UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

MODELO DE VALUACIÓN Y COBERTURA DE RIESGOS CON COMPONENTES VIVOS.

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

MIGUEL ANGEL GONZALEZ MANJARREZ

ASESOR: M. EN C. HARVEY SPENCER SÁNCHEZ RESTREPO

FEBRERO 2008

Agradecimientos

Comienzo agradeciendo a mi asesor M. en C. Harvey Spencer Sánchez Restrepo toda su generosa entrega y paciencia que ha permitido la realización de este trabajo.

Hago también extensiva mi gratitud a mis profesores y amigos. Su ayuda y estímulo en los momentos difíciles han sido de gran valor.

Mención especial merecen mi madre y hermana cuyo sacrificio y paciencia han hecho posible la elaboración de esta tesina y a mis familiares que se han interesado por el presente trabajo.

Índice general

Introducción

En la historia de la Ciencia Actuarial se han dado diversos cambios que han impactado el marco teórico de la profesión. Las interrogantes que todo actuario debe plantearse al ejercer su profesión son: ¿qué es la ciencia actuarial? ¿cuál es su objeto de estudio? ¿cuales son las herramientas que utiliza para su desarrollo?. Debido a que la naturaleza de los fenómenos que modela el actuario es estocástica, los instrumentos matemáticos más eficientes se basan en la teoría de la probabilidad.

El gran desarrollo que han experimentado las teorías y técnicas enfocadas al estudio de los fenómenos sociales ha replanteado más de una vez la praxis del actuario. Más aún: dichos cambios la han transformado, afortunadamente para bien, haciendo de la Ciencia Actuarial algo más sólido que, debido a su juventud, a logrado salir fortalecida y enriquecida del agotamiento del paradigma determinista que dominó las ideas intelectuales en la época en que nació.

Como consecuencia de estos avances, los primeros desarrollos que atendían a los cálculos primordiales (llamados Valores Conmutados), fueron sustituidos al no contar con la capacidad de sustentar un análisis de riesgo y de desviaciones respecto a las expectativas basadas en el principio de equivalencia. Lo anterior, aunado al avance en la capacidad de cómputo condujeron a esta ciencia a desarrollos teóricos más completos, los cuales lucen en comunión con el formalismo matemático basado en definiciones, reglas, supuestos y consecuencias lógicas.

La idea central de este trabajo es precisamente la de exponer este aparato matemático. A lo largo del desarrollo se establecen los principios de modelación y fundamentos que dan soporte teórico a los resultados utilizados en la práctica actuarial. Siguiendo un discurso de modelación e interpretación de las ecuaciones propuestas y estableciendo los resultados de forma deductiva para dar lugar a interpretaciones de los distintos modelos de valuación, así como para el análisis de las obligaciones y los beneficios, tanto desde la perspectiva de la estática comparativa como de los sistemas dinámicos.

En la primera parte se exponen las bases y los principios generales de la ciencia actuarial establecidos por la *Society of Actuaries* (SOA) , y se desarrollan los modelos probabilísticos con los cuales se sustenta gran parte la matemática actuarial.

En los capítulo segundo y tercero se modela el impacto financiero, dado el riesgo contraído al otorgar una cobertura a una persona ya sea por permanencia o por deceso de la misma.

Por último, en el cuarto capítulo se dan a conocer los métodos para garantizar la solvencia financiera de una aseguradora, teniendo siempre una reserva suficiente para afrontar las obligaciones contraídas con los beneficiarios.

0.1. Objeto de estudio de la ciencia actuarial

En este apartado se da una introducción a la ciencia actuarial y la importancia de su estudio, también se darán los principios que la SOA ha establecido para la practica de la profesión.

La matemática actuarial se formula basándose en el principio de equivalencia actuarial, consistente en igualar los flujos de efectivo a lo largo de la vigencia del seguro, ponderados por la probabilidad de ocurrencia. Sin embargo, los flujos de efectivo son contingentes y por tanto, el valor actual no es un número sino una variable aleatoria. La equivalencia actuarial es, en consecuencia, una elección estadística del conjunto infinito de posibilidades. El enfoque basado en el cálculo de expectativas para el seguro de vida no sólo proporciona la información estadística vital para estudiar la estabilidad o solvencia de la cartera, sino que representa un método más efectivo que los tradicionalmente empleados en la técnica actuarial, fundamentalmente por su claridad y sencillez, lo que permite valuar todo tipo de seguros.

0.2. La ciencia actuarial

La actuaría ha evolucionado constante y rápidamente. Tanto en lo técnico y científico como en la aplicación y desarrollo social. Aunque los actuarios, por su formación, muestran ser capaces de desempeñar diversas tareas, es muy importante destacar que su génesis se fundamenta en el cálculo de primas y reservas suficientes para el pago de beneficios y coberturas.

Aún con la capacidad de la formación profesional, estimamos insuficiente la cantidad de bibliografía acerca de las materias de matemáticas actuariales y debido a ello surgió la inquietud de desarrollar este trabajo en apoyo a los estudiantes y para contribuir a incrementar la escasa bibliografía en español que existe acerca del tema.

Por otro lado, los sistemas de asistencia social de muchos países están soportando presiones muy fuertes que obligan a sus gobernantes a buscar y fomentar, con la participación de la industria aseguradora privada, sistemas alternativos de cobertura que provean de fondos la asistencia de la vejez y de la invalidez. Esto explica la creciente importancia que está adquiriendo la comercialización de los seguros innovadores y la complejidad de su correcta valuación con base en métodos objetivos basados en definiciones y principios.

Antes de abordar a la Ciencia Actuarial es útil definir al actuario y comentar su origen.

El nombre de actuario se deriva de la palabra latina actuarius, nombre que se les daba en la antigua Roma a los empleados encargados de escribir el acta pública del Senado y a los oficiales que llevaban las cuentas y vigilaban el cumplimiento de los contratos para aprovisionamientos militares [37].

En cuanto a nuestro país, se fundan a principios del siglo XX dos aseguradoras, la Nacional en 1901, y la Latinoamericana en 1906 [37]. El Instituto Mexicano de Actuarios se funda en 1937 siendo reemplazado en 1962 por la Asociación Mexicana de Actuarios del Seguro de Vida A.C. en 1962, la cual, desde 1980 es conocida como la Asociación Mexicana de Actuarios. En 1967 se funda el Colegio Nacional de Actuarios [37]. Es importante señalar que, a diferencia de varios países, por ejemplo Inglaterra, en México el título de Actuario se obtiene mediante el estudio de una carrera universitaria en vez de ser concedido por el órgano que representa la profesión (por ejemplo el Institute of Actuaries) mediante el éxito en cierto número de exámenes.

La carrera de actuario se establece durante el año de 1946 en la Universidad Nacional Autónoma de México [37], gracias al entusiasmo del Ing. Emilio Velarde y el Dr. Alfonso Nápoles Gándara, siendo su primer estudiante en ingresar Miguel Chávez Gómez y sus dos primeros titulados Alejandro Hazas en 1959 y Jorge Rendón en 1961 quien desarrolla en 1968 la primera tabla de mortalidad basada en experiencia mexicana conocida como Experiencia Mexicana 1962-1967 siendo la segunda en su tipo en Latinoamérica.

Así, el Colegio Nacional de actuarios define al actuario como "Actuario es un profesional que analiza riesgos y cuantifica sus consecuencias financieras, económicas y de negocios a través de la construcción y aplicación de modelos, utilizando sus conocimientos fundamentales de matemáticas, probabilidad, estadística y finanzas"[38].

0.3. Principios de la ciencia actuarial

Principios actuariales del comite de la sociedad de actuarios

Como toda ciencia, la actuaría se basa en principios, el fundamento de la profesión y la praxis actuarial, es una ciencia aplicada y, como tal, su teoría se desarrolla sobre ciertas observaciones del mundo real.

La práctica de la profesión actuarial se encuentra basada en:

- **Principios** es decir, declaraciones fundamentadas en la observación y la experiencia. Los principios estarán sujetos a cambio sólo si ocurren cambios fundamentales en nuestro entendimiento respecto del mundo observable y han sido agrupados según su materia básica.

- **Metodologías**,las cuales son descripciones de las aplicaciones de los Principios en áreas de práctica definidas. Dado que las Metodologías representan el estado del arte, estas son susceptibles al cambio constante de acuerdo a las nuevas técnicas desarrolladas en varias de dichas áreas.

- **Estándares de práctica** o reglas de conducta, incluyendo, en particular, recomendaciones de cómo y cuando debe emplearse el juicio profesional. Algunos estándares son prescripciones de conducta profesional y usualmente estas no se encuentran sujetas a cambio; algunos otros involucran los juicios necesarios para aplicar los Principios o las Metodologías en algún caso particular y van cambiando conforme lo hacen las circunstancias prácticas.

Principios estadísticos

Definición 0.3.1 *Los fenómenos son sucesos que pueden ser observados.*

Definición 0.3.2 *Un experimento es una observación de un fenómeno dado, realizado bajo condiciones específicas. Los datos que arroja un experimento son llamados resultados.*

Definición 0.3.3 *Un evento es un conjunto de uno o más posibles resultados.*

Principio 1 (Regularidad Estadística). Los fenómenos existen como tales y, si una secuencia de experimentos independientes es realizada bajo las mismas condiciones particulares, la proporción de ocurrencias de un evento dado se estabiliza conforme el número de veces que se repite el experimento se va haciendo más grande.

Definición 0.3.4 *La Probabilidad es una medida que toma valores entre cero y uno para expresar la posibilidad de ocurrencia de un evento.*

Definición 0.3.5 *Una relación definida sobre un conjunto de eventos que asigna un número real cada posible resultado es llamada variable aleatoria (v.a).*

Definición 0.3.6 *Al promedio ponderado de los valores numéricos que puede tomar una variable aleatoria se le llama valor esperado de la variable aleatoria.*

Si un fenómeno muestra regularidad estadística, una estimación de la probabilidad de un evento asociado con el fenómeno es la proporción de ocurrencias del evento en una larga secuencia de experimentos. Sin embargo, existe la posibilidad de evaluar la probabilidad de un evento subjetivamente usando otros criterios.

Definición 0.3.7 *Un modelo científico es una abstracción y representación simplificada de un fenómeno dado.*

Definición 0.3.8 *Un modelo matemático es un modelo científico cuya representación está dada en términos matemáticos.*

Principio 2 (Modelación Estocástica). Un fenómeno que muestra regularidad estadística puede ser descrito a través de un modelo matemático que puede estimar, dentro de cualquier grado de exactitud, la probabilidad de un evento dado en una secuencia de experimentos suficientemente grande.

Definición 0.3.9 *Un modelo determinista es un modelo estocástico simplificado en el cual la proporción de ocurrencia de un evento dado, estimada por el modelo estocástico, es supuesta con probabilidad uno.*

Los modelos estocásticos pueden estar basados en resultados obtenidos de experimentos previos o pueden utilizar suposiciones iniciales acerca de las probabilidades de varios conjuntos de resultados los cuales pueden ser sistemáticamente revisados conforme se va obteniendo más información sobre dichos experimentos.

Definición 0.3.10 *Se dice que un modelo matemático es valido dentro de un grado especifico de exactitud relativo a ciertos resultados observados, si se reproduce estos resultados dentro de dicho nivel de confianza.*

Definición 0.3.11 *Un modelo matemático es potencialmente valido si produce resultados que son consistentes con las observaciones disponibles del fenómeno modelado y de fenómenos similares y, además, tiene la capacidad de ser validado con respecto a los resultados observados cuando los datos disponibles son suficientes.*

Las definiciones estadísticas y principios de esta sección son importantes para los actuarios por dos razones:

- En los fenómenos estudiados por los actuarios es usual suponer que los mismos muestran regularidad estadística. En el mundo real los experimentos no pueden ser reproducidos exactamente. Aún así, el modelo idealizado que sirve como una representación aproximada de algún fenómeno del mundo real posee la propiedad de regularidad estadística.

- Los modelos estocásticos (entre otros modelos matemáticos) se encuentran entre las herramientas actuariales más importantes, debido a que ellos son usados para obtener conclusiones acerca de los fenómenos del mundo real. Específicamente, un modelo estocástico puede ser usado para hacer declaraciones de naturaleza probabilista relacionadas con uno o múltiples experimentos.

PRINCIPIOS ECONÓMICOS Y FINANCIEROS

Definición 0.3.12 *Un bien económico es algo que tiene valor para un agente económico y puede ser intercambiado por algun otro bien o servicio.*

Definición 0.3.13 *El dinero es una medida de intercambio que puede ser negociado por bienes económicos.*

Definición 0.3.14 *La cantidad de dinero que una persona está dispuesta a comerciar por un bien en un punto específico del tiempo es el valor monetario que dicha persona le asigna y se dice que es su precio de reserva.*

Principio 3 (Diversidad de Preferencias). Diferentes agentes economicos pueden asignar en un mismo momento distintos valores monetarios al mismo bien económico, es decir, el precio de reserva cambia entre distintos agentes que participan en una economia.

(Preferencia Temporal). El dinero tiene un valor en el tiempo implica que las personas tienden a preferir dinero en el presente que a recibir la misma cantidad de dinero en el futuro.

Definición 0.3.15 *Un flujo de efectivo es la recepción o desembolso de una cantidad de dinero (o de un bien económico con un valor monetario) en cierto punto en el tiempo. Se dice que un flujo de efectivo es contingente si el monto o la ocurrencia del mismo depende de la realización de un evento sobre el que no se tiene certidumbre.*

Definición 0.3.16 *Un beneficio es dinero o bienes económicos o un derecho para recibir en el futuro un flujo de efectivo; una obligación es el deber de proporcionar un flujo de efectivo.*

Principio 4 (Modelación del Valor Presente). Existe un modelo matemático que puede ser utilizado para estimar el valor actual monetario que algun agente asignaría a cualquier flujo futuro de efectivo.

Definición 0.3.17 *La estimación del valor monetario actual de un flujo futuro de efectivo, dado un modelo de valor presente bajo ciertas suposiciones respecto a las condiciones económicas futuras, es llamado el valor presente del flujo de efectivo relacionado con dichas hipótesis. Tal suposición, hecha con respecto a las condiciones económicas futuras, es llamada escenario.*

Capítulo 1

Distribuciones de supervivencia

Este capítulo desarrolla un conjunto de ideas para describir y utilizar las distribuciones de tiempo hasta la muerte del asegurado.

Se dará a conocer como la distribución de la edad de muerte puede ser descrita por una tabla de mortalidad. Las cuales son utilizadas en muchos campos de la ciencia, en esta tesina, la mortalidad es utilizada para construir modelos para los sistemas de seguros, en particular donde se describe la incertidumbre acerca de la muerte de los asegurados.

Una tabla de mortalidad es un componente indispensable en muchos de los modelos de la ciencia actuarial, de hecho en 1693 Edmud Halley publicó una tabla de mortalidad llamada Breslau contenida en uno de sus estudios, por lo cual dicha fecha es reconocida como el inicio de la Ciencia Actuarial, debido a sus ideas y su moderna notación.

1.1. Fundamentos del modelo

Para comprender la ciencia actuarial, es necesario brindar definiciones formales de tal forma como se hace en la matemática tradicional, con esto se pretende dar una forma axiomática, donde se desprenderá los fundamentos de teoría actuarial.

