UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

UNA APROXIMACIÓN AL CONJUNTO DE ELECCIÓN

Tesis que para obtener el título de licenciada en economía presenta:

MARIA GUADALUPE LÓPEZ SÁNCHEZ

TUTOR: DR. GUSTAVO VARGAS SÁNCHEZ

A Fernando

Infinitas Gracias

A mis amados Fernando y Mafer,
mi hermosa familia.

Para Él por estar ahí siempre
escuchando atento y entusiasta
mis múltiples charlas sobre esta tesis.

A mi niña por su paciencia y cariño.

A mi tutor el Doctor Gustavo
Vargas Sánchez por su
inconmensurable confianza y guía.

A Dios.

Una Aproximación al Conjunto de Elección

Índice

INTRODUCCIÓN

El conjunto de elección del consumidor representativo[1] es la colección de todas las mercancías y servicios que el consumidor desea y sobre del cual define sus preferencias para, finalmente, bajo su restricción presupuestal y, un sistema de precios dados, elegir entre una gama de combinaciones de cantidades de mercancías la que le aporte mayor satisfacción.

Analizar este tema de la Teoría Microeconómica resulta enriquecedor, ya que a pesar de ser un tópico apenas tratado en la mayor parte de los textos, el conjunto de elección está colmado de detalles que requieren, tanto de la intuición económica, como del conocimiento teórico y matemático.

De ahí mi interés en abordar un tema básico de la enseñanza microeconómica, con el fin de reunir en este trabajo los elementos intuitivos, matemáticos y teóricos que acerquen a su comprensión.

[1] El concepto “consumidor representativo” pertenece al Doctor Fernando Noriega.

i. A OBJETIVO GENERAL

Estudiar desde un enfoque matemático-teórico al conjunto de elección de k-mercancías del consumidor representativo.

i. B OBJETIVOS PARTICULARES

- En paralelo al estudio del conjunto de elección incluir los teoremas y conceptos matemáticos ligados a este tema para comprenderlo formalmente.
- Enfatizar la estrecha relación entre la matemática y la teoría económica.

i. C HIPÓTESIS

El conjunto de elección del consumidor representativo esta ligado a conceptos matemáticos que sirven de base para demostrar estas diez proposiciones:

I. El conjunto de elección, $\mathcal{X}$, no es un subespacio vectorial de $\Re^{\mathbf{k}}$.

II. Existe un conjunto B en el conjunto de elección $\mathcal{X}$, tal que B es cerrado.

III. El conjunto de elección $\mathcal{X}$ tiene un número infinito de cestas.

IV. Sea $(\mathcal{X}, \succ)$ entonces las siguientes definiciones son equivalentes: $[\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}] \wedge [\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}]$.

V. Sea $\mathcal{X}$ bajo una relación de preferencia completa y transitiva. Entonces la relación de preferencia es un preorden completo.

VI. Sea $\mathcal{X}$ bajo los Axiomas I-III sobre las preferencias, entonces $\mathcal{X}$ es conexo.

VII. Sea $(\mathcal{X}, \succsim)$ bajo el axioma de no saciedad local. Entonces el conjunto "mas preferido que" es denso en $\mathcal{X}$.

VIII. Las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ establecen una partición sobre $\mathcal{X}$.

IX. El conjunto de indiferencia es un conjunto perfecto bajo los Axiomas I-IV.

X. El conjunto de indiferencia de **x** no es un conjunto finito.

i. D SOBRE LA ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

Esta Tesis se centra en los *supuestos teóricos* sobre el conjunto de elección que se manejan en los textos usuales de microeconomía.[2] En cada uno de los supuestos se resaltaran los *conceptos matemáticos* utilizados, para luego exponer la definición de éstos.

Con el objetivo de esclarecer los conceptos matemáticos se expondrán las nociones necesarias para que en este documento exista el soporte formal de las definiciones usadas. Después de esto en todos los casos se mostrará a través de teoremas y en su caso de otras

[2] Ver en la bibliografía a: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulos I, II, III y Apéndice Matemático; **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Capitulo 1; y **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, capítulo VII.

definiciones las implicaciones que resultan del uso del concepto matemático en los supuestos sobre el conjunto de elección.

Esta Tesis esta dividida en cuatro capítulos y un apartado de resultados. Los tres primeros capítulos abordan al conjunto de elección desde distintas perspectivas de la matemática. Esto es, analizamos al conjunto de todas las combinaciones de cantidades positivas de mercancías como: conjunto, subconjunto de un espacio vectorial y espacio métrico; ofreciendo las definiciones, teoremas y demostraciones pertinentes para formar un marco instrumental coherente y compacto que permita una lectura continua. El cuarto capítulo, el de conclusiones, fue pensado como una manera de hacer evidente la necesidad del conocimiento de los conceptos y resultados revisados, y el cómo éstos, confluyen para abordar el tema de las preferencias del consumidor sobre el conjunto de elección. En el apartado de resultados, como el nombre lo indica, se exponen en breve los objetivos alcanzados y las proposiciones originales de este documento.

El primer capitulo aborda con detenimiento dos temas: conjuntos y relaciones binarias. Estableciendo un marco de referencia formal para abordar lo que intuitivamente comprendemos como conjunto. Se consideró incluir en este capítulo las relaciones binarias porque una vez revisado el concepto de conjunto las relaciones son el nexo natural.[3]

En el segundo capítulo construimos el conjunto de elección de formalmente a partir del concepto de mercancía y de las cantidades asociadas a cada mercancía. Para ello es

[3] Nexo usado en los textos sobre teoría de conjuntos.

necesario hacer uso del campo de los números reales y de algunas consideraciones sobre conjuntos como son equipotencia y finitud en conjuntos.

Es en el tercer capítulo que se estudia al conjunto de elección como subconjunto de un espacio vectorial, ya que verlo desde la óptica del algebra lineal, es consecuencia natural de la forma en la que es construido. El uso del análisis matemático sobre el conjunto de elección, se justifica también por la construcción misma del conjunto, ya que posee características topológicas importantes, mismas, que resultan muy útiles al aplicar en las conclusiones los supuestos sobre las preferencias.

En el capítulo de conclusiones se utilizan implícita y explícitamente conceptos y resultados revisados a lo largo de esta Tesis, con el objetivo de aplicar estas herramientas al estudio de las preferencias sobre el conjunto de elección. Consideramos, que sería una gran opción para demostrar el vínculo existente entre los conceptos intuitivos y formales que rodean al conjunto de elección, con un tema necesario para la estructura de la teoría microeconómica, como lo son las preferencias.[4]

i. E ALGUNAS CONSIDERACIONES INICIALES

Este texto, dados sus objetivos, se enfoca en el estudio de un *modelo* en específico por lo que es conveniente antes de seguir adelante acordar que entenderemos por modelo a la

[4] En 1959 Gerarl Debreu demostró que la existencia de la función de utilidad a partir de los axiomas sobre la preferencias sobre el conjunto de elección.

construcción lógico-matemática de relaciones entre elementos esenciales de un fenómeno a estudiar; que varían de acuerdo con el objetivo de la investigación.

Es de conocimiento general que existen diferentes formas de definir Economía, sin embargo para los fines de este texto entenderemos intuitivamente por *Economía* a la interacción de los agentes, consumidores y productores, en los procesos de producción, distribución y consumo de mercancías. Formalmente usaremos la definición tomada del texto de Villar:[5]

$$E: = [(X_i, \succsim_i)_{i\leq m}; (Y_j)_{j\leq n}; \omega]$$

$\succsim_i$ represente las preferencias del i-ésimo consumidor, E espacio de economías, X_i, Y_j están contenidos en el espacio de mercancías, ω representa las cantidades de recursos iniciales.

A lo largo de este texto convendremos en llamar[6] *Teoría Económica* a la colección de abstracciones lógico-matemáticas cuyo objetivo es representar el funcionamiento de la economía. En tanto que comprenderemos por *Microeconomía*, la rama de la Teoría Económica cuyo objetivo es el estudio del comportamiento individual de los agentes económicos examinando su interacción en los mercados. Consideraremos solo dos clases de agentes económicos *consumidores* que son individuos o unidades familiares que buscan la elección óptima de una combinación de mercancías dada su restricción presupuestal; y

[5] **VILLAR, ANTONIO**. *Lecciones de Microeconomía,* capítulo I.

[6] Como referencia para estas definiciones ver: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulo I.

productores que son individuos o empresas que persiguen la maximización de sus beneficios restringiéndose a las limitaciones tecnológicas, en ambos casos para un tiempo y espacio dados.

Continuando con las convenciones, llamaremos *Teoría del Consumidor* a la rama de la Microeconomía que analiza el comportamiento de dicho agente, quien al tomar los precios como parámetros y teniendo un monto determinado de ingresos, su problema se concentra en la *elección* de acuerdo a sus gustos y preferencias de la combinación de mercancías que aporte al consumidor la mayor satisfacción. Entonces el consumidor puede distinguir de entre un *conjunto*[7] de mercancías las combinaciones de distintas cantidades de ellas y puede ordenar estas combinaciones según su preferencia sobre ellas.

A ese conjunto de todas las posibles combinaciones de cantidades de mercancías de un consumidor dado se le conoce como ***Conjunto de Elección***. El objetivo de este texto es analizar este conjunto de manera formal e intuitiva, utilizando algunos conceptos matemáticos básicos de tal suerte que el lector encuentre en este trabajo los elementos suficientes que se necesitan para comprender este tópico de la teoría del consumidor.

i. F CONDICIONES INICIALES

[7] A reserva de dar mas adelante una definición formal entenderemos conjunto a “una multiplicidad considerada como una unidad”. Definición tomada de Amor Montaño José Alfredo, Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias, p. 1.

Antes de comenzar con el análisis del conjunto de elección es necesario establecer reglas sobre el comportamiento de los agentes económicos que nos servirán como marco de referencia. Cabe observar que estas reglas no son una imposición sino una simplificación de las condiciones que rodean a nuestro objeto de estudio.[8]

a) Los agentes eligen libremente y bajo condiciones de certidumbre.

b) Los procesos de producción, distribución y consumo se regulan en los mercados a través de los precios.

c) Los agentes individuales son precio aceptantes.

d) Los agentes no se coordinan para tomar decisiones sobre sus elecciones de consumo y producción.

BIBLIOGRAFÍA

1. **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Estados Unidos, Editorial, Addison Wesley. Capitulo 1.

2. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, Aportaciones Matemáticas número 13, México, Sociedad Matemática Mexicana, UNAM- CONACYT, segunda edición, 2003, capítulo I-II.

[8] La referencia para estas condiciones se encuentra en: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulo I.

3. **LOMELÍ, HECTOR Y BEATRIZ RUMBOS.** *Métodos Dinámicos en Economía. Otra Búsqueda del Tiempo Perdido,* México, Thomson, primera edición, 2003, capítulos I, IX-X.

4. **MAS-COLELL, ANDREU, WINSTON, MICHAEL D. GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory,* Estados Unidos, Oxford University Press, 1995, capítulos I y II.

5. **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, España, W.W. Norton & Company, 1992, capítulo VII.

6. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulos I, II, III y Apéndice Matemático.

PRIMER CAPÍTULO

CONJUNTOS Y RELACIONES BINARIAS

Para dar comienzo con el estudio del conjunto de elección, es imperante saber a qué nos referimos cuando usamos el concepto matemático de conjunto, para así entender cómo el uso de este concepto infiere una estructura matemática que se puede utilizar para ayudarnos en la comprensión formal del conjunto de elección.

Entonces hagamos un paréntesis, ya que este punto requiere especial atención, y reflexionemos sobre algunos conceptos de vital importancia para la comprensión formal e intuitiva del conjunto de elección.

En la lógica existen proposiciones atómicas y proposiciones moleculares, las proposiciones atómicas son las que no poseen términos de enlace. Las proposiciones moleculares, son las que están formadas por una proposición atómica y un término de enlace, por lo menos. Existen cuatro términos de enlace: *y*, *o*, *si… entonces*, *no*.[1]

Conjunción se le denomina a la proposición molecular con el término de enlace *y*, su notación matemática es: $\wedge$. En contra parte disjunción se le denomina a la proposición molecular con el término de enlace *o*, cuya notación es: $\vee$.

Al término de enlace *si…entonces* se le denomina condicional; La proposición que se encuentra entre la palabra si y la palabra entonces, es el antecedente; la proposición que se encuentra después de la palabra entonces, es el consecuente. El símbolo para representar a la proposición condicional es: $\Rightarrow$.

El término *no* actúa solo sobre una proposición, no sirve de enlace entre dos proposiciones como los otros tres. Este término de enlace se representa por: $\neg$.

Definición: Una propiedad $\mathbf{P}$ es una proposición en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.[2]

Un resultado importante de la Teoría de Conjuntos es que todo conjunto esta determinado por una propiedad.[3] Esto es $\forall$C conjunto, existe una propiedad $\mathbf{P}$ tal que x $\in$

[1] Este apartado que trata sobre los términos de enlace lo obtuvimos de estos dos textos: **SUPPES, PATRICK.** *Introducción a la lógica simbólica,* pp. 25-33. **SUPPES, PATRICK & HILL, SHIRLEY.** *Introducción a la lógica matemática,* pp. 1-37.
[2] Idem (1).
[3] **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción,* pp. 10-20.

C si y solo si x cumple $\mathbf{P}$. Si denotamos que x cumple $\mathbf{P}$ con $\mathbf{P}(x)$ entonces reescribimos la anterior expresión como:

$$\forall C \text{ conjunto}, \exists\, \mathbf{P} \text{ propiedad} \setminus\; x \in C \Leftrightarrow \mathbf{P}(x).$$

Por lo que el conjunto C se puede resumir en: $C = \{x \setminus x \text{ cumple } \mathbf{P}\}$.

I. A CONJUNTO, DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Una forma de definir el concepto matemático de conjunto es a través del método axiomático.[4] El modelo axiomático se construyo para definir si un objeto es o no un conjunto, sin recurrir a significados intuitivos. En las definiciones axiomáticas se establecen una serie de proposiciones que un objeto debe cumplir. Entonces con el método axiomático se define *conjunto* de manera indirecta usando una serie de axiomas que un objeto debe poseer para ser considerado un conjunto.[5]

---

[4] Es para finales del siglo XIX que el método axiomático fue adoptado, tratando de abarcar en la medida de lo posible los resultados obtenidos por Cantor. El pionero en la axiomatización de la Teoría de Conjuntos fue Zermelo en 1904 y después le siguió el trabajo de Von Newmann que continuando con una observación de Cantor establece la diferencia entre conjunto y clase. El sistema Axiomático de la Teoría de Conjuntos fue posteriormente modificado por Bernays en 1937 y por Gödel un año más tarde.

[5] El desarrollo de esta sección es tomado de **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos*, pp. 10-20. **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos*, pp. 1-16.

Axioma de Existencia.

Hay un conjunto que no tiene elementos.

Podemos definir un conjunto sin elementos de múltiples maneras, por ejemplo, los números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y también como los números racionales cuyo cuadrado es 2, pero de ambas formas estamos definiendo el mismo conjunto, el vacío. Estos dos enunciados describen al mismo conjunto, el conjunto sin elementos. Aunque para probarlo requerimos del siguiente axioma.

Axioma de Extensión.

Sean X, Y conjuntos. Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces X = Y.

Este axioma pone en relieve que un conjunto esta determinado por sus elementos. Por el Axioma de Extensión queda de manifiesto que dos conjuntos cualesquiera que posean los mismos elementos, son iguales. Lo anterior puede representarse de esta forma

$$X = Y \ \text{ si } (\forall x \in X: x \in Y) \wedge (\forall x \in Y: x \in X).$$

Teorema I: *Existe un único conjunto que no tiene elementos.*

Demostración: Sea X un conjunto sin elementos. Supongamos que existe Y tal que Y no tiene elementos. Entonces todo elemento de X es un elemento de Y, puesto que la proposición $a \in X \Rightarrow a \in Y$ se satisface porque X no tiene elementos. Por otra parte, por el mismos argumento todo elemento de Y es elemento de X. Por lo tanto, por el Axioma de Extensión, X = Y.

■

Definición: El único conjunto que no tiene elementos es llamado el conjunto vacío y es denotado por ϕ.

Esquema de Comprensión.

Sea $\mathbf{P}(x)$ *una propiedad de x. Para cualquier conjunto A existe un conjunto B tal que* $x \in B$ *si y sólo si* $x \in A$ *y P(x).*

Este axioma es claramente distinto de los anteriores, ya que en él se condensa una regla para construir conjuntos. El axioma de esquema de comprensión es una colección infinita de axiomas porque se define un axioma por cada proposición $\mathbf{P}$. Con la introducción de este axioma es que podemos construir conjuntos que tengan elementos.

La propiedad **P** puede depender de múltiples variables **P**(x, y,…, r), por lo que $\forall$A y para cualquier selección de variables *x, y*,…, *r*. Existe un conjunto B que depende de (x, y,…, r, A) que consiste en los elementos de A para los cuales se verifica **P**(x, y,…, r).[6]

A manera de nota, y por otra parte, deseamos anticipar que los tres axiomas siguientes postulan que ciertos procesos usados en matemáticas generan conjuntos.

Axioma del Par.

Para cualesquiera a y b existe un conjunto C, tal que $x \in C$ *si y sólo si* $x = a \vee x = b$.

Por el Axioma del Par queda garantizado que todo conjunto es elemento de otro conjunto y que dos conjuntos arbitrarios son al tiempo elementos de algún mismo conjunto.

Si $a \in C$ y $b \in C$, y estos son los únicos elementos de C, por el Axioma de Extensión el conjunto C es único. Sea el par no ordenado {a, b} el conjunto que tiene por elementos a *a* y *b*. Ahora sea el par no ordenado {a, a} que podemos escribir como {a}, que recibe el nombre de conjunto singular o unitario de *a*, y es el conjunto cuyo único elemento es *a*.

[6] Ibedem (5), p. 13.

Axioma de Unión.

Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$ para algún X elemento de S.

El Axioma de Unión se refiere a la unión de conjuntos tradicional. U es único y es llamado la unión de S. S es una familia de conjuntos si los elementos de S son conjuntos. La unión de S, $\cup S$, es el conjunto de todas las x que pertenecen a un conjunto que forma parte de la familia de S.

Entonces por el Axioma de Unión, si C y D son conjuntos, el conjunto cuyos elementos son los elementos de C y también los elementos de D, es la unión de C y D, $C \cup D$.[7]

$$x \in C \cup D \text{ si y sólo si } x \in A \vee x \in B.$$

Definición: X es un subconjunto de Y si todo elemento de A es elemento de B. Esto es $X \subseteq Y$ si y sólo si $\forall x \in X, x \in Y$.

[7] "… el Axioma del Par y el Axioma de Unión son necesarios para definir la unión de dos conjuntos, y el Axioma de Extensión es necesario para garantizar la unicidad." Ibedem (5), p.15-16.

Axioma del Conjunto Potencia.

Para cualquier conjunto X existe un conjunto **P** *tal que A* $\in$ **P** *si y sólo si A* $\subseteq$ *X.*

Este axioma habla de la construcción de un nuevo conjunto **P** a partir de un conjunto dado cualquiera X. El enunciado es claro al exponer que existe un conjunto **P** tal que A pertenece a **P** como elemento si y solo si A es subconjunto de X. En este caso **P** es el conjunto potencia de X, el conjunto de todos los subconjuntos de X.

Un ejemplo. Sea X = {a, b, 3, 5} entonces el conjunto potencia de X esta formado por todos los subconjuntos de X, denotando a **P** de forma explicita tenemos que los elementos de **P** son los conjuntos siguientes:

P(X) = **{**{ϕ}, {a}, {b}, {3}, {5}, {a, b}, {a, 3}, {a, 5}, {b, 3}, {b,5}, {3, 5}, {a, b, 3}, {a, b, 5}, {a, 3, 5}, {b, 3, 5}, {a, b, 3, 5}**}.**

Observemos que el conjunto potencia del vacío es el conjunto vacío, esto P(ϕ) = {ϕ} y el conjunto cuyo único elemento es el vació {ϕ}, es distinto del vacío ϕ, porque el vacío no tiene elementos.

También notemos que para cualquier conjunto dado X, el vacío y X siempre pertenecen al conjunto potencia de X. Lo anterior implica que P(X) nunca es igual al vacío, pues como vimos en el párrafo anterior, el conjunto potencia del vació es un conjunto unitario cuyo único elemento es el vacío.

Axioma de Fundación.

En cada conjunto no vacío A existe un u en A tal que u y A no tienen elementos en común; es decir, para cualquier x, si $x \in A$ entonces $x \notin u$.

Este axioma también es conocido como Axioma de Regulación, y garantiza que ciertos tipos "conjuntos" no existan. El teorema siguiente servirá para profundizar en la comprensión de este axioma. [8]

Teorema II: Ningún conjunto no vacío puede ser elemento de sí mismo, es decir, para cualquier conjunto $X \neq \phi$, $X \notin X$.

Demostración:

Supongamos que existe un conjunto no vacío X tal que $X \in X$. Por el Axioma del Par, {X} también es un conjunto y puesto que X es el único miembro de {X}, el conjunto {X} contradice el Axioma de Fundación, ya que X y {X} tienen a X como elemento común.

■

[8] El Teorema II y su demostración son tomadas textualmente de **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Op. cit.*, pp. 18-19. .

1. B RELACIONES BINARIAS

La importancia de este tema radica en que las relaciones binarias son un tema fundamental en las matemáticas actuales ya que con ellas se establecen conexiones entre elementos de un par de conjuntos no necesariamente diferentes y, de acuerdo con la conexión se obtendrán diferentes tipos de relaciones. Las relaciones binarias y el conjunto de elección tienen un estrecho vínculo que será tratado en el *Cuarto Capítulo* al hacer evidente que las preferencias sobre el conjunto de elección son un tipo de relaciones binarias.[9]

Otro tema que revisaremos en este apartado de relaciones binarias es el de las *propiedades que pueden poseer las relaciones sobre en conjunto* tema que también será imprescindible cuando abordemos, en el *Cuarto Capítulo*, los *Axiomas sobre las preferencias*, ya que el Axioma de completes y el Axioma de transitividad requieren del conocimiento de este tema.

Además también en este apartado de relaciones binarias nos ocupamos de temas tan sensibles para el estudio de *las preferencias* como son: *las relaciones de orden, preorden, orden total, orden parcial* y *orden estricto*.

Las relaciones binarias son un subconjunto del producto cartesiano, lo que hace necesario para comenzar esta sección establecer algunos conceptos previos antes de definir

[9] Adelantamos aquí el uso del concepto de preferencia para exhibir el vínculo entre las relaciones binarias y la Teoría del Consumidor, este nexo lo tratamos con detenimiento en el Cuarto Capítulo.

con formalidad a las relaciones binarias. Para poder definir el producto cartesiano hace falta establecer el concepto de par ordenado.

Definición: Sean *a*, *b, s, t* tales que (a, b) = (s, t) si y sólo si $a = s \wedge b = t$. Entonces (a, b) es el par ordenado de *a* y de *b*.

Observemos que el orden en el que se presentan los elementos del par ordenado es importante ya que, si $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$.

Existen otras definiciones de par ordenado que satisfacen la anterior una de las más usadas es la definición de Kuratowski.[10]

Definición: El par ordenado de *a* y *b* es el conjunto cuyos elementos son el conjunto {a} y el conjunto {a, b}

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

donde a y b son la primera y segunda coordenada del par ordenado.

Observemos que $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$.

Definición: Una n-ada se define para n = 1 como (x) = x, para n = 2 como $(x_1, x_2) = ((x_1), x_2)$ y para n > 2 de la siguiente forma, $(x_1, x_2,\dots, x_n) = ((x_1, x_2,\dots, x_{n-1}), x_n)$.

[10] Ver **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos*, p.18.

Ahora ya tenemos los elementos suficientes para definir el producto cartesiano.

Definición: Dados dos conjuntos A y B el producto cartesiano de A con B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto A y la segunda componente pertenece al conjunto B. Esto es,

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Notemos que el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo es: $A \times A = A^2 = \{(a, b)/ a \in A \ \wedge \ b \in A\}$. El producto cartesiano de tres conjuntos se define como: $A \times B \times C = (A \times B) \times C$ y sus elementos son ternas ordenadas. En el caso de $A^3 = A \times A \times A = \{(x, y, z) / x \in A \ \wedge \ y \in A \ \wedge \ z \in A\}$.

Definición: Sean A y B dos conjuntos y $\mathrm{P}(x, y)$ una propiedad relativa a los elementos $x \in A \wedge y \in B$, en ese orden. Entonces definimos relación binaria al conjunto $\boldsymbol{R}$ de los pares ordenados $(a, b) \in A \times B$ para los cuales la proposición $\mathrm{P}(a, b)$ es verdadera.

Notación: Para indicar que los elementos a y b están relacionados o en otros términos que el par ordenado (a, b) pertenece a la relación, se escribe: $a\ \boldsymbol{R}\ b$, lo que es equivalente a: $(a, b) \in \boldsymbol{R}$.[11] Observemos que entonces $\boldsymbol{R} \subset A \times B$. La definición anterior se puede resumir de la siguiente manera:

[11] Notemos que el conjunto vacío es una relación así como también lo es el conjunto $A \times B$.

Definición: $\boldsymbol{R}$ es una relación entre A y B $\Leftrightarrow \boldsymbol{R} \subset A \times B$.

Con este marco podemos ver que la relación de pertenencia, $\in$, es una relación binaria que se aplica entre dos objetos de la Teoría de Conjuntos.[12]

I. B-2 DOMINIO Y CODOMINIO DE UNA RELACIÓN

Ahora incluiremos los conceptos de: dominio, imagen e imagen inversa de una relación. [13]Sea $\boldsymbol{R}$ una relación entre los conjuntos A y B, entonces:

Definición: Si $(x, y) \in \boldsymbol{R}$ decimos que *y* es una imagen de *x* a través de $\boldsymbol{R}$, y que *x* es una preimagen de *y* por $\boldsymbol{R}$.

Definición: El dominio de $\boldsymbol{R}$ es la totalidad de elementos de A que poseen imagen en B.

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{R}} = \{x \in A / (x, y) \in \boldsymbol{R}\}.$$

Definición: Imagen de $\boldsymbol{R}$ es el elemento de B que posee una preimagen en A.

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{R}} = \{y \in B / (x, y) \in \boldsymbol{R}\}.$$

[12] **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias,* p. 1.
[13] Ver en **ROJO, ARMANDO,** *Álgebra I,* capítulo 3;

Definición: El codominio de $\boldsymbol{R}$ es la totalidad de elementos de A que poseen una preimagen en A.

$$\boldsymbol{Co_R} = \{y \in B / (x, y) \in \boldsymbol{R}\}.$$

Definición: El campo de una relación es el conjunto $\mathbf{C}_{\boldsymbol{R}} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{R}} \cup \boldsymbol{Co_R}$.

Los elementos de una relación $\boldsymbol{R}$ son el referente y el relato, por referente entendemos un elemento del dominio de $\boldsymbol{R}$ y por relato un elemento del codominio.

Definición: La relación inversa de $\boldsymbol{R}$ es el conjunto de $B \times A$ definido por:

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in R\}.$$

Definición: Dadas dos relaciones $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$ tales que $\boldsymbol{R} \subset A \times B$ y $\boldsymbol{S} \subset B \times C$ es posible definir una relación entre A y C, esta es la composición entre **R** y $\boldsymbol{S}$.

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{R} = \{(x, z) / \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in \boldsymbol{R} \ \wedge \ (y, z) \in \boldsymbol{S}\}.$$

I. B-2 RELACIONES SOBRE UN CONJUNTO

Si ***R*** es una relación entre los conjuntos A y B, donde $A = B$. Entonces decimos que ***R*** es una relación sobre A, y es un subconjunto de $A^2 = A \times A$.[14] Lo que nos conduce al concepto siguiente:

Definición: ***R*** es una relación sobre A $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R} \subset A^2$.

Como $\phi \subset A^2$ y $A^2 \subset A^2$, es claro que el vacío y A^2 son relaciones definidas para cualquier conjunto A, debido a que ambas son subconjuntos de $A \times A$.[15]

Definición: Sea A un conjunto, A^n es el conjunto de todas las n-adas ordenadas de elementos de A, esto es, $A^n = (\ldots((A \times A) \times A) \ldots \times A) \times A$, lo que equivale al producto cartesiano de n-veces A.

---

[14] Ver: **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I*, capítulo 3 y **DONALD, J. LEWIS**, Introducción al álgebra, pp. 50-65

[15] Si A tiene n elementos entonces A^2 tiene n^2 elementos y el conjunto potencia de A^2 tiene 2^{n^2} elementos lo que implica que existen 2^{n^2} relaciones sobre A.

1. B-3 PROPIEDADES QUE PUEDEN POSEER LAS RELACIONES SOBRE UN CONJUNTO

Sea $\boldsymbol{R}$ una relación sobre el conjunto A, esto es (A, $\boldsymbol{R}$) o de otro modo $\boldsymbol{R} \subset A^2$. Entonces la relación $\boldsymbol{R}$ puede cumplir algunas de las siguientes propiedades.[16]

Reflexividad

$\boldsymbol{R}$ es reflexiva $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in \boldsymbol{R}$

Esto es, una relación sobre A es reflexiva si para cualquier elemento *x* de A, *x* esta relacionado con *x*.[17] Un ejemplo de una relación que cumpla con esta propiedad es la relación "mayor o igual que" sobre los reales, ya que al elegir un *x* cualquiera en $\Re$, $x \geq x$ por lo tanto $(x, x) \in \boldsymbol{R}$, como la elección de *x* fue arbitraria $(x, x) \in \boldsymbol{R}$, para toda *x* en $\Re$; por lo tanto $\boldsymbol{R}$ es reflexiva.

No reflexividad

$\boldsymbol{R}$ es no reflexiva $\Leftrightarrow$ $\exists x / x \in A \wedge (x, x) \notin \boldsymbol{R}$

[16] Para referencias de esta sección ver: **Rojo, Armando.** *Álgebra I,* capítulo 3; **Donald, J. Lewis.** *Introducción al álgebra,* pp. 62-65 y **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos,* capítulo 2.

[17] Otra forma de explicarlo es que la diagonal de $A \times A$ pertenece a la relación $\boldsymbol{R}$, si $\boldsymbol{R}$ es reflexiva.

La no reflexividad de ***R*** se verifica en el caso de existir al menos un elemento de A que no esté relacionado consigo mismo; esta propiedad es la negación de la reflexividad. Un ejemplo de una relación ***R*** sobre A no reflexiva es la relación “mayor que” sobre $\mathfrak{R}$. Sea *x* en $\mathfrak{R}$, luego $x > x$ es una contradicción, por lo tanto existe una *x* en $\mathfrak{R}$ tal que *x* no esta relacionada consigo misma, por lo que la relación ***R*** es no reflexiva. Como la elección de *x* fue arbitraria, la argumentación anterior también demuestra que la relación “mayor que” es no reflexiva para todo punto en $\mathfrak{R}$.

Arreflexividad

R es arreflexiva $\Leftrightarrow$ $\forall x: x \in A \Rightarrow (x, x) \notin \boldsymbol{R}$

Entonces la relación “mayor que” del ejemplo anterior es arreflexiva ya que ningún elemento de ***R*** forma pareja consigo mismo bajo esta relación. Para ejemplificar esta relación, proponemos al conjunto A como el conjunto de los reales, $\mathfrak{R}$, con la relación $\boldsymbol{T} = \{(x, y)/ x \neq y\}$ entonces estamos excluyendo del plano a la diagonal es decir estamos dejando fuera justo a todas las parejas ordenadas de la forma (x, x); por lo tanto para toda *x* en los reales la pareja (x, x) no pertenece a la relación ***T***. Con lo que construimos una relación arreflexiva.

Simetría

$\boldsymbol{R}$ es simétrica $\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y \in A$: $(x, y) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (y, x) \in \boldsymbol{R}$

Esto es si una pareja ordenada pertenece a la relación entonces la pareja ordenada que resulta de permutar sus componentes también pertenece a la relación. Lo que implica que si una relación ***R*** sobre A es simétrica, entonces el diagrama cartesiano de A^2 es simétrico respecto a la diagonal de A^2.

No simetría

$\boldsymbol{R}$ es no simétrica $\Leftrightarrow$ $\exists x, y \in A$: $(x, y) \in \boldsymbol{R} \wedge (y, x) \notin \boldsymbol{R}$

Si una relación ***R*** es no simétrica implica que existe un par ordenado que pertenece a la relación tal que al permutar sus componentes, el par ordenado resultante no pertenezca a la relación ***R***. Cabe aclarar que aunque una relación sea no simétrica pueden existir parejas ordenadas en la relación para las que las respectivas parejas ordenadas que resultan de permutar los elementos pertenezcan a al relación. Dicho de otra forma la no simetría es una propiedad de existencia la cual se verifica si al menos una pareja ordenada la satisface.

Asimetría

$\boldsymbol{R}$ es asimétrica $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A$: $(x, y) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (y, x) \notin \boldsymbol{R}$

En contraste con la anterior propiedad, si una relación es asimétrica implica que para todo par ordenado que pertenezca a la relación el par que resulta de permutar sus componentes no pertenece a la relación. Es decir si una relación es asimétrica no existe un par ordenado que pertenezca a la relación tal que su simétrico –el par que resulta de permutar sus componentes- pertenezca a la relación.

Antisimetría

$\boldsymbol{R}$ es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A$: $(x, y) \in \boldsymbol{R} \wedge (y, x) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x = y$

Un ejemplo clásico para representar una relación antisimétrica es la relación “mayor o igual que” sobre el conjunto de los números reales. Veamos por que, Sean *x*, *y* en los reales y supongamos que $(x, y) \wedge (y, x)$ pertenecen a la relación “mayor o igual que”, lo que implica que $x \geq y \wedge y \geq x$, entonces $x = y$, por lo tanto la relación “mayor o igual que” es antisimétrica. Como ejemplo de una relación que no sea antisimétrica presentamos la relación sobre los reales definida por: $(x, y) \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{Z}$. Esto es, *x* esta relacionado con y si y sólo si x menos y es un número entero. La relación ***R*** no es antisimétrica, ya que $(5, 4) \in \boldsymbol{R} \wedge (4, 5) \in \boldsymbol{R}$ pero $4 \neq 5$.

