UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONTINUOS 2-EQUIVALENTES"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

CARLOS ISLAS MORENO

DIRECTORA DE TESIS: DRA MARIA ISABEL PUGA ESPINOSA

MÉXICO, D.F. AGOSTO, 2008

CONTINUOS 2-EQUIVALENTES

Carlos Islas Moreno

2008

Índice general

DEDICATORIA

A MI FAMILIA:

Rocío Leonel Gómez y Carlos Islas Leonel

A mi mamá:

María Martha Moreno Samperio

A mis hermanos: Esteban y Fernando

A LA MEMORIA DE MI PADRE

AGRADECIMIENTOS

A DIOS.

A Rocío Leonel Gómez, por haber participado activamente en este trabajo y en mi vida. Mi tesis y resultados es el fruto de su participación en este trabajo y se lo agradezco mucho, pero le agradezco mucho más, el fruto más importante que nos pudo dar DIOS: Carlitos. Gracias mi amor. TE QUIERO.

A Carlos Islas Leonel, por su comprensión y permitirme trabajar.

A toda mi familia, por su apoyo incondicional, sobre todo a mi mamá.

A Beti por todo, su amistad, sus consejos, su tiempo, por creer en mi, por ser más que mi tutora.

A mis sinodales por haberle dedicado gran parte de su tiempo en mejorar mi trabajo:

AGRADECIMIENTOS

Dr. Raúl Escobedo, Dr. Salvador García, Dr. Sergio Macias, Dra. Isabel Puga y Dr. Richard Wilson.

A Sergio, Hector, Alejandro, Paty, Gerardo y Wlodek, por haber contribuido a este trabajo.

A DEGEP y CONACyT por todo el apoyo brindado para concluir mis estudios.

A quienes están ahí para hacer que esto tenga sentido: Carlitos, Jazmín, Luis Fernando, Virginia, Miriam y Judith.

A Esteban, Fernando, Alma, Mary, mi tía Andrea, mi tía Juana, Clemen, Raúl, Alfredo, mi nueva familia, M. Antonio, Genoveva, Ale, Miriam, Bony, Alejandro, Rodrigo y Mariana.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo de investigación fue la clasificación de los continuos 2-equivalentes y la construcción de ejemplos con propiedades específicas.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. El arco, que es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, tiene la propiedad de que todos sus subcontinuos no degenerados son arcos. A este tipo de continuos se les llama $1-equivalentes$. Una pregunta clásica de la Teoría de los Continuos es la siguiente: ¿Cuáles continuos comparten con el arco, la propiedad de ser 1-equivalentes? Bing, Moise, Henderson y Cook dieron respuestas parciales a esta pregunta. Pero continúa abierto el problema de clasificar a esta clase de continuos.

Todos los subcontinuos no degenerados de una curva cerrada simple (continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria) y de un triodo simple (continuo homeomorfo a la letra T), son homeomorfos o bien a un arco o bien al continuo original. En otras palabras, una curva cerrada simple, así como un triodo simple contienen 2 tipos de subcontinuos no degenerados y no homemorfos entre sí. A los continuos que tienen esta propiedad se les llama *continuos* $2-$ *equivalentes*.

Este trabajo está organizado en 5 capítulos:

I. Preliminares. Presentamos resultados conocidos, definiciones y teoremas que ocuparemos en el resto del trabajo. Enunciamos con su referencia los resultados que ya son conocidos o que ya se han demostrado.

II. Irreducibilidad, donde presentamos respuestas parciales a la conjetura: Un continuo 2-equivalente es la curva cerrada simple, un triodo simple o un continuo irreducible.

III. Límites inversos y la Propiedad de Kelley. En este capítulo, presentamos condiciones necesarias para que un límite inverso de arcos tenga la Propiedad de Kelley. Nos interesan estos límites inversos por la conexión que tienen con ejemplo que mostramos en este capítulo, el cual es un continuo 2-equivalente con la propiedad de Kelley, que es la cerradura de un rayo topológico, con residuo homeomorfo al total.

IV. Ejemplo sin propiedad de Kelley. Se prueba que el ejemplo de Mahavier presentado en [20] no tiene la propiedad de Kelley.

V. Familias de ejemplos. Presentamos dos familias de ejemplos, la primera, de continuos 2-equivalentes con la propiedad de que cada elemento de la familia, es la cerradura de un rayo topológico con residuo homeomorfo al continuo total. La segunda, aunque no se trata de continuos 2-equivalentes, fue consecuencia del trabajo de investigación y se desarrolló después de que A. Lelek preguntó si existía esta familia. Cabe mencionar que esta última ya fué publicada en el número de Diciembre de 2007 de la revista Topology Proceedings.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Comenzaremos con algunas definiciones.

Definición 1.1 *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

$\mathbb{N}$ denotará el conjunto de números naturales. Sea X un continuo, si A es un subconjunto de X, $\overline{A}$ denotará la cerradura de A y A^c su complemento.

Definición 1.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X es llamado n-equivalente, si contiene n subcontinuos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, no degenerados y no homeomorfos* *entre sí, de tal manera que si Y es un subcontinuo no degenerado de X, entonces Y es homeomorfo a X_i para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Definición 1.3 *Un continuo X es llamado hereditariamente n-equivalente, si cada subcontinuo no degenerado de X es n-equivalente.*

Definición 1.4 *Un continuo X es descomponible si existen dos subcontinuos propios H y K de X tales que $H \cup K = X$. Diremos que M es indescomponible si no existen tales subcontinuos.*

Definición 1.5 *Un continuo X es 2-indescomponible si existen A y B subcontinuos indescomponibles propios y no degenerados de X, tales que $X = A \cup B$.*

Definición 1.6 *Sean S un espacio topológico y $H \subset S$. Entonces, la frontera de H (en S), denotada por $Fr_S(H)$ o, simplemente, por $Fr(H)$, está definida por $Fr(H) = \overline{H} \cap \overline{(S - H)}$.*

El siguiente Teorema, llamado Teorema de Golpes en la Frontera, dice que, bajo algunas condiciones, una componente de un conjunto debe golpear (= intersectar) a la frontera [27, págs. 73-75].

Teorema 1.7 *Sean X un continuo, y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$ (equivalentemente, como $\overline{K} \subset \overline{E}$, $\overline{K} \cap \overline{(X-E)} \neq \emptyset$).*

Como consecuencia del Teorema anterior, tenemos el siguiente corolario (una prueba de este, se encuentra en [27, Corolario 5.5, pág. 74]).

Corolario 1.8 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Más aún: Si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subsetneq U$.*

Recordemos algunas definiciones de funciones.

Definición 1.9 *Sean X y Y continuos. Diremos que una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$, es:*

a) Confluente si para cualquier subcontinuo B de Y y cualquier componente C de $f^{-1}(B)$, $f(C) = B$.

b) Monótona si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.

c) Abierta si $f(V)$ es abierto, para cada V abierto de X.

d) Débilmente confluente si para cualquier subcontinuo B de Y, hay una componente C de $f^{-1}(B)$, tal que $f(C) = B$.

Teorema 1.10 *[18, Lema 2.1.12, pág. 74] Una función continua* $f : X \to Y$*, es monótona si y solo si* $f^{-1}(C)$ *es conexo para cada conexo* $C \subset Y$*.*

De éste resultado obtenemos fácilmente el siguiente Corolario.

Corolario 1.11 *Si* $f : X \to Y$*, es monótona, entonces* f *es confluente.*

Teorema 1.12 *[27, 13.71, pág 310] Cualquier función continua* $f : [0,1] \to [0,1]$ *es débilmente confluente.*

Consideraremos los hiperespacios de un continuo (X, d), con métrica d dados por

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\},$$

ambos con la topología inducida por la siguiente métrica (véase [27, Teorema 4.2, pág. 53]) conocida como la métrica de Hausdorff.

$\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida como:

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N_d(\varepsilon, A)\}$$

donde $N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon$ para alguna $a \in A\}$.

1.2. CONTINUOS N-EQUIVALENTES

En esta sección daremos una breve historia de los continuos 1-equivalentes y presentaremos algunos resultados conocidos de los continuos n-equivalentes.

El arco, que es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, es 1-equivalente, pues todos sus subcontinuos son arcos.

Dado que en 1921 no se conocía otro continuo 1-equivalente, Mazurkiewicz planteó la pregunta: (Véase [21])

Pregunta 1.13 *¿Es el arco el único continuo 1-equivalente?*

Durante mucho tiempo se pensó que la respuesta a esta pregunta era afirmativa.

Knaster en [14], muestra la existencia de un continuo hereditariamente indescomponible. Moise en [24] construyó al *pseudoarco* y probó que es 1-equivalente y Bing en [3], probó que ambos ejemplos eran homeomorfos.

Debido a que hasta ahora no se conoce ningún otro continuo 1-equivalente, distinto al arco y al pseudoarco, tenemos la siguiente conjetura:

Conjetura 1.14 *El arco y el pseudoarco son los únicos continuos 1-equivalentes.*

Hay resultados parciales para los continuos 1-equivalentes. Henderson [9] en 1960 probó lo siguiente:

Teorema 1.15 *Si X es un continuo 1-equivalente y descomponible, entonces X es un arco.*

Definición 1.16 *Un continuo X es un árbol si es una gráfica finita sin curvas cerradas simples.*

En 1970, Cook probó lo siguiente:

Teorema 1.17 *[8, Theorem, pág. 204] Si X es un continuo 1-equivalente, entonces X es límite inverso de árboles.*

Más adelante, en este capítulo, definiremos con detalle "límite inverso".

En la siguiente sección presentaremos los resultados que se tienen para los continuos 2-equivalentes. Terminaremos esta sección presentando dos resultados conocidos para continuos n-equivalentes.

Definición 1.18 *Un continuo es localmente conexo en un punto p si para cada abierto U de X que contiene a p, existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo si X es localmente conexo en todos sus puntos.*

Definición 1.19 *Sea X un continuo y $p \in X$, entonces X es semilocalmente conexo en p si cada vecindad de p, contiene un abierto V de p tal que $X \setminus V$ tiene sólo una cantindad finita de componentes. Diremos que X es semilocalmente conexo, si es semilocalmente conexo en cada uno de sus puntos.*

S. B. Nadler Jr. probó la siguiente caracterización para los continuos semilocalmente conexos:

Teorema 1.20 *[28, Teorema 3.1, pág. 208] Si X es un continuo n-equivalente y semilocalmente conexo en cada uno de sus puntos que no son de corte, éste debe ser una gráfica finita.*

1.3. IRREDUCIBILIDAD

Definición 1.21 *Sean X un continuo y A un subconjunto de X, diremos que X es irreducible con respecto a A, si no hay subcontinuos propios de X que* *contengan a A. Diremos que un continuo X es irreducible si es irreducible con respecto a un subconjunto que contiene exactamente dos puntos. En este caso diremos que X es irreducible entre esos dos puntos. Sean R y S subconjuntos de X. Diremos que un subcontinuo Y de X es irreducible de R a S si existen $r \in R$ y $s \in S$ tales que Y es irreducible entre r y s. Dado un continuo X, diremos que p es un punto de irreducibilidad de X, si X es irreducible entre p y algún otro punto de X.*

A continuación, mencionaremos algunos teoremas conocidos.

Teorema 1.22 *[27, 4.35, pág. 68] Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Entonces existe un subcontinuo de X, que es irreducible con respecto a A.*

De lo anterior se sigue fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 1.23 *Sean X un continuo y $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existe un subcontinuo Y irreducible entre p y q.*

Teorema 1.24 *[27, Corolario 11.15.1, pág. 203] Si X es un continuo indescomponible, entonces X es irreducible.*

Definición 1.25 *Sean X un continuo no degenerado y p un punto de X. La composante de X que contiene a p, está definida por:*

$$\mathcal{K}(p) = \{x \in X : \text{ hay un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ tal que } p, x \in A\}$$

Los siguientes dos Teoremas, nos dicen la cantidad de composantes que puede tener un continuo. Para ver su demostración nos referimos a [27, págs. 201-203].

Teorema 1.26 *Sea X un continuo descomponible. Entonces, X tiene exactamente una o exactamente tres composantes. Más precisamente: Si X no es irreducible, X tiene exactamente una composante (X mismo), y, si X es irreducible entre dos puntos $x, y \in X$ tiene exactamente tres composantes ($\mathcal{K}(x)$, $\mathcal{K}(y)$ y X).*

Teorema 1.27 *Si X es un continuo no degenerado indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

1.4. UNICOHERENCIA

Empezaremos con las definiciones básicas.

Definición 1.28 *Un continuo X es unicoherente si $H \cap K$ es conexo, para cualesquiera subcontinuos H y K de X, tales que $H \cup K = X$. Diremos que un continuo X es hereditariamente unicoherente si todos sus subcontinuos son unicoherentes. Equivalentemente, si $H \cap K$ es conexo, para cualesquiera dos subcontinuos H y K de X.*

Es claro de las definiciones de continuo unicoherente y de continuo indescomponible que:

Teorema 1.29 *Cualquier continuo indescomponible es unicoherente.*

Definición 1.30 *Diremos que un continuo X es finitamente no unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X, se tiene que el número de componentes de $A \cap B$ es finito y mayor que uno.*

Definición 1.31 *Un triodo es un continuo X que contiene un subcontinuo H tal que $X \setminus H$ es la unión de tres conjuntos no vacíos y mutuamente separados en X. Un continuo es atriódico, si no contiene triodos.*

Definición 1.32 *Un continuo X es encadenable si para cada número positivo ε, existe una cantidad finita de abiertos conexos $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ de diámetro menor que ε, tales que $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$.*

Teorema 1.33 *[4, Teorema 11, pág. 660]. Sea X un continuo irreducible, hereditariamente descomponible y hereditariamente unicoherente. Entonces X es encadenable.*

Corolario 1.34 *[22, Corolario, pág. 180] Sea X un continuo hereditariamente descomponible, X es hereditariamente irreducible si y sólo si es atriódico y hereditariamente unicoherente.*

1.5. ARCOCOMPONENTES

Definición 1.35 *Una arcocomponente de un continuo X es un subconjunto arcoconexo maximal.*

Definición 1.36 *Un rayo topológico es un espacio homeomorfo al intervalo $[0, \infty)$.*

Utilizaremos el siguiente resultado en el capítulo de irreducibilidad.

Teorema 1.37 *[26, Teorema 1, pág. 188] Si X es un continuo encadenable con exactamente dos arcocomponentes, entonces una de ellas es un arco y la otra es un rayo topológico.*

1.6. LÍMITES INVERSOS Y PROPIEDAD DE KELLEY

Sean $\{X_1, X_2, X_3, ...\}$ una sucesión de continuos y $\{f_1^2, f_2^3, f_3^4, ...\}$ una sucesión de funciones continuas y suprayectivas, tales que $f_i^{i+1} : X_{i+1} \to X_i$ para cada $i \in \{1, 2, ...\}$. Llamaremos a la sucesión $\left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$, una sucesión inversa y llamaremos límite inverso al espacio

$$X_\infty = \varprojlim \left\{X_n, f_n^{n+1}\right\} = \left\{(x_1, x_2, ...) : \text{para cada } n \in \mathbb{N},\ f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n\right\},$$

considerado como subespacio del espacio producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

Cada X_n es llamado, espacio factor del límite inverso y f_n^{n+1} son las funciones de ligadura.

$\pi_i : \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \to X_i$ denota la proyección $i-$ésima restringida al límite inverso.

Si, $n > m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, f_m^n denotará la composición $f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n$.

A continuación enunciamos algunos resultados sobre límites inversos.

Teorema 1.38 *[27, Teorema 2.6, pág. 20] Sea* $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$. *Si* A *es un subconjunto cerrado de* X_∞, *entonces* $A = \varprojlim \left\{\pi_n(A), f_n^{n+1}|_{\pi_{n+1}(A)}\right\} =$

$\prod_{n=1}^{\infty} \pi_n (A) \cap X_{\infty}$.

Teorema 1.39 *[27, Lema 2.4, pág. 19] Si X_{∞} es un límite inverso de continuos, entonces X_{∞} es un continuo.*

Teorema 1.40 *[11, Teorema 2.9, pág. 18] Si $X_{\infty} = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un límite inverso donde cada X_n es unicoherente, entonces X_{∞} es unicoherente.*

Teorema 1.41 *Si $X_{\infty} = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un límite inverso donde cada función de ligadura es monótona y cada espacio factor X_n es descomponible, entonces X_{∞} es descomponible.*

Demostración. Como X_1 es un continuo descomponible, A_1 y B_1, subcontinuos propios de X_1, tales que $X_1 = A_1 \cup B_1$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = f^{-1}(A_n)$ y $B_{n+1} = f^{-1}(B_n)$, por el Teorema 1.10, para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i y B_i son subcontinuos de X_i. Es fácil verificar que $X_i = A_i \cup B_i$ y que $X_{\infty} = A \cup B$, donde $A = \varprojlim \left\{A_n, f_n^{n+1} |_{A_{n+1}}\right\}$ y $B = \varprojlim \left\{B_n, f_n^{n+1} |_{B_{n+1}}\right\}$. A y B son subcontinuos propios de X_{∞}, pues su primera proyección no es todo X_1. ■

Como una consecuencia de [27, Teorema 12.19, pág. 246], obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 1.42 *Si* $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ *es un límite inverso donde cada espacio factor* X_n *es encadenable, entonces* X_∞ *es encadenable.*

La siguiente es la definición de un continuo que tiene la propiedad de Kelley.

Definición 1.43 *Diremos que un continuo* X *tiene la propiedad de Kelley si dada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* A *es un subcontinuo de* X*,* $p \in A$*,* $q \in X$*, y* $d(p,q) < \delta$*, entonces existe un subcontinuo* B *de* X *tal que,* $q \in B$ *y* $\mathcal{H}(A,B) < \varepsilon$*.*

Es bién conocido que X tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos $p \in X$ si y sólo si para cada subcontinuo A de X que contiene a p y para toda sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en X, tal que $\lim p_n = p$, entonces existe una sucesión $\{A_n\}$ de subcontinuos de X, tal que $p_n \in A_n$ y $\lim A_n = A$ (ver [6, pág. 74]).

Teorema 1.44 *[29, 16.11, pág. 413] Si* X *es localmente conexo en* p*, entonces* X *tiene la propiedad de Kelley en* p*.*

Teorema 1.45 *[7, Teorema 2, pág. 190] Si* $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ *y cada espacio factor* X_n *tiene la propiedad de Kelley y cada función de ligadura* f_n^{n+1} *es confluente,* X_∞ *tiene la propiedad de Kelley.*

1.7. CONTINUOS 2-EQUIVALENTES

A continuación enunciaremos los resultados que presenta W. S. Mahavier en [20].

Con respecto a los continuos localmente conexos, demuestra el siguiente Teorema.

Teorema 1.46 *[20, Teorema 3, pág. 244] Si X es un continuo 2-equivalente y localmente conexo, entonces X es una curva cerrada simple o un triodo simple.*

De hecho prueba el siguiente Teorema:

Teorema 1.47 *[20, Teorema 1, pág. 244] Sea X un continuo 2-equivalente que contiene un arco. Entonces X es una curva cerrada simple, un triodo simple o un continuo irreducible.*

Respecto a los continuos no localmente conexos, obtiene lo siguiente:

Teorema 1.48 *[20, Teorema 4, pág. 245] Si X es un continuo 2-equivalente que contiene arcos, es descomponible y no es localmente conexo, entonces X es la cerradura de un rayo topológico.*

La cerradura de la gráfica de la función sen $\frac{1}{x}$ en el intervalo $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$, es un ejemplo con las propiedades que establece el Teorema 1.48. R. Bennett en [2] muestra otro ejemplo con estas propiedades, cuyo residuo, a diferencia de la curva sen $\frac{1}{x}$, es un continuo homeomorfo al continuo total.

Mahavier en [20] presenta también un ejemplo de un continuo encadenable que no contiene arcos y cuyos dos tipos de subcontinuos son descomponibles, es decir que se trata también de un continuo hereditariamente descomponible. Este ejemplo es un continuo hereditariamente 2-equivalente (ver [5, Teorema 4]).

Capítulo 2

IRREDUCIBILIDAD

2.1. IRREDUCIBILIDAD

Todos los ejemplos de Mahavier en [20] y los ejemplos nuevos que hemos encontrado de continuos 2-equivalentes, (excepto una curva cerrada simple y un triodo simple) resultaron irreducibles. Esto me llevó a plantear la siguiente conjetura:

Conjetura 2.1 *Sea X un continuo 2-equivalente. Entonces X es una curva cerrada simple, un triodo simple o un continuo irreducible.*

De ser cierta esta conjetura, clasificaríamos a los continuos 2-equivalentes mediante dos familias ajenas: la de los continuos irreducibles y otra familia que contiene solamente dos elementos: la curva cerrada simple y el triodo simple.

La finalidad de esta sección es presentar condiciones que implican que un continuo 2-equivalente es irreducible.

Veamos primero cómo serían algunos continuos 2-equivalentes, no irreducibles. Los siguientes Lemas -que aplicaremos en los dos Teoremas siguentes- nos dicen que un continuo 2-equivalente que no es irreducible y que contiene un indescomponible, debe ser homeomorfo o bien a un indescomponible o a un 2-indescomponible.

Notaremos que las pruebas son similares, es decir, no importa si son unicoherentes o no, pero las enunciamos en diferentes lemas, pues nos interesa la descomposición explícita que se da en cada uno.

Lema 2.2 *Sea X un continuo 2-equivalente. Si X no es ni irreducible ni hereditariamente descomponible, entonces X es homeomorfo a $A \cup B$, con A y B subcontinuos indescomponibles de X (y por lo tanto, irreducibles). Más aún, A es irreducible de c a x, con $c \in A \backslash B$ y $x \in A \cap B$ y B es irreducible de d a x, con $d \in B \backslash A$.*

Demostración. Ya que X no es irreducible, X es descomponible. Sea $X = A' \cup B'$ donde A', B' son subcontinuos propios de X y sean $c \in A' \backslash B'$, $d \in B' \backslash A'$ y $x \in A' \cap B'$. Por ser X un continuo 2-equivalente, tiene dos tipos de subcontinuos, los homeomorfos a X y los que no, es decir los indescomponibles. Por el Teorema 1.22, existe A subcontinuo de A', irreducible de c a x. Análogamente, existe B subcontinuo de B' irreducible de d a x. Recordemos que X no es irreducible, con lo que tenemos que A y B son indescomponibles. Es claro que $A \cup B$ es un subcontinuo descomponible de X, por ello $A \cup B$ es homeomorfo a X. Por otra parte $c \in A \backslash B$, $x \in A \cap B$ y $d \in B \backslash A$. Así tenemos la conclusión deseada. ■

Del Teorema 1.22, obtenemos el siguiente Lema, para el caso específico de los continuos no unicoherentes.

Lema 2.3 *Sea X un continuo 2-equivalente y no unicoherente. Si X no es ni irreducible, ni hereditariamente descomponible, entonces existen A, B subcontinuos de X, indescomponibles tales que X es homeomorfo a $A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Además, A y B son irreducibles de p a q, con $p \in P$ y $q \in Q$, donde P y Q son dos componentes distintas de $A \cap B$.*

Demostración. Como X no es unicoherente $X = E \cup F$ con $E, F \in C(X)$ y $E \cap F$ no conexo. Sean P y Q dos componentes de $E \cap F$. Elijamos $p \in P$, $q \in Q$. Por el Teorema 1.22, existe un subcontinuo A contenido en E que es irreducible de p a q. Análogamente, existe $B \in C(F)$, irreducible de p a q. Como X es 2-equivalente y no es irreducible, A y B son indescomponibles. Pero $A \cup B$ es un subcontinuo descomponible, así que $A \cup B$ es homeomorfo a X. ■

El siguiente Teorema muestra que los continuos 2-equivalentes que son unicoherentes pueden clasificarse mediante las siguientes dos familias: la de los continuos irreducibles y la de los continuos hereditariamente descomponibles.

Teorema 2.4 *Sea X un continuo 2-equivalente y unicoherente. Entonces X es hereditariamente descomponible o irreducible.*

Demostración. Sea X un continuo 2-equivalente y unicoherente. Supongamos que X no es hereditariamente descomponible. Si X es indescomponible, entonces, por el Teorema 1.24 X es irreducible y habríamos terminado. Así que, supondremos que X es un continuo descomponible que contiene un subcontinuo indescomponible.

Con el objetivo de llegar a una contradicción, supongamos que X no es irreducible. Como se cumplen todas las hipótesis del Lema 2.2, existen $A, B \in C(X)$ tales que $X = A \cup B$, con A y B irreducibles de c a x y de d a x, respectivamente, con $c \in A \backslash B$, $d \in B \backslash A$ y $x \in A \cap B$.

Sea N un subcontinuo de X, irreducible de c a d. Mostraremos que N contiene a A y B. Para ello probaremos que A es irreducible de c a cualquier elemento $e \in A \cap B$ y, análogamente, que B es irreducible de d a cualquier $e \in A \cap B$.

Sean $e \in A \cap B$ y R un subcontinuo de A irreducible de c a e.

Como X no es irreducible, A y B son indescomponibles (de lo contrario X no sería 2-equivalente). Supóngase que $R \neq A$. Recordemos que por la unicoherencia de X, $A \cap B$ es conexo, luego $R \cup (A \cap B)$ es un subcontinuo de A que contiene a c y a x, así $R \cup (A \cap B) = A$. Pero R y $(A \cap B)$ son subcontinuos propios de A, lo cual es una contradicción, ya que A no es descomponible. Por lo tanto $R = A$, es decir, A es irreducible de c a e.

Análogamente B es irreducible de d a e, con $e \in A \cap B$.

Ahora como $N \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, existe $n \in N \cap (A \cap B)$. Entonces N es un subcontinuo de X tal que $c, d, n \in N$, por lo que N debe contener a A y a B. Así $N = X$, lo cual es una contradicción pues N es irreducible y X no lo es. ■

Consideraremos ahora, el caso en el que X es un continuo finitamente no unicoherente.

Teorema 2.5 *Sea X un continuo 2-equivalente y finitamente no unicoherente. Entonces X es hereditariamente descomponible o irreducible.*

Demostración. La idea de la prueba es sencilla. Supondremos que X no es ni irreducible ni hereditariamente descomponible, con ello construiremos un subcontinuo irreducible homeomorfo a X. Con esta contradicción llegamos al resultado.

Supongamos que X no es irreducible. Entonces, se cumplen las hipótesis del Lema 2.3, así que existen dos subcontinuos indescomponibles E y F de X tales que $X = E \cup F$ y $E \cap F$ no es conexo. Además, E y F son irreducibles de p a q con $p \in P$ y $q \in Q$, donde P y Q son dos componentes distintas de $E \cap F$. Probaremos ahora que E es irreducible de r a s para cualesquiera $r \in P$ y $s \in Q$.

Sean $r \in P$, $s \in Q$ y G un subcontinuo de E, irreducible de r a s. Supongamos que G no es E. Entonces P, Q y G son subcontinuos propios de E y $P \cup Q \cup G$ contiene a p y a q, así que $P \cup Q \cup G = E$, lo cual es una contradicción a menos que, $P \cup G = E$ o $Q \cup G = E$. Supongamos que $P \cup G = E$ (el otro caso es semejante). En este caso, se tiene que $q \in G$ (y por lo tanto $p \notin G$, pues $q, p \in G$ implica que $G = E$), $q \notin P$, $p \in P$ y $p \notin G$, con lo cual, P y Q son subcontinuos propios de E y obtenemos una contradicción, pues E es indescomponible. Por lo tanto E es irreducible de r a s, $\forall r \in P$ y $\forall s \in Q$. De forma similar, se puede probar que F es irreducible de r a s, $\forall r \in P$ y $\forall s \in Q$.

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de componentes de $E \cap F$. Como X es finitamente no unicoherente, $\mathcal{T}$ es finito y por lo tanto $F \setminus \bigcup_{T \in \mathcal{T} - \{P\}} T$ es un abierto que contiene a P. Por el Corolario 1.8, existe un subcontinuo K de F tal que $P \subsetneq K$ y $K \cap T = \emptyset$, para toda $T \in \mathcal{T} - \{P\}$.

Sean $k \in K \setminus P$, $H \subset K$ un subcontinuo irreducible de k a P y L un subcontinuo de $E \cup H$ irreducible de q a k.

Probaremos que L es homeomorfo a X.

Empezaremos probando que $E \subset L$.

Sea C la componente de $L \cap E$ que contiene a q, entonces por el Teorema 1.7, $C \cap \overline{L \setminus (L \cap E)} \neq \emptyset$.

