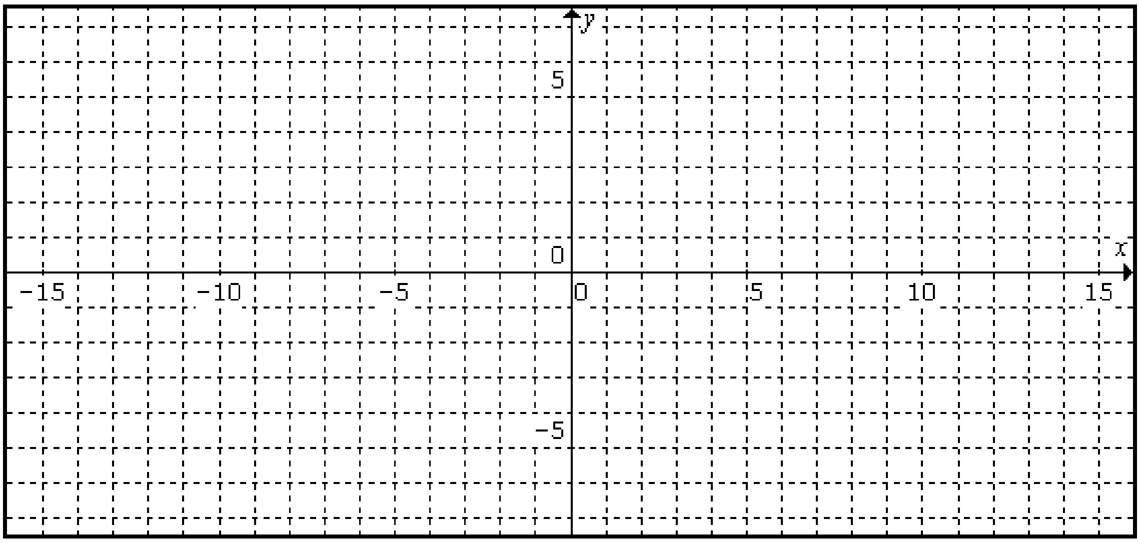
Se elaboran las tablas de las funciones y posteriormente sus gráficas en un mismo sistema de coordenadas.

La tabla de valores de la función $y = x^2$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x + 4)^2$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x - 3)^2$ es:

La gráfica de las tres funciones es:



La gráfica de $y = (x + 4)^2$ se encuentra desplazada _____ unidades hacia la ______________, mientras la gráfica de $y = (x - 3)^2$ se encuentra _____ unidades hacia la ______________ .

2.- Analizar el comportamiento de las funciones $y = (x + 3)^2 + 2$, $y = (x – 1)^2 - 3$ con respecto a la función $y = x^2$.

Solución

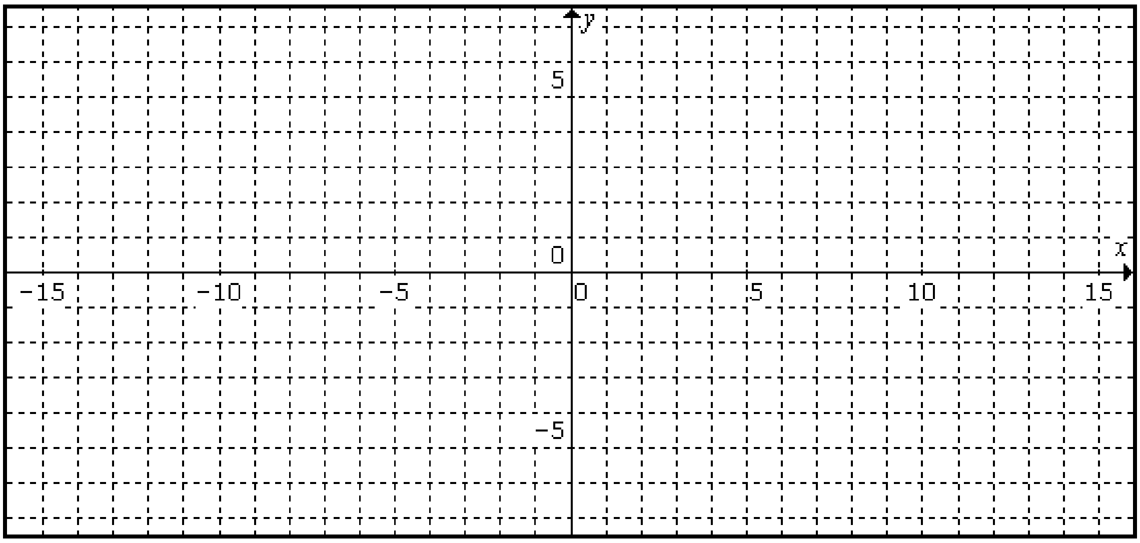
Se elaboran las tablas de las funciones y posteriormente sus gráficas en un mismo sistema de coordenadas.