Transitividad

R es transitiva $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A: (x, y) \in \boldsymbol{R} \wedge (y, z) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (x, z) \in \boldsymbol{R}$

Si una relación cumple la transitividad implica que si un elemento esta relacionado con otro –no necesariamente distinto- y este se relaciona con un tercero entonces el primer elemento esta relacionado con el tercero. Por ejemplo en la relación “mayor o igual que” sobre $\mathfrak{R}$. Sean x, y, z en $\mathfrak{R}$ y sea que $(x, y) \in \boldsymbol{R} \wedge (y, z) \in \boldsymbol{R}$ entonces en términos de la relación “mayor o igual que” $x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z$, por lo tanto $(x, z) \in \boldsymbol{R}$.

No transitividad

R es no transitiva $\Leftrightarrow \exists x, y, z \in A: (x, y) \in \boldsymbol{R} \wedge (y, z) \in \boldsymbol{R} \wedge (x, z) \notin \boldsymbol{R}$

Esta propiedad es la negación de la anterior y nos dice que una relación es no transitiva si existen tres elementos tales que el primero esté relacionado con el segundo y este último esté relacionado con un tercer elemento, entonces el primer elemento no esté relacionado con el tercero. Por ejemplo sea A = {a, b, c} y sea ***R*** = {(a, b), (b, c), (a, c), (c, a)}; entonces ***R*** es no transitiva pues (a, c) $\in$ ***R*** $\wedge$ (c, a) $\in$ ***R*** pero (a, a) $\notin$ ***R***.

Intransitividad

R es intransitiva $\Leftrightarrow$ $\forall$x, y, z $\in$ A: (x, y) $\in$ ***R*** $\wedge$ (y, z) $\in$ ***R*** $\Rightarrow$ (x, z) $\notin$ ***R***

Una relación ***R*** sobre A satisface la intransitividad, si no existen x, y, z en A tales que satisfagan la transitividad. Usando el conjunto de la propiedad anterior A = {a, b, c} y ahora con la relación ***T*** = {(a, b), (b, c)}; entonces para todo a, b, c en A, se cumple que (a, b) $\in$ ***T*** $\wedge$ (b, c) $\in$ ***T*** $\Rightarrow$ (a, c) $\notin$ ***T***.

I. B-4 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

En el desarrollo del análisis de las preferencias sobre el conjunto de elección que abordaremos en el *Cuarto Capítulo* las relaciones de equivalencia juegan un papel central ya que las curvas de indiferencia definidas sobre el conjunto de elección corresponden a clases de equivalencia. Es necesario mencionarlas desde ahora puesto que se hará uso de relaciones de equivalencia para algunos conceptos como particiones.[18]

Definición: Una relación ***R*** sobre un conjunto A es una relación de equivalencia $\Leftrightarrow$ ***R*** es reflexiva, simétrica y transitiva.

Los elementos de una relación de equivalencia se dicen equivalentes. Se usa la notación $x \sim y$ que se lee "x es equivalente a y" lo que significa que la pareja ordenada (x, y) pertenecen a la relación de equivalencia.

Las relaciones de equivalencia sobre un conjunto A son:

i. Reflexivas, $\forall x: x \in A \Rightarrow x \sim x$.

ii. Simétricas, $\forall x, y: x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

iii. Transitivas, $\forall x, y, z: x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

[18] Sección elaborada con base en las siguientes referencias: **COHN, FRS.** *Algebra volume 1*, p. 17; **ROJO ARMANDO,** *Álgebra I*, pp. 85-90; **DONALD, J. LEWIS,** *Introducción al álgebra*, pp. 62-65 y **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO,** *Teoría de Conjuntos*, capítulo 2.

I. B-5 CLASES DE EQUIVALENCIA

El siguiente paso luego de definir las relaciones de equivalencia es precisar en un conjunto A -distinto del vacío-, todos los elementos de A que son equivalentes a un elemento dado. Para resolver este planteamiento emplearemos un tipo especial de conjunto que esta contenido en A y es llamado clase de equivalencia.

Definición: La clase de equivalencia del elemento $x \in A$, es el conjunto de todos los elementos de A equivalentes a x. Esto es $[x] = \{y \in R / y \sim x\}$.

Para cada $x \in A$, podemos formar: $[x] = \{y \in R / y \sim x\}$ a [x], a la que se le llama clase de equivalencia de x. A cada $y \in [x]$ se le llama representante de la clase. Es necesario observar que cada elemento de la clase de equivalencia tiene las características de la clase de equivalencia.

Teorema III: Si dos clases de equivalencia contienen un mismo elemento entonces son la misma clase.

Demostración: Sean $[x] \wedge [z]$ dos clases de equivalencia. Sea $a \in [x] \cap [z]$, entonces $a \in [x] \wedge a \in [z]$. Lo anterior implica que $a \sim x \wedge a \sim z$, entonces como las relaciones de equivalencia son simétricas $x \sim a$, por lo que $x \sim a \wedge a \sim z$, luego por la transitividad de las relaciones de equivalencia $x \sim z$, por la simetría $z \sim x$, de donde $x \wedge z$ pertenecen a la misma clase de equivalencia. Por lo tanto $[x] = [z]$.

■

Una vez que definimos las clases de equivalencia de un conjunto A, podemos formar el conjunto de todas las clases de equivalencia de A. Este conjunto, recibe el nombre de conjunto cociente de A dado por la relación de equivalencia.

Definición: Sea A un conjunto distinto del vacío y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A y sea $[x]$ la clase de equivalencia de $x \in A$. Entonces el conjunto cociente de A módulo $\sim$ queda definido por $A/_{\sim} = \{ [x] \,/\, x \in A\}$.

Y se lee A modulo la clase de equivalencia $[x]$ y es el conjunto de todas las clases de equivalencia de A.

El conjunto cociente es una partición de A pues sus elementos, que son las clases de equivalencia de A bajo $\sim$, son: no vacíos, disjuntos dos a dos y su unión es A.

Definición: Una partición de A es una colección de subconjuntos $\mathfrak{C}$ de $P(A)\backslash\{\phi\}$, con la propiedad de que para cada $x \in A$, $\exists! C \subset \mathfrak{C}$ tal que $x \in C$.

Esto es $\mathfrak{C}$ consiste de subconjuntos disjuntos dos a dos de A cuya unión es A. La unión cubre todo A, porque para cada x existe un conjunto $C \subset \mathfrak{C}$.

Teorema IV: Sea ~ una relación de equivalencia sobre X. Entonces X/~ es una partición de X.

Demostración: Ya que $x \in [x]$ por la propiedad reflexiva, si $y \in [x]$ entonces $y \sim x$, $\forall x \in A$.

Tenemos que $A = \cup_{x \in A} [x]$. Supongamos que $z \in [x] \cap [y]$. Entonces $z \in [x] \Rightarrow z \sim x \wedge z \in [y] \Rightarrow z \sim y$. Como la relación es de equivalencia $z \sim x \Rightarrow x \sim z$, por transitividad $x \sim y$. Por lo tanto $[x] = [y]$. Por lo tanto A/~ es una partición de A.

■

Enseguida presentaremos el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia sobre en un conjunto no vacío, esto implica demostrar que toda relación de equivalencia definida sobre un conjunto no vacío determina una partición de este en clases de equivalencia.[19]

Teorema V: Si ~ es una relación de equivalencia definida sobre $A \neq \phi$, entonces existe un subconjunto $I \subset A$, tal que para cualquier $a \in I$, existe $[a] \subset A$, tal que se cumple:

[19] Para desarrollar esta demostración se usó como base el texto de **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I*, pp.85-86.

i. $a \in I \Rightarrow [a] \neq \phi$.

ii. $a \sim a' \Leftrightarrow$ pertenecen a la misma [a].

iii. $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$.

iv. $a \neq b \Rightarrow [a] \cap [b] = \phi$.

v. $\forall x \in A, \exists a \in I$ tal que $x \in [a]$.

Demostración:

Observación: I es un conjunto de índices que se construye tomando un solo elemento de cada clase de equivalencia.

i. Por demostrar que $\forall$ a en I existe una clase de equivalencia distinta del vacío.

Por construcción $A \neq \phi \Rightarrow \exists x \in A$. Luego, como las clases de equivalencia son reflexivas, $x \sim x$. Entonces por definición de clase de equivalencia $x \in [x] \Rightarrow [x] \neq \phi$, para toda x en A.

ii. Por demostrar que dos elementos de A son equivalentes si y sólo si pertenecen a la misma clase de equivalencia.

$\Rightarrow$) $\quad x \sim x' \Rightarrow x' \in [x] \ \wedge \ x \in [x]$. Si $a \in [x]$ entonces $x \wedge x' \in [a]$.

$\Leftarrow$) $\quad x \wedge x' \in [a] \Rightarrow x \sim a \ \wedge \ x' \sim a \ \Rightarrow \ x \sim a \ \wedge \ a \sim x'$. Entonces $x \sim x'$.

iii. Por demostrar que clases no disjuntas son idénticas, es decir: $[a] \cap [b] \neq \phi$ entonces $[a] = [b]$.

Por hipótesis, $[a] \cap [b] \neq \phi \ \Rightarrow \ \exists x \in [a] \cap [b] \ \Rightarrow \ \exists x \in A$ tal que $x \in [a] \wedge x \in [b]$. Lo que implica que $x \sim a \ \wedge \ x \sim b$. Por reflexividad $a \sim x \ \wedge \ x \sim b$. Luego por transitividad se verifica que $a \sim b$. $\quad \ldots$ (1)

Sea $y \in [a] \ \Rightarrow \ y \sim a$. $\quad \ldots$ (2)

Con los resultados (1) y (2) se tiene que: $y \in [a] \ \Rightarrow \ y \sim b \ \Rightarrow \ y \in [b]$. Por lo tanto, $[a] \subset [b]$. Por analogía $[b] \subset [a]$. Entonces podemos concluir que $[a] = [b]$.

iv. Si en el conjunto de índices dos elementos son distintos, entonces éstos definen clases de equivalencia disjuntas. Esto es $a \neq b \ \Rightarrow \ [a] \cap [b] = \phi$.

Tomemos $[a] \cap [b] \neq \phi$. Entonces $\exists \ x \in [a] \ \wedge \ x \in [b]$. Lo que implica que $x \sim a \ \wedge \ x \sim b \ \Rightarrow \ a \sim x \ \wedge \ x \sim b$. Entonces por transitividad, $a \sim b$, por lo que $a \in [b]$, y esto es un absurdo pues contradice la definición de I. Por lo que es falso suponer que $[a] \cap [b] \neq \phi$. Por lo que concluimos que si $a \neq b$ entonces $[a] \cap [b]$ es el conjunto vacío.

v. Todo elemento de A pertenece a una clase, esto implica que, las clases de equivalencia cubren todo A.

Sea $x \in A$ entonces por la propiedad reflexiva $x \sim x$, lo que implica que $x \in [x]$. Ahora. sea “a” en la clase de equivalencia de x, entonces $[x] = [a]$ por lo tanto $x \in [a]$. Como la elección de x fue arbitraria, se cumple que para toda x en A, x pertenece a una clase de equivalencia.

■

I. C RELACIONES DE ORDEN

Ordenar los elementos de un conjunto corresponde a un tipo muy especial de relaciones binarias, a saber las ordenaciones. Las relaciones de orden u ordenaciones son relaciones binarias muy útiles en la matemática actual pues si se cumple que dos elementos de un conjunto satisfacen la relación de orden, esto implica que esos dos elementos son comparables entre sí.[20]

Se utiliza el símbolo $\preccurlyeq$ para referirse a relaciones de orden este símbolo se asemeja al signo $\leq$ usado en los campos numéricos, ya que la relación "menor o igual" $\leq$, es un caso particular de las relaciones de orden, $\preccurlyeq$.

Definición: Dada una relación binaria ***R*** sobre un conjunto A, se dice que ***R*** es una relación de orden o un ordenamiento sobre A, si ***R*** es: reflexiva, antisimétrica y transitiva. Esto es para: x, x', x'' en A:

a) $\forall x \in A, (x, x) \in \boldsymbol{R}$.

b) $(x, x') \in \boldsymbol{R} \wedge (x', x) \in \boldsymbol{R}$ entonces $x = x'$. $\forall x, x' \in A$.

c) $(x, x') \in \boldsymbol{R} \wedge (x', x'') \in \boldsymbol{R}$ entonces $(x, x'') \in \boldsymbol{R}$. $\forall x, x', x'' \in A$.

Y se denota a la relación binaria ***R*** con el símbolo $\preccurlyeq$.

[20] Para el desarrollo de este tema se usaron los textos de: **COHN, FRS.** *Algebra volume 1,* p. 19; **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I,* pp. 90-101; **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al álgebra,* pp. 62-65; **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos,* pp. 19-21; y **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos,* capítulo 2.

La expresión $x \preccurlyeq x'$ se lee x es anterior a x'. También puede interpretarse como x' es posterior a x.

Definición: Sea A un conjunto, A es ordenado bajo $\preccurlyeq$, esto es $(A, \preccurlyeq)$ si cumple las siguientes tres condiciones:

i. Reflexividad: $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq x$.

ii. Antisimetría: Si $x \preccurlyeq x' \wedge x' \preccurlyeq x$, entonces $x = x'$. $\forall x, x' \in A$.

iii. Transitividad: Si $x \preccurlyeq x' \wedge x' \preccurlyeq x''$, entonces $x \preccurlyeq x''$. $\forall x, x', x'' \in A$

Observemos que como $\preccurlyeq$ es reflexiva, entonces $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq x$ por lo tanto $x \preccurlyeq x \wedge x \succcurlyeq x$. Por lo que, todo elemento x de A, es anterior y posterior a si mismo.

Del ordenamiento $\preccurlyeq$, se deducen los ordenamientos estrictamente anterior $\prec$ y estrictamente posterior $\succ$.

Definición: Sea $(A, \preccurlyeq)$ y sean $x, x' \in A$. Decimos que *x* es estrictamente posterior a *x'*, si y sólo si, *x'* es posterior a *x* y *x* no es igual a *x'*. Esto es:

$$x \succ x' \Leftrightarrow x \succcurlyeq x' \wedge x \neq x'.$$

Definición: Sea (A, $\preccurlyeq$) y sean x, x' $\in$ A. Decimos que *x* es estrictamente anterior a *x'*, si y sólo si, *x* es anterior a *x'* y *x* es diferente de *x'*. Es decir:

$$x \prec x' \Leftrightarrow x \preccurlyeq x' \wedge x \neq x'.$$

I. C-1 PREORDEN

Este apartado, aunque corto, adquiere importancia en el cuarto capítulo, como consecuencia de los axiomas sobre las preferencias en el conjunto de elección.[21]

Definición: Sea A un conjunto y sea la relación binaria ***R*** sobre A, (A, ***R***). Si ***R*** cumple con ser transitiva y reflexiva entones ***R*** es un preorden sobre A.

Si un conjunto A es preordenado y simétrico entonces es una clase de equivalencia. Si es preordenado y antisimétrico entonces es un conjunto ordenado.[22]

---

[21] Para referencia ver: **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I*, pp. 97-101 y **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al álgebra*, pp. 65.

[22] Demostraremos en el cuarto capítulo que la relación de preferencia $\succsim$ constituye un preorden.

I. C-2 ORDEN TOTAL Y PARCIAL

Definición: Sea (A, $\boldsymbol{R}$), $\boldsymbol{R}$ satisface la linealidad si y sólo si $\forall$ x, x' $\in$ A, con x $\neq$ x', x $\boldsymbol{R}$ x' $\vee$ x' $\boldsymbol{R}$ x.

La linealidad, también llamada completes en los textos económicos, garantiza que los elementos de un conjunto, que goce de esa propiedad, sean comparables. Esta propiedad es relevante para el estudio formal de las preferencias sobre el conjunto de elección, que examinaremos en el cuarto capítulo de esta Tesis.

Definición: Sea (A, $\preccurlyeq$) entonces es un orden total si x $\neq$ x' entonces x $\preccurlyeq$ x' $\vee$ x' $\preccurlyeq$ x.

En los conjuntos preordenados, el orden total implica que todos los elementos de A son comparables. El caso contrario, esto es, si existen elementos dentro de un conjunto que no son comparables, es representado por los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición: Sea (A, $\preccurlyeq$) entonces es un orden parcial si $\exists$x $\exists$x' $\in$ A, tales que (x, x') $\notin$ $\preccurlyeq$ $\wedge$ (x', x) $\notin$ $\preccurlyeq$.

El teorema siguiente lo elaboramos con el fin de utilizarlo en el cuarto capítulo para demostrar que las preferencias sobre el conjunto de elección son un preorden lineal.

Teorema VI: Sea (A, ***R***) si la relación ***R*** es transitiva y lineal entonces ***R*** es reflexiva.

Demostración: Sean x, x’ $\in$ A tales que x $\neq$ x’. Por lo tanto:

$[x \neq x'] \wedge [x' \neq x]$

Por hipótesis sabemos que ***R*** es lineal, entonces:

$[x \neq x'] \wedge [x' \neq x] \Rightarrow [x \preccurlyeq x' \vee x' \preccurlyeq x] \wedge [x' \preccurlyeq x \vee x \preccurlyeq x'].$

Entonces tenemos estos casos:

i. $x \preccurlyeq x' \wedge x' \preccurlyeq x$, por la transitividad de la relación binaria ***R***, tenemos que $x \preccurlyeq x$ por lo tanto ***R*** es reflexiva.

ii. $x' \preccurlyeq x \wedge x \preccurlyeq x'$, por la transitividad de la relación binaria ***R***, tenemos que $x' \preccurlyeq x'$ por lo tanto ***R*** es reflexiva.

Por lo que hemos demostrado que la relación ***R*** sobre el conjunto A, tal que ***R*** es transitiva y lineal cumple con ser reflexiva.

■

I. C-3 ORDEN ESTRICTO

Definición: Sea ***R*** una relación binaria sobre el conjunto A. Se dice que ***R*** es un orden estricto si y sólo si ***R*** es:

i. Arreflexiva: $\forall x \in A, (x, x) \notin \boldsymbol{R}$.

ii. Asimétrica: $\forall x, x' \in A$, si $(x, x') \in \boldsymbol{R}$ entonces $(x', x) \notin \boldsymbol{R}$.

iii. Transitiva: $\forall x, x', x'' \in A$, si $(x, x') \in \boldsymbol{R} \wedge (x', x'') \in \boldsymbol{R}$ entonces $(x, x'') \in \boldsymbol{R}$.

I. C-4 ELEMENTOS EN UN CONJUNTO ORDENADO

En los conjuntos ordenados podemos encontrar elementos con características que los distinguen del resto de los elementos del conjunto ordenado.[23] Sea A un conjunto distinto del vacío y sea una ordenación $\preccurlyeq$ sobre A, entonces (A, $\preccurlyeq$) determinan la existencia de los elementos:

i. ***Primer elemento:*** Sea $p \in A$, $p \prec x$, $\forall x \in A$.

La expresión anterior indica que *p* es primer elemento de A si y sólo si *p* es estrictamente anterior que todo elemento de A.

ii. ***Último elemento:*** Sea $u \in A$, $x \prec u$, $\forall x \in A$.

Este concepto afirma que *u* es el último elemento de A, si y sólo si todos los elementos de A son estrictamente anteriores a *u*.

iii. ***Mínimo:*** Sea $m \in A$, $\forall x \in A$ si $x \prec m$ entonces $x = m$.

[23] Para el desarrollo de esta sección ver: **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I,* pp. 95-101.

El elemento m del conjunto A es el mínimo de A si y sólo si no existe otro elemento de A que sea anterior a m.

iv. ***Máximo:*** $\forall$ x $\in$ A, si M $\prec$ x entonces x = M.

El elemento M del conjunto A es el máximo de A, si y solo si no existe un elemento en A diferente de M que sea posterior a M.[24]

v. ***Cota inferior:*** $\forall$ x $\in$ A, c $\prec$ x.

Esta definición dice que c es cota inferior de A si y solo si c precede a todo elemento de A.

vi. ***Cota superior:*** $\forall$ x $\in$ A, x $\prec$ C.

Esto es C es cota superior del conjunto A si y solo si todo elemento de A precede a C.

vii. ***Ínfimo:*** Sea i cota inferior de A, $\forall$c cota inferior de A, c $\prec$ i.

[24] En un conjunto pueden no existir el mínimo ni el máximo.

i ínfimo de A si y sólo si *i* es cota inferior de A y toda cota inferior de A precede a *i*.

viii. ***Supremo:*** Sea s cota superior de A, $\forall$c cota superior de A, s $\prec$ c.

s es el supremo del conjunto A si y sólo si *s* es cota superior y *s* precede a todas las cotas superiores de A.

I. C-5 INTERVALOS EN UN CONJUNTO ORDENADO

Las relaciones de orden sobre un conjunto A infieren la posibilidad de que dentro de A se puedan generar intervalos.[25] Esto es, sea (A, $\preccurlyeq$) el conjunto A bajo la ordenación $\preccurlyeq$, y sean x, x' $\in$ A comparables entonces podemos definir los siguientes intervalos.

Definición: El intervalo cerrado de *x* a *x'* es el subconjunto de A que consta de los elementos que son posteriores a *x* y anteriores a *x'*.

$$[x, x'] := \{a \in A \,/\, x \preccurlyeq a \preccurlyeq x'\}.$$

[25] Ibedem. (24), pp.100-101.

Definición: El intervalo cerrado en *x* y abierto en *x'* es el subconjunto de A que consta de los elementos que son posteriores a *x* y estrictamente anteriores a *x'*.

$$[x, x') := \{ a \in A \,/\, x \preccurlyeq a \prec x' \}.$$

Definición: El intervalo abierto en *x* y cerrado en *x'* es el subconjunto de A que contiene a los elementos que son estrictamente posteriores a *x* y anteriores a *x'*.

$$(x, x'] := \{ a \in A \,/\, x \prec a \preccurlyeq x' \}.$$

Definición: El intervalo abierto de *x* a *x'* es el subconjunto de A que consta de los elementos que son estrictamente posteriores a *x* y estrictamente anteriores a *x'*.

$$(x, x') := \{a \in A \,/\, x \prec a \prec x' \}.$$

Sea un conjunto A bajo la relación de orden $\preccurlyeq$, $(A, \preccurlyeq)$, y sea $x \in A$. Entonces obtenemos los siguientes conjuntos:

Definición: $(\leftarrow, x] := \{a \in A \,/\, a \preccurlyeq x\}$. Al conjunto $(\leftarrow, x]$ se le llama intervalo ilimitado cerrado en su extremo x.

Definición: $(\leftarrow, x) := \{a \in A \;/\; a \prec x\}$. El conjunto $(\leftarrow, x)$ es llamado intervalo ilimitado abierto en su extremo x.

Definición: $(x, \rightarrow) := \{a \in A \;/\; x \prec a\}$. El conjunto $(x, \rightarrow)$ es llamado intervalo ilimitado abierto en su origen x.

Definición: $[x, \rightarrow) := \{a \in A \;/\; x \preccurlyeq a\}$. El conjunto $[x, \rightarrow)$ es llamado intervalo ilimitado cerrado en su origen x.

Por ultimo definiremos las secciones iniciales de un conjunto, que entenderemos como los subconjuntos de un conjunto ordenado que a partir de un cierto elemento contiene a todos los elementos anteriores.

Definición: Sea $(A, \preccurlyeq)$ y sea $B \subset A$. Entonces B es sección inicial de A si se cumple que: $b \in B \;\wedge\; x \preccurlyeq b$ entonces $x \in B$.

I. C-6 CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

Se dice que un conjunto esta bien ordenado si el conjunto esta totalmente ordenado y además todo subconjunto no vacío tiene primer elemento.[26]

Definición: Sea a un conjunto totalmente ordenado entonces A es un conjunto bien ordenado si y solo si $\forall A' \subset A \ \exists p \in A$ tal que $p \prec x, \ \forall x \in A'$.

Un conjunto bien ordenado A cumple las siguientes propiedades:

i. Un subconjunto de un conjunto bien ordenado, es un conjunto bien ordenado; ya que todo subconjunto es parte del conjunto y, por lo tanto, tiene un primer elemento.

ii. Los conjuntos bien ordenados están totalmente ordenados

iii. Un conjunto totalmente ordenado puede no estar bien ordenado.

[26] Para referencia ver: **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I,* pp. 97-101; **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al álgebra,* pp. 65. **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos,* pp. 21-24; y **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos,* capítulo 2.

I. D SINOPSIS

i. A lo largo de este capítulo, nos concentramos en desarrollar dos temas centrales: conjuntos y relaciones binarias. Para abordar el argumento principal de esta Tesis, el conjunto de elección, consideramos necesario ofrecer el contexto matemático y, no sólo conformarnos con definiciones aisladas de estos conceptos que no ofrecen ninguna estructura que permita comprender las implicaciones y los resultados del uso de herramientas tan poderosas de la Teoría de Conjuntos.

ii. Consideramos importante tener claro el lenguaje con que se esta tratando al conjunto de elección, por lo que se ha hecho énfasis en ciertos tipos especiales de relaciones y en las propiedades sobre ellas.

iii. Le dedicamos un espacio importante a las relaciones de equivalencia y a las relaciones de orden, ya que en la teoría del consumidor se hace uso de éstas para estudiar los axiomas sobre las preferencias. La conexión entre estas relaciones y las preferencias sobre el conjunto de elección las examinaremos en las conclusiones, desarrolladas en el cuarto capítulo.

iv. Demostramos que si una relación binaria sobre un conjunto no vacío es transitiva y lineal entonces es reflexiva. Este ejercicio lo hicimos con el fin de aplicarlo en las conclusiones destinadas al capitulo que trata sobre las preferencias del consumidor representativo.

BIBLIOGRAFÍA

1. **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*, México, Facultad de Ciencias de la UNAM, primera edición, 2005, Introducción y capítulo I y pp. 61-64.

2. **COHN, FRS.** *Algebra volume I*, Gran Bretaña, Editorial John Wiley & Sons, 1989, pp. 1-21.

3. **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, México, Editorial Harpier & rowpublishers, 1970, pp. 40-65.

4. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, Aportaciones Matemáticas número 13, México, Sociedad Matemática Mexicana, UNAM- CONACYT, segunda edición, 2003, capítulos I-IV, VII.

5. **J. DE BURGOS, ROMÁN.** *Curso de Álgebra y Geometría,* España, Editorial Alambra, 1980, páginas 24-54.

6. **LELONG-FERRAND, JACQUELINE Y ARNAUDIES, JEAN MARIE.** *Curso de Matemáticas Tomo I. Álgebra,* España, Editorial Reverté,1979, capítulo I.

7. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1987, capítulos II y III.

8. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1991, capítulos I, II y X.

9. **SUPPES, PATRICK.** *Introducción a la lógica simbólica,* México, Compañía Editorial Continental, 1980, pp. 25-33.

10. **SUPPES, PATRICK & HILL, SHIRLEY.** *Introducción a la lógica matemática,* España, Editorial Reverté, 1980, pp. 1-37.

SEGUNDO CAPÍTULO

EL CONJUNTO DE MERCANCIÁS

Se ha mencionado, que según Villar[1] los consumidores son personas o unidades familiares cuyo problema consiste en tomar la decisión de consumo óptima, de acuerdo a sus gustos y preferencias sobre un conjunto de mercancías, sujetos a su restricción presupuestal y a un conjunto de precios dado. Este capítulo trata sobre el conjunto de mercancías y, por tanto de los conceptos matemáticos ligados a éste.

II. A UNA DEFINICIÓN

Reflexionemos un poco sobre las mercancías que conoce nuestro consumidor, que son, todos aquellos objetos o servicios por los que tiene que pagar[2] y que le sirven para satisfacer algún tipo de necesidad; por ejemplo: de alimentación, vivienda, educación, transporte, recreación, estética. En fin, que nuestro consumidor no sólo tiene una gama muy variada de necesidades, sino que tiene una diversidad aún mayor de mercancías para

[1] Ver referencia en: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulo II.
[2] Un precio siempre estrictamente mayor a cero.

satisfacer sus necesidades. Con la intención de comenzar a construir el eje de esta Tesis, procedemos por establecer la siguiente definición de mercancía.

Definición: Sea N el conjunto inicial de necesidades del consumidor. Un objeto *i* se entenderá como mercancía, si dado N, se cumple que:

a) $\forall\ x_i \geq 0$ entonces $N(x_i) \leq N$; $\wedge$

b) $\forall\ x_i, \exists\ p_i$ tal que $p_i x_i \geq 0$ con $p_i \neq 0$.

Donde x_i representa la cantidad x del objeto i; $N(x_i)$ es el conjunto de necesidades asociado a la cantidad i del objeto x y donde p_i es el precio p asociado al objeto i.

Notemos que esta definición exige en su inciso *b* que para ser considerado como una mercancía, un objeto debe tener un precio y este precio debe ser estrictamente mayor a cero.

Una observación importante sobre esta definición, es que x_i siempre es mayor o igual a cero. La justificación intuitiva radica en el hecho de que los objetos existen o no, si existen, implica que la cantidad del objeto x es positiva, si no existe dicho objeto entonces la cantidad del objeto es nula.[3]

[3] Pero en ningún caso la cantidad de una mercancía es negativa. Ver referencia en Geofrey **GEOFFREY, A JEHLE Y PHILIP, RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, capitulo 1.

Si un objeto *i* cumple con las dos condiciones anteriores, entonces el subíndice *i* tiene la finalidad de indicar la mercancía a la que nos referimos. Podemos concluir que los objetos que cumplan con la definición, es decir, los objetos *i* que satisfagan la propiedad **P** forman un conjunto, el conjunto de mercancías **M**. Que el objeto *i* cumpla la propiedad **P,** **P**(i), quiere decir que: $\forall\ x_i \geq 0\ \ N(x_i) \leq N\ \wedge\ \forall\ x_i, \exists p_i$ tal que $p_i x_i \geq 0$ con $p_i \neq 0$.

Entonces el conjunto de mercancías **M,** es el conjunto de los objetos *i*, los cuales cumplen que, para toda cantidad no negativa *x* de la mercancía *i*, el conjunto de necesidades asociado al consumo de esa cantidad *x* de *i*, esto es $N(x_i)$, es menor que el conjunto de necesidades inicial N.

De acuerdo a lo revisado en el primer capítulo, ya que expusimos la existencia de conjunto de mercancías que nuestro consumidor conoce, podemos entonces denotar a este conjunto con **M** y lo definiremos en términos de la propiedad **P** de estas dos formas:

- **M** = {*i* / *i* cumple **P**}.

- **M** = {*i* / *i* cumple $\forall\ x_i \geq 0$ entonces $N(x_i) \leq N\ \wedge\ \forall\ x_i, \exists p_i$ tal que $p_i x_i \geq 0$ con $p_i \neq 0$}.

De la segunda parte de la propiedad **P**, se deducen automáticamente dos observaciones:

- $p_i x_i$ es cero sólo si x_i es cero.

p_i es siempre positivo, ya que como $p_i x_i$ solo puede ser mayor o igual a cero, obliga la definición de mercancía a que, en el primer caso, en el que $p_i x_i = 0$, x_i sea cero; y en el segundo caso, en el que $p_i x_i > 0$, a que p_i sea positivo pues $x_i > 0$.[4] Es necesario notar, que la definición de mercancía implica que los precios no pueden ser negativos. Supongamos que es cierto que $p_i x_i \geq 0$ y que $p_i < 0$. Entonces si $p_i x_i \geq 0 \Rightarrow x_i < 0$, contradicción, pues x_i no es negativa. Por lo tanto, es falso suponer que p_i es negativo.

Estas deducciones son resultado de estar trabajando con cantidades y precios que tienen una conexión directa con un conjunto que nos permite operar de esta manera, el conjunto de los números reales.

II. B CANTIDADES Y LOS NÚMEROS REALES

Hablemos un poco sobre las posibles cantidades de cada una de las mercancías que conforman el conjunto **M**. Tratar el tema de las cantidades que se pueden desear o consumir de una mercancía *i* arbitraria, inevitablemente nos enfrenta el tema de la divisibilidad de las mercancías. La divisibilidad, es un concepto que tiene que ver no sólo con la forma en que

[4] Esta deducción implica que x_i, p_i y, por tanto, $p_i x_i$ son números reales, como veremos mas adelante en este capítulo.

se consume la mercancía *i*, sino que también depende de cómo definimos el tiempo de estudio.

Ejemplifiquemos la idea anterior con una mercancía en específico: un par de zapatos. Todos sabemos que los zapatos se compran de dos en dos, así sin tomar en cuenta el tiempo, para representar las cantidades de zapatos que desea adquirir el consumidor bastaría con los números pares enteros no negativos esto es {0, 2, 4,…}.

Esto es, si sólo pensamos en las mercancías como unitarias u objetos completos que sólo se pueden adquirir por unidad y que se consumen en el tiempo $\tau = [t_0, t_1]$ completamente, entonces nuestro sistema de números asociado a las cantidades *x* del mercancía *i*, estaría sólo conformado por los enteros no negativos.

Ahora, consideremos un periodo de tiempo τ, tal que del tiempo inicial t_0 al tiempo final t_1, pase por ejemplo, un año. Supongamos que nuestro consumidor, en este periodo $\tau = [t_0, t_1]$ desgastó lo suficiente sus zapatos, como para tener que consumir otro par; lo que implica, que en un periodo de tiempo de un año, nuestro consumidor consumió un par de zapatos.

Si reducimos el periodo de estudio τ, a un mes, nuestro consumidor habrá gastado alrededor de un doceavo de su par de zapatos, la palabra clave en este enunciado es “alrededor”, pues con exactitud no sabremos si gasto un doceavo de su par de zapatos o un número muy cercano pero no exacto.

Entonces para poder asociar un conjunto de números al conjunto de mercancías tendremos que emplear el conjunto de los números racionales, que son los de la forma p/q con p y q enteros. Pero también necesitamos usar el conjunto de los números irracionales, que son aquellos números, que no se pueden expresar de la forma p/q, con p y q enteros y, que nos ofrecen una expansión decimal adecuada, para el caso, en que el consumo para el periodo de tiempo de estudio $\tau = [t_0, t_1]$ no sea posible expresarlo en términos de fracciones.