Con esto, obtenemos que $\emptyset \neq C \cap \overline{L \cap (L \cap E)^c} = C \cap \overline{L \cap (L^c \cup E^c)} = C \cap \overline{(L \cap L^c) \cup (L \cap E^c)} = C \cap \overline{L \cap E^c} = C \cap \overline{L \backslash E}$. Por otra parte $L \backslash E \subseteq H \backslash E$ y por lo tanto $\overline{L \backslash E} \subset \overline{H \backslash E} \subset \overline{H} = H$. Así, $C \cap H \neq \emptyset$. Pero $C \subset E$, de donde $C \cap (H \cap E) \neq \emptyset$.

Por otro lado $H \cap E \subset P$, así que $C \cap P \neq \emptyset$ y como E es irreducible de q a r para cualquier $r \in P$, entonces $C = E$ y $E \subseteq L$.

Ahora probaremos que $H \subseteq L$.

Recordemos que H es un subcontinuo de F, irreducible de k a P, en consecuencia H es un subcontinuo irreducible de k a p, para todo $p \in P \cap H$.

Sea D la componente de $L \cap H$ que contiene a k. Por el Teorema 1.7, $D \cap \overline{L \setminus (L \cap H)} \neq \emptyset$.

Así, $D \cap \overline{L \cap (L \cap H)^c} = D \cap \overline{L \cap (L^c \cup H^c)} = D \cap \overline{(L \cap L^c) \cup (L^c \cap H^c)} = D \cap \overline{L \cap H^c} \neq \emptyset$.

Entonces $D \cap \overline{L \setminus H} \neq \emptyset$.

Como $L \subseteq H \cup E$ entonces $L \backslash H \subseteq E \backslash H$, y por lo tanto $D \cap \overline{E \setminus H} \neq \emptyset$.

Como E es cerrado, $\overline{E \setminus H} \subseteq \overline{E} = E$.

Así, $D \cap E \neq \emptyset$ y $D \cap H \neq \emptyset$ (ya que $k \in D \cap H$). Como D es conexo $D \cap (H \cap E) \neq \emptyset$. Por otra parte, $H \cap E \subseteq P$, entonces $D \cap P \neq \emptyset$ ya que H es un subcontinuo irreducible de k a r, para todo $r \in P \cap H$ y D es un subcontinuo de H que contiene a k y a p, entonces $D = H$ y $H \subseteq L$.

De lo anterior se sigue que $E \cup H \subseteq L$ y como $q \in E$ y $k \in H$, entonces $L = E \cup H$, además, como $k \in H \setminus E$, L es descomponible y por lo tanto L es homeomorfo a X. Esto contradice que L es irreducible y queda desmostrado lo que se quería. ■

2.2. UNICOHERENCIA

Otra conjetura que tenemos es la siguiente:

Conjetura 2.6 *El único continuo 2-equivalente que no es unicoherente, es la curva cerrada simple.*

Lo que probaremos en esta sección es que el único continuo 2-equivalente y no unicoherente que contiene arcos es la curva cerrada simple.

Sea E un arco con puntos extremos e y f. Denotaremos por $\overline{ef}$ al arco E. Más aún, si x, y son dos puntos del arco, denotamos como $\overline{xy}$ al subarco de E que tiene como extremos a x y y.

Lema 2.7 *Sea X un continuo 2-equivalente y no unicoherente, supongamos que $X = Y \cup Z$, donde Y, Z son subcontinuos propios de X, $Y \cap Z$ es disconexo y Y es un arco. Entonces X no es irreducible.*

Demostración. Sean $p, q \in X$, mostraremos que existe un subcontinuo propio de X que los contiene. Si ambos puntos están en Y o en Z, ése será el subcontinuo propio que contiene a $\{p, q\}$. Supongamos que $p \in Y \setminus Z$ y $q \in Z$. Sean S, T dos componentes distintas de $Y \cap Z$, $s \in S$ y $t \in T$. Tenemos 2 casos:

Caso 1. $p \in \overline{st}$. En este caso, $A = \overline{sp}$ es un subarco propio de Y y $A \cup Z$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q.

Caso 2. $p \notin \overline{st}$. En este caso hay dos opciones: $t \in \overline{ps}$ o $s \in \overline{pt}$. Supongamos que $t \in \overline{ps}$, pues la otra opción es semejante. Si $A = \overline{pt}$, entonces $A \cup Z$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q. ■

Teorema 2.8 *Sea X un continuo 2-equivalente, no unicoherente que contiene arcos. Entonces X no es irreducible.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios de X y supongamos que $X = A \cup B$ y que $A \cap B$ no es conexo. Sean x y y puntos en componentes diferentes de $A \cap B$ y sean G y H continuos irreducibles entre x y y contenidos en A y B respectivamente. Si alguno de los dos G o H fuera un arco, por el Lema 2.7, tenemos que $G \cup H$ es un continuo no irreducible contenido en X, de tal manera que X sería homeomorfo a $G \cup H$ y por lo tanto, no sería irreducible. En este caso habríamos terminado. Supongamos entonces que ni G ni H son arcos, así que G y H son homeomorfos a X y por lo tanto $G \cup H$ es homeomorfo a X. Ahora demostraremos que $G \cup H$ no es irreducible. Veremos que si $a, b \in G \cup H$, entonces existe un subcontinuo propio de $G \cup H$ que contiene a $\{a, b\}$. Basta considerar el caso en el que $a \in G$ y $b \in H$. Ya que G es ireducible entre x y y, (recordemos que X es descomponible), si a no es un elemento de la composante $\mathcal{K}(x)$ de x, entonces se tendría que G es irreducible de a a x, y entonces $\mathcal{K}(x) \neq \mathcal{K}(a) \neq G$. Si además a no es un elemento de la composante de y, entonces G sería irreducible de a a y y $\mathcal{K}(y) \neq \mathcal{K}(a) \neq G$, (por ser G descomponible e irreducible, el Teorema 1.26 nos garantiza estas tres diferentes composantes) pero en este caso tendríamos que hay cuatro diferentes composantes $\mathcal{K}(x), \mathcal{K}(a), \mathcal{K}(y)$ y G, contradiciendo el Teorema 1.26. Con lo que a es un elemento de la composante de x ó a es un elemento de la composante de y. Entonces se puede construir un subcontinuo propio de G que contiene a a y a x ó a a y a y. De aquí se sigue fácilmente que existe un subcontinuo propio de $G \cup H$ que contiene a $\{a, b\}$ y que $G \cup H$ no es irreducible. ■

Corolario 2.9 *X es homeomorfo a S^1 si y sólo si X es 2-equivalente, contiene arcos y es no unicoherente.*

Demostración. Si X es homeomorfo a S^1 es clara la conclusión.

Supongamos que X es 2-equivalente, contiene arcos y es no unicoherente, entonces por el Teorema 2.8, X no es irreducible y por el Teorema 1.47, X es homeomorfo a S^1. ■

2.3. ARCOCOMPONENTES

Teorema 2.10 *Si X es un continuo 2-equivalente, entonces X tiene una, dos o una infinidad de arcocomponentes.*

Demostración. Si X es arco conexo, X sólo tiene una arcocomponente.

Supongamos que X no es arco conexo. Sea $n \in \mathbb{N}$, el número de arcocomponentes de X.

Demostraremos que $n = 2$.

Como X contiene arcos y no es localmente conexo, se sigue del Teorema 1.47 que X es irreducible. Si X es descomponible, entonces por el Teorema 1.48 X es la compactación de un rayo R con residuo un continuo K.

Supongamos que K no es un arco. Entonces K es homeomorfo a X y por lo tanto K es la cerradura de un rayo topológico R_2 con residuo un continuo K_2, con K_2 homeomorfo a X y para cada entero positivo m obtendríamos que K_m es la cerradura de un rayo topológico R_m con residuo un subcontinuo homeomorfo a X, tomando $m > n$ se contradice que X tenga n arco componentes. Se sigue de aquí que K es un arco y $n = 2$.

Si X es indescomponible, entonces se sigue del Teorema 1.27 que X tiene una infinidad no numerable de composantes y como por definición cada arcocomponente esta contenida en una composante, X no puede tener n arco componentes. ■

Corolario 2.11 *Si X es un continuo 2-equivalente y tiene dos arcocomponentes, entonces X es homeomorfo a una compactación del rayo con residuo un arco.*

Capítulo 3

LÍMITES INVERSOS Y PROPIEDAD DE KELLEY

Este capítulo tiene dos finalidades:

1. Probar el Teorema 3.3 que nos da condiciones para que un límite inverso con la propiedad de Kelley, sea la compactación de un rayo topológico.

La importancia de este Teorema reside en que da condiciones para que a partir de un continuo encadenable D con la propiedad de Kelley, se construya otro continuo E, también encadenable y con la propiedad de Kelley que será la cerradura de un rayo topológico con residuo D.

2. Dada esta herramienta, mostrar que existe un continuo 2-equivalente

X que es la compactación de un rayo topológico, con residuo homeomorfo X.

Recordemos un poco de límites inversos. Sean $\{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ una sucesión de espacios métricos y $\{f_1^2, f_2^3, f_3^4, \ldots\}$ una sucesión de funciones continuas con $f_i^{i+1}(X_{i+1}) = X_i$. Llamamos espacio factor a cada X_i y a f_i^{i+1} función de ligadura, $i \in \mathbb{N}$. El límite inverso, de la sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$, $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ se define como;

$X_\infty = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_n \in X_n$ y para cada n, $f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n\}$ considerado como subespacio del espacio producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Denotemos por $\pi_i : X_\infty \to X_i$ la proyección natural i-ésima restringida a X_∞.

Si K es un subcontinuo de X_∞, denotaremos $K_i = \pi_i(K)$.

Si cada $X_i = X$, denotaremos a $X_\infty = \varprojlim \{X, f_n^{n+1}\}$ o $\varprojlim \{X, f\}$ si además, cada $f_n^{n+1} = f$.

En esta sección usaremos sucesiones $\{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$ de subintervalos de $I = [0, 1]$, y sucesiones de funciones $\{f_1^2, f_2^3, f_3^4, \ldots\}$, con $f_i^{i+1}(I_{i+1}) = I_i$.

La distancia entre dos puntos $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ está definida por $d((x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$.

3.1. TEOREMA DE LÍMITES INVERSOS

3.1.1. Primer Teorema de límites inversos

El Teorema que probaremos a continuación, nos da condiciones para que un límite inverso de intervalos sea la cerradura de un rayo topológico.

Teorema 3.1 *Sea $f : I \longrightarrow I$, una función continua, donde $I = [0,1]$ y f cumple:*

$$f(x) = \begin{cases} 4x & si \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x & si \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) & = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Sea $X = \varprojlim \{I, f\}$. Entonces X es la cerradura de un rayo topológico R y $K = \varprojlim \left\{\left[\frac{1}{2}, 1\right], f\mid_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right\}$ es el residuo.

Demostración. Sea X como en la hipótesis del Teorema. Para cada entero positivo n, sea

$$\alpha_n = \left\{(x_1, x_2, \ldots) \in X : x_n < \frac{1}{2}\right\}$$

Notemos que:

1. $\alpha_n \subset \alpha_{n+1}$, pues si $x \in \alpha_n$ entonces, $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y por la definición de

f y de límite inverso $x_{n+1} = f(x_n) \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$, así $x \in \alpha_{n+1}$.

2. $\pi_n \mid_{\alpha_n}$ es un homeomorfismo de α_n en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, pues cada coordenada de un elemento de α_n está determinada por la coordenada n-ésima.

3. $x \in \alpha_n \smallsetminus \alpha_{n-1}$ si y sólo si $x_n \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$, pues si $x_n \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$ entonces $x_{n-1} = f(x_n) = 4x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, con lo que $x \in \alpha_{n-1}$.

Mostraremos a continuación que $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es un rayo topológico. Primero observése que $R = \alpha_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (\alpha_n \smallsetminus \alpha_{n-1})$.

Definimos $\sigma : R \longrightarrow [0, \infty)$ como:

$$\sigma(x) = \begin{cases} x_1 & \text{si} \quad x \in \alpha_1 \\ x_n + \frac{3(n-1)}{8} & \text{si} \quad x \in \alpha_n \smallsetminus \alpha_{n-1} = \pi_n^{-1}\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Probaremos ahora que σ es un homeomorfismo.

σ es suprayectiva, pues si $r \in [0, \infty)$ entonces $r \in \left[0, \frac{1}{2}\right) = \sigma(\alpha_1)$ o existe $n > 1$ tal que $r \in \left[\frac{3n-2}{8}, \frac{3(n+1)-2}{8}\right) = \sigma(\alpha_n \smallsetminus \alpha_{n-1})$.

Denotemos por B_n a $\sigma(\alpha_n \smallsetminus \alpha_{n-1})$, si $n > 1$ y $B_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) = \sigma(\alpha_1)$. Veremos que σ es inyectiva. Debido a que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, la igualdad $\sigma(x) = \sigma(y)$ implica $x, y \in \alpha_1$ ó $x, y \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$, $n > 1$, y por lo tanto $\sigma(x) = x_1 = y_1 = \sigma(y)$ en el primer caso, ó $\sigma(x) = x_n + \frac{3(n-1)}{8} = y_n + \frac{3(n-1)}{8} =$

$\sigma(y)$ en el segundo caso. Así en ambos casos $x_n = y_n$ y como $\pi_n \mid_{\alpha_n}$ es un homeomorfismo, $x = y$.

Continunidad de σ

Veremos ahora que σ es una función continua.

Las funciones $\sigma_{|\alpha_1}$ y $\sigma_{|\alpha_n - \alpha_{n-1}}$ son continuas. Se sigue de aquí que si $x \in \pi_1^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right) = \alpha_1$ ó $x \in \pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$, entonces σ es continua en x, ya que tanto α_1 como $\pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ son subconjuntos abiertos de R. Sólo falta probar que σ es continua en cada elemento de $\pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$. Sea $x \in \pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$, es decir $\pi_n(x) = x_n = \frac{1}{8}$. En este caso

$$\sigma(x) = x_n + \frac{3(n-1)}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3(n-1)}{8} = \frac{3n}{8} - \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen números reales positivos δ_0, δ_1 y δ_2 con las siguientes propiedades:

a) Si $y \in \alpha_n - \alpha_{n-1}$ y $d(x, y) < \delta_0$, entonces $|\sigma(x) - \sigma(y)| < \varepsilon$

b) Si $s, t \in [0, 1]$ y $|s - t| < \delta_1$, entonces $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$

c) Si $y \in R$ y $d(x, y) < \delta_2$, entonces $|\pi_n(x) - \pi_n(y)| < \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{3}{32}\right\}$

Sean $\delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_2\}$ y $y \in R$.

Consideraremos dos casos:

Caso 1 $\pi_n(y) = y_n \geq \frac{1}{8}$.

En este caso $y \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$ y como $\delta \leq \delta_0$, se sigue del inciso (a) que $|\sigma(x) - \sigma(y)| < \varepsilon$.

Caso 2 $y_n < \frac{1}{8}$.

Como $d(x, y) < \delta_2$, del inciso (c), se tiene que $x_n - y_n < \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{8} > y_n > \frac{1}{32} \Rightarrow y_{n-1} > \frac{1}{8} \Rightarrow$

$$\sigma(y) = y_{n-1} + \frac{3(n-2)}{8}. \tag{2}$$

Ahora, como $x_n - y_n < \delta_1$, se sigue de (b) que $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Será suficiente demostrar ahora, que $|\sigma(x) - \sigma(y)| = |f(x_n) - f(y_n)|$. Ya que $f(x_n) = \frac{1}{2}$ y $f(y_n) = y_{n-1} < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, entonces $|f(x_n) - f(y_n)| = \frac{1}{2} - y_{n-1}$.

Además, se sigue de (1) y (2) que $\sigma(x) - \sigma(y) = \frac{1}{2} - y_{n-1}$.

Con el fin de demostrar que la función $\sigma^{-1} : [0, \infty) \to R$ es continua, definimos $\lambda : [0, \infty) \to \left[0, \frac{1}{2}\right)$ como

$$\lambda(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in B_1 \\ t - \frac{3(n-1)}{8} \text{ si } t \in B_n \ n > 1 \end{cases}$$

Recordemos que $B_1 = [0, \frac{1}{2}) = \sigma(\alpha_1)$ y que $B_n = [\frac{3n-2}{8}, \frac{3(n+1)-2}{8}) = \sigma(\alpha_n \setminus \alpha_{n-1})$.

Es fácil verificar lo siguiente:

1) $\lambda\,|_{B_n}\colon B_n \to [0, \frac{1}{2})$ es continua, para toda n.

2) Si $n > 1$ y $t \in B_n$, $\frac{1}{8} \leq \lambda(t) < \frac{1}{2}$.

3) Si $t \in B_n$, $\pi_n^{-1}(\lambda(t))$ consta de exactamente un punto en $\bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha_m$ y $\sigma^{-1}(t) = \pi_n^{-1}(\lambda(t)) \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1} \subset R$.

Se sigue de 3) que $\sigma^{-1}\,|_{B_n}$ es continua para cada n. Puesto que $[0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, bastará probar que σ^{-1} es continua en puntos de la forma $\frac{3n-2}{8}$. Dado $x \in [0, \infty)$ denotaremos $x_n = \pi_n(\sigma^{-1}(x))$. Sea $t = \frac{3n-2}{8}$. Entonces $\frac{1}{8} = \lambda(t)$, sean $t_n = \lambda(t)$, $t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_{n-1} = \frac{1}{2}$ y $t_{n+j} = f^{-j}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4j}\left(\frac{1}{8}\right)$ si $j \geq 1$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta' > 0$ tales que si $\left|u - \frac{1}{2}\right| < \delta'$ entonces $\left|f^k(u) - f^k\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Sea $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{8}, \varepsilon, \delta'\right\}$. Si $s \in [0, \infty)$ y $|s - t| < \delta$, entonces como $\delta \leq \frac{1}{8}$, $s \in B_{n-1} \cup B_n$. Ya que $\sigma^{-1}\,|_{B_n}$ es continua, bastará considerar el caso en que $s \in B_{n-1}$. Probaremos que $|s_j - t_j| < \varepsilon$ para $j \in \mathbb{N}$ y con esto quedará probado que $d(\sigma^{-1}(s), \sigma^{-1}(t)) < \varepsilon$. Nótese que $s_{n-1} = \lambda(s) = s - \frac{3(n-1)-2}{8}$, por lo tanto $|s_{n-1} - t_{n-1}| = \left|\left(s - \frac{3(n-1)-2}{8}\right) - \frac{1}{2}\right| = \left|s - \frac{(3n-2)}{8}\right| = |s - t| < \delta \leq \varepsilon$. Además, como $t_{n-1} = \frac{1}{2}$, la elección de δ' implica que $\left|f^k(s_{n-1}) - f^k\left(\frac{1}{2}\right)\right| = |s_{n-1-k} - t_{n-1-k}| < \varepsilon$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, es decir $|s_j - t_j| < \varepsilon$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Como $s_{n-1}, t_{n-1} \in [0, \frac{1}{2})$ y $f^{-1}(u) = \frac{u}{4}$ para

$u \in [0, \frac{1}{2})$, se tiene que $\left| f^{-k}(s_{n-1}) - f^{-k}(t_{n-1}) \right| = \left| \frac{s_{n-1}-t_{n-1}}{4^k} \right| < \frac{\varepsilon}{4^k} < \varepsilon$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Por lo tanto $|s_j - t_j| < \varepsilon$ para $j \geq n$. Con esto se concluye que σ^{-1} es continua.

Nótese que $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$, así que podemos definir:

$$K = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f|_{[\frac{1}{2},1]} \right\}$$

Entonces $X = R \cup K$, pues si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ y $x_n < \frac{1}{2}$ para alguna n, entonces $x \in \alpha_n \subseteq R$. Si $x_n \geq \frac{1}{2}$, para toda n, entonces $x \in K$. Claramente $R \cap K = \emptyset$.

Demostraremos ahora que $\overline{R} \setminus R = K$. Basta demostrar que $K \subseteq \overline{R}$, para esto observamos que, por la definición de la distancia, si $x, y \in X = \varprojlim \{I, f\}$ y, para algún $k \in \mathbb{N}$, $x_k = y_k$, entonces $d(x, y) < \frac{1}{2^k}$.

Sea $x \in K$. Entonces $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Por definición de f, $f\left([0, \frac{1}{2})\right) = [0, 1]$. Entonces existe $y \in [0, \frac{1}{2})$ tal que $f(y) = x_n$. Así, hay un punto p_n en α_{n+1} cuya $(n+1)$-ésima coordenada es y, lo cual implica que $d(x, p_n) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Por lo tanto K es un subconjunto de $\overline{R}$. Entonces M es la cerradura de un rayo topológico R tal que $\overline{R} \setminus R = K$, que es un continuo. $\blacksquare$

3.1.2. Teorema principal de límites inversos

Para dar la demostración del Teorema principal de esta sección, necesitaremos el siguiente Lema.

Lema 3.2 *[10, Lema 2.2 p.193] Supóngase que* $M = \varprojlim \{X_i, f_i\}$ *donde, para cada* i*,* X_i *es un continuo. Sea* $\varepsilon > 0$*, entonces existe un entero positivo* N *y un número positivo* δ *tales que si* H *y* K *son subcontinuos de* M *tales que* $\mathcal{H}_N(H_N, K_N) < \delta$*, entonces* $\mathcal{H}(H, K) < \varepsilon$*.*

Teorema 3.3 *Sea* $X = \varprojlim \{I, f\}$*, donde* $I = [0,1]$ *y* $f : I \to I$ *es una función continua tal que:*

1. $f(x) = \begin{cases} 4x \ \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x \ \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$,

2. $f|_{\left[\frac{1}{2},1\right]} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

3. $C = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f|_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \right\}$ *tiene la propiedad de Kelley.*

Entonces X *es un rayo topológico con residuo* C *y* X *tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Por el Teorema 3.1, X es un rayo topológico y tiene a C como su residuo.

i) Notemos que si p es un punto del rayo entonces por el Teorema 1.44, X tiene la propiedad de Kelley en p.

Sea $\varepsilon > 0$.

ii) Como C tiene la propiedad de Kelley, existe un número positivo δ_1 tal que si A es un subcontinuo de C, r es un punto de A y s es un punto de C tales que $d(r,s) < \delta_1$, entonces hay un subcontinuo B de C con s en B y $\mathcal{H}(A,B) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sea ε_1 un número positivo menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ y δ_1.

iii) Usando ε_1 en el Lema 3.2, hay un número positivo $\delta_2 < \delta_1$ y un entero positivo N tales que si H y K son subcontinuos de X con $\mathcal{H}_N(H_N, K_N) < \delta_2$, entonces $\mathcal{H}(H,K) < \varepsilon_1$.

iv) Como f es uniformemente continua, existe un número positivo δ_3, tal que si x y y son puntos de X_{N+1} con $|x-y| < \delta_3$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\delta_2}{2}$.

Sea $\delta = \frac{\delta_3}{2^{N+1}}$, y supóngase que H es un subcontinuo de X, p es un punto de H y q es un punto de X tales que $d(p,q) < \delta$, entonces $d(p,q) < \frac{\delta_3}{2^{N+1}}$, luego $|p_{N+1} - q_{N+1}| < \delta_3$.

Sea J el arco irreducible respecto a $H_{N+1} \cup \{q_{N+1}\}$. Es decir, J es el arco tal que $H_{N+1} \cup \{q_{N+1}\} \subset J$ y si A es un subarco tal que $H_{N+1} \cup \{q_{N+1}\} \subset A$, entonces $J \subset A$.

Veremos que $\mathcal{H}_N (H_N, f(J)) \leq \frac{\delta_2}{2} < \delta_2$. Sea $x \in f(J)$, entonces existe y en J tal que $x = f(y)$, luego como $y \in J$, existe un elemento z en H_{N+1} tal que $|y - z| < |p_{N+1} - q_{N+1}|$ por la irreducibilidad de J. Luego $|y - z| < \delta_3$ y $|f(y) - f(z)| < \frac{\delta_2}{2} < \delta_2$. En consecuencia, para cualquier elemento x, en $f(J)$, existe $f(z)$ en H_N tal que $|x - f(z)| < \frac{\delta_2}{2}$, y ya que $H_N \subset f(J)$, entonces $\mathcal{H}_N (H_N, f(J)) < \delta_2$.

Consideremos dos casos:

Caso 1 $q_{N+2} < \frac{1}{2}$.

En este caso tenemos 2 posibilidades

Caso 1.1 H_{N+1} contiene a 1.

Por la definición de f, existe un subintervalo de I, $[x, y] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f([x, y]) = J$, además lo podemos elegir, de tal forma que $q_{N+2} \in [x, y]$ ya que $q_{N+1} \in J$ y $q_{N+2} < \frac{1}{2}$. Definamos a K como el subcontinuo de X tal que

$K_{N+2} = [x, y]$ y

$$K_i = \begin{cases} f^{N+2-i}([x, y]) & \text{si} \quad i < N+2 \\ f^{-(i-(N+2))}([x, y]) & \text{si} \quad i > N+2 \end{cases}$$

Con lo que se cumple que $f(K_{i+1}) = K_i$ y por lo tanto K está bién definido, además $q \in K$ y $K_N = f(J)$ y dado que $\mathcal{H}(H_N, f(J)) < \delta_2$, se tiene que $\mathcal{H}(H, K) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Caso 1.2 $1 \notin H_{N+1}$. Consideremos dos posibilidades.

a) Si $H_{N+1} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ en este caso elegimos:

$[x, y] \subset \left[0, \frac{1}{4}\right]$ tal que $f([x, y]) = J$ si $q_{N+2} \leq \frac{1}{4}$ o

$[x, y] \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f([x, y]) = J$ si $\frac{1}{4} < q_{N+2} < \frac{1}{2}$.

Si ahora definimos a K como en el caso 1.1, obtenemos que $\mathcal{H}(H, K) < \varepsilon$.

b) Si $H_{N+1} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$, como H_{N+2} es un subcontinuo y $H_{N+2} \cap \left[0, \frac{1}{4}\right) \neq \emptyset$, $H_{N+2} \subset \left[0, \frac{1}{4}\right)$, así que $H \subset \alpha_{N+2}$, donde $\alpha_{N+2} = \left\{(x_1, \ldots) \in X \mid x_{N+2} < \frac{1}{2}\right\}$ (α_{N+2} es el subconjunto del rayo definido en el Teorema 3.1). En este caso obtenemos que $p \in H \subset \alpha_{N+2}$, así que p es elemento del rayo y por i), X tiene la propiedad de Kelley en p.

Caso 2 $q_{N+2} \geq \frac{1}{2}$.

Para este caso consideraremos dos opciones:

2.1 $J \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

2.2 $J \cap \left[0, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$

Caso 2.1

Como $q_{N+2} \geq \frac{1}{2}$ y $J \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $H_{N+1} \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Definamos A como sigue. Si $H_i \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para toda $i \in \mathbb{N}$, definimos $A = H$. Si $H_i \cap \left[0, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$ para alguna i, definimos a A de la siguiente forma:

Sea $j + 1 = \text{mín}\left\{i \in \mathbb{N} : H_i \cap \left[0, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset\right\}$ (es claro que $j > N + 1$), usando el Teorema 1.12, $f \mid_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$ es débilmente confluente, con lo que elegimos una componente A_{j+1} de $f^{-1} \mid_{\left[\frac{1}{2},1\right]} (H_j)$ tal que $f(A_{j+1}) = H_j$. Continuamos definiendo A inductivamente, en general, para $i > j$, elegimos A_{i+1} la componente de $f^{-1} \mid_{\left[\frac{1}{2},1\right]} (A_i)$, tal que $f(A_{i+1}) = A_i$. Con lo que $A = \varprojlim \left\{A_i, f|_{A_{i+1}}\right\}$ es un subcontinuo de C que coincide con H al menos en las primeras $N + 1$ coordenadas. Por la elección de δ, de $iii)$ y $ii)$ se tiene que $\mathcal{H}(A, H) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Definamos r y s de manera similar: Sea $r_i = p_i$, si $p_i \geq \frac{1}{2}$, ($p = r$ si $p_i \geq \frac{1}{2}$ para toda i), si $j + 1 = \text{mín}\left\{i \in \mathbb{N} : p_i < \frac{1}{2}\right\}$, como $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, elegimos $r_{j+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $f(r_{j+1}) = r_j$. Continuamos definiendo r inductivamente, en general, para $i > j$, elegimos $r_{i+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, de tal forma que $f(r_{i+1}) = r_i$. Así, r es un elemento de C que coincide con p al menos en las primeras $N+1$ coordenadas. Definimos s en C de manera semejante a r, ahora, tal que $s_i = q_i$ para aquellas i donde $q_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, así, s será un elemento de C que coincide con q al menos en las primeras $N+2$ coordenadas.