La tabla de valores de la función $y = x^2$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x + 3)^2 + 2$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x – 1)^2 – 3$ es:

La gráfica de las tres funciones es:



La gráfica de $y = (x + 3)^2 + 2$ se encuentra desplazada _____ unidades hacia la ______________ y _____ unidades hacia ____________ , mientras la gráfica de $y = (x – 1)^2 – 3$ se encuentra _____ unidades hacia la ______________ y ______ unidades hacia ____________ .

3.- Analizar el comportamiento de las funciones $y = (x + 0)^2 + 5$, $y = (x - 0)^2 + 1$ con respecto a la función $y = x^2$.

Solución

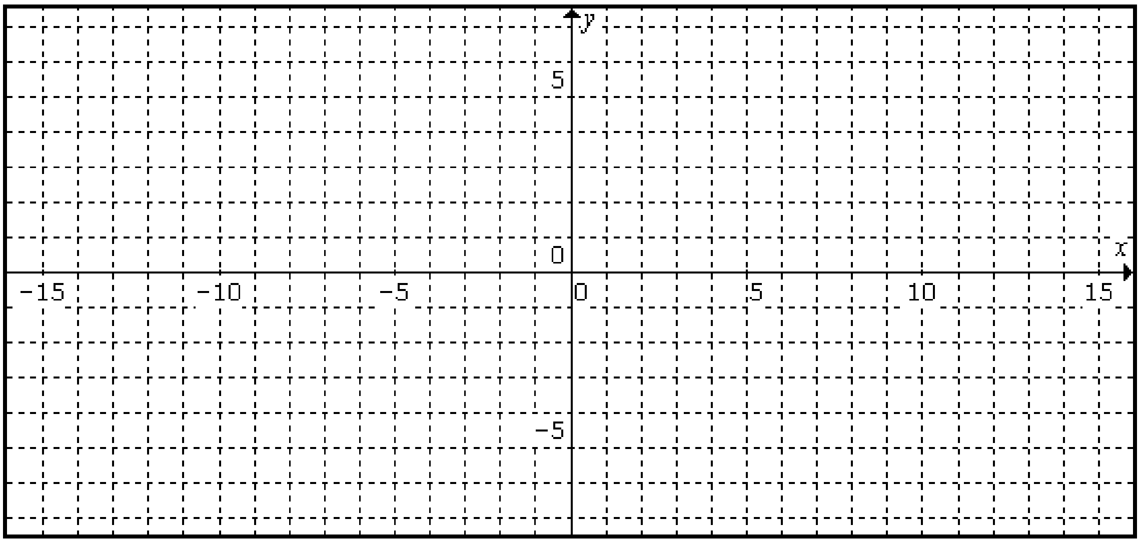
Se elaboran las tablas de las funciones y posteriormente sus gráficas en un mismo sistema de coordenadas.

La tabla de valores de la función $y = x^2$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x + 0)^2 + 5$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x - 0)^2 + 1$ es:

La gráfica de las tres funciones es:



La gráfica de $y = (x + 0)^2 + 5$ se encuentra desplazada _____ unidades hacia la _______________ y _____ unidades hacia _____________ , mientras la gráfica de $y = (x - 0)^2 + 1$ se encuentra _____ unidades hacia la _______________ y ______ unidades hacia _____________ .

4.- Analizar el comportamiento de las funciones $y = (x + 3)^2 + 1$, $y = (x - 3)^2 - 1$ con respecto a la función $y = x^2$.