Esta reflexión nos ha conducido a la necesidad de emplear al conjunto de los números reales $\mathfrak{R}$, el cual es la unión del conjunto los racionales $\mathfrak{Q}$ y los irracionales $\mathfrak{I}$, para poder ofrecer en marco numérico de referencia para las cantidades de cualquier mercancía *i*, para un periodo de tiempo τ dado.

Por otra parte sabemos, por las condiciones iniciales expuestas en la introducción, que los consumidores individuales no pueden modificar los precios, esto es, para nuestro consumidor los precios son un dato. El conjunto de números asociado a los precios es por convención[5] el conjunto de los números reales, porque al tomar el conjunto más general de números se simplifica el manejo del modelo, sin que esto modifique los resultados del modelo. Podríamos acotar al conjunto de precios en el conjunto de los números racionales, lo que no modificaría la pertenencia de asociar $p_i x_i$ a los números reales. Pues si p_i es racional y x_i es irracional, entonces $p_i x_i$ es irracional[6] y pertenece a los reales, por que $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{R}$; y, por otro lado, si p_i y x_i son racionales entonces $p_i x_i$ es racional y, por lo tanto, $p_i x_i$

[5] Para referencia ver: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía*, capítulo II.
[6] Como mostraremos, para el caso general, en el Teorema II de este capítulo.

pertenece a los reales, ya que $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}$.[7] Estos argumentos resultarán obvios, antes de terminar la sección **B** de este capítulo.

II. B-1 GRUPO Y CAMPO

Para acercarnos desde este punto, al también llamado sistema de los números reales, son necesarios primero, unos pocos conceptos del álgebra superior que expondremos en esta sección.[8]

Definición: Sea el conjunto $\mathbb{G} \neq \phi$ entonces $\boldsymbol{o}$ es una función llamada operación si $\boldsymbol{o}: \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$.

Si a, b $\in \mathbb{G}$, entonces la anterior definición significa que la función operación $\boldsymbol{o}$ relaciona a cada par de elementos *a, b* del conjunto $\mathbb{G}$ con un tercer elemento $\boldsymbol{o}$(a, b) que también pertenece al conjunto $\mathbb{G}$.[9] La suma, que todos conocemos desde nuestros primeros años de enseñanza, es una operación sobre un conjunto; como también la multiplicación, es ejemplo de una operación sobre un conjunto.

[7] En el Teorema III de este mismo capítulo, proponemos y demostramos que, dada la definición de mercancía propuesta, si *i* es una mercancía y p_i un racional entonces $p_i x_i$ es un real no negativo.

[8] Ver referencia de este apartado en: **J. DE BURGOS, ROMÁN.** *Curso de Álgebra y Geometría,* pp. 24-26; **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* capítulos II y III; **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* capítulos I.

[9] Notación: $\boldsymbol{o}$(a, b) también se puede expresar como a $\boldsymbol{o}$ b.

Definición: Sea $\mathbb{G}$ un conjunto bajo la operación binaria $\boldsymbol{o}$, entonces $\mathbb{G}$ recibe el nombre de grupo bajo la operación $\boldsymbol{o}$, si cumple las propiedades:

i. Asociativa: $a \,\boldsymbol{o}\, (b \,\boldsymbol{o}\, c) = (a \,\boldsymbol{o}\, b) \,\boldsymbol{o}\, c$; $\forall a, b, c \in \mathbb{G}$.

ii. Del Neutro: $\exists! g \in \mathbb{G}$ tal que $a \,\boldsymbol{o}\, g = g \,\boldsymbol{o}\, a = a$; $\forall a \in \mathbb{G}$.

iii. Del Inverso: Para cada $a \in \mathbb{G}$ $\exists! a' \in \mathbb{G}$ tal que $a \,\boldsymbol{o}\, a' = a' \,\boldsymbol{o}\, a = g$.

Definición: Sea $\mathbb{G}$ un grupo entonces:

i. $\mathbb{G}$ es un grupo conmutativo si: $a \,\boldsymbol{o}\, b = b \,\boldsymbol{o}\, a$ $\forall a, b \in \mathbb{G}$.

ii. Si $\exists$ $a, b \in \mathbb{G}$ tales que $a \,\boldsymbol{o}\, b \neq b \,\boldsymbol{o}\, a$, entonces $\mathbb{G}$ es un grupo no conmutativo.

Definición: Sea $\mathbb{C}$ un conjunto bajo dos operaciones, adición y multiplicación, entonces $\mathbb{C}$ es un campo si cumple:

i. El conjunto $\mathbb{C}$ es un grupo conmutativo respecto a la operación adición con elemento neutro 0.

ii. Los elementos de $\mathbb{C}$ distintos de cero forman un grupo conmutativo respecto a la operación multiplicación con elemento neutro $1 \neq 0$.

iii. Es válida la ley distributiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{C}$, $a(b + c) = ab + ac$.

Estas definiciones nos servirán para demostrar que el sistema de los números reales es un campo, pues $\mathfrak{R}$ es un grupo conmutativo bajo la operación adición y bajo la operación multiplicación.[10]

Antes de seguir adelante debemos hacer un alto para conocer algunas propiedades de los números reales a través de su definición axiomática. Es decir, a través de afirmaciones sobre los reales que aceptamos como ciertas. Estas propiedades son de uso común para nosotros desde la primaria, aunque la notación no tiene porque ser tan habitual.

[10] Podemos denotar a los campos y en particular a los reales con esta notación $(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ veremos que los reales cumplen las leyes de orden entonces el sistema de los números reales es un capo ordenado.

II. B-2 DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES

En este apartado elegimos presentar la definición del sistema de los números reales a través de un conjunto de quince axiomas para, según este método,[11] incluir enseguida la demostración de que los números racionales son subcampo[12] de los números reales.

Definición: Sea $\Re$ el conjunto de los números reales, entonces cumple con los siguientes axiomas:

(A1) Sean $x, y \in \Re$, entonces $x + y \in \Re$ ....(cerradura)

(A2) Sean $x, y \in \Re$, entonces $x + y = y + x$............................(conmutatividad)

(A3) Sean $x, y, z \in \Re$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$........(asociatividad)

(A4) $\exists!\ c \in \Re$, tal que $\forall\ x \in \Re$, $x + c = x$.................................(neutro aditivo)

(A5) Para cada $x \in \Re$, $\exists\ -x \in \Re$ tal que $x + (-x) = 0$..............(inverso aditivo)

(M1) Sean $x, y \in \Re$, entonces $xy \in \Re$...(cerradura)

---

[11] Ver referencia en: **HAASER, NORMAN; LA SALLE, JOSEPH; SULLIVAN, JOSEPH.** *Análisis Matemático*, pp. 21-30.

[12] S es subcampo del campo C, si $S \subset C$ y si S cumple con las propiedades de campo.

(M2) Sean x, y $\in \Re$, entonces xy = yx............................(conmutatividad)

(M3) Sean x, y, z $\in \Re$, entonces (xy)z = x(yz).....................(asociatividad)

(M4) $\exists!$ u $\in \Re$, tal que $\forall$ x $\in \Re$, ux = x...................(neutro multiplicativo)

(M5) $\forall x \in \Re$, $x \neq 0$, $\exists$ x^{-1} tal que $xx^{-1} = 1$.................(inverso multiplicativo)

(D1) Sean x, y, z $\in \Re$, x(y + z) = xy + xz.........................(ley distributiva)

(O1) $\forall$x, y $\in \Re$, solo una de estas tres leyes se verifica:

x > y, x < y,   x = y..(tricotomía)

(O2) $\forall$x, y, z $\in \Re$, si x > y $\wedge$ y > z, entonces x>z.................(transitividad)

(O3) Si x > y entonces $\forall$w $\in \Re$, x+w > y+w.

(O4) Si x > y, con 0 < w entonces xw < yw.

(S) *Axioma del supremo.* Sea A subconjunto no vació de $\Re$ tal que A esta acotado superiormente entonces existe s en $\Re$ tal que

i) $s \geq a$, $\forall a \in A$

ii) Sea x cota superior de A entonces $s \le x \ \forall x$.

entonces $s := \sup A$.

La propiedad **(A1)** implica que la operación de adición asocia dos elementos cualquiera de $\Re$, *x, y*, convirtiéndolos en un elemento único de $\Re$, el elemento x+y. Análogamente, **(M1)** indica que la operación multiplicación asocia dos elementos cualesquiera $x, y \in \Re$, para convertiros en un único elemento de $\Re$, a saber xy.

Las propiedades **(A2)** y **(M2)** implican la conmutatividad en las operaciones de adición y multiplicación respectivamente. Entonces para cualquier par de números reales es igual sumar x+y que sumar y+x; así como también es igual multiplicar *x* por *z* que *z* por *x*.

Siguiendo adelante **(A3)** y **(M3)** implican la que las operaciones de adición y multiplicación son asociativas, es decir, que si tenemos tres elementos cualesquiera de $\Re$, como *x*, *y*, *z* sabemos que podemos sumar un par de elementos (x+y) además de que esta suma es elemento de $\Re$ por lo que al elemento (x+y) podemos sumarle *z*, o bien podemos adicionar *x* a (y+z), pues (y+z) es elemento de $\Re$. Lo mismo se aplica para la operación de multiplicación.

La propiedad **(A4)** implica que existe un único neutro aditivo en los reales, es decir que existe en único elemento en $\Re$, llamado cero, con la característica que al sumarlo a un *x* cualquiera elemento de $\Re$, la suma es suma es igual a *x*. A su vez **(M4)** implica que existe un único elemento en $\Re$, llamado uno con la propiedad que al multiplicar uno por cualquier *x* elemento de $\Re$, el producto es igual a *x*.

La propiedad **(A5)** indica que para cada real *x* existe un inverso aditivo –*x*, tal que su suma es el neutro aditivo, es decir, tal que su suma es igual a cero. A su vez **(M5)** define a x^{-1} como el inverso multiplicativo para cada *x* que pertenece a los reales, tal que al multiplicar *x* por x^{-1} el producto es igual a 1, en otras palabras igual al neutro del conjunto.

La propiedad **(D)** conocida como la ley distributiva, enlaza las operaciones de adición y multiplicación.

Son conocidas como las propiedades de orden **(O1)-(O4)**, donde **(O1)** y **(O2)** serán de particular importancia para el estudio del conjunto de elección. Por su parte **(O3)** y **(O4)** conectan las operaciones adición y multiplicación. Así **(O3)** establece dada una relación de desigualdad al sumarle cualquier real *w* la desigualdad permanece. Lo que implica **(O4)** es que la multiplicación por cualquier número real mayor a cero no altera la desigualdad.

El axioma del supremo implica que para todo subconjunto A no vacío de $\Re$ existe un real que es la mínima de las cotas superiores de A y esa mínima cota superior es llamada el supremo del conjunto A. Discutiremos con más detenimiento algunos resultados sobre el axioma del supremo en unos párrafos mas adelante.

Es claro que por la definición axiomática que los reales son un conjunto bajo dos operaciones, suma y multiplicación, las cuales cumplen con la definición de grupo conmutativo y de campo.

II. B-3 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

1. El primer teorema que presentamos en esta sección[13] es con el que se demuestra la existencia de los números irracionales, un problema que se remonta a la Antigua Grecia, cuya demostración la debemos a Euclides.

Teorema I: Ningún racional tiene un cuadrado igual a 2.

Demostración: Supongamos que existe p/q tal que p/q es un número racional cuyo cuadrado es 2. Esta afirmación nos conducirá a una conclusión contradictoria que demostrará que nuestra hipótesis es falsa por lo que el teorema quedará probado.

Entonces $(p/q)^2 = 2$, supongamos que p y q no tienen ningún factor común.[14] De se deduce que $p^2 = 2q^2$ por lo tanto p^2 es par. Por tanto p es par.

[13] Para referencias de esta sección ver: **HAASER, NORMAN; LA SALLE, JOSEPH; SULLIVAN, JOSEPH.** *Análisis Matemático*, pp. 21-30. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* México, Mc Graw Hill, tercera edición, 1980, capítulos I y II.

Entonces existe un entero p' tal que p = 2p'.

Sabemos que $p^2 = 2q^2$, entonces: $(2p')^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$. Por tanto q^2 es par de donde q es par. Pero esto es una contradicción, pues entonces p y q tendrían como factor común al 2 y supusimos que p y q no tenían ningún factor común.

Por tanto es falso suponer que existe un racional cuyo cuadrado sea 2.

■

Teorema II: Sean $r \in \mathfrak{Q}$ con $r \neq 0$ y x irracional. Entonces r + x y rx son irracionales.

Demostración:

a) Sea p/q tal que $p, q \in \mathfrak{Z}$ con $q \neq 0$ y $x \in I$. Supongamos que $r + x \in \mathfrak{Q} \Rightarrow r + x = z$ con $z \in \mathfrak{Q} \Rightarrow x = z - r \in \mathfrak{Q}$ esto porque $\mathfrak{Q}$ es campo $\Rightarrow x \in \mathfrak{Q}$, contradicción. La implicación anterior es un absurdo ya que $x \in \mathfrak{I}$. Entonces es falso suponer que r + x es racional. Por lo tanto, r + x es irracional.

b) La demostración de que rx es irracional se realiza de forma análoga suponiendo que rx es racional entonces rx puede escribirse de la forma p/q

[14] Esto no es una particularización pues todo número racional puede reducirse a una forma p/q tal que p y q no tengan factores comunes.

luego existe q/p inverso multiplicativo por que $\mathfrak{Q}$ es campo. Lo que implica que existe z en $\mathfrak{Q}$ tal que z = rx, entonces z/r = x como z, r son racionales entonces existe el recíproco de r en $\mathfrak{Q}$ y como es campo, el producto es cerrado, por lo tanto $z/r \in \mathfrak{Q}$, entonces $x \in \mathfrak{Q}$. Contradicción, pues x es irracional. Por lo tanto es falso suponer que rx es racional. Por lo que concluimos que rx es irracional.

■

El siguiente resultado lo anunciamos desde el final de la sección **II.B** y, es hasta este punto, que tenemos los elementos para demostrarlo fácilmente.

Teorema III: Sea *i* una mercancía y p_i un racional entonces p_ix_i es un real no negativo.

Demostración: Sabemos que $x_i \in X \subset \mathfrak{R}^+$ para toda *i*. Entonces tenemos dos casos:

i. Si x_i es racional. Como $p_i \in \mathfrak{Q}$, como $\mathfrak{Q}$ es un campo conmutativo bajo la operación multiplicación entonces p_ix_i es cerrada es decir $p_ix_i \in \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}$. Por lo tanto $p_ix_i \in \mathfrak{R}$.

ii. Si x_i es irracional, sabemos que $p_i \in \mathfrak{Q}$, entonces por el teorema anterior $p_ix_i \in I \subset \mathfrak{R}$. Por lo tanto $p_ix_i \in \mathfrak{R}$.

Por lo tanto $p_i x_i$ es un real para toda mercancía *i*.

■

Definición: Sea Y es un conjunto ordenado y que $E \subset Y$ con E acotado superiormente y supongamos que existe α tal que:

α es cota superior

Si $\gamma < \alpha$ entonces γ no es cota superior de E.

Entonces α es llamado mínima cota superior de E o supremo de E y lo denotamos $\alpha = \sup E$.

Definición: Sea Y un conjunto ordenado $E \subset Y$ y sea E acotado por abajo. Si existe un β tal que:

β es cota inferior de E

$\gamma > \beta$ entonces γ no es cota inferior de β

entonces β es la máxima cota inferior de E o ínfimo de E y se denota por $\beta = \inf E$.

Definición: Un conjunto acotado S se dice que tiene la propiedad de mínima cota inferior si cumple lo siguiente $E \subset S$, $E \neq \phi$, E es acotado por arriba. Entonces el supremo de E existe en S.

Teorema IV: Supongamos que S es un conjunto ordenado con la propiedad de mínima cota superior supongamos que $B \subset S$, $B \neq \phi$, B es acotado inferiormente. Sea L el conjunto de todas las cotas inferiores de B. Entonces $\alpha = \inf B$.

Demostración: B esta acotado por abajo entonces L es no vacío y L consiste de todos los y tales que: $y \leq x$, $\forall x \in B$. Entonces toda x es cota superior de L. Por lo tanto L esta acotado por arriba. Por las hipótesis sobre S, L tiene supremo sea $\alpha = \sup L$ y $\alpha \in S$. Si $\gamma < \alpha$ entonces γ no es cota superior de L entonces γ no esta en B. Se sigue que $\alpha \leq x$ $\forall x \in B$ así $\alpha \in L$. Si $\gamma > \alpha$ entonces $\beta \in L$ ya que a es una cota superior de L, si $\gamma > \alpha$ entonces $\beta \in L$ ya que a s una cota superior de L.

Por lo tanto, hemos demostrado que $\alpha \in L$ pero $\beta > \alpha$ entonces $\beta \in B$. Es decir α es cota inferior de B y β no es cota inferior de B, si $\beta > \alpha$ entonces α es el ínfimo de B.

■

Teorema V: Existe un campo ordenado $\mathfrak{R}$ el cual tiene la propiedad de mínima cota superior además $\mathfrak{R}$ contiene a los racionales $\mathfrak{Q}$ como subcampo.

Demostración: Se cumple como consecuencia del teorema anterior.

$\blacksquare$

Con la definición axiomática de los reales el teorema sobre la existencia de los números irracionales y con este último teorema, concluimos la definición del sistema de los números reales según el método empleado por Haaser.[15]

Teorema VI:

i. Si x, y $\in \mathfrak{R}$, x > 0 entonces existe un entero positivo n tal que: nx > y. Lo anterior recibe el nombre de propiedad arquimediana.

ii. Si x, y $\in \mathfrak{R}$ con x < y entonces $\exists$p $\in \mathfrak{Q}$ tal que: x < p < y. Esta propiedad se nombra densidad de $\mathfrak{Q}$ en $\mathfrak{R}$.

[15] **HAASER, NORMAN; LA SALLE, JOSEPH; SULLIVAN, JOSEPH.** *Análisis Matemático*, pp. 21-30.

Demostración:

i. Sea A = {nx / n$\in \mathbb{Z}^+$} Si el inciso *i* del teorema fuera falso entonces *y* sería una cota superior de A, pero en consecuencia A tendría una mínima cota superior en $\Re$.

Sea α = supA.

Ya que x > 0, $\alpha - x < \alpha \wedge \alpha - x$ no es cota superior, entonces $\alpha - x < mx$ para algún entero positivo *m*. Por lo tanto $\alpha < (m+1)x \in A$.

Lo cual contradice que α es cota superior, por lo tanto la hipótesis es falsa.

Por lo tanto la afirmación del inciso i es verdadera.

ii. Sea $y - x > 0$ por lo tanto podemos aplicar el inciso *i* de este teorema. Supongamos la existencia de un entero positivo n tal que $n(y - x) > 1$, entonces: $ny-nx > 1$ lo que implica $ny > 1 + nx$.

Volvemos a aplicar el inciso i. Entonces obtenemos m_1, m_2 tales que: $m_1 > nx \wedge m_2 > -nx$.

Por lo que $\exists m \in \mathbb{Z}^+$, de la forma $-m_2 \leq m \leq m_1$ tal que $m-1 < nx < m \vee m < nx + 1 < m+1$.

Entonces cambiemos las desigualdades y obtenemos: $nx < m \leq 1 + nx < ny$, como $n > 0$ entonces: $p = m/n$ tal que $x < m/n < y$.

■

II. C CARDINALIDAD DEL CONJUNTO DE MERCANCÍAS M

El número de mercancías que un consumidor conoce en un tiempo y espacio dados es finito pues nuestro consumidor puede sentarse y enlistar una a una las mercancías que conoce y pasado un rato llegará a la última. Esto lo puede hacer porque las mercancías están perfectamente diferenciadas por sus características físicas y por su disponibilidad temporal y espacial.[16]

El que un conjunto sea finito implica, intuitivamente, que podemos asociar al conjunto con un subconjunto de los números enteros, por lo que existe un entero no negativo *k*, tal que *k* corresponde al último de los elementos del conjunto, en este caso la última mercancía a la que nuestro consumidor haga referencia en su listado.

[16] Ver referencia en: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulo II.

Esta sección trata sobre este tema, contar los elementos de un conjunto, que como veremos es un tema ampliamente tratado en la matemática, pues trae consigo las nociones de conjunto finito, infinito contable y no contable que nos brindan un marco de referencia para conjuntos como los enteros, racionales e irracionales y por tanto también para el sistema de los números reales.

II. C-1 EQUIPOTENCIA Y FINITUD EN CONJUNTOS

Ahora toca reflexionar sobre una característica particular de este conjunto su equipotencia. Pero para poder acceder a establecer la equipotencia del conjunto de mercancías es necesario dejar clara la estructura matemática que rodea a la equipotencia. La intención de este apartado es establecer la propiedades que debe poseer un conjunto para definirlo finito o infinito, o saber si un conjunto es numerable o si posee la potencia del continuo.[17]

[17] Para referencias del apartado "Equipotencia y finitud en conjuntos" ver: **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*, pp. 61-64. **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, pp. 40-65. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, capítulo VII. **J. DE BURGOS, ROMÁN.** *Curso de Álgebra y Geometría,* páginas 24-54. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* capítulo III.**ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* capítulo II y X. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV.

II. C-1.A FUNCIONES

Definición: ***f*** es una función de A en B $\Leftrightarrow$ ***f*** es una relación tal que $\forall x \in D_f \exists y! \in B$ tal que la $(x, y) \in$ ***f***.

Notación: ***f***: A $\rightarrow$B se lee ***f*** es una función de A en B.

Esto indica que ***f*** es una función[18] si y sólo si ***f*** es una relación en la que para toda *x* que pertenezca al dominio de la relación ***f*** existe una única *y* en B tal que (x, y) pertenezca a la relación ***f***. A *y* se le nombra el valor de ***f*** en *x* denotándolo por ***f***(x). La imagen de ***f***, $I_f = \{f(x) / x \in D_f\}$.

Existe otra forma de expresar el concepto anterior. Así en un lenguaje más comprometido con la Teoría de Conjuntos una función se define como sigue:[19]

Definición: Una relación ***f*** de A en B es llamada función si $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f$ entonces $b = c, \forall a \in A \wedge \forall b, c \in B$.

[18] Este término fue propuesto por primera vez por Leibniz. Ver en **ROJO, ARMANDO.** *Álgebra I,* capítulo III.
[19] Esta definición fue dada por Peano. Ver referencia en: **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*, capítulo III . **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, capítulo IV.

Definición: El codominio de $\boldsymbol{f}$ es cualquier conjunto C que contenga a la imagen de $\boldsymbol{f}$.

La definición anterior dice que $\boldsymbol{f}$ es una función inyectiva si y sólo si para cada *y* en la imagen de $\boldsymbol{f}$ existe una única *x* tal que (x, y) pertenezca a la función $\boldsymbol{f}$. En otros términos sean $x, x' \in D_{\boldsymbol{f}}$, si $x \neq x'$ entonces $\boldsymbol{f}(x) \neq \boldsymbol{f}(x')$. También es posible expresar la inyectividad de $\boldsymbol{f}$ en estos términos, sean x, x' en el dominio de $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x')$ entonces $x = x'$.

Como las funciones son relaciones podemos aplicar el concepto de composición de relaciones.

Definición: Dadas dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ tales que $\boldsymbol{f} \subset A \times B$ y $\boldsymbol{g} \subset B \times C$ es posible definir una relación entre A y C, esta es la composición entre $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} = \{(x, z) \,/\, \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in \boldsymbol{f} \wedge (y, z) \in \boldsymbol{g}\}.$$

Teorema VII: Sean $\boldsymbol{f}: A \rightarrow B \wedge \boldsymbol{g}: B \rightarrow C$, funciones entonces:

i. $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es una función.

ii. $D_{\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}} = D\,\boldsymbol{f} \cap \boldsymbol{f}^{-1}(D_{\boldsymbol{g}})$.

Demostración:

i. Por demostrar que $g \circ f$ es una función. Si $(a, c) \in g \circ f \wedge (a, c') \in g \circ f$. Esto implica que existen $b, b' \in B$ tales que $(a, b) \in f \wedge (b, c) \in g$, como también $(a, b') \in f \wedge (b', c') \in g$. Puesto que f es función $b = b'$. Por tanto $(b, c) \in g \wedge (b, c') \in g$. Lo que implica que $c = c'$ por que g es función. Por lo tanto $g \circ f$ es función.

ii. Por demostrar $D_{g \circ f} = D f \cap f^{-1} (D_g)$. Lo que se quiere demostrar es que $g \circ f$ esta definido en a si y sólo si f esta definido en a y g esta definido en $f(a)$. Sabemos que $a \in D_{g \circ f}$ si y sólo si $\exists c \in C$ tal que $(a, c) \in g \circ f$ si y sólo si $\exists b \in B$ tal que $(a, b) \in f \wedge (b, c) \in g$ si y sólo si $a \in D_f \wedge b = f(a) \in D_g$.

■

Definición: Sea $f : A \rightarrow B$ una función entonces la imagen inversa bajo f de B es:

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \ / \ (a, b) \in f, \text{ para alguna } b \in B\} = \{A \in a \ / \ f(x) \in B\}.$$

Definición: Sea f: $A \rightarrow B$ una función. f es inyectiva $\Leftrightarrow$ para cada $y = I_f$ $\exists! x$ tal que $(x, y) \in f$.

Definición: Sea $\boldsymbol{f}$: A $\rightarrow$ B. $\boldsymbol{f}$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $I_{\boldsymbol{f}}$ = B.

Observemos que si en toda función $\boldsymbol{f}$, B se reduce a $I_{\boldsymbol{f}}$ entonces toda función $\boldsymbol{f}$ es sobreyectiva.

Teorema VIII: Una función es invertible si sólo si es inyectiva.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $\boldsymbol{f}$ una función invertible entonces $\boldsymbol{f}^{-1}$ es una función. Si a, a' $\in D_{\boldsymbol{f}}$ y $\boldsymbol{f}$(a) = $\boldsymbol{f}$(a') entonces ($\boldsymbol{f}$(a), a) $\in \boldsymbol{f}^{-1}$ $\wedge$ ($\boldsymbol{f}$(a'), a') $\in \boldsymbol{f}^{-1}$ por lo que a = a'. Por lo tanto $\boldsymbol{f}$ es inyectiva.

$\Leftarrow$) Sea $\boldsymbol{f}$ inyectiva, si (a, b) $\in \boldsymbol{f}^{-1}$ $\wedge$ (a, b') $\in \boldsymbol{f}^{-1}$ implica que (b, a) $\in \boldsymbol{f}$ $\wedge$ (b', a) $\in \boldsymbol{f}$. Entonces b = b' por que $\boldsymbol{f}$ es función. Por lo tanto $\boldsymbol{f}^{-1}$ es función.

Por lo que queda demostrado que una función es invertibles si y sólo si es inyectiva.

■

Definición: $\boldsymbol{f}$: A $\rightarrow$ B es biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

II. C-1. B CONJUNTOS EQUIPOTENTES[20]

Definición: Sean dos conjuntos A y B. A es equipotente a B si y solo si existe una función biyectiva ***f*** de A sobre B.

Notación: A es equipotente a B se expresa con $A \simeq B$.

Si es una biyección entonces A y B tienen el mismo número de elementos o también se dice que A y B tienen la misma cardinalidad.

Definición: Sea n un entero positivo cualquiera, entonces $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de los n primeros enteros.

Definición: Sea J el conjunto de todos los enteros positivos: $J = \mathbb{Z}^+$. Entonces para cualquier conjunto A decimos que:

[20] Ver como referencia para esta sección: **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*, capítulo III. **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, pp. 40-65. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, capítulo VII. **J. DE BURGOS, ROMÁN.** *Curso de Álgebra y Geometría,* páginas 24-54. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* capítulo III. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* capítulo X. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-II.

i. A es finito si $A \simeq J_n$ para algún n. Esto es si hay una biyección entre A y J_n entonces A es finito.

ii. Por convención el conjunto vacío es finito.

iii. A es infinito si A no es finito.

iv. A es contable si $A \simeq J_n$. Con el término contable nos referimos a un conjunto infinito contable.

v. A no es contable si A ni es finito ni es contable

vi. A es a lo más contable si A es finito o contable.

De lo anterior se recogen dos reflexiones:

- Si A y B son finitos, entonces $A \simeq B$ si y sólo si A y B contienen el mismo número de elementos. Entonces la cardinalidad de A es la misma que la de B y ésta, la cardinalidad, corresponde el número exacto de elementos.

- Si A y B son infinitos entonces el concepto importante es el de biyección. Ya que para afirmar que estos dos conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad es necesario encontrar una función biyectiva entre ambos.

De acuerdo a esta definición para $k \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera, entonces $J_k = \{1, 2, \dots ,k\}$ es el conjunto de los *k* primeros enteros. A es finito, si $A = J_k$ para algún *k*. Por la manera en que construimos el conjunto de mercancías, donde éstas son diferenciadas por tiempo, lugar y disponibilidad, además de sus características propias,[21] entonces es posible para nuestro consumidor realizar un listado de estas mercancías, que conoce para el tiempo t_0. Por lo que puede asociar las mercancías de su listado, con el conjunto J_k, lo que en términos comunes conocemos como enumerar las mercancías de su lista, hasta llegar a la última a la cual le corresponde el término *k* del conjunto J_k. Por tanto, el conjunto de mercancías es un conjunto finito de cardinalidad *k*.[22]

Teorema IX: Si **M** es el conjunto de mercancías y $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros no negativos $J_k = \{1, 2,\dots, k\} \subset \mathbb{Z}^+$y es ***f*** una función tal que ***f***: $\mathbf{M} \rightarrow J_k$ entonces ***f*** es una biyección.

Demostración: Recordemos que una función ***f*** es biyectiva si es inyectiva y sobre. Sean *m* y *m'* un par de mercancías cualquiera de la lista de mercancías de nuestro consumidor lo

[21] Características que distinguen a las mercancías según Villar, ver referencia en: **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía*, capítulos II y III .
[22] El cardinal *k* es importante pues definirá la potencia del conjunto de elección. Por ejemplo para dos mercancías, *k* = 2 y el conjunto de elección se corresponderá con $\Re^{2+}$.

que implica que suponemos que el conjunto de mercancías que conoce el consumidor es no vació.[23]

Por ver que ***f*** *es* inyectiva. Si para $i = \boldsymbol{f}(\mathrm{m}) \neq \boldsymbol{f}(\mathrm{m'}) = j$ con $i, j \in \{1,2,\ldots, \mathrm{k}\} \Rightarrow m \neq m'$. Lo que garantiza que a dos mercancías distintas no les corresponda el mismo número natural.

Por ver que ***f*** es sobre. La función ***f*** es sobre si $\forall \mathrm{n} \in$ Rango de ***f***, es decir para toda n en $\{1,2,\ldots, \mathrm{k}\}$, $\exists m$ que pertenece al conjunto de mercancías, tal que $\boldsymbol{f}(m) = n$. En otras palabras si existe un número $n \leq k$ con $n, k \in \mathrm{J}_{\mathrm{k}}$ entonces ese natural le corresponde una y solo una mercancía.

■

Observemos este sencillo ejemplo intuitivo: Afirmamos que A es el conjunto de todos los enteros entonces A es contable. A= {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3,…} y J = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…}. La biyección entre los conjuntos es evidente, si asignamos: al 0 de A el 1 de J, al 1 de A el 2 de J y al -1 de A el 3 de J; y seguimos con esta secuencia, obtenemos la representación de una función biyectiva entre A y B. Queda expuesto que el conjunto de los enteros es un conjunto infinito contable. Entonces si el conjunto es infinito si puede ser equivalente a un subconjunto propio de él. Un conjunto finito no puede ser equivalente a un subconjunto propio de él.

[23] Por convención como vimos en la definición, si **M** fuese vacío entonces la cardinalidad de **M** es cero. Por lo tanto **M** es finito.

Definición: Un secuencia es un función definida sobre J si ***f***(n) = Sn para n $\in$ J. Entonces ***f*** se denota por {Sn}. Los valores de ***f*** se llaman términos de la secuencia (sucesión).

Si A es un conjunto y $S_n \in$ A para toda $n \in$ J. Entonces {Sn} es una sucesión o secuencia en A (o secuencia de elementos de A). Observemos que los términos de una secuencia: x_1, x_2, x_3,…, no necesariamente son distintos. Por lo tanto, siempre se puede formar la secuencia constante.

Cada conjunto contable es el rango de una función uno a uno definida sobre J. Entonces Podemos ver a cada conjunto contable como el rango de una secuencia de términos distintos, entonces podemos "arreglar" los elementos. Una secuencia significa un ordenamiento (muy particular).[24]

Teorema X: Cada subconjunto infinito de un conjunto contable A es contable.

Demostración: Supongamos que E$\subset$ A y que E es infinito.

Arreglamos los elementos de A en una secuencia {Sn} de elementos distintos. Por que A es contable entonces existe f: $\mathbb{Z}^+ \rightarrow$ A, es decir, n $\rightarrow x_n$ no importa como sean las x porque como etiquetas son distintas.

[24] Ver como referencia: **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, pp. 40-65. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* capítulo X. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-II.

Ahora ya tenemos las secuencia $\{x_1, x_2, x_3,\ldots\}$ formaremos una subsecuencia $\{n_n\}$ de la forma siguiente[25]

Sea n_1 el entero positivo mas pequeño tal que: $x_{n_1} \in E$. Habiendo seleccionado de esta manera $n_1, n_2,\ldots, n_{k-1}$, con $k \in \{2, 3, 4,\ldots\}$.[26]

Sea n_k el entero mas pequeño mayor que $x_{n_{k-1}}$ tal que $x_{n_k} \in E$. Observemos que el término que sigue a $x_{n_{k-1}}$ pertenece también a E.

Designamos $\boldsymbol{f}(k) = x_{n_k}$, con $k \in \{1, 2, \ldots\}$ con lo que obtenemos un biyección entre E y J = $\mathbb{Z}^+$. Por tanto E es contable.