Dado que $|r_{N+1} - s_{N+1}| < \delta_3$ se tiene $|r_N - s_N| < \delta_2$. Por la elección de δ_2, $d(r,s) < \delta_1$ y como C tiene la propiedad de Kelley, existe B un subcontinuo de C tal que s es un elemento de B y $\mathcal{H}(A,B) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto $\mathcal{H}(H,B) < \frac{2\varepsilon}{3}$.

Si $q \in B$, tomemos $K = B$, con lo que habríamos terminado.

Si $q \notin B$, existe i mayor que $N+2$ tal que $q_i < \frac{1}{2}$.

Sea $j+1 = \min\left\{i \in \mathbb{N} : q_i < \frac{1}{2}\right\}$.

Construiremos K como en el caso 1.1.

Como $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$, hay un intervalo $[x,y]$ contenido en $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ o en $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tal que $q_{j+1} \in [x,y]$ y tal que $f([x,y]) = B_j$.

Sea $K_{j+1} = [x,y]$, $K_{j+2} = f^{-1}(K_{j+1})$, $K_{j+3} = f^{-1}(K_{j+2})$, ... y si $i < j+1$, sea $K_i = f^{j+1-i}(K_{j+1})$. Así $K = \varprojlim \left\{K_i, f|_{K_{i+1}}\right\}$ es un continuo que contiene a q y tal que $K_N = B_N$ pues $K_j = B_j$ y se tiene por *iii*) que $\mathcal{H}(H,K) < \varepsilon$.

Caso 2.2

Tenemos $q_{N+2} \geq \frac{1}{2}$ y $J \cap \left[0, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$.

Si $f(J) \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces procedemos como en el caso anterior usando $f\left(J\right)$ en lugar de J, de la siguiente forma.

Como $f(J) \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $H_N \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Definamos A como en el caso **2.1.**

$A_i = H_i$, si $H_i \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, es decir, $A_i = H_i$ para $i \leq N$. Usando que f es débilmente confluente en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, elegimos una componente A_{N+1} de $f^{-1}|_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\left(H_N\right)$ tal que $f\left(A_{N+1}\right) = H_N$. Continuamos definiendo A inductivamente, en general, para $i > N$, elegimos una componente A_{i+1} de $f^{-1}\ |_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$ (A_i), tal que $f\left(A_{i+1}\right) = A_i$. Así $A = \varprojlim \left\{A_i, f|_{A_{i+1}}\right\}$ es un subcontinuo de C que coincide con H en las primeras N coordenadas, con lo que $\mathcal{H}\left(A, H\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Definamos r y s de manera similar. Sea $r_i = p_i$, si $p_i \geq \frac{1}{2}$. Sea $j + 1 = \min\left\{i \in \mathbb{N} : p_i < \frac{1}{2}\right\}$, como $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, elegimos $r_{j+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $f\left(r_{j+1}\right) = r_j$, (en el caso de que no exista tal entero, $p = r$). Continuamos definiendo r inductivamente, en general, para $i > j$, elegimos $r_{i+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, de tal forma que $f\left(r_{i+1}\right) = r_i$. Con lo que r es un elemento de C que coincide con p al menos en las primeras N coordenadas. Como en el caso 2.1, definimos s en C de manera semejante a r, ahora, tal que $s_i = q_i$ para aquellas i donde $q_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, así, s será un elemento de C que coincide con q al menos en las primeras $N + 2$ coordenadas.

Dado que $r_N = p_N$ y $s_N = q_N$ se tiene que $|r_N - s_N| < \delta_2$ y por la elección de δ_2, $d(r,s) < \delta_1$ y como C tiene la propiedad de Kelley, existe un subcontinuos B de C tal que s es un elemento de B y $\mathcal{H}(A,B) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto $\mathcal{H}(H,B) < \frac{2\varepsilon}{3}$.

Nuevamente, si $q \in B$, tomemos $K = B$. Si $q \notin B$, existe i mayor que $N+2$ tal que $q_i < \frac{1}{2}$.

Sea $j+1 = \text{mín}\left\{i \in \mathbb{N} : q_i < \frac{1}{2}\right\}$, con $j+1 > N+2$.

Construiremos K como antes.

Como $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$, hay un intervalo $[x,y]$ contenido en $\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$ o en $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ con q_{j+1} en $[x,y]$ tal que $f([x,y]) = B_j$.

Sea $K_{j+1} = [x,y]$, $K_{j+2} = f^{-1}(K_{j+1})$, $K_{j+3} = f^{-1}(K_{j+2})$, y si $i < j+1$, sea $K_i = f^{j+1-i}(K_{j+1})$. Así $K = \varprojlim\left\{K_i, f|_{K_{i+1}}\right\}$ es un continuo que contiene a q y tal que $K_N = B_N$ pues $K_j = B_j$ y se tiene que $\mathcal{H}(H,K) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Si $f(J) \cap \left[0,\frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$, entonces existe un elemento y menor que $\frac{1}{2}$ en $f(J)$, Por la definición de f, $y = f(x)$, donde x elemento de J que es menor que $\frac{1}{4}$ y como $q_{N+2} \geq \frac{1}{2}$, $q_{N+1} \geq \frac{1}{2}$, así $f\left(\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\right) \subseteq J$ y por ello $\left[\frac{1}{2},1\right] \subseteq f(J)$.

Sea $y_0 = \text{mín}\{y : y \in f(J)\}$. Entonces $f(J) = [y_0, 1]$.

Sea $K_N = f(J)$, $K_{N+1} = f^{-1}(K_N) = \left[\frac{y_0}{4},1\right]$, $K_{N+2} = f^{-1}(K_{N+1}) = \left[\frac{y_0}{16},1\right]$, ...

Si $i < N$, $K_i = f^{N-i}(K_N)$.

$K = \varprojlim \left\{K_i, f|_{K_{i+1}}\right\}$

Como $q \in K$ y $\mathcal{H}(H_N, f(J)) < \delta_2$ y $K_N = f(J)$,

se tiene que $\mathcal{H}(H, K) < \varepsilon$. ■

3.2. UN CONTINUO 2-EQUIVALENTE CON LA PROPIEDAD DE KELLEY.

En la sección 1, describiremos a los continuos que serán los espacios factores para construir un límite inverso, que será un continuo 2-equivalente con las siguientes propiedades: Es la cerradura de un rayo topológico, cuyo residuo es homeomorfo al continuo total y tiene la propiedad de Kelley.

En la sección 2, daremos algunas propiedades de los puntos en los espacios factores, que nos servirá para demostrar la continuidad y la confluencia de las funciones de ligadura. Con el fin de hacer más clara la exposición, en ésta y las siguientes secciones, haremos primero la demostración para el primer y segundo espacio factor y para la primera función de ligadura, luego hacemos la prueba para el caso general.

En la sección 3, mostraremos la continuidad y la confluencia de las funciones de ligadura.

En la sección 4, construiremos el ejemplo y probaremos las propiedades deseadas.

3.2.1. Espacios factores

La función g que definiremos enseguida, nos permitirá definir a los espacios factores:

Sea $g : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow [0,1]$ definida por $g(x) = 2x - 1$ y sea g^{-1} su inversa.

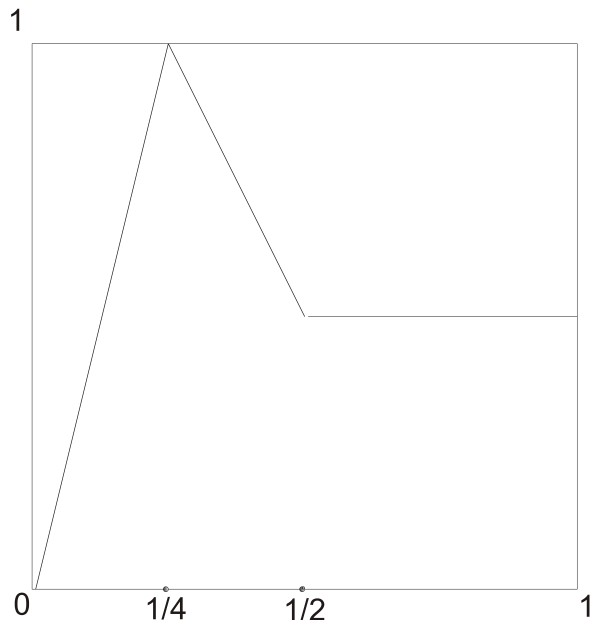
Sean $X_1 = \varprojlim \{I, f_1\}$, $I = [0,1]$ y $f_1 : I \longrightarrow I$, definida como sigue:

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Entonces X_1 es homeomorfo al intervalo $[0,1]$, pues, por el Teorema 3.1, X_1 es la cerradura de un rayo topológico R_1 con residuo un continuo $K_1 = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f_1 |_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right) \right\}$. Recordemos que

$X_1 = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)\right\} \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^1\right)$ con $\alpha_n^1 = \left\{x \in X_1 : x_n < \frac{1}{2}\right\}$.

Claramente X_1 tiene la propiedad de Kelley (def. 1.43).

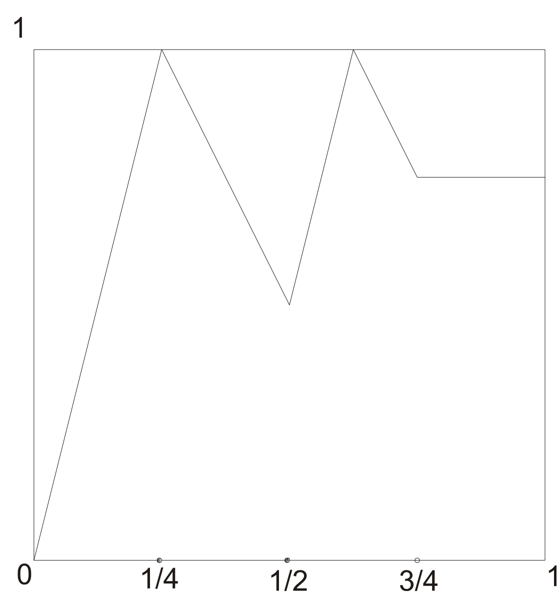


Función f_1

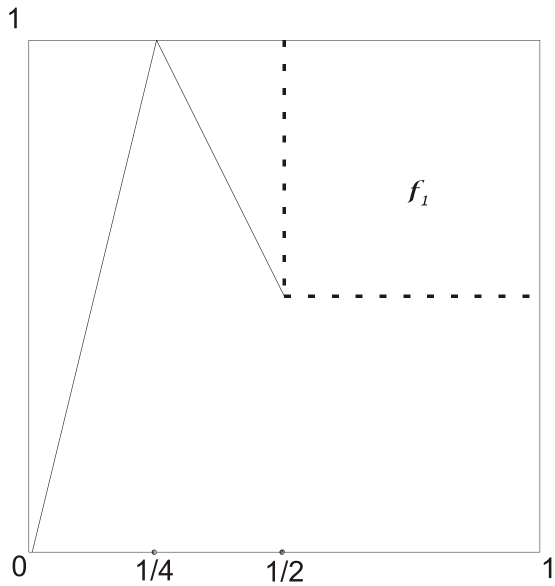
Sea $X_2 = \varprojlim \{I, f_2\}$, donde $f_2 : I \longrightarrow I$, está definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ g^{-1}(f_1(g(x))) & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Por el Teorema 3.1, $X_2 = K_2 \cup R_2$ donde $K_2 = \varprojlim \left\{\left[\frac{1}{2}, 1\right], f_2 |_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right\}$ y $R_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ con $\alpha_n^2 = \left\{x \in X_2 : x_n < \frac{1}{2}\right\}$ es la cerradura de un rayo topológico con residuo K_2. Por otra parte K_2 es homeomorfo a X_1, y por ello, cumple con las hipótesis del Teorema 3.3, así X_2 tiene la propiedad de Kelley.



Función f_2

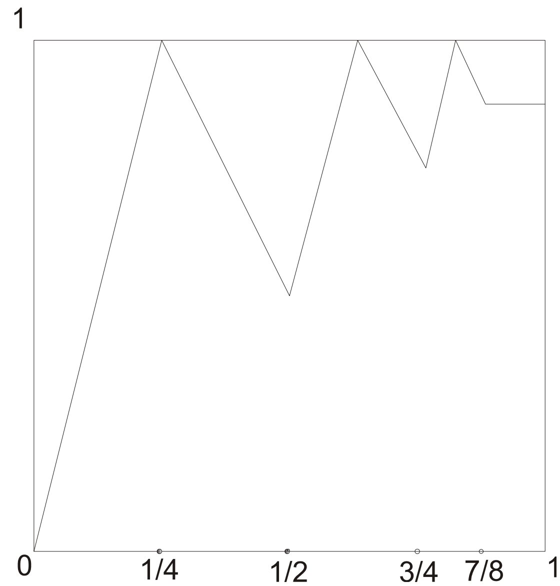


Función f_2

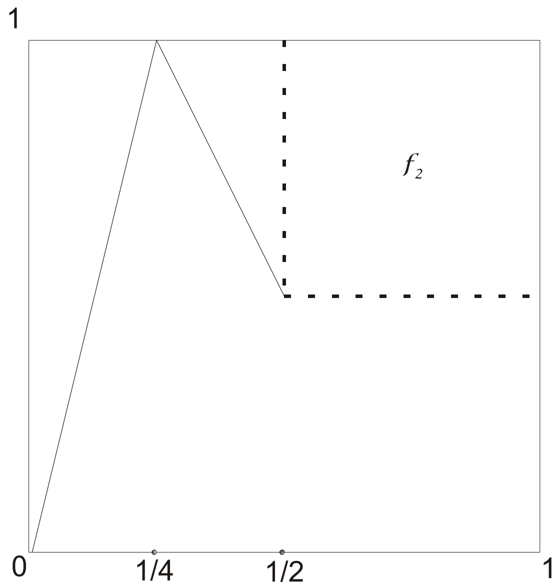
Sea $X_3 = \varprojlim \{I, f_3\}$, donde $f_3 : I \longrightarrow I$, está definida por

$$f_3(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ g^{-1}\left(f_2\left(g\left(x\right)\right)\right) & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Por el Teorema 3.1, $X_3 = K_3 \cup R_3$ donde $K_3 = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f_3 |_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \right\}$ y $R_3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^3$ con $\alpha_n^3 = \left\{ x \in X_2 : x_n < \frac{1}{2} \right\}$ es la cerradura de un rayo topológico con residuo K_3. Como K_3 es homeomorfo a X_2, cumple con las hipótesis del Teorema 3.3, así X_3 tiene la propiedad de Kelley.



Función f_3

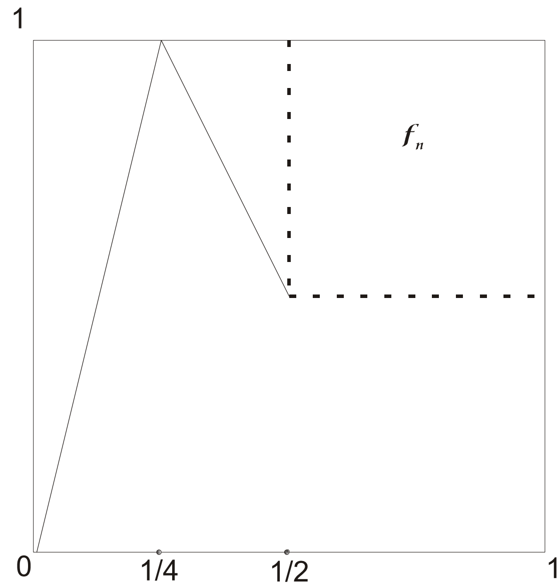


Función f_3

En general, definimos, para toda $r > 1$.

$X_r = \varprojlim \{I, f_r\}$, con $I = [0,1]$ y $f_r : I \longrightarrow I$, definida por

$$f_r(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ g^{-1}\left(f_{r-1}\left(g\left(x\right)\right)\right) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



Función f_r

Nuevamente X_r es la cerradura de un rayo topológico R_r con residuo $K_r = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f_2 \mid_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]} \right\}$, que es homeomorfo a X_{r-1}, lo que implica que X_r tiene la propiedad de Kelley.

3.2.2. Propiedades de los espacios factores

Analicemos el espacio X_i; haremos referencia a la demostración del Teorema 3.1, por ello recordamos las propiedades importantes que ahí aparecen respecto al rayo topológico.

Para cada entero positivo n, sea

$$\alpha_n^i = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in X_i : x_n < \frac{1}{2} \right\}.$$

1. $\alpha_n^i \subset \alpha_{n+1}^i$, pues si $x \in \alpha_n^i$ entonces, $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y por la definición de f_i, $x_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$, así $x \in \alpha_{n+1}^i$.

2. $\pi_n \mid_{\alpha_n^i}$ es un homeomorfismo de α_n^i en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, pues cada coordenada de un elemento de α_n^i está determinada por la coordenada n-ésima.

3. $x \in \alpha_n^i \setminus \alpha_{n-1}^i$ si y sólo si $x_n \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$, pues si $x_n \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$ entonces $x_{n-1} = f(x_n) = 4x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, con lo que $x \in \alpha_{n-1}^i$.

$R_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n^i$ es un rayo topológico, además, $R_i = \alpha_1^i \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\alpha_n^i \setminus \alpha_{n-1}^i\right)$,

De donde se tiene que $X_i = R_i \cup K_i$, con $K_i = \overline{R_i} \setminus R_i$ y $\overline{R_i} = X_i$ y $K_i = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f_i \mid_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]} \right\}$.

Esto último implica, como ya lo habíamos mencionado, que K_i es homeomorfo a X_{i-1} con el homeomorfismo $\overline{g}|_{K_i}$, donde $\overline{g} : \left[\frac{1}{2}, 1\right]^\infty \longrightarrow I^\infty$ está definida por $\overline{g}((x_1, x_2, \ldots)) = (g(x_1), g(x_2), \ldots)$.

Obsérvese que $\alpha_1^i = \pi_1^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ y $\alpha_n^i \setminus \alpha_{n-1}^i = \pi_n^{-1}\left(\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

3.2.3. Las funciones de ligadura.

Función g_1

Definiremos una función $g_1 : X_2 \to X_1$, utilizando la función g descrita en la sección anterior.

$g_1 : X_2 \to X_1$ está definida como sigue: Sea $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X_2$.

$$g_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \alpha_2^2 \\ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots) & \text{si } x \in \alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2, n > 2 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right) & \text{si } x \in K_2 \end{cases}$$

donde $y_i = f_1^{n-1-i}(x_{n-1})$.

Obsérvese que g_1 está bien definida, pues $f_1|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} = f_2|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$.

Continuidad de g_1 **en el rayo.**

Notemos primero que la función $\overline{g} : \left[\frac{1}{2}, 1\right]^\infty \to I^\infty$ es continua, dado que lo es en cada coordenada. Recordemos que $\overline{g}((x_1, x_2, \ldots)) = (g(x_1), g(x_2), \ldots)$.

Veamos que g_1 es continua.

Empezaremos probando la continuidad en el rayo topológico R_2. Si $x \in \alpha_2^2$, como $g_1|_{\alpha_2^2}$ es una función constante, g_1 es continua en x, ya que $x \in \pi_2^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$, que es un abierto en X_2. De manera semejante, como $g_1|_{\pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)}$

es continua, pues lo es en cada coordenada y $\pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$ es un abierto en X_2, si $x \in \pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$, g_1 también es continua en x. Nos resta probar la continuidad de g_1 para $x \in \pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \subset R^2$.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \pi_n^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$, es decir $\pi_n(x) = x_n = \frac{1}{8}$. Por la definición de X_2, $x_{n-1} = f_2(x_n) = 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$. Entonces $x \in \alpha_n^2 \setminus \alpha_{n-1}^2$ y por ello $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$. Es decir, $g_1(x) = x$

Probemos la continuidad de g_1 en x.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen tres números positivos δ_0, δ_1 y δ_2 menores que ε tales que

a) Si $y \in \alpha_n^2 \setminus \alpha_{n-1}^2$ y $d(x,y) < \delta_0$, entonces $d(g_1(x), g_1(y)) < \varepsilon$. Pues $g_1|_{\alpha_n^2 \setminus \alpha_{n-1}^2}$ es continua.

b) Si $s, t \in [0,1]$ y $|s-t| < \delta_1$, entonces $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{\left|f_1^{n-i}(s) - f_1^{n-i}(t)\right|}{2^{i-1}} < \frac{\varepsilon}{4}$. Por la continuidad de $f_{1.}$

c) Si $y \in R_2$ y $d(x,y) < \delta_2$, entonces $|\pi_n(x) - \pi_n(y)| < \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{1}{16}\right\}$.

Sean $\delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_2\}$ y $y \in X_2$ tales que $d(x,y) < \delta$.

Se consideran 2 casos:

Caso 1

$\pi_n(y) = y_n \geq \frac{1}{8}$. En este caso $y \in \alpha_n^2 \setminus \alpha_{n-1}^2$ y como $\delta \leq \delta_0$, se tiene aplicando a), que $d(g_1(x), g_1(y)) < \varepsilon$.

Caso 2

$\pi_n(y) = y_n < \frac{1}{8}$. Como $d(x,y) < \delta_2$, el inciso c) implica que $x_n - y_n < \frac{1}{16}$, es decir $\frac{1}{8} > y_n > x_n - \frac{1}{16}$ o $\frac{1}{8} > y_n > \frac{1}{16}$. Entonces $\frac{1}{2} > y_{n-1} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, pues $y_{n-1} = f_2(y_n)$ y $f_2(x) = 4x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. En consecuencia tenemos que $y \in \alpha_{n-1}^2 \setminus \alpha_{n-2}^2$, así, $g_1(y) = \left(f_1^{n-3}(y_{n-2}), \ldots, f_1(y_{n-2}), y_{n-2}, y_{n-1}, \ldots\right) = \left(f_1^{n-1}(y_n), \ldots, f_1(y_n), y_n, \ldots\right)$, debido a que $f_1 = f_2$ en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Entonces $d(g_1(x), g_1(y)) =$

$d\left(\left(f_1^{n-1}(x_n), \ldots, f_1(x_n), \frac{1}{8}, \ldots\right), \left(f_1^{n-3}(y_{n-2}), \ldots, f_1(y_{n-2}), y_{n-2}, y_{n-1}, \ldots\right)\right)$.

Como $y_{n-2} = f_1^2(y_n)$ se tiene que $d(g_1(x), g_1(y)) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\left|f_1^{n-i}(x_n) - f_1^{n-i}(y_n)\right|}{2^i} + \sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\left|f_2^{n-i}(x_n) - f_2^{n-i}(y_n)\right|}{2^i} + \sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4} + |x_n - y_n|$ pues como para cada $i > n$, $x_{i+1} = \frac{x_i}{4}$ y $y_{i+1} = \frac{y_i}{4}$, se tiene que $|x_{i+1} - y_{i+1}| < |x_i - y_i|$ y por c) obtenemos que $d(g_1(x), g_1(y)) < \varepsilon$.

De lo anterior se sigue que g_1 es continua en todo R_2.

Continuidad de g_1 en K_2.

Mostremos ahora la continuidad de g_1 en K_2.

Sean $\varepsilon > 0$ y $x = (x_1, x_2, \ldots) \in K_2$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dado que $x \in K_2$, entonces $x_n \geq \frac{1}{2}$ para toda $n \in N$ y existen δ_0, δ_1 y $\delta_2 > 0$ tales que:

a) Si $y \in K_2$ y $d(x, y) < \delta_0$, entonces $d(g_1(x), g_1(y)) < \varepsilon$, de hecho se tiene que $d(g_1(x), g_1(y)) = 0$,

b) Si $s, t \in [0, 1]$ y $|s - t| < \delta_1$, entonces $|f_2(s) - f_2(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$,

c) Si $y \in R_2$ y $d(x, y) < \delta_2$ entonces $|\pi_N(x) - \pi_N(y)| < \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{1}{16}\right\}$.

Como $x_n \geq \frac{1}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$:

$*$) Si $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k, \ldots) \in \alpha_k^2 \setminus \alpha_{k-1}^2$, entonces $z_k < \frac{1}{2}$, $z_i < \frac{1}{8}$ para $i \geq k + 1$ y $z_{k-1} \geq \frac{1}{2}$, así $d(x, z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{2^i} = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{|x_i - z_i|}{2^i} + \sum\limits_{i=k+2}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{2^i} + \frac{x_{k+1} - z_{k+1}}{2^{k+1}} \geq \frac{x_{k+1} - z_{k+1}}{2^{k+1}} > \frac{3/8}{2^{k+1}}$.

Sea $y \in X_2$ tal que $d(x, y) < \delta = \text{mín}\left\{\delta_0, \delta_2, \frac{\frac{3}{8}}{2^{N+2}}\right\}$. Por la elección de δ se sigue de $*$) que $y \notin \bigcup\limits_{k=1}^{N+1} \alpha_k^2 \setminus \alpha_{k-1}^2$.

Consideraremos dos casos:

Caso 1 Si $y \in K_2$

En este caso, como g_1 es constante en K_2 se concluye la continuidad.

Caso 2 Si $y \notin K_2$

Entonces $y \in \alpha_j^2 \setminus \alpha_{j-1}^2$ para alguna $j > N+1$ y por lo tanto $y_j < \frac{1}{2}$ y $y_{j-1} \geq \frac{1}{2}$. Por $c)$ y $b)$, $|f_2(x_N) - f_2(y_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, como $f_1(y_{j-1}) = \frac{1}{2}$, entonces $g_1(y) = \left(f_1^{j-2}(y_{j-1}), \ldots, f_1(y_{j-1}), y_{j-1}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, y_{j-1}, \ldots\right)$, lo que implica que $d(g_1(x), g_1(y)) = d\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right), \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, y_{j-1}, \ldots\right)\right) = \sum_{i=1}^{j-2} \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|}{2^i} + \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{2} - y_i\right|}{2^i} < \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$ por la elección que se hizo de N. Por lo tanto $d(g_1(x), g_1(y)) < \varepsilon$ y tenemos la continuidad de g_1 en todo X_2.

La función g_r

Definiremos la función de ligadura $g_2 : X_3 \to X_2$. Utilizaremos las funciones $\overline{g}$ y g_1 descritas en la sección anterior como sigue:

Sea $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X_3$.

$$g_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \alpha_2^3 \\ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots) & \text{si } x \in \alpha_n^3 - \alpha_{n-1}^3, n > 2 \\ \overline{g^{-1}}(g_1(\overline{g}(x))) & \text{si } x \in K_3 \end{cases}$$

Donde $y_i = f_1^{n-1-i}(x_{n-1})$.

En general definiremos $g_r : X_{r+1} \to X_r$, como sigue:

Sea $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X_{r+1}$

$$g_r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \alpha_2^{r+1} \\ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots) & \text{si } x \in \alpha_n^{r+1} - \alpha_{n-1}^{r+1}, n > 2 \\ \overline{g^{-1}}\left(g_{r-1}\left(\overline{g}\left(x\right)\right)\right) & \text{si } x \in K_{r+1} \end{cases}$$

Donde $y_i = f_1^{n-1-i}(x_{n-1})$.

La continuidad de la función g_2.

Omitiremos la demostración de la continuidad en el rayo topológico R_3 ya que es semejante a la que se hizo en la sección 3.2.3.

Probaremos la continuidad para g_2 en K_3.

Sean $x = (x_1, x_2, \ldots) \in K_3$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $x_i \geq \frac{1}{2}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Ahora como K_3 es homeomorfo a X_2, se tiene que $K_3 = R_1^3 \cup K_{3,2}$, es decir, K_3 es la cerradura de un rayo topológico R_1^3 con residuo $K_{3,2}$, además $R_1^3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{3,2}$, con $\alpha_n^{3,2} = \left\{y \in K_3 : y_n < \frac{3}{4}\right\}$.

Así que tenemos dos casos: $x \in \alpha_s^{3,2} \setminus \alpha_{s-1}^{3,2}$ para alguna $s \in \mathbb{N}$ o $x \in K_{3,2}$.