Solución

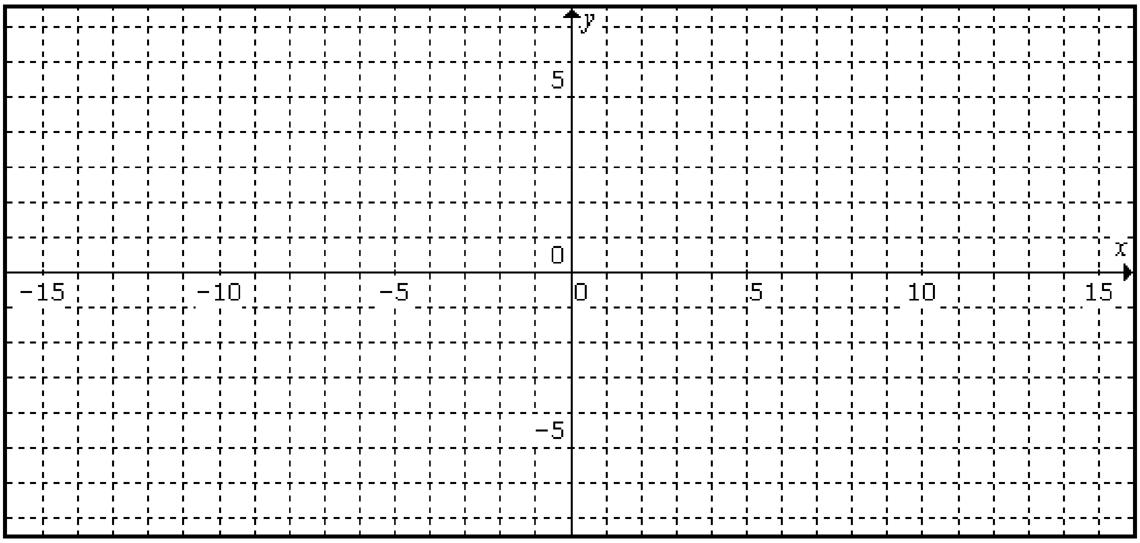
Se elaboran las tablas de las funciones y posteriormente sus gráficas en un mismo sistema de coordenadas.

La tabla de valores de la función $y = x^2$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x + 3)^2 + 1$ es:

La tabla de valores de la función $y = (x - 3)^2 - 1$ es:

La gráfica de las tres funciones es:



La gráfica de $y = (x + 3)^2 + 1$ se encuentra desplazada _____ unidades hacia la ______________ y _____ unidades hacia ____________ , mientras la gráfica de $y = (x - 3)^2 - 1$ se encuentra _____ unidades hacia la ______________ y ______ unidades hacia ____________ .

1.5 Determinación del vértice de una parábola.

El vértice de una parábola es conocido como el punto de inflexión de la gráfica debido a que es el lugar geométrico donde la gráfica cambia de dirección, es decir, pasa de ser una función decreciente (creciente) a una función creciente (decreciente).

A pesar que gráficamente se puede determinar este punto, también se puede obtener mediante el proceso algebraico de expresar la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$ en términos de $y = a(x - h)^2 + k$, donde el punto (h, k) es el vértice.

Por ejemplo, si se tiene la función cuadrática $y = x^2 + 4x - 7$ y se desea determinar el vértice de la parábola se procede de la siguiente forma:

$$y = x^2 + 4x - 7$$

Esta expresión también se puede escribir como:

$$y = x^2 + 4x + 0 - 7$$

El cero se puede escribir como $4 - 4$, por lo que la función quedaría:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 4 - 7$$

Los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto por lo que se factoriza la expresión y reagrupan los otros dos términos.

$$y = (x + 2)^2 - 11$$

Ahora, se compara la función obtenida con la forma $y = a(x - h)^2 + k$.

Al hacer la comparación se determina que $a = 1, h = -2, k = -11$.

Por ello, el vértice, que tiene coordenadas (h, k) será:

$$V\ (-2, -11)$$

Nota: La forma de escribir el cero se obtiene de considerar la mitad del coeficiente del término lineal y el resultado elevarlo al cuadrado. En este caso el coeficiente del término lineal es 4, su mitad $(\frac{4}{2})$ es 2, y este número elevado al cuadrado $(2)^2$ es 4.

Ejercicios

1.- Determinar el vértice de la parábola $y = x^2 - 8x + 10$.