Luego si utilizamos inducción sobre $\boldsymbol{f}(n) = x_n$ implica $\boldsymbol{f}(k) = x_{n_k}$, por lo que E es infinito contable.

■

Observemos que los conjuntos infinitos más pequeños son los contables.

[25] Porque E vive en un conjunto contable entonces debe existir el entero positivo mas pequeño.
[26] Hasta aquí el conteo es finito.

Definición: Si E_α es un conjunto para todo $\alpha \in A$, con A un conjunto de índices, entonces:

- $S = \cup_{\alpha \in A} E_\alpha$, entonces $x \in S$ si $x \in E_\alpha$ para al menos una α.
- Si A = {1, 2, … , n} entonces $S = \cup_{k=1}^{n} E_\kappa$.
- Si A = {1, 2, … } implica que $S = \cup_{k=1}^{\infty} E_\kappa$.
- $P = \cap_{\alpha \in A} E_\alpha$, entonces x pertenece a P si y sólo si $x \in E_\alpha$ para toda α.
- Si A = {1, 2, … , n} entonces $P = \cap_{k=1}^{n} E_\kappa$.
- Si A = {1, 2, … } implica que $P = \cap_{k=1}^{\infty} E_\kappa$.

El teorema siguiente demuestra que la unión arbitraria de numerables es numerable.

Teorema XI: Sea {En}, n = {1, 2, …}, una secuencia de conjuntos contables y sea S = $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces S es contable.

Demostración: Sea

$$
\begin{array}{llllll}
E_1 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \dots \\
E_2 & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, & \dots \\
E_3 & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34}, & \dots \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
E_n & x_{n1}, & x_{n2}, & x_{n3}, & x_{n4}, & \dots \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
. & & & & &
\end{array}
$$

Formemos los elementos de S

$x_{11},\quad x_{21},\quad x_{12},\quad x_{31},\quad x_{22},\quad x_{13},\quad x_{41},\quad x_{32},\quad x_{23},\quad x_{14},\quad \dots$

Sea T un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}^+$ entonces existe una biyección entre T y S por lo que T $\simeq$ S. Por lo tanto S es contable.

De donde queda demostrado que la unión de contables es contable.

■

Teorema XII: Supongamos que A es a lo más contable y para cada $\alpha \in A$, B_α es a lo mas contables. Si $T = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$, entonces T es a lo mas contable.

Demostración: Como B es un número contable de infinitos contables, entonces por el teorema anterior $T \simeq S$.

■

Teorema XIII: Sea A un conjunto contable y sea B_n el conjunto de todas las n-adas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ donde $\alpha_k \in A$, con $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no necesitan se distintos. Entonces B_n es contable.

Demostración: B_1 es contable. Suponemos que B_{n-1} es contable para $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Los elementos de B_n son de la forma (b, α) con $b \in B_{n-1}$ y $\alpha \in A$. Entonces Bn es la unión de un conjunto contable de conjuntos contables porque $\alpha \in A$ y A es contable.

Por el teorema anterior Bn es contable pues *n* es arbitraria por lo tanto es válidos para toda n. El teorema se sigue por inducción.

■

Teorema XIV: El conjunto de los números racionales es contable.

Demostración: Aplicamos el teorema anterior. Con n = 2, todo número racional r es de la forma b/a donde b, a $\in \mathbb{Z}$ para a $\neq$ 0 y el conjunto de parejas ordenas (b, a) es el conjunto de fracciones b/a y es contable.

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & (1, 2) & (1, 3) & (1,4) & \dots \\
(2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & \dots \\
(3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Esto sucede al asociar a cada pareja de enteros un racional.

Por lo tanto el conjunto de los racionales es contable.

$\blacksquare$

Teorema XV: Sea A el conjunto de todas las secuencias cuyos elementos son los dígitos 0 y 1. El conjunto A es no contable.

Demostración:

$$
\begin{array}{llllll}
E_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
E_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
E_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\
E_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots \\
. & . & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & . & \dots
\end{array}
$$

Sea E un subconjunto contable de A y sea E el conjunto de secuencias s1, s2, s3, … . Construimos una secuencia S como sigue: si el n-ésimo dígito de Sn es 1, designamos el n-ésimo dígito de S igual a 0 y viceversa entonces la secuencia S difiere de cada miembro de E en al menos un lugar entonces $S \notin E$. Pero $S \in A$ y así E es un subconjunto propio de A.

Hemos demostrado que cada subconjunto contable de A es un subconjunto propio de A. Se sigue que A es no contable, de otra manera A debe ser subconjunto propio de A y eso sería una contradicción.

■

Con la demostración de anterior teorema podemos afirmar que el conjunto de los números reales es un conjunto infinito no contable.

Teorema XVI: La equipotencia es una relación de equivalencia.

Demostración: Por demostrar que la equipotencia es reflexiva, simétrica y transitiva.

i. Por demostrar que todo conjunto es equipotente a sí mismo, $A \simeq A$..

Sea A un conjunto y sea la función identidad $\mathbf{I}: A \to A$, tal que si $x \in A$, $\mathbf{I}(x) = x$. Por ver que la función identidad sea biyectiva. Demostrando que **I** es inyectiva, sean x, x' en A tales que con $x \neq x$ entonces $\mathbf{I}(x) = x \wedge I(x') = x'$. Entonces $x = \mathbf{I}(x) \neq \mathbf{I}(x') = x'$. Por lo tanto **I** es inyectiva. Ahora por demostrar que **I** es sobre. Sea x en la imagen de **I** por demostrar que x esta en A. Como x esta en la imagen de **I** entonces $x = \mathbf{I}(x)$ para x en el dominio de **I** pero el $D_{\mathbf{I}} = A$, entonces x pertenece al conjunto A. Por lo tanto **I** es sobre. Por lo que hemos demostrado que la función identidad es biyectiva.

Hemos encontrado una biyección de A en A por lo tanto $A \simeq A$.

ii. Por demostrar que si A es equipotente a B entonces B es equipotente a A, $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$.

A es equipotente a B $\Leftrightarrow \exists \mathbf{f}$ biyectiva $\mathbf{f}: A \to B$ entonces $\mathbf{f}$ es inyectiva entonces existe $\mathbf{f^{-1}}$ inversa de $\mathbf{f}$. Entonces $\mathbf{f^{-1}}: B \to A$ es biyectiva.

Por lo tanto existe una función biyectiva de B en A. De donde $B \simeq A$.

iii. Por demostrar que si A es equipotente a B y B es equipotente a C entonces A es equipotente a C, $A \simeq B \wedge B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$.

Como $A \simeq B \wedge B \simeq C$ existen dos funciones biyectivas $\mathbf{g}: A \to B \wedge \mathbf{h}: B \to C$ como la composición de funciones biyectivas es biyectiva entonces $\mathbf{h} \circ \mathbf{g}: A \to C$ es biyectiva.

Por lo tanto existe una función biyectiva de A en C de lo que concluimos que A es equipotente a C.

Por lo tanto la equipotencia es una relación de indiferencia.

∎

Teorema XVII: Sea f: H $\rightarrow$ Y una función donde Y es numerable. Supongamos que $\boldsymbol{f}^{-1}$ es numerable para cada y $\in$ Y. Entonces H es numerable.

Demostración:

Sabemos que $f^{-1}\{y\} = \{x \in H: f(x) = y\}$

Sea Y = {y1, y2,… , yn,…}. Sabemos que $f^{-1}(\{y_i\})$ es numerable por hipótesis. También hemos demostrado que: si $\{E_\alpha\}$ es numerable y si $S = \cup_{\alpha=1}^{\infty} E_\alpha$, entonces S es numerable.

Esto implica que $\cup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{-1}(\{y_i\})$ es numerable.

Por demostrar que $x = \cup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{-1}(\{y_i\})$.

$\supseteq$] Por construcción $\cup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{-1}(\{y_i\}) \subset H$.

$\subseteq$] Sea $x \in H$. Entonces $\boldsymbol{f}(x) \in Y$. Pues si $\boldsymbol{f}(x) \in Y$ la función no estaría bien definida.

Entonces $\boldsymbol{f}(x) = y_i$ para algún $y \in Y$. Lo que implica que $x \in \boldsymbol{f}^{-1}\{y_i\}$.

Entonces $x \in \cup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{-1}(\{y_i\})$.

Por lo tanto $H = \cup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{f}^{-1}(\{y_i\})$.

Como la unión de numerables es numerable concluimos que H es numerable.

$\blacksquare$

Como hemos visto, el que un conjunto sea numerable implica que existe una biyección entre los elementos del conjunto numerable y el conjunto de los números naturales. Es decir, que para el caso de las mercancías que el consumidor *j* conoce en τ y e_0 existe una función *f* con dominio en el conjunto de mercancías y con imagen en el conjunto de los números naturales,[27] tal que *f* es biyectiva.

II. D SINOPSIS

Para resumir lo desarrollado hasta aquí diremos que:

i. Nuestro objetivo es profundizar en el conjunto de elección de un consumidor cualquiera.

ii. Primero tuvimos que definir mercancía y establecer cuantas existen para nuestro consumidor en un periodo de tiempo τ y espacio e_0 dados y concluimos que el conjunto de mercancías es numerable y finito. Refiriéndonos con *k* al número de elementos del conjunto de mercancías.

iii. Luego nos concentramos en las cantidades de cada mercancía y a través de un proceso deductivo llegamos a la conclusión de que la cantidad que puede desear consumir nuestro consumidor de una mercancía *i*, en un periodo de tiempo τ y espacio $\mathbf{e_0}$ dados, corresponde a un número real no negativo.

iv. Después de haber establecido el concepto de mercancía en el que queda explícito que existe un precio asociado a cada mercancía demostramos que este precio para términos de nuestro modelo debe ser un real positivo.

v. Dada la metodología de este documento nos concentramos en definir los conceptos matemáticos ligados a los números reales que nos son necesarios en el análisis de estos temas.

BIBLIOGRAFÍA

1. **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*, México, Facultad de Ciencias de la UNAM, primera edición, 2005, Introducción y capítulo I y pp. 61-64.

2. **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, México, Editorial Harpier & rowpublishers, 1970, pp. 40-65.

3. **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Estados Unidos, Editorial, Addison Wesley. Capitulo 1.

4. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, Aportaciones Matemáticas número 13, México, Sociedad Matemática Mexicana, UNAM- CONACYT, segunda edición, 2003, capítulos I-IV, VII.

5. **J. DE BURGOS, ROMÁN.** *Curso de Álgebra y Geometría,* España, Editorial Alambra, 1980, páginas 24-54.

6. **LELONG-FERRAND, JACQUELINE Y ARNAUDIES, JEAN MARIE.** *Curso de Matemáticas Tomo I. Álgebra,* España, Editorial Reverté,1979, capítulo I.

7. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1987, capítulos II y III.

8. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1991, capítulos I, II y X.

9. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* México, Mc Graw Hill, tercera edición, 1980, capítulos I-IV.

10. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* Estados Unidos, Mcmillan, segunda edición, 1968, capítulos: set theory, part one sección I, part tow secciones VI-VIII.

11. **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, España, W.W. Norton & Company, 1992, capítulo VII.

12. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulos II, III y Apéndice Matemático.

TERCER CAPÍTULO

EL CONJUNTO DE ELECCIÓN

Hemos ya establecido, que el número de mercancías que el consumidor conoce es finito y está denotado por k, además de que para cada mercancía i, con $i = \{1,2, \dots ,k\}$ asociamos el conjunto de las cantidades no negativas de la mercancía i con el subconjunto de los números reales $[0,\infty)$, el paso obvio de esta secuencia es definir el producto cartesiano de las k-mercancías del sistema, que en términos intuitivos no es otra cosa que todas las combinaciones posibles de las k-mercancías que conoce nuestro consumidor en un periodo tiempo y espacio dados.

Entonces denotemos por X_i al conjunto de cantidades no negativas de la mercancía i con $i = 1, 2,\dots, k$. Es decir en X_i está cualquier cantidad positiva o nula que exista de la mercancía i. Lo que implica que en términos de nuestro modelo $Xi := \mathfrak{R}^+$, lo anterior para cada una de las k-mercancías de nuestro modelo,[1] entonces:

[1] Para simplificar la notación con $\mathfrak{R}^+$ nos referimos a los números reales no negativos, entonces convenimos en que $0 \in \mathfrak{R}^+$. Como ya sabemos el cero corresponde a una cantidad nula, es decir, cero unidades de una mercancía.

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k = \underbrace{\mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+ \times \ldots \times \mathfrak{R}^+}_{\text{k-veces}} = \mathfrak{R}^{\mathbf{k+}}$$

Por tanto $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ es el Conjunto de Elección de nuestro consumidor en el tiempo t_0 y espacio e_0. Cabe resaltar que los elementos del conjunto de elección se conocen como canastas o cestas. Cada cesta es una opción distinta de cantidades no negativas de cada una de las *k*-mercancías que el consumidor conoce; es decir, las ***cestas*** son las combinaciones posibles de las distintas cantidades de todas y cada una de las mercancías que el consumidor representativo conoce en el periodo $\boldsymbol{\tau}$ y espacio $\mathbf{e_0}$ dados.[2]

Una reflexión lógica es preguntarnos si nuestro consumidor siempre debe de tener en cuenta a todas las *k*-mercancías del conjunto para formar las cestas; y la respuesta es muy simple, ya que nuestro consumidor puede armar cestas en las que no desee cantidad alguna de las *k*-mercancías, $x_i = 0, \ \forall\, i \leq k;$ y puede requerir cestas en las que solo quiera cantidades positivas de un sola mercancía y cero de las demás *k-1* mercancías $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ con $x_i \neq 0$ y $x_j = 0 \ \ \forall\, j \neq i$ con $i,j \in \{1,2, \ldots , k\}$ y así ir construyendo las cestas hasta aquellas en las que requiera cantidades positivas de todas las *k*-mercancías y aún en éstas las combinaciones son infinitas pues nuestro consumidor puede elegir cualquier número real positivo para asociarlo a cada una de las *k*-mercancías.

---

[2] Para referencia del uso de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k+}}$ como equivalente del cnjunto de elección ver: **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, capitulo 1. **VILLAR, ANTONIO**. *Lecciones de Microeconomía,* capítulo II.

III. A EL ESPACIO VECTORIAL $\mathfrak{R}^{k}$

Así casi sin darse cuenta, nuestro consumidor esta operando en un sistema de *k*-mercancías de las que puede elegir combinaciones de cantidades de una mercancía que están en un conjunto infinito no numerable $[0, \infty)$ por lo que nuestro consumidor se encuentra asociando a cada mercancía i con $i = \{1, 2, \ldots, k\}$, a una cantidad x cualquiera de $\mathfrak{R}^{+}$, es decir un x cualquiera en los reales no negativos. De pronto descubrimos que nuestro consumidor elige sobre un subconjunto del espacio vectorial $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.[3]

Definición: Un conjunto **V** sobre el campo K = $\mathfrak{R}$, para el cual están definidas dos operaciones: suma y producto por escalar; que además cumple con las siguientes propiedades:

i. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{s} \in \mathbf{V}$.

ii. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{u}$.

iii. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{r} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{u} + (\mathbf{s} + \mathbf{r}) = (\mathbf{u} + \mathbf{s}) + \mathbf{r}$.

---

[3] El desarrollo de esta sección tiene como referencias bibliográficas a: **COHN, FRS.** *Algebra volume I*, pp. 1-21. **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, pp. 40-65. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* capítulos II y III.

iv. $\exists\, \mathbf{e_v} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{e_v} = \mathbf{u}$.

v. Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ $\exists$ $\mathbf{-u}$ tal que $\mathbf{u + (-u) = e_v}$.

vi. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \Re \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.

vii. $\exists\, \zeta \in \Re$ tal que $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\zeta\, \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

viii. Sean $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $\alpha, \beta \in \Re \Rightarrow \alpha\beta\, \mathbf{u} = \beta\alpha\, \mathbf{u}$.

ix. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \Re \Rightarrow \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{s}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{s}$.

x. Sean $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $\alpha, \beta \in \Re \Rightarrow (\alpha+\beta)\, \mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$.

Se le conoce como espacio vectorial sobre el campo $\Re$ y a sus elementos como vectores.[4]

Entonces nuestro consumidor nos mostró los elementos de su conjunto de elección de *k*-mercancías, y estos elementos son todas las cestas como **x** que pertenecen a $\Re^{\mathbf{k+}}$. Ahora para comprender en poco más las propiedades de este conjunto tendremos que

[4] En este documento nos interesa trabajar con el campo de los números reales, sin embargo hay que aclarar que en esta definición el campo K es arbitrario.
Las propiedades (1)-(4) son nombradas las de la suma y las (5)-(9) propiedades de producto por escalar. De hecho la propiedades (8) y (9) reciben el nombre de Primera y Segunda ley distributiva de producto por escalares, respectivamente.

introducir el concepto de espacio vectorial y comprobaremos que $\Re^{\mathbf{k}}$ es un espacio vectorial y por ello sus elementos reciben el nombre de vectores, además verificaremos que el conjunto de elección de nuestro consumidor es un subconjunto de este espacio vectorial pues los elementos de dicho conjunto son solo los vectores no negativos de $\Re^{\mathbf{k}}$.

***Teorema I*: $\Re^{\mathbf{k}}$** es un espacio vectorial.

***Demostración*:**

i. Por demostrar que si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in \Re^{\mathbf{k}}$.

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^{\mathbf{k}}$ entonces son de la forma $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Entonces, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) + (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, donde $a_i, b_i \in \Re$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$. **S**umando coordenada a coordenada tenemos $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k + b_k)$, donde $a_i + b_i \in \Re\ \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, k$. Como $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^{\mathbf{k}}$, entonces todas sus coordenadas son mayores o iguales a cero, $a_i \geq 0$ y $b_i \geq 0$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$.

$\therefore\ \mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_k+b_k) \in \Re^{\mathbf{k}}$.

ii. Por demostrar que si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Re^{\mathbf{k}}$ entonces son de la forma $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, por (1) sabemos que $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{a} \in \Re^{\mathbf{k}}$ resta probar que son iguales. Entonces sea: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) + (b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k +$

b_k). Como las coordenadas son reales (a_i, b_i $\forall$ i =1, 2, …, k) es válida la propiedad conmutativa de reales $a_i + b_i = b_i + a_i \in \Re$, $\forall$ i =1, 2, …, k.

Entonces se tiene que, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_k) + (b_1, b_2, \dots, b_k) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_k + a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k) + (a_1, a_2, \dots, a_k) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

$\therefore$ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

iii. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$, elementos de $\Re^{\mathbf{k}}$ por demostrar que $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

Sea $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_1, a_2, \dots, a_k) + \mathbf{[}(b_1, b_2, \dots, b_k) + (c_1, c_2, \dots, c_k)\mathbf{]} = (a_1, a_2, \dots, a_k) + \mathbf{(}b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_k + c_k\mathbf{)}$; por la propiedad (1) $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ pertenece a $\Re^{\mathbf{k}}$ entonces podemos sumar $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Entonces, $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_1, a_2,\dots, a_k) + \mathbf{[}(b_1, b_2,\dots, b_k) + (c_1, c_2,\dots, c_k)\mathbf{]} = (a_1, a_2,\dots, a_k) + \mathbf{(}b_1 + c_1, b_2 + c_2,\dots, b_k + c_k\mathbf{)} = \mathbf{(}a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2,\dots, a_k + b_k + c_k\mathbf{)}$.

Como cada coordenada es una suma de reales, y la suma de reales es asociativa, se tiene que, $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_1, a_2, \dots, a_k) + \mathbf{[}(b_1, b_2, \dots, b_k) + (c_1, c_2, \dots, c_k)\mathbf{]} = (a_1, a_2, \dots, a_k) + \mathbf{(}b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_k + c_k\mathbf{)} = \mathbf{(}a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, \dots, a_k + b_k + c_k\mathbf{)} = \mathbf{[}(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots , (a_k + b_k) + c_k\mathbf{]} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

$\therefore$ **a+(b+c) = (a+b)+c.**

iv. Por demostrar que existe el neutro aditivo en $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$; es decir, por demostrar que existe $\mathbf{e}_v$ en $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ tal que $\mathbf{e}_v+\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

Sea $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$, un elemento de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ con cada una de sus *k* coordenadas igual a cero, y sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ un elemento cualquiera de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$, entonces $\mathbf{0} + \mathbf{a} = (0, 0, \ldots, 0) + (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Sumando coordenada a coordenada, $\mathbf{0} + \mathbf{a} = (0, 0, \ldots, 0) + (a_1, a_2, \ldots, a_k) = (0 + a_1, 0 + a_2, \ldots, 0 + a_k)$. Como cada coordenada $0+a_i$ es un real, y en reales $0+a_i = a_i$, $\forall a_i \in \mathfrak{R}$.

Entonces, $\mathbf{0} + \mathbf{a} = (0, 0, \ldots, 0) + (a_1, a_2, \ldots, a_k) = (0+a_1, 0+a_2, \ldots, 0+a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = \mathbf{a}$. Por lo que $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

$\therefore \exists\, \mathbf{e}_v = \mathbf{0}$, es decir existe el neutro de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

v. Por demostrar para cada **a** que pertenece a $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ existe **–a** también en $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ tal que su suma es el neutro de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $\mathbf{-a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_k) \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$. Entonces $\mathbf{a} + (\mathbf{-a}) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) + (-a_1, -a_2, \ldots, -a_k) = (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots, a_k + (-a_k))$. Y por propiedades de los reales lo anterior es igual $(a_1 - a_1, a_2 - a_2, \ldots, a_k - a_k) = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0} = \mathbf{e}_V$.

$\therefore$ Para cada $\mathbf{a} \in \Re^{\mathbf{k}}$ $\exists$ $-\mathbf{a} \in \Re^{\mathbf{k}}$ tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} = \mathbf{e}_V$.

vi. Por demostrar que si $\mathbf{a} \in \Re^{\mathbf{k}}$ y $\alpha \in \Re \Rightarrow \alpha\mathbf{a} \in \Re^{\mathbf{k}}$.

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ elemento de $\Re^{\mathbf{k}}$ y sea $\alpha \in \Re$, entonces $\alpha\mathbf{a} = \alpha\,(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_k)$. Ahora, como cada αa_i es un producto de reales, entonces cada αa_i es un real.

$\therefore$ $\alpha\mathbf{a} = \alpha\,(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_k) \in \Re^{\mathbf{k}}$.

vii. Por demostrar que existe un escalar $\zeta \in \Re$ tal que $\forall \mathbf{a} \in \Re^{\mathbf{k}}$, $\zeta\,\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ un elemento cualquiera de $\Re^{\mathbf{k}}$ y sea $\zeta \in \Re$. Entonces $\zeta\,\mathbf{a} = \zeta\,(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\zeta a_1, \zeta a_2, \ldots, \zeta a_k)$. Luego como cada ζa_i es un producto de reales y por la propiedad del neutro multiplicativo de $\Re$ $\zeta a_i = a_i$ si y sólo si $\zeta=1$, donde $1 \in \Re$. Se tiene que $\zeta\,\mathbf{a} = \zeta\,(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\zeta a_1, \zeta a_2, \ldots, \zeta a_k) = (1a_1, 1a_2, \ldots, 1a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = \mathbf{a}$.

$\therefore$ $\exists\ \zeta=1 \in \Re$ tal que $\zeta\,\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

viii. Por demostrar que si **a** es un elemento arbitrario de $\Re^{\mathbf{k}}$, y α, β son dos escalares que pertenecen a $\Re$ entonces $\alpha\beta$ **a = $\beta\alpha$ a**.

Sea **a** = $(a_1, a_2,\ldots, a_k) \in \Re^{\mathbf{k}}$ y $\alpha, \beta \in \Re$. Entonces: $\alpha\beta$ **a =** $\alpha\beta$ $(a_1, a_2,\ldots, a_k)$ = $(\beta\alpha a_1, \beta\alpha a_2,\ldots, \beta\alpha a_k)$**,** y como cada $\beta\alpha a_i$ es un producto reales, entonces por la conmutatividad en $\Re$**,** $\beta\alpha a_i = \alpha\beta a_i$, $\forall$ i = 1,…, n**.**

Por lo que se tiene: $\alpha\beta$ **a =** $\alpha\beta$ $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \ldots, \alpha\beta a_k) = (\beta\alpha a_1, \beta\alpha a_2, \ldots, \beta\alpha a_k) = \beta\alpha$ **a.**

$\therefore$ $\alpha\beta$ **a** = $\beta\alpha$ **a,** $\forall$**a** $\in \Re^{\mathbf{k}}$.

ix. Por demostrar que si **a**, **b** son dos elementos cualesquiera de $\Re^{\mathbf{k}}$ y α pertenece a $\Re$**,** entonces α(**a**+**b**) **=** α**a** + α**b**.

Sea **a** = $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, **b** = $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, elementos de $\Re^{\mathbf{n}}$. Entonces, α(**a + b**)**=** α **[**$(a_1, a_2,\ldots, a_k) + (b_1, b_2,\ldots, b_k)$**]** $= \alpha\ (a_1 + b_1, a_2 + b_2,\ldots, a_k + b_k) = (\alpha(a_1 + b_1), \alpha(a_2 + b_2),\ldots,\alpha(a_k + b_k))$. Aplicando la propiedad distributiva de reales a cada $\alpha(a_1 + b_1)$, se tiene que, $\alpha\ (a_i + b_i) = \alpha a_i + \alpha b_i$.

Entonces $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\alpha(a_1 + b_1), \alpha(a_2 + b_2),\ldots,\alpha(a_k + b_k)) = (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2,\ldots, \alpha a_k + \alpha b_k) = (\alpha a_1, \alpha a_2,\ldots, \alpha a_k) + (\alpha b_1, \alpha b_2,\ldots,\alpha b_k) = \alpha (a_1, a_2,\ldots, a_k) + \alpha (b_1, b_2,\ldots, b_k) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

$\therefore\ \alpha (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b},\ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

x. Por demostrar que si $\mathbf{a} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ entonces $(\alpha+\beta)\ \mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\ldots, a_k) \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$. Entonces, $(\alpha+\beta)\ \mathbf{a} = (\alpha+\beta)\ (a_1, a_2,\ldots, a_k) = ((\alpha+\beta)a_1, (\alpha+\beta)a_2,\ldots, (\alpha+\beta)a_k)$, como cada $(\alpha+\beta)\ a_i$ es un producto de reales, aplicando la propiedad distributiva de reales a cada $(\alpha+\beta)\ a_i$, se tiene que $(\alpha+\beta)\ a_i = \alpha a_i + \beta a_i$.

Por lo que, $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2,\ldots, \alpha a_k + \beta a_k) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_k) + (\beta a_1, \beta a_2, \ldots, \beta a_k) = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \beta (a_1, a_2, \ldots, a_k) = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

$\therefore\ (\alpha+ \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a},\ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

Por lo tanto $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ es un espacio vectorial.

■

El conjunto de elección $\mathcal{X}$ que consta de todas las combinaciones de cantidades no negativas de las *k*-mercancías, podemos visualizarlo como un subconjunto del espacio vectorial $\Re^{\mathbf{k}}$. Sin embargo, es importante destacar que aunque $\mathcal{X}$ es un subconjunto del espacio vectorial $\Re^{\mathbf{k}}$, el conjunto de elección $\mathcal{X}$ no es un espacio vectorial. Para demostrarlo necesitamos de una definición.

Definición: Sea W espacio vectorial entonces B es un subespacio vectorial, si $B \subseteq W$ y si para $x, y \in B$ con $\alpha \in \Re$ se cumple:

i) $\mathbf{0}w \in B$,

ii) $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$

iii) $\alpha\mathbf{x} \in B \; \forall \alpha \in \Re$.

Con esto ya podemos formular y demostrar este teorema que forma parte de los resultados de esta Tesis.

Teorema II: El conjunto de elección $\mathcal{X}$ no es un subespacio vectorial de $\Re^{\mathbf{k}}$.

Demostración: Es fácil ver que la tercera propiedad no se satisface. Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ entonces $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ si $\alpha < 0$. Entonces $\alpha\mathbf{x} < \mathbf{0}$, $\alpha\mathbf{x} \notin \mathcal{X} = \Re^{\mathbf{k+}}$. Por lo tanto $\mathcal{X}$ no es subespacio vectorial.

Por tanto, como $\mathcal{X}$ no contiene a sus inversos aditivos $\mathcal{X}$ no es espacio vectorial.

■

Entonces cada cesta ***x*** puede ser vista como un elemento de $\Re^{k+}$, como un vector de cantidades de cada una de las *k*-mercancías del conjunto de elección, siendo de la forma $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, con $x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Debe quedar claro que este vector tiene *k* coordenadas que corresponden a cada una de las *k*-mercancías del conjunto de elección; donde x_1 es su primer coordenada, x_2 es su segunda coordenada y así sucesivamente hasta x_k que es le *k*-ésima coordenada del vector.

III. B TOPOLOGÍA DE $\Re^k$

El desarrollo de la sección anterior fue desde el punto de vista del álgebra lineal, enseguida con una visión que parte del análisis matemático, expondremos las características topológicas del conjunto de elección.[5]

[5] Los conceptos matemáticos que se vierten en esta sección fueros recopilados de una serie de cursos en la Facultad de Ciencias. Sobre todo del curso de Análisis Matemático I, impartido por el Dr. José Lino Samaniego. Para referencias bibliográficas ver: **BARTLE, ROBERT G. Y DONALD R SHERBERT.** *Introduction to Real Analysis*, capítulos I-V, X.**BARTLE, ROBERT G.** *The elements of integration and Lebesgue Measure*, capítulos III y XV. **KOLMOGOROV, A. N. Y S. V. FOMIN.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional,* capítulos I-III. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* capítulos: set theory, part one.I, part tow.VI-VIII.

Dada la correspondencia que hemos establecido entre el conjunto de elección y $\Re^{k+}$ sucede que $\mathcal{X}$ posee en consecuencia propiedades topológicas interesantes que son propias de $\Re^{k}$.

A lo largo de esta sección, estudiaremos conceptos como los de vecindad, punto límite, punto interior; así como, entre otras, definiciones y proposiciones de conjuntos abiertos, cerrados, convexos, conexos y compactos en $\Re^{k}$, que en su mayoría, estas interesantes propiedades topológicas son inherentes al conjunto de elección $\mathcal{X}$.

Para comenzar el estudio de la estructura analítica de $\Re^{k}$ comenzaremos con el siguiente concepto:

Definición: Sea **C** un conjunto **C** es un espacio métrico si para cada par de elementos *x*, *y* de **C** se le asocia una función real d(x, y) que cumple:

i. $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

entonces (**C**, d) es nombrado espacio métrico y d(x, y) la función distancia o métrica.

Si x_1, x_2, … , x_n, es una secuencia en un espacio métrico discreto **C** cuya función distancia es d, entonces podemos calcular $d(x_i, x_{i+1})$, $i \in \{1, 2, \ldots , n\}$. Donde $d(x_i, x_{i+1})$ es la función distancia o métrica.

Algunas métricas en $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$, un espacio de dimensión finita *k*, son las siguientes:

i. $d(x, y) = |x-y|$

ii. $D(x, y) = [\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2]^{1/2}$

iii. $D(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$

iv. $D(x, y) = \text{máx.}_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$

Por lo que $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ es un espacio métrico pues es un conjunto para el cual dada una función distancia se cumple con la definición. Como la dimensión de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ es *k*, entonces $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ es de dimensión finita.[6] Por la correspondencia planteada entre el conjunto de elección $\mathcal{X}$ y

[6] Todas las distancias en un espacio métrico de dimensión finita son equivalentes en el sentido de que si existe una sucesión de términos del espacio métrico que converja bajo una función distancia converge para las otras funciones distancia.

$\mathfrak{R}^{k+}$ las métricas –es decir, las funciones distancia- de $\mathfrak{R}^{k}$ son las métricas del conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

III. B-1 ABIERTOS Y CERRADOS EN ESPACIOS MÉTRICOS

Este apartado es uno de los más ricos en elementos útiles para el objetivo de esta Tesis el cual es analizar el conjunto de elección del consumidor representativo de *k*-mercancías. De hecho, en el cuarto capítulo se utilizan los conocimientos de esta sección para poder establecer los axiomas sobre las preferencias del conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

Cada una de las definiciones siguientes aplican para espacios métricos,[7] de donde son validas para $\mathfrak{R}^{k}$ y para el conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. En virtud de lo anterior y para familiarizarnos cada vez más con el lenguaje parafrasearemos algunas de las definiciones en términos del conjunto de elección y sus elementos.

Definición: Sea **C** un espacio métrico. Una vecindad de un punto p en **C** es el conjunto $N_r(p)$ que consiste de todos los puntos $q \in$ **C**, tales que $d(p, q) < r$, donde r es el radio de $N_r(p)$.

[7] Como referencias de esta sección "Abiertos y cerrados en espacios métricos" ver: **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* capítulos: set theory, part one.I, part tow.VI-VIII.

Así en el conjunto de elección $\mathcal{X}$ dada una canasta $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ existe una vecindad $V_\varepsilon(\mathbf{x})$ la cual encierra a todas las cestas $\mathbf{q} \in \mathcal{X}$ tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) < \varepsilon$ donde ε es el radio de $V_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Definición: Sea **C** un espacio métrico. Un punto p es un punto límite de un conjunto $E \subset$ **C**, si cada vecindad de p contiene a un punto $q \neq p$ tales que $q \in E$.

Sea E un subconjunto de $\mathcal{X}$, $E \subset \mathcal{X}$. Entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ es punto límite del conjunto de cestas E, si para cada vecindad $V_\varepsilon(\mathbf{x})$ se cumple que $\mathbf{q} \in V_\varepsilon(\mathbf{x})$ para una combinación de cantidades de mercancías **q** diferente de la combinación **x**.

Definición: Sea **C** un espacio métrico y $E \subset$ **C**. Si $p \in E$ y p no es punto límite de E entonces p es llamado punto aislado de E.

Definición: Si **C** es un espacio métrico y $E \subset$ **C**. E es cerrado si cada punto límite de E es un punto de E.