Definición 1.1.1 *Sea X la variable aleatoria que denota la edad de fallecimiento de un recién nacido, entonces se cumplen las siguientes dos hipótesis:*

1. *X es una realización observable.*
2. *Puesto que X denota el tiempo a que (x) (edad de una persona) fallece entonces X es continua.*

Definición 1.1.2 *Sea $\ominus$ una población hipotética cerrada.El radix de $\ominus$ es el número inicial de vivos y se denota por l_0. $\exists$ un vector $\bar{L} = (l_0, l_1, \ldots l_w)$ tal que $l_x \in \mathbb{N}$*

Definición 1.1.3 *El valor inicial de estudio de una población se denomina radix, y se denota por l_0 entonces*

$$l_x \in [l_0, l_\omega] = [l_0, 0]$$

Definición 1.1.4 *El número ω para el cual ya no existen vivos en el grupo se denota por*

$$\omega = \{x | l_x = 0\}$$

y los decrementos solo serán sólo por muerte.

Definición 1.1.5 (Tabla de Mortalidad) *Exhibe una población hipotética con individuos de la misma edad (x), y su historia subsiguiente de muerte y vida, y esta destinada a medir dichas probabilidades.*

- l_x Denota el número de personas con vida a la edad (x)
- dx Denota el número de personas que mueren con edad (x)
- p_x Denota la probabilidad que una persona de edad (x) sobreviva a edad $x + 1$
- q_x Denota la probabilidad de que una persona con edad (x) muera antes de cumplir la edad $x + 1$

$$q_x = \frac{dx}{lx},\ q_x + p_x = 1,\ p_x = \frac{\#\ de\ casos\ favorables}{\#\ de\ casos\ totales} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$dx = l_x - l_{x+1},\ dx = l_x(q_x),\ l_{x+1} = l_x - dx,\ l_{x+1} = l_x(p_x)$$

Se puede ver a l_x como una función.

Ejemplo

$$l_x = 100(100 - x),\ 0 \leq x \leq 100$$

donde el radix inicial para $(x) = 0$ es 1000, y para el caso opuesto no hay vivos cuando $(x) = 100$, por ejemplo si se desea saber el número de personas vivas a edad 20 se expresa por

$$l_{20} = 100(100-20) = 800,\ d_{25} = l_{25} - l_{26} = 100(100-25) - 100(100-26) = 100$$

Con éste resultado se obtiene que $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{99-x}{100-x}$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \left[\frac{99-x}{100-x}\right] = \frac{1}{100-x}$$

Se puede referir a probabilidades más altas a las de un año con la siguiente notación.

${}_np_x$ Probabilidad de que una persona de edad (x), sobreviva a $x+n$

Existe un término que se dice que son probabilidades diferidas

${}_{n|m}q_x$ Probabilidad de que una persona de edad (x), fallezca entre edades $[x+n, x+n+m)$.

Se expresan las probabilidades anteriores en términos de la primera terminología

$$
\begin{aligned}
{}_nq_x &= \sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k}/l_x && (1.1)\\
{}_{n|}q_x &= \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} && (1.2)\\
{}_{n|m}q_x &= \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n+m-1} d_{x+k}/l_x && (1.3)
\end{aligned}
$$

1.2. La mortalidad

Considere un recién nacido. La edad de fallecimiento es una variable aleatoria continua X, donde $F_X(x)$ denota la distribución de X,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad x \geq 0 \tag{1.4}$$

y

$$s(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x) \; x \geq 0 \tag{1.5}$$

Esto se interpreta como la probabilidad de que una persona de edad cero, sobreviva a edad (x), o que muera después de edad (x).

Características de $s(x)$

- Como $F_X(x)$ es continua $\Rightarrow s(x)$ es continua
- Como $F_X(x)$ es no decreciente $\Rightarrow s(x)$ es no creciente
- $F_X(0) = 0 \Rightarrow s(0) = 1$

Empleando las leyes de probabilidad, se puede hacer inferencias acerca de la edad de muerte en términos de la función de supervivencia.

Por ejemplo, la probabilidad que un recién nacido muera entre las edades (x) y (z) $(x < z)$ esta dado por

$$\begin{aligned} P(x < X < z) &= F_X(z) - F_X(x) =_z q_0 -_x q_0 \\ &= [1 - s(z)]\,[1 - s(x)] =_x p_0 -_z p_0 \\ &= {}_{x|z-x}q_0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

De lo anterior la probabilidad diferida de muerte es

$$_{n|m}q_x =_n p_x -_{n+m} p_x \tag{1.7}$$

Ejemplo

Sea

$$s(x) = 1 - \frac{x}{100},\ \ 0 \leq x \leq 100$$

también se puede ver fácilmente que

$$F_x(X) = \frac{x}{100}\ , f_x(X) = \frac{1}{100} \sim U(0, 100)$$

Conociendo que

$$E(X) = \frac{b-a}{2} = 50,\ Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 833.33$$

1.3. Modelo en términos de $T(X)$

Considere a (x) como la edad del individuo y a X como la variable aleatoria que denota su edad al morir medida desde el nacimiento.

Definición 1.3.1 *Defínase una nueva variable aleatoria $T(x)$, esta indica el tiempo futuro de vida de una persona con edad (x).*

Se define $F_{T(x)}(t) = P(T(x) \leq t) =_t q_x,\ t \geq 0$, en contraste con lo anterior

$$1 - F_{T(x)}(t) = P(T(x) > t) =_t p_x,\ t \geq 0$$

Y utilizando la nueva variable aleatoria se obtiene

$$\begin{aligned} {}_{t|}q_x &= P(t < T(x) \leq t+1) \\ &= F_{T(x)}(t+1) - F_{T(x)}(t) \\ &= {}_{t+1}q_x -_t q_x \\ &= {}_t p_x -_{t+1} p_x \end{aligned} \tag{1.8}$$

Expresando la probabilidad diferida de muerte se observa que

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) < u+t) \\ &= F_{T(x)}(t+u) - F_{T(x)}(t) \\ &= {}_{t+u}q_x -_t q_x \\ &= {}_t p_x -_{t+u} p_x \end{aligned} \tag{1.9}$$

Por definición $T(x) = X - x$ con lo que es posible determinar la distribución de $T(x)$ si se conoce la distribución de (x).

La probabilidad condicionada de que el recién nacido muera entre las edades (x) y $x+t$ dado que ha sobrevivido a edad (x), es

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) = {}_t q_x &= P(x < X < x+t / X > x) \\ &= \frac{P(x < X < x+t \cap X > x)}{P(X > x)} \\ &= \frac{P(x < X < x+t)}{P(X > x)} \\ &= \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \qquad (1.10) \end{aligned}$$

De este hecho se desprende que

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= 1 - {}_t q_x \\ &= 1 - \left(\frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \right) \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \qquad (1.11) \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} {}_{t|u} q_x &= {}_t p_x - {}_{t+u} p_x \\ &= \frac{s(x+t) - s(x+u+t)}{s(x)} \qquad (1.12) \end{aligned}$$

En forma análoga se desprende

$$\begin{aligned} {}_{t|u} q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+u+t)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \left(\frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} \right) \\ &= ({}_t p_x)({}_u q_{x+t}) \qquad (1.13) \end{aligned}$$

1.4. Modelo en términos de $K(X)$

El tiempo futuro de vida truncado de (x) o tambien denominado en ingles por *"Cuartate Future Life Time"*.

Definición 1.4.1 *Sea $K(x)$ la variable aleatoria que denota el número de años completos, que trascurren hasta que fallezca la persona de edad (x), $K(x)$ recibe el nombre de tiempo futuro de vida truncado.*

Esta función se puede determinar a partir de $T(x)$, debido a que

$$P(K(x) = 0) = P(0 < T(x) \leq 1)\ , P(K(x) = 1) = P(1 < T(x) \leq 2)$$

$$P(K(x) = k) = P(k < T(x) \leq k + 1) =_k |q_x \tag{1.14}$$

Probabilidad de que (x) muera en el $k + 1$ ésimo año.

Como $T(x)$ es una variable aleatoria continua

$$P(T(x) = k) = P(T(x) = k + 1) = 0, \ \Rightarrow$$

por consistencia la función de k puede ser definida como

$$\begin{aligned} P(K(x) = k) &= P(k < T(x) \leq k + 1) \\ &= {}_kp_x -_{k+1} p_x \\ &= ({}_kp_x)(q_{x+k}), \ k = 0, 1, 2 \cdots \end{aligned}$$

Con estos hechos y considerando que ${}_tq_x = P(x < X < x + t/X > x)$ supóngase que $t = \Delta x$, ahora bien se tiene por consiguiente que

$$\begin{aligned} {}_{\Delta x}q_x = P(x < X < x + \Delta x/X > x) \\ = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio

$$g'(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \Rightarrow g(y) \approx (y_0) + g'(y)(y - y_0)$$

Haciendo

$$\begin{aligned} y_0 &= x, \\ y &= x + \Delta x, \\ g &\equiv F, \\ g' &\equiv f \end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &\approx F(x)+f(x)\Delta x \\ F(x+\Delta x)-F(x) &\approx f(x)\Delta x \\ {}_{\Delta x}q_x &\approx \frac{f(x)\Delta x}{1-F_X(x)} = \mu(x)\Delta_x \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.5. Fuerza de mortalidad

Definición 1.5.1 *A la función $\mu(x)$, se le define como Fuerza de Mortalidad, es decir la distribución condicional de X, dada la supervivencia a edad (x), y expresa una tasa de decremento obtenida bajo el supuesto de que se comporta igual en $[x, x+1)$, como se hizo a la edad exacta (x),resolviendo la ecuación diferencial.*

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \frac{-s'(y)}{s(y)} \\ &= -\frac{d}{dy}[\ln s(y)] \\ -\mu(y)dy &= d[\ln s(y)] && (1.16) \\ -\int_x^{x+n} \mu(y)dy &= \int_x^{x+n} d[\ln s(y)] \\ &= \ln s(y)|_x^{x+n} = \ln[s(x+n)] - \ln[s(x)] \\ &= \ln\left(\frac{s(x+n)}{s(x)}\right) \\ &= \ln({}_np_x) \\ &= \exp\left\{-\int_x^{x+n} \mu(y)dy\right\} =_n p_x && (1.17) \end{aligned}$$

Esto es la probabilidad de vida en términos de la fuerza de mortalidad.

De este hecho se desprende fácilmente que

$$\begin{aligned} f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) &= \frac{d}{dt}(1 -_t p_x) \\ &= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right) \\ &= \frac{-\frac{d}{dt}s(x+t)}{s(x)}\left[\frac{s(x+t)}{s(x+t)}\right] \\ &= -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\frac{s(x+t)}{s(x)} \\ &= \mu_x(t)_t p_x \end{aligned} \tag{1.18}$$

por lo tanto

$$F_{T(x)}(t) = \int_0^t \mu_x(t)_t p_x dt \tag{1.19}$$

En la siguiente tabla se muestra algunas de las relaciones existentes de la teoría general de la probabilidad que especifican la edad de muerte.

	$F_X(x)$	$s(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
$F_X(x)$	$F_X(x)$	$1 - F_X(x)$	$F'_X(x)$	$F_X(x)/[1 - F_X(x)]$
$s(x)$	$1 - s(x)$	$s(x)$	$-s'(x)$	$-s'(x)/s(x)$
$f_X(x)$	$\int_0^x f_X(u)du$	$\int_x^{\omega-x} f_X(u)du$	$f_X(x)$	$f_X(x)/\int_x^{\omega-x} f_X(u)du$
$\mu(x)$	$1 - exp[-\int_0^x \mu(t)dt]$	$exp[-\int_0^x \mu(t)dt]$	$\mu(x)exp[-\int_0^x \mu(t)dt]$	$\mu(x)$

1.6. Tabla de mortalidad

Cabe destacar que existen muchos tipos de tablas que miden a cierto grupo ya sea una especie de animales, personas o algún comportamiento donde incurra decremento ya sean por hábitos, edades, comunidades entre otras muy diversas lo que continuación se presenta es el grupo de recien nacidos, lo cual se puede extender a cualquier tipo de grupo sin distinción, si se quisiera hacer alguna restricción para cualquier grupo antes mencionado solo basta con utilizar el grupo y aplicar la misma metodologia.

Considere un grupo de l_0 recién nacidos, supónga que cada uno está sujeto a la función de supervivencia $s(x)$.

Sea $\mathfrak{L}(x)$ la variable aleatoria que denota el número de personas del grupo inicial que están con vida en edad (x) entonces $\mathfrak{L}(x)$ puede ser definida como

$$\mathfrak{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j \tag{1.20}$$

donde

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si el j-ésimo individuo esta con vida en edad (x)} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de densidad para I_j viene dada por

$$P(I_j = i) = \begin{cases} s(x) & \text{para i=1} \\ \\ 1 - s(x) & \text{para i=0} \end{cases}$$

Es un evento bernoulli, asi por lo tanto

$$E(I_j) = 1(s(x)) + 0(1 - s(x)) = s(x)$$

Sea

$$\begin{aligned} l_x &= E[\mathfrak{L}(x)] \\ &= E[\sum_{j=1}^{l_0} I_j] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Bajo el supuesto de independencia, $\mathfrak{L}(x)$ es una suma de l_0 variables aleatorias bernoulli,

$$\mathfrak{L}(x) \sim Bin(l_0, s(x)) \tag{1.22}$$

Sea ${}_n\mathfrak{D}_x$ la variable aleatoria que denota el número de personas del grupo inicial l_0 que fallecen en las edades $[x, x+n)$.

${}_n\mathfrak{D}_x$ puede ser definida como

$$\sum_{j=1}^{l_0} H_j$$

donde

$$H_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el j-ésimo individuo falleció en edades [x,x+n)} \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

y su función de densidad esta dada por

$$P(H_j = h) = \begin{cases} s(x) - s(x+n) & \text{Para h=1} \\ 1 - [s(x) - s(x+n)] & \text{Para h=0} \end{cases}$$

$$E(H_j) = s(x) - s(x+n) \tag{1.23}$$

Definición 1.6.1 *La cantidad ${}_nd_x \in \mathbb{N}$ es el número esperado de personas del grupo inicial l_0, que mueren entre las edades $[x, x+n)$*

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= E[{}_n\mathfrak{D}_x] \\ &= E[\sum_{j=1}^{l_0} H_j] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} E[H_j] \\ &= l_0[s(x) - s(x+n] \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Así

$$\begin{aligned} P(K(x)=k) &= {}_{k|}q_x \\ &= \frac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x} \\ &= \frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)} \\ &= \frac{d_{x+k}}{l_x} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Por lo tanto una tabla de mortalidad define completamente la distribución de $K(x) \forall x \in \mathbb{N}$.

1.7. Expectativas de vida

La expectativa sobre el tiempo futuro de vida para una persona puede obtenerse a travéz de la variable aleatoria de muerte, con la cual se estima una edad para la cual cierto grupo potencialmente morira.

Para darle un tratamiento formal a continuación se presentan dos resultados cuya demostracion se completa en el Apéndice.