Solución

Se tiene la función:

$y = x^2 - 8x + 10$

Al agregar el cero la función se escribe como:

$y = x^2 - 8x + 0 + 10$

El cero se escribe como: _____ - ______ $= 0$

Al sustituir el cero se obtendrá la expresión:

$y = x^2 - 8x +$ ____ - ____ $+ 10$

Como los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto se factorizan estos y los últimos dos términos se reagrupan, por lo que la función se expresa como:

y = (x - ____)^2 _____

Ahora, se compara la función obtenida con $y = a(x – h)^2 + k$ y se obtiene:

$a = 1$, h = _____ , k = ______

Por lo que, el vértice será:

V (___ , ___)

2.- Determinar el vértice de la parábola $y = x^2 + 10x + 5$.

Solución

Se tiene la función:

$y = x^2 + 10x + 5$

Al agregar el cero la función se escribe como:

$y = x^2 + 10x + 0 + 5$

El cero se escribe como: _____ - ______ $= 0$

Al sustituir el cero se obtiene la expresión:

$y = x^2 + 10x +$ ____ - ____ $+ 5$

Como los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto se factorizan estos y los últimos dos términos se reagrupan, por lo que la función se expresa como:

$y = (x$ - ____ $)^2$ _____

Ahora, se compara la función obtenida con $y = a(x - h)^2 + k$ y se obtiene:

$a = 1, h =$ _____ , $k =$ ______

Por lo que, el vértice será:

V (___ , ___)

3.- Determinar el vértice de la parábola $y = x^2 - 5x + 1$.

Solución

Se tiene la función:

$y = x^2 - 5x + 1$

Al agregar el cero la función se escribe como:

$y = x^2 - 5x + 0 + 1$

El cero se escribe como: _____ - ______ $= 0$

Al sustituir el cero se obtiene la expresión:

$y = x^2 – 5x +$ ____ - ____ $+ 1$

Como los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto se factorizan estos y los últimos dos términos se reagrupan, por lo que la función se expresa como:

$y = (x -$ ____ $)^2$ _____

Ahora, se compara la función obtenida con $y = a(x – h)^2 + k$ y se obtiene:

$a = 1, h =$ _____, $k =$ ______

Por lo que, el vértice será:

V (___ , ___)

4.- Determinar el vértice de la parábola $y = x^2 + 9x - 3$.

Solución

Se tiene la función:

$y = x^2 + 9x - 3$

Al agregar el cero la función se escribe como:

$y = x^2 + 9x + 0 - 3$

El cero se escribe como: _____ - ______ $= 0$

Al sustituir el cero se obtiene la expresión:

$y = x^2 + 9x +$ ____ - ____ $- 3$

Como los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto se factorizan estos y los últimos dos términos se reagrupan, por lo que la función se expresa como:

$y = (x -$ ____ $)^2$ _____

Ahora, se compara la función obtenida con $y = a(x – h)^2 + k$ y se obtiene:

$a = 1, h =$ _____ , $k =$ ______

Por lo que, el vértice será:

V (___ , ___)

5.- Determinar el vértice de la parábola $y = 3x^2 - 18x + 2$.

Solución

Se tiene la función:

$y = 3x^2 - 18x + 2$

Se factorizan los dos primeros términos por el coeficiente del término cuadrático:

$y = 3(x^2 – 6x) + 2$

Al agregar el cero la función se escribe como:

$y = 3(x^2 – 6x+ 0) + 2$

El cero se escribe como: _____ - ______ $= 0$

Al sustituir el cero se obtiene la expresión:

$y = 3(x^2 – 6x +$ ____ - ____ $) + 2$

Como los tres primeros términos al interior del paréntesis forman un trinomio cuadrado perfecto se factorizan estos y el último término se extrae del paréntesis y se reagrupa con el que esta fuera del paréntesis (no olvide multiplicar por el factor de afuera del paréntesis el último término), por lo que la función se expresa como:

$y = 3(x -$ ____ $)^2$ _____

Ahora, se compara la función obtenida con $y = a(x – h)^2 + k$ y se obtiene:

$a = 3, h =$ _____ , $k =$ ______

Por lo que, el vértice será:

V (___ , ___)

ANEXO B

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL AZCAPOTZALCO

Primer Examen Parcial de Matemáticas II PEA-Reestructurado
Segundo Semestre

Febrero del 2006 Elaboró: **Francisco Ramón Ruz Ávila**

Nombre: ______________________________

Calificación: ______________________ Grupo: ______________

Instrucciones:
Resuelve cada una de los problemas siguientes encerrando con un círculo la opción que corresponda a la respuesta correcta y escribiendo la letra adentro del paréntesis correspondiente. Valor de cada problema es de 5 puntos en la escala de 0 a 100.