En el conjunto de elección $\mathcal{X}$ -por ser un espacio métrico- un subconjunto de cestas E se dice cerrado si E contiene a todos sus puntos límite. En otras palabras, usando la definición de punto límite, si para cada vecindad $V_\varepsilon(\mathbf{x})$ de la combinación de cantidades de mercancías **x**, se cumple que la cesta $\mathbf{q} \in V_\varepsilon(\mathbf{x})$ para una combinación de cantidades de mercancías **q** diferente de la combinación **x**. Entonces la cesta **x** pertenece a E.

Esta definición de conjunto cerrado en un espacio métrico resulta imprescindible ya que el conjunto de elección $\mathcal{X}$ esta ligado a este concepto como detenidamente expondremos en el cuarto capítulo, que trata sobre las conclusiones de esta Tesis. La definición de conjunto cerrado se usa en el axioma de continuidad sobre la preferencias,[8] donde se asume que el conjunto "tan más preferido que" y "el conjunto tan o menos preferido que" -subconjuntos del conjunto de elección $\mathcal{X}$- son cerrados.

Definición: Un punto p es un punto interior de E si existe una vecindad N de p tal que $N \subset E$.

Dados $\mathcal{X}$ el conjunto de elección y A un subconjunto de $\mathcal{X}$, $A \subseteq \mathcal{X}$, sea **a** una combinación de cantidades de mercancías que pertenezca al subconjunto de elección A, $\mathbf{a} \in A$. Entonces la cesta **a** es punto interior del conjunto de canastas A si existe una vecindad $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ con centro en la cesta **a** y radio ε tal que esta vecindad esta enteramente contenida en A, $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subseteq A$.

Definición: Un conjunto es abierto si todos sus puntos son puntos interiores.

En términos de los elementos del conjunto de elección, proponemos a E como un subconjunto del conjunto de elección $\mathcal{X}$, entonces E es un conjunto de cestas abierto si

[8] Este axioma y los conceptos de "tan o más preferido que" y "tan o menos preferido que" se encuentran en el cuarto capítulo.

todas las cestas de E son puntos interiores de E. Esto es si $\forall \mathbf{e} \in E \subset \mathcal{X}$, $\exists B_{\varepsilon}(\mathbf{e})$ tal que $B_{\varepsilon}(\mathbf{e}) \subseteq E$.

Definición: El complemento de E es el conjunto E^c de todos los puntos $p \in \mathbf{C}$ tales que $p \notin E$.

Definición: Un conjunto es cerrado si su complemento es abierto.

Si E es un subconjunto cerrado de cestas del conjunto $\mathcal{X}$ entonces el complemento de E, es decir $E^c = \mathcal{X} \setminus E$, que es el conjunto de elección menos las cestas que pertenecen a E, es abierto. Por tanto todas las cestas de $\mathcal{X} \setminus E$ son puntos interiores.

Esta definición de conjunto cerrado, nos permite demostrar a continuación de una manera sencilla que intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, teorema que vinculado al conjunto de elección lo utilizaremos en el cuarto capítulo. Capítulo que tiene el fin de mostrar un ejemplo de cómo el conjunto de elección del consumidor representativo esta ligado a una amplia gama de conceptos matemáticos que aunados a la intuición sirven de base a la estructura de la Teoría del Consumidor.

Teorema III: Sea **C** un espacio métrico. Si $U\alpha$ son conjuntos abiertos para α en algún conjunto de índices A (probablemente no contable). Entonces $U = \cup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ es abierto.

Demostración: Sea $x \in U$ entonces por definición de unión $x \in U\alpha$ para alguna α y como $U\alpha$ es abierto existe $I \subset U\alpha$ tal que I es abierto y tal que $x \in I$. Entonces $I \subset U$.

Por lo tanto U es abierto, porque todos los puntos de U son puntos interiores.

■

Teorema IV: Sea **C** un espacio métrico. Si F_β son conjuntos cerrados para b en algún conjunto de índices B. Entonces $F = \bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ es cerrado.

Demostración: Cada F_β es cerrado si y sólo si cada $\mathbf{C}\backslash F_\beta$ es abierto, entonces por el teorema anterior, la unión arbitraria de los $\mathbf{C}\backslash F_\beta$ para $\beta \in B$ es abierto. Como $\bigcup_{\beta \in B} \mathbf{C}\backslash F_\beta$ es abierto y $\bigcup_{\beta \in B} \mathbf{C}\backslash F_\beta = \mathbf{C}\backslash \bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ entonces $\mathbf{C}\backslash \bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ es abierto.

De donde $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ es cerrado.

■

El contenido de este teorema es causa del axioma de continuidad de las preferencias sobre el conjunto de elección $\mathcal{X}$, que revisaremos detenidamente en el cuarto capítulo. Hasta este punto llega nuestra reflexión con los conceptos ofrecidos sin embargo anticipándonos a la presentación de algunos otros conceptos, con la intención de continuar con la liga que existe entre el concepto de conjunto cerrado, seguiremos con la explicación en la nota el pie.[9]

Definición: E es perfecto si E es cerrado y si cada punto es un punto límite de E.

No todos los subconjuntos cerrados del conjunto de elección $\mathcal{X}$ son conjuntos perfectos, pues los conjuntos cerrados pueden contener puntos que no sean puntos límite. Aunque se demostrará en las conclusiones de esta Tesis que el en conjunto de elección $\mathcal{X}$ existen conjuntos perfectos. [10]

Definición: E es acotado si existe un número real $M > 0$ y un punto $q \in \mathbf{C}$ tal que $d(p, q) < M$.

Definición: E es denso en **C** si cada punto de **C** es un punto límite de E, o un punto de E o ambos.

---

[9] Al suponer el axioma de continuidad de la preferencias sobre el conjunto de elección que el conjunto "tan o menos preferido que" y "el tan o mas preferido que" son cerrados su intersección, el conjunto indiferente, es por tanto cerrado. Además, por la primera definición de conjunto cerrado, se asegura que el conjunto indiferente contiene a todos sus puntos límite. Que el conjunto de indiferencia por ser cerrado contenga todos sus puntos límite implica necesariamente, dado el concepto de convergencia de una sucesión, que para toda sucesión de cestas convergentes enteramente contenidas en el conjunto indiferente el límite pertenece al conjunto indiferente, por que este es cerrado. Por tanto, el límite de una sucesión de cestas indiferentes entre sí, es una cesta indiferente.

[10] El conjunto de indiferencia de **x**, $\sim(\mathbf{x})$; es un conjunto perfecto bajo los axiomas de las preferencias del I al IV. Esta afirmación la demostraremos en el capítulo de conclusiones, sin embargo la idea de la demostración esta a nuestro alcance y radica que no hay zonas de indiferencia en el conjunto indiferente y como probaremos en las conclusiones que el conjunto de indiferencia es cerrado, demostraremos que todos sus puntos son puntos límite y por lo tanto el conjunto de indiferencia, bajo los axiomas sobre las preferencias I al IV, es un conjunto perfecto.

Definición: Sea $a \in A$, entonces a es punto frontera de A si $\forall\ B_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \phi$ $B_\varepsilon(a) \cap \text{ext}A \neq \phi$.

Definición: Sea $a \in A$, entonces a es punto exterior de A si $\exists\ B_\varepsilon(a)$ tal que $B_\varepsilon(a) \cap A = \phi$.

Definición: Sea A subconjunto de un espacio métrico **C,** entonces definimos el interior de A (intA) como el conjunto de todos los puntos interiores de A; el exterior de A como el conjunto de todos los p untos exteriores de A y la frontera de A como el conjunto de todos los puntos frontera de A.

Definición: Si $E \subset \mathbf{C}$, se dice que E es convexo si dados $x, y \in E$ entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$ para $\lambda \in (0,1)$.

Teorema V: El conjunto de elección $\mathcal{X}$ es convexo.

Demostración: Sean $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ por demostrar que $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$. Sabemos Que por construcción el conjunto de elección $\mathcal{X} = \Re^{\mathbf{k+}}$ luego si $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ implica que $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Re k+$ entonces $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ son de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_k)$ tales que las cantidades son positivas o nulas para todas las k-mercancías, esto es $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \wedge x'_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego $0 \leq \lambda \leq 1$ por lo que $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k)$, donde $\lambda xi \geq 0$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Lo que implica que $\lambda\mathbf{x} \in \Re k+$. Por lo tanto $\lambda\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Por otra parte, como $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces $0 \leq 1 - \lambda \leq 1$, entonces $(1 - \lambda)$ siempre es positivo y como $(1 - \lambda)\mathbf{x}' = ((1 - \lambda)x'_1, (1 - \lambda)x'_2, \ldots, (1 - \lambda)x'_k)$, entonces $(1 - \lambda)x'_i \geq 0$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. De donde $(1 - \lambda)\mathbf{x}' \in \Re^{\mathbf{k+}}$. Por lo tanto $(1 - \lambda)\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$.

Ahora como $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k) \geq 0$ y como $(1 - \lambda)\mathbf{x}' = ((1 - \lambda)x'_1, (1 - \lambda)x'_2, \ldots, (1 - \lambda)x'_k) \geq 0$, entonces su suma $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}'$ es mayor o igual que cero.

Por lo tanto, $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$.

■

Teorema VI: Toda bola (vecindad) es convexa.

Demostración: Sean $y, z \in B\varepsilon(x)$. Entonces $|y - x| \leq \varepsilon$ como también $|z - y| \leq \varepsilon$. Sea $w = \lambda y + (1 - \lambda)z$ con $\lambda \in (0,1)$. Por demostrar que $|w - x| \leq \varepsilon$. Entonces, se sigue que: $|w - x| = |\lambda y + (1 - \lambda)z - x| = |\lambda y + (1 - \lambda)z + \lambda x - \lambda x - x| = |\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x)|$ $\leq |\lambda(y - x)| + |(1 - \lambda)(z - x)| = |\lambda||(y - x)| + |1 - \lambda||(z - x)|$. Como λ es positivo $\lambda = |\lambda|$ y como $\lambda < 1$, entonces $1 - \lambda > 0$. Por lo que, $1 - \lambda = |1 - \lambda|$. Entonces:

$|w - x| \leq |\lambda||(y - x)| + |1 - \lambda||(z - x)| = \lambda|(y - x)| + (1 - \lambda)|(z - x)| < \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$

Lo que implica que $|w - x| < \varepsilon$, lo que quiere decir que w pertenece a la bola. Por lo tanto toda bola es convexa.

■

Teorema VII: Cada vecindad es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $E = N_r(p)$, sea $q \in E$ con $q \neq p$. Definimos $h > 0$ tal que $d(p, q) = r - h$. Notemos que la construcción así de h implica que $r > h$ porque la función distancia siempre es positiva.

Sea $s \in M_h(q)$ entonces $d(q, s) < h$. Entonces $d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, s) < r - h + h = r$. Por lo que $s \in N_r(p)$ pero $s \in M_h(q)$. Lo que implica que $M_h(q) \subset N_r(p)$.

Por lo tanto, q es punto interior de $N_r(p)$. De donde concluimos que $N_r(p)$ es un conjunto abierto.

■

El siguiente teorema es un resultado propio de esta Tesis, en él proponemos y demostramos la existencia de conjuntos cerrados en el conjunto de elección.

Teorema VIII: Existe B en el conjunto de elección $\mathcal{X}$ tal que B es cerrado.

Demostración: En primer lugar probaremos que toda bola cerrada es un conjunto cerrado. Sea $\overline{B}_r(\mathbf{p}) = \{\mathbf{p'} \setminus d(\mathbf{p}, \mathbf{p'}) \leq r\}$ una bola cerrada en $\mathcal{X}$. Por demostrar que $\overline{B}_r(\mathbf{p})$ es un conjunto cerrado. Sabemos que un conjunto es cerrado si su complemento es abierto. Entonces por demostrar que $[\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$ es abierto. Sea $\mathbf{c} \in [\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$ por demostrar que la canasta **c** es punto interior de $[\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$.

Entonces como la cesta **c** pertenece al complemento de $\overline{B}_r(\mathbf{p})$, la cesta **c** cumple que $d(\mathbf{p}, \mathbf{c}) > r$. Sea $s = d(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ y sea $\varepsilon_s > 0$ tal que $\varepsilon_s < ½(s - r)$. Se verifica que $\varepsilon_s > 0$ por que $d(\mathbf{p}, \mathbf{c}) = s > r$. Luego $(s – r) > 0$ implica que $s > s – r > ½(s - r) > 0$ por que $r > 0$. Entonces $V_{\varepsilon_s}(\mathbf{c}) \subset [\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$ y como la elección de la cesta **c** fue arbitraria, pasa que $\forall c \in [\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$, $\exists e_s > 0$ tal que la vecindad $V_{\varepsilon_s}(\mathbf{c}) \subset [\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$. Lo que implica que $[\overline{B}_r(\mathbf{p})]^c$ es abierto. De donde $\overline{B}_r(\mathbf{p})$ es cerrado. Sea $B = \overline{B}_r(\mathbf{p})$.

Por lo tanto existe un conjunto $B \subset \mathcal{X}$ tal que B es cerrado.

■

Teorema IX: $\Re$ es abierto y cerrado.

Demostración:

a) Por demostrar que $\Re$ es abierto.

Sean $\varepsilon > 0$ $x \in \Re$ y sea $B_\varepsilon(x)$ entonces $d(x, y) < \varepsilon$ $\forall y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow \forall y \in B_\varepsilon(x)$, en otros términos $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, pero $(x - \varepsilon , x + \varepsilon) \subseteq \Re$ entonces $y \in \Re$ $\forall y \in B_\varepsilon(x)$. Entonces $B_\varepsilon(x) \subseteq \Re$, por lo tanto $\Re$ es abierto.

b) Por demostrar que $\Re$ es cerrado

Sabemos que $\Re^c = \phi$ y como por vacuidad el vacío es abierto entonces $\Re^c$ es abierto lo que implica que $(\Re^c)^c$ en cerrado y como $(\Re^c)^c = \Re$ Se concluye que $\Re$ es cerrado.

Por lo tanto $\Re$ es abierto y cerrado.

$\blacksquare$

Teorema X: $\Re^k$ es abierto y cerrado

Demostración:

Aunque la demostración es análoga quisimos incluirla para aclarar el hecho de que $\Re^k$ sea abierto y cerrado simultáneamente.

a) Por demostrar que $\Re^{\mathbf{k}}$ es abierto

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\mathbf{x}$ en $\Re^{\mathbf{k}}$, sea $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$, $\forall \mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) \Rightarrow \forall \mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x})$, $y \in \Re^{\mathbf{k}}$. Entonces $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq \Re^{\mathbf{k}}$, por lo tanto $\Re^{\mathbf{k}}$ es abierto.

b) Por demostrar que $\Re^{\mathbf{k}}$ es cerrado.

Sabemos que $\Re^{\mathbf{k}c} = \phi$ y el vacío es abierto entonces $\Re^{\mathbf{k}c}$ es abierto lo que implica que $(\Re^{\mathbf{k}c})^c$ en cerrado y como $(\Re^{\mathbf{k}c})^c = \Re^{\mathbf{k}}$ concluimos que $\Re^{\mathbf{k}}$ es cerrado.

Por lo tanto $\Re^{\mathbf{k}}$ es abierto y cerrado.

■

III. B-2 CONJUNTOS EN ESPACIOS MÉTRICOS Y PUNTOS LÍMITE[11]

Teorema XI: Sea el **C** espacio métrico y sea $E \subset$ **C**. Si p es un punto límite de un conjunto E entonces cada vecindad de p contiene una infinidad de puntos de E.

Demostración: Supongamos que existe una vecindad $N_r(p)$ que contiene solamente un número finito de puntos de E. Sean $q_1, \dots, q_n$ dichos puntos, los cuales son distintos de p, porque p es un punto límite.

Designamos $r = \text{mín. } d(p, q_m)$; con $1 \leq m \leq n$. Esto implica que r es el mínimo de las distancias $d(p, q_1), \dots, d(p, q_n)$. Ahora el mínimo de un conjunto finito de números positivos es positivo así que $r > 0$.

Por construcción, la vecindad $N_r(p)$ no contiene ningún punto q_i, con $q_i \in E$ tal que $q_i \neq p$. Así que p no es punto límite de E. Contradicción.

La contradicción estuvo en supone que existía una vecindad que solamente contuviera un número finito de puntos de E.

[11] Como referencias ver: **BARTLE, ROBERT G. Y DONALD R SHERBERT.** *Introduction to Real Analysis*, capítulos I-V, X.**BARTLE, ROBERT G.** *The elements of integration and Lebesgue Measure*, capítulos III y XV. **KOLMOGOROV, A. N. Y S. V. FOMIN.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional,* capítulos I-III. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* capítulos: set theory, part one.I, part tow.VI-VIII.

Por lo tanto el queda demostrado el teorema.

■

Este teorema lo ligaremos a las conclusiones,[12] en términos del conjunto de elección $\mathcal{X}$, si la cesta **p** es un punto límite de un conjunto E $\subset$ $\mathcal{X}$, entonces lo que demuestra el teorema es que para $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon(\mathbf{p})$, $V_\varepsilon(\mathbf{p})$ contiene una infinidad de canastas que pertenecen a E.

Teorema XII: Un conjunto finito de puntos no tiene puntos límite.

Demostración: Supongamos que existe un punto límite del conjunto. Entonces por el teorema anterior cualquier vecindad de dicho punto contiene un número infinito de elementos del conjunto. Pero esto es imposible ya que existen en el conjunto sólo un número finito de puntos.

■

[12] La idea de la conexión se centra en que como hemos concluido que bajo los axiomas I – IV para $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ el conjunto de indiferencia de la canasta **x**, $\sim(\mathbf{x})$, es un conjunto cerrado por tanto $\sim(\mathbf{x})$ contiene sus puntos límite por el teorema anterior si la cesta **p** es punto límite del conjunto $\sim(\mathbf{x})$ como $\sim(\mathbf{x})$ es cerrado p $\in \boldsymbol{X}$ y se cumple que si $V_\varepsilon(\mathbf{p})$ es vecindad de **p** entonces $V_\varepsilon(\mathbf{p})$ contiene una infinidad de combinaciones de cantidades no negativas de mercancías. Lo mismo sucede para los conjuntos “tan o más preferido que” y “tan o menos preferido que”.

De manera natural al desarrollar este tema surge para nosotros este teorema en el que formulamos y demostramos que el conjunto de elección es un conjunto finito de cestas.

Teorema XIII: El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ tiene un número infinito de cestas.

Demostración: Sea $E \subset \boldsymbol{\mathcal{X}}$ tal que $\boldsymbol{\mathcal{X}} \setminus E$ es abierto,[13] entonces E es cerrado lo que implica que si la cesta es **p** es punto límite de E, entonces **p** pertenece a E. Luego sea $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon(\mathbf{p})$, entonces $V_\varepsilon(\mathbf{p})$ contiene una infinidad de canastas de E. Pero E es subconjunto del conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ y E es infinito, por lo tanto concluimos que el conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ es infinito.

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto de elección es infinito.

$\blacksquare$

Teorema XIV: Sea **C** un espacio métrico. Si $U_1, U_2, \ldots, U_k$ son abiertos en **C** entonces el conjunto $U = \bigcap_{j=1}^{k} E_j$ es abierto.

Demostración: Sea $x \in U$, entonces $x \in U_j$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

[13] Esto es posible porque establecimos que el conjunto de elección es igual a $\mathfrak{R}^{k+}$.

Sabemos que son abiertos, entonces $\exists\ \varepsilon_j$ tal que $B\varepsilon_j(x) < U_j$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$ luego tomamos $B\varepsilon_j = \text{mín.}\ \{\varepsilon j\}, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$.

Por lo tanto $B\varepsilon_j$ esta contenido en todos los U_j y en consecuencia $B\varepsilon_j \subset U$, de donde U es abierto.

■

Teorema XV: Sea $U \subseteq \Re$ un conjunto abierto entonces existe una cantidad contable de intervalos abiertos I_j disjuntos dos a dos tal que $U = \cup_{n=1}^{\infty} I_j$.

Demostración: La idea de este argumento es "arreglar" los conjuntos, para eso los clasificamos en clases de equivalencia y los ordenamos eligiendo de cada clase de equivalencia un representante para finalmente numerarlos.

Sea U un abierto de la línea real. Definimos una relación de equivalencia sobre U las clases de equivalencia serán los intervalos Ij. Debemos definir la clase de equivalencia: Sean a, b $\in$ U, $a \sim b$ si todos lo números entre *a* y *b* son elementos de U. Lo siguiente es demostrar que efectivamente forman una clase de equivalencia, la reflexividad y la simetría son evidentes:

i. Reflexividad. Por demostrar que $a \sim a$. Demostración: $a \in U$ entonces a siempre esta en U.

ii. Simetría. Por demostrar que $a \sim b$ implica $b \sim a$. Demostración: Si todos los puntos entre a y b están en U entonces todos los puntos entre b y a están en U.

iii. Transitividad. Por demostrar que $a \sim b \wedge b \sim c$ entonces $a \sim c$. Demostración: Sabemos que todos los puntos entre $a \wedge b \in U$, asimismo los puntos entre $b \wedge c \in U$. Sean a, b, c de tal forma que $a < b < c$. Entonces los puntos que se encuentran entre $a \wedge c$ están entre $a \wedge b$ y entre $b \wedge c$; o son todos b. Por lo tanto $a \sim c$.

Llamamos las clases de equivalencia $\{U_\alpha\}$ con $\alpha \in A$. Afirmación: Cada U_α es un intervalo abierto.

Demostración: Si $a, b \in U_\alpha$ para alguna a, además sabemos que todos los números que están entre a y b son elementos de U. Entonces todos los puntos que se encuentran entre a y b están relacionados con a y con b. Por lo que todos los puntos entre a y b están en U_α. Por tanto podemos concluir que U_α es un intervalo.

Por ver que U_α es abierto. Sea $x \in U_\alpha$ entonces $x \in U$ lo que implica que $\exists I$ intervalo de la forma $I = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contenido en U por que U es abierto. Pero x esta relacionado con todos los puntos de I. Se sigue entonces que $I \subseteq U_\alpha$. Por lo tanto U_α es abierto.

Sea $U_\alpha = I_j$, tomando un racional por intervalo como los racionales son numerables entonces U es numerable.

Por lo que concluimos que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_j$.

■

Definición: Sea **C** un espacio métrico, si $E \in$ **C** y si E' denota el conjunto de todos los puntos límite de E en **C**, entonces la cerradura de E es: $\bar{E} = E \cup E'$.

Teorema XVI: Si **C** es un espacio métrico y $E \subset$ **C**, entonces:

i. $\bar{E}$ es cerrado

ii. $E = \bar{E}$ si y sólo si E es cerrado.

iii. $\bar{E} \subset F$ para cada conjunto cerrado $F \subset$ **C** tal que $E \subset F$.

Entonces a $\bar{E}$ se le conoce como la cerradura de E y es en conjunto cerrado más pequeño que contiene a E.

Demostración:

i. $\bar{E}$ es cerrado si y sólo si todos los puntos límite están contenidos en él. También sabemos que $\bar{E}$ es cerrado si y sólo si $\bar{E}^c$ es abierto.

Si $p \in \mathbf{C}$ y $p \notin \bar{E}$ entonces $p \notin E \wedge p \notin E'$. Por lo tanto p tiene una vecindad que no intercepta a E. Esto es porque p no es punto límite de E entonces existe una bola enteramente contenida en E^c con centro en p. Entonces el complemento de $\bar{E}$ es abierto.

Por lo tanto $\bar{E}$ es cerrado.

ii. Por el inciso anterior E es cerrado, pero E es cerrado si y sólo si por definición $E' \subset E$ si y sólo si por definición de cerradura $\bar{E} = E$.

iii. Si F es cerrado y $E \subset F$ entonces $F' \subset F \wedge E' \subset F$. Por lo tanto $\bar{E} \subset F$.

■

III. C SECUENCIAS[14]

Definición: Una secuencia $\{P_n\}$ en un espacio métrico **C** se dice que converge si existe un punto $p \in \mathbf{C}$ con la propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ un entero N tal que para $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$.

Decir que $\{P_n\}$ converge a p se escribe como $P_n \to p$ ó $lim_{n\to\infty} P_n = p$. Observemos que la convergencia también depende de la función distancia.[15]

Sea $\{S_n\}$ una sucesión de canastas en el conjunto $\mathcal{X}$. Entonces la sucesión $\{S_n\}$ converge dentro del conjunto de elección si existe una cesta $\mathbf{p} \in \mathcal{X}$ tal que para cada número positivo ε, existe un entero N tal que para los enteros mayores o iguales al entero N, se cumple que la distancia se la cesta **p** a la cesta $\mathbf{p_n}$ es menor que ε, esto es $d(\mathbf{p_n}, \mathbf{p}) < \varepsilon$.

[14] Como referencia bibliográfica ver: **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* capítulos: set theory, part one.I, part tow.VI-VIII.

[15] En el caso de funciones continuas que tienen dimensión infinita si $\{P_n\}$ converge para cierta función distancia puede pasar que para otra función distancia no converja. Un espacio es completo si todas las sucesiones $\{P_n\}$ que convergen en él convergen para toda distancia.

Definición: El rango de una secuencia $\{P_n\}$ es el conjunto de puntos P_n con $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. El rango puede ser finito ó infinito. La secuencia $\{P_n\}$ es acotada si su rango es acotado.

Definición: Una secuencia $\{P_n\}$ es acotada si existe $M \in \Re$ tal que $|P_k| < M$ para toda $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

Teorema XVII: Sea $\{P_n\}$ en un espacio métrico **C**.

i. $\{P_n\}$ converge a $p \in$ **C** si y sólo si cada vecindad de p contiene todos los términos de la secuencia excepto un número finito de ellos.

ii. Si $p \in$ **C** y $p' \in$ **C** y si $\{P_n\}$ converge a p y a p' entonces $p = p'$.

iii. Si $\{P_n\}$ converge entonces es acotada.

iv. Si $E \subset$ **C** y si p es punto límite de E entonces existe una secuencia $\{P_n\}$ en E tal que $p = \mathit{lim}_{n\to\infty} P_n$.

Demostración:

i.

$\Rightarrow$) Supongamos que P_n converge a p y que V es una vecindad de p para alguna $\varepsilon > 0$. Las condiciones $d(p, q) < \varepsilon$ y $q \in$ **C** implica que $q \in V$.

Para esta ε existe N entero tal que $n > N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$ así $n \geq N$ entonces $p_n \in V$. Así V contiene a todos los términos de $\{P_n\}$ excepto a los $n < N$.

$\Leftarrow$) Supongamos que cada vecindad de p contiene a todos los términos de $\{P_n\}$ excepto un número finito.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y formamos V como el conjunto de todas $q \in$ **C** tales que $d(q, p) < \varepsilon$. Por hipótesis existe una N para esta V tal que $p_n \in V$ si $n \geq N$. Así la $d(p_n, p) < \varepsilon$ si $n \geq N$. Por lo tanto $\{P_n\}$ converge a p.[16]

ii.

Existe una N tal que $d(p_n, p) < \varepsilon_{/2}$ si $n \geq N$, además existe N' tal que $d(p_n, p') < \varepsilon_{/2}$ si $n \geq N$. Tomamos $n = \text{máx.} \{N, N'\}$, entonces:

[16] Observemos que tanto la vecindad V como la N dependen de ε.

$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$

La desigualdad anterior implica que $p = p'$. El que $p = p'$ implica $d(p, p') = 0$ por que ε es arbitraria, entonces es valida parar toda $\varepsilon > 0$.

iii.

Supongamos que $\{P_n\}$ converge a p. Entonces existe N tal que $n > N$ implica que $d(p_n, p) < 1$. Definimos $r = \text{máx.}\{1, d(p_1, p), d(p_2, p), \ldots , d(p_n, p)\}$ entonces $d(p_n, p)<r$, con $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Por lo tanto $\{P_n\}$ es acotado.

iv.

Para cada entero n existe un $p_n \in E$ tal que $d(p_n, p) < 1/n$. Dado $\varepsilon>0$ seleccionamos N tal que $N_\varepsilon > 1$ que podemos garantizar por la propiedad arquimediana. Entonces $d(p_n, p) < \varepsilon$, si $n > N$ entonces $1/n < 1/N < \varepsilon$.

■

En el caso del conjunto del conjunto $\mathcal{X}$, si $\{M_n\}$ es una secuencia de canastas contenida en el conjunto de elección, el teorema anterior demuestra que:

i. La sucesión $\{M_n\}$ converge a la cesta **m** $\in \mathcal{X}$ si y sólo si cada vecindad de la combinación de mercancías **m**, $V_\varepsilon(\mathbf{m})$ contiene todas las cestas de la secuencia excepto un número finito de ellas.

ii. Si las canastas **m**, **m'** pertenecen a $\mathcal{X}$ y si la sucesión de canastas $\{M_n\}$ converge a la cesta **m** y también a la cesta **m**' entonces **m** y **m**' son la misma combinación de cantidades de mercancías.

iii. Si la sucesión de combinaciones de cestas $\{M_n\}$ converge, es decir si existe una canasta **m** en el conjunto de elección tal que **m** es límite de la sucesión $\{M_n\}$, entonces la sucesión de canastas $\{M_n\}$ es acotada. El que la sucesión de canastas sea acotada quiere decir que existe una $H > 0$ tal que las distancias de la cesta **m** a las cestas $\mathbf{m}_n$ para $n \in \{1, 2, \ldots\}$ son menores o iguales que H, concretamente $\{M_n\}$ es acotada si $\exists H > 0$ tal que $d(\mathbf{m}, \mathbf{m}_n) \leq H, \forall n \in \{1, 2, \ldots\}$.

iv. Si E es un subconjunto del conjunto de elección $\mathcal{X}$ y si la canasta **m** es punto límite de E, entonces existe una secuencia de canastas $\{M_n\}$ en el conjunto de canastas E, tal que la cesta **m** es igual al límite de la secuencia de canastas $\{M_n\}$, esto es: $\mathbf{m} = lim_{n\to\infty} M_n$.

Teorema XVIII: Supongamos que $\mathbf{x}_n \in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$, con $n \in \{1, 2, \dots\}$ donde $\mathbf{x}_n = (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{kn})$. Entonces $\{G_n\}$ converge a $\mathbf{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \alpha_{jn} = \alpha_j$ con $j \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sabemos que si x, y $\in \mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ entonces son de la forma $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$. Entonces $|x - y| = [\Sigma_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2]^{½}$.

Si $\mathbf{x}_n$ converge a $\mathbf{x}$ entonces se cumple que: $|\alpha_{nj} - \alpha_j| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|$ donde $\mathbf{x}_n = (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{kn})$, $\mathbf{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = [(\alpha_{1n} - \alpha_1)^2 + (\alpha_{2n} - \alpha_2)^2 + \dots + (\alpha_{kn} - \alpha_k)^2]^{½} \geq [(\alpha_{jn} - \alpha_j)^2]^{½} = |\alpha_{jn} - \alpha_j|$. Entonces como $\mathbf{x}_n$ converge a $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| < \varepsilon$ implica que $|\alpha_{jn} - \alpha_j| < \varepsilon$.

Por lo tanto $lim_{n\to\infty} \alpha_{jn} = \alpha_j$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente si $lim_{n\to\infty} \alpha_{jn} = \alpha_j$, para $j \in \{1, \dots, k\}$ para cada $\varepsilon > 0$ se corresponde una N tal que $n \geq N$ implica que $|\alpha_{jn} - \alpha_j| < \varepsilon/\sqrt{k}$ con $j \in \{1, \dots, k\}$. Entonces $n \geq N$ implica $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = [\Sigma_{i=1}^{k}(\alpha_{jn} - \alpha_j)^2]^{½} < \varepsilon$.

Por lo tanto $lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.

■

Definición: Una secuencia $\{S_n\}$ de números reales se dice que es:

i. monótonamente creciente si $s_n \leq s_{n+1}$ para $n \in \{1, 2, \ldots\}$,

ii. monótonamente decreciente si $s_n \geq s_{n+1}$ para $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Teorema XIX: Supongamos que $\{S_n\}$ es monótona entonces $\{S_n\}$ converge si y sólo si es acotada.

Demostración:

$\Rightarrow$) Por demostrar que $\{S_n\}$ converge sólo si $\{S_n\}$ es acotada.

Como $\{S_n\}$ converge existe s límite de la sucesión $\{S_n\}$ entonces para n tales que $n \geq N$ todas las distancias de la forma $d(s_n, s)$ son menores que ε, quedando un número finito de puntos fuera de los que podemos obtener sus distancias $d(s_1, s)$, $d(s_2, s), \ldots, d(s_n, s)$. Definimos r como el supremo de estas distancias, $r = \sup \{\varepsilon, d(s_1, s), d(s_2, s), \ldots, d(s_n, s)\}$ entonces $d(s_n, s) < r$, con $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Por lo tanto $\{S_n\}$ es acotado.

$\Leftarrow$) Por demostrar que $\{S_n\}$ converge si $\{S_n\}$ es acotada.

Sea $s_n \leq s_{n+1}$ sea E_n el rango de $\{S_n\}$. Si $\{S_n\}$ es acotado, sea s la mínima cota superior de E_n. Entonces $s_n \leq s$ para $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $s - \varepsilon < sN < s$. Porque de otra forma $(s - \varepsilon)$ sería una cota superior menor que s y como s es el supremo esto es imposible.

Ya que $\{S_n\}$ es creciente $n \geq N$ implica que $s - \varepsilon < x_n < s$. Esto implica que $x_n \to s$ cuando $n \to \infty$ y $\{S_n\}$ converge pues:

$s - \varepsilon < x_n < s \Rightarrow -\varepsilon < x_n - s < 0 \Rightarrow \varepsilon > s - x_n > 0 \Rightarrow |\varepsilon| > |s - x_n| > 0 \Rightarrow \varepsilon > |x_n - s| > 0$.

■

III. D CONEXIDAD

Sea **C** un espacio métrico, **C** es conexo si podemos decir que **C** es de una sola pieza.[17] Intuitivamente esto quiere decir que si **C** se puede expresar como la unión de dos conjuntos entonces estos conjuntos se intersecan o al menos podemos pasar de uno a otro.