Teorema 1.7.1 *Si $T(x)$ es una variable aleatoria continua con función de distribución $G(t)$ donde $G(0) = 0$ y función de densidad $G'(t) = g(t)$ si $Z(t)$ es una función monótona, no negativa, diferenciable*

$$\Rightarrow E[Z(t)] = \int_0^\infty Z(t)g(t)dt = Z(0) + \int_0^\infty Z'(t)[1 - G(t)]dt \tag{1.26}$$

Teorema 1.7.2 *Si $K(x)$ es una variable aleatoria discreta con probabilidad solo en los enteros no negativos con función de distribución $G(K)$ y función de densidad $g(k) = \Delta G(K-1)$ y si $Z(k)$ es una función monótona no negativa*

$$\Rightarrow E[Z(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} Z(k)g(k) = Z(0) + \sum_{k=0}^{\infty}[1 - G(k)]\Delta Z(k) \tag{1.27}$$

La esperanza del tiempo futuro de (x) se define como:

$$E[T(x)] = \int_0^{\omega - x} t f_{T(x)}(t)dt \tag{1.28}$$

Haciendo $Z(t) = t$ y $F_{T(x)}(t) =_t q_x$ y aplicando el teorema resulta

$$\begin{aligned} E[T(x)] &= 0 + \int_0^{\omega-x} [1 -_t q_x] dt \\ &= \int_0^{\omega-x} ({}_t p_x) dt \\ &= \overset{o}{e}_x \end{aligned} \tag{1.29}$$

Esto es la esperanza completa de vida para (x) o bien, el tiempo esperado que sobreviva (x).

$$\begin{aligned} Var[T(x)] &= E[T(x)^2] - E^2[T(x)] \\ &= 2\int_0^{\omega-x} t({}_t p_x) dt - (\overset{o}{e}_x)^2 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Para el caso discreto resulta

$$E[K(x)] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} kP(K(x) = k) \tag{1.31}$$

Aplicando el teorema para el caso discreto y haciendo

$$\begin{aligned} Z(k) &= k \Rightarrow \Delta Z(k) = 1, \\ G_k(k) &= P(K(x) \leq k) =_{k+1} q_x \end{aligned}$$

Resulta que:

$$\overset{o}{e}_x = 0 + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (1 -_{k+1} q_x) = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} ({}_k p_x) \tag{1.32}$$

y

$$E[K(x)^2] = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} (2k-1)_k p_x$$

$$Var[K(x)] = E[K(x)^2] - (\overset{o}{e}_x)^2 \tag{1.33}$$

Definición 1.7.1 *El número total esperado de años vividos entre las edades* (x) *y* $x+1$ *por aquellos supervivientes de la cohorte inicial de* l_0 *vivos se denota por.*

$$L_x = \int_0^1 t l_{x+t}\mu_x(t)dt + l_{x+1} \tag{1.34}$$

y es el ponderado el cual puede expresar la tasa central de muerte para un intervalo de x y $x+1$.

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} \tag{1.35}$$

1.8. Leyes analíticas de mortalidad

Las principales justificaciones para postular leyes analíticas son que muchos fenómenos físicos, pueden ser estudiados por simples formulas, es muy practico y fácil de comunicar una función con pocos parámetros, la estimación de los parámetros a partir de la tabla de mortalidad.

Leyes de funciones de supervivencia

Autor	$\mu(x)$	s(x)	Restricciones
De Moivre(1929)	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$	$0 \leq x \leq \omega$
Gompertz(1825)	Bc^x	$\exp(-m(c^x - 1))$	$B > 0, c > 1, x \geq 0$
Makeham(1860)	$A + Bc^x$	$\exp(-A - m(c^x - 1))$	$B > 0, A \geq -B, c > 1, x \geq 0$
Weibul	kx^n	$\exp(-ux^{n+1})$	$k > 0, n > 0, x \geq 0$

Ejemplo

Suponga que se estudia un grupo de personas en edad 30,los reportes sobre cierta enfermedad estiman que el impacto de un avance médico incrementa en cuatro años la esperanza completa de vida, antes del descubrimiento medico $s(x)$ seguía la ley de Moivre con $\omega = 100$ suponiendo que se cumple esta ley. Calcular la nueva edad límite.

Por tener que léy de Moivre se distribuye uniforme $U \sim (30, 100)$ y la esperanza completa de vida es la siguiente

$$\overset{o}{e}_{30} = \frac{100+30}{2} = 65$$

Ahora para la nueva esperanza con cuatro años más de vida resulta que

$$\begin{aligned} \overset{*o}{e}_{30} &= 69 \\ \overset{*o}{e}_{30} &= \frac{138}{2} \\ \overset{*o}{e}_{30} &= \frac{108+30}{2} \\ \Rightarrow \omega = 108 \end{aligned} \tag{1.36}$$

1.9. Edades fraccionarias

La mayoría de las veces lo que se tiene a la mano es el vector $\bar{L}$ que da origen a la v.a $K(x)$, los cuales sirven para estimar la distribución de $T(x)$.Para éste caso es necesario hacer supuestos sobre la distribución entre dos valores muéstrales (enteros) es decir, interpolar bajo alguna hipótesis entre los valores conocidos de $K(x)$. Como esto se escoge a priori por el modelador deben adoptarse supuestos sobre la misma entre dos edades $(x, x+1)$ consecutivas lo anterior se puede hacer con diferentes métodos de interpolación, donde se supone que (x) es entero y $0 \leq t \leq 1$ los más utilizados son los siguientes:

1. **Interpolación lineal:** $s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1)$ bajo el supuesto se asume ${}_tp_x$ una función lineal.
2. **Interpolación Exponencial:**$\log s(x+t) = (1-t)\log s(x) + t\log s(x+1)$ en este supuesto se supone ${}_tp_x$ como una función exponencial (Fuerza constante de mortalidad).
3. **Interpolación Armónica:**$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{(1-t)}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}$. También se conoce como hipótesis de Balcucci y se toma cuando ${}_tp_x$ es una función hiperbólica.

Con estos supuestos se tiene la siguiente tabla:

	1	2	3
${}_tq_x$	tq_x	$1-e^{-\mu t}$	$tq_x/[1-(1-t)q_x]$
${}_tp_x$	$1-tq_x$	$e^{-\mu t}$	$p_x/[1-(1-t)q_x]$
${}_yq_{x+t}$	$yq_x/[1-tq_x]$	$1-e^{-\mu y}$	$yq_x/[1-(1-y-t)q_x]$
$\mu_x(t)$	$q_x/[1-tq_x]$	μ	$q_x/[1-(1-t)q_x]$
${}_tp_x\mu_x(t)$	q_x	$e^{-\mu t}\mu$	$q_xp_x/[1-(1-t)q_x]^2$

Ejemplo

Un actuario se encuentra modelando la mortalidad de un grupo de 1000 personas, cada una con edad 95. Para los siguientes 3 años, comienza calculando el número esperado de sobrevivientes en cada edad entera con

$$l_{95+k} = 1000{}_kp_{95}$$

para $k = 1, 2, 3$. subsecuentemente, el actuario calcula el número esperado de sobrevivientes a mitad de cada año usando el supuesto de la interpolación lineal, se muestra el resultado.

(x)	l_x
95	1000
95.5	800
96	600
96.5	480
97	360
97.5	288
98	216

El actuario decide el supuesto para la mortalidad de edades fraccionarias al de una fuerza constante de mortalidad, sin embargo mantiene su supuesto original para cada ${}_kp_{95}$. Calcular el número esperado de sobrevivientes a edad 97.5.

$$\ln(l_{97+0.5}) = (1\text{-}0.5)\ln(360) + 0.5\ln(216)$$

$$\ln(l_{97.5}) = 5.63$$

$$l_{97.5} = e^{5.63} = 278.85$$

1.10. Tablas selectas de mortalidad

Las tablas selectas de mortalidad miden el efecto que produce el proceso de selección de riesgos utilizado en las compañíías, con el avance del tiempo el efecto tiende a disminuir hasta hacerse nulo dando lugar a la tabla ultima de mortalidad, las cuales presentan grupos de personas por edades, que provienen de una tabla selecta. En las tablas selectas aparecen los grupos de sobrevivientes clasificados por edad y por el tiempo que han estado asegurados teniendo tantas columnas como sea la duración de los efectos de selección.El impacto en la selección del tiempo hasta la muerte, $T(x)$, puede ser disminuido.

Ejemplo

Años transcurridos desde la edad de entrada

Entrada (x)	0	1	2	3	4	5 o más	Final (x)
$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$l_{[x+3]}$	$l_{[x]+4}$	$l_{[x]+5}$	
20	9906	9904	9901	9833	9716	95879	25
21	9924	9844	9827	9756	9677	9637	26
22	9853	9742	9703	9615	9603	95017	27
23	9875	9752	9693	9610	9583	9557	28
24	9886	9772	9663	9608	9594	9536	29

Para obtener las respectivas probabilidades es con lo siguiente.

$$_np_{[x]} = \frac{l_{[x]+n}}{l_{[x]}}, \ nq_{[x]} = \frac{l_{[x]} - l_{[x]+n}}{l_{[x]}}$$

Capítulo 2

Beneficios por decremento

En este capítulo se darán conceptos actuariales, y se establece un sistema para reducir la adversidad de impactos financieros de algunos eventos aleatorios. Con el sistema de individuos y empresas se adoptan modelos que representan preferencias, donde los modelos estocásticos representan la incertidumbre del impacto financiero, además se trataran los principios económicos que ayudan a fijar el precio, donde los acuerdos son alcanzados después de analizar tales modelos.

2.1. El valor presente del riesgo

Antes de definir las variables de valuación es importante reconocer a las categorías de riesgo a partir de definiciones formales.

Los siguientes principios han sido establecidos por la SOA para este fin.

Principios de modelación actuarial

Definición 2.1.1 *Un riesgo actuarial es un fenómeno que tiene consecuencias económicas y que está sujeto a incertidumbre con respecto a una o más variables actuariales de riesgo: ocurrencia, frecuencia y severidad.*

Principio 5 (Modelación de los Riesgos Actuariales). Los riesgos actuariales pueden ser modelados estocástica mente bastándose en suposiciones con respecto a las probabilidades que afectarían a las variables actuariales de riesgo en el futuro, incluyendo suposiciones con respecto a los escenarios.

Las suposiciones sobre las cuales esta basado un modelo actuarial se llaman hipótesis actuariales.

Un modelo actuarial generalmente debe incluir un modelo de valor presente si el mismo intenta determinar valores económicos. Un modelo de valor presente incluido en un modelo actuarial esta basado en suposiciones concernientes a aspectos del entorno económico futuro, tales como tasas de interés y de inflación.

El modelo de valor presente puede reflejar las preferencias del actuario que construye el modelo. Sin embargo, en ciertas situaciones, la opción del actuario queda restringida por regulaciones u otros estándares. Históricamente, los actuarios han usado modelos deterministas. Tales modelos deterministas pueden, sin embargo, ser de naturaleza dinámica, reflejando las suposiciones del entorno futuro.

Por ejemplo: las suposiciones para un seguro de vida y anualidades están a menudo en función de las tasas de interés del mercado. En año recientes, se han vuelto indispensables los modelos basados en distribuciones de probabilidad no triviales para las variables actuariales de riesgo. Las metodologías actuariales no pueden eludir tales modelos estocásticos, al igual que los modelos deterministas. La elección del modelo y el grado de sensibilidad requerida están también sujetos a ciertos estándares.

Es valioso recordar que la validez de un modelo matemático depende de su capacidad para reproducir los datos observados. Al transcurrir el tiempo, el grado de exactitud del modelo puede cambiar conforme se vayan realizando más observaciones.

Principio 6 (Validación de Modelos Actuariales). El cambio a través del tiempo en el grado de exactitud de un modelo actuarial validado inicialmente depende de los cambios en:

- La naturaleza del derecho para recibir o el deber para realizar un pago.
- Los diversos entornos (regularidad, social, financiero, económico, etc.) dentro de los cuales ocurre el evento modelado.
- La suficiencia y calidad de los datos disponibles para validar el modelo.

Definición 2.1.2 *El valor actuarial de un flujo de efectivo futuro que es contingente en las variables actuariales de riesgo es el valor presente desarrollado por un modelo actuarial asociado con dichas variables.*

Recuerde que el valor presente y el valor actuarial de un flujo futuro de efectivo son, en general, variables aleatorias. El valor actuarial de cualquier beneficio u obligación es determinado por el valor actuarial de los flujos de efectivo asociados, incluyendo dinero actualmente entregado. En general, el componente de los flujos de efectivo no sólo tiene valores inciertos sino que además no son independientes unos de otros.

Principio 7 (Combinaciones de Flujos de Efectivo). El grado de incertidumbre del valor actuarial de una combinación de flujos de efectivo refleja la incertidumbre que afecta a cada variable actuarial de riesgo y al proceso de combinación.

El pago del beneficio de un seguro de vida depende solo del intervalo donde el asegurado fallezca, llámese a la función beneficio como b_t y una función descuento como, v_t, en nuestro modelo,v_t es el valor de el dinero regresado en el tiempo, donde t es intervalo de fallecimiento.

Se define la función valor presente Z_T como

$$Z_T = b_t v_t$$

Entonces, Z_T es el valor presente del beneficio de la póliza de seguros, hasta el tiempo futuro de vida del asegurado donde $T = T(x)$, el pago del beneficio es una variable aleatoria Z_T.

Primero se define b_t y v_t, lo siguiente es determinar algunas características de la distribución de $Z_T = Z$ eso es consecuencia de la distribución para T.

Un seguro temporal brinda un pago si y solo si el asegurado muere en n-años a partir del momento en que se aseguro. Si una unidad es pagadera al momento de la muerte de (x) entonces.

$$b_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

$$v_t = V^t \qquad t \geq 0,$$

$$Z = \begin{cases} V^T & \text{si } T \leq n \\ 0 & \text{si } T > n \end{cases}$$

En general existen tres restricciones:

- El tiempo futuro de vida es no negativa.
- Es posible definir b_t, v_t y Z de manera arbitraria siempre siendo funciones positivas.
- Para el valor t donde b_t es 0, el valor de v_t es irrelevante, en otro caso v_t se asume constante.

La esperanza de la variable aleatoria,Z es llamada valor presente actuarial del seguro, y se expresa por

$$E[Z] = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^{\omega - x} V^t z_t f_T(t)dt = \int_0^n V^t \ {}_t p_x \mu_x(t)dt \tag{2.1}$$

Donde el $\overset{1}{x}$ representa la muerte de la persona a cierta edad.

El j-esimo momento de esta distribución esta dado por

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= \int_0^n (V^t)^j_t p_x \mu_x(t) \\ &= \int_0^n (e^{-\delta})^{it} \; {}_tp_x \mu_x(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esta es llamada la regla de los momentos donde esta denotada por:

$$E[Z^j]@\delta_t = E[Z]@j\delta_t \tag{2.3}$$

Siguiendo la regla de los momentos

$$Var(Z) =^2 \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2 \tag{2.4}$$

Donde ${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ es el valor presente actuarial de un seguro temporal a n años a una fuerza de interés de 2δ.