Caso 1

Supongamos que $x \in \alpha_s^{3,2} \setminus \alpha_{s-1}^{3,2}$, $s \in \mathbb{N}$; primero notemos que

$g_2(x) = g_2(x_1, x_2, \ldots) = \overline{g^{-1}}\left[g_1\left(\overline{g}\left(x_1, x_2, \ldots\right)\right)\right] =$

$\overline{g^{-1}}\left[g_1\left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right), \ldots, g\left(x_{s-2}\right), g\left(x_{s-1}\right), g\left(x_s\right), \ldots\right)\right] =$

$= \overline{g^{-1}}\left[f_1^{s-2}\left(g\left(x_{s-1}\right)\right), \ldots, f_1\left(g\left(x_{s-1}\right)\right), g\left(x_{s-1}\right), g\left(x_s\right), \ldots\right] =$

$\left(g^{-1}\left(f_1^{s-2}\left(g\left(x_{s-1}\right)\right)\right), \ldots, g^{-1}\left(f_1\left(g\left(x_{s-1}\right)\right)\right), g^{-1}\left(g\left(x_{s-1}\right)\right), g^{-1}\left(g\left(x_s\right)\right), \ldots\right)$

Notemos también que como $x \in \alpha_s^{3,2} \setminus \alpha_{s-1}^{3,2}$, entonces $x_i \geq \frac{3}{4}$ para toda $i \leq s-1$ y por ello $g\left(x_i\right) \geq \frac{1}{2}$ para toda $i \leq s-1$, $f_1\left(g\left(x_i\right)\right) = \frac{1}{2}$ y $g^{-1}\left(f_1\left(g\left(x_i\right)\right)\right) = \frac{3}{4}$.

$g_2\left(x\right) = \left(\frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{4}, x_{s-1}, x_s, \ldots\right) = \left(f_2^{s-1}\left(x_s\right), \ldots, f_2^2\left(x_s\right), f_2\left(x_s\right), x_s, \ldots\right)$.

Esto último se sigue de la definición de f_2.

Para la ε elegida, existen δ_0, δ_1 y $\delta_2 > 0$ y menores que $\frac{\varepsilon}{2}$ tales que:

a) Si $y \in K_3$ y $d\left(x, y\right) < \delta_0$ entonces $d\left(g_2\left(x\right), g_2\left(y\right)\right) < \varepsilon$

b) Si $r, t \in [0,1]$ y $|r-t| < \delta_1$, entonces $\sum_{i=1}^{s-1} \frac{\left|f_2^i(r) - f_2^i(t)\right|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$

c) Si $y \in R_3$ y $d\left(x, y\right) < \delta_2$ entonces $\left|\pi_s\left(x\right) - \pi_s\left(y\right)\right| < \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{1}{64}\right\}$

Notemos que como en $*$) de la sección 3.2.3, ($**$) si $z \in \alpha_k^3$, $d\left(x, z\right) < \frac{\frac{3}{32}}{2^{k-1}}$.

Sea $\delta = \text{mín}\left\{\delta_0, \delta_2, \frac{\frac{3}{32}}{2^{N+2}}\right\}$.

Sea $y \notin K_3$ tal que $d\left(x, y\right) < \delta$. Entonces, por la elección de δ, $y \in \alpha_j^3 \setminus \alpha_{j-1}^3$ para alguna $j > s$.

Ahora como $x_{s-1} \geq \frac{3}{4}$ y $\frac{9}{16} < x_s < \frac{3}{4}$, obtenemos lo siguiente: $f_2|_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]} = f_3|_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{64} < x_{s+1} < \frac{9}{16}$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{4^{i+2}} < x_i < \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{i+1}}$ para x_i con $i > s$.

Del inciso c) $|\pi_s(x) - \pi_s(y)| < \delta_1$, por lo que $\frac{1}{2} + \frac{1}{64} < y_s < \frac{3}{4}$ y por la definición de f_3, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4^{j+2}} < y_{j-1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4^j}$, así $y_i \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ con $i \in \{s, s+1, \ldots, j-1\}$ y $f_2(y_i) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ con lo que $y_{i+1} = f_2(y_i)$, $i \in \{s, s+1, \ldots, j-1\}$. De lo anterior y calculando $g_2(y)$ tenemos que $g_2(y) = \left(f_2^{j-2}(y_{j-1}), \ldots, f_2^{j-1-s}(y_{j-1}), \ldots, f_2(y_{j-1}), y_{j-1}, \ldots\right)$, donde la coordenada s corresponde a $f_2^{j-1-s}(y_{j-1})$.

Así, $g_2(y) = \left(f_2^{j-2}(y_{j-1}), \ldots, f_2^{j-2-s}(y_{j-1}), y_s, y_{s+1}, \ldots, y_{j-1}, y_j, \ldots\right) =$

$\left(f_2^{s-1}(y_s), \ldots, f_2(y_s), y_s, \ldots\right)$. Por lo tanto $d(g_2(x), g_2(y)) =$

$$d\left(\left(f_2^{s-1}(x_s), \ldots, f_2^2(x_s), f_2(x_s), x_s, \ldots\right), \left(f_2^{s-1}(y_s), \ldots, f_2(y_s), y_s, \ldots\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\left|f_2^i(x_s) - f_2^i(y_s)\right|}{2^i} + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{|x_s - y_s|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \delta_1 < \varepsilon.$$

Por b) la primer suma es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y para la segunda suma se puede notar que $f_3|_{\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]}$ es la función monótona $f_3(t) = 4t - \frac{3}{2}$ y por ello si $i > s$, $|x_{i+1} - y_{i+1}| = \left|\frac{x_i}{4} + \frac{3}{8} - \frac{y_i}{4} - \frac{3}{8}\right| = \left|\frac{x_i}{4} - \frac{y_i}{4}\right| < |x_i - y_i|$, luego $|x_s - y_s| > |x_i - y_i|$ para toda $i > s$, con lo que esta segunda suma es menor que $|x_s - y_s|$ y por c) menor que δ_1.

Caso 2

Si $x \in K_3$.

En este caso $g_2(x) = g_2(x_1, x_2, \ldots) = \overline{g^{-1}}\left[g_1\left(\overline{g}(x_1, x_2, \ldots)\right)\right] =$

$\overline{g^{-1}}\left[g_1\left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right), \ldots, g\left(x_{s-2}\right), g\left(x_{s-1}\right), g\left(x_s\right), \ldots\right)\right]$ y como $x_i \geq \frac{3}{4}$ para toda i, se tiene que $g\left(x_i\right) \geq \frac{1}{2}$, de esta forma se concluye que, $g_2\left(x\right) = \overline{g^{-1}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right) = \left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \ldots\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Recordemos de $(**)$ que si $z \in \alpha_k^3$ entonces $d\left(x, z\right) > \frac{\frac{3}{32}}{2^{k-1}}$. Así que elegimos $\delta < \frac{\frac{3}{32}}{2^{N-1}}$, con lo que si $y \in R_3$ y $d\left(x, y\right) < \delta$, entonces $y \in \alpha_j^3 \backslash \alpha_{j-1}^3$ de tal forma que $j > N+1$ y en consecuencia se tiene que $g_2\left(y\right) = \left(f_2^{j-2}\left(y_{j-1}\right), \ldots, f_2\left(y_{j-1}\right), y_{j-1}, y_j, \ldots\right)$. Nótese que $y_{j-1} \geq \frac{1}{2}$ y $y_i \geq \frac{1}{2}$ para toda $i \leq j-1$. Por el inciso c) $\left|y_N - x_N\right| < \delta_1 < \frac{1}{32}$ pero $x_N = \frac{3}{4}$, luego $y_N > \frac{5}{8}$, así que $y_{N-1} \geq \frac{3}{4}$ y $y_i \geq \frac{3}{4}$ para toda $i < N$.

Como $y_i \geq \frac{1}{2}$ para toda $i \leq j-1$ tenemos dos casos;

caso 2.1

Si para alguna $i \in \{N, \ldots, j-1\}$, $y_i \geq \frac{3}{4}$ entonces

$g_2\left(y\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{4}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}, y_j, \ldots\right)$

caso 2.2

La primera coordenada i donde $y_i \geq \frac{3}{4}$ es $i = N-1$.

En ambos casos la imagen de y tiene el valor de $\frac{3}{4}$ en las primeras $N-1$ coordenadas. Así que: $d\left(g_2\left(x\right), g_2\left(y\right)\right) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\right)\left(\frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{4}, y_i, y_{i+1}, \ldots\right)\right) =$

$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\left|\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right|}{2^i} + \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\left|\frac{3}{4}-\pi_i(g_2(y))\right|}{2^i} < \varepsilon$. Pues la primer suma es cero y la siguiente es menor que $\frac{1}{2^N}$, por lo que $d\left(g_2\left(x\right), g_2\left(y\right)\right) < \varepsilon$ y tenemos la continuidad de g_2 en todo X_3.

La función g_r es monótona.

Empezaremos probando que $g_r|_{R_{r+1}}$ es un homeomorfismo. Después mostraremos que $g_r|_{R_s^{r+1}}$ es un homeomorfismo, pues esto lo ocuparemos en la última sección. Por último probaremos que g_r es monótona.

$$g_r\left(x\right) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \alpha_2^{r+1} \\ \left(f_r^{n-2}\left(x_{n-1}\right), \ldots, f_r\left(x_{n-1}\right), x_{n-1}, x_n, \ldots\right) & \text{si } x \in \alpha_n^{r+1} \setminus \alpha_{n-1}^{r+1} \\ \overline{g^{-1}}\left(g_{r-1}\left(\overline{g}\left(x\right)\right)\right) & \text{si } x \in K_{r+1} \end{cases}$$

y

Proposición 3.4 *La imagen de R_{r+1} bajo la función g_r es R_r.*

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R_{r+1}$, entonces $x \in \alpha_1^{r+1}$ o $x \in \alpha_i^{r+1} \setminus \alpha_{i-1}^{r+1}$ para alguna $i > 1$. Si $x \in \alpha_2^{r+1}$ entonces $g_r\left(x\right) = x$ y como $x_2 < \frac{1}{2}$ se cumple que $g_2\left(x\right) \in \alpha_2^r \subset R_r$. Por otro lado, si $x \in \alpha_n^{r+1} \setminus \alpha_{n-1}^{r+1}$, entonces $g_r\left(x\right) = \left(f_r^{n-2}\left(x_{n-1}\right), f_r^{n-1}\left(x_{n-1}\right), \ldots, f_r\left(x_{n-1}\right), x_{n-1}, x_n, \ldots\right)$ que es un punto de X_r tal que su n-ésima coordenada x_n es menor que $\frac{1}{2}$ y para cualquier coordenada i menor que n, se cumple que $x_i \geq \frac{1}{2}$, con lo que $g_r(x) \in \alpha_n^r \setminus \alpha_{n-1}^r$, es decir la imagen de x bajo g_r está en R_r.

Si $y = (y_1, y_2, \ldots) \in R_r$, entonces $y \in \alpha_1^r$ o $y \in \alpha_i^r \setminus \alpha_{i-1}^r$ para alguna $i > 1$. Si $y \in \alpha_2^r$ entonces tomando a $x = y$, obtenemos que $g_r(x) = y$.

Por otra parte, si $y \in \alpha_n^r \setminus \alpha_{n-1}^r$, entonces al tomar el punto $x = \left(f_{r+1}^{n-2}(y_{n-1}), f_{r+1}^{n-1}(y_{n-1}), \ldots, f_{r+1}(y_{n-1}), y_{n-1}, y_n, \ldots\right)$, se tiene que x es un punto en $\alpha_n^{r+1} \setminus \alpha_{n-1}^{r+1}$.

Además, $g_r(x) = (f_r^{n-2}(y_{n-1}), f_r^{n-1}(y_{n-1}), \ldots, f_r(y_{n-1}), y_{n-1}, y_n, \ldots) = y$. Esto demuestra que cada punto de R_r es imagen de algún punto en R_{r+1}.

■

Proposición 3.5 $g_r|_{R_{r+1}}$ *es inyectiva.*

Demostración. Sean $x, y \in R_{r+1}$ y supongamos que $g_r(x) = g_r(y)$. Claramente $x, y \in \alpha_2^{r+1}$ o $x, y \in \alpha_n^{r+1} \setminus \alpha_{n-1}^{r+1}$.

En el primer caso $x = g_r(x) = g_r(y) = y$.

En el segundo caso

$g_r(x) = (f_r^{n-2}(x_{n-1}), f_r^{n-1}(x_{n-1}), \ldots, f_r(x_{n-1}), x_{n-1}, x_n, \ldots)$ y $g_r(y) = (f_r^{n-2}(y_{n-1}), f_r^{n-1}(y_{n-1}), \ldots, f_r(y_{n-1}), y_{n-1}, y_n, \ldots)$, lo cual sólo se cumple si $x = y$. ■

Teorema 3.6 *$g_r|_{R_{r+1}}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por las dos proposiciones anteriores, se tiene que $g_r|_{R_{r+1}}$ es una función biyectiva. La prueba de que $g_r|_{R_{r+1}}$ es continua es semejante a la prueba de que $g_1|_{R_2}$ es continua (lo cual aparece en la sección 3.2.3).

Además, la inversa de $g_r|_{R_{r+1}}$, definida para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R_r$ por

$$g_r^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \alpha_2^r \\ \left(f_{r+1}^{n-2}(x_{n-1}), \ldots, f_{r+1}(x_{n-1}), x_{n-1}, x_n, \ldots\right) & \text{si } x \in \alpha_n^r \setminus \alpha_{n-1}^r \end{cases}$$

es también continua y por la semejanza con la función g_r, la prueba de la continuidad es similar. ■

Lo que mostraremos a continuación es que $g_2|_{R_1^3}$ es un homeomorfismo de R_1^3 a R_1^2.

Primero notemos que $X_r = \overline{R_r} = R_r \cup K_r$ y K_r es homeomorfo a X_{r-1}. Así, como $X_1 = R_1 \cup K_1$, $X_2 = R_2 \cup R_1^2 \cup K_1^2$, $X_3 = R_3 \cup R_1^3 \cup R_2^3 \cup K_1^3$ y en general $X_r = R_r \cup R_1^r \cup R_2^r \cup \cdots \cup R_{r-1}^r \cup K_1^r$. Notemos, para visualizar los ejemplos que $R^r_{r-1} \cup K^r_1$ es homeomorfo a X_1 y en general que $R^r_{r-s} \cup \cdots \cup R^r_{r-1} \cup K^r_1$ es homeomorfo a X_s.

Como K_3 es homeomorfo a X_2 entonces $K_3 = R^3_1 \cup K_{3,2}$ y $K_{3,2}$ es homeomorfo a X_1.

Recordemos la definición de g_2, si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X_3$, entonces

$$g_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \alpha^3_i \text{ donde } i = 1, 2 \\ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots) & \text{si } x \in \alpha^3_n - \alpha^3_{n-1} \\ \overline{g^{-1}}(g_1(\overline{g}(x))) & \text{si } x \in K_3 \end{cases}$$

Donde $y_i = f_1^{n-1-i}(x_{n-1})$.

Empezaremos por ver la imagen de un elemento en R^3_1.

Si $x \in K_3$, entonces $x \in \alpha^{3,2}_s - \alpha^{3,2}_{s-1}$ para alguna $s \in \mathbb{N}$ o $x \in K_{3,2}$.

Si $x \in \alpha^{3,2}_s - \alpha^{3,2}_{s-1}$ para alguna $s \in \mathbb{N}$, entonces $g_2(x) = \overline{g^{-1}}(g_1(\overline{g}(x))) = \left(g^{-1}\left(f_1^{s-2}(g(x_{s-1}))\right), \ldots, g^{-1}(f_1(g(x_{s-1}))), x_{s-1}, x_s, \ldots\right)$.

Pero $\frac{1}{2} \leq x_s \leq \frac{3}{4}$ y $x_{s-1} \geq \frac{3}{4}$, de hecho $x_i \geq \frac{3}{4}$ para $i < s$, $\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{3}{4}$ para $i \geq s$.

De donde,

$g_2(x) = \overline{g^{-1}}(g_1(\overline{g}(x))) = \overline{g^{-1}}(g_1(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_{s-1}), g(x_s), \ldots))$.

Ahora como

$0 \leq g(x_s) \leq \frac{1}{2}$, $g(x_{s-1}) \geq \frac{1}{2}$, de hecho $0 \leq g(x_i) < \frac{1}{2}$ si $i \geq s$ y $g(x_i) \geq \frac{1}{2}$ si $i < s$, entonces $\overline{g}(x) \in \alpha_s^2 - \alpha_{s-1}^2$.

Así $g_2(x) = \overline{g^{-1}}\left(f_1^{s-2}(g(x_{s-1})), \ldots, f_1(g(x_{s-1})), g(x_{s-1}), g(x_s), \ldots\right) = \left(g^{-1}\left(f_1^{s-2}(g(x_{s-1}))\right), \ldots, g^{-1}(f_1(g(x_{s-1}))), x_{s-1}, x_s, \ldots\right)$.

Como $x_{s-1} \geq \frac{1}{2}$ y $x_i \geq \frac{1}{2}$ para toda i, y como $x_{s-1} \geq \frac{3}{4}$, entonces $f_2(x_{s-1}) = \frac{3}{4}$. Notemos que $g^{-1}(f_1^2(g(x_{s-1}))) =$

$g^{-1}(f_1(g(g^{-1}(f_1(g(x_{s-1})))))) = g^{-1}(f_1(g(f_2(x_{s-1}))))$.

Más aún $g^{-1}(f_1^n(g(x_{s-1}))) = f_2^n(x_{s-1})$, entonces

$g_2(x) = \left(f_2^{s-1}(x_{s-1}), \ldots, f_2(x_{s-1}), x_{s-1}, x_s, \ldots\right)$.

Como $x_{s-1} \geq \frac{3}{4}$ se sigue de la definición de f_2 que

$g_2(x) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{4}, x_{s-1}, x_s, \ldots\right)$ con lo que $g_2(x) \in R_1^2$. (#)

Además, si $y = (y_1, y_2, \ldots) \in R_1^2$, cumple que $y_i \geq \frac{1}{2}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $y_s \leq \frac{3}{4}$ para alguna $s \in \mathbb{N}$, es decir, $y = \left(f_2^{s-1}(y_{s-1}), \ldots, f_3(y_{s-1}), y_{s-1}, \ldots\right)$, así que si definimos $x = \left(f_3^{s-3}(y_{s-1}), \ldots, f_3(y_{s-1}), y_{s-1}, y_s, \ldots\right)$ cumple que $\frac{1}{2} \leq y_s < \frac{3}{4}$ y $y_{s-1} \geq \frac{3}{4}$, luego $g_2(x) = y$.

Enseguida probaremos que $g_2|_{R_1^3}$ es inyectiva.

Sean $x, y \in R_1^3$ y $g_2(x) = g_2(y)$.

De (#), se sigue que $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{4}, x_{s-1}, x_s, \ldots\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{4}, y_{s-1}, y_s, \ldots\right)$, de donde $x_i = y_i$ para cada $i \geq s-1$, pero $x_i = f_3^{s-1-i}(x_{s-1})$ y $y_i = f_3^{s-1-i}(y_{s-1})$ para cada $i < s-1$. Así que $x = y$.

Por otro lado, $g_2|_{R_1^3}^{-1}$ definida para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R_1^2$ por $g_2|_{R_2^3}^{-1}(x) = \left(f_3^{s-1}(x_{s-1}), \ldots, f_3(x_{s-1}), x_{s-1}, x_s, \ldots\right)$ es continua (por su semejanza a $g_2|_{R_2}$ la prueba sería similar).

Los siguientes son corolarios al Teorema 3.6.

Corolario 3.7 $g_2|_{R_1^3}$ *es un homeomorfismo.*

Corolario 3.8 $g_r|_{R_s^r}$, $s < r$ *es un homeomorfismo.*

Mostraremos ahora por inducción que g_r es monótona.

Proposición 3.9 g_1 *es monótona.*

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X_1$. Si $x \in R_1$ por la proposición 3.4, $g_1^{-1}(x) \in R_2$ y por la proposición 3.5 $g_1^{-1}(x)$ es un punto y por lo tanto conexo. Ahora, si $x \in K_1$ es decir, $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$. Por consecuencia de la proposición 3.4, $g_1^{-1}(x) = K_2$, que es conexo. Por ello g_1 es monótona. ∎

Proposición 3.10 *Si $r > 1$, g_r es monótona.*

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X_r$. Si $x \in R_r$ por la proposición 3.4, $g_r^{-1}(x) \in R_{r+1}$ y por la proposición 3.5 $g_r^{-1}(x)$ es un punto y por lo tanto conexo. Si $x \in K_r$, entonces por consecuencia de la proposición 3.4, $g_r^{-1}(x) \subseteq K_{r+1}$, de donde se obtiene que $g_r^{-1}(x) = \left(g_r|_{K_{r+1}}\right)^{-1}(x)$. Pero $g_r|_{K_{r+1}} = \overline{g^{-1}} \circ g_{r-1} \circ \overline{g}$, que es composición de funciones monótonas, con lo que $g_r^{-1}(x)$ es conexo. Por ello g_r es monótona. ■

3.2.4. El continuo

Sea $X = \varprojlim \{X_n, g_n\}$. Donde X_n son los espacios factores que definimos anteriormente y g_n las funciones de ligadura para los espacios X_n.

Probaremos primero que X es la cerradura de un rayo topológico.

Sea $R = \varprojlim \left\{R_n, g_n|_{R_{n+1}}\right\}$.

Notemos que R está bien definido, pues $g_n|_{R_{n+1}}$ es un homeomorfismo de R_{n+1} en R_n.

Por otro lado, si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R$, entonces $x_i \in R_i$ con $x_i = \left(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{s-1}^i, x_s^i, \ldots\right)$. Recordemos que $R_i = \alpha_1^i \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\alpha_n^i \setminus \alpha_{n-1}^i\right)$, lo cual implica que $x_i \in \alpha_s^i \setminus \alpha_{s-1}^i$ para alguna $s \in N$.

Por lo que $x_i = \left(f_i^{s-2}\left(x_{s-1}^i\right), \ldots, f_i\left(x_{s-1}^i\right), x_{s-1}^i, x_s^i, \ldots\right)$ y

$\left(f_i^{s-2}\left(x_{s-1}^i\right), \ldots, f_i\left(x_{s-1}^i\right), x_{s-1}^i, x_s^i, \ldots\right) =$

$\left(f_1^{s-2}\left(x_{s-1}^1\right), \ldots, f_1\left(x_{s-1}^1\right), x_{s-1}^1, x_s^1, \ldots\right)$.

Esta última igualdad, la obtenemos del homeomorfismo $g_n|_{R_{n+1}}$, para $n \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$.

Con lo que hay un homeomorfismo de R a R_1, definido por la primera proyección $\pi_1(x) = x_1$, pues π_1 es biyectiva, continua y su inversa definida por $\pi_1^{-1}(x_1) = \left(x_1, g_1^{-1}(x_1), g_2^{-1}\left(g_1^{-1}(x_1)\right), \ldots\right)$ es continua, ya que lo es en cada coordenada.

De lo anterior obtenemos que R es un rayo topológico.

Ahora, si $x = (x_1, x_2, \ldots) \notin R$, entonces $x_i \notin R_i$ para alguna i, pero de la proposición 3.4, se obtiene que $x_j \notin R_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que dado un número positivo ε existe un punto $y \in R$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

Dada $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe $\delta > 0$ tal que si $d(s, t) < \delta$ entonces $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{d(g_{N-i}(\ldots(g_{N-1}(s))), g_{N-1}(\ldots,(g_{N-1}(t))))}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $y_N \in R_N$ tal que $d(x_N, y_N) < \delta$ (esto se puede pues $\overline{R_N} = X_N$).

Como $g_n|_{R_{n+1}}$ es un homeomorfismo, definimos $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N, \ldots)$ tal que $y_i = g_{N-i}(\ldots(g_{N-1}(y_N)))$ si $i < N$ y $y_i = g_i^{-1}\left(\ldots\left(g_N^{-1}(y_N)\right)\right)$ si

$i > N$.

Así obtenemos un punto $y \in R$ y $d(x,y) = d((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{d(g_{N-i}(\ldots(g_{N-1}(y_N))), g_{N-1}(\ldots(g_{N-1}(x_N))))}{2^i} + \sum_{i=N}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} < \varepsilon$. Con lo que obtenemos lo deseado.

Teorema 3.11 *X es 2-equivalente.*

Demostración. Sean $p_i = (0,0,0,\ldots) \in X_i$ y $q_i = \left(1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^i}, \ldots\right) \in X_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$, $p = (p_1, p_2, \ldots)$ y $q = (q_1, q_2, \ldots)$.

Dado $A \in C(X)$, probaremos que si $q \notin A$, entonces A debe ser un arco y si $q \in A$, entonces A debe ser homeomorfo a X.

Sea A un subcontinuo no degenerado de X.

Caso 1. $q \notin A$.

Entonces $q_i \notin A_i = \pi_i(A)$ así que A_i es un subcontinuo de X_i que no contiene a K_i y como $X_i = R_i \cup R_{i-1}^i \cup \ldots \cup R_1^i \cup \{q_i\}$ se tiene que $A \subseteq R_i$ o $A_i \subseteq R_s^i$ para alguna $s \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$, de donde se obtiene que A_i es un arco contenido en un rayo, luego entonces $A_{i+1} = \pi_{i+1}(A)$ está contenido en R_{i+1} o $A_{i+1} \subseteq R_s^{i+1}$ para la $s \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$ tal que $A_i \subseteq R_s^i$.

Esto último pues la imagen de R_{i+1} es R_i y la imagen de cada R_s^{i+1} es R_s.

En general para $j > i$ $\pi_j(A) = A_j \subseteq R_j$ o $A_j \subseteq R_s^j$ para la $s \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$ tal que $A_i \subseteq R_s^i$. Por lo que A debe ser un arco.

Caso 2. $q \in A$.

Entonces $q_i \in A_i = \pi_i(A)$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Si A_1 es no degenerado, A_1 es un arco tal que uno de sus puntos extremos es q_1, luego A_1 es homeomorfo a X_1.

Sea a_1 el otro punto extremo de A_1. $a_1 \in R_1$ pues $A_1 \neq \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)\right\} = \{q_1\}$, $a_2 = g_1^{-1}(a_1)$. Recordemos que $g_r|_{R_{r+1}}$ es un homeomorfismo, $a_2 \in A_2$ y como $q_2 \in A_2$, se tiene que $A_2 \cap R_2 \neq \emptyset$ y $A_2 \cap K_2 \neq \emptyset$. Además, como K_2 es terminal, entonces $K_2 \subseteq A$, luego A_2 tiene una parte del rayo y su residuo es K_2, así A_2 es homeomorfo a X_2.

En general $a_i = g_{i-1}^{-1}\left(\ldots\left(g_1^{-1}(a_1)\right)\right) \in A_i$ y como $q_i \in A_i$, se tiene que A_i es la cerradura de un subrayo de R_i es decir A_i es homeomorfo a X_i y por lo tanto A es homeomorfo a X.

Ahora, supóngase que A_1 es degenerado. Dado que A no es degenerado, sea $t > 1$ el menor número tal que A_t no es degenerado. Entonces A_t debe ser un arco contenido en K_t (recordemos que $A_{t-1} = \pi_{t-1}(A) = \{q_{t-1}\}$, con a_t y q_t sus puntos extremos, luego $a_t \in R_{t-1}^t$.

Por otro lado, en X_{t+1}, $a_t \in R_{t-1}^{t+1}$, y A_{t+1} no toca a nigún rayo R_{t+1} ni

R_j^{t+1} para $j < t-1$.

Así, A_{t+1} al intersectar a K_{t+1} es la cerradura del rayo R_{t-1}^{t+1}, por lo tanto A_{t+1} es homeomorfo a X_t. Continuando con este proceso se tiene que A_j es homeomorfo a X_{j-1} para $j > t$ y por lo consiguiente A es homeomorfo a X.

Con esto hemos probado que X es un continuo $2 - equivalente$. ■

Teorema 3.12 *X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Como $X = \varprojlim \{X_n, g_n\}$. Donde X_n son los espacios factores que definimos anteriormente y g_n las funciones de ligadura para los espacios X_n, cumplen que cada espacio factor tiene la propiedad de Kelley y cada una de las funciones de ligadura es confluente. Por el Teorema 1.45, X tiene la propiedad de Kelley. ■

Capítulo 4

EJEMPLO SIN LA PROPIEDAD DE KELLEY.

El ejemplo que sigue es el de un continuo M con las siguientes propiedades:

1) M es 2-equivalente,

2) M es hereditariamente descomponible,

3) M es encadenable

4) M no contiene arcos y

5) M no tiene la propiedad de Kelley.

4.1. EL EJEMPLO

Este ejemplo fué presentado originalmente por W. Mahavier en [20], en [13], se mostraron algunas propiedades de este continuo, aquí retomamos esas propiedades y mostramos la de nuestro mayor interés, la 5).