1. La función cuadrática que se expresa como $y = ax^2 + bx + c$; $\forall$ $a \neq 0$ ………..( )
   a) tiene dos ceros.
   b) tiene un cero.
   c) no tiene ceros.
   d) se desconoce cuantos ceros tiene.

2. La variable independiente de una función cuadrática se localiza en el eje de..........( )
   a) las " y "
   b) las ordenadas
   c) las abscisas
   d) el contradominio

3. La parábola que es más abierta comparada con $f(x) = -x^2$, abre sus ramas hacia abajo y con vértice en V(3 , 2) es ....( )

a) $f(x) = -5 (x – 3)^2 + 2$

b) $f(x) = -4 (x – 2)^2 + 3$

c) $f(x) = -\frac{1}{2} (x – 2)^2 + 3$

d) $f(x) = -\frac{1}{3} (x – 3)^2 + 2$

4. La parábola que es más cerrada comparada con $f(x) = x^2$, sus ramas se abren hacia arriba y tiene como vértice a V(0 , -2) se expresa como ....( )

a) $f(x) = \frac{1}{3} x^2 - 2$

b) $f(x) = 5 x^2 - 2$

c) $f(x) = 2 x^2 + 2$

d) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2$

5. El vértice de la parábola representada por $f(x) = 2 (x – 4)^2 + 3$ es ....( )

a) V(-4 , 3)

b) V(2 , 3)

c) V(4 , 3)

d) V(-3 , 4)

6. La parábola que se obtiene al graficar $f(x) = - \frac{1}{2} x^2 - x + 1$ tiene como vértice……......( )

a) V(-1 , ½)

b) V(1 , -½)

c) V(-1 , 3/2)

d) V(1 , ½)

7. La función $f(x) = (3x – 1)^2 - 2$ tiene como gráfica una parábola con vértice en …… ......( )

a) V(1 , -2)

b) V(- ⅓ , 2)

c) V(⅓ , -2)

d) V(-1 , -2)

8. El vértice de la parábola que corresponde a $y = -3x^2 - 12x – 11$ se encuentra……......( )

a) sobre el eje de las ordenadas

b) en el primer cuadrante

c) en el cuadrante II

d) sobre el eje de las abscisas

9. La gráfica de $f(x) = ½ x^2 + 2$ es una parábola cuyo vértice se encuentra ………… ..….( )
a) sobre el eje de las abscisas
b) sobre el eje de las ordenadas
c) en el segundo cuadrante
d) en el cuadrante I

10. Al graficar la función $y = 3(x + 2)^2 + 2$ se observa que: ……………………………… ..….( )
a) las ramas de la parábola van hacia abajo y el vértice está en el cuadrante II
b) tiene concavidad negativa y los ceros de la función son iguales
c) el vértice se localiza en el cuadrante II y no corta al eje de las x
d) tiene un máximo y los ceros son 3 y 1

11. El vértice de la parábola que representa a $f(x) = x^2 - 8x + 16$ se encuentra ……… …...( )
a) en el segundo cuadrante
b) sobre el eje de las ordenadas
c) sobre el eje de las abscisas
d) en el cuadrante I

12. Dada $f(x) = -2x^2 + 4x$, los ceros de la función……………………………………… ..….( )
a) son positivos
b) no existen
c) están en (0 , 2)
d) son 0 y 2

13. La ecuación del eje de simetría de la parábola que representa a $f(x) = 2x^2 + 5x$ es. ..….( )
a) $x = -5/4$
b) $x = -5/2$
c) $x = 2/5$
d) $x = 5/2$