Un seguro completo de vida provee de un pago después del fallecimiento a cualquier tiempo en el futuro. Si el pago es de una unidad al momento del fallecimiento de (x), entonces

$$b_t = 1 \quad t \geq 0, \;\; v_t = V^t \quad t \geq 0, \;\; Z_T = V^T \quad T \geq 0.$$

El valor presente actuarial se denota por

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\omega - x} V^t \; {}_tp_x \mu_x(t) dt. \tag{2.5}$$

Para una tabla selecta de (x) y con $x + h$, la expresión resultante es

$$\bar{A}_{[x]+h} = \int_0^{\omega - x} V^t_t p_{[x]+h} \mu_x(h + t) dt. \tag{2.6}$$

Nota

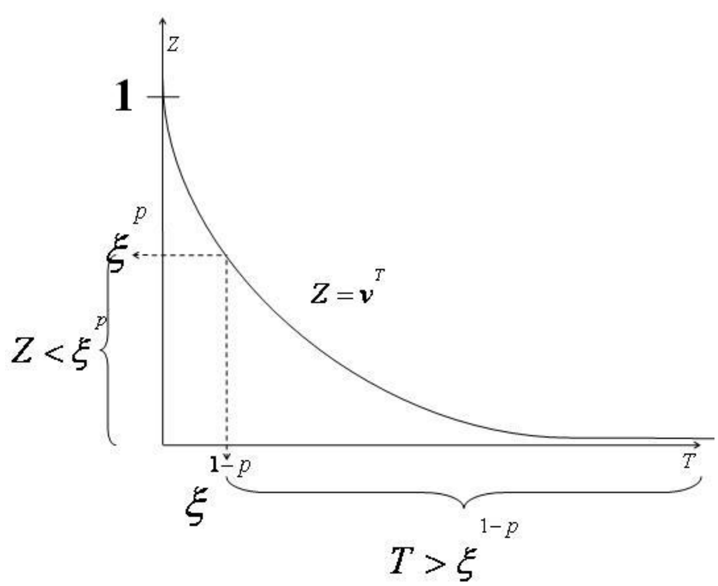
El seguro completo de vida es el límite de un seguro temporal cuando $n \to \infty$.

$$\bar{A}_x = \lim_{n \to \infty} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

2.2. Relación entre $Z_{T(x)}$ y $T(x)$

Si se cuenta con la función de densidad de T y no la de Z, se puede encontrar el evento para T el cual corresponda a $P(Z \leq \xi_z^{1-p}) = 1 - p$, graficando T contra Z, se observa que $\xi_z^{1-p} = V^{\xi_T^p}$. Esto es debido a que Z es una función estrictamente decreciente de T, observemos que

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(V^T \leq z) \\ &= P(T \log v \geq \log z) \\ &= 1 - P\left(T \leq \frac{\log z}{\log v}\right) \\ &= 1 - F_T\left(\frac{\log z}{\log v}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$



2.3. Beneficio al momento del fallecimiento

Un seguro vitalicio otorga un pago al final de los n años si y solo si el asegurado sobrevive a n años a partir de la emisión de la póliza. Si el monto es pagadero por una unidad, entonces

$$b_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t > n \\ 0 & \text{si } t \leq n \end{cases}$$

$$v_t = V^n \quad t \geq 0,$$

$$Z = \begin{cases} V^n & \text{si } T > n \\ 0 & \text{si } T \leq n \end{cases}$$

Si un reclamo ocurre, esta predeterminado por $Z = IV^n$, donde I es la función indicadora del evento de supervivencia a edad $x+n$. Esto es $I = 1$ si el asegurado sobrevive a la edad $x+n$ y 0 en otro caso. El seguro vitalicio a n años es el valor presente actuarial y tiene dos símbolos ${}_nE_x$ en un contexto de anualidad y el otro es $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ en contexto de seguros. Sin enbargo se utilizara la notación para los seguros.

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E[Z] = V^n E[I] = V^n \ {}_np_x \tag{2.8}$$

$$Var(Z) = V^{2n} Var(I) = V^{2n} \ {}_np_x \ {}_nq_x = {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^2 \tag{2.9}$$

El seguro Dotal Mixto es una combinación de los dos seguros antes mencionados, que son beneficio por muerte y el beneficio por supervivencia, esto es proporcionan un monto pagadero si la muerte ocurre o si sobrevive a los siguientes n años, cual sea que ocurra primero. Si el seguro es por un monto de una unidad y el beneficio es pagadero al momento de la muerte, entonces

$$b_t = 1 \quad t \geq 0,$$

$$v_t = \begin{cases} V^t & \text{si } t \leq n \\ V^n & \text{si } t > n \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} V^T & \text{si } T \leq n \\ V^n & \text{si } T > n \end{cases}$$

El valor presente actuarial esta denotado por $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$, y de la regla de los momentos resulta

$$E[Z^j]@\delta = E[Z]@j\delta$$

$$Var(Z) = \ ^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2$$

Un seguro diferido provee de un beneficio siguiendo a la muerte del asegurado si y solo si muere por lo menos m años siguientes a la contratación de la póliza, el beneficio pagadero puede ser en los seguros ya mencionados.

Aunque T es una variable aleatoria continua, Z es una función mixta en 0 esto es porque $Z = 0$ es equivalente a $T \leq m$.

En general para una fuerza constante de interés y supuestos de mortalidad resulta que para $Z = 0$,

$$F_Z(0) = P(T \leq m) = F_T(m)$$

para $0 < z < V^m$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Z = 0) + P(0 < Z \leq z) \\ &= P(T \leq m) + P(0 < V^T \leq z) \\ &= P(T \leq m) + P\left(T > \frac{\log z}{\log v}\right) \\ &= F_T(m) + 1 - F_T\left(\frac{\log z}{\log v}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

y para $z > V^m$, $F_Z(z) = 1$

Un seguro completo de vida creciente anualmente brinda 1 al momento de la muerte en el primer año, 2 en el segundo, y así sucesivamente, es caracterizado por la siguiente función en el caso discreto

$$\begin{aligned} b_{K(x)+1} &= K(x) + 1 \quad K(x) = 0, 1, 2 \cdots \\ v_{K(x)+1} &= V^{K(x)+1} \\ Z_{K(x)+1} &= (k+1)V^{k+1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

El valor presente actuarial De este seguro se denota por

$$(IA)_x = E[Z_{K(x)+1}] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)V^{k+1} \ _{k|}q_x \tag{2.12}$$

Para un seguro a n años esta expresado

$$Z_{K(x)+1} = \begin{cases} (K(x)+1)V^{k+1} & \text{si } K(x) = 0, 1, \dots n-1 \\ \\ nV^{k+1} & \text{si } K(x) = n, n+1, \dots \end{cases}$$

El valor presente actuarial esta dado por

$$E[Z_{K(x)+1}] = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)V^{k+1} \ {}_{k}|q_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} nV^{k+1} \ {}_{k}|q_x = (I_{\overline{n}|}A)_x \quad (2.13)$$

Un Seguro decreciente a n años es aquel en que la suma asegurada es n al primer año $n-1$ al segundo, hasta que la suma asegurada es 1, y esta expresada por

$$\begin{aligned} b_{K(x)+1} &= n - K(x) \quad K(x) = 0, 1, 2 \cdots \\ v_{K(x)+1} &= V^{K(x)+1} \\ Z_{K(x)+1} &= [n - K(x)]V^{k+1} \\ E[Z_{K(x)+1}] &= \sum_{k=0}^{n-1} V^{k+1} \ {}_{k}|q_x = (DA)^{1}_{x:\overline{n}|} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4. Beneficios continuos y discretos

Se ha visto que $T = K(x) + s(x)$ así

$$\begin{array}{rcl} \bar{A}_x & = & E[Z] = E[V^T] \\ & = & E[V^{K(x)+1-1+s(x)}] \\ & = & E[V^{K(x)+1}V^{-[1-s(x)]}] \\ \text{como} \;\; K(x) & \perp & s(x) \\ & = & E[V^{K(x)+1}]E[(1+i)^{1-s(x)}] \text{ si } s(x) \sim U(0,1) \\ & = & A_x \left(\int_0^1 (1+i)^{1-s} I_s ds \right) \\ & = & A_x(1+i) \left(\int_0^1 e^{-\delta s} ds \right) \\ & = & A_x(1+i) \left(-\frac{e^{-\delta s}}{\delta} \right) |_0^1 \\ & = & A_x(1+i) \left(\frac{-e^{-\delta}}{\delta} + \frac{1}{\delta} \right) \\ & = & A_x(1+i) \left(\frac{-e^{-\delta}+1}{\delta} \right) \\ & = & A_x(1+i) \left(\frac{-(1+i)^{-1}+1}{\delta} \right) \\ & = & A_x \left(\frac{-1+(1+i)}{\delta} \right) \\ \bar{A}_x & = & \frac{i}{\delta} A_x \end{array} \tag{2.15}$$

Si se supone que $b_{K(x)+1} = b_T$ entonces $E[Z] = \frac{i}{\delta} E[b_{K(x)+1}]$, es decir que sin importar el beneficio siempre que $b_{K(x)+1} = b_T$, $\frac{i}{\delta}$ es el ponderador y todos los seguros pueden ser expresados por el ponderador.

$${}_{n|}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \; {}_{m|}A_x \tag{2.16}$$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} \tag{2.17}$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x \tag{2.18}$$

$$(D\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}(DA)_x \tag{2.19}$$

Teorema 2.4.1 (Desigualdad de Jensen) *Sea X una variable aleatoria y $g(x)$ una transformación sobre (x), siendo $g(x)$ convexa, entonces*

$$E[g(x)] \geq g(E[x])$$

Demostración. Para establecer la desigualdad definase a $l(x)$ una linea tangente a $g(x)$ en el punto $E[x]$=c, mientras que $l(x) = a + bx$ para algunoa a y b.

$$\begin{aligned} g(x) &\geq a + bx \\ E[g(x)] &\geq E[a + bx] \\ &= l(E[x]) \quad \text{(Por definición de } l(x)) \\ &= g(E[x]) \quad \text{(l(x) es tangente a } E[x]) \end{aligned}$$

Teorema 2.4.2 *El cobro mínimo que debe realizarse por una prima neta única para (x), esta acotada por $V^{\overset{o}{e}_x}$.*

Demostración. Sea Z la trasformación, donde $v_T = V^T$, luego

$$\begin{aligned} Z &= V^T = e^{-\delta T} \\ Z &= -\delta e^{-\delta T} \\ Z &= (\delta)^2 e^{-\delta T} > 0 \end{aligned}$$

Entonces Z es convexa y se cumple la desigualdad de Jensen

$$E[Z] = \bar{A}_x \geq g(E[T(x)]) = V^{E[T(x)]} = V^{\overset{o}{e}_x} \tag{2.20}$$

2.5. Ecuación dinámica de beneficios

Si tratamos de precisar el concepto de sistemas dinámicos, podríamos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas deterministas, es decir, consideramos situaciones que dependan de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

Siendo un poco más formales, se prodría decir que un sistema dinámico es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado S. El espacio S puede imaginarse, por ejemplo, como el espacio de estados de cierto sistema físico.

Matemáticamente, S puede ser un espacio euclideano o un subconjunto abierto de un espacio euclideano. Un sistema dinámico para S nos dice que $\forall\ x \in S$ dónde x denota una unidad de tiempo más tarde, dos en el siguiente instante, y asi sucesivamente. Denotamos estas nuevas posiciones de x por $x_1,\ x_2$ respectivamente. En el instante cero, x está en x o x_0. Una unidad antes del instante cero, x estaba en x_{-1}. Si se extrapola para cubrir todos los números reales, se obtiene una trayectoria $x_t\ \forall t$. La aplicación $\mathbb{R} \longrightarrow S$, que envía t a x_t es una curva en S que representa la historia de x cuando t se encuentra en el espacio parametral valido para el fenómeno, en este caso $[0, \infty]$.

Definición 2.5.1 *Un Sistema Dinámico es una aplicación $\phi : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S$, de clase C^∞, donde S es un conjunto abierto de un espacio euclideo, tal que, escribiendo $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, la aplicación $\phi_t : S \longrightarrow S$ satisface*

- *$\phi_0 : S \longrightarrow S$ es la función identidad.*
- *La composición $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}, \forall\ s, t \in \mathbb{R}$.*

Para comenzar con el análisis, se mostrara que

$$\bar{A}_x = \frac{\int_x^{\omega - x} V^y\ {}_y p_0 \mu(y) dy}{V^x\ {}_x p_0}\ \forall\ x \geq 0$$

Por definición se tiene que $\bar{A}_x = \int_0^{\omega - x} V^t\ {}_t p_x \mu_x(t) dt$ luego

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0}$$

Por otro lado

$$f_{T|T\leq h}(t|t\leq h)=\begin{cases} f_T(t)/P(T\leq h) & \text{si } T\leq h \\ 0 & \text{Otro Caso}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E[V^T] \quad \text{Por el Teorema de probabilidad total} \\
&= E\left[V^T|T\leq h\right]P(T\leq h)+E\left[V^T|T>h\right]P(T>h) \\
&= \int_0^h V^t \frac{f_T(t)}{P(T\leq h)}P(T\leq h)+E\left[V^T|T>h\right]P(T>h) \\
&= \int_0^h V^t \ {}_tp_x\mu_x(t)dt+E\left[V^{T-h+h}|T-h>0\right]\ {}_hp_x \\
&= \int_0^h V^t f_T(t)dt+V^hE\left[V^{T^*}|T^*>0\right]\ {}_hp_x \quad \text{Donde } T^*=T-h \\
&= \int_0^h V^t f_T(t)dt+V^h\bar{A}_{x+h}\ {}_hp_x
\end{aligned}$$

Por la definición de derivada resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\bar{A}_x &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\bar{A}_{x+h}-\left[\int_0^h V^t f_T(t)dt+V^h\bar{A}_{x+h}\ {}_hp_x\right]}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\bar{A}_{x+h}\left[1-V^h\ {}_hp_x\right]}{h}-\frac{\int_0^h V^t f_T(t)dt}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\left(\underbrace{\frac{-\bar{A}_{x+h}\left(V^h\ {}_hp_x-V^0\ {}_0p_x\right)}{h}}_{1}\right)-\left(\underbrace{\frac{\int_0^h V^t f_T(t)dt-\int_0^0 V^t f_T(t)dt}{h}}_{2}\right)\right\} \\
\textbf{(1)} &= -\bar{A}_x\frac{d}{dt}\left(V^t\ {}_tp_x\right)|_{t=0} \\
&= -\bar{A}_x\left[-e^{-\delta t}\ {}_tp_x\mu_x(t)+\left(-\delta e^{-\delta t}\ {}_tp_x\right)|_{t=0}\right] \\
&= \bar{A}_x\left(\mu(x)+\delta\right) \\
\textbf{(2)} &= \frac{d}{dt}\int_0^h V^t\ {}_tp_x\mu_x(t)dt|_{t=0} \\
&= V^h\ {}_hp_x\mu_x(h)|_{h=0} \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = \bar{A}_x\left[\mu(x)+\delta\right]-\mu(x) \tag{2.21}$$

Definiendo así la ecuación dinámica que relaciona las variaciones infinitesimales de un seguro vitalicio al variar la edad de referencia.