Notación 4.1 *Sean* $[a,b]$, $[c,d]$ *dos subarcos no degenerados de* $[0,1]$ *y* $h : [0,1] \to [0,1]$, *una función continua, entonces* $\langle h : [a,b] \to [c,d] \rangle$, *denotará la composición* $v \circ h \circ u$, *donde,* $u : [a,b] \to [0,1]$ *y* $v : [0,1] \to [c,d]$ *definidas por* $u(t) = \frac{1}{b-a}(t-a)$ *y* $v(t) = (d-c)t + c$.

Definiremos $M = \varprojlim \{I, f_n\}$ donde $I = [0,1]$ y las funciones de ligadura $f_n : I \to I$ se definirán recursivamente por medio de los siguientes diagramas.

Sea $f_1 : I \to I$ definida por: $f_1(0) = 0$, $f_1(\frac{1}{2}) = 1$, $f_1(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$, $f_1(1) = 1$.

y f_1 es lineal en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Sea $g : I \to I$ definida por: $g(0) = g(1) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 1$, y g lineal en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Para definir cada f_n usaremos la siguiente sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, tal que

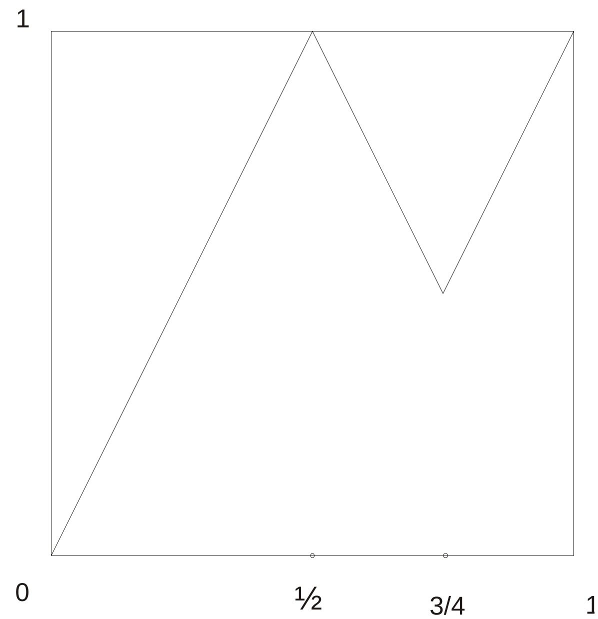


Figura 4.1: Función f_1

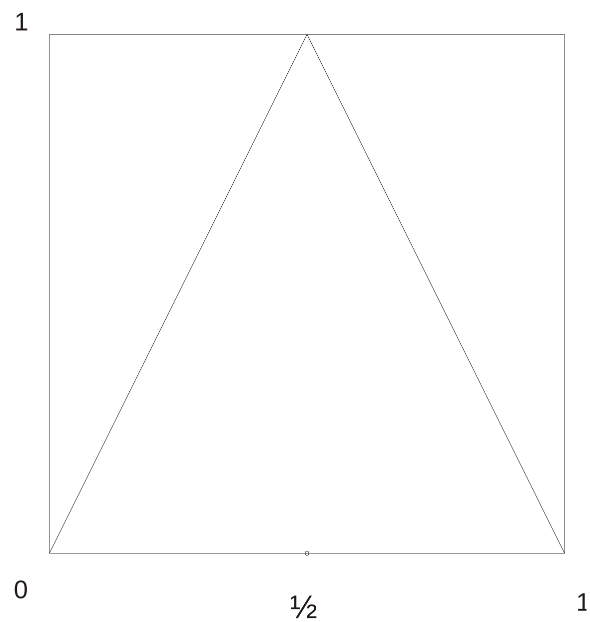


Figura 4.2: Función g

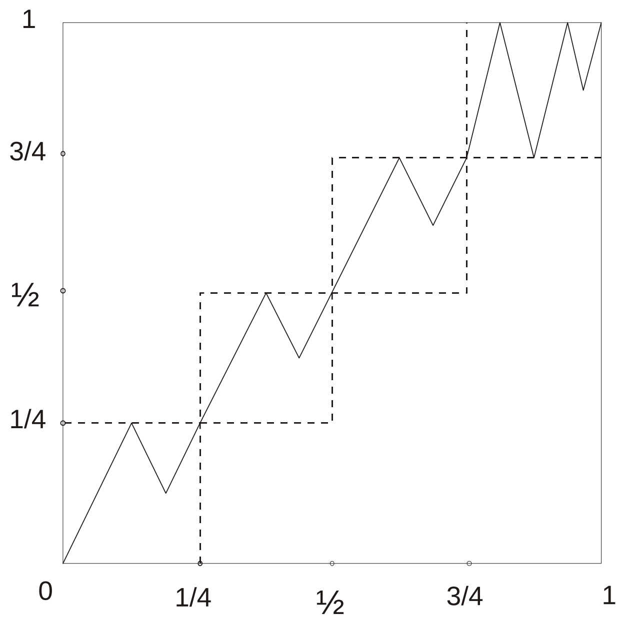


Figura 4.3: Función f_2

$y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{2}$,

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $y_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

y para $n = 2, 3, 4, \ldots$, $y_{2n} = 1 - \frac{3}{2^{n+2}}$

La gráfica de la función f_2 es entonces:

$$\bigcup_{i=0}^{2} \langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle$$

$$\bigcup \langle g : [y_3, y_5] \to [y_3, 1] \rangle$$

$$\bigcup \langle f_1 : [y_5, 1] \to [y_3, 1] \rangle$$

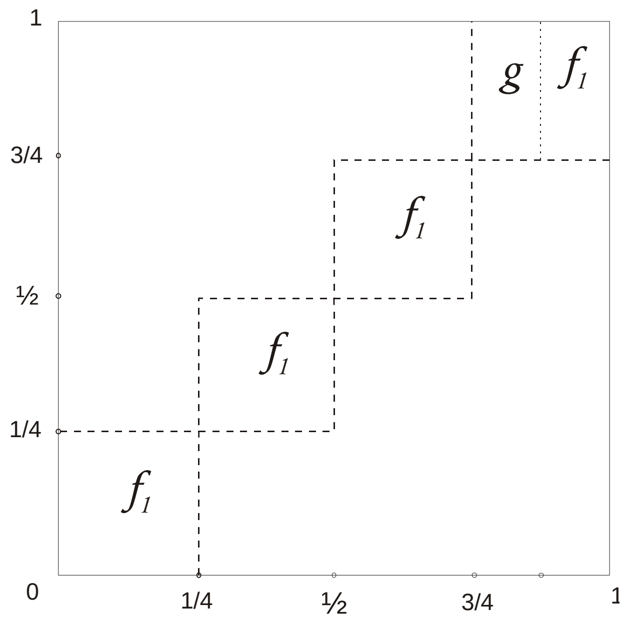


Figura 4.4: Función f_2

La gráfica de la función f_3 es entonces:

$$\bigcup_{i=0}^{2}\langle f_2:[y_i,y_{i+1}]\to[y_i,y_{i+1}]\rangle$$
$$\cup\bigcup_{i=3}^{4}\langle f_1:[y_i,y_{i+1}]\to[y_i,y_{i+1}]\rangle$$
$$\bigcup\langle g:[y_5,y_7]\to[y_5,1]\rangle$$
$$\bigcup\langle f_2:[y_7,1]\to[y_5,1]\rangle$$

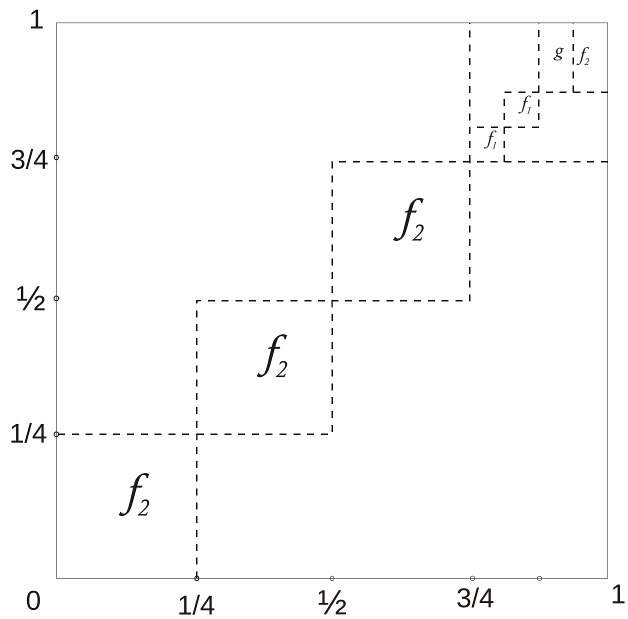


Figura 4.5: Función f_3

La gráfica de la función f_4 es entonces:

$$\bigcup_{i=0}^{2}\langle f_3 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}]\rangle$$
$$\cup\bigcup_{i=3}^{4}\langle f_2 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}]\rangle$$
$$\cup\bigcup_{i=5}^{6}\langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}]\rangle$$
$$\bigcup\langle g : [y_7, y_9] \to [y_7, 1]\rangle$$
$$\bigcup\langle f_4 : [y_9, 1] \to [y_7, 1]\rangle$$

Para $n > 1$, la gráfica de la función f_{n+1} es entonces:

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{i=0}^{2} \langle f_n : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \bigcup_{i=3}^{4} \langle f_{n-1} : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \bigcup_{i=5}^{6} \langle f_{n-2} : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\vdots \\
&\cup \bigcup_{i=2n-3}^{2n-2} \langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\bigcup \langle g : [y_{2n-1}, y_{2n+1}] \to [y_{2n-1}, 1] \rangle \\
&\bigcup \langle f_n : [y_{2n+1}, 1] \to [y_{2n-1}, 1] \rangle
\end{aligned}
$$

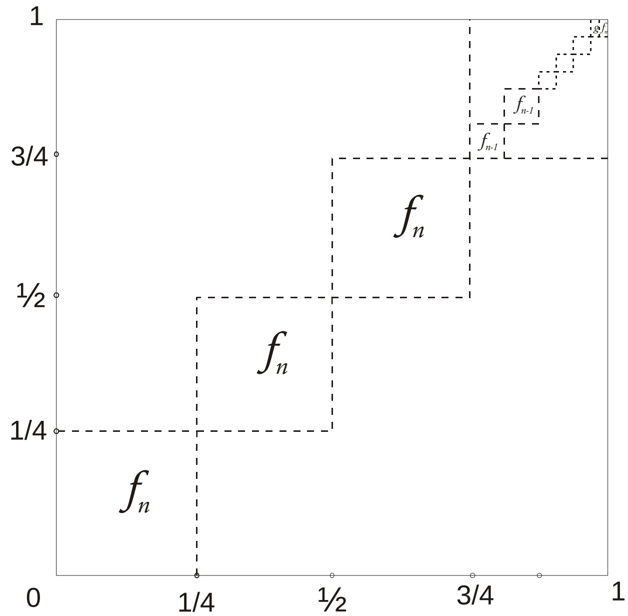


Figura 4.6: Función f_{n+1}

Definimos $M = \varprojlim \{I, f_n\}$.

Lo siguiente tiene como finalidad demostrar que M es 2-equivalente, hereditariamente descomponible y que no contiene arcos.

Proposición 4.2 *Hay una sucesión $K_0, K_1, K_2, \cdots$, de subcontinuos de M tales que:*

1) *Para cada $i \geq 0$, K_i es homeomorfo a M, y $K_i \cap K_{i+1}$ es degenerado. Además $\lim_{i\to\infty} [diam\,(K_i)] = 0$.*

2) $M = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} K_n}$

3) *$(1,1,1,\ldots) \in E = M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, cada punto de E es un punto límite de $M \setminus E$, y*

4) *$M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = E$ es homeomorfo a M.*

Demostración.

Sea $K_n = \{(a_1, a_2, \ldots) \in M : a_i \in [y_n, y_{n+1}]$ para casi toda $i \in \mathbb{N}\}$.

Notemos que $f_2([y_i, y_{i+1}]) = [y_i, y_{i+1}]$ para $i \in \{0, 1, 2\}$, que $f_3([y_i, y_{i+1}]) = [y_i, y_{i+1}]$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y en general que $f_n([y_i, y_{i+1}]) = [y_i, y_{i+1}]$ para $i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$.

Además, K_n es homeomorfo a M, ya que a partir de cierta $m(n) = m \in \mathbb{N}$ (de hecho $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, el mayor entero menor o igual que $\frac{n}{2}$), la función

$f_m|_{[\ y_n, y_{n+1}]} = \langle f_1 : [y_{n-1}, y_{n+1}] \to [y_{n-1}, y_{n+1}] \rangle$,

$f_{m+1}|_{[y_n, y_{n+1}]} = \langle f_2 : [y_{n-1}, y_{n+1}] \to [y_{n-1}, y_{n+1}] \rangle$,

$f_{m+2}|_{[y_n, y_{n+1}]} = \langle f_3 : [y_{n-1}, y_{n+1}] \to [y_{n-1}, y_{n+1}] \rangle$,

etc.

Así que $\left\{ K_n = \varprojlim [y_n, y_{n+1}], f_i|_{[y_n, y_{n+1}]}, i \geq m \right\} =$

$\varprojlim \{[y_n, y_{n+1}], \langle f_j : [y_n, y_{n+1}] \to [y_n, y_{n+1}] \rangle, j = 1, 2 \ldots\}$ que es homeomorfo a M.

Si $a = (a_1, a_2, \ldots) \in K_i \cap K_{i+1}$, entonces $a_n \geq y_{i+1}$ y $a_n \leq y_{i+1}$ para casi toda n, entonces $a_n = y_{i+1}$ para casi toda n. Así notamos que $K_0 \cap K_1 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots \right) \right\}$ el cual denotaremos por $\overline{y_1}$ pues todas sus coordenadas salvo la primera son y_1, $K_1 \cap K_2 = \left\{ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots \right) \right\} = \overline{y_2}$ y en general $K_{2n} \cap K_{2n+1} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, y_{2n+1}, y_{2n+1}, \ldots \right) \right\} = \{\overline{y_{2n+1}}\}$, donde y_{2n+1} aparece a partir de la coordenada $(n+1)$-ésima y para $n > 1$ $K_{2n-1} \cap K_{2n} = \{(1, 1, \ldots, 1, y_{2n}, y_{2n}, \ldots)\} = \{\overline{y_{2n}}\}$, con 1 en las primeras n coordenadas.

Veamos ahora que la sucesión de diámetros de las K_n converge a 0.

Dada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n+1}{2^n} < \varepsilon$,

Sean $a, b \in K_n$ entonces $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$, y existe $j \in \mathbb{N}$, $j > n$ tal que $a_i, b_i \in [y_n, y_{n+1}]$ para toda $i \geq j$. Como $a_j, b_j \in [y_n, y_{n+1}]$, entonces $a_k, b_k \in [y_n, 1]$, para toda $k < j$ y $|y_n - 1| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, entonces $|a_k - b_k| \leq$

$\frac{1}{2^n}$

y $d(a,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} + \frac{1}{2^n}$

Para $k < j$, $a_k, b_k \in [y_n, 1]$

así $d(a,b) \leq \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} < \varepsilon$.

y como a, b en K_n son arbitrarios,

el diámetro de K_n es menor que ε. $\qquad (*)$

2) Demostraremos ahora que $M = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i}$ y para esto, probaremos que si $E = M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ y $F = M \cap \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{3}{4}, 1\right] \times \left[\frac{7}{8}, 1\right] \times \cdots \times \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right] \times \cdots \right)$, entonces $E = F$ y con eso probaremos 2) y 3).

$F = M \cap ([y_2, 1] \times [y_3, 1] \times [y_5, 1] \times [y_7, 1] \times \cdots \times [y_{2n-1}, 1] \times \cdots)$,

Sea $a = (a_1, a_2, \ldots) \in F$. Es claro que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \in [y_n, y_{n+1}]$, para toda i, salvo un número finito, así que $a \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, por lo tanto, $a \in E$.

Tomemos ahora un elemento $a = (a_1, a_2 \ldots) \in E$.

Si $a_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $a_i \in [0, \frac{1}{4}]$ para toda $i \geq 2$, por lo tanto $a \in K_0$.

Esto prueba que $a_1 \notin [0, \frac{1}{2}]$, por lo tanto $a_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Si ocurriera que $a_2 \in [0, \frac{3}{4}]$. Entonces $a_2 \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Si $a_2 \in [0, \frac{1}{4}]$ entonces $a_i \in [0, \frac{1}{4}]$ para toda $i \geq 2$.

Si $a_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ entonces $a_i \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ para toda $i \geq 2$.

Si $a_2 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ entonces $a_i \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ para toda $i \geq 2$.

(Véanse los diagramas de las funciones f_1, f_2, f_3)

En cualquier caso $a \in K_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $a_2 \in [\frac{3}{4}, 1]$.

Para demostrar que $a_i \in [\frac{2^i-1}{2^i}, 1]$ para toda $i \geq 3$, el procedimiento es análogo al anterior. Por tanto $a \in F$. Hemos probado que $E = F$.

3) Es claro que $(1, 1, \ldots) \in E$. Ahora, para cada n sea $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} = y_{2n+1}$. Sean ahora $e = (e_1, e_2, \ldots) \in E$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Entonces existe $a_{n+1} \in [x_{n-1}, x_n]$ tal que $f_n(a_{n+1}) = e_n$, más precisamente, $f_n(a_{n+1}) = g^*(a_{n+1}) = e_n$ ($g^* = \langle g : [y_{2n-2}, y_{2n}] \to [y_{2n}, 1] \rangle$). Por la forma en que se eligió a_{n+1}, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1} \in [y_{2j-1}, y_{2j}]$. Continuamos eligiendo, para todo $m > n+1$, $a_m \in [y_{2j-1}, y_{2j}]$ de tal manera que $f_{m-1}(a_m) = a_{m-1}$, así $a = (e_1, e_2, \ldots, e_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \in K_{2j-1}$ y $d(e, a) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, lo cual prueba que $e \in \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n}$.

Así $E \subset \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n}$ y con ello quedan probados 2) y 3).

4) Mostraremos ahora que F es homeomorfo a M.

$F = M \cap \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [x_1, 1] \times [x_2, 1] \times \cdots \times [x_n, 1] \times \cdots\right)$. Puede verse fácilmente en los diagramas que

$f_2\left([x_2, 1]\right) = [x_1, 1]$

$f_3\left([x_3, 1]\right) = [x_2, 1]$

$\vdots$

$f_n\left([x_n, 1]\right) = [x_{n-1}, 1]$

$\vdots$

Así $F = \varprojlim \left\{[x_{n+1}, 1], \langle f_n : [x_{n+1}, 1] \to [x_n, 1]\rangle\right\}$ que es homeomorfo a M, y como $E = F$, entonces E es homeomorfo a M. $\blacksquare$

Proposición 4.3 *M es irreducible entre $(0, 0, ...)$ y cada punto de E.*

Demostración. Sea H un subcontinuo de M tal que $(0, 0, ...) \in H$ y $E \cap H \neq \emptyset$.

Sean π_n la n-ésima proyección de M sobre I y $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Como $E = M \cap \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [x_1, 1] \times [x_2, 1] \times \cdots \times [x_n, 1] \times \cdots\right)$, $\pi_n(E) = [x_{n-1}, 1]$ para toda n, $\pi_n(H)$ contiene al 0 y a x_{n-1}, así $\pi_n(H) \supseteq [0, x_{n-1}]$ para toda n y como $\pi_n = f_n \circ \pi_{n+1}$, tenemos que $1 \in \pi_n(H)$ para toda

n, así que $\pi_n(H)$ es un subcontinuo de I que contiene a 0 y a 1, entonces $\pi_n(H) = I$ para toda n. Por el Teorema 1.38, tenemos que $H = M$. Así M es irreducible entre $(0, 0, ...)$ y cada punto de E.

En particular M es irreducible entre $(0, 0, ...)$ y $(1, 1, ...)$. ■

De lo anterior se sigue el siguiente corolario:

Corolario 4.4 *K_n es irreducible entre $\overline{y_n}$ y $\overline{y_{n+1}}$.*

Demostración. Se sigue de que K_n es homeomorfo a M, con un homeomorfismo tal que $\overline{y_n}$ es la imagen de $(0, 0, ...)$ y $\overline{y_{n+1}}$ es la imagen de $(1, 1, \ldots)$.

■

Proposición 4.5 *Si H es un subcontinuo de M tal que $(0, 0, ...) \in H$ y $H \cap K_n \neq \emptyset$. Entonces $K_{n-1} \subseteq H$.*

Demostración. Sea $H = \varprojlim \left([0, a_i], f_j|_{[0,a_i]}\right)$, como $H \cap K_n \neq \emptyset$, se tiene que $a_i \geq y_n$ para $i \geq i_0$. Así tenemos que si $(s_1, s_2, \ldots) \in K_{n-1}$, entonces $s_i \in [y_{n-1}, y_n]$, a partir de cierta i_1, entonces para toda $i \geq \max\{i_0, i_1\}$ $s_i \in [0, a_i]$. Es decir $K_{n-1} \subseteq H$. ■

Proposición 4.6 *El continuo $K_m \cup K_{m+1}$ es homeomorfo a M.*

Demostración. Para cada $i \geq 0$ hay un homeomorfismo $\varphi_i : K_i \to K_{i+1}$ tal que $\varphi_i(\overline{y_i}) = \overline{y_{i+1}}$ y $\varphi_i(\overline{y_{i+1}}) = \overline{y_{i+2}}$.

Sea $\varphi : M \setminus E \to [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, ...)\}] \setminus E$

definida por $\varphi(\overline{x}) = \varphi_i(\overline{x})$ si $\overline{x} \in K_i$. Claramente φ está bien definida, es uno a uno, sobre y continua,

y la inversa:

$\varphi^{-1} : [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, \ldots)\}] \setminus E \to M \setminus E$

definida por $\varphi^{-1}(\overline{x}) = \varphi_i^{-1}(\overline{x})$ si $\overline{x} \in K_{i+1}$ está bien definida. Como φ_i es un homeomorfismo, entonces φ^{-1} es continua.

Sea $\overline{\varphi} : M \to [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, ...)\}]$

definida por:

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) \ \text{ si } x \in M \setminus E \\ \\ x \text{ si } x \in E \end{cases}$$

Como $M \setminus E$ es abierto y φ es continua, $\overline{\varphi}$ es continua en cada punto de $M \setminus E$. Bastará demostrar que $\overline{\varphi}$ es continua en $\overline{M \setminus E}$. Sea $x \in E$, y sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus E$, una sucesión que converge a x, entonces $r_n \in K_{j_n}$ y no hay una infinidad de elementos de la sucesión que estén contenidos en un solo K_j, pues como K_j es cerrado, el límite de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ estaría en K_j lo que contradice que $K_j \cap E = \emptyset$.

Nótese que $\lim\limits_{n\to\infty} diám\,(K_n \cup K_{n+1}) = 0$, pues $\lim\limits_{n\to\infty} diám\,(K_n) = 0$ y $K_n \cap K_{n+1} \neq \emptyset$ para cada n.

Análogamente para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} diám \left(\bigcup\limits_{i=n}^{n+k} K_i \right) = 0$.

Así que, elijamos $b_n \in K_{j_n+1}$ tal que $b_n \to x$, con lo que $d(b_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, $\varphi(r_n)$ y b_n están contenidos ambos en K_{j_n+1}.

Así, $d(\overline{\varphi}(r_n), \overline{\varphi}(x)) = d(\varphi(r_n), x) \leq d(\varphi(r_n), b_n) + d(b_n, x) < \varepsilon$.

Lo cual implica que $\overline{\varphi}(r_n)$ converge a $\overline{\varphi}(x)$. Así $\overline{\varphi}$ es continua en x. Ahora, como K_m es homeomorfo a M y M es homeomorfo a K_0 (por la Proposición 4.2). Además de que K_{m+1} es homeomorfo a M y M es homeomorfo a $\left[(M \setminus K_0) \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, y_1, \ldots\right)\right\}\right]$ y $M = K_0 \cup \left[(M \setminus K_0) \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, y_1, \ldots\right)\right\}\right]$.

Entonces $K_m \cup K_{m+1}$ es homeomorfo a $K_0 \cup \left[(M \setminus K_0) \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, y_1, \ldots\right)\right\}\right] = M$. Bajo un homeomorfismo que manda $\overline{y_m}$ en $(0, 0, \ldots)$, $\overline{y_{m+1}}$ en $\overline{y_1}$ y $\overline{y_{m+2}}$ en $(1, 1, \ldots)$. ■

Obtenemos ahora fácilmente los siguientes corolarios.

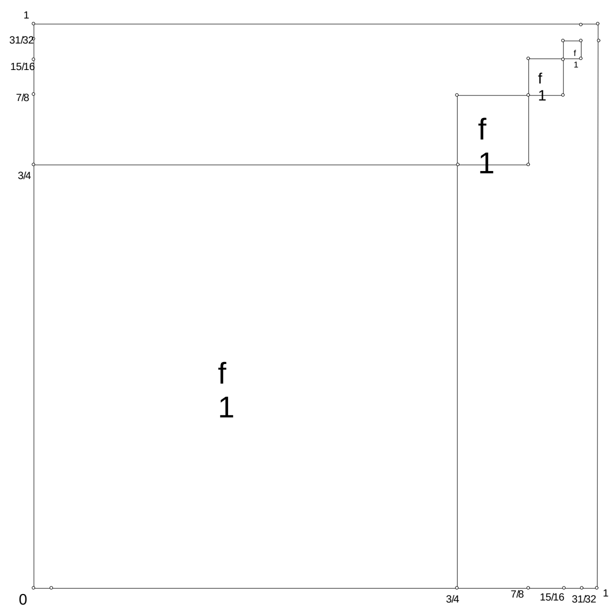
Corolario 4.7 *Si $m < n$, $\bigcup\limits_{i=m}^{i=n} K_i$ es homeomorfo a M.*

Corolario 4.8 *Si $m \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} K_i \cup E$ es homeomorfo a M.*

Construiremos ahora un continuo N que no es un arco, y que satisface que todo subcontinuo de M es homeomorfo, o bien a N o bien a M. Con *eso se probará que M es 2-equivalente y no contiene arcos.*

Llamaremos $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \geq 1$ y $x_0 = 0$.

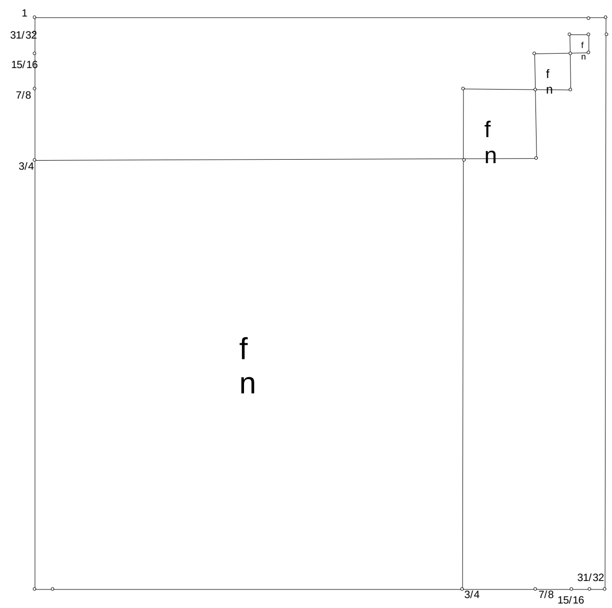
Sea $N = \varprojlim \{ I, h_n \}$, donde h_n es como en los siguientes diagramas



.

.

.



Donde f_n denota la gráfica de la función f_n (las funciones con las cuales se definió M, véase págs. 78-85).

Puede verse de los diagramas que el continuo $S_0 = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{3}{4}\right], h_j|_{\left[0,\frac{3}{4}\right]} \right\} = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{3}{4}\right], \left\langle f_j : \left[0, \frac{3}{4}\right] \to \left[0, \frac{3}{4}\right] \right\rangle \right\}$ es homeomorfo a M.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, el continuo $S_n = \varprojlim \left\{ [x_n, x_{n+1}], h_j|_{[x_n, x_{n+1}]} \right\} = \varprojlim \{[x_n, x_{n+1}], \langle f_j : [x_n, x_{n+1}] \to [x_n, x_{n+1}] \rangle\}$ es homeomorfo a M.

Además $S_n \subseteq N$, lo cual demuestra que N no es un arco.

Claramente $S_{n-1} \cap S_n = \{(x_n, x_n, \ldots) = \overline{x_n}\}$.