14. El eje de simetría de la parábola determinada por la función $f(x) = 3(x-2)^2$ es la recta...(   )

a) $x = -2$

b) $x = -6$

c) $x = 5$

d) $x = 2$

15. La ecuación de la recta que representa al eje de simetría de la parábola y los ceros de la función $f(x) = x^2 - 2x - 15$ son respectivamente.................................(   )

a) $x = 1$, $\{-3, 5\}$

b) $x = -1$, $\{-5, 3\}$

c) $x = 1$, $\{3, 5\}$

d) $x = -1$, $\{-3, -5\}$

16. El eje parabólico que corresponde a la gráfica de la función $y = (3x-6)^2 + 2$ es . ...(   )

a) $x = -6$

b) $x = 2$

c) $x = 3$

d) $x = 6$

17. La función $f(x) = -3(x+2)^2 - 1$ tiene un ....(   )

a) máximo en P(-2 , -1)

b) mínimo en P(2 , 1)

c) máximo en P(-1 ,- 2)

d) mínimo en P(1 , 2)

18. La función $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ tiene un ....(   )

a) mínimo igual a 5

b) máximo igual a 6

c) mínimo igual a 2

d) máximo igual a 8

19. Si en la función $f(x) = ax^2 + bx$; $a<0$, entonces tiene un máximo en………………. ..….( )

a) $-\frac{b}{4a}$

b) $-\frac{b}{2a}$

c) $-\frac{b^2}{4a}$

d) $-\frac{b^2}{2a}$

20. La función $f(x) = 5x^2 + 1$ es creciente en el intervalo………………………………. ..….( )

a) $(-\infty , 2)$

b) $(-\infty , 0)$

c) $(0 , \infty)$

d) $(2 , \infty)$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Colegio de Ciencias y Humanidades (2002) Programa de Estudios de Matemáticas I a IV, UNAM. México.

Colegio de Ciencias y Humanidades (2005) Revisión del Plan de Estudios Tercera Etapa. Orientación y Sentido de las Áreas. UNAM. México. p. 15

Colegio de Ciencias y Humanidades (2005a). *Ingreso Estudiantil al CCH.* Secretaría de Planeación. Dirección General del CCH. UNAM. México.

Contreras J. D. (1991) *El currículum como formación*. Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Del Carmen M.L. (1996). *El Análisis y Secuenciación de los Contenidos Educativos.* Ed. Horsori. Universitat de Barcelona.

Delors Jacques (1996). *La educación Encierra un Tesoro*. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI. Ed. Correo de la Unesco.

Duval R. (1993). Semiosis y Noesis. Lecturas en Didáctica de la Matemática; Escuela Francesa. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval R. (1998). *Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento.* En Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Duval R. (1999) *Sémiosis y Pensamiento Humano Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Colombia.

Gil Daniel. (1991). *Programas-guía de actividades*. Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Gimeno Sacristán J. (1991). *Los materiales y la enseñanza.* Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Hernández Sampieri, et al. (2001). *Metodología de la Investigación.* Ed. McGraw-Hill, México.

Instituto de Ciencias de la Educación (1990) *El proyecto ACES de ciencia y tecnología.* Universidad de Santiago de Compostela. Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Jackson Philip W. (2001). *La Vida en las Aulas.* Ed. Morata. Madrid

Lundgren, U. (1983). *Between Hope and Happening: Text and Context in Curriculum.* Victoria: Deakin University Press.

Marchesi A. (1991). *Lo que dice el MEC sobre materiales.* Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Martínez B. J. (1991) *El cambio profesional mediante los materiales.* Cuadernos de Pedagogía No. 189, España.

Pozo J. I. et al (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje.* Ed. GRAÓ, España.

Pozo J.I. (1997). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Ed. Morata, España.

San Martín Alonso A. (1991). *La organización escolar.* Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Santos Guerra M. A. (1991). *¿Cómo evaluar los materiales?* Cuadernos de Pedagogía No. 194, España.

Shteerman E.,Sharevkaia B. (1984). *El Régimen Esclavista.* Ed. Cartago, México.

Tovar S. A. (2001). *El constructivismo en el Proceso Enseñanza-Aprendizaje.* Ed. IPN, México.

Vygotsky,Lev S. (1988). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores.* Ed. Crítica, Barcelona.

Vygotsky,Lev S. (2003). *Pensamiento y Lenguaje*. Ed. Quinto Sol. México.

Wadsworth B. J. (1995). *Teoría de Piaget del Desarrollo Cognoscitivo y Afectivo.* Ed. Diana, México.

Wayne W. Daniel. (2000). *Estadística con Aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación.* Ed. McGraw-Hill, México.