Matemáticamente, lo que se quiere decir es, que un espacio métrico **C** es conexo si dados dos conjuntos A y B, $A \cup B = \mathbf{C}$ si y sólo si $A' \cap B$ ó $A \cap B'$ es no vacío. Pues si $\gamma \in A \cap B'$ entonces $\gamma \in A$ y γ es un punto límite de B y viceversa.

Definición: Sea **C** espacio métrico, entonces se dice que **C** es conexo si existe A, B conjuntos tales que $A \cup B = \mathbf{C}$ y tales que:

i. $A \cap B = \phi$, ó

ii. $A' \cap B \neq \phi$, un punto de B es punto límite de A, ó

[17] Ver referencias bibliográficas de esta sección en: **BARTLE, ROBERT G.** *The elements of integration and Lebesgue Measure*, capítulos III y XV. **KOLMOGOROV, A. N. Y S. V. FOMIN.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional,* capítulos I-III. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* capítulos: set theory, part one.I, part tow.VI-VIII.

iii. $A \cap B' \neq \phi$, un punto de A es punto límite de B.

Teorema XX: La recta real es un espacio métrico conexo.

Demostración: Suponemos que $\Re = A \cup B$, tal que $A \neq f$, $B \neq f$ y $A \cap B \neq f$.

Por demostrar que un punto de A es un punto límite de B ó que un punto de B es un punto límite de A.

Elegimos un punto $a \in A$ y un punto $b \in B$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < b$.

Sea E el conjunto de puntos de A menores que b y sea α el supremo de E, este punto puede pertenecer o no a A. Sin embargo si $a \notin A$ entonces $a \in A'$.

Ahora vamos a considerar las dos posibilidades.

Supongamos que $a \in A$, entonces $\alpha < b$ y dado que α es una cota superior de E, todos los puntos que se hallan entre α y b pertenecen a B. Por consiguiente α es un punto límite de B, $a \in B'$.

Si $\alpha \notin A$ automáticamente $\alpha \in B$. En este caso α es un punto límite de A (por definición de supremo). Por tanto $a \in A'$.

∎

Definición: $\boldsymbol{f}$: $\mathbf{C} \to Y$ es continua si $V \subset Y$ es abierto entonces $\boldsymbol{f}^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbf{C}$ para $x \in \mathbf{C}$, $\boldsymbol{f}(x) \subset Y$.

Definición: Un espacio métrico **C** es conexo si los únicos conjuntos que son tanto abiertos como cerrados son ϕ y **C**.

De la anterior definición se concluye que como $\mathfrak{R}$ es conexo entonces los únicos conjuntos que son al tiempo abiertos y cerrados son $\mathfrak{R}$ y el vacío.

Teorema XXI: Un espacio topológico **C** es conexo si y sólo si no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos.

Demostración: Asumamos que $\mathbf{C} = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 abiertos y $V_1 \cap V_2 = \phi$

Entonces $V_1 = V_2^c$, así V_1 es cerrado, porque V_2^c es abierto, pero también V_1 es abierto porque V_2^c es cerrado.

Ya que **C** es conexo entonces $V_1 = \mathbf{C}$ ó $V_1 = \phi$. Si $V_1 = \mathbf{C}$ entonces $V_2 = \phi$, así en ambos casos ó V_1 ó V_2 deben ser vacíos. Contradicción, porque $V_1 \neq \phi$ y $V_2 \neq \phi$.

Por lo tanto, **C** es conexo.

Recíprocamente: Supongamos que **C** no es la unión de dos conjuntos disjuntos no vacíos. Sea $V \subset$ **C** tanto abierto como cerrado. Entonces V^c es también abierto y cerrado. De donde **C** es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos, a saber, V y V^c. Por tanto V = f ó Vc = f lo que quiere decir que V = f ó V = **C**.

Por tanto **C** es conexo.

■

Teorema XXII: Sobre un espacio **C** son equivalentes las condiciones siguientes:

i. **C** es conexo.

ii. Los únicos subconjuntos de **C** que son abiertos y cerrados son **C** y ϕ.

iii. **C** no puede ser expresado como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos.

iv. No existe una función continua sobre **C** a un espacio discreto que contiene más de un punto.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$(ii)

Supongamos que **C** es conexo y sea A un subconjunto de **C** que es abierto y cerrado. Si B = **C** – A entonces B es también abierto y cerrado. Como A y B son cerrados $\overline{A} = A$ y $\overline{B} = B$, entonces $\overline{A} \cap B = \phi$ y $A \cap \overline{B} = \phi$. Como **C** es conexo entonces uno de ellos debe ser ó **C** ó el vacío. Por tanto (i) implica (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Por definición de conexo.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Supongamos que (iii) se cumple y que Y es un espacio discreto con más de un punto, y sea f: **C** $\rightarrow$ Y continua y sobre. Expresamos Y como la unión $U \cup V$ de dos conjuntos abiertos disjuntos. Entonces, **C** = $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, y esto contradice (iii). Por lo tanto, (iii) implica (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Sea **C** un subespacio que satisface (d) y supongamos que **C** es conexo. Descompongamos **C** = A $\cup$ B donde A y B son no vacíos y satisfacen $A' \cap B = f \wedge B' \cap A = f$. Como A y B son abiertos, B es complemento de A'.

Definimos f: **C** $\rightarrow$ {-1, 1} mediante:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in A \\ 1 & x \in B. \end{cases}$$

Entonces, f es continua y sobre y por tanto contradice (iv) para **C** conexo motivo por el que **C** no se puede separar de esta forma. De lo que concluimos que (iv) implica (i).

■

Teorema XXIII: La imagen continua de un conexo es conexa.

Demostración: Sea f: **C** $\rightarrow$ Y una función continua y sobre y suponemos que **C** es conexo. Si A $\subset$ Y es abierto y cerrado en Y entonces f -1(A) $\subset$ **C** es abierto y cerrado en **C**, porque f es continua. Como **C** es conexo f -1(A) es **C** ó ϕ. Entonces A es igual a Y ó A es el vacío.

Por lo tanto Y es conexo.

■

III. E COMPACTOS EN ESPACIOS MÉTRICOS

Esta sección trata de un tipo especial de conjuntos en los espacios métricos, los conjuntos compactos, los trataremos como un conocimiento adicional en nuestro análisis del conjunto de elección $\mathcal{X}$ por la sencillez de las demostraciones y por sus interesantes resultados.[18]

[18]Ver referencia bibliográfica de esta sección en: **BARTLE, ROBERT G. Y DONALD R SHERBERT.** *Introduction to Real Analysis*, capítulos I-V, X. **BARTLE, ROBERT G.** *The elements of integration and Lebesgue Measure*, capítulos III y XV.

Definición: Una cubierta abierta de un conjunto E en un espacio métrico **C** la entendemos como una colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de **C** tales que $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

Definición: Un subconjunto K de un espacio métrico **C** se dice que es compacto si cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita que contiene a K. Esto es si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta de K entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$.

Una cubierta abierta de un conjunto de cestas K en el conjunto de elección $\mathcal{X}$ es la colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de cestas en $\mathcal{X}$ tales que el conjunto K esta contenido en la unión de los conjuntos de cestas abiertos G_α, para α en un conjunto de índices, $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$. Un subconjunto de canastas K del conjunto de elección $\mathcal{X}$, es compacto si cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita que contiene a K. Esto es si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta de K entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$.

Teorema XXIV: Sea **C** un espacio métrico entonces todo conjunto finito en **C** es compacto.

RUDIN, WALTER. *Principios de Análisis Matemático,* capítulos I-IV. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* capítulos: set theory, part one.I, part tow.VI-VIII.

Demostración: Sea $F \subset \mathbf{C}$ un conjunto finito. Entonces F es de la forma $F = \{a_1, \ldots , a_n\}$. Sea G_α con $\alpha \in A$ una cubierta abierta de F, lo que implica que $F \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

Entonces pasa que como F esta contenido en la unión de los G_α, y $a_1 \in F$ entones existe al menos una α para la que $a_1 \in G_\alpha$, entonces nombramos G_1 a ese conjunto que tiene la propiedad de contener a a_1.

Bajo el mismo argumento trabajamos con los restantes n-1 elementos de F, con este proceso resultan los conjuntos $G_1, G_2, \ldots , G_n$, cada uno conteniendo a un elemento de F: $a_1 \in G_{\alpha_1}, a_2 \in G_{\alpha_2}, \ldots , a_n \in G_{\alpha_n}$, por lo que $F \subset G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$

Entonces hemos encontrado una subcubierta finita que contiene a F y como la elección de la cubierta G_α fue arbitraria, esto vale para toda cubierta abierta que contiene a F.

Por lo tanto F es compacto.

■

Teorema XXV: Subconjuntos compactos en espacios métricos son cerrados.

Demostración: Sea K el subconjunto compacto del espacio métrico **C**. Sea $p \notin K$, si $q \in K$ producimos V_{pq}, W_q vecindades de p y de q de radio menos ½ d(p, q). Como K es compacto existe $q_1, \ldots, q_n$, puntos de K tales que $K \subset W_{q_1} \cup \ldots \cup W_{q_n}$.

Ahora formamos $V_{pq_1}, V_{pq_2}, \ldots, V_{pq_n}$, todas con radio menor que ½ d(p, q_i) con $i \in \{1, \ldots, n\}$ luego formamos $V = V_{pq_1} \cap V_{pq_2} \cap \ldots \cap V_{pq_n}$ entonces V es una vecindad de p, porque todas tienen como centro p.

Además sea $W = W_{q_1} \cup \ldots \cup W_{q_n}$. Entonces $V \cap W = \phi$, por lo que $V \subset K^c$ y V es abierto porque es una intersección finita de abiertos.

Por lo tanto K^c es abierto, de donde K es cerrado.

■

Por el teorema anterior concluimos que si $S \subset \mathcal{X}$ es un conjunto finito de cestas, entonces S es un conjunto de combinaciones de cantidades de mercancías cerrado.

Teorema XXVI: Subconjuntos cerrados de conjuntos compactos en espacios métricos son compactos.

Demostración: Sea K un compacto en **C** y sea $F \subset K$ tal que F es cerrado.

Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta de F. Entonces $\{V_\alpha\} \cup F^c$ es una cubierta abierta de K, pues $F \subset K$.

Entonces como K es compacto existe una subcubierta finita que cubre K y esta tiene que cubrir a F. Dicha subcubierta finita contiene a F^c como un abierto.

A la subcubierta finita le quitamos F^c y entonces tenemos una subcubierta finita que cubre a F.

Por lo tanto F es compacto.

■

Teorema XXVII: Si F es cerrado y K compacto entonces $F \cap K$ es compacto.

Demostración: K es compacto entonces K es cerrado. Entonces $F \cap K$ es igual al vacío, a F ó a $F \cap K$.

Si $F \cap K = \phi$ entonces como el vació es cerrado $F \cap K$ es cerrado y $F \cap K \subset K$. Por tanto por el teorema anterior $F \cap K$ es compacto.

Luego como $F \cap K = F$ como F es cerrado entonces $F \cap K$ es cerrado y $F \cap K \subset K$. De nueva cuenta por el teorema anterior $F \cap K$ es compacto.

Por último como F es cerrado y la intersección de cerrados es cerrada, tenemos que $F \cap K$ es cerrado. Luego $F \cap K \subset K$. Por el teorema anterior $F \cap K$ es compacto.

■

Los cuatro teoremas anteriores demuestran que para el conjunto de elección $\mathcal{X}$ se cumple, respectivamente, que:

i. Si C es un subconjunto finito de cestas del conjunto de elección $\mathcal{X}$, entonces el conjunto de cestas C es compacto. Entonces cada cubierta abierta de C (la colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de cestas en $\mathcal{X}$ tales que el conjunto C esta contenido en la unión de los conjuntos de cestas abiertos G_α, para α en un conjunto de índices, contiene una subcubierta finita que contiene a C.

ii. Si $E \subset \mathcal{X}$, y E es un conjunto de canastas compacto en $\mathcal{X}$ entonces E es un conjunto cerrado.

iii. Sea $C \subset \mathcal{X}$, tal que C es compacto. Si B es un subconjunto de cestas cerrado del conjunto de elección $\mathcal{X}$, tal que $B \subset C$, entonces el conjunto de combinaciones de cantidades de mercancías B es compacto. Esto es para toda cubierta abierta de B existe una subcubierta finita que contiene a B.

iv. Sean F y K contenidos en el conjunto de elección $\mathcal{X}$, tales que el conjunto de cestas F es cerrado y el conjunto de cestas K es compacto entonces el conjunto de cestas $F \cap K$ es compacto. Para $\{G_\alpha\}$ cubierta de K entonces existen $\alpha_1, \dots ,$ α_n tales que $F \cap K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$.

III. F SINOPSIS

A lo largo de este capítulo nos enfocamos en el conjunto de elección $\mathcal{X}$, del cual describimos cualidades algebraicas y analíticas que le son inherentes y que constituyen amplia gama de conceptos matemáticos que aunados a la intuición sirven de base a la estructura de la Teoría del Consumidor.

Abreviando el contenido de este capítulo exponemos la siguiente serie de resultados:

i. Dado X_i el conjunto de cantidades no negativas de la mercancía *i* con $i \in \{1, 2, \dots , k\}$. Donde $Xi := \Re^+$, para cada una de las *k*-mercancías que el consumidor conoce, entonces el conjunto de elección $\mathcal{X}$, que es el conjunto de todas las combinaciones posibles de cantidades de las k-mercancías que nuestro consumidor conoce en el periodo de tiempo $\boldsymbol{\tau}$ y espacio $\mathbf{e_0}$, es equivalente, por la construcción hecha a lo largo de estos tres capítulos, a:

$$\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k = \underbrace{\Re^{+} \times \Re^{+} \times \ldots \times \Re^{+}}_{\text{k-veces}} = \Re^{\mathbf{k+}}$$

Los elementos del conjunto de elección $\mathcal{X}$ se conocen como canastas o cestas. Cada cesta es una opción distinta de combinaciones de cantidades no negativas de cada una de las *k*-mercancías que el consumidor conoce.

ii. Definimos espacio vectorial y subespacio.

iii. Formulamos y demostramos el teorema establece que el conjunto de elección no es un subespacio del espacio vectorial $\Re^{\mathbf{k}}$.

iv. Dada la correspondencia que establecimos entre el conjunto de elección $\mathcal{X}$ y $\Re^{\mathbf{k+}}$, $\mathcal{X}$ posee en consecuencia propiedades topológicas interesantes que son propias de $\Re^{\mathbf{k}}$. Expusimos los conceptos de vecindad, punto límite, punto interior, al igual que definiciones y proposiciones de conjuntos abiertos, cerrados, convexos, conexos y compactos en $\Re^{\mathbf{k}}$, que en su mayoría son inherentes al conjunto de elección $\mathcal{X}$.

v. En la sección sobre conjuntos abiertos y cerrados presentamos el teorema que demuestra que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.[19] En esta sección demostramos que el conjunto de elección es convexo

vi. También propusimos y demostramos que:

- En el conjunto de elección existen conjuntos abiertos y cerrados.

- El conjunto de elección $\mathcal{X}$ tiene un número infinito de cestas.

vi. En la sección de secuencias concluimos que si $\{M_n\}$ es una secuencia de canastas contenida en el conjunto de elección $\mathcal{X}$, entonces por lo demostrado en el teorema XXVII:

- la sucesión $\{M_n\}$ converge a la cesta $\mathbf{m} \in \mathcal{X}$ si y sólo si cada vecindad de la cesta **m**, $V_\varepsilon(\mathbf{m})$ contiene todas las cestas de la secuencia excepto un número finito de ellas.

- Si las canastas **m**, **m’** pertenecen a $\mathcal{X}$ y si la sucesión de canastas $\{M_n\}$ converge a la cesta **m** y también a la cesta **m**’, entonces **m** y **m**’ son iguales.

[19] Demostración que se utilizará en el cuarto capítulo como base para el axioma de continuidad sobre las preferencias.

- Si la sucesión de cestas $\{M_n\}$ converge, entonces $\{M_n\}$ es acotada.

- Si $E \subset \mathcal{X}$ y si la cesta **m** es punto límite de E, entonces existe $\{M_n\}$ en el conjunto de canastas E tal que la cesta **m** es igual al límite de la secuencia $\{M_n\}$, esto es $\mathbf{m} = \mathit{lim}_{n\to\infty} M_n$.

vii. Expusimos la demostración de que un conjunto conexo no se puede expresar como la unión de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos.[20]

viii. El la sección de conjuntos compactos expusimos la demostración del teorema que afirma que en un espacio métrico **C** todo conjunto finito en **C** es compacto. De donde concluimos que si $S \subset \mathcal{X}$, y S es un conjunto finito de cestas entonces S es un conjunto de cestas compacto.

[20] Este teorema nos servirá para demostrar en las conclusiones que el conjunto de elección es un conjunto conexo bajo los Axiomas I-IV.

BIBLIOGRAFÍA

1. **BARTLE, ROBERT G. Y DONALD R SHERBERT.** *Introduction to Real Analysis*, Estados Unidos, John Wiley & Sons, Inc., segunda edición, 1992, capítulos I-V, X.

2. **BARTLE, ROBERT G.** *The elements of integration and Lebesgue Measure*, Estados Unidos, John Wiley & Sons, Inc., primera edición, 1995, capítulos III y XV.

3. **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Estados Unidos, Editorial, Addison Wesley. Capitulo 1.

4. **KOLMOGOROV, A. N. Y S. V. FOMIN.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional,* URRS, Editorial Mir, 1975, segunda edición, capítulos I-III.

5. **LELONG-FERRAND, JACQUELINE Y ARNAUDIES, JEAN MARIE.** *Curso de Matemáticas Tomo I. Álgebra,* España, Editorial Reverté,1979, capítulo I.

6. **LOMELÍ, HECTOR Y BEATRIZ RUMBOS.** *Métodos Dinámicos en Economía. Otra Búsqueda del Tiempo Perdido,* México, Thomson, primera edición, 2003, capítulos I, IX-X.

7. **MAS-COLELL, ANDREU, WINSTON, MICHAEL D. GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory,* Estados Unidos, Oxford University Press, 1995, capítulos I y II.

8. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra I,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1987, capítulos II y III.

9. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1991, capítulos I, II y X.

10. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* México, Mc Graw Hill, tercera edición, 1980, capítulos I-IV.

11. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* Estados Unidos, Mcmillan, segunda edición, 1968, capítulos: set theory, part one sección I, part tow secciones VI-VIII.

12. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulos II, III y Apéndice Matemático.

CUARTO CAPÍTULO

LAS PREFERENCIAS SOBRE EL CONJUNTO DE ELECCIÓN

El presente es uno de los capítulos más importantes para los fines de esta Tesis puesto que ya hemos estudiado, a lo largo de los capítulos previos, al conjunto de elección en un periodo de tiempo y espacio dados, como: conjunto, espacio vectorial y como espacio métrico. Lo anterior nos pone en condiciones para acceder al tema de las preferencias del consumidor sobre el conjunto de elección.

Este capítulo tiene el fin de mostrar un ejemplo de cómo el conjunto de elección del consumidor representativo esta ligado a una amplia gama de conceptos matemáticos que aunados al sentido común sirven de base a la estructura de la Teoría del Consumidor. Pues el tema de las preferencias aquí tratado no solo es el tema consecutivo natural en el estudio del comportamiento del consumidor, sino que además como probó Debreu es base para demostrar la existencia de la función de utilidad.[1]

1 Ver referencia en: **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Capitulo 1. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulos II, III.

Como anticipamos en la introducción de esta Tesis una de las intenciones de este capítulo es mostrar como las preferencias sobre el conjunto de elección, tema tan necesario en el estudio de la teoría microeconómica básica, hace uso implícita y explícitamente de la serie de conceptos y resultados obtenidos y relacionados con el conjunto de elección revisados a lo largo de los tres capítulos anteriores.

Un segundo objetivo de este capítulo es estudiar el proceder de nuestro consumidor al elegir sobre las combinaciones de cantidades de las distintas mercancías que conoce en un tiempo y espacio dados. Entonces a lo largo de este capítulo expondremos los elementos necesarios para modelar la conducta del consumidor ante un conjunto de elección construido a partir de un conjunto finito de mercancías.[2]

Las preferencias reflejan la forma en que nuestro consumidor aprecia las distintas cestas. Las opciones, que tiene en el conjunto de elección, para escoger la cesta que le aporte la mayor satisfacción se ordenan de acuerdo a sus gustos sobre de las diversas combinaciones de cantidades de mercancías.

Observemos que para dos consumidores con gustos diferentes, aún teniendo del mismo conjunto de elección, las preferencias sobre el conjunto reflejaran un orden distinto.

---

[2] Según los textos de Teoría Microeconómica citados en la bibliografía: **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Capitulo 1. **MAS-COLELL, ANDREU; WINSTON, MICHAEL D. & GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory,* capítulos I y II. **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, capítulo VII. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulos II, III.

Entendiendo por orden la jerarquía que puede poseer un cesta sobre otra al tiempo de ser comparadas por cada consumidor.

IV. A CONVENCIONES

A lo largo de este texto hemos llagado a ciertas conclusiones sobre la estructura del conjunto de elección que es importante condensar en las frases que a continuación mostramos, ya que a partir de estas convenciones partiremos para exponer las preferencias que el consumidor tiene sobre el conjunto de combinaciones de cantidades de mercancías.

i. Un objeto es una mercancía si al asociarlo con las de necesidades del consumidor cumple dos condiciones.

   a) El conjunto de necesidades asociado al objeto debe ser menor o igual al conjunto de necesidades original, $\forall\ x_i \geq 0$ entonces $N(x_i) \leq N$.

   b) Existe un precio positivo asociado con cada objeto, $\forall\ x_i$, $\exists$ pi tal que

$$p_i x_i \geq 0 \text{ con } p_i \neq 0.$$

ii. El conjunto de mercancías es numerable y finito, lo representamos con el natural k.

iii. Las cantidades de cada mercancía se representan por números reales no negativos.

iv. El precio asociado a cada mercancía es expresado por un real.

v. Los precios son parámetros (es decir son dados y externos al problema de elección) ya que ningún consumidor por si sólo es capaz de modificarlos.

vi. El conjunto formado por los agentes económicos es finito en un periodo de tiempo $\boldsymbol{\tau}$ y espacio e_0 dados.

vii. El conjunto de elección es, en consecuencia, un subconjunto no negativo del espacio vectorial $\Re^{\mathbf{k}}$.

viii. Entre las propiedades topológicas más sobresalientes del conjunto elección están las de ser no vacío, convexo, cerrado y acotado inferiormente.

IV. B PREFERENCIAS Y RELACIONES BINARIAS

En la Teoría Económica se ha trabajado fuertemente sobre el tema de las preferencias por ser crucial para definir la función de utilidad y por tanto el problema del consumidor. En los comienzos Edgword y Mill de la escuela utilitarista introdujeron el concepto de utilidad como una sustancia mensurable en términos de placer o pena. Sin embargo la teoría estaba cargada de fuertes supuestos sobre la conducta de los consumidores. Pareto en 1896 recibió el crédito por la idea de que una utilidad mensurable no era necesaria en la teoría de la demanda. Slutsky en 1915 elaboro la primera teoría sistemática de la demanda sin el concepto de utilidad mensurable. Hicks en 1939 demostró que el principio de utilidad marginal decreciente no era necesario ni suficiente para que se cumpliera la ley de la demanda.[3]

Sin embargo es Debreu en 1959, quien demuestra que los Axiomas que desarrollaremos en este capítulo permiten la existencia de la función de utilidad, y solo estos Axiomas. Es quien depuró la Teoría del Consumidor para establecer en cinco supuestos claros y concretos las condiciones que deben satisfacer las preferencias sobre el conjunto de elección para garantizar la existencia de una función de utilidad que represente las preferencias del consumidor sobre el conjunto de elección. Y éste es un resultado por

[3] **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Capitulo 1.

demás impresionante ya que condensa los elementos suficientes para poder representar el problema del consumidor a través de un problema de optimización.

En el primer capítulo de esta Tesis se examinaron las relaciones sobre un conjunto, esto nos es de utilidad ahora para representar las preferencias sobre el conjunto de elección a través de este tipo de relaciones binarias.

Definiremos la relación "tan o más preferida que", la cual denotaremos con el símbolo $\succsim$. Ésta es la primera porque de ella deriva un importante par de relaciones. La relación $\succsim$ toma dos elementos cualesquiera **x**, **x'** del conjunto de elección $\mathcal{X}$, comparándolos de la siguiente manera **x** $\succsim$ **x'** que se lee: **x** es tan o más preferida que **x'.**

Las preferencias sobre el conjunto de elección son una relación binaria pues se establecen tomando dos a dos de los elementos de $\mathcal{X}$. Es claro en este momento que $\succsim$ esta definida de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{X}$, esto es la relación $\succsim$: $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Entonces según lo definido en el primer capítulo $\succsim$ es una relación sobre un conjunto y entenderemos por ($\mathcal{X}$, $\succsim$) al conjunto de elección de k-mercancías bajo la relación de preferencia "tan o más preferido que".

Existen dos relaciones binarias de preferencia sobre el conjunto $\mathcal{X}$ que se derivan de la relación $\succsim$, la relación de preferencia estricta y la relación de indiferencia.

Definición: Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de elección y sea $\sim$ una relación de preferencia sobre $\mathcal{X}$ tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$.

Definición: Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de elección y sea $\succ$ una relación binaria de preferencia tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}$.

Una interesante observación sobre la definición anterior es que se puede reescribir de la siguiente forma: $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}$. Enseguida demostraremos este argumento.

Teorema I: Sea $(\mathcal{X}, \succ)$ entonces las siguientes definiciones son equivalentes

i) $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}$.

ii) $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}$.

Demostración:

$\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}$, si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge [\mathbf{x} \not\succsim \mathbf{x'} \vee \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}]$. Si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}$ si y solo si $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$.

■

Dado el conjunto de consumo $\mathcal{X}$, sea $\mathbf{x}$ en $\mathcal{X}$ entonces definimos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{X}$:

$\succsim(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}\}$, el conjunto “tan o más preferido que”.

$\succ(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \mathbf{x'} \succ \mathbf{x}\}$, es nombrado el conjunto “mejor que”.

$\sim(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \mathbf{x} \sim \mathbf{x'}\}$, el subconjunto de $\mathcal{X}$ llamado “indiferente”.

$\precsim(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \mathbf{x} \succsim \mathbf{x'}\}$, el conjunto “no mejor que”.

$\prec(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \mathbf{x} \succ \mathbf{x'}\}$, denotado el conjunto “peor que”.

IV. C AXIOMAS SOBRE LAS PREFERENCIAS

En el primer capítulo revisamos las propiedades de las relaciones sobre un conjunto distinto del vacío así como las propiedades de las relaciones de orden, veremos enseguida que $\succsim$ cumple con ser reflexiva, completa y transitiva. [4]

De acuerdo con la metodología de este documento definiremos en términos de la relación $\succsim$ las propiedades de transitividad y completes. Exponiendo las implicaciones que, sobre este enfoque de la conducta del consumidor, tienen estas propiedades. En la notación las remarcaremos con vérsales pues son fundamentales para el estudio de las preferencias.

Cabe señalar que en la mayor parte de los textos la transitividad, la completes y otras pocas características más sobre las preferencias y el conjunto de elección son llamadas Axiomas, dicha palabra se ocupa en matemáticas para proposiciones que se asumen y no están sujetas a demostración y sirven como base para teoremas.

[4] El desarrollo de esta sección dedicada a "los axiomas sobre las preferencias" tiene su referente bibliográfico en: **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Capitulo 1. **MAS-COLELL, ANDREU; WINSTON, MICHAEL D. & GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory,* capítulos I y II. **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, capítulo VII. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulos II, III.

Dado el desarrollo que hemos venido haciendo sobre la modelación de la conducta del consumidor y las convenciones sobre el modelo, estas propiedades llamadas Axiomas son consecuencias inherentes o en otros casos restricciones -como es el caso de la continuidad y la monotonicidad estricta-, que toman sentido por las convenciones hechas sobre el fenómeno que estamos estudiando, que se trata de explicar el cómo un consumidor típico estructura su elección sobre un conjunto de combinaciones de mercancías, donde para elegir necesita comparar, jerarquizar y ser consecuente con ese orden para al fin poder establecer que cestas prefiere a otras.

IV. C-1 PRIMER AXIOMA: COMPLETES

Sea $(\mathcal{X}, \succsim)$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ se cumple $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}'$ o $\mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}$

Según lo que hemos estado estudiando sobre el conjunto de elección sabemos que nuestro consumidor conoce un número finito de mercancías y que puede formar cestas con cualquier combinación de cantidades positivas de estas mercancías. Sin embargo, si nuestro consumidor no pudiese comparar las cestas ¿Cómo podría entonces elegir entre éstas? La respuesta se encuentra en las preferencias sobre las mercancías, así nuestro consumidor tendrá certeza al establecer si una combinación le agrada más que otra.

Es aquí donde cabe insertar la completes de la relación $\succsim$ sobre el conjunto de elección, ya que ésta afirma que para cualquier par de cestas **x**, **x’** que pertenezcan al conjunto de elección bajo la relación $\succsim$, se cumple que **x** es tan o más preferida que **x'**, o lo contrario **x'** es tan o más preferido que **x**. Entonces la completes de la relación $\succsim$ sobre $\mathcal{X}$ implica todos los elementos del conjunto de elección son comparables, esto es que sin importar que par de cestas se elijan siempre se sabrá cual cesta es tan o más preferida que la otra para nuestro consumidor.[5]

IV. C-2 SEGUNDO AXIOMA: TRANSITIVIDAD

Sea $(\mathcal{X}, \succsim)$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathcal{X}$ si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}''$ entonces $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}''$.

Sabemos que nuestro consumidor puede comparar cualquier par de cestas y establecer cual es tan o más preferida que otra. Si repite el proceso, usando esta vez una tercera cesta y comparándola con las anteriores podrá establecer la jerarquía, en cuanto a sus gustos, que cada una de las cestas tiene sobre de las otras. Si nuestro consumidor es consecuente entonces sus preferencias sobre el conjunto de elección serán transitivas.

Entonces no es de extrañar que si un consumidor tiene preferencias que cumplan con ser completas y transitivas se diga que este consumidor tiene preferencias racionales, pues racional es sinónimo de consecuente.

[5] Idem (4).

El párrafo anterior implícitamente indica que puede darse el caso que las preferencias no sean transitivas ($\exists$**x**, **x'**, **x''** $\in \mathcal{X}$: (**x**, **x'**) $\in \succsim \wedge$ (**x'**, **x''**) $\in \succsim \wedge$ (**x**, **x''**)$\notin \succsim$) o peor aún atransitivas ($\forall$**x**, **x'**, **x''** $\in \mathcal{X}$: (**x**, **x'**) $\in \succsim \wedge$ (**x'**, **x''**) $\in \succsim \Rightarrow$ (**x**, **x''**)$\notin \succsim$). En tal caso no podría decirse que la conducta del consumidor es racional.[6]

Ahora demostraremos que las preferencias que cumplen los Axiomas I y II constituyen un preorden completo sobre el conjunto de elección.

En el primer capítulo demostramos que una relación binaria ***R*** transitiva y completa sobre un conjunto A es reflexiva. Como las preferencias son un caso particular de las relaciones binarias sobre un conjunto esta demostración seria inmediata como corolario, sin embargo por la importancia que tiene en el análisis de las preferencias sobre el conjunto de elección reelaboraremos la demostración del primer capítulo con el objetivo de dejar claro que las preferencias son un preorden completo sobre $\mathcal{X}$.

Teorema II: Sea $\succsim$ una relación de preferencia sobre el conjunto de elección, tal que la relación de preferencia es completa y transitiva. Entonces la relación de preferencia es un preorden completo sobre $\mathcal{X}$.

[6] La racionalidad es definida con la satisfacción de la completes y la transitividad en: **MAS-COLELL, ANDREU; WINSTON, MICHAEL D. & GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory*, capítulo I.

Demostración:

Por demostrar que $\succsim$ es un preorden.

Sabemos que una relación binaria $\boldsymbol{R}$ es un preorden sobre un conjunto A si es transitiva y reflexiva. Por el Axioma II sabemos que $\succsim$ es transitiva. Por demostrar entonces que $\succsim$ es reflexiva.[7] Sean $\mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ tales que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x'}$. Por lo tanto:

$$[\mathbf{x} \neq \mathbf{x'}] \wedge [\mathbf{x'} \neq \mathbf{x}]$$

Por el Axioma I sabemos que $\succsim$ es completa, entonces:

$$[\mathbf{x} \neq \mathbf{x'}] \wedge [\mathbf{x'} \neq \mathbf{x}] \Rightarrow [\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \vee \mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}] \wedge [\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x} \vee \mathbf{x} \succsim \mathbf{x'}]$$

Entonces tenemos dos casos:

i. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$. Por el Axioma I, la relación de preferencia $\succsim$ es transitiva, lo que implica que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$. Por lo tanto $\succsim$ es reflexiva.

[7] Para ver la demostración general revisar en: Primer Capítulo, Relaciones binarias, Orden total y parcial.

ii. $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \succsim \mathbf{x'}$. Usando de nueva cuenta el Axioma I, la relación binaria $\succsim$ es transitiva, entonces $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x'}$. Por lo tanto $\succsim$ es reflexiva.

Demostramos que los Axiomas I y II de las preferencias sobre el conjunto de elección implican que las preferencias son reflexivas.

Por lo tanto los Axiomas I y II implican un preorden sobre $\mathcal{X}$.

Concluimos que con preferencias transitivas y reflexivas entonces el conjunto de elección es preordenado por $\succsim$. Evidentemente por el Axioma I las preferencias son completas, por lo tanto los Axiomas I y II implican un preorden completo de las preferencias $\succsim$ sobre el conjunto de elección $\mathcal{X}$.

■

IV. C-3 TERCER AXIOMA. CONTINUIDAD

$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, los conjuntos $\succsim(\mathbf{x})$ y $\precsim(\mathbf{x})$ son cerrados.