Además $\left\{\overline{1}\right\} = \{(1, 1, \ldots)\} = N \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ ya que $\overline{1} \notin S_n$, para toda n. Así $\left\{\overline{1}\right\} \subset N \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$.

Y si $\overline{r} = (r_1, r_2, \ldots) \notin S_n$ para toda n. Se tiene que $r_j > x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ para toda j, y para toda n.

Es decir $r_j \geq 1$. Entonces $r_j = 1$ para toda j.

Además, dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > \frac{1}{2^{n+1}}$, para $n \geq N$, así $\left|(1) - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| = |(1) - x_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$.

Entonces si $\overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots) \in S_n$ con $s_j \in [x_n, x_{n+1}]$ tenemos que la distancia entre $\overline{s}$ y $\overline{1}$ es menor que ε.

Así $\overline{1} \in \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n}$.

Proposición 4.9 *N es irreducible entre $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$, pero no es irreducible entre $(0,0,\ldots)$ y otro punto distinto de $(1,1,\ldots)$.*

Demostración. Es claro que N es irreducible entre $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$ pues si un subcontinuo H de N contiene a $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$ entonces la proyección $\pi_n(H) = [0,1]$. Así por el Teorema 1.38, tenemos que $H = \varprojlim \left\{\pi_n(H), h_i|_{\pi_{n+1}(H)}\right\} = \varprojlim \left\{[0,1], h_i|_{[0,1]}\right\} = N$.

Ahora si N es irreducible entre $(0,0,\ldots)$ y b, con $b = (b_1, b_2, \ldots)$, entonces para toda i, $b_i > 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ para toda n, pues de lo contrario, como $h_k\left(\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]\right) = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ para toda $k > 1$, entonces $(1,1,\ldots)$ no estaría en N.

Así, tenemos que N es irreducible entre $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$, pero no es irreducible entre $(0,0,\ldots)$ y otro punto $b \neq (1,1,\ldots)$. Ahora mostraremos que si H es un subcontinuo de N irreducible entre a y b, con $a = (a_1, a_2, \ldots)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots)$, y $a \neq (0,0,\ldots)$, entonces H es un subcontinuo propio. Es claro que a partir de alguna i, $a_i < b_i$ o $a_i > b_i$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_i < b_i$. Entonces para toda i, $b_i > 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ para toda n, es decir $b = (1,1,\ldots)$. Ahora las proyecciones $\pi_j(H) = [a_j, 1]$. Primero, recordemos que como se definieron las funciones f_n 's, para toda k, $f_{k+1}\left(\left[0, \frac{1}{4^k}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4^k}\right]$ pues

$f_{k+1} \mid_{\left[0, \frac{1}{4}\right]} = \left\langle f_k : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\rangle$,

$f_{k+1} \mid_{\left[0, \frac{1}{4^2}\right]} = \left\langle f_k : \left[0, \frac{1}{4^2}\right] \to \left[0, \frac{1}{4^2}\right] \right\rangle$,

$\vdots$

$f_{k+1} \mid_{\left[0, \frac{1}{4^k}\right]} = \left\langle f_k : \left[0, \frac{1}{4^k}\right] \to \left[0, \frac{1}{4^k}\right] \right\rangle$.

además, $f_r\left(\left[0, \frac{1}{4^k}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4^k}\right]$ para toda $r > k$.

Como $a \neq (0,0,\ldots)$, entonces existe alguna i tal que $a_i > 0$, por ello existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i > \frac{3}{4^n}$, a partir de la definición de la función h_{n+1} tenemos que

$h_{n+1} \mid_{\left[0, \frac{1}{4^n}\right]} = \left\langle f_n : \left[0, \frac{1}{4^n}\right] \to \left[0, \frac{1}{4^n}\right] \right\rangle$, y con ello $h_r\left(\left[0, \frac{1}{4^n}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4^n}\right]$ para toda $r > n$, es decir los puntos de $(s_1, s_2, \ldots) \in N$ tales que $a_r < \frac{3}{4^n}$ para $r > i$

no están en H, por ejemplo el $(0,0,\ldots) \notin H$. Con lo cual queda demostrado que N es irreducible sólo entre $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$. ■

Corolario 4.10 *M no es homeomorfo a N.*

Así tenemos a N como un continuo irreducible sólo entre $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$ que es la unión de subcontinuos homeomorfos a M y cuyos diámetros convergen a 0, con límite un punto $\{(1,1,\ldots)\}$.

Proposición 4.11 *Todo subcontinuo no degenerado de M es, o bien homeomorfo a N, o bien homeomorfo a M. En particular N es homeomorfo a un subcontinuo de M.*

Demostración. Sea H un subcontinuo propio, no degenerado de M.

Caso 1: H contiene a $(0,0,0,\ldots)$.

Como M es irreducible de $(0,0,\ldots)$ a cada punto de E, entonces H no contiene puntos de E. Entonces, como $H \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$, exite $n \in \mathbb{N}$, tal que $H \cap K_n \neq \emptyset$ y $H \not\subseteq \bigcup_{j=0}^{n-1} K_j$.

Si $H \cap K_n = \{\overline{y_n}\}$, entonces por la Proposición 4.5 $H = K_0 \cup \cdots \cup K_{n-1}$ y con ello tenemos que H es homeomorfo a M, por el Corolario 4.7.

De lo contrario, sea $H_0 = K_0 \cup \cdots \cup K_{n-1}$, si $n > 0$ (así H_0 es homeomorfo a M) y $H_0 = \emptyset$ si $n = 0$. Entonces $H = H_0 \cup (H \cap K_n)$ y $H \cap K_n$ es un subconjunto propio de K_n que contiene a $\overline{y_n}$.

Ahora como K_n es homeomorfo a M, por la Proposición 4.2, $K_n = K_{n_0} \cup K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup ... \cup K_{n_E}$

con K_{n_j} homeomorfo a M y $K_{n_E} = K_n \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} K_{n_j}$, también homeomorfo a M.

Es claro que el diámetro de cada K_{n_j} es menor que $\frac{1}{4}$.

Recordemos que $\overline{y_n}$ es la imagen de $(0, 0, \ldots)$ bajo el homeomorfismo de M sobre K_n. Repitiendo el procedimiento anterior, con K_n en lugar de M y $H \cap K_n$ en lugar de H, obtenemos un entero $n_{0,1}$ tal que: ó bien

$i)$ $H \cap K_n = H_1$, donde $H_1 = K_{n_0} \cup K_{n_1} \cup ... \cup K_{n_{0,1}}$ ó

$ii)$ $H \cap K_n = H_1 \cup \left(H \cap K_{n_{0,1}}\right)$

En $i)$ $H = H_0 \cup H_1$ y por ello H es homeomorfo a M por el Corolario 4.7.

En $ii)$ continuamos el mismo procedimiento con $K_{n_{0,1}}$ en lugar de K_n o M.

Entonces, ó bien terminamos después de un número finito de pasos y obtenemos que,

$H = H_0 \cup H_1 \cup ... \cup H_{r-1} \cup K_{n_r}$, y así H es homeomorfo a M, pues cada H_i y K_{n_r} son homeomorfos a M.

O bien obtenemos que $H = \overline{H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \ldots}$ con cada H_i homeomorfo a M.

Nótese que para cada $n > 0$ $diam\,(H_{n+1}) \leq \frac{diam(H_n)}{2}$, y con ello obtenemos que H es la cerradura una unión numerable de subcontinuos homeomorfos a M, cuya sucesión de diámetros converge a cero y la intersección de dos consecutivos es un punto, pero $H_i \cap H_j = \emptyset$, si $|i - j| > 1$.

Sean $h_0 = (0, 0, \ldots)$, $h_1 = \overline{y_n}$ el único elemento de $H_0 \cap H_1$, $h_i = \overline{y_{n_i}}$ el único elemento de $H_{i-1} \cap H_i$, para toda $i > 1$, observamos que $y_{n_i} > y_{n_j}$ si $i > j$. Entonces $\{y_{n_i}\}_{i=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ es una sucesión creciente, lo que implica que existe y límite de la sucesión. Sea $h = (y, y, \ldots)$, entonces h es el límite de $\{h_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Con lo anterior, tenemos que $h \in H = \overline{\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} H_j}$, ahora, si $r = (r_1, r_2, \ldots) \notin H_i$, para toda i, se tiene que $r_j > y_{n_i}$ para toda i y para toda j. Es decir $r_j \geq y$, entonces $r_j = y$ para toda j. Por lo tanto $\{h\} = H \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} H_j$.

Recordemos que $N = \overline{\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n \cup \{(1, 1, \ldots)\}$, con cada S_n homeomorfo a M. Ahora, $H = \overline{\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} H_j} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n \cup \{(y, y, \ldots)\}$, con cada H_n homeomorfo a M. Entonces existen homeormofismos $\phi_0 : S_0 \to H_0$, $\phi_n : S_n \to H_n$.

Por ello podemos extender la unión de las ϕ_i a un homeomorfismo $\phi : N \to H$, definido por

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_n(x) \text{ si } x \in S_n \\ h \text{ si } x = (1, 1, \ldots) \end{cases}$$

Es claro que ϕ es uno a uno y sobre, además de ser continua en $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. Pero, también es continua en $(1, 1, \ldots)$, pues si hay una sucesión $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n}$ que converge a $(1, 1, \ldots)$, entonces $\{\phi(t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión contenida en $H = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} H_j}$ que converge a h.

Así tenemos que H es homeomorfo a el continuo N.

Caso 2: H contiene a $(1, 1, 1, \ldots)$.

Supongamos primero que H contiene a E.

Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que H no contiene a $\overline{y_n}$ y $H \cap K_n \neq \emptyset$.

Si $H \cap K_n = \overline{y_{n+1}}$, entonces H es homeomorfo a M. Pues $H = \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} K_j \right) \cup E$,

de lo contrario, definimos $H_1 = \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} K_j \right) \cup E$, así $H = H_1 \cup (H \cap K_n)$, y $H \cap K_n$ es un subconjunto propio de K_n.

Como K_n es homeomorfo a M, por la Proposición 4.2,

$K_n = K_{n_0} \cup K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup ... \cup K_{n_E}$ con K_{n_j} homeomorfo a M y $K_{n_E} = K_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} K_{n_j}$ también homeomorfo a M.

Continuando con este proceso, como en el Caso 1 obtenemos:

$i)$ que nuestro proceso termina después de un número finito de pasos y H es homeomorfo a un conjunto finito de copias de M unidas extremo a extremo. Entonces por el Corolario 4.7, H es homeomorfo a M o

$ii)$ este proceso continúa y obtenemos que H es la cerradura de la unión de una sucesión infinita de continuos homeomorfos a M unidos extremo a extremo cuya sucesión de diámetros converge a 0, que contiene a E.

Es decir, $H = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)}$, con $E \subset H_1$ y cada H_i homeomorfo a M.

Lo cual es homeomorfo a M, pues podemos ver a M como:

$M = K_0 \cup \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right)}$. Sea $A_1 = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right)}$, así $M = K_0 \cup A_1$, con K_0 y A_1 homeomorfos a M. Además $K_0 = K_0^2 \cup \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^2\right)}$. Sea $A_2 = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^2\right)}$, así $M = K_0^2 \cup A_2 \cup A_1$, con K_0^2 y A_2 homeomorfos a M. Además $K_0^2 = K_0^3 \cup \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^3\right)}$. Sea $A_3 = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^3\right)}$, así $M = K_0^3 \cup A_3 \cup A_2 \cup A_1$, con K_0^3 y A_3 homeomorfos a M. Continuando con este proceso, obtenemos que $M = \{(0, 0, \ldots)\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)}$ que es homeomorfo a $\overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)} = H$.

En ambos casos H es homeomorfo a M.

Con esto, si H es un subcontinuo propio de M que contiene a $(1,1,\ldots)$, H es homeomorfo a M.

Ahora, si H no contiene a E, como E es homeomorfo a M, denotaríamos por $E_1 = M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, $E_2 = E_1 \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_{1,i}$, con $K_{1,i}$ homeomorfos a M, etc.

Entonces $\bigcap_{n\geq 1} E_n = (1,1,\ldots)$ y como H es no degenerado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H \subseteq E_k$ y $H \cap E_{k-1} = \emptyset$. Así, $E_{k+1} \subseteq H \subseteq E_k$ y E_k es homeomorfo a M. Con lo cual tenemos que H es homeomorfo a M.

Caso 3: Por último, sea H un subcontinuo propio no degenerado de M;

Por la Proposición 4.2. Podemos ver a M como $\overline{\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j\right)}$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que H no es un subconjunto de K_i para toda $i \geq 0$, pues en ese caso, como K_i es homeomorfo a M, usamos la Proposición 4.2 para K_i en lugar de M y como H es no degenerado, después de un número finito de pasos obtendríamos que H no es un subconjunto de un elemento de las K_{i_n}.

Sea $x = \overline{y_n}$ un punto de H. Entonces

$$H = \left[H \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)\right] \cup \left[H \cap \overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}\right]$$

donde $\left[H \cap \overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}\right]$ es un subcontinuo propio que contiene a x. Con $\overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}$ homeomorfo a M, así estamos en el caso 1, por ello $\left[H \cap \overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}\right]$ es homeomorfo a M o a N.

y $\left[H \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)\right]$ es un subcontinuo propio que contiene a x, y como $\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)$ es homeomorfo a M, tenemos que x está en el subconjunto de irreducibilidad de $\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)$, por ello $\left[H \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)\right]$ es homeomorfo a M. Con lo cual tenemos que H es la unión de dos subcontinuos unidos en un punto, uno homeomorfo a M y el otro a N, y en este caso tenemos que H es homeomorfo a N o tenemos que H es la unión de dos subcontinuos homeomorfos a M, y por ello H es homeomorfo a M.

Entonces H es homeomorfo a M o a N.

Esto completa nuestro argumento de que M contiene únicamente 2 subcontinuos topológicamente diferentes. ■

Proposición 4.12 *M es hereditariamente descomponible.*

Demostración. Como $M = K_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)$, entonces M es descomponible. Y como $N = S_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)$, se tiene que M es hereditariamente descomponible ya que, por la proposición 4.11 sus únicos subcontinuos son homeomorfos a M o a N. ■

Proposición 4.13 *M es encadenable.*

Demostración. Como M es hereditariamente descomponible y también es hereditariamente irreducible, entonces es hereditariamente unicoherente, por el Corolario 1.34, y por el Teorema 1.33, M es encadenable. ■

También se puede ver que es encadenable, observando que es límite inverso de arcos. ([27, Teorema 12.19, pág. 246] y [27, Teorema 12.11, pág. 235]. Límite inverso de arcos es encadenable).

Ahora como M no es un arco y como N contiene continuos homeomorfos a M, entonces N no es un arco.

Así M no contiene arcos.

4.2. NO PROPIEDAD DE KELLEY

Recordemos que por la Proposición 4.2, hay una sucesión $K_0, K_1, K_2, \ldots$ de subcontinuos de M tales que:

1) $M = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} K_n}$

2) $(1,1,\ldots) \in E = M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, *cada punto de* E *es un punto límite de* $M \setminus E$, *y*

3) $M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = E$ *es homeomorfo a* M.

4) *Para cada* $i \geq 0$, K_i *es homeomorfo a* M, *y* $K_i \cap K_{i+1} = \{\overline{y_{i+1}}\}$ *es degenerado. Además* $\lim_{i\to\infty} [diam\,(K_i)] = 0$.

con $\overline{y_{2n+1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, y_{2n+1}, y_{2n+1}, \ldots\right)$, donde y_{2n+1} aparece a partir de la coordenada $(n+1)$-ésima

y para $n > 1$ $\overline{y_{2n}} = (1, 1, \ldots, 1, y_{2n}, y_{2n}, \ldots)$, con 1 en la primeras n coordenadas.

Donde $\{y_0, y_1, \ldots\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{7}{8}, \frac{29}{32}, \frac{15}{16}, \ldots\right\}$

es decir $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{2}$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $y_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$, $y_{2n} = 1 - \frac{3}{2^{n+2}}$.

Veamos que M no tiene la propiedad de Kelly en el punto $\overline{y_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, es decir en la intersección $K_0 \cap K_1$.

Como los continuos K_0 y K_1 son homeromorfos a M, a éstos les podemos aplicar la Proposición 4.2, entonces, hay una sucesión $K_0^r, K_1^r, K_2^r, \ldots$ de subcontinuos de K_r tales que:

1) $K_r = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i^r}$

2) $\frac{r+1}{4}(1,1,\ldots) \in E^r = K_r \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i^r$, *cada punto de* E^r *es un punto límite de* $K_r \setminus E^r$, *y*

3) $K_r \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i^r = E^r$ *es homeomorfo a* K_r.

4) *Para cada* $i \geq 0$, K_i^r *es homeomorfo a* K_r, *y* $K_i^r \cap K_{i+1}^r$ *es degenerado. Además* $\lim_{i\to\infty} [diam\,(K_i^r)] = 0$.

con $(y_0^r, y_1^r, \ldots) = \left(\frac{r}{4} + \frac{y_0}{4}, \frac{r}{4} + \frac{y_1}{4}, \ldots\right)$.

Sean $p = \overline{y_1}$ y A el subcontinuo K_0^1 que contiene a p.

Sea $z_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{2^{n+2}}\right)$

es decir $z_n = y_{2n}^0 = \frac{1}{4} y_{2n}$.

También ocuparemos que $K_0 = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{1}{4}\right], f_i \mid_{\left[0,\frac{1}{4}\right]}, i > 2 \right\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $q^n = \left(\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}}_{\text{n-1 términos}}, z_n, z_n, \ldots \right)$ observe que q^n si es un punto en M, refiriéndonos a la construcción de M cumple que $f_{n-1}(y_{2n}) = 1$ y por lo tanto $f_n(z_n) = \frac{1}{4}$ (Ver la definición de f_n).

y $A = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right], f_i \mid_{\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right]}, i > 2 \right\}$

Con lo que tenemos que $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p.

Mostraremos que no hay una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, de subcontinuos de M que converge a A y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $q^n \in A_n$.

Supongamos que sí existe tal sucesión.

Sea $A_n = \varprojlim \left\{ [a_i^n, b_i^n], f_i \mid_{\left[a_{i+1}^n, b_{i+1}^n\right]}, i > 2 \right\}$.

Primero probaremos que si $A_n \cap A \neq \emptyset$, entonces $p \in A_n$.

Asumamos que $A_n \cap A \neq \emptyset$, y supongamos que $p \notin A_n$, entonces para alguna i, la coordenada i-ésima de p, $p_i = \frac{1}{4} \notin [a_i^n, b_i^n]$

y como $q_i^n \in [a_i^n, b_i^n]$, y $q_i^n \leq \frac{1}{4}$, se tiene que $b_i^n < \frac{1}{4}$.

así $b_j^n < \frac{1}{4}$ para toda $j \geq i$,

lo cual contradice que $A_n \cap A \neq \emptyset$.

Entonces $p \in A_n$.

A continuación probaremos que si A_n contiene a q^n y a p, debe contener a E^0.

1) Por el Corolario 4.8, observamos que para cualquier $t \in \mathbb{N}$, $\left(\bigcup_{i=t}^{\infty} K_i^0\right) \cup E^0$ es homeomorfo a M.

2) Observamos también que como K_0 es homeomorfo a M, podemos aplicar la proposición 4.2 a K_0.

Así se tiene que:

$K_i^0 = \left\{(x_1, x_2, \ldots) \in M \mid x_r \in \left[y_i^0, y_{i+1}^0\right], \forall\ i \text{ salvo un número finito}\right\}$.

$K_i^0 \cap K_{i+1}^0 = \left\{\overline{y_{i+1}^0}\right\}$, donde $\overline{y_{i+1}^0}$ es el punto en el límite inverso tal que todas sus coordenadas son y_{i+1}^0 salvo un número finito (que es $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, es decir, el mayor entero menor o igual que $\frac{n+1}{2}$)

y obtenemos que $\overline{y_{2i}^0}$ coincide con q^i,

3) Por 1) y la proposición 4.3, para cualquier $t \in \mathbb{N}$, $\left(\bigcup_{i=t}^{\infty} K_i^0\right) \cup E_0$ es irreducible entre $\overline{y_t^0}$ y p.

4) Por la Proposición 4.5 y usando 1), 2) y 3) tendremos que:

Como $q^n \in K_{2n}^0$ y $p \in E^0$, se tiene que $A_n \cap \left(\bigcup_{i=2n}^{\infty} K_i^0\right) \neq \emptyset$ y $A_n \cap E^0 \neq \emptyset$, por lo que A_n debe contener a $\bigcup_{i=2n+1}^{\infty} K_i^0$ y por lo tanto a E^0.

Así, $E^0 \subset \lim A_n = A$, lo cual es una contradicción, pues por las definiciones de E^0 y A, éstos son dos conjuntos no degenerados que sólo se intersectan en el punto p.

Probaremos que si $A_n \cap A = \emptyset$ para una infinidad de $n's$ entonces $A_n \subset K_0$ para una infinidad de $n's$.

Así que supongamos que $A_n \cap A = \emptyset$ y que $A_n \nsubseteq K_0$.

Como $A_n = \varprojlim \left\{ [a_i^n, b_i^n], f_i \mid_{[a_{i+1}^n, b_{i+1}^n]}, i > 2 \right\}$.

Sea $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ tal que $\overline{x} \in A_n \setminus (K_0 \cup A)$ lo cual implica que existe r_0 tal que $x_r > \frac{5}{16}$ para toda $r > r_0$.

Lo cual quiere decir que podemos ver a A_n como la unión de dos conjuntos ajenos. $(A_n \cap K_0) \cup \left(A_n \cap \overline{\bigcup_{i=2}^{\infty} K_i} \right)$, lo cual es una contradicción.

Así que si $A_n \cap A = \emptyset$ entonces $A_n \subset K_0$ y se obtiene lo deseado.

Ahora, si $A_n \subset K_0$ para una infinidad de $n's$, $\lim A_n \subset K_0$ y por lo tanto $A \subset K_0$. Lo cual es una contradicción, pues por las definiciones de K_0 y A, éstos son dos conjuntos no degenerados que sólo se intersectan en p.

Corolario 4.14 *M no tiene la propiedad de Kelley.*

Capítulo 5

FAMILIAS DE EJEMPLOS.

En este capítulo mostraremos dos familias, la primera, una familia no numerable de continuos 2-equivalentes, que son la cerradura de una rayo topológico con residuo homeomorfo al total e incomparables bajo funciones continuas. La segunda, una cantidad no numerable de abanicos aplanables, incomparables bajo funciones continuas. Aunque estos abanicos no tienen relación con los continuos 2-equivalentes, incluimos aquí su construcción por su similaridad con la construcción de los continuos de la primera familia.

5.1. FAMILIA DE 2-EQUIVALENTES.

Awartani en [1], construye una familia no numerable de continuos encadenables, mutuamente incomparables bajo funciones continuas y suprayectivas; que son la cerradura de un rayo topológico con residuo un arco. Estos continuos se conocen como Continuos de Elsa. Con el fin de obtener los ejemplos deseados, generalizaremos los Continuos de Elsa con la ayuda de límites inversos.

En la sección 1, recordaremos la construcción de los continuos de Elsa dados por Awartani [1], de hecho **los modificamos** para poder construir los ejemplos deseados. En la segunda sección, describiremos los espacios factores con los que construiremos los ejemplos; por último damos los ejemplos, junto con sus propiedades. En particular mostraremos que hay una cantidad no numerable de este tipo de continuos.

5.1.1. Ejemplos de Awartani

Para describir los ejemplos de Awartani, usaremos los siguientes resultados que aparecen en [1]

Definición 5.1 $2^{\mathbb{N}}$ *denotará el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos, si* $\{a_i\}, \{b_i\}$ *son dos elementos en* $2^{\mathbb{N}}$.

diremos que $\{a_i\}$ ***domina verticalmente a*** $\{b_i\}$ *si* $a_i \geq b_i$ *eventualmente (es decir, existe* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $a_i \geq b_i$ *para toda* $i > n$*)*

$\{a_i\}$ ***domina a*** $\{b_i\}$ *si existe un entero* j_0 *tal que* $a_i \geq b_{i+j_0}$ *eventualmente*

$\{a_i\}$ *y* $\{b_i\}$ *son llamados* ***incomparables*** *si ninguno de ellos domina al otro.*

Lema 5.2 $2^{\mathbb{N}}$ *contiene una cantidad no numerable de elementos ninguno de los cuales es eventualmente constante y ninguno de ellos domina a otro.*

A cada $\alpha = \{\alpha_i\} \in 2^{\mathbb{N}}$, le asociaremos un ejemplo de Awartani E_α (como en la figura 1), que es una compactación del rayo R_α con un arco K_α como residuo. Ahora describiremos R_α, como la gráfica de una función $f_\alpha : (0,1] \to (0,1]$ lineal a pedazos, con $\left(1, \frac{1}{4}\right) = a_1$ su punto extremo. Nos referiremos a cada punto en R_α por su primera coordenada. Si a y b son dos puntos en R_α, entonces $[a,b]$ denota el subarco en R_α de a a b.

Sean m_α y M_α los conjuntos de mínimos y de máximos respecto a la segunda coordenada de R_α y sea $V_\alpha = m_\alpha \cup M_\alpha$.

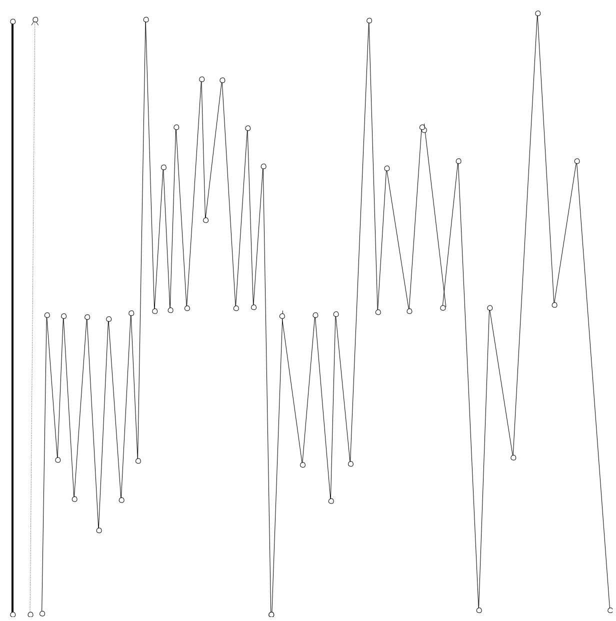


Figura 5.1: E_α

Definición de R_α

Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones en $(0,1]$ tales que $\lim x_i = 0 = \lim y_i$ y para cada i, $y_{i+1} < x_{i+1} < y_i < x_i$.

Así, obtenemos R_α como la unión de los siguientes dos tipos de subarcos, $[x_i, y_i]$ y $[y_i, x_{i+1}]$, de tal manera que;:

1. Si $\alpha_i = 0$ entonces:

    a) $|[x_i, y_i] \cap M_\alpha| = 2i$ y $|[x_i, y_i] \cap m_\alpha| = 2i - 1$.

    b) Si $\{M_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos de el conjunto $[x_i, y_i] \cap M_\alpha$ entonces $\pi_2(M_{i,2i}) = 1$ y $\pi_2(M_{i,j}) = \pi_2(M_{i,2i-j}) = \frac{j+2}{j+3}$, $1 \leq j \leq i$.

    c) $\pi_2([x_i, y_i] \cap m_\alpha) = \frac{1}{2}$.

2. Si $\alpha_i = 1$ entonces:

    a) $|[x_i, y_i] \cap M_\alpha| = 2i + 1$ y $|[x_i, y_i] \cap m_\alpha| = 2i$.

    b) Si $\{M_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i+1\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos del conjunto $[x_i, y_i] \cap M_\alpha$ entonces $\pi_2(M_{i,2i+1}) = 1$ y $\pi_2(M_{i,j}) = \pi_2(M_{i,2i+1-j}) = \frac{j+2}{j+3}$, $1 \leq j \leq i$.

c) Si $\{m_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos de el conjunto $[x_i, y_i] \cap m_\alpha$ entonces $\pi_2(m_{i,j}) = \frac{2}{3}$ parar $i = j$ y $\pi_2(m_{i,j}) = \frac{1}{2}$ para $i \neq j$.