2.6. Niveles de seguridad sobre riesgos

Un sistema de seguros esta enfocado a reducir el impacto financiero de algunos tipos de eventos aleatorios. A través de estos sistemas los individuos y organizaciones adoptan modelos de utilidad para representar preferencias, los modelos estocásticos representan la incertidumbre financiera, y los principios económicos guían el precio. El equilibrio es alcanzado a través del análisis de estos modelos.

Para una compañía de seguros, se define la variable aleatoria de pérdida denotada por S, para la cual se busca una función de distribución. El modelo individual de riesgo se define por

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

donde las X_i representan la pérdida del asegurado i y n es el número contratos. Normalmente las $X_i's$ se asumen variables aleatorias independientes y un grupo cerrado, estas son las unidades aseguradas desde un principio n. Si los asegurados pudieran migrar en el modelo seria abierto.

Primero se considera el caso para dos variables aleatorias esto es la línea $S = X+Y$ aquí la función de distribución $F_S(s) = P(S \leq s) = P(X+Y \leq s)$.

Para el caso de dos variables aleatorias discretas y no negativas, se utiliza la léy de probabilidad total

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{\forall y \leq s} P(X+Y \leq s|Y=y)P(Y=y) \\ &= \sum_{\forall y \leq s} P(X \leq s-y|Y=y)P(Y=y) \\ &= \sum_{\forall y \leq s} F_X(s-y)f_Y(y) \end{aligned} \tag{2.22}$$

La función de densidad correspondiente se calcula por

$$f_S(s) = \sum_{\forall y \leq s} f_X(s-y)f_Y(y) \tag{2.23}$$

Para el caso continuo es totalmente análogo.

En probabilidad la ecuación $F_S(s)$ es llamada convolución de un par de distribuciones $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ y es denotado por $F_X * F_Y$.

Para determinar la distribución de la suma de más de dos variables, se puede utilizar el proceso repetidamente para $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ donde todas las X_i' son variables aleatorias independientes y las F_i denotan la función de distribución de cada X_i, y $F^{(k)}$ es la función de distribución de $X_1+X_2+\cdots+X_k$, procediendo iterativamente.

$$
\begin{aligned}
F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} \\
F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\
F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \\
&\vdots \\
F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

El teorema de límite central brinda un método para obtener valores numéricos para la distribución de la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $X_1, X_2, \ldots$, con $E[X_i] = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2$.Para cada n, la distribución de $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$, donde $\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots X_n)/n$, tiene media 0 y varianza 1.La secuencia de distribuciones (n=1,2,...) es conocida para aproximar la distribución normal estándar. Cuando n es grande el teorema es aplicado para aproximar la distribución de $\overline{X}_n$ por una normal con media μ y varianza σ^2/n. Equivalentemente, la distribución de la suma de n variables aleatorias se distribuye aproximadamente a una normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$,la efectividad de esta aproximación no depende solo del número de variables sino también de la desviación de la distribución de la suma. Muchos libros de estadística recomiendan al menos que n sea 30 para una aproximación razonable.

La compañías de seguros desean tener un factor de ajuste donde se le cobrara a cada persona un monto extra tal que la empresa tenga una probabilidad pequeña de incumplir en sus obligaciones se toma como α, y esta dado por $(1+\theta)E[X_j]$, donde θ es el factor de seguridad.

El criterio para θ es que $P(S \leq (1+\theta)E[S]) = 1 - \alpha$ donde

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Utilizando el teorema central del límite esta probabilidad se puede reescribir como

$$P\left[\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right] = 1 - \alpha \tag{2.25}$$

Siguiendo lo anterior se obtiene el valor de θ con la función inversa de una normal.

$$\theta = \frac{\phi(1-\alpha)\sqrt{Var(S)}}{E[S]} \tag{2.26}$$

Para los modelos de riesgo individual se tiene

$$\begin{aligned} E[S] &= \sum_{k=1}^{n} E[X_k] \\ Var(S) &= \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \end{aligned}$$

Una aplicación importante, que incluye un portafolio de riesgo y se determinara un factor de seguridad para garantizar los pagos.

Ejemplo

Supóngase que se tienen 100 vidas independientes, una fuerza constante de mortalidad de, μ= 0.04 y el monto del beneficio es de 10 unidades pagaderas al momento de la muerte.

El pago del beneficio tiene una tasa de retorno de δ=0.06. Calcular el factor de seguridad a t=0 tal que la probabilidad de tener suficientes fondos para responder a nuestras obligaciones al momento de la muerte de cada individuo sea 0.95.

Para cada persona se tiene la función

$$\begin{aligned} b_t &= 10 \quad t \geq 0 \\ v_t &= V^t \quad t \geq 0 \\ Z &= 10V^T \quad T \geq 0 \end{aligned}$$

Como $t = 0$ entonces $Z = 10V^0$, y utilizando el modelo individual para el monto total de reclamaciones se tiene por consiguiente que

$$S = \sum_{i=1}^{100} Z_i$$

Para utilizar la distribución normal se obtiene

$$\begin{aligned}
E[Z] &= 10\bar{A}_x \\
&= 10\int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}e^{\mu t}\mu dt \\
&= 10\frac{\mu}{\mu+\delta} \\
&= 10\frac{0.04}{0.04+0.06} = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[Z^2] &= 10^2\ {}^2\bar{A}_x \\
&= 100\frac{\mu}{\mu+2\delta} \\
&= 100\frac{0.04}{0.04+2(0.06)} = 25
\end{aligned}$$

y en consecuencia $Var(Z) = 9$ utilizando esto se obtiene

$$\begin{aligned}
E[S] &= 100(4) = 400 \\
Var(S) &= 100(9) = 900
\end{aligned}$$

Analíticamente se requiere un número tal que $P(S \leq (1+\theta)E[S]) = 0.95$, esto es equivalente a

$$P\left[\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{40\theta}{3}\right] = 0.95$$

y por consiguiente $\theta = \frac{3(1.645)}{40} = 0.123375$.

Capítulo 3

Beneficios por permanencia

En este capítulo se dará a conocer los principios de la administración del riesgo, y los esquemas de modelación que están enfocados al pago de un beneficio por la permanencia anualidades contingentes y su relación con la variable aleatoria $T(x)$. Conocido como:

3.1. El valor presente del riesgo

Principios de administración del Riesgo

Definición 3.1.1 *Una persona u objeto involucrado en un evento asociado con un riesgo actuarial es llamado objeto de riesgo o simplemente riesgo. La identificación de riesgos es un proceso que determina si una persona o un objeto es un riesgo sujeto a algúna variable de riesgo actuarial dado.*

Definición 3.1.2 *El control de riesgos es un proceso que reduce el impacto de una o más de las variables actuariales de riesgo asociadas con el riesgo actuarial.*

Definición 3.1.3 *La transferencia o financiamiento de riesgos es un mecanismo que provee flujos de efectivo que son contingentes respecto a la ocurrencia de un evento asociado con el riesgo actuarial y pretende resarcir las indeseadas consecuencias económicas.*

Definición 3.1.4 *Un sistema de administración de riesgos es un acuerdo que involucra una o más identificaciones de riesgo, control y transferencia o financiamiento del mismo.*

Definición 3.1.5 *Un sistema de seguridad financiero es un acuerdo para el financiamiento del riesgo en el cual una persona asume la obligación de hacer un pago (o una serie de pagos) llamado beneficio (o beneficios) y cuya intención es compensar a una segunda persona por las inconvenientes consecuencias económicas que pueda experimentar, a cambio de uno o más montos denominados contribuciones.*

El término persona puede indicar un ser humano, una sociedad u otra entidad.

El término sistema de seguridad financiero aplica a los seguros, anualidades, jubilación y sistemas financieros para el cuidado de la salud.

Definición 3.1.6 *Se dice que un evento es asegurable si:*

- *Se encuentra asociado con un fenómeno que exhibe regularidad estadística.*
- *Es contingente con respecto al número de ocurrencias, frecuencia y severidad.*
- *El hecho de su ocurrencia es definitivamente determinable.*
- *Su ocurrencia produce consecuencias económicas indeseables para una o más personas.*
- *Su ocurrencia futura, periodicidad y severidad no son conocidas ni controlables por las personas.*

Se dice que una persona tiene un interés asegurable en un evento asegurable si la magnitud de la ocurrencia del evento crea una necesidad económica que involucra a dicha persona.

Una póliza de seguros puede pagar beneficios relacionados con sucesos que no encajan con la definición de evento asegurable. Por ejemplo, un plan de salud de grupo puede pagar por cirugía o exámenes médicos anuales. En tales casos, se puede aplicar porque estos eventos se desprenden de otros que si son eventos asegurables, o puede ser que mientras el evento no es asegurable en un individuo, sea asegurable en un grupo, siempre que el número de participantes que utilizarían el beneficio no sea conocido de manera precisa. Mientras una póliza de seguros o contrato pueda combinar los pagos que son resultado de eventos asegurables y otros pagos, puede ser deseable distinguirlos entre ellos. El término necesidad económica cubre una amplia gama. Por ejemplo: el bienestar futuro de la familia de una persona es una necesidad económica que involucra a la misma, de igual manera el incremento en la longevidad de un grupo de jubilados puede crear una necesidad económica para el responsable de un plan de pensiones. Otro aspecto importante para los planes de seguros es la clasificación de los riesgos asociados con el riesgo actuarial. En este contexto, el término riesgo es comúnmente usado para referirse al asunto del riesgo.

Principio 8 (Clasificación del riesgo). Para un grupo de riesgos asociado con un riesgo actuarial dado, es posible identificar las características de los riesgos y establecer un conjunto de clases basado en dichas características para que:

a) Cada riesgo sea asignado en una y sólo una clase; y

b) Las probabilidades de ocurrencia, frecuencia y severidad puedan asociarse con cada clase de manera que resulte en un modelo actuarial que, para algún grado de exactitud, es:

1. válido con respecto a los resultados observados para cada clase o grupo de clases que tengan suficientes datos disponibles; y
2. potencialmente válido para cada una de las clases.

Dichas clases son llamadas clases de riesgos y las reglas usadas para asignar una clase a cada uno de los riesgos son llamadas reglas para suscripción.

Un sistema de clasificación que no puede ser asociado con un modelo actuarial que puede ser validado con respecto a los resultados observados, cuando dichos datos están disponibles, no es un sistema de clasificación de riesgos.

Definición 3.1.7 *Un Sistema Asegurador es un sistema de seguridad financiero en el cual:*

a) *Los riesgos actuariales a ser financiados surgen de eventos asegurables;*

b) *Los objetos de riesgo se agrupan de acuerdo a un sistema de clasificación de riesgos;*

c) *Los beneficios pagables están relacionados con el interés asegurable;*

d) *El valor actuarial de los beneficios pagables, desarrollados por un modelo actuarial asociado con el sistema de clasificación de riesgos es finito; y*

e) *Las contribuciones son consistentes con el valor actuarial de los beneficios asociados.*

Definición 3.1.8 *Un sistema asegurador es obligatorio si todas las personas en un grupo o sociedad son requeridas, de manera legal o por otra vía, a participar; de otra manera se dice que es voluntario.*

Definición 3.1.9 *Un sistema de seguro es personal si la decisión de participar se lleva a cabo por cada asegurado de forma individual. Si la decisión es hecha en nombre de un grupo, entonces se trata de un sistema de seguro de grupo, aunque la participación puede ser obligatoria o voluntaria para los miembros del mismo; y se trata de un sistema de seguridad social si todos los miembros de la sociedad (o un subgrupo definido de la sociedad) son elegibles para participar.*

Definición 3.1.10 *Un refinamiento de un sistema de clases de riesgos es un sistema de clasificación de riesgos formado de otro al subdividirlo en una o más clases.*

Si existen modelos actuariales asociados con el sistema de clasificación de riesgos original y con el de refinamiento, de tal forma que estos modelos asignan las mismas probabilidades de ocurrencia, frecuencia y severidad a las clases que no fueron subdivididas, sino que asignan diferentes probabilidades a una o más de las subdivisiones de por lo menos una clase, se dice que el refinamiento es más homogéneo que el sistema original.

Para un conjunto dado de resultados observados, el modelo actuarial asociado con el sistema de clasificación de riesgos más homogéneo puede tener un grado reducido de exactitud debido a que están disponibles menos datos puntuales para cada clase del refinamiento. Para algunos casos, es necesario asegurar que se puede lograr un mínimo grado de exactitud.

Principio 9 (Agrupación). Si el riesgo actuarial asociado con un sistema de clasificación de riesgos muestra regularidad estadística, es posible combinar clases de riesgos así como asegurar que existe un modelo actuarial asociado con éste nuevo conjunto de clases de riesgos que es válido dentro de un grado específico de exactitud.

La magnitud de la compensación elegida es un juicio basado en la situación especifica. Las pautas para el ejercicio de un juicio caen en la categoría de los Estándares y se encuentran específicamente excluidas de estas contribuciones. Las técnicas estadísticas y conceptos económicos como la teoría de la utilidad pueden ser usados para ayudar en este tipo de juicios.

La compensación entre agrupar y homogeneizar es implementada por las reglas de suscripción. Algunas de las distinciones hechas por estas reglas resultan en clases para las cuales la diferencia en probabilidades permanece constante todo el tiempo.

Definición 3.1.11 *La estructura de primas de un sistema asegurador es un conjunto de contribuciones que reflejan la asignación de riesgos o varias clases de riesgos. Un refinamiento de una estructura de primas es una estructura de primas basada en un refinamiento de un sistema de clasificación de riesgos.*

Un sistema de seguros puede proporcionar dividendos o reembolsos que pueden ser pensados como compensaciones a las contribuciones. Las contribuciones que definen una estructura de primas para estos sistemas son entonces el precio neto de tales dividendos o reembolsos.

Principio 10 (Antiselección). Si la estructura de la prima de un sistema de seguro voluntario está basado en un sistema de clasificación de riesgos tal que un refinamiento del sistema pudiera resultar en diferencias significativas en las contribuciones consideradas para con los riesgos originalmente asignados a la misma clase, habría una tendencia a aumentar la participación en aquellas clases cuyas contribuciones aumentarían si fuese hecho el refinamiento.

Definición 3.1.12 *La experiencia de un sistema de seguridad financiero es el dato obtenido en la cooperación del sistema.*

Definición 3.1.13 *Las estimaciones basadas en tales datos de proporciones de ocurrencia o cantidades de pagos relacionadas con un riesgo actuarial son llamadas tasas de experiencia.*

Principio 11 (Experiencia Incluida). Las proporciones de experiencia para eventos asociados con un sistema de seguridad financiera tenderá a diferir de aquellos eventos carentes de tal sistema.

Principio 12 (Experiencia Asegurada). Las proporciones de experiencia para los eventos asegurables de un sistema de seguros tenderá diferir de las tasas globales de ocurrencia de los mismos eventos entre todos aquellos sujetos a un riesgo actuarial dado.

Definición 3.1.14 *Un ajuste de experiencia es un cambio en las contribuciones o beneficios aplicables a varias clases de riesgos para reflejar la experiencia de un sistema de seguridad financiero.*

Definición 3.1.15 *El valor actuarial de un sistema de seguridad financiero relativo a un modelo actuarial dado es el valor actuarial desarrollado por el modelo de la combinación de flujos de efectivo asociados con los recursos, las obligaciones y las contribuciones del sistema. El proceso de determinar tales valores actuariales es llamado valuación actuarial.*

Si el valor actuarial puede ser expresado como una función de cualquier variable asociada con el sistema de seguridad financiero y es independiente del modelo actuarial, tal variable es llamada parámetro financiero del sistema de seguridad financiero.