Se asume que los conjuntos $\succsim(\mathbf{x})$ y $\precsim(\mathbf{x})$ son cerrados con el objetivo de asegurar que el conjunto indiferente $\sim(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}, \mathbf{x'} \sim \mathbf{x}\}$ sea cerrado. Si los conjuntos $\succsim(\mathbf{x})$ y $\precsim(\mathbf{x})$ son cerrados en $\mathcal{X}$, entonces como vimos en el tercer capítulo, la intersección arbitraria de cerrados es cerrada por lo tanto como $\succsim(\mathbf{x}) \cap \precsim(\mathbf{x}) = \sim(\mathbf{x})$, se concluye que el conjunto $\sim(\mathbf{x})$ es cerrado.

Si el conjunto indiferente fuera abierto entonces para todo punto en el conjunto existiría una bola con centro en esa canasta y radio positivo enteramente contenida en el conjunto indiferente lo que permitiría en principio que existieran zonas de indiferencia con respecto a **x**. Aún si las preferencias son continuas es decir aún si el conjunto indiferente es cerrado puede tener puntos interiores, es decir la continuidad en las preferencias no es suficiente para garantizar que no existan zonas de indiferencia.

Otra conclusión inmediata es que por definición sabemos que un conjunto es cerrado si su complemento es abierto, luego el complemento en $\mathcal{X}$ de $\succsim(\mathbf{x})$ es el conjunto $\prec(\mathbf{x})$, $[\succsim(\mathbf{x})]^c = \prec(\mathbf{x})$; y obviamente el complemento en $\mathcal{X}$ del conjunto $\precsim(\mathbf{x})$ es el conjunto mas preferido que $\succ(\mathbf{x})$, $[\precsim(\mathbf{x})]^c = \succ(\mathbf{x})$ de donde se concluye que los conjunto mas y menos preferido que, $\prec(\mathbf{x})$ y $\succ(\mathbf{x})$, son abiertos.

El axioma de continuidad sobre las preferencias establece que el conjunto $\succsim(\mathbf{x})$ sea cerrado, por los conceptos revisados en el tercer capítulo sabemos que un conjunto cerrado incluye a su frontera. Esto implica que con preferencias continuas para $\mathbf{x}$, $\mathbf{x'} \in \mathcal{X}$ tales que $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$ con $\mathbf{x'}$ punto frontera del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$, por la definición de punto frontera pasa que: $\forall \varepsilon > 0 \wedge B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ existe $\mathbf{s} \in B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ tal que $s \in [\succsim(x)]^c$, es decir que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{s}$. Lo que dice este argumento es que si $\mathbf{x'}$ es punto frontera del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$, no importa el radio de la vecindad siempre existirá en la vecindad una cesta $\mathbf{s}$ menos preferida que la cesta $\mathbf{x}$.

En el caso en que $\mathbf{x'}$ sea un punto interior del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$, $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$, entonces $\exists \varepsilon_1 > 0$ tal que $B(\mathbf{x'}, \varepsilon_1)$ esta enteramente contenida en $\succsim(\mathbf{x})$, pues ésta es la definición de punto interior, por lo tanto existe $\mathbf{t} \in B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ tal que $\mathbf{t} \succsim \mathbf{x}$. Intuitivamente la expresión anterior quiere decir que las cestas muy cercanas a $\mathbf{x'}$ también serán preferidas a $\mathbf{x}$.

Analíticamente la continuidad en las preferencias implica que para una sucesión convergente de cestas de consumo contenida en $\sim(\mathbf{x})$ el límite de esta sucesión es una cesta contenida en el mismo conjunto porque el conjunto $\sim(\mathbf{x})$ es cerrado y los cerrados contienen a todos sus puntos límite.

Por tanto la continuidad en las preferencias excluye los casos en que una sucesión convergente de canastas enteramente contenida en alguno de los conjuntos cerrados converja a una canasta perteneciente a otro conjunto. Intuitivamente si tenemos una sucesión convergente de canastas $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \ldots.\} \subset \succsim(\mathbf{x})$, su límite existe y es una canasta del conjunto porque este es cerrado. Este mismo ejemplo se puede utilizar para los conjuntos indiferente $\sim(\mathbf{x})$ y menos preferido que $\precsim(\mathbf{x})$.

Es importante observar que si el conjunto $\sim(\mathbf{x})$ no fuera cerrado es decir si no se cumpliera la continuidad en las preferencias no podríamos garantizar que cualquier sucesión convergente en $\sim(\mathbf{x})$ tuviera su límite en el mismo conjunto pues solo los conjuntos cerrados contienen a todos sus puntos límite. Lo que podría pasar bajo estas condiciones es que la sucesión convergente de canastas $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \ldots.\} \subset \sim(\mathbf{x})$ indiferentes a $\mathbf{x}$ convergiera a las canastas tan o más preferidas que $\mathbf{x}$, $\succsim(\mathbf{x})$; o las tan o menos preferidas que $\mathbf{x}$, $\precsim(\mathbf{x})$.

A continuación presentaremos uno de los resultados propios de esta Tesis, ya que el avance hasta este punto de nuestro análisis sobre $\mathcal{X}$ nos permite proponer y demostrar un teorema afirma que el conjunto de elección bajo los Axiomas de continuidad, completes y transitividad, dado lo revisado en el tercer capítulo, es conexo.

Teorema III: Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de combinaciones de mercancías bajo los Axiomas I - III sobre las preferencias, entonces $\mathcal{X}$ es conexo.

Demostración: Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ entonces por el Axioma de continuidad y el Teorema IV del tercer capítulo, el conjunto $\sim(\mathbf{x})$ es cerrado de donde su complemento, los conjuntos $\succ(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}, \mathbf{x'} \succ \mathbf{x}\}$, $\prec(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x'} \,/\, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}, \mathbf{x} \succ \mathbf{x'}\}$ son abiertos además de ser disjuntos por definición. Por otro lado sabemos que dada una $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, el conjunto de elección es la unión de tres conjuntos disjuntos $\mathcal{X} = \prec(\mathbf{x}) \cup \sim(\mathbf{x}) \cup \succ(\mathbf{x})$. Por lo que para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, el conjunto de elección $\mathcal{X}$ no es la unión de dos abiertos disjuntos dos a dos.

Por lo tanto el conjunto de elección es conexo.

■

IV. C-4 CUARTO AXIOMA. NO SACIEDAD LOCAL

$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0$ existe $\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$.

La no saciedad local deja fuera absolutamente la posibilidad de que existan zonas de indiferencia,[8] ya que establece que para toda cesta **x** en el conjunto de elección y para todo radio ε existe siempre en la bola con centro en **x** y radio ε una cesta **x'** que pertenece a la bola y al conjunto de elección tal que la cesta **x'** es estrictamente mas preferida que la cesta **x**. Así que no importando que cesta se elija ni tampoco que tan pequeña sea la bola siempre habrá en la bola una cesta más preferida a **x**.

Una importante conclusión ligada con la no saciedad local es que no importa el radio que se de ni la cesta que se elija siempre habrá una cesta mas preferida que la dada que pertenezca a la bola.

Teorema IV**:** Sea $(\mathcal{X}, \succsim)$ bajo el axioma de no saciedad local. Entonces el conjunto "mas preferido que" es denso en $\mathcal{X}$.

[8] **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, capitulo 1. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulo III.

Demostración: Por demostrar que $\succ(\mathbf{x})$ es denso en $\mathcal{X}$. Por la definición de conjunto denso y por la definición de punto límite que expusimos en el tercer capítulo, sabemos que para demostrar que $\succ(\mathbf{x})$ es denso en $\mathcal{X}$ debemos demostrar que cada punto de $\mathcal{X}$ es punto límite de $\succ(\mathbf{x})$. Esto es, por demostrar que para toda $\mathbf{x}$ de $\mathcal{X}$ cada vecindad de $\mathbf{x}$ contiene un punto $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}' \in \succ(\mathbf{x})$.

Sea el conjunto de elección con preferencias que cumplen el axioma de no saciedad local y sean $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y $\varepsilon > 0$, entonces por la no saciedad local existe $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x}' \succ \mathbf{x}$, por lo que $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ y también $\mathbf{x}' \in \succ(\mathbf{x})$, como la elección de $\mathbf{x}$ y de ε fue arbitraria se cumple, por lo tanto que para toda $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, cada vecindad de $\mathbf{x}$ contiene un punto $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}'$ es punto de $\succ(\mathbf{x})$. Entonces para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x}$ es punto límite de $\succ(\mathbf{x})$. Por lo tanto, $\succ(\mathbf{x})$ es denso en $\mathcal{X}$.

■

De hecho la no saciedad local asegura que los puntos del conjunto indiferente son puntos limite del conjunto $\succ(\mathbf{x})$. Ya que según la definición de punto limite $\mathbf{x}$ es punto límite de $\succ(\mathbf{x})$ si $\forall\varepsilon > 0 \; \exists \; \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x}' \in B°(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \succ(\mathbf{x})$.

Además queda claro que como el conjunto indiferente es cerrado por la continuidad en las preferencias y como el conjunto indiferente no posee puntos interiores por la no saciedad local entonces todos los puntos del conjunto indiferente son puntos frontera. Esto en términos de notación: **x'** $\in$ ~(**x**) si y solo si **x'** $\in$ fr [~(**x**)].

De los párrafos anteriores se concluye que si las preferencias cumplen los Axiomas I al VI entonces el conjunto de indiferencia ~(**x**) := {**x / x'** $\in$ $\mathcal{X}$, **x** ~ **x'**} es una curva en el conjunto de elección $\mathcal{X} = \Re^{\mathbf{k}+}$.

Por lo que con estos Axiomas hemos podido construir de tal forma el conjunto de indiferencia de **x** que se puede nombrar al conjunto ~(**x**) la curva de indiferencia de **x** en el conjunto de elección $\mathcal{X}$. Las curvas de indiferencia en el conjunto de elección no son otra cosa que los conjuntos de indiferencia para cada **x** de conjunto de elección.

Es claro que como todo conjunto es una clase que el conjunto de indiferencia de **x** también puede ser nombrada clase de indiferencia de **x**.[9] Si dos cestas **x**, **x'** pertenecen a conjunto de indiferencia de **x** también pertenecen al conjunto de indiferencia de **x'** ya que ~(**x**) y el ~(**x'**) son el mismo conjunto, es decir, la misma clase, y por consecuencia tanto **x** como **x'** son representantes la misma clase.

Bajo preferencias completas, transitivas, continuas y con no saciedad local las relaciones de preferencia determinan una partición sobre el conjunto de elección. Como

[9] **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía*, España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulo III.

ejemplo pensemos en las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$, que bajo los Axiomas I al VI.1, dividen al conjunto de elección en tres subconjuntos disjuntos entre sí cuya unión es el mismo conjunto de elección.

Formalmente, sea $\mathcal{X} = \Re^{k+}$ como $\mathcal{X}$ es distinto del vacío entonces existe el conjunto de particiones P sobre $\mathcal{X}$.

Es momento de presentar otro resultado propio de esta Tesis, pues enseguida proponemos y demostramos el teorema que afirma que las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ son una partición sobre el conjunto de elección.

Teorema V: Bajo los Axiomas de las preferencias I al IV, las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ establecen una partición sobre $\mathcal{X}$.

Demostración:

Por demostrar que las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$, que pertenece al conjunto de relaciones de preferencia sobre el conjunto de elección son una partición sobre el conjunto de elección.

i. $\{\prec, \sim, \succ\}$ divide al conjunto de elección en conjuntos disjuntos dos a dos.

Sean **x**, **x'** $\in \mathcal{X}$ y fijemos a **x** entonces por la completes de la preferencias por la completes en las preferencias sabemos que **x** y **x'** son comparables, por la continuidad y la no saciedad local el conjunto ~(**x**) es cerrado y los conjuntos $\prec$(**x**), $\succ$(**x**) son abiertos. Hemos demostrado que **x'** es mas preferido que **x** si y solo si **x** $\succsim$ **x'** $\wedge$ **x'** $\not\succsim$ **x** si y solo si **x** $\succsim$ **x'** $\wedge$ **x'** $\nsim$ **x.** Por lo tanto ~(**x**)$\cap\succ$(**x**) = ϕ.

Por demostrar que $\prec$(**x**), ~(**x**) son disjuntos.

Por reducción al absurdo. Supongamos que $\prec$(**x**) $\cap$ ~(**x**) es distinto del vacío.

Entonces existe un **x**' en $\prec$(**x**) $\cap$ ~(**x**), lo que implica que **x**' $\in$ $\prec$(**x**) $\wedge$ **x**' $\in$ ~(**x**). Como las preferencias son continuas $\prec$(**x**) es abierto, por lo que todos sus puntos son puntos interiores. Entonces **x**' es punto interior $\prec$(**x**), por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola con centro en **x**' y radio e esta enteramente contenida en $\prec$(**x**).

Esto es $\forall$**p**$\in$B(**x**', ε), **p**$\in\prec$(**x**). …(i)

Por otro lado como **x**' $\in$ ~(**x**) y se cumple la continuidad en las preferencias ~(**x**) es cerrado, entonces sus puntos son puntos frontera o son puntos interiores. Por la no saciedad local sabemos que el conjunto ~(**x**) solo contiene a sus puntos frontera (el conjunto ~(**x**) no contiene puntos interiores, es decir, el interior de ~(**x**) es el vacío).

Entonces como **x**' pertenece al conjunto **x**' es punto frontera de ~(**x**). Lo que implica que $\forall\varepsilon>0$, B(**x**',ε) $\subset$ ~(**x**)$\cap$ext ~(**x**). Esto es $\forall\varepsilon > 0$, si **p** $\in$ B(**x**', ε) entonces **p** $\in$ ~(**x**) $\wedge$ **p** $\in$ ext ~(**x**). Como el interior de ~(**x**) es el vacío y ~(**x**) es cerrado entonces ~(**x**) coincide con su frontera y el exterior de ~(**x**) coincide con el complemento de **x**, esto es fr~(**x**)= ~(**x**) $\wedge$ ext~(**x**)= [~(**x**)].

Por lo que la expresión $\forall\varepsilon>0$, si **p** $\in$ B(**x**', ε) entonces **p** $\in$ ~(**x**) $\wedge$ **p** $\in$ ext ~(**x**). Lo que equivale a $\forall\varepsilon>0$, si **p** $\in$ B(**x**', ε) entonces **p** $\in$~(**x**) $\wedge$ p $\in$ [~(**x**)]. Entonces el argumento anterior implica que no existe una $\varepsilon > 0$ tal que $\forall$**p**$\in$B(**x**', ε), **p**$\in\prec$(**x**).

De donde $\forall$ $\varepsilon > 0$ si **p** $\in$ B(**x**', ε) entonces **p** $\in$ ~(**x**) $\wedge$ **p**$\in$ [~(**x**)]. …(ii)

Con las conclusiones i y ii llegamos a una contradicción. Por que no existe una ε para la cual la bola no tenga puntos de ~(**x**). La contradicción vino de suponer que $\prec$(**x**) $\cap$ ~(**x**) $\neq \phi$. De donde concluimos que $\prec$(**x**) ~(**x**) sin disjuntos.

Por demostrar que los conjuntos $\succ(\mathbf{x})$, $\prec(\mathbf{x})$ son disjuntos. Por demostrar que $\succ(\mathbf{x})\cap\prec(\mathbf{x}) = \phi$

Supondremos que $\succ(\mathbf{x})\cap\prec(\mathbf{x}) \neq \phi$. Entonces existe una canasta que llamaremos $\mathbf{x}'$ en la intersección de estos conjuntos, esto es $\exists\mathbf{x}' \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ tal que $\mathbf{x}' \in \succ(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x}' \in \prec(\mathbf{x})$. Entonces si $\mathbf{x}' \in \succ(\mathbf{x})$ sucede que $\mathbf{x}'\notin[\succ(\mathbf{x})]^c$ por lo que $\mathbf{x}'\notin\precsim(\mathbf{x})$ lo que significa que $\mathbf{x}' \not\precsim \mathbf{x}$ lo que implica que $\mathbf{x}'\nprec \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'\nsim\mathbf{x}$. Si $\mathbf{x}'\nprec \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x}'\notin\prec(\mathbf{x})$, lo que contradice nuestro supuesto.

Análogamente si $\mathbf{x}'\in \prec(\mathbf{x})$ entonces $\mathbf{x}' \notin \succsim(\mathbf{x})$. Lo que implica que $\mathbf{x}'\nsucc\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'\nsim\mathbf{x}$. Contradicción pues supusimos que $\mathbf{x}\in\succ(\mathbf{x})$.

De donde es falso suponer que la intersección de los conjuntos “mas preferido que” $\succ(\mathbf{x})$ y menos preferido que es diferente del vació.

Por lo tanto $\succ(\mathbf{x})\cap\prec(\mathbf{x}) = \phi$.

ii. La unión de los conjuntos generados bajo $\{\prec, \sim, \succ\}$ es $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

Supongamos que existe un $\mathbf{x}'$ que pertenece a $\mathcal{X}$ pero que no pertenece $\sim(\mathbf{x})$, $\succ(\mathbf{x})$, $\prec(\mathbf{x})$. Pero como las preferencias son completas $\mathbf{x}'$ se puede comparar con cualquier otra cesta de $\mathcal{X}$ en particular con $\mathbf{x}$. Como los complementos de los conjuntos $\prec(\mathbf{x})$, $\succ(\mathbf{x})$ son los conjuntos $\succsim(\mathbf{x})$, $(\mathbf{x})$ respectivamente entonces si $\mathbf{x'}$ no esta en $\prec(\mathbf{x})$ y no esta en $\succ(\mathbf{x})$ entonces esta en la intersección de los complementos, por lo que $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \succsim \mathbf{x'}$. Lo que implica que $\mathbf{x}' \in \succsim(\mathbf{x}) \cap \precsim(\mathbf{x})$. Pero la intersección es el conjunto indiferente $\mathbf{x}' \in \succsim(\mathbf{x}) \cap \precsim(\mathbf{x}) = \sim(\mathbf{x})$. Contradicción pues supusimos que $\mathbf{x}$ no estaba en $\sim(\mathbf{x})$.

Por lo tanto la unión de los conjuntos más preferido que, indiferente y menos preferido que es el conjunto de elección. $\succ(\mathbf{x}) \cup \sim(\mathbf{x}) \cup \prec(\mathbf{x}) = \mathcal{X}$

Por lo tanto hemos demostrado que las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ son una partición sobre el conjunto de elección $\mathcal{X}$.

$\blacksquare$

Es claro que $\{\prec, \sim, \succ\}$ no es la única partición generada por las relaciones de preferencia sobre el conjunto de elección pues también esta la formada por $\{\succsim, \prec\}$ que dividen al conjunto de elección $\mathcal{X}$ en $\succsim(\mathbf{x})$, y en su complemento $\prec(\mathbf{x})$, y por esa razón $\succsim(\mathbf{x})\cap\prec(\mathbf{x}) = \phi \;\wedge\; \succsim(\mathbf{x})\cup\prec(\mathbf{x}) = \mathcal{X}$.

O la partición $\{\precsim, \succ\}$ que al igual que la anterior genera dos conjuntos $\precsim(\mathbf{x})$, $\succ(\mathbf{x})$ donde $\precsim(\mathbf{x})$ es complemento de $\succ(\mathbf{x})$ por lo que su intersección es vacía $\precsim(\mathbf{x}) \cap \succ(\mathbf{x}) = \phi$ y su unión es el conjunto de elección $\precsim(\mathbf{x}) \cap \succ(\mathbf{x}) = \mathcal{X}$.

El Teorema VI es también fruto de esta Tesis, pues con los elementos topológicos revisados en el Tercer Capítulo aplicados al conjunto de elección $\mathcal{X}$ bajo preferencias que cumplan los Axiomas de completes, transitividad, continuidad y no saciedad local proponemos y demostramos que el conjunto de indiferencia de la cesta **x** es un conjunto perfecto.

Teorema VI: Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, entonces el conjunto de indiferencia de **x** es un conjunto perfecto bajo los Axiomas I-IV.

Demostración: Recordemos que un conjunto E es perfecto si E es cerrado y si cada punto es un punto límite de E. Por la continuidad en las preferencias hemos demostrado que el conjunto de indiferencia es cerrado. Por probar que todas las cestas del conjunto de indiferencia son puntos frontera del conjunto de indiferencia.

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ una cesta que en particular pertenece al conjunto de indiferencia de $\mathbf{x}$, $\sim(\mathbf{x})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces por la no saciedad local de las preferencias sobre el conjunto de elección $\mathcal{X}$,[10] existe $\mathbf{a} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{a} \succ \mathbf{x}$. Por tanto, $\mathbf{a} \notin \sim(\mathbf{x})$.

De donde como la elección de $\mathbf{x}$ y de ε es arbitraria, y como probamos que si $\mathbf{x} \in \sim(\mathbf{x})$ entonces $\mathbf{x}$ es punto límite queda demostrado que $\sim(\mathbf{x})$ es un conjunto perfecto.

■

Nos entusiasma presentar el Teorema VII que formulamos y probamos para esta Tesis, la idea de este teorema se basa en que dada una cesta cualquiera $\mathbf{x}$ que pertenece al conjunto de elección $\mathcal{X}$, el conjunto de indiferencia de $\mathbf{x}$ es un conjunto infinito de cestas.

Teorema VII: Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ bajo los Axiomas I-IV. Entonces el conjunto de indiferencia de la cesta $\mathbf{x}$, esto es $\sim(\mathbf{x})$, no es un conjunto finito.

Demostración: Hemos demostrado que el conjunto de indiferencia de la cesta $\mathbf{x}$ es un conjunto perfecto, entonces todos sus puntos son puntos límite del conjunto $\sim(\mathbf{x})$. Tomamos

[10] Para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall\varepsilon > 0$ existe $\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$

una cesta **p** en ~(**x**) tal que **p** es punto límite, por lo tanto para $\varepsilon > 0$ la vecindad con centro en **p** y radio ε, V_ε(**p**), contiene una infinidad de puntos del conjunto indiferente de **x**.

Por lo que queda demostrado que el conjunto indiferente de **x** no es finito, para toda cesta **x**.

■

IV. C-5 QUINTO AXIOMA. MONOTONICIDAD ESTRICTA

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, si $\mathbf{x'} \geq \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$. Mientras que si $\mathbf{x'} \gg \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$.

Este Axioma dice para todo par de canastas del conjunto de elección **x**, **x'** si **x'** tiene en alguna (o algunas) de las k-mercancías una cantidad mayor a la que tiene la canasta **x** entonces **x'** será tanto o más preferida que la canasta **x**. Pero si la canasta **x'** tiene en todas y cada una de las *k*-mercancías cantidades mayores que las que tiene respectivamente en cada una de las *k*-mercancías la cesta **x**, entonces la cesta **x'** es estrictamente mas preferida que la cesta **x**.

Hasta este punto el consumidor podría haber preferido cestas que tuvieran menos de alguna e incluso de todas las *k*-mercancías sin romper con la estructura axiomática que se había planteado.[11]

Es con la monotonicidad estricta sobre las preferencias del consumidor que se condiciona a dicho agente a preferir las canastas que tengan más de cada mercancía sobre aquellas que tengan menos.

Con la monotonicidad estricta se queda fuera la posibilidad de que las curvas de indiferencia con respecto a una cesta dada **x**, esto es el conjunto $\sim(\mathbf{x})$, tenga tramos que

[11] Ver referencias en: **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Capitulo 1. **MAS-COLELL, ANDREU; WINSTON, MICHAEL D. & GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory,* capítulos I y II. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulos II, III.

suban formando montañas. Asegura que el conjunto “mas preferido que” este por arriba del el conjunto “menos preferido que”.

Teorema VIII: Monotonicidad estricta implica no saciedad local.

a) Monotonicidad estricta. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, si $\mathbf{x'} \geq \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$. Si $\mathbf{x'} \gg \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$.

b) No saciedad local. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0$ existe $\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$.

Demostración: Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, y sea $\varepsilon > 0$ entonces $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X} \neq \phi$. Sea $\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x'} \geq \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$ por la monotonicidad estricta sobre las preferencias. También sabemos que $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$ si y solo si $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x} \vee \mathbf{x'} \sim \mathbf{x}$. Por tanto si pasa $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$ como $\mathbf{x}$, ε son arbitrarias se demuestra que la monotonicidad estricta implica saciedad local.

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, y sea $\varepsilon > 0$ entonces $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X} \neq \phi$. Por la monotonicidad estricta sobre las preferencias, sea $\mathbf{x''} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x''} \gg \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$. Como la elección de $\mathbf{x}$ y de ε fue arbitraria entonces lo anterior vale $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0$ por lo tanto $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0$ existe $\mathbf{x''} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x''} \succ \mathbf{x}$. Por lo tanto monotonicidad estricta implica no saciedad local.

■

IV. C-6 SEXTO AXIOMA. CONVEXIDAD Y AXIOMA CONVEXIDAD ESTRICTA

- **AXIOMA DE CONVEXIDAD**

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \wedge \forall \lambda \in [0, 1]$, si $\mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}$ entonces $\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

- **AXIOMA DE CONVEXIDAD ESTRICTA**

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \wedge \forall \lambda \in (0, 1)$, si $\mathbf{x}' \succ \mathbf{x}$ entonces $\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succ \mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

La convexidad expresa el gusto de los consumidores por la variedad,[12] esto es una si la canasta **x'** es tanto o más preferida que la canasta **x** entonces una combinación entre estas dos, es tanto o más preferida que la cesta **x**.

La diferencia entre la convexidad y la convexidad estricta es que la convexidad permite elegir *lamda* también en los extremos. Así, bajo la preferencias convexas es posible que el consumidor elija a **x'** en el caso en que $\lambda = 1$ pues la expresión $\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$ se convierte en $1\mathbf{x}' + (1 - 1)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x}' + 0\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$, por lo que $\mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}$. Es claro que la convexidad también permite elegir a **x** al tomar $\lambda = 0$, pues en ese caso $\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$ $\Rightarrow 0\mathbf{x}' + (1 - 0)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \Rightarrow 0\mathbf{x}' + 1\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$, por tanto $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}'$.

---

[12] **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, capítulo VII. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulos II, III.

Analíticamente este Axioma garantiza que la forma del conjunto de indiferencia tenga una curvatura ligeramente opuesta al origen. La inclusión de la convexidad como un Axioma sobre las preferencias tiene un carácter analítico,[13] pues con este Axioma la pendiente a lo largo del conjunto de indiferencia no incrementa al desplazar el análisis entre cestas indiferentes.

De esta forma la estricta convexidad en las preferencias asegura que la razón de cambio a la que está dispuesto a intercambiar el consumidor una unidad de la mercancía *i* por alguna de las k-1 mercancías restantes es constante o decreciente, dejando fuera la posibilidad de que esta razón de cambio sea creciente. Con la satisfacción de la convexidad analíticamente se garantiza que el conjunto de indiferencia tenga lo que en lenguaje de la teoría económica se conoce como la tasa marginal de sustitución no creciente.

Observemos que con preferencias completas, transitivas, continuas, monótonamente fuertes y estrictamente convexas sobre el conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathfrak{R}^{\mathbf{k+}}$ podemos concluir que la razón de cambio a lo largo del conjunto de indiferencia de **x** es la tasa marginal de sustitución a lo largo de la curva de indiferencia de **x**.

[13] **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, capitulo 1. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* capítulo III.

IV. D SINOPSIS

En este capítulo desarrollamos la Teoría de las Preferencias sobre el conjunto de elección que son una colección de seis Axiomas que Debreu demostró son los suficientes para garantizar la existencia de una función de utilidad que represente las preferencias y que pueda ser usada en un problema de optimización.

i. Analizamos la completes y la transitividad que permiten comparar las canastas del conjunto de elección.

ii. Estudiamos los Axiomas analíticos: continuidad, no saciedad local y monotonicidad estricta. Que nos permitieron dar una estructura topológica adecuada para los conjuntos $\succsim(x)$ y $\precsim(x)$ y por tanto para definir la estructura topológica del conjunto indiferente de x.

iii. Concluimos que $\sim(x)$ es cerrado solo contiene a sus puntos frontera y es una curva dentro del conjunto de elección y que por tanto no existen zonas de indiferencia dentro de las clases de indiferencia.

iv. Demostramos que las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ son una partición sobre l conjunto de elección.

v. Con la convexidad sobre las preferencias garantizamos que la pendiente a lo largo de la curva de indiferencia sea no creciente, esto es garantizamos que la tasa marginal de sustitución de la mercancía *i* por la mercancía *i-1* sea no creciente.

BIBLIOGRAFÍA

1. **BARTLE, ROBERT G. Y DONALD R SHERBERT.** *Introduction to Real Analysis*, Estados Unidos, John Wiley & Sons, Inc., segunda edición, 1992, capítulos I-V, X.

2. **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Estados Unidos, Editorial, Addison Wesley. Capitulo 1.

3. **MAS-COLELL, ANDREU, WINSTON, MICHAEL D. GREEN, JERRY R.** *Microeconomic Theory,* Estados Unidos, Oxford University Press, 1995, capítulos I y II.

4. **ROJO, ARMANDO O.** *Álgebra II,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1991, capítulos I, II y X.

5. **RUDIN, WALTER.** *Principios de Análisis Matemático,* México, Mc Graw Hill, tercera edición, 1980, capítulos I-IV.

6. **RUDIN, WALTER.** *Real Analysis,* Estados Unidos, Mcmillan, segunda edición, 1968, capítulos: set theory, part one sección I, part tow secciones VI-VIII.

7. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulos II, III y Apéndice Matemático.

CONCLUSIONES

Fueron dos propósitos los que nos justificaron para crear este *Capítulo de Conclusiones*:

PRIMERO. Evidenciar como nuestra hipótesis fue confirmada al reunir en esta Tesis conceptos, teoremas y demostraciones de diversas ramas de la matemática que son soporte de las demostraciones de las diez proposiciones expuestas en nuestra hipótesis y, desarrolladas en esta Tesis de acuerdo al avance del marco matemático y teórico. Estos resultados propios se concentran fundamentalmente en el *Cuarto Capítulo*, ya que siete de los ocho teoremas de este capítulo son propuestos y probados por nosotros. Nuestros teoremas propuestos y demostrados son:

Del Tercer Capítulo.

- ***Teorema II:*** El conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ no es un subespacio vectorial de $\Re^{\mathbf{k}}$.

- ***Teorema VIII:*** Existe un conjunto B en el conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ tal que B es cerrado.

- ***Teorema XIII:*** El conjunto de elección $\mathcal{X}$ tiene un número infinito de cestas.

Del Cuarto Capítulo.

- ***Teorema I:*** Sea $(\mathfrak{X}, \succ)$ entonces los siguientes definiciones son equivalentes: $[\mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}' \not\succsim \mathbf{x}] \wedge [\mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}' \nsim \mathbf{x}]$.

- ***Teorema II:*** Sea la relación de preferencia sobre el conjunto de elección tal que la relación de preferencia es completa y transitiva. Entonces la relación de preferencia es un preorden completo.

- ***Teorema III:*** Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de combinaciones de mercancías bajo los Axiomas I-III sobre las preferencias, entonces $\mathcal{X}$ es conexo.

- ***Teorema IV:*** Sea $(\mathcal{X}, \succsim)$ bajo el axioma de no saciedad local. Entonces el conjunto "mas preferido que" es denso en $\mathcal{X}$.

- ***Teorema V:*** Las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ establecen una partición sobre $\mathcal{X}$.

- ***Teorema VI:*** El conjunto de indiferencia es un conjunto perfecto bajo los Axiomas I-IV.

- ***Teorema VII:*** El conjunto de indiferencia de **x**, ~(**x**), no es un conjunto finito.

SEGUNDO. Mostrar la importancia de toda la labor matemática realizada en esta Tesis. Así a lo largo de este *Capítulo de conclusiones* expusimos los nexos entre el conjunto de elección y todas y cada una las definiciones matemáticas, que en cada caso consolidadas por teoremas y demostraciones nos permitieron ofrecer en un solo documento un marco instrumental sólido para la comprensión formal del conjunto de elección.

El *tema central* de esta Tesis fue el conjunto de elección del consumidor representativo. El *propósito* fue analizar desde una perspectiva matemático-teórica al conjunto de elección de k-mercancías del consumidor representativo. *Nuestro interés* en abordar un tema básico de la enseñanza microeconómica fue *reunir en este trabajo los elementos matemáticos y teóricos que formalicen su comprensión.*

A manera de reseña recalcaremos como hicimos evidente que el conjunto de elección de k-mercancías del consumidor representativo, el cual denotamos por $\mathcal{X}$, esta ligado a una amplia gama de conceptos matemáticos que sirven de base a la estructura de la Teoría del Consumidor.

Recordemos que los *objetivos* de esta Tesis fueron:

- Estudiar desde un enfoque matemático-teórico el conjunto de elección de k-mercancías del consumidor representativo.
- En paralelo al estudio del conjunto de elección incluir los teoremas y conceptos matemáticos ligados a este tema para comprenderlo formalmente.
- Enfatizar la estrecha relación entre la matemática y la teoría económica.

A *diferencia* de otros textos microeconómicos, en esta Tesis se expusieron detalladamente las *definiciones, teoremas* y, lo más importante, las *demostraciones*, necesarias, todas, para que en este documento exista el *soporte formal* de las definiciones usadas como marco matemático en el apartado de la Teoría del Consumidor que se ocupa de $\mathcal{X}$.

Entonces, los elementos de carácter matemático vinculados, por la propia Teoría del Consumidor, al conjunto de elección del consumidor representativo fueron explícita y extensivamente desarrollados por nosotros en esta Tesis, para mostrar a través de Teoremas y de sus rigurosas demostraciones la relevancia del uso del concepto matemático en los supuestos sobre el conjunto de elección.