3. Para cada $i \in \mathbb{N}$:

a) $|[x_i, y_i] \cap M_\alpha| = 2i - 1$ y $|[x_i, y_i] \cap m_\alpha| = 2i$.

b) $\pi_2([x_i, y_i] \cap M_\alpha) = \frac{1}{2}$.

c) Si $\{m_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos de el conjunto $[x_i, y_i] \cap m_\alpha$ entonces $\pi_2(m_{i,2i}) = \frac{1}{2^i}$ y $\pi_2(m_{i,j}) = \pi_2(m_{i,2i-j}) = 1 - \frac{j+2}{j+3}$, $1 \leq j \leq i$.

Sean $a_i = m_{i,2i}$, y $b_i = \begin{cases} M_{i,2i} & \text{si } \alpha_i = 0 \\ M_{i,2i+1} & \text{si } \alpha_i = 1 \end{cases}$

Es decir, b_i y a_i son puntos en R_α tal que su segunda coordenada es uno y $\frac{1}{2^i}$ respectivamente.

De esta manera, describimos al continuo E_α como la unión de un rayo R_α con un arco K_α. Donde cada elemento de R_α es de la forma $(x_1, f_\alpha(x_1))$ y $K_\alpha = \{(0, x_2) : x_2 \in [0, 1]\}$.

5.1.2. Espacios Factores

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I^n = [0,1]^n \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$ un subconjunto del cubo de Hilbert. Para simplificar la notación, nos referiremos a I^1 como $[0,1]$ y en general a I^n como el n-ésimo producto de intervalos. Obsérvese que $I^n \subset I^{n+1}$.

Comenzaremos con el primer espacio factor, que será un arco, el segundo espacio factor lo definiremos como un ejemplo de Awartani, es decir, la cerradura de un rayo topológico con residuo un arco; el tercer espacio factor será la cerradura de un rayo topológico con residuo el segundo espacio factor. Inductivamente el espacio factor $(n+1)$-ésimo será la cerradura de un rayo topológico con residuo un continuo homeomorfo al n-ésimo espacio factor.

Si $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, definimos $X_1^\alpha = I^1$, $X_2^\alpha = E_\alpha$ el continuo de Awartani asociado a α. Obsérvese que X_2^α es la unión de un rayo topológico $R_1^{\alpha,2}$ con residuo un arco K_2^α. Como $R_1^{\alpha,2}$ es la imagen del intervalo $(0,1]$, cada punto en $R_1^{\alpha,2}$ es de la forma $(x_1, f_\alpha(x_1))$, donde $f_\alpha : (0,1] \to (0,1]$ es el homeomorfismo con el que se define el rayo del ejemplo de Awartani. Cada punto en K_2^α es de la forma $(0, x_2) \in I^2$, con $x_2 \in [0,1]$. De lo anterior tenemos que

$$X_2^\alpha = \{(x_1, x_2) \in I^2 : x_2 = f_\alpha(x_1) \text{ con } x_1 \in (0,1]\} \cup \{(0, x_2) \in I^2 : x_2 \in I_1\}.$$

Continuando de esta manera, tenemos que $X_3^\alpha = R_1^{\alpha,3} \cup R_2^{\alpha,3} \cup K_3^\alpha$ donde

$R_1^{\alpha,3} = \{(x_1, x_2, x_3) \in I^3 : x_2 = f_\alpha(x_1), x_3 = f_\alpha(f_\alpha(x_1)) \text{ y } x_1 \in (0,1]\} =$

$\{(x_1, f_\alpha(x_1), f_\alpha(f_\alpha(x_1))) : x_1 \in (0,1]\}$,

$R_2^{\alpha,3} = \{(0, x_2, x_3) : x_3 = f_\alpha(x_2), x_2 \in (0,1]\}$,

$K_3^\alpha = \{(0,0,x_3) \in I^3 : x_3 \in [0,1]\}$.

En general $X_n^\alpha = R_1^{\alpha,n} \cup R_2^{\alpha,n} \cup \cdots \cup R_{n-2}^{\alpha,n} \cup R_{n-1}^{\alpha,n} \cup K_n^\alpha$ donde $R_i^{\alpha,n} =$ $\{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n : x_j \neq 0 \text{ si } i < j,\ x_i \in (0,1] \text{ y para } j > i\ x_j = f_\alpha^{j-i}(x_i)\}$ $i < n$ y $K_n^\alpha = \{(0,0,\ldots,0,x_n) \in I^n : x_n \in [0,1]\}$

Los siguientes resultados nos describirán mejor los espacios X_n^α.

Lema 5.3 *$R_i^{\alpha,n} \subseteq X_n^\alpha$ es un rayo topológico.*

Demostración. Sea $h_i : R_i^{\alpha,n} \to (0,1]$ definida por $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$. Es claro que la función h_i es un homeomorfismo, pues cada punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_i^{\alpha.n}$, está determinado por la i-ésima coordenada. ■

El siguiente lema se sigue de la definición de E_α (el continuo de Awartani asociado a α) y de X_n^α.

Lema 5.4 *$R_{n-1}^{\alpha,n} \cup K_n^\alpha$ es homeomorfo a E_α.*

Observación 5.5 *Sean $r \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, se sigue de la definición de f_α que existe $s \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ tal que $f_\alpha(s) = r$. Más aún, si $r_k \in [0,1]$ y $k > 1$, existen $r_i \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ tales que $f_\alpha(r_i) = r_{i+1}$.*

Esto nos ayudará a probar el siguiente lema.

Lema 5.6 $\overline{R_1^{\alpha,n}} = X_n^\alpha$.

Demostración. Es claro que $\overline{R_1^{\alpha,n}} \subseteq X_n^\alpha$. Mostraremos la otra contención. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_n^\alpha$. Entonces, si $x_1 \neq 0$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, f_\alpha(x_1), \ldots, f_\alpha^{n-1}(x_1)) \in R_1^{\alpha,n} \subset \overline{R_1^{\alpha,n}}$.

Ahora, supóngase que $x_1 = 0$ y supóngase también que existe $k > 1$ tal que $x_k \neq 0$ y $x_{n-1} = 0$, más aún $x_i = 0$ para toda $i < k$.

Sea $\varepsilon > 0$, usando la observación 5.5, existen $y_i \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ tales que $f_\alpha(y_i) = y_{i+1}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$ y $f_\alpha(y_{k-1}) = x_k$, luego entonces, si $y = (y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots, x_n)$, se tiene que $y \in R_1^{\alpha,n}$ y $d(x,y) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} + \sum_{i=k}^{n} \frac{|x_i - x_i|}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|y_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}}{2^i} < \varepsilon$.

Si $x = (0, 0, \ldots, 0)$, por la Observación 5.5, existe $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tal que cada $y_i \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$ por ello $d(x,y) < \varepsilon$.

Así, si $x \in X_n^\alpha$, existe $y \in R_1^{\alpha,n}$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$ con lo que $x \in \overline{R_1^{\alpha,n}}$.

■

Corolario 5.7 *X_n^α es la cerradura de un rayo topológico con residuo el subcontinuo $R_2^{\alpha,n} \cup \cdots \cup R_{n-2}^{\alpha,n} \cup R_{n-1}^{\alpha,n} \cup K_n$, este último homeomorfo a X_{n-1}^α.*

5.1.3. El espacio X_α

En seguida definiremos las funciones de ligadura entre los espacios factores.

Sea $g_n^{\alpha,n+1} : X_{n+1}^\alpha \to X_n^\alpha$ definida por

$g_n^{\alpha,n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Notemos que cada función $g_n^{\alpha,n+1}$ es continua suprayectiva y abierta, de hecho es una proyección.

Sea $X_\alpha = \varprojlim \{X_n^\alpha, g_n^{\alpha,n+1}\}$.

A continuación mostraremos algunas propiedades entre los espacios factores que nos ayudaran a probar el teorema principal de esta sección.

Lema 5.8 *$g_n^{\alpha,n+1}|_{R_1^{\alpha,n+1}}$ es un homeomorfismo de $R_1^{\alpha,n+1}$ a $R_1^{\alpha,n}$.*

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in R_1^{\alpha,n+1}$, entonces $x_1 > 0$, así, $g_n^{\alpha,n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_1 > 0$, por lo que $g_n^{\alpha,n+1}(x) \in R_1^{\alpha,n}$. Además $g_n^{\alpha,n+1}$ es suprayectiva, pues si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in$

$R_1^{\alpha,n+1}$, entonces eligiendo $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n, f_\alpha(y_n))$, se tiene que $g_n^{\alpha,n+1}(x) = y$.

Probemos ahora que la función $g_n^{\alpha,n+1}$ es inyectiva.

Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in R_1^{\alpha,n+1}$ y $g_n^{\alpha,n+1}(x) = g_n^{\alpha,n+1}(y)$. Esto implica que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, de donde $x_i = y_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pero $x_{n+1} = f_\alpha(x_n) = f_\alpha(y_n) = y_{n+1}$ por lo tanto $x = y$.

Además de que $g_n^{\alpha,n+1}$ es continua, la inversa de $g_n^{\alpha,n+1}$, definida por $(g_n^{\alpha,n+1})^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, f_\alpha(x_n))$ es claramente una función continua. Así, $g_n^{\alpha,n+1}|_{R_1^{\alpha,n+1}}$ es un homeomorfismo. ■

Lema 5.9 *Tomemos dos espacios factores X_n^α y X_m^α con $n > m > 2$. $X_n^\alpha = R_1^{\alpha,n} \cup R_2^{\alpha,n} \cup \cdots \cup R_{n-2}^{\alpha,n} \cup R_{n-1}^{\alpha,n} \cup K_n$ y $X_m^\alpha = R_1^{\alpha,m} \cup R_2^{\alpha,m} \cup \cdots \cup R_{m-2}^{\alpha,m} \cup R_{m-1}^{\alpha,m} \cup K_m$, entonces $R_1^{\alpha,n} \cup R_2^{\alpha,n}$ es homeomorfo a $R_1^{\alpha,m} \cup R_2^{\alpha,m}$.*

Demostración. El lema es claro tomando el homeomorfismo

$g_m^{\alpha,n}|_{R_1^{\alpha,n} \cup R_2^{\alpha,n}} : X_n^\alpha \to X_m^\alpha$. ■

Corolario 5.10 *$R_i^{\alpha,n} \cup R_{i+1}^{\alpha,n} \cup R_{i+2}^{\alpha,n} \cup \cdots \cup R_{i+j}^{\alpha,n}$ es homeomorfo a $R_r^{\alpha,m} \cup R_{r+1}^{\alpha,m} \cup R_{r+2}^{\alpha,m} \cup \cdots \cup R_{r+j}^{\alpha,m}$ con $i + j < n$, $r + j < k$. Es decir, la unión finita de* *rayos topológicos consecutivos se puede mandar con un homeomorfismo entre espacios factores.*

Sean $p_1 = 0 \in X_1^\alpha$, $p_2 = (0,0) \in X_2^\alpha$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (0,0,\ldots,0) \in X_n^\alpha$; de manera similar, sean $q_1 = 1 \in X_1^\alpha$, q_2 el punto extremo del rayo $R_1^{\alpha,2}$ en X_2^α, es decir, el punto $\left(1, \frac{1}{4}\right) \in I^2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, q_n el punto extremo del primer rayo en X_n^α, es decir $R_1^{\alpha,n}$.

Sea $\pi_n^\alpha : X_\alpha \to X_n^\alpha$ la proyección n-ésima.

Lema 5.11 *X_α es 2-equivalente.*

Demostración. Sean $p = (p_1, p_2, \ldots)$, $q = (q_1, q_2, \ldots)$ y A un subcontinuo no degenerado de X_α. Mostraremos que A es homeomorfo a un arco o a X_α.

Si $p \notin A$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p_i \notin A_i = \pi_i^\alpha(A)$ y por ello $A_i \neq X_i^\alpha$, notemos que, como A_i es un subcontinuo, éste debe de ser un arco pues A_i debe estar contenido en un rayo y A_{i+j} es un arco para toda j, pues entre los rayos hay homeomorfismos (Lema 5.9), por lo tanto A es un arco.

Si $p \in A$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i = \pi_i^\alpha(A)$ es no degenerado y $A_{i-1} = \pi_{i-1}(A) = \{p_{i-1}\}$.

$A_i = \{(0,\ldots,0,x_{i-1},x_i) \in X_i^\alpha : x_{i-1} = 0,\, x_i \in [0,1]\} =$

$\{(0,\ldots,0,x_i) \in X_i^\alpha : x_i \in [0,1]\}$ que es homeomorfo a X_1^α. Con lo que

$A_{i+1} = \{(0,\ldots,0,x_i,x_{i+1}) \in X^{\alpha}_{i+1} : x_i \in (0,1], x_{i+1} = f_\alpha(x_i)\} \cup$

$\{(0,\ldots,0,x_i,x_{i+1}) \in X^{\alpha}_{i+1} : x_i = 0, x_{i+1} \in [0,1]\}$, con lo que obtenemos que A_{i+1} es homeomorfo a X^{α}_{2}. Continuando con esta descripción, se obtiene que A_{i+j} es homeomorfo a X^{α}_{i+j-1} con lo que A es homeomorfo a X_α. ■

Lema 5.12 *X_α es irreducible.*

Demostración. Es fácil notar que cada espacio factor es encadenable. Por el Teorema 1.42, X_α es encadenable, con lo que X_α no es un triodo simple ni una curva cerrada simple. Ahora, como X_α contiene arcos, es 2 equivalente, no es un triodo simple ni una curva cerrada simple. Por el Teorema 1.47, tenemos que X_α es irreducible. ■

Lema 5.13 *X_α es descomponible.*

Demostración. Sean $r = (r_1, r_2, \ldots)$, $r_1 \in (0,1)$, $r_n = g^{\alpha,n}_{n-1}(x_1)$ y $B = \varprojlim \{B_i, g^{\alpha,i+1}_{i}\}$ donde B_i es el arco irreducible de r_i a q_i. Si $A = (X_\alpha \backslash B) \cup \{r\}$, entonces que A es un subcontinuo de X_α tal que $X_\alpha = A \cup B$.

Como $q \notin A$ y $p \notin B$ entonces $A \neq X_\alpha \neq B$, por lo tanto X_α es descomponible. ■

Lema 5.14 *X_α no es un continuo de Elsa.*

Demostración. Como X_α es 2 equivalente, contiene arcos y es irreducible, entonces, por el Teorema 1.47, X_α no es localmente conexo. Por ser X_α descomponible, 2 equivalente, contener arcos y no ser localmente conexo, el Teorema 1.48 implica que X_α es la cerradura de un rayo topológico con residuo un continuo. Sea r como en el Lema 5.13, A_1 su arco componente, $s = (s_1, s_2, \ldots)$, donde $s_1 = p_1$, y $s_2 \neq p_2$. Entonces no hay un arco de s_2 a r_2. Luego $A_1 \neq A_2$ donde A_2 es la arco componente de s. Sean $t = (t_1, t_2, \ldots)$ $t_1 = p_1$, $t_2 = p_2$ y $t_3 \neq p_3$. Análogamente $A_1 \neq A_2$, $A_1 \neq A_3$, donde A_3 es la arco componente de t. Así, X_α no es un continuo de Elsa. ■

Lema 5.15 *X_α es la cerradura de un rayo topológico R_α con residuo un continuo K_α.*

Demostración. Sea $R_\alpha = \varprojlim \left\{ R_1^{\alpha,n}, g_n^{\alpha,n+1}|_{R_1^{\alpha,n+1}} \right\}$. Entonces $\pi_1^\alpha : R_\alpha \to R_1^{\alpha,2}$ es un homeomorfismo, pues cada elemento de R_α está determinado por la segunda coordenada.

Mostremos ahora que $X_\alpha = \overline{R_\alpha}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $x = (x_1, x_2, \ldots)$ no está en R_α, entonces $x_i \notin R_1^{\alpha,i}$ para alguna i, pero como $R_1^{\alpha,j} = g_j^{\alpha,j+1}\left(R_1^{\alpha,j+1}\right)$ para cada j, entonces $x_i \notin R_1^{\alpha,i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Entonces $x_1 = 0$ y para cada $i > 1$, se tiene que x_i tiene cero en su primera coordenada.

Supongamos que a partir de la segunda coordenada se tiene un elemento distinto de cero (el caso general es semejante salvo la complejidad de los índices), es decir $x_2 = (0, x_2^2), x_3 = (0, x_2^3, x_3^3)$ y en general $x_n = (0, x_2^n, \ldots, x_n^n)$ con $x_2^n \neq 0$.

Notemos que en este caso, $x_2^n = x_2^2$ y $x_j^n = x_j^m$ para $j \leq n \leq m$.

Por la Observación 5.5, existe $y_1^2 \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ tal que $f_\alpha(y_1^2) = x_2^2$.

Definimos $y_2 = (y_1^2, f_\alpha(y_1^2)) = (y_1^2, x_2^2)$, así, $y_2 \in R_1^{\alpha,2}$.

En general definiremos $y \in R_\alpha$ tal que $\pi_2^\alpha(y) = (y_2)$.

Sean $y_1 = y_1^2, y_3 = (y_1^2, x_2^2, f_\alpha(x_2^2)) = (y_1^2, x_2^3, x_3^3)$ y para cada $n > 1$, $y_n = (y_1^2, x_2^2, \ldots, f_\alpha^{n-2}(x_2^2)) = (y_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^n)$, con lo que $d(x, y) < \varepsilon$. Así, $x \in \overline{R_\alpha}$. ■

Como consecuencia de la prueba anterior, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.16 *K_α es homeomorfo a X_α.*

Demostración. Para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X_\alpha$, definimos la siguiente función $h : X_\alpha \to K_\alpha$ definida por $h(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ luego h es un homeomorfismo. ■

Corolario 5.17 *X_α es una unión ajena de una cantidad numerable de rayos topológicos y un punto, es decir, $X_\alpha = R_\alpha \cup R_{\alpha,2} \cup \cdots \cup \{p\}$.*

A continuación mostraremos que si hay una función suprayectiva y continua entre dos ejemplos X_α y X_β, entonces la imagen de los rayos está contenida en los rayos.

Proposición 5.18 *Sean $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ y X_α, X_β los espacios asociados a α, β respectivamente. Supóngase que $f : X_\alpha \to X_\beta$ es una función continua y suprayectiva, entonces $f(R_\alpha) = R_\beta$.*

Demostración. Sea $x \in R_\alpha$ y supóngase que $f(x) \notin R_\beta$. Luego, $f(x) \in R_{\beta,i}$ para alguna $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ o $f(x) = p$.

Como f es continua y R_α es localmente conexo, se tiene que $f(R_\alpha) \subseteq R_{\beta,i}$ o $f(R_\alpha) = \{p\}$.

Si $f(R_\alpha) = \{p\}$, por continuidad y dado que $\overline{R_\alpha} = X_\alpha$, se tiene una contradicción a la suprayectividad de f.

Si $f(R_\alpha) \subseteq R_{\beta,i}$ se obtiene que $f(X_\alpha) \subseteq \overline{R_{\beta,i}}$ contradiciendo nuevamente que f es suprayectiva, con lo que $f(R_\alpha) \subseteq R_\beta$.

Ahora, como f es continua y suprayectiva, $\overline{f(R_\alpha)} = \overline{R_\beta}$ y por lo tanto $f(R_\alpha) = R_\beta$. ■

Proposición 5.19 *Sean $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ y X_α, X_β los espacios asociados a α, β respectivamente. Supóngase que $f : X_\alpha \to X_\beta$ es una función continua y suprayectiva, entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $f(R_{\alpha,t}) = R_{\beta,1}$ y $f(R_{\alpha,t+1}) = R_{\beta,2}$.*

Demostración. Como $f(R_\alpha) = R_\beta$ y f es suprayectiva, deben existir $i \in \mathbb{N}$ y $z \in R_{\alpha,i+1}$ tales que $f(z) \in R_{\beta,2}$. Con un argumento similar al de la prueba de la proposición 5.18, se tiene que $f(R_{\alpha,i+1}) = R_{\beta,2}$. Sea $t = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : f(R_{\alpha,i}) \cap R_{\beta,2}\}$, entonces $f(R_{\alpha,t}) = R_{\beta,1}$. ■

Teorema 5.20 *Sean $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ y X_α, X_β los espacios asociados a α y β respectivamente. Supóngase que existe $f : X_\alpha \to X_\beta$ una función continua y suprayectiva. Entonces existe $f_2 : X_2^\alpha \to X_2^\beta$ continua y suprayectiva.*

Demostración. Por la proposición anterior, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $f(R_{\alpha,t}) = R_{\beta,1}$ y $f(R_{\alpha,t+1}) = R_{\beta,2}$. Sea $(x_1, x_2) \in X_2^\alpha$. Vamos a definir la función f_2.

Lo que haremos, será ver como es la imagen de cada uno de los puntos en X_2^α.

Si $x_1 \neq 0$, es decir, si $(x_1, x_2) \in R_1^{\alpha,2}$ entonces $x_2 = f_\alpha(x_1)$. Definiremos x en R_α, tomando

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < t \\ x_1 & \text{si } n = t \\ f_\alpha^{n-t}(x_1) & \text{si } n > t \end{cases}$$

con lo que si $x = (y_1, y_2, \ldots)$, entonces $x \in R_{\alpha,t}$. Para entender más claramente esto, lo que estamos haciendo al tomar el punto $x \in R_{\alpha,t}$, dado el punto $(x_1, x_2) \in R_1^{\alpha,2}$, es tomar el homeomorfismo $\left(\pi_t^{-1}\left(g_2^{\alpha,t}\right)\right)^{-1}$ que hay entre estos dos rayos.

Ahora, definimos $f_2(x_1, x_2) = \pi_2^\beta(f(x))$. Es claro que $f_2|_{R_1^{\alpha,2}}\left(R_1^{\alpha,2}\right) = R_1^{\beta,2}$ (lo anterior, es consecuencia del Lema 5.15 y la proposición 5.18).

Ahora, si $(x_1, x_2) \in K_2^\alpha \setminus \{p_2\}$, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 \neq 0$. Podemos mandar (x_1, x_2) con el homeomorfismo hacia el rayo $R_{t+1}^{\alpha,t+2}$, mencionado en el Corolario 5.10 y obtener como imagen al punto en X_{t+2}^α, $(0, 0, \ldots, 0, x_2, f_\alpha(x_2))$, el cual está en el rayo $R_{t+1}^{\alpha,t+2}$. Como hay un homeomorfismo con el rayo $R_{\alpha,t+1}$, como el descrito anteriormente, nos ayuda a definir la función f_2 en $K_2^\alpha \setminus \{p_2\}$, luego, definimos $f_2(0, x_2) = \pi_2^\beta(f(x))$ y se tiene que f_2 es continua.

Esto último, pues tomamos un punto $(x_1, x_2) \in R_1^{\alpha,2} \cup K_2^\alpha \setminus \{p_2\}$, lo mandamos con un homeomorfismo al espacio factor X_{t+2}^α, después lo mandamos con otro homeomorfismo a $R_{\alpha,t} \cup R_{\alpha,t+1}$, después bajo la función f lo mandamos a $R_{\beta,1} \cup R_{\beta,2}$, por último, lo proyectamos en el segundo espacio factor, con lo que obtenemos una función f_2 tal que manda $R_1^{\alpha,2} \cup K_2^{\alpha} \setminus \{p_2\}$ a $R_1^{\beta,2} \cup K_2^{\beta} \setminus \{p_2\}$ de manera continua.

Por último $f_2(p_2) = (0,0)$ (es decir, el punto p_2 del espacio X_2^{β}).

Sólo falta probar la continuidad de f_2 en el punto p_2.

Sea $\{x_n^2\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X_2^{\alpha} \setminus \{p_2\}$ una sucesión que converge a p_2 y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida en $R_{\alpha,t} \cup R_{\alpha,t+1}$, (que se obtiene gracias a que hay un homeomorfismo con $X_2^{\alpha} \setminus \{p_2\}$). Cada subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al residuo de $\overline{R_{\alpha,t+1}}$ y por la continuidad de f, $\{f(x_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto de $X_{\beta} \setminus (R_{\beta,1} \cup R_{\beta,2})$ y, la imagen de dicho punto, bajo π_2^{β}, es $(0,0)$. Con lo cual se obtiene que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $(0,0)$. ■

Corolario 5.21 *Hay una cantidad no numerable de continuos 2-equivalentes, cada uno de los cuales es la cerradura de un rayo topológico, con residuo homeomorfo al continuo total.*

5.2. UNA FAMILIA DE ABANICOS.

Recordemos que un continuo X es arco-conexo, si cualesquier par de puntos de X están contenidos en un arco contenido en X. Un dendroide es un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente. Un abanico es un dendroide con un solo punto de ramificación. Diremos que dos continuos son comparables bajo funciones continuas si existe una función continua y suprayectiva entre ellos, en caso contrario diremos que los continuos son incomparables. En 1961 B. Knaster [15] preguntó si existía una familia no numerable de dendroides incomparables deseados. Recientemente, esta pregunta se resolvió en forma positiva de manera independiente en [23] y en [30]. Estos ejemplos son abanicos, pero no son aplanables. P. Minc prensentó sus ejemplos en el Spring Topology Conference celebrado en Greensboro, North Carolina en Marzo de 2006 y A. Lelek preguntó si existían ejemplos con dendroides aplanables. En el seminario de Hiperespacios de Continuos, en el IMATE de la UNAM fué recordada esa pregunta que contestamos de manera afirmativa.

Presentamos una familia aplanable de abanicos $\{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{C}\}$, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C}$ no numerable tal que si $a, \beta \in \mathcal{C}$ y $\alpha \neq \beta$ entonces F_α y F_β no son comparables. La construcción de los abanicos es una modificación de la colección de continuos de Elsa construidos por Awartani en [1].

En la primera sección recordamos los ejemplos de Awartani e introducimos algunas notaciones que nos ayudarán a la construcción de la familia de dendroides.

En la segunda sección construimos los ejemplos y obtendremos el resultado principal, Teorema 5.32.

5.2.1. Ejemplos de Awartani

Recordemos de la sección 5.1.1, algunos resultados.

Primero recordemos de la Definición 5.1 que si $\{a_i\}, \{b_i\} \in 2^{\mathbb{N}}$.

1. $\{a_i\}$ domina verticalmente a $\{b_i\}$ si $a_i \geq b_i$ eventualmente.

2. $\{a_i\}$ domina a $\{b_i\}$ si existe un entero j_0 tal que $a_i \geq b_{i+j_0}$ eventualmente.

3. $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ son incomparables si ninguno de ellos domina a otro.

Las pruebas de los siguientes tres Lemas aparecen en [1].

Lema 5.22 *Sean* $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ *dos elementos en* $2^{\mathbb{N}}$. *Si* $\left\{a_{i_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ *es una subsucesión que eventualmente es cero en* $\{a_i\}$, *y si para cada entero* j_0, $b_{i_j+j_0}$ *es eventualmente cero, entonces* $\{a_i\}$ *domina a* $\{b_i\}$.

Lema 5.23 *2^N contiene una cantidad no numerable de elementos, ninguno de los cuales domina verticalmente a otro.*

Recordemos también el Lema 5.2, y lo reescribimos para hacer referencia a él.

Lema 5.24 *2^N contiene una cantidad no numerable de elementos ninguno de los cuales es eventualmente constante ni domina a otro.*

Por el Lema 5.24, sea $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C}$ no numerable, tal que si $a, \beta \in \mathcal{C}$ y $\alpha \neq \beta$, ninguno de los dos domina al otro.

A cada $\alpha = \{\alpha_i\} \in 2^{\mathbb{N}}$ le asociaremos un ejemplo de Awartani E_α (como en la fig. 2). E_α es compactación de el rayo J_α con un arco como residuo. Ahora, describiremos J_α, como la gráfica de una función lineal a pedazos de $(0,1]$ a $[0,1]$, con $(1,0) = a_1$ como su punto extremo. Nos referiremos a cada punto en J_α por su primera coordenada. Más aún, si a y b son dos puntos en J_α, entonces $[a,b]$ denotará el subarco de J_α de a a b.

Sean m_α y M_α los conjuntos de mínimos y de máximos respecto a la segunda coordenada de J_α.

Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones en $(0,1]$ tales que $\lim x_i = 0 = \lim y_i$ y para cada i, $y_{i+1} < x_{i+1} < y_i < x_i$.

Así, obtenemos R_α como la unión de los siguientes dos tipos de subarcos, $[x_i, y_i]$ y $[y_i, x_{i+1}]$, de tal manera que:

1. Si $\alpha_i = 0$ entonces

   a) $|[x_i, y_i] \cap M_\alpha| = 2i$ y $|[x_i, y_i] \cap m_\alpha| = 2i - 1$.

   b) Si $\{M_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos de el conjunto $[x_i, y_i] \cap M_\alpha$ entonces $\pi_2(M_{i,2i}) = 1$ y $\pi_2(M_{i,j}) = \pi_2(M_{i,2i-j}) = \frac{j+2}{j+3}$, $1 \leq j \leq i$.

   c) $\pi_2([x_i, y_i] \cap m_\alpha) = \frac{1}{2}$.