Las cantidades por las que los valores de los parámetros financieros pueden ser cambiados sin reducir el valor esperado actuarial del sistema de seguridad financiero se llaman márgenes bajo cero.

Los actuarios son a menudo requeridos para asignar un valor a los flujos contingentes de efectivo relacionados con las operaciones de un sistema de seguridad financiero. Debido a que el valor actuarial es, en general, una variable aleatoria, puede ser preferible declarar las condiciones bajo las cuales dicho valor puede estar dentro de un rango dado. Los actuarios realizan las valuaciones en por lo menos tres contextos: tarificando, reservando y valorando. Típicamente, cuando el actuario realiza una valuación, el propósito es determinar uno o más parámetros financieros que producen valores actuariales en un rango específico. En la tarificación, los parámetros son el conjunto de contribuciones, mientras que en la reservación el parámetro es llamado reserva. En la valoración, el parámetro financiero es el precio a ser pagado o recibido por el derecho a flujos de efectivo que están siendo valuados.

Un conjunto de parámetros financieros que son a menudo importantes es aquel de los valores contables de los recursos del sistema de seguridad financiero. El monto por el cual los valores contables de los recursos exceden la suma de las reservas y el valor contable de otras obligaciones es llamado exceso.

Al fijar los parámetros financieros, los actuarios toman información de otras cuentas además del valor actuarial. Por ejemplo: el sistema de seguridad financiero puede tener que enfrentar ciertos criterios (provenientes de mecanismos reguladores, acreedores, accionistas, etc.) para poder continuar con sus operaciones. Más aún, los actuarios cuantifican la incertidumbre inherente a los valores actuariales.

Definición 3.1.16 *Se dice que la ruina ocurre cuando un sistema de seguridad financiero falla primero en satisfacer todas las condiciones exigidas para permanecer en funcionamiento. La declaración de las condiciones bajo las cuales ocurre la ruina es llamado criterio de ruina.*

La probabilidad de que la ruina ocurra dentro de un periodo determinado de tiempo, calculada usando un modelo actuarial, se llama probabilidad de ruina del sistema de seguridad financiero relativo al modelo dentro de dicho periodo de tiempo.

Principio 13 (Prevención de Ruina). Para la mayoría de los criterios de ruina, existen combinaciones de los valores de los parámetros financieros que reducirán, por debajo de algún nivel positivo especificado, la probabilidad de ruina relativa a un modelo actuarial.

Definición 3.1.17 *Una medida de la probabilidad de que un sistema de seguridad financiero sea capaz de pagar todos los beneficios como prometió es llamado el grado de solidez actuarial del sistema de seguridad financiero.*

Principio 14 (Solidez Actuarial). Para varios sistemas de seguridad financiera, existen combinaciones de márgenes que producirán, relativo a algún modelo actuarial valido, un grado de solidez actuarial que excede cualquier nivel especificado menor a uno.

Una manera de definir el grado de solidez actuarial es el complemento de la probabilidad de ruina, donde ruina es definida como el incumplimiento al pago de beneficios prometidos.

La solidez Actuarial exige que el modelo actuarial sea válido, lo cual significa también que el modelo reproduce los resultados observados dentro de algún grado especificó de exactitud. Este requisito se aplica tanto a la modelación de los activos como de las obligaciones. Ambos, recursos y obligaciones, deben ser modelados de una manera válida antes de emitir una conclusión respecto a la solidez actuarial de algún sistema de seguridad financiero. En situaciones practicas, tanto el nivel de márgenes como el de solidez actuarial asequible, pueden ser restringidos por las condiciones del mercado.

Una anualidad de vida es una serie de pagos realizados continuamente a un intervalo de tiempo igual ya sea (mensual, trimestral o anual) esto mientras la persona permanezca con vida, este seguro puede ser temporal es decir limitada a una cierta cantidad de años, o también puede ser pagada por toda la vida.

3.2. Relación entre la distribución de $Y_{T(x)}$ y $T(x)$

El valor presente de los pagos esta representada por $Y_{T(x)} = \bar{a}_{T(x)}$ donde T es el tiempo fututo de vida de (x), la distribución de $Y_{T(x)}$ puede obtenerse a partir de T como sigue:

$$\begin{aligned} F_{Y_{T(x)}}(y) &= P(Y_{T(x)} \leq y) \\ &= P(\bar{a}_T \leq y) = P(1 - V^T \leq \delta y) \\ &= P(V^T \geq 1 - \delta y) \\ &= P\left[T \leq \frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right] \\ &= F_{T(x)}\left[\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Así la función de densidad

$$f_{Y_{T(x)}}(y) = \frac{d}{dt}F_{T(x)}(y) = \frac{d}{dt}F_{T(x)}\left[\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right] \tag{3.2}$$

Con lo anterior, es posible valuar los beneficios para cualquier (x).

Teorema 3.2.1 *Una anualidad contingente es equivalente a la suma de todos los dotales que (x) podria suscribir.*

Demostración.

$$E[Y_{T(x)}] = E[\bar{a}_T] = \int_0^{\omega-x} \frac{1-V^t}{\delta}\ {}_tp_x\mu_x(t)dt$$

$u = \bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1-V^t}{\delta}$ $\qquad dv = {}_tp_x\mu_x(t)$
$du = V^t$ $\qquad v = -{}_tp_x$

$$\begin{aligned} &= \bar{a}_{\overline{t}|}(-{}_tp_x)|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} V^t\ {}_tp_x dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_tE_x dt \\ &= \int_0^{\omega-x} \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} dt \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} Var[Y_{T(x)}] &= Var\left[\frac{1-V^T}{\delta}\right] \\ &= \frac{Var[V^T]}{\delta^2} \\ &= \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} \qquad (3.4) \end{aligned}$$

Para una Anualidad Temporal a n años considere la variable aleatoria $Y_{T(x)}$ que denota el valor presente de una anualidad, que paga continuamente 1 unidad por año mientras (x) permanezca vivo.

$$Y_{T(x)} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & \text{si } 0 \le T \le n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{si } T > n \end{cases}$$

Nótese que el máximo de este beneficio es $\bar{a}_{\overline{n}|}$ con

$$P(\bar{a}_{\overline{T}|} \ge \bar{a}_{\overline{n}|}) = {}_np_x$$

La expresión de pagos acumulados esta dada por

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y_{T(x)}] = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \frac{{}_tp_x\mu_x(t)}{F_{T(x)}(n)} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x \qquad (3.5)$$

Integrando por partes

$$u = \bar{a}_{\overline{t}|} \quad dv =_t p_x\mu_x t dt$$

(3.5) se reduce a

$$\int_0^n {}_tE_x dt \tag{3.6}$$

Considere el siguiente planteamiento

Sea

$$Y_{T(x)} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & \text{si } 0 \leq T \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{si } T > n \end{cases}$$

luego

$$Y_{T(x)} = \begin{cases} \frac{1-V^T}{\delta} & \text{si } 0 \leq T \leq n \\ \frac{1-V^n}{\delta} & \text{si } T > n \end{cases}$$

Así

$$Y_{T(x)} = \begin{cases} \frac{1-Z_T}{\delta} & \text{si } 0 \leq T \leq n \\ \frac{1-Z_T}{\delta} & \text{si } T > n \end{cases}$$

Donde

$$Z_{T(x)} = \begin{cases} V^T & \text{si } 0 \leq T \leq n \\ V^n & \text{si } T > n \end{cases}$$

Por lo que Z_T representa la variable aleatoria del valor presente de un dotal mixto donde la esperanza esta dada por

$$\begin{aligned} E[Y_{T(x)}] &= E\left[\frac{1-Z_T}{\delta}\right] \\ &= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Y

$$Var(Y_{T(x)}) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}}{\delta^2} \tag{3.8}$$

Para las anualidades diferidas, considere $Y_{T(x)}$ como

$$Y_{T(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq T \leq n \\ V^n \bar{a}_{\overline{T-n}|} = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{si } T > n \end{cases}$$

Sea

$Y_{T(x)_1} = \bar{a}_{\overline{T}|}$ para $T \geq 0$ y

$$Y_{T(x)_2} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & \text{si } 0 \leq T \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{si } T > n \end{cases}$$

Por consiguiente $Y_{T(x)} = Y_{T(x)_1} - Y_{T(x)_2}$, el valor más grande que puede tomar $Y_{T(x)}$ es

$$\lim_{T(x)\to\infty} \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{V^n}{\delta} = \frac{1}{\delta} - \frac{1-V^t}{\delta} \tag{3.9}$$

Luego

$$E[Y_{T(x)}] = \int_n^{\omega-x} V^n \bar{a}_{\overline{t-n}|}\ {}_tp_x \mu_x(t) dt \tag{3.10}$$

Sea $s = t - n$ y haciendo cambio de variable

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega-x} V^n \bar{a}_{\overline{s}|}\ {}_{s+n}p_x \mu_x(s+n) ds &= V^n\ {}_np_x \int_0^{\omega-x} \bar{a}_{\overline{s}|}\ {}_sp_{x+n} \mu_x(s+n) ds \\ &= {}_nE_x \int_0^{\omega-x} \bar{a}_{\overline{s}|}\ {}_sp_{x+n} \mu_x(s+n) ds \\ &= {}_nE_x \bar{a}_{\overline{x+n}|} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dado que

$$\bar{S}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^{n-t} dt = \int_0^n V^{t-n} dt$$

Entonces $\bar{a}_{\overline{n}|}$ queda expresada cómo $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x \bar{S}_{x:\overline{n}|}$.

Asi

$$
\begin{aligned}
\bar{S}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} \\
&= \frac{\int_0^n {}_tE_x dt}{{}_nE_x} \\
&= \frac{\int_0^n V^t {}_tp_x dt}{V^n {}_np_x} \\
&= \frac{\int_0^n V^t {}_tp_x dt}{V^n {}_np_x} \\
&= \frac{\int_0^n Vp_x V p_{x+1} \dots V p_{x+t-1}}{V^n {}_np_x} \\
&= \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Representa el valor actuarial acumulado al final de una anualidad temporal con una unidad pagadera continuamente mientras (x) sobreviva.

¿Cúal será la tasa de cambio de $\bar{a}_x$ respecto a la edad de referencia?

Esto se puede resolver cómo sigue

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\bar{a}_x &= \int_0^{\omega-x} V^t \left(\frac{\partial}{\partial x}\ {}_tp_x\right) dt \\
&= \int_0^{\omega-x} V^t\ {}_tp_x[\mu(x) - \mu(x+t)]dt \\
&= \mu(x)\bar{a}_x - \bar{A}_x \\
&= \mu(x)\bar{a}_x - (1 - \delta\bar{a}_x) \\
\Rightarrow &= [\mu(x) + \delta]\bar{a}_x - 1 \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Significa que el valor presente actuarial cambia a una tasa, que es la suma de la tasa de ingreso $\delta\bar{a}_x$ y la tasa de supervivencia $\mu(x)\bar{a}_x$, menos la tasa del pago.

3.3. Anualidades Discretas

Considere una anualidad que paga una unidad al inicio de cada año mientras (x) sobreviva. El valor presente de la variable aleatoria, Y, para cada anualidad, esta dada por $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$ donde la variable aleatoria K es el tiempo futuro de vida de (x). El rango de esta función es de $\ddot{a}_{\overline{1|}} < \ddot{a}_{\overline{\omega-x|}}$. La probabilidad asociada con el valor de $\ddot{a}_{\overline{k+1|}}$ es $P(K = k) =_k p_x q_{x+k}$.

El valor presente actuarial de esta anualidad eta dada por

$$\ddot{a}_x = E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_kp_x q_{x+k} \tag{3.14}$$

Aplicando sumas por partes con

$$\Delta f(k) =_k p_x q_{x+k} =_k p_x -_{k+1} p_x$$

y

$$g(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}$$

y utilizando estas relaciones

$$\Delta g(k) = \Delta \ddot{a}_{\overline{k+1|}} = V^{k+1} \quad f(k) = -_k p_x$$

aplicando esto a $E[Y]$ resulta

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} V^{k+1}\ {}_{k+1}p_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} V^k\ {}_kp_x. \tag{3.15}$$

Donde ${}_kp_x$ es la probabilidad de un pago de tamaño 1 comenzando al tiempo k.

Esta ecuación también puede ser representada por

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} V^{k+1}\ {}_{k+1}p_x \\ &= 1 + Vp_x \sum_{k=0}^{\omega-x-1} V^k\ {}_kp_{x+1} \\ &= 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Esto es un ejemplo de una formula recursiva, también esta anualidad puede ser representada en forma de seguros ya que

$$\ddot{a}_x = E\left[\frac{1-V^{K+1}}{d}\right] = \frac{1-A_x}{d} \tag{3.17}$$

Con esto se deduce que

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{3.18}$$

La varianza se puede obtener

$$\begin{aligned} Var(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) &= Var\left(\frac{1-V^{K+1}}{d}\right) \\ &= \frac{Var(V^{K+1})}{d^2} \\ &= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2} \end{aligned} \tag{3.19}$$

El valor una anualidad temporal a n años con beneficio de una unidad por año esta dada por

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \leq K \leq n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K > n \end{cases}$$

Y su valor presente actuarial esta dado por

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x \tag{3.20}$$

Sumando por partes puede ser reducida a

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} V^k\ {}_kp_x \tag{3.21}$$

El cual es la forma actual del pago.

Separando el primer termino y factorizando Vp_x, se obtiene la formula recursiva para la anualidad temporal pagadera a la edad $y = x + n$

$$\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} = 1 + Vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|} \tag{3.22}$$

Formula recursiva para el valor presente actuarial, es analoga a $1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$ pero difiere en que se utiliza un valor inicial de $\ddot{a}_{y:\overline{0}|} = 0$.

3.4. Relación entre beneficios por supervivencia y muerte

Considerando que $Y = \frac{1-Z}{d}$ donde

$$Z = \begin{cases} V^{K+1} & 0 \leq K \leq n \\ V^n & K > n \end{cases}$$

Esta variable aleatoria es de un seguro temporal a n años pagaderos a la muerte de (x).

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - E[Z]}{d} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \tag{3.23}$$

Reordenando se obtiene

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \tag{3.24}$$

Y para la varianza

$$Var(Y) = \frac{Var(Z)}{d^2} = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2} \tag{3.25}$$

Para una anualidad completa de vida diferida a n años de una unidad pagadera al inicio de cada año mientras (x) sobreviva de edad $x+n$ la variable aleatoria esta dada por

$$Y = \begin{cases} 0 & 0 \leq K \leq n \\ {}_{n}|\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & K > n \end{cases}$$

y el valor presente actuarial es

$$\begin{aligned} E[Y] =_n |\ddot{a}_x &= {}_nE_x\ddot{a}_{x+n} && (3.26) \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} && (3.27) \\ &= \sum_{k=n}^{\omega-x-1} V^k \ {}_kp_x && (3.28) \end{aligned}$$

Y la varianza de Y es

$$Var(Y) = \frac{2}{d}V^{2n} \ {}_np_x(\ddot{a}_{x+n} -^2 \ddot{a}_{x+n}) +_n |^2\ddot{a}_x - ({}_n|\ddot{a}_x)^2 \tag{3.29}$$

Con esto se ha dado una visión general de las anualidades, para más detalle consultar la bibliografía donde se tratan a fondo todo tipo de estas.