Para cumplir con el *objetivo* propuesto de analizar el conjunto de elección del consumidor representativo para k-mercancías trabajamos en la siguiente línea: *elaboramos el concepto de mercancía* a través de una proposición, lo que nos permitió *definir el* *conjunto de mercancías* **M**. Explicamos detalladamente porque *el conjunto de cantidades positivas de una mercancía cualquiera es equivalente al conjunto* $\mathfrak{R}^{+}$. A través del sentido común y de los conceptos sobre la equipotencia en los conjuntos, mostramos que el *conjunto de mercancías* **M**, *es finito y numerable con cardinalidad k.* Establecimos en consecuencia, apoyados en estos argumentos de sentido común, matemática y teoría, que *operar con el conjunto de elección* $\mathcal{X}$ *es equivalente a trabajar con* $\mathfrak{R}^{k+}$, por lo que $\mathcal{X} = \mathfrak{R}^{k+}$. Analizamos al conjunto de elección como: *conjunto, subconjunto de un espacio vectorial* y *espacio métrico*. Por último, estudiamos los *Axiomas de las preferencias* sobre conjunto de elección *desarrollando las demostraciones de la mayor parte de las proposiciones de nuestra Hipótesis.*

Citando lo dicho en la introducción al realizar una lectura rápida de esta Tesis se sabe que los tres primeros capítulos abordan al conjunto de elección desde distintas perspectivas de la matemática. Por lo que analizamos a $\mathcal{X}$ desde: la Teoría de Conjuntos, el Álgebra Lineal y el Análisis Matemático, ofreciendo siempre las definiciones, teoremas y demostraciones pertinentes, para formar un marco matemático instrumental coherente y compacto que permita una lectura continua. En el *Cuarto Capítulo* se evidencia la necesidad del conocimiento de los conceptos y resultados estudiados en los tres capítulos previos y, el cómo estos conocimientos confluyen para abordar el tema de las preferencias del consumidor sobre el conjunto de elección de k-mercancías lo que nos permitió demostrar nuestra Hipótesis.

Hemos dicho que el *Primer Capítulo* aborda con formalidad y detenimiento dos temas: *Conjuntos* y *Relaciones Binarias*. Estableciendo un marco de referencia matemático sólido a través de la *definición axiomática de conjunto,* que como explicamos consta de siete axiomas: existencia, extensión, esquema de comprensión, del par, unión, del conjunto potencia y fundación. Esta definición axiomática de conjunto es la base enteramente formal para asegurarnos que, en el *Segundo Capítulo*, la *definición de mercancía* propuesta por nosotros definiera un conjunto. Así logramos definir el *conjunto de mercancías* y, después de una amplia reflexión, el *conjunto de elección de k-mercancías* del consumidor representativo.

Como lo hemos dicho, en el *Primer Capítulo* se consideró incluir el tema de *relaciones binarias,* porque matemáticamente es el tema consecutivo al de *conjunto.* Ya que una vez que queda asegurada la existencia de conjuntos por la *definición axiomática* de conjuntos entonces, nos es permitido relacionar dos elementos que pertenezcan respectivamente a cualesquier par de conjuntos.[1]

De esta manera elaboramos un extenso apartado sobre el tema de relaciones binarias, que avanzó sistemáticamente desde el *dominio y codominio de una relación* a *relaciones sobre un conjunto*. Estos apartados nos fueron muy útiles en el *Cuarto Capítulo* al hacer evidente que *las preferencias* sobre $\mathcal{X}$ son un tipo de *relaciones binarias*. De tal forma las preferencias sobre el conjunto de elección son una relación binaria, pues se establecen tomando de dos a dos los elementos de $\mathcal{X}$. Así estudiamos *la relación "tan o*

[1] De hecho como revisamos extensamente en este *Primer Capítulo* se pueden relacionar los elementos de un mismo conjunto.

más preferida que", $\succsim$. La relación $\succsim$ toma dos elementos cualesquiera **x**, **x'** de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ y los compara, por lo que **x** $\succsim$ **x'**, significa que **x** es tan o más preferida que **x'**. Haber desarrollado el tema de las *relaciones binarias sobre un conjunto* nos permitió, en el *Cuarto Capítulo* dejar en claro que $\succsim$ esta definida de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ a $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, esto es, la relación $\succsim$: $\boldsymbol{\mathcal{X}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Entonces según lo definido en el *Primer Capítulo* $\succsim$ es una relación sobre un conjunto por lo que convenimos en llamar a ($\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\succsim$), el conjunto de elección de k-mercancías bajo la relación de preferencia "tan o más preferido que". [2]

Otro tema revisado en el *Primer Capítulo* imprescindible para el *cuarto*, es el de las *propiedades que pueden poseer las relaciones sobre en conjunto*. En este apartado estudiamos detenidamente a cada una de estas propiedades: *reflexividad*, *no-reflexividad*, *arreflexividad*, *simetría*, *no-simetría*, *asimetría*, *antisimetría*, *transitividad*, *no-transitividad* e *intransitividad*. Además también nos ocupamos en el *Primer Capítulo* de temas tan sensibles para el estudio de *las preferencias* como son: *las relaciones de orden, preorden, orden total*, *orden parcial* y *orden estricto*. Y con vistas a lo que se iba a tratar en el *Cuarto Capítulo elaboramos y demostramos* en el *Primer Capítulo* el *Teorema IV*: *Sea (A, **R**) si la relación **R** es transitiva y lineal entonces **R** es reflexiva*. Así en el *Cuarto Capítulo*, se hace uso de *todo* este marco conceptual, cuando se exponen los primeros dos axiomas de las preferencias: el *Axioma I: Completes*: sea ($\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\succsim$), $\forall$**x**, **x'** $\in$ $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ se cumple **x** $\succsim$ **x'** o **x'** $\succsim$ **x**; y,

[2] Revisamos también en el *Cuarto Capítulo* que existen dos relaciones binarias de preferencia sobre el conjunto $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ que se derivan de la relación $\succsim$, estas son la relación de preferencia estricta y la relación de indiferencia.

el *Axioma II: Transitividad*: sea ($\mathcal{X}$, $\succsim$), $\forall$**x**, **x'**, **x''** $\in \mathcal{X}$ si **x** $\succsim$ **x'** $\wedge$ **x'** $\succsim$ **x''** entonces **x** $\succsim$ **x''**. De tal forma que usando los temas referidos del *Primer Capítulo* y el *Teorema IV* de este mismo capítulo, *propusimos y demostramos* en el *Cuarto Capítulo* el *Teorema II: Sea $\succsim$ una relación de preferencia sobre el conjunto de elección tal que la relación de preferencia es completa y transitiva.*[3] *Entonces la relación de preferencia es un preorden completo sobre $\mathcal{X}$.*

Dos temas del *Primer Capítulo* son las *relaciones de equivalencia* y las *clases de equivalencia* que también se vinculan con el *Cuarto Capítulo*. Como desarrollamos en el *Primer Capítulo* el concepto de relación de equivalencia se basa en el conocimiento del tema de las propiedades que pueden poseer las relaciones sobre un conjunto, ya que ***R*** es una relación de equivalencia sobre un conjunto $A \neq \phi \Leftrightarrow$ ***R*** es reflexiva, simétrica y transitiva. Por su parte la clase de equivalencia del elemento $x \in A$, se definió como el conjunto de todos los elementos de A equivalentes a x. Esto es $[x] = \{y \in R / y \sim x\}$.

Expusimos en estos dos apartados del *Primer Capítulo* la demostración de varios teoremas, uno de los cuales es el *Teorema I: Si dos clases de equivalencia contienen el mismo elemento entonces son la misma clase*; y otro particularmente importante es el *Teorema II: Sea ~ una relación de equivalencia sobre X. Entonces X/~ es una partición de X*. Este postulado lo usamos en el *Cuarto Capítulo* para proponer y demostrar el *Teorema V: Bajo preferencias completas, transitivas, continuas y con no-saciedad local, las relaciones de preferencia* $\{\prec, \sim, \succ\}$ *establecen una partición sobre $\mathcal{X}$.*

[3] Esto implica que la relación de preferencia cumple los Axiomas I y II de las preferencias sobre $\mathcal{X}$.

A diferencia del primero, el *Segundo Capítulo* se enfrasca en los conceptos teóricos primarios que nos conducen al conjunto de elección. Los *temas guía* de este capítulo son la *definición de mercancía*, el *conjunto de mercancías*, el *conjunto de números asociado a las cantidades de una mercancía*, el *número de mercancías* que el consumidor representativo conoce en el periodo **τ,** que nos permiten converger al concepto que describe al conjunto de todas las combinaciones de cantidades no negativas de las k-mercancías, es decir, al *conjunto de elección de k-mercancías del consumidor representativo*.

Con base en el apartado de *conjuntos* del *Primer Capítulo* nos aseguramos, en el *Segundo Capítulo,* de proponer una *definición formal de mercancía*, la relevancia de esta definición radica en que proporciona la propiedad necesaria para definir un conjunto, el conjunto de mercancías **M**. Nuestra definición dice lo siguiente: *Sea N el conjunto inicial de necesidades del consumidor. Un objeto i se entenderá como mercancía, si dado N, se cumple que: a) $\forall x_i \geq 0$ entonces $N(x_i) \leq N$; $\wedge$ b) $\forall x_i$, $\exists p_i$ tal que $p_i x_i \geq 0$ con $p_i \neq 0$. Donde x_i representa la cantidad x de la mercancía i; $N(x_i)$ es el conjunto de necesidades asociado a la cantidad i del objeto x, además donde p_i es el precio p asociado al objeto i.*

En el *Segundo Capítulo* una vez que construimos el *conjunto de mercancías* **M** como el conjunto de los objetos que cumplen la *definición de mercancía* propuesta, nos concentramos en el *conjunto de números que puede representar a las cantidades de una mercancía*. Con este objetivo en mente[4] y a través de un ejercicio reflexivo, dedujimos que dados los fines del que modela y el periodo de estudio el *conjunto de números que puede*

[4] Una vez que descartamos los números negativos para representar a las cantidades de una mercancía.

representar a las cantidades de una mercancía varía desde el conjunto de los *números enteros* al conjunto de los *números racionales*, hasta los *números irracionales* y, por tanto, concluimos que usar el conjunto de los *números reales no negativos* para representar las cantidades de una mercancía resulta útil para el que modela porque permite usar cualquier periodo de estudio τ.

Siguiendo los objetivos de esta Tesis, en el *Segundo Capítulo* incluimos los conceptos matemáticos de *grupo y campo*, para poder abordar seguido de estos la *definición axiomática de los números reales*. De tal forma, expusimos con detenimiento los *axiomas de adición, multiplicación, orden* y *del supremo* que posee el conjunto de los *números reales*. Además presentamos una serie de teoremas con sus respectivas demostraciones sobre los *racionales* e *irracionales*. Así con el *Teorema I* del *Primer Capítulo* el cual afirma: *Ningún racional tiene un cuadrado igual a 2*, mostramos como ya lo hacían los griegos la existencia de los números irracionales. Además, era de importancia que hiciéramos notar que los irracionales son cerrados bajo las operaciones de adición y multiplicación, como lo hicimos patente en el *Teorema II: Sean* $r \in \mathbb{Q}$ *con* $r \neq 0$ *y* x *irracional. Entonces* $r+x$ *y* rx *son irracionales.* Con esta simple estructura matemática *construimos y demostramos* uno de los primeros resultados propios de esta Tesis enunciado en el *Teorema III: Sea i una mercancía y* p_i *un racional entonces* $p_i x_i$ *es un real*.

También relacionado a *la estructura de los números reales* nos ocupamos en el *Segundo Capítulo* del *Axioma del supremo*, por su uso como material analítico básico para el tema de *convergencia de sucesiones* del *tercer capitulo*, así presentamos el *Teorema IV*:

Supongamos que S es un conjunto ordenado con la propiedad de mínima cota superior supongamos que $B \subset S$, $B \neq \phi$, B es acotado inferiormente. Sea L el conjunto de todas las cotas inferiores de B. Entonces $\alpha = \inf B$.

El *Teorema IV* del *Segundo Capítulo* fortalece la comprensión del *Axioma del supremo* y además es vínculo para otro interesante postulado que emplea el concepto de subcampo para relacionar al conjunto de los números racionales con el de los reales y, este es el *Teorema V: Existe un campo ordenado $\Re$ el cual tiene la propiedad de mínima cota superior, además $\Re$ contiene a los racionales $\mathfrak{Q}$ como subcampo*.

En la siguiente sección del *Segundo Capítulo* comenzamos el tema del *número de mercancías* que el consumidor representativo conoce en el periodo de tiempo τ, esto quiere decir que nos ocupamos de la *cardinalidad del conjunto* **M**. Utilizando de nueva cuenta un ejerció reflexivo concluimos que en un periodo de tiempo y espacio dados, el consumidor representativo puede elaborar un listado de todas las mercancías que conoce y, que por lo tanto, bajo estas condiciones, el número de mercancías que el consumidor representativo conoce es *finito*.

Por sí mismo el concepto *finito* nos conduce a un tema matemático muy interesante el de *equipotencia y finitud en conjuntos*. Explicamos en el *Segundo Capítulo* que para poder abordar este tema era preciso ocuparnos primero de un tipo especial de relaciones: las *funciones*. Ya que la *equipotencia* necesita del conocimiento del concepto de *biyección,* para llegar a éste sin huecos era necesario exponer las definiciones de *función, composición* *de funciones, imagen inversa, función inyectiva* y *función sobreyectiva*. Lo que lógicamente, nos condujo a presentar estos dos teoremas con sus demostraciones: *Teorema VII: Sean* $\boldsymbol{f}: A \to B \wedge \boldsymbol{g}: B \to C$ *funciones, entonces* $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ *es una función* $\wedge\ D_{\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}} = D\boldsymbol{f} \cap \boldsymbol{f}^{-1}(D_{\boldsymbol{g}})$.*Teorema VIII: Una función es invertible si sólo si es inyectiva.*

Así fue como el tema de *funciones*[5] incluido en el *Segundo Capítulo* nos sirvió como preámbulo para estudiar los c*onjuntos equipotentes* y entonces presentamos la siguiente definición: *Sean dos conjuntos A y B. A es equipotente a B si y solo si existe una función biyectiva* ***f*** *de A sobre B.* De donde, si ***f*** es una *biyección* entonces los conjuntos A y B tienen el mismo *número de elementos* o también se dice que A y B tienen la misma *cardinalidad*. En este contexto también presentamos una definición que en su primer inciso afirma lo siguiente: *Sea J el conjunto de todos los enteros positivos:* $J = \mathbb{Z}^+$. *Entonces para cualquier conjunto A decimos que A es finito si* $A \simeq J_n$ *para algún n. Esto es si hay una biyección entre A y Jn entonces A es finito.*

Con este marco matemático estuvimos en condiciones de proponer y demostrar un resultado importante propio de esta Tesis el *Teorema IX* del *Segundo Capítulo: Si* ***M*** *es el conjunto de mercancías,* $\mathbb{Z}^+$ *el conjunto de los enteros no negativos,* $J_k = \{1, 2, \ldots, k\} \subset \mathbb{Z}^+$ *y es* ***f*** *una función tal que* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{M} \to J_k$, *entonces* ***f*** *es una biyección.* Entonces con el *Teorema IX* demostramos que *el conjunto de mercancías* ***M*** *es finito.*

[5] Claro esta, sin olvidarnos de los temas de conjuntos y relaciones.

Al seguir adelante con el tema de la *equipotencia* del *Segundo Capítulo*, incluimos *cuatro teoremas importantes*,[6] cuyas demostraciones establecen el cimiento necesario para abordar estos dos, *Teorema XIV: El conjunto de los números racionales es contable. Teorema XV: Sea A el conjunto de todas las secuencias cuyos elementos son los dígitos 0 y 1. El conjunto A es no contable.* El primero demuestra que el conjunto de los números racionales contable, por tanto infinito. A diferencia del *Teorema XIV* el siguiente, trata sobre la cardinalidad de los reales, demostrando que los números reales son un conjunto infinito no contable. Entonces, por consecuencia de estos dos teoremas, el conjunto de los números irracionales es infinito no contable.

También es obvio que los *Teoremas XIV* y *XV*, al tratar sobre el conjunto de los números racionales y de los números reales, se vinculan a una sección anterior de este mismo capítulo, que aborda el tema del *conjunto de números que puede representar a las cantidades de una mercancía.* Pues como acordamos, el conjunto de los números reales no negativos es el más útil para representar a las cantidades de una mercancía.

Solo una vez que recorrimos todo este proceso de definiciones, teoremas y demostraciones de los dos primeros capítulos es que estuvimos en condiciones de afirmar que: *Si i es una mercancía, según la definición establecida en este capítulo, y si* ***M*** *es el conjunto de mercancías de cardinalidad k, donde x_i es la cantidad x del bien i donde $x \in \Re^{+}$*,

[6] *Teorema X:* Cada subconjunto infinito de un conjunto contable A es contable. *Teorema XI:* Sea {En}, n = {1, 2,…}, una secuencia de conjuntos contables y sea $S = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces S es contable. *Teorema XII:* Supongamos que A es a lo más contable y para cada $\alpha \in A$, B_α es a lo mas contable. Si $T = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$, entonces T es a lo mas contable. *Teorema XIII:* Sea A un conjunto contable y sea B_n el conjunto de todas las n-adas $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ donde $\alpha_k \in A$, con $k \in \{1, 2,\ldots, n\}$ y los elementos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ no necesitan ser distintos. Entonces B_n es contable.

entonces el conjunto de elección de k-mercancías $\mathcal{X}$ *es equivalente a* $\Re^{k+}$. Esta reflexión es la primera del *Tercer Capítulo* al que nombramos: El conjunto de elección.

Una segunda reflexión de este *Tercer Capítulo*, trata sobre *los elementos del conjunto de elección de k-mercancías*, estos elementos son llamados *cestas*. Cada cesta es una posible combinación de cantidades de todos y cada uno de las k-mercancías. Concluimos que el consumidor siempre tiene en cuenta a todas las k-mercancías al tiempo de pensar en una cesta. Como lo explicamos, el consumidor puede armar una cesta en la que no desee cantidad alguna de las k-mercancías, $x_i = 0,\ \forall\, i \leq k;$ y puede requerir cestas en las que solo desee cantidades positivas de un sola mercancía y cero de las demás k-1 mercancías $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ con $x_i \neq 0$ y $x_j = 0\ \ \forall\, j \neq i$ con $i, j \in \{1,2, \ldots , k\}$ y así ir construyendo las cestas hasta aquellas en las que requiera cantidades positivas de todas las k mercancías y, como sabemos, *las combinaciones son infinitas y no contables* pues nuestro consumidor puede elegir cualquier número real positivo para asociarlo a cada una de las k mercancías.

Ya que establecimos que el *conjunto de elección de k-mercancías* $\mathcal{X}$ *es equivalente a* $\Re^{k+}$, procedimos a *estudiar el conjunto* $\mathcal{X}$ *desde dos ramas distintas de la matemática*. En primer término, desde la perspectiva del *Álgebra Lineal* donde *propusimos y demostramos* que el conjunto de elección de k-mercancías no es un subespacio vectorial de $\Re^{\mathbf{k}}$. En segunda instancia, examinamos detenidamente propiedades que pertenecen al *Análisis Matemático* relacionadas al conjunto de elección $\mathcal{X}$, partiendo de su equivalencia con $\Re^{\mathbf{k+}}$, por lo que estudiamos a $\mathcal{X}$ como un espacio métrico.

El apartado nombrado el *espacio vectorial* $\Re^k$ del *tercer capitulo* exponemos la definición de espacio vectorial e incluimos, en el *Teorema I*, la demostración detallada de que $\mathbf{\Re^k}$ es un espacio vectorial. Rápidamente este tema nos condujo al de *subespacio vectorial* y fue fácil para nosotros proponer y demostrar otro resultado propio de esta Tesis, el *Teorema I,* que afirma lo siguiente: *El conjunto de elección* $\mathcal{X}$ *no es un subespacio vectorial de* $\Re^{k+}$. Así demostramos que el conjunto de elección no es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, por lo tanto $\mathcal{X}$ no es un subespacio vectorial.

La *sección B* del *Tercer Capítulo,* nombrada *Topología de* $\Re^k$ es extensa y enriquecedora, también es base para muchos de los argumentos que se usan en el *cuarto capitulo* al tratar los *Axiomas sobre las preferencias.* En el tema *Topología de* $\Re^k$ incluimos: *abiertos y cerrados en espacios métricos, conjuntos en espacios métricos y puntos límite, secuencias, conexidad* y por último *compactos en espacios métricos.*

Definimos *espacio métrico* como un conjunto **C** tal que para cada par de elementos *x*, *y* que le pertenezcan se le asocia una función real d(x, y) que cumple: $d(x, y)\geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ además de $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Entonces, (**C**, d) es nombrado espacio métrico y d(x, y) la función distancia o métrica.

Notamos que $\Re^k$ *es un espacio métrico*, pues dada una función distancia satisface la definición. Lo anterior nos condujo a una conclusión importante, por la correspondencia planteada entre el conjunto de elección $\mathcal{X}$ y $\Re^{k+}$ *las métricas* –es decir, las funciones distancia- *de* $\Re^{k}$ *son las métricas del conjunto de elección* $\mathcal{X}$.

En la sección de *abiertos y cerrados en* $\Re^{k}$ incluimos una amplia colección de definiciones que aplican para espacios métricos y por que por tanto son validas para $\Re^{k}$ y para el conjunto de elección de k-mercancías. Trabajamos mucho en parafrasear algunas de las definiciones en términos del conjunto de elección y sus elementos con el fin de hacer evidente el nexo entre el tema de los *abiertos y cerrados en* $\Re^{k}$ y $\mathcal{X}$.

Dentro de las definiciones importantes que estudiamos esta el concepto de *vecindad*. Así en el *Tercer Capítulo* quedo claro que si $\mathcal{X}$ es el conjunto de elección de k-mercancías, dada una canasta $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ existe una vecindad $V_\varepsilon(\mathbf{x})$ la cual encierra a todas las cestas $\mathbf{q} \in \mathcal{X}$ tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) < \varepsilon$ donde ε es el radio de $V_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Otra definición trascendente fue la de *punto límite* de un conjunto. Así expusimos que dado $E \subset \mathcal{X}$. Entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ es punto límite del conjunto de cestas E, si para cada vecindad $V_\varepsilon(\mathbf{x})$ se cumple que $\mathbf{q} \in V_\varepsilon(\mathbf{x})$ para una combinación de bienes $\mathbf{q}$ diferente de la combinación $\mathbf{x}$.

Una definición particularmente imprescindible es la de *conjunto cerrado*, así dentro del conjunto de elección $\mathcal{X}$ -por ser un espacio métrico- un subconjunto de cestas E se dice cerrado si E contiene a todos sus puntos límite. En otras palabras, usando la definición de *punto límite*, si para cada vecindad $V_\varepsilon(\mathbf{x})$ de la combinación de bienes $\mathbf{x}$, se cumple que la cesta **q** $\in V_\varepsilon(\mathbf{x})$ para una combinación de bienes **q** diferente de la combinación **x**. Entonces la cesta **x** pertenece a E.

La definición de *conjunto cerrado* se usa en el *Axioma de continuidad sobre la preferencias*, revisado en el *Cuarto Capítulo*, en este axioma se asume que el conjunto "tan más preferido que" y "el conjunto tan o menos preferido que" -subconjuntos del conjunto de elección $\mathcal{X}$- son cerrados.

Para poder ofrecer una demostración muy útil que relaciona el concepto de conjuntos cerrados con el de continuidad en las preferencias se brindaron las definiciones siguientes: Sean A tal que $A \subseteq \mathcal{X} \wedge \mathbf{a} \in A$, entonces la cesta **a** es *punto interior* del conjunto de canastas A si existe una vecindad $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ con centro en la cesta **a** y radio ε tal que esta vecindad esta enteramente contenida en A, $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subseteq A$. Sea $E \subset \mathcal{X}$, entonces E es un *conjunto de cestas abierto*, si todas las cestas de E son puntos interiores de E. Esto es si $\forall \mathbf{e} \in E \subset \mathcal{X}$, $\exists B_\varepsilon(\mathbf{e})$ tal que $B_\varepsilon(\mathbf{e}) \subseteq E$. Un *conjunto de cestas* es *cerrado* si su complemento es abierto; entonces si E es un subconjunto cerrado de cestas del conjunto $\mathcal{X}$ entonces el complemento de E, es decir $E^c = \mathcal{X} \setminus E$, que es el conjunto de elección menos las cestas que pertenecen a E, es abierto. Por tanto todas las cestas de $\mathcal{X} \setminus E$ son puntos interiores.

Con las *definiciones* del párrafo anterior y con el *Teorema III* del *Tercer Capítulo* el cual prueba que si **C** es un espacio métrico y U_α es abierto en **C**, para α en algún conjunto de índices A. Entonces $U = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ es abierto. Se demuestra que *la intersección de* *conjuntos cerrados es un conjunto cerrado*, argumento del *Teorema IV: Sea* **C** *un espacio métrico. Si* F_β *son conjuntos cerrados para b en algún conjunto de índices B. Entonces F =* $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ *es cerrado.*

Aseguramos que el contenido del *Teorema IV* del *Tercer Capítulo* es causa del *Axioma de continuidad de las preferencias sobre el conjunto de elección* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*,* que revisamos detenidamente en el *Cuarto Capítulo*. Ya que al suponer el *Axioma de continuidad de las preferencias* sobre el conjunto de elección que el conjunto "tan o menos preferido que" y "el tan o mas preferido que" son cerrados, *su intersección* es, por consecuencia del *Teorema IV* del *Primer Capítulo*, *un conjunto cerrado,* así se demostramos que el conjunto indiferente es un conjunto cerrado.

Como explicamos en el *Cuarto Capítulo* que el *conjunto indiferente* sea *cerrado* implica a su vez por la primera definición de conjunto cerrado, que el *conjunto indiferente contiene a todos sus puntos límite*. Ahora usando el concepto de *convergencia de una sucesión* expresado en el *Teorema XVII.iv* del *Tercer Capítulo* que dice: *Si E es un subconjunto del conjunto de elección* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ *y si la canasta* **m** *es punto límite de E, entonces existe una secuencia de canastas* $\{M_n\}$ *en el conjunto de canastas E tal que la cesta* **m** *es igual al límite de la secuencia de combinaciones de bienes* $\{M_n\}$*, esto es* $\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} M_n$.

Esto es, para el caso del *conjunto indiferente, toda sucesión de cestas convergentes enteramente contenidas en el conjunto indiferente posee un límite que pertenece al* *conjunto indiferente*, por que este *conjunto es cerrado*. Por tanto, el límite de una sucesión de cestas indiferentes entre sí, es una cesta indiferente.

El *Axioma de continuidad sobre las preferencias* examinado en el *Cuarto Capítulo* acarrea consigo el término intuitivo de "*cercanía*" que se vincula con los conceptos matemáticos de *conjunto cerrado* y *frontera e interior de un conjunto*, revisados en el *Tercer Capítulo*. Sabemos que preferencias continuas establecen que el conjunto $\succsim(\mathbf{x})$ sea cerrado, ahora un *conjunto es cerrado si contiene a su frontera*. Por lo tanto para toda cesta **x'** que pertenezca a la *frontera* del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$ por el *Axioma de continuidad* pasa que **x'** $\succsim$ **x.** Luego atendiendo a la definición de *punto frontera* sucede que: $\forall\varepsilon > 0 \wedge B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ existe **s** $\in B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ tal que $s\in[\succsim(x)]^c$, es decir que **x** $\succsim$ **s**. Lo que dice este argumento es que si **x'** es punto frontera del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$, no importa el radio de la vecindad siempre existirá en la vecindad una cesta **s** menos preferida que la cesta **x**. En el caso en que **x'** sea un *punto interior* del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$, **x'** $\succsim$ **x**, entonces $\exists\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(\mathbf{x'}, \varepsilon_1)$ esta enteramente contenida en $\succsim(\mathbf{x})$, pues ésta es la definición de punto interior, por lo tanto existe **t** $\in B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ tal que **t** $\succsim$ **x**. Intuitivamente la expresión anterior quiere decir que las cestas muy cercanas a **x'** también serán preferidas a **x**.

También en la *sección de abiertos y cerrados* del *Tercer Capítulo, elaboramos y demostramos* otro Teorema que esta estrechamente ligado al anterior. Como sabemos por lo desarrollado en esta Tesis, mientras que el *Axioma de continuidad de las preferencias* supone cerrados dos subconjuntos especiales de $\mathcal{X}$, el conjunto “tan o mas preferido que” y el “tan o menos preferido que”, nosotros hacemos evidente por medio del *Teorema VIII* del *Tercer Capítulo* que: *existe un conjunto B en el conjunto de elección* $\mathcal{X}$ *tal que B es cerrado.* La demostración se basa en probar que dada una bola cerrada enteramente contenida en $\mathcal{X}$ esta bola cerrada es un conjunto cerrado.

El *Teorema XV* de este *Tercer Capítulo* se relaciona también con el concepto de *conjunto cerrado*. Dicho Teorema se refiere a las propiedades que posee la cerradura de un conjunto, así por ser $\mathcal{X}$ un espacio métrico, relaciona a todo conjunto E de $\mathcal{X}$ un conjunto $\bar{E}$ cerrado con propiedades particulares. Específicamente el *Teorema XV* afirma que: *Si* $\boldsymbol{C}$ *es un espacio métrico y* $E \subset \boldsymbol{C}$, *entonces:* $\bar{E}$ *es cerrado,* $E = \bar{E}$ *si y sólo si E es cerrado y por último* $\bar{E} \subset F$ *para cada conjunto cerrado* $F \subset \boldsymbol{C}$ *tal que* $E \subset F$. Como hemos demostrado, en el *Teorema VIII* de este capítulo, en el conjunto de elección existen conjuntos cerrados, entonces por *definición de conjunto cerrado*, existen en $\mathcal{X}$ *conjuntos abiertos*. También demostramos que dado el *Axioma de continuidad sobre las preferencias, el conjunto de indiferencia es cerrado*, de donde el *conjunto de indiferencia coincide con su cerradura* y es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto de indiferencia. Dentro de este contexto los conjuntos *“mas preferido que”* y *“menos preferido que”* por *definición de conjunto cerrado y el Axioma de continuidad sobre las preferencias*, son en consecuencia *conjuntos abiertos* y, de acuerdo al *Teorema XV la cerradura* del conjunto *“mas preferido que”* es el conjunto *“tan o mas preferido que”* y la cerradura del conjunto *“menos preferido que”* es el conjunto *“tan o menos preferido que”*.

Conjunto denso y *punto límite* son dos conceptos revisados en el *Tercer Capítulo*, así sabemos que un *conjunto es denso* en un espacio métrico ***C***, *si cada punto de* ***C*** *es un punto límite de E, o un punto de E o ambos*. Por otro lado, p es *punto límite* de un conjunto E *si cada vecindad de p contiene a un punto* $q \neq p$ *tales que* $q \in E$. Estas dos definiciones nos indujeron a proponer y demostrar en el *Teorema IV* del *Cuarto Capítulo* que *si las preferencias sobre el conjunto de elección cumplen el Axioma de no saciedad local, entonces el conjunto* $\succ(x)$ *es denso en* $\mathcal{X}$. La prueba consistió en mostrar que cada cesta del conjunto de elección es un punto límite del conjunto "mas preferido que". Entonces probamos que para toda bola con centro en una cesta **x** que pertenezca a $\mathcal{X}$, entonces esa bola contiene puntos del conjunto $\succ(\mathbf{x})$. Por lo tanto, elegimos una cesta $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y un radio $\varepsilon>0$ arbitrarios y probamos que cada vecindad de **x** contiene una cesta $\mathbf{x'} \neq \mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x'} \in \succ(\mathbf{x})$, lo que se cumple precisamente por el argumento del Axioma de no saciedad local que afirma: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0$ existe $\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$.

En el *Tercer Capítulo* explicamos que no todos los subconjuntos cerrados del conjunto de elección $\mathcal{X}$ son *conjuntos perfectos*, pues los conjuntos cerrados pueden contener puntos que no sean puntos límite. El concepto de conjunto perfecto nos condujo en el *Cuarto Capítulo* a *proponer y demostrar* en el *Teorema VI* que el en conjunto de elección existen conjuntos perfectos. *Teorema VI: El conjunto de indiferencia de* ***x***, $\sim(\mathbf{x})$; *es un conjunto perfecto bajo los Axiomas de las preferencias del I al IV*. La idea de la demostración radica en que no hay zonas de indiferencia en el conjunto indiferente, demostramos en el *Cuarto Capítulo* que *el conjunto de indiferencia es cerrado* entonces en el *Teorema VI* además demostramos que todos los puntos del conjunto indiferente son puntos frontera y, por lo tanto, *el conjunto de indiferencia bajo preferencias que cumplan los Axiomas de completes, transitividad, continuidad y no saciedad local, es un conjunto perfecto.*

El concepto matemático de *conjunto convexo* es simple y significa que para cualquier par de puntos de un conjunto, si la recta que los une esta enteramente contenida en el conjunto, entonces éste es convexo. De forma sencilla utilizando que $\mathcal{X}$ es subconjunto del espacio vectorial $\Re^{\mathbf{k}}$ en el *Tercer Capítulo* desarrollamos otro de los resultados propios de esta Tesis, así *propusimos y demostramos* el *Teorema V* el cual afirma que: *El conjunto de elección* $\mathcal{X}$ *es convexo.*

En términos de la *Teoría del Consumidor*, el uso que se le da al concepto de *conjunto convexo* esta dirigido a los *Axiomas sobre preferencias*, esto lo explicamos detenidamente en el *Cuarto Capítulo* cuando estudiamos el *Axioma VI* que trata sobre la *convexidad de las preferencias*. La convexidad[7] es utilizada del modo siguiente: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$ $\wedge \forall \lambda \in [0, 1]$, si $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$ entonces $\lambda\mathbf{x'} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Analíticamente el *Axioma VI* sobre las preferencias en su *versión estricta* garantiza que *la forma del conjunto de indiferencia tenga una ligera curvatura opuesta al origen*.

[7] En el *Cuarto Capítulo* explicamos que la convexidad expresa el gusto de los consumidores por la variedad esto es una si la canasta **x'** es tanto o más preferida que la canasta **x** entonces una combinación entre estas dos es tanto o más preferida que la cesta **x**.

Con este *Axioma VI*, la pendiente a lo largo de la conjunto de indiferencia no incrementa al desplazar el análisis de una cesta indiferente a otra.

Entonces la *estricta convexidad en las preferencias* asegura que la *razón de cambio,* a la que está dispuesto a intercambiar el consumidor una unidad de la mercancía *i* por una de alguna de las otras *k-1* mercancías, *es constante o decreciente