2. Si $\alpha_i = 1$ entonces

   a) $|[x_i, y_i] \cap M_\alpha| = 2i + 1$ y $|[x_i, y_i] \cap m_\alpha| = 2i$.

   b) Si $\{M_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i+1\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos del conjunto $[x_i, y_i] \cap M_\alpha$ entonces $\pi_2(M_{i,2i+1}) = 1$ y $\pi_2(M_{i,j}) = \pi_2(M_{i,2i+1-j}) = \frac{j+2}{j+3}$, $1 \leq j \leq i$.

c) Si $\{m_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos de el conjunto $[x_i, y_i] \cap m_\alpha$ entonces $\pi_2(m_{i,j}) = \frac{2}{3}$ parar $i = j$ y $\pi_2(m_{i,j}) = \frac{1}{2}$ para $i \neq j$.

3. Para cada $i \in \mathbb{N}$

   a) $|[x_i, y_i] \cap M_\alpha| = 2i - 1$ y $|[x_i, y_i] \cap m_\alpha| = 2i$.

   b) $\pi_2([x_i, y_i] \cap M_\alpha) = \frac{1}{2}$.

   c) Si $\{m_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$ es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos de el conjunto $[x_i, y_i] \cap m_\alpha$ entonces $\pi_2(m_{i,2i}) = 0$ y $\pi_2(m_{i,j}) = \pi_2(m_{i,2i-j}) = 1 - \frac{j+2}{j+3}$, $1 \leq j \leq i$.

Sean $b_i = \begin{cases} M_{i,2i} & \text{if } \alpha_i = 0 \\ M_{i,2i+1} & \text{if } \alpha_i = 1 \end{cases}$ y $a_i = m_{i,2i}$, es decir b_i y a_i son los puntos en J_α tales que su segunda coordenada es uno y cero, respectivamente.

$\{E_\alpha : \alpha \in \mathcal{C}\}$, es una familia no numerable y cada E_α es un continuo de Elsa tal que si $\alpha \neq \beta$ y $a, \beta \in \mathcal{C}$ entonces E_α y E_β no son comparables.

5.2.2. Construcción

Sean $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ y E_α el ejemplo de Awartani asociado a α.

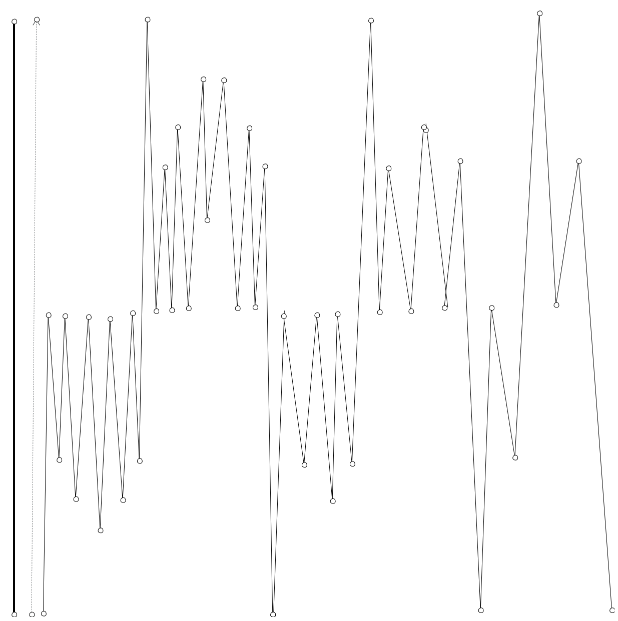


Figura 5.2: E_α

El abanico en el que estamos interesados es F_α, pero construiremos también un abanico F'_α como un paso intermedio con el único propósito de que sea más visualizable.

Construiremos un abanico F_α como la unión de arcos J_i^α. Empezaremos con la construcción del abanico F'_α, como en la fig. 3, entonces identificaremos la parte remarcada con el punto a_α para obtener el abanico deseado F_α.

Denotemos los puntos en el plano: $(0,1) = c_\alpha$, $\left(0, \frac{1}{2}\right) = b_\alpha$, $(0,0) = a_\alpha$ y $(0,-1) = p_\alpha$. Definimos el arco E_i como el segmento entre p_α y el punto en el plano $\left(\frac{1}{2^{i-1}}, 0\right)$.

Sea $A'_i = [a_i, a_{i+1}]$ el arco entre a_i y a_{i+1} contenido en J_α. Sea I_1^α una copia de A'_1 contenida en el cuadrado $\left[\frac{3}{4}, 1\right] \times [0,1]$, (lo cual es una contracción respecto a la primera coordenada de la gráfica de J_α en $[a_2, a_1] \times [0,1]$ en $\left[\frac{3}{4}, 1\right] \times [0,1]$). Ahora, sea I_2^α la unión de dos copias de A'_2, contenida en el cuadrado $\left[\frac{3}{2^3}, \frac{1}{2}\right] \times [0,1]$, de tal forma que la primera copia es denotada por A_2 y la segunda copia es denotada por $A_{1,2}$.. En general, definimos I_i^α como la unión de i copias de A'_i contenidas en el cuadrado $\left[\frac{3}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^{i-1}}\right] \times [0,1]$, de tal forma que la primera copia es denotada por A_i y las otras copias son denotadas por $A_{k,i}$ con $k \in \{1, 2, \cdots, i-1\}$. El arco J_i^α es la unión de los arcos E_i y I_i^α, como en la fig. 3. Así J_i^α es el arco con un punto extremo en

A_i y su otro punto extremo es p_α.

La sucesión de subarcos definida en $\left[\frac{3}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^{i-1}}\right] \times [0,1]$, converge a el arco entre a_α y c_α, y los subarcos E_i convergen a el arco entre a_α y p_α. Sea I_α el arco entre a_α y c_α, e I'_α el arco entre p_α y a_α.

Definimos el abanico $F'_\alpha = I_\alpha \cup I'_\alpha \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} J_i^\alpha$. F'_α contiene al abanico armónico $F''_\alpha = I'_\alpha \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. El abanico que necesitamos es el espacio cociente $F_\alpha = F'_\alpha/F''_\alpha$, el cual es finalmente, una identificación de $I'_\alpha \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ con el punto a_α y obtenemos el abanico F_α con a_α como su vértice. Diremos que F_α es la unión $I_\alpha \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha$ y $I_\alpha \cap I_i^\alpha = \{a_\alpha\}$.

A continuación denotaremos algunos subarcos importantes en cada I_i^α.

Para $i \in \mathbb{N}$, K_i^α y L_i^α denotarán los subarcos de A_i, $[a_i, b_i]$ y $[b_i, a_{i+1}]$ respectivamente en I_i^α (estamos usando la notación de A'_α como el arco de a_i a a_{i+1} para denotar estos subarcos de A_i). u_i^α denota el arco en I_i^α que une a_i con el primer elemento de $K_i^\alpha \cap M_\alpha$. Similarmente, w_i^α denota el arco en I_i^α que une b_i con el primer elemento de $L_i^\alpha \cap m_\alpha$.

En este sentido, podemos definir los subarcos $K_{j,i}^\alpha$, $L_{j,i}^\alpha$, $u_{j,i}^\alpha$ y $w_{j,i}^\alpha$ en $A_{j,i}$.

Diremos que una sucesión de longitudes de arcos es acotada si su límite superior es finito. También diremos que una sucesion de longitudes de arcos

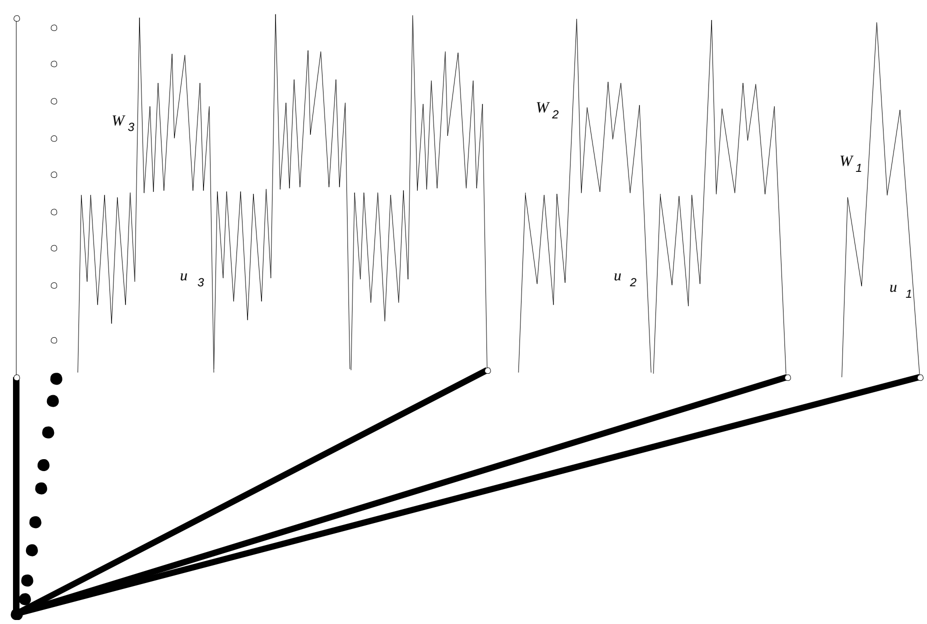


Figura 5.3: F'_α

es no degenerada si su límite inferior es mayor que cero.

El siguiente lema es fácil de verificar y dá importante información acerca del abanico F_α.

Lema 5.25 *Para F_α lo siguiente se cumple:*

1. *Si $t \in (a_\alpha, c_\alpha)$ y $t' \in I_\alpha$ entonces existen sucesiones $\{t_i\}$ y $\{t_i'\}$, $t_i, t_i' \in I_i^\alpha$, que convergen a t y t' respectivamente, tales que $\{d\,[t_i, t_i']\}$ es acotado (donde d denota la longitud de el arco).*

2. *Sean $\{t_i\}$ y $\{t_i'\}$ dos sucesiones con $t_i, t_i' \in I_i^\alpha$, convergiendo a a_α y c_α respectivamente, entonces $\lim\{d\,[t_i, t_i']\} = \infty$.*

3. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $p_i \in L_i^\alpha$. Entonces $\lim\{d\,[p_i, p_{i+1}]\} = \infty$.*

4. *Si $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$ son dos sucesiones, $p_i, q_i \in I_i^\alpha$, ambas convergiendo a a_α y si $\{d\,[p_i, q_i]\}$ es no degenerada, entonces $[a_\alpha, b_\alpha] \subset \lim\,[p_i, q_i]$.*

5. *Sea $\{A_i\}$ una sucesión de arcos, $A_i \subset I_i^\alpha$, tales que $A_i \cap w_i^\alpha \neq \emptyset$ eventualmente. Si $\lim A_i \supset [a_\alpha, b_\alpha]$ entonces $\lim(d(A_i)) = \infty$.*

6. *Sean $p \in u_{k_i}^\alpha$ y $q \in w_{k_i}^\alpha$. Entonces $[p, q] \cap m_\alpha \cap \left(y = \frac{2}{3}\right) = \emptyset$ (lo cual significa que el conjunto de mínimos en el arco $[p, q]$ no incluye $\frac{2}{3}$) si y sólo si $\alpha_{k_i} = 0$.*

Ahora probaremos dos lemas. La prueba es similar a la prueba que aparace en el artículo de Awartani.

Lema 5.26 *Sea* $h : F_\alpha \to F_\beta$ *una función suprayectiva y continua y sea* A *un arco en* I_i^α. *Si* B *es un arco en* $h(A)$ *entonces existe un arco en* A *cuya imagen es* B.

Demostración. *El resultado se sigue directamente, dado que la función* $h|_A : A \to h(A)$ *es una función entre intervalos.* ■

Lema 5.27 *Sea* $h : F_\alpha \to F_\beta$ *una función suprayectiva y continua y sea* $\{A_i\}$ *una sucesión de arcos en* $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha$ *tal que* $\limsup A_i \subseteq I_\alpha$. *Lo siguiente se cumple:*

1. *Si* $\{d(h(A_i))\}$ *es no degenerada entonces* $\{d(A_i)\}$ *es no degenerado.*
2. *Si* $\{d(A_i)\}$ *es acotada, entonces* $\{d(h(A_i))\}$ *es acotada.*

Demostración.

1. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\{A_i\}$ es una sucesión convergente. Como $\{d(h(A_i))\}$ es no degenerada, cada $h(A_i)$ contiene un par de puntos p_i, q_i tales que $\lim p_i \neq \lim q_i$. Así A_i contiene un par de puntos p_i', q_i' tales que $\lim p_i' \neq \lim q_i'$, lo cual implica que $\{d(A_i)\}$ es no degenerada.

2. Supongamos que $\lim \{d(h(A_i))\} = \infty$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, $h(A_i)$ contiene una colección $\{B_{i,j} : 1 \leq j \leq i\}$ de subarcos cerrados y disjuntos, tales que $\{d(B_{i,j}) : (i,j) \in \mathbb{N} \times \{1, 2, \ldots, i\}\}$ es no degenerada. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada j, $1 \leq j \leq i$, sea $A_{i,j}$ el subarco de A_i tal que $h(A_{i,j}) = B_{i,j}$. Esto es posible por el Lema 5.26. Se sigue de (1) que $\{d(A_{i,j}) : (i,j) \in \mathbb{N} \times \{1, 2, \ldots, i\}\}$ es no degenerada, lo cual implica que $\lim d(A_i) = \infty$.

■

Lema 5.28 *Sea $h : F_\alpha \to F_\beta$ una función suprayectiva y continua. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. $h^{-1}\{a_\beta, c_\beta\} = \{a_\alpha, c_\alpha\}$.
2. *Si* $h(a_\alpha) = a_\beta$, *entonces* $h[a_\alpha, b_\alpha] = [a_\beta, b_\beta]$ *y* $h[b_\alpha, c_\alpha] = [b_\beta, c_\beta]$.
3. *Si* $h(a_\alpha) = c_\beta$, *entonces* $h[a_\alpha, b_\alpha] = [c_\beta, b_\beta]$ *y* $h[b_\alpha, c_\alpha] = [b_\beta, a_\beta]$.
4. $h(b_\alpha) = b_\beta$

Demostración.

1. Es suficiente probar que $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(c_\beta) = \emptyset = (a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(a_\beta)$. Supóngase que $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(a_\beta) \neq \emptyset$ y sean $t' \in [a_\alpha, c_\alpha]$, $t \in (a_\alpha, c_\alpha)$,

tales que $h(t') = c_\beta$ y $h(t) = a_\beta$. Por el Lema 5.25, (1) hay sucesiones $\{t_i\}$ y $\{t'_i\}$ en $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha$, que convergen a t y t' respectivamente tales que $\{d[t_i, t'_i]\}$ es acotado. Como $\lim h(t_i) = a_\beta$ y $\lim h(t'_i) = c_\beta$, se sigue del Lema 5.25, (2) que $\lim d[h(t_i), h(t'_i)] = \infty$. Esto contradice el Lema 5.27, (1). Similarmente, se puede probar que $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(c_\beta) = \emptyset$.

2. Dado que la prueba de que $h[a_\alpha, b_\alpha] = [a_\beta, b_\beta]$ es similar, sólo probaremos que $h[b_\alpha, c_\alpha] = [b_\beta, c_\beta]$. Como $h(a_\alpha) = a_\beta$, (1) implica que $h^{-1}(c_\beta) = c_\alpha$. Supongamos que existe $t \in (b_\alpha, c_\alpha)$ tal que $h(t) < b_\beta$. T denotará la sucesión $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha \cap (y = t)$ (es decir, su segunda coordenada es t). Existen dos subsucesiones $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$ de T tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, p_i y q_i son adyacentes en T y $[p_i, q_i] \cap M_\alpha = (y = 1)$ (es decir, su segunda coordenada es 1), entonces, eventualmente $h(p_i), h(q_i)$ tienen segunda coordenada en (a_β, b_β). Si para una infinidad de números i, $h[p_i, q_i] \cap (y = k) = \emptyset$, $k > \frac{1}{2}$, obtenemos lo siguiente. Como $c_\alpha \in \lim [p_i, q_i]$, $h(c_\alpha) \in \lim [h(p_i), h(q_i)]$ con lo que $h(c_\alpha) \in [a_\beta, b_\beta]$, contradiciendo que $h^{-1}(c_\beta) = c_\alpha$. Si $h[p_i, q_i] \cap (y = k) \neq \emptyset$, $k > \frac{1}{2}$, obtenemos lo siguiente: $h(p_i) \in L_{k_i}^\beta$ y $h(q_i) \in L_{r_i}^\beta$ con $r_i \neq k_i$. Se sigue del Lema 5.25, (3) que $\lim d[h(p_i), h(q_i)] = \infty$ y consecuentemente, $\lim (h[p_i, q_i]) = \infty$. Esto contradice el Lema 5.27, (2) dado que

$\{d[p_i, q_i]\}$ es acotado.

3. La prueba es similar a (2) y por ello se omite.

4. Se sigue directamente de (2) y (3).

■

Lema 5.29 *Sea $h : F_\alpha \to F_\beta$ una función suprayectiva y continua. Si ni α ni β son eventualmente constantes, entonces se cumple lo siguiente.*

1. *$h(a_\alpha) = a_\beta$; $h(c_\alpha) = c_\beta$; $h[a_\alpha, b_\alpha] = [a_\beta, b_\beta]$ y $h[b_\alpha, c_\alpha] = [b_\beta, c_\beta]$.*

2. *Si $\{A_i\}$ es una sucesión de arcos en $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha$ tales que $\lim A_i = [b_\alpha, c_\alpha]$ y $A_i \cap m_\alpha \cap \left(y = \frac{2}{3}\right) = \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces $h(A_i) \cap m_\beta \cap \left(y = \frac{2}{3}\right) = \emptyset$ eventualmente.*

Demostración.

1. Por el Lema anterior, es suficiente probar que $h(a_\alpha) = a_\beta$. Supóngase que $h(a_\alpha) = c_\beta$. Se sigue de la construcción que existen sucesiones $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$ en $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\beta$ tales que $\lim p_i = \lim q_i = c_\beta$, $\lim [p_i, q_i] = \left[\frac{2}{3}, c_\beta\right]$, y $\{d[p_i, q_i]\}$ es no degenerado. Por el Lema 5.26 podemos encontrar una sucesión $\{B_i\}$ de arcos en $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha$ tal que $h(B_i) = [p_i, q_i]$. Como

$\{d[p_i, q_i]\}$ es no degenerado, se sigue del Lema 5.27, (1) que $\{d(B_i)\}$ es no degenerado, eligiendo p_i' y q_i' en B_i tales que $h(p_i') = p_i$ y $h(q_i') = q_i$. Como $h^{-1}(c_\beta) = a_\alpha$, se sigue que $\lim p_i' = \lim q_i' = a_\alpha$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\{B_i\}$ es una sucesión convergente. Por el Lema 5.25, (4), $[a_\alpha, b_\alpha] \subset \lim B_i$. Como $\lim h(B_i) = \left[\frac{2}{3}, c_\beta\right]$, se sigue que $h[a_\alpha, b_\alpha] \supset \left[\frac{2}{3}, c_\beta\right]$, contradiciendo el Lema 5.28, (4). Por lo tanto $h(c_\alpha) = c_\beta$ y $h(a_\alpha) = a_\beta$.

2. La prueba es similar.

■

Lema 5.30 *Sea $h : F_\alpha \to F_\beta$ una función suprayectiva y continua, y sean $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$ sucesiones de puntos en F_α tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, $p_i \in u_i^\alpha$ y $q_i \in w_i^\alpha$. Si $\lim p_i = \lim q_i = b_\alpha$ y ni α ni β es eventualmente constante, entonces existe un entero j_0 tal que, eventualmente $h(p_i) \in u_{i+j_0}^\beta$ y $h(q_i) \in w_{i+j_0}^\beta$.*

Demostración. Como $h(b_\alpha) = b_\beta$, se sigue que $\lim h(p_i) = \lim h(q_i) = b_\beta$.

Primero, mostraremos que $h(p_i) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} u_j^\beta$ eventualmente. Supongamos que no, entonces, tenemos los siguientes casos:

1. $\{d[h(p_i, M_{j_i})]\}$ converge a cero para alguna subsucesión $\{M_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de M_β. Entonces, usando la continuidad uniforme de h existe $\delta > 0$, tal que $h[b_\alpha, b_\alpha + \delta] \subseteq [a_\beta, b_\beta]$ lo que contradice el Lemma 5.29, (1).

2. $\{d[h(p_i, m_{j_i})]\}$ converge a cero para alguna subsucesión $\{m_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de m_β. Usando un razonamiento similar al anterior, se puede mostrar que existe $\delta > 0$, tal que $h[b_\alpha, b_\alpha - \delta] \subseteq [b_\beta, c_\beta]$ lo que contradice el Lema 5.29, (1).

3. $h(p_i) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} w_j^\beta$ (con w_j^β en A_i o $A_{r,i}$) eventualmente. Sea $m_i^* = u_i^\alpha \cap m_\alpha$ (los mínimos de u_i^α). Como $\lim [m_i^*, p_i] = [a_\alpha, b_\alpha]$, el Lema 5.29, (1) implica que $\lim h[m_i^*, p_i] = [a_\beta, b_\beta]$. Como $h[m_i^*, p_i] \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} w_j^\beta\right) \neq \emptyset$ eventualmente, se sigue del Lema 5.25, (5) que $\lim d(h[m_i^*, p_i]) = \infty$. Esto contradice el Lema 5.26, (2) dado que $\{d[m_i^*, p_i]\}$ es acotado. Por lo tanto, la única posibilidad restante es que $h(p_i)$ esté eventualmente en $\bigcup_{j=1}^{\infty} u_j^\beta$.

La prueba de que $h(q_i) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} w_j^\beta$ es similar y por ello se omite.

Ahora, mostraremos que si $h(p_i) \in u_{j_i}^\beta$ eventualmente, entonces $h(q_i) \in w_{j_i}^\beta$ eventualmente. Supongamos lo contrario, entonces $h(q_i) \in w_{k_i}^\beta$ donde $k_i \neq j_i$ para una cantidad infinita de i's. Entonces se puede deducir que

$h[a_\alpha, b_\alpha] \cap (b_\beta, c_\beta) \neq \emptyset$, contradiciendo el Lema 5.29, (1).

Finalmente, probaremos que si $h(p_i) \in u^\beta_{j_i}$ eventualmente, entonces $j_{i+1} = j_i+1$. Supongamos que $j_{i+1} \neq j_i+1$ para una cantidad infinita de i's; entonces, se puede deducir que $h[b_\alpha, c_\alpha] \cap (a_\beta, b_\beta) \neq \emptyset$, contradiciendo el Lema 5.29, (1).

Entonces, existe un entero j_0 tal que $h(p_i) \in u^\beta_{i+j_0}$ y $h(q_i) \in w^\beta_{i+j_0}$ eventualmente. Esto completa la prueba del Lema. ■

Teorema 5.31 *Sea $h : F_\alpha \to F_\beta$ una función suprayectiva y continua. Si ni α ni β son eventualmente constantes, entonces α domina β.*

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$, elegimos $p_i \in u^\alpha_i$ y $q_i \in w^\alpha_i$ tales que $\lim p_i = \lim q_i = b_\alpha$. Por el Lema 5.30, existe un entero j_0 tal que, eventualmente $h(p_i) \in u^\beta_{i+j_0}$ y $h(q_i) \in w^\beta_{i+j_0}$. Sea $\{\alpha_{k_i}\}$ una subsucesión de ceros en α. Por el Lema 5.22, es suficiente probar que $\beta_{k_i+j_0} = 0$ eventualmente. Como $\alpha_{k_i} = 0$, se sigue del Lema 5.25, (6) que $[p_{k_i}, q_{k_i}] \cap m_\alpha \cap \left(y = \frac{2}{3}\right) = \emptyset$. Por el Lema 5.29, (2), $h[p_{k_i}, q_{k_i}] \cap m_\beta \cap \left(y = \frac{2}{3}\right) = \emptyset$ eventualmente y por lo tanto $[h(p_{k_i}), h(q_{k_i})] \cap m_\beta \cap \left(y = \frac{2}{3}\right) = \emptyset$ eventualmente. Como $h(p_{k_i}) \in u^\beta_{k_i+j_0}$ y $h(q_{k_i}) \in w^\beta_{k_i+j_0}$, concluimos por el Lema 5.25, (6) que $\beta_{k_i+j_0} = 0$ eventualmente. ■

Usando el Lema 5.24 y el Teorema 5.31, obtenemos el resultado principal.

Teorema 5.32 *Existe una colección no numerable de dendroides planos, ninguno de los cuales se puede mandar de manera continua y suprayectiva sobre otro.*

Corolario 5.33 *Existe una colección no numerable de abanicos planos, incomparables.*

Bibliografía

[1] M. Awartani. An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993) 239-245.

[2] R. Bennett, On inverse limit sequences, M. S. Thesis, The University of Tennesse, 1962.

[3] R. H. Bing. Concerning hereditarily indecomposable continua, Pacific J. Math. 1 (1951) 43-51.

[4] R. H. Bing. Snake-like continua, Duke Math J. 18 (1951) 653-663.

[5] J. J. Charatonik, On finitely equivalent continua, Internat. J. Math. Math. Sci. 32 (2003), 2069-2073.

[6] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, Fans with the property of Kelley, Topology Appl. No. 29 (1988) 73-78.

[7] W. J. Charatonik, Inverse Limits of smooth continua, Comment. Math. Univ. Carolin. 23 (1982), 183-191.

[8] H. Cook, Tree-likeness of hereditarily equivalent continua, Fund. Math. 68 (1970) 203-205.

[9] G. W. Henderson, Proof that every compact decomposable continuum which is topologically equivalent to each of its nondegenerate subcontinua is an arc, Ann. of Math. 72 (1960) 421-428.

[10] W. T. Ingram. Periodicity and indecomposibility, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (1995) 1007-1016.

[11] W. T. Ingram. Inverse Limits. Aportaciones Matemáticas, Serie Investigación, 15, S. M. M. (2000).

[12] W. T. Ingram, Families of inverse limits on $[0, 1]$, Topology Proceedings, vol. 27, No. 1, 2003, p. 189-201.

[13] C. Islas, "Continuos 2-equivalentes", Tesis de Matemático, UNAM, (2001).

[14] B. Knaster. Un Continu dont tout sous-continu est indécomposable. Fund. Math. 3 (1922) 247-286.

[15] B. Knaster, P.340, Coll. Math. 8 (1961), 278.

[16] K. Kuratowski. Topology Vol. 1, Acad. Press, New York, N. Y., (1968).

[17] K. Kuratowski. Topology Vol 2, Acad. Press, New York, N. Y., (1968).

[18] S. Macías. Topics on Continua, Chapman & Hall/CRC, (2005).

[19] W. S. Mahavier. Upper semi-continuous decompositions of irreducible continua, Fund. Math. 60 (1967) 53-57.

[20] W. S. Mahavier. Continua with only two topologically different subcontinua. Topology Appl. No. 94 (1999). 243-252.

[21] S. Mazurkiewicz, Problem 14, Fund. Math. 2 (1921), p. 286.

[22] H. C. Miller, On unicoherent continua, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950) 179-194.

[23] P. Minc, An uncountable collection of dendroids mutually incomparable by continuous functions, http://web.umr.edu/continua/.

[24] E. E. Moise, An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 581-594.

[25] R. L. Moore. Foundations of point set theory, Amer. Math Soc. Colloquium Publications, vol.13 (1932).

[26] S. B. Nadler Jr. Arc components of certain chainable continua, Canad. Math. Bull. 14 (1971) 183-189.

[27] S. B. Nadler Jr. Continuum Theory. Marcel Deker, Inc., New York, 1992.

[28] S. B. Nadler and B. Pierce. Finitely Equivalent Continua Semi-Locally-Connected at not-cut points, Topology Proceedings, vol. 19, 1994, p. 199-213.

[29] S. B. Nadler Jr. Hyperepaces of Sets. A text with research questions. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Nivel Avanzado, 33, S. M. M. (2006).

[30] Vítězslav Kala, Jan Novák, Pavel Pyrih, Marek Sterzik, Martin Tancer. An uncountable family of incomparable dendroids - preprint.

[31] G. T. Whyburn. Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 28 (1942).