Capítulo 4

Reserva matemática de riesgos en curso

En los apartados anteriores se discutieron los valores presentes de varios tipos de beneficios por supervivencia y decremento. Estas ideas combinadas conducen a los resultados de este capítulo.

4.1. Principio de equivalencia

La variable aleatoria que da el valor presente a la pérdida L.

Esto se basa en que la pérdida sea nula, es decir que $E[L] = 0$ a la fecha de emisión, y se tiene que el valor presente de las primas igual valor presente de los beneficios, y de igual manera el valor presente de los derechos igual valor presente de las obligaciones.

Es decir la función de pérdida puede ser representada por

$$L = b_{k+1}V_{k+1} - P_x Y \tag{4.1}$$

donde

- b_{k+1}= función beneficio
- V_{k+1}=función de descuento
- Y Variable aleatoria de la anualidad que corresponde al periodo de pago de primas
- P_x Prima anual pagada al principio de cada año durante el periodo de pago de primas de una persona a edad (x), mientras el asegurado esté con vida

Primas de beneficios discretas

Bajo algunas circunstancias, es necesario calcular la pérdida asociada a un beneficio de manera puntual al inicio o final del año de contratación. Para un beneficio de un seguro de vida entera con suma asegurada de una unidad, la variable aleatoria L viene dada por

$$L = V^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \quad K = 0, 1, 2 \ldots$$

Donde P_x denota el pago periodico (anual) por el beneficio A_x

$$E[L] = A_x - P_x \ddot{a}_x \tag{4.2}$$

y

$$Var[L] = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2} \tag{4.3}$$

4.2. La función de pérdida $l(t)$

El concepto básico en la determinación del beneficio puede ser expresado en forma continua con una unidad de beneficio para un seguro completo de vida pagadero inmediatamente a la muerte de (x). Para cada prima considere

$$l(t) = V^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t}|} \tag{4.4}$$

Es el valor presente de la pérdida a el asegurado si la muerte ocurre en el tiempo t.

Note que $l(t)$ es una función decreciente con $l(0) = 1$ y $l(t) = \frac{-\bar{P}}{\delta}$ cuando $t \to \infty$.Si el tiempo cuando $l(t_0) = 0$, entonces la muerte a t_0 resulta una pérdida positiva, mientras que si la muerte después de t_0 produce una pérdida negativa, que es una ganancia.

Considere la variable aleatoria continua de pérdida

$$L = l(T) = V^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|} \tag{4.5}$$

Obteniendo la esperanza y aplicando el principio de equivalencia donde $E[L] = 0$ nos resulta

$$\bar{A}_x - \bar{P}\bar{a}_x = 0 \tag{4.6}$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{4.7}$$

La varianza de L puede ser utilizada como una medida de variabilidad de la pérdida un seguro completo hasta el tiempo de muerte donde $E[L] = 0$ solo se calcula la $E[L^2]$ para la función de pérdida

$$\begin{aligned} Var(V^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}) &= Var\left[V^T - \frac{\bar{P}(1-V^T)}{\delta}\right] \\ &= Var\left[V^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}\right] \\ &= Var\left[V^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)\right] \\ &= Var(V^T)\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 \\ &= \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\bar{a}_x)^2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Generalizando más la función de pérdida se escribe como

$$L = Z - \bar{P}Y \tag{4.9}$$

y aplicando el principio de equivalencia ya mencionado se tiene

$$E[b_T V_T - \bar{P}Y] = 0 \tag{4.10}$$

o de igual manera que

$$\bar{P} = \frac{E[b_T V_T]}{E[Y]} \tag{4.11}$$

Con esta idea se puede obtener las formulas para las primas de los diferentes seguros según sea el caso.

Plan	Componentes de pérdida		Prima P
	$b_T V_T$	Y_T	$\bar{P} = \frac{E[b_T V_T]}{E[Y]}$
Seguro de vida entera	$1V^T$	$\bar{a}_T$	$\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x / \bar{a}_x$
Seguro temporal n años	$1V^T$ 0	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}, T > n$	$\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert}) = \bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert} / \bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
Dotal mixto	$1V^T$ $1V^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}, T > n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}) = \bar{A}_{x:\overline{n}\vert} / \bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
Seguro de vida entera (h) pagos	$1V^T$ $1V^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, T \leq h$ $\bar{a}_{\overline{h}\vert}, T > h$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x / \bar{a}_{x:\overline{h}\vert}$
Seguro temporal n años (h) pagos	$1V^T$ $1V^T$ $1V^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, T \leq h$ $\bar{a}_{\overline{h}\vert}, h < T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{h}\vert}, T > n$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}) = \bar{A}_{x:\overline{n}\vert} / \bar{a}_{x:\overline{h}\vert}$
Dotal Puro	0 $1V^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}, T > n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}) = \bar{A}_{x:\overline{n}\vert} / \bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
Anualidad diferida n años	0 $\bar{a}_{\overline{T-n}\vert} V^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\vert}, T > n$	$\bar{P}({}_n\vert\bar{a}_x) = A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1} \bar{a}_{x+n} / \bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$

Ejemplo

Una persona de edad (x) desea asegurarse por \$50,000 durante los primeros 15 y por \$75,000 de ahí en adelante. Determinar la prima anual que debe pagar durante 5 años.

En este problema se necesita mantener el principio de equivalencia y se puede expresar por

$$P\ddot{a}_{35:\overline{5}|} = (50,000)A^1_{35:\overline{15}|} + (75,000)_{15}|A_{35}$$

y se despeja la P y se obtiene la prima solicitada.

Considérese un seguro de vida entera emitido a edad 35 con suma asegurada de \$10,000. Sea π la prima neta anual, $L(\pi)$ la variable aleatoria que denota el valor presente de la pérdida financiera a la fecha de emisión.

1. Determinar π_a tal que la distribución de $L(\pi_a)$ tenga media igual a cero y calcular la varianza de $L(\pi_a)$.
2. Aproximar la menor prima, π_b, tal que $L(\pi_b)$ tenga una probabilidad menor a 0.5, donde $L(\pi_b)$ sea positiva y encontrar la varianza de $L(\pi_b)$.
3. Determinar la prima π_c tal que la probabilidad de tener una pérdida real positiva al considerar 100 pólizas independientes sea del 0.05 con la aproximación normal.

1. Por el principio d equivalencia resulta que $E[L] = E[Z - \bar{P}Y] = 0$ y por consiguiente

$$\begin{aligned} \pi_a = 10,000P_{35} &= 10,000\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}} \\ Var[L(\pi_a)] &= (10,000)^2\frac{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}{(d\ddot{a}_{35})^2} \end{aligned}$$

2. Para π_b tal que $P[L(\pi_b) > 0] < 0.5$ se sustituye por la siguiente expresión

$$P(10,000V^{K+1} - \pi_b\ddot{a}_{\overline{K+1}|} > 0) < 0.5$$

despejando K y simplificando se obtiene que

$$P\left(K < \ln\left(\frac{\pi_b}{10,000d + \pi_b}/\ln(V)\right) - 1\right) < 0.5$$

donde se obtiene el valor de k que donde este caso es $k = 43$, entonces se obtiene π_b con

$10,000V^{43} - \pi_b\ddot{a}_{\overline{43}|}$, despejando

$\pi_b = \frac{10,000V^{43}}{\ddot{a}_{\overline{43}|}}$ por consiguiente

$P\left(L(\pi_b)\right) = P(K < 42) < 0.5$

y utilizando la formula (4.3) resulta

$$Var[L(\pi_b)] = (10,000)^2[^2A_{35} - (A_{35})^2]\left(1 + \frac{\pi_b}{10,000d}\right)^2$$

3. Para este caso se necesita obtener

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_c)\right) < 0.05$$

Recordando el modelo de riesgo individual donde $S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_c)$, y utilizando los supuestos de independencia se tiene que

$$\begin{aligned} E[S] &= 100E[L(\pi_c)] \\ Var[S] &= 100E[L(\pi_c)] \end{aligned}$$

Para determinar π_c tal que $P(S > 0) = 0.05$ y se estandariza resultando

$$\begin{aligned} P(S < 0) &= 0.95 \\ \frac{0 - E[S]}{\sqrt{Var[L(\pi_c)]}} &= 1.645 \\ 10\left\{\frac{-E[L(\pi_c)]}{Var[L(\pi_c)]}\right\} &= 1.645 \end{aligned}$$

$$\pi_c = 10,000\left[\frac{(0.1645)\sqrt{^2A_{35} - (A_{35})^2} + A_{35}}{1 - (A_{35} + 0.1645\sqrt{^2A_{35} - (A_{35})^2})}\right]$$

Como ya se ha visto existe una relación entre variables continuas y discretas, para el cálculo de la equivalencia de las primas continuas y discretas solo se utiliza las expresiones ya estudiadas, tal y como se utilizaron en la parte de seguros.

$$P(\bar{A}_x) = \frac{iA_x}{\delta \ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta}P_x, \tag{4.12}$$

$$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}P^1_{x:\overline{n}|} \tag{4.13}$$

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \tag{4.14}$$

4.3. Momentos condicionales de L

Definición 4.3.1 *La reserva matemática asociada a un beneficio es el valor presente actuarial de los beneficios adquiridos menos el valor presente actuarial del conjunto de primas que han de recibir por la cobertura de las obligaciones futuras y se denota por* ${}_t\overline{V}(b_{T(x)}V_{T(x)})$ *en el caso continuo, la cual resulta ser la esperanza de* ${}_tL$ *dado que* $T(x) > t$.

$$ {}_t\overline{V}(b_{T(x)}V_{T(x)}) = E[{}_tL|T(x) > t] \quad \forall t < \infty \tag{4.15}$$

Siempre que la reserva exista al tiempo t *y sea menor que infinito.*

Asi

$$\begin{aligned} E[{}_tL|T(x) > t] &= E[{}_tL|T(x) - t \geq 0] \\ &= E\left[V^{T(x)-t} - \bar{P}(b_{T(x)}V_{T(x)})\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}\right] \\ &=: \text{Obligaciones - Pago de primas} \\ &= A_{x+t} - \bar{P}(b_{T(x)}V_{T(x)})\bar{a}_{x+t} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Para calcular la varianza se tiene

$$\begin{aligned} {}_tL &= V^{T(x)-t} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \\ &= V^{T(x)-t} - \bar{P}\left(\frac{1 - V^{T(x)-t}}{\delta}\right) \\ &= V^{T(x)-t}\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta} \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} Var({}_tL) &= Var\left(V^{T(x)-t}\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}\right) \\ &= \left(1 + \frac{\bar{P}(b_{T(x)}V_{T(x)})}{\delta}\right)^2 \left({}^2\bar{A}_{x+t} - (\bar{A}_{x+t})^2\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.4. Valuación de la Reserva Matemática

Existen tres métodos de evaluar una reserva matemática.

El primero se basa en un enfoque prospectivo, el cual establece que bajo la esperanza condicional de la variable aleatoria de pérdida prospectiva, que la reserva de beneficios es la diferencia entre el valor presente actuarial de los beneficios futuros y las primas por dichos beneficios.

El segundo es vía formula para diferencia de primas, la cual exhibe la reserva de beneficios como el valor presente actuarial de la diferencia de primas pagable sobre el tiempo remanente de pago por primas.

Una tercera expresión depende del enfoque retrospectivo el cual observa a la reserva de beneficios sobre el pasada.

Cada una de las diferentes ecuaciones que expresan una igualdad para la reserva matemática, muestra diferentes aspectos cualitativos y cuantitativos de la reserva.

Ejemplo

Suponga que para el cálculo de beneficio se tiene una fuerza de mortalidad constante. Calcule ${}_t\overline{V}(\bar{A}_x)$ (Reserva matemática continua sobre un seguro de vida al tiempo t) y $Var[{}_tL|T(x) > t]$.

Desde que $\bar{A}_x$,$\bar{a}_x$ y $\bar{P}(\bar{A}_x)$ son independientes a edad (x) (4.2) se puede escribir

$$ {}_t\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0, \quad t \geq 0. $$

y utilizando la formula para la varianza se reduce a

$$ Var[{}_tL|T(x) > t] = \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2 [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2] $$

Donde simplificando cada uno de los términos anteriores se tiene que

$$ \begin{aligned} \bar{A}_{x+t} &= \frac{\mu}{\delta + \mu} = \bar{A}_x \\ \bar{a}_{x+t} &= \frac{1}{\delta + \mu} = \bar{a}_x \\ \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_x}{a_x} = \mu \end{aligned} $$

Sustituyendo

$$_t\overline{V}(\bar{A}_x) = \frac{\mu}{\delta+\mu} - \mu\left(\frac{1}{\delta+\mu}\right) = 0$$

Para el caso de la varianza es análogo

$$Var[_tL|T(x)>t] = \frac{(\delta+\mu)^2}{\delta^2}\left(\frac{\mu}{2\delta+\mu} - \frac{\mu^2}{(\delta+\mu)^2}\right).$$

La empresa de seguros ha pedido que se utilice la léy de Moivre con $l_x = 100 - x$ y una tasa de interés del 6 %. La compañía desea obtener el valor de las primas que han de pagar los asegurados por una cobertura vitalicia para ejecutivos de 35 años. Adicionalmente desea conocer el comportamiento de la reserva a través del método prospectivo y la variabilidad de la misma para $t = 0, 10, 20, \ldots, 60$.

Donde $f_{T(35)}(t) =_t p_{35}\mu_{35}(t) = 1/65$

$$\bar{A}_{35} = \int_0^{65} V^t f_{T(35)}(t)dt$$

$$\bar{A}_{35} = \int_0^{65} V^t \frac{1}{65}dt = \frac{\bar{a}_{\overline{65}|}0.06}{65} = 0.258047.$$

$$\bar{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{\delta\bar{A}_{35}}{1-\bar{A}_{35}} = 0.020266.$$

Para la edad $35+t$, se tiene que $\bar{A}_{35+t} = \frac{\bar{a}_{\overline{65-t}|}}{65-t}$ y la reserva queda expresada por

$$_t\overline{V}(\bar{A}_{35}) = \bar{A}_{35+t} - 0.020266\frac{1-\bar{A}_{35+t}}{\log(1.06)}$$

y

$$Var[_tL|T(x)>t] = \left[1 + \frac{0.020266}{\log(1.06)}\right]^2 [^2\bar{A}_{35+t} - (\bar{A}_{35+t})^2]$$

¿Cual será la distribución de ${}_tL$?

Utilizando (4.1)

$${}_tL = V^{T(x)-t}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)-\frac{\bar{P}}{\delta}$$

Es claro que $\frac{-\bar{P}}{\delta} <_t L < 1$.

$$\begin{aligned} F_{{}_tL}(u) &= P[{}_tL \leq u] \\ &= P\left[V^{T(x)-t}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)-\frac{\bar{P}}{\delta} \leq u\right] \text{Despejando } T(x) \\ &= P\left[T(x) \geq t - \frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\delta u + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)}\right)\right] \\ &= 1 - F_{T(x)}\left[t - \frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\delta u + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)}\right)\right] \qquad (4.19) \end{aligned}$$

Plan	IAN	Formula prospectiva
Seguro de vida entera	${}_t\overline{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$
Seguro temporal n años	${}_t\overline{V}(\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert}))$	$\bar{A}^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}\vert} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}$ $t<n$ 0 $t=n$
Vida entera h pagos	${}^h_t\overline{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} -_h \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{h}\vert}$ $t\leq h$ $\bar{A}_{x+t}$ $t>h$
Dotal mixto n años h pagos	${}^h_t\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\vert} -_h \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\vert}$ $t\leq h$ $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\vert}$ $h<t<n$ $\bar{A}_{x+n:\overline{0}\vert}=1$ $t=n$
Dotal puro	${}_t\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}^{\;\;1})$	$\bar{A}^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}\vert} -_h \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}^{\;\;1})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}$ $t\leq n$ 1 $t=n$
Anualidad vida entera	${}_t\overline{V}(\bar{a}_x)$	$\bar{a}_{x+t} - \bar{P}(\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t}$ $t\leq n$ $\bar{a}_{x-t}$ $t>n$
Anualidad temporal n años	${}_t\overline{V}(\bar{a}_{x:\overline{n}\vert})$	$\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert} - \bar{P}(\bar{a}_{x:\overline{n}\vert})\bar{a}^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}\vert}$ $t\leq n$
Anualidad diferida n años	${}_t\overline{V}({}_n\vert\bar{a}_{x:})$	${}_{n-t}\vert\bar{a}_{x+t} - \bar{P}({}_n\vert\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}$ $t\leq n$ $\bar{a}_{x+t}$ $t>n$

Se ha definido la reserva como la esperanza condicional de la variable aleatoria de pérdida prospectiva.

El segundo método de Ecuaciones de diferencias de primas para ${}_t\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ se obtiene por la factorización de $\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ de la formula prospectiva.

$$\begin{aligned}
{}_t\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

El cociente de las primas es la porción de beneficios futuros referido a las primas de los beneficios futuros, y exhibe el valor presente actuarial de los remanentes de los beneficios.

El metodo Retrospectivo de la ecuación (3.11) y (3.12) para $t < n - s$,

$$\bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} = \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}$$

y

$$\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} = \bar{a}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}.$$

Nuevamente sustituyendo en la formula prospectiva para ${}_s\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$,se obtiene

$$\begin{aligned}
{}_s\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} \\
&= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\left[\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\
&= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\left[\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{n-s-t}|}\right] - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} \\
&= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + \ {}_tE_{x+s}\ {}_t\overline{V}(\bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|}) \\
&= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\ {}_{s+t}\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})
\end{aligned}$$

Reordenando

$${}_s\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{n-t}|} = \bar{A}_{x+s:\overline{t}|} +_t E_{x+s}\ {}_{s+t}\overline{V}(\bar{A}\ _{x:\overline{n}|})$$

Notese que haciendo $s = 0$ implica ${}_0\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 0$ por el principio de equivalencia

$${}_t\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_tE_x}[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x:t} - \bar{A}^1_{x:\overline{t}|}]. \tag{4.21}$$

Haciendo $\bar{s}_{x:t} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}/{}_tE_x$ se puede reescribir

$${}_t\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{s}_{x:\overline{t}|} -_t \bar{k}_x \tag{4.22}$$

Donde ${}_t\bar{k}_x$ es el valor acumulado del aseguramiento y esta dado por

$$\begin{aligned} {}_t\bar{k}_x &= \frac{\int_0^t V^s \ {}_sp_x \mu_x(s) ds}{V^t \ {}_tp_x} \\ &= \int_0^t \frac{(1+i)^{t-s} l_{x+s} \mu_x(s) ds}{l_{x+s}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.5. Reserva de beneficios discretos

Considere un seguro de vida entera para los siguientes k años, se define la reserva como la esperanza condicional de la pérdida prospectivo ${}_kL$, más precisamente se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_kL &= V^{K(x)-k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1|}} & (4.24)\\
{}_kV_x &= E[{}_kL|K(x)=k,k+1,\ldots] & (4.25)\\
{}_kV_x &= A_{x+k} - P\ddot{a}_{x+k} & (4.26)\\
Var[{}_kL|K(x)=k,k+1,\ldots] &= Var\left[V^{K(x)-k+1}\left(1+\frac{P_x}{d}|K(x)=k,k+1,\ldots\right)\right] & \\
&= \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 Var\left[V^{K(x)-k+1}|K(x)=k,k+1,\ldots\right] & \\
&= \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 [{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2] & (4.27)
\end{aligned}
$$

Plan	IAN	Formula prospectiva	
Seguro de vida entera	${}_kV_x$	$A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$	
Seguro temporal n años	${}_kV^1_{x:\overline{n}|}$	$A^{\ 1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$ 0	$k<n$ $k=n$
Vida entera h pagos	${}^h_kV_x$	$A_{x+k} -{}_h P_x\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}$ A_{x+k}	$k<h$ $k\geq h$
Dotal mixto n años h pagos	${}^h_kV_{x:\overline{n}|}$	$A_{x+k:\overline{n-k}|} -{}_h P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}$ $A_{x+k:\overline{n-k}|}$ $A_{x+n:\overline{0}|}=1$	$k<h<n$ $h\leq k<n$ $k=n$
Dotal puro n años	${}_kV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$	$A_{x+k:\overline{n-k}|}^{\ \ 1} - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$ 1	$k<n$ $k=n$
Anualidad Vitalicia	${}_kV(\ddot{a}_x)$	$\ddot{a}_{x+k} - P(\ddot{a}_{x+k})\ddot{a}_{x+k}$	

Conclusiones

Este trabajo presenta una parte de las técnicas actuariales de vida. En este rubro, los métodos tradicionales han sido muy útiles a lo largo de la historia del seguro ya que han facilitado prácticamente todos los valores necesarios para el cálculo del valor presente de cualquier beneficio futuro. Pero las necesidades actuales, tanto por el lado de la efectividad como por el de la variedad y flexibilidad del mercado de seguros, obliga a seguir con el desarrollo de modelos más elaborados y versátiles. Antes de la llegada de las computadoras, los logaritmos se calculaban con tabla o a través de reglas muy complicadas. Sin embargo, a nadie se le ocurre hoy en día recurrir a estos métodos. La técnica actuarial está en la misma situación, se puede evolucionar y recurrir a modelos probabilistas y métodos estadísticos para obtener más información sobre la variabilidad del fenómeno o seguir utilizando los clásicos, ya que ambos convergen a los mismos valores esperados. Las ventajas de utilizar la probabilidad son claras: se obtiene más información sobre el comportamiento de las variables latentes de riesgo o de las reservas matemáticas (habitualmente basta con la media y la varianza gracias al teorema central del límite).

Al concebir la supervivencia de una persona como una variable aleatoria, el planteamiento del seguro se vuelve tremendamente sencillo ya que los cálculos se simplifican a través de ecuaciones recursivas además de que se puede utilizar cualquier supuesto financiero, incluyendo diversas estructuras de las tasas de interés, siendo este formalismo apto para tasas estocásticas, al mismo tiempo que eficienta los cálculos involucrando la minimización de las desviaciones.

El presente desarrollo puede ser utilizado como guía de un curso semestral de Cálculo Actuarial I. Se ha puesto énfasis en que los desarrollos teóricos, la modelación y las demostraciones sean intuitivas, motivando al lector a introducirse en bibliografía más avanzada. El resultado de este esfuerzo se sustenta en las definiciones realizadas por la SOA, lo que le otorga un carácter distinto al de las consecuencias lógicas derivadas del formalismo matemático para darle una contextualización y, sobre todo, una interpretación a las distintas ecuaciones obtenidas. Con esto esperamos contribuir a incrementar los documentos en español sobre la materia, además de poder difundir la ciencia actuarial por la red.

Variables aleatorias

Definición. Una función de densidad es una función $f(x)$ si cumple con que $f(x) \geq 0$, esta definida en $-\infty < x < \infty$ y esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Función de Distribución

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propiedades:

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Esto es para el caso continuo, pero si se tienen probabilidades numerables se toma el caso discreto, $P(x) \geq 0$, y se toma (x) donde esté definida, es decir

$$\sum_{x} P(x) = 1$$

$$P(x \leq X) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

Sea X una variable aleatoria discreta o continua, se define la Esperanza y la Varianza como:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x xp(x) \quad \text{Discreta} && (28)\\ E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \text{Continua} && (29)\\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) && (30)\\ E(X^m) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)dx && (31) \end{aligned}$$

Sea X la variable aleatoria que denota la edad con la que fallece un recién nacido, (x) es una variable aleatoria continua $X \geq 0$

Teorema Si $T(x)$ es una variable aleatoria continua con función de distribución $G(t)$ donde $G(0) = 0$ y función de densidad $F_{T(x)}(t) = G'(t) = g(t)$ si $Z(t)$ es una función monótona, no negativa, diferenciable

$$\Rightarrow E[Z(t)] = \int_0^{\infty} Z(t)g(t)dt = Z(0) + \int_0^{\infty} Z'(t)[1 - G(t)]dt \qquad (32)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= Z(0) + \int_0^{\infty} Z'(t)[1 - G(t)]dt\\ &= Z(0) + \int_0^{\infty} Z'(t)dt - \int_0^{\infty} Z'(t)G(t)dt \end{aligned} \qquad (33)$$

Por otra parte e integrando por partes resulta

$$\begin{gathered} u = Z(t), \quad du = Z'(t)\\ dv = g(t), \quad v = G(t) \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= \int_0^{\infty} Z(t)g(t)dt\\ &= Z(t)G(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} G(t)Z'(t)dt\\ Z(t)G(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} G(t)Z'(t)dt &= Z(0) + \int_0^{\infty} Z'(t)dt - \int_0^{\infty} Z'(t)G(t)dt\\ Z(\infty) - Z(0)G(0) &= Z(0) + \int_0^{\infty} Z'(t)dt\\ Z(\infty) - Z(0) &= \int_0^{\infty} Z'(t)dt && (34) \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] BOWERS, N.L., Jr., GERBER, H.U., HICKMAN, J.C., JONES, D.A., AND NESBI'Fr, C.J. Actuarial Mathematics. Itasca, Illinois: Society of Actuaries,1986.

[2] GALL, M. "Competing Risks" In Volume 2 of Encyclopedia of Statistical Sciences, edited by S. Kotz & N.L. Johnson. New York: Wiley,1982.

[3] HICKMAN, J.C. "A Statistical Approach to Premiums and Reserves in Multiple Decrement Theory," TSA XVI, Part I,1964.

[4] KALBFLEISCH, J.D., AND PRENTICE, R.L. The Statistical Analysis of Failure Time Data. New York: Wiley,1980.

[5] MAKEHAM, W.M. "On an Application of the Theory of the Composition of Decremental Forces," Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine 18.

[6] VAUGHAN, EMMET J. Y TERRÉESE VAUGHAN. Fundamentals of Risk and Insurance. USA. Johm Wiley and Son 7^o,1996.

[7] BLACK KENNETH Y GEORGE SKIPPER Life Insurance USA Ed. Prentice Hall 12 ed,1996.

[8] BOWERS, NEWTON L. et. al. Actuarial Mathematics USA Ed, The Society Of Actuaries,1997.

[9] JORDAN, CHARLES W. Life Contigencies. Usa. Ed. The society Of Actuaries.1997.

[10] GERBER, HANS Life Insurance Mathematics USA,1995.

[11] COX, D. R. and OAKES, D. Analysis of Survival Data, Chapman and Hall, London,1984.

[12] FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. I, 2nd ed. Wiley, New York,1957.

[13] FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and its Ap- plications, vol. II, 2nd ed. Wiley, New York,1971.

[14] HOGG, R. V. AND TANIS, E. Probability and Statistical Inference, 5th ed. Prentice-Hall Simon & Schuster, New York,1997.

[15] KALN°EISCH, J. AND PRENTICE, R. The Statistical Analysis of Failure Time Data, Wiley, New York,1980.

[16] LARSEN, R. AND MARX, M. An Introduction to Probability and its Applications. Prentice-Hall, Englewood Cli®s, NJ,1985.

[17] LARSON, H. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, 3rd ed. Wiley, New York,1982.

[18] LEE, E. T. Statistical Models for Survival Data Analysis, Lifetime Learning, Belmont Calif,1980.

[19] SPIEGELMAN, M. Introduction to Demography, Revised ed. Univ. of Chicago, Chicago,1968.

[20] VENABLES, W. AND RIPLEY, B. Modern Applied Statistics with Splus, 2nd ed. Springer-Verlag, New York,1998.

[21] ACTEX Publications (Mad River Books).
Web site:`www.actuarialbookstore.com`

[22] ANTON, H.; BIVENS, I.; AND DAVIS, S., Calculus, Late Transcendentals Combined Version (Seventh Edition), John Wiley and Sons, One Wiley Drive, Somerset,2001.

[23] EDWARDS, C.H.; AND PENNEY, D.E., Calculus with Analytic Geometry (Sixth Edition), Prentice-Hall, Inc,2002.

[24] FINNEY, R.L.; DEMANA, F.D.; AND WAITS, B.K., Calculus: Graphic, Numerical, and Algebraic, Addison-Wesley,1999.

[25] GHAHRAMANI, S., Fundamentals of Probability (Second Edition), 1999, Prentice-Hall,1999.

[26] HASSETT, M.; AND STEWART, D., Probability for Risk Management, ACTEX Publications,1999. retail@actexmadriver.com.

[27] HOGG, R.V.; AND TANIS, E.A., Probability and Statistical Inference (Sixth Edition), Prentice-Hall, Inc,2001.

[28] LARSON, R.E.; HOSTETLER, R.P.; AND EDWARDS, B.H., Calculus (Seventh Edition),2002.

[29] "Risk and Insurance" (SN 1-21-00), Society of Actuaries.
Web site:`www.soa.org`

[30] ROSS, S.M., A First Course in Probability (Sixth Edition), Prentice-Hall, Inc,2001. Web site: `www.sliderulebooks.com`

[31] STEWART, J., Calculus: Concepts and Contexts (Second Edition), Brooks/Cole Publishing Company, a division of Thomson Learning, Order Department,2001.

[32] HARRIS, B. Theory of Probability. Adisson-Wesley,1989.

[33] HOOKER & LONGLEY. Life and Other Contingencies.
The Society of Actuaries,1988.

[34] JORDAN, C.W. Life Contingencias.
The Society of Actuaries,1986.

[35] KELLISON, S. The Theory of Interest. 2da. Ed. Editorial Irwin,1989.

[36] GRIFFITH FEENEY. Multiple decrement theory.

[37] Colegio Nacional de Actuarios, A.C. La Actuaría en México (Antología de Algunos Trabajos Relevantes): Presentación. El Consejo Directivo del Colegio Nacional de Actuarios, A.C,1989.

[38] Web-Site: `http://www.conac.org.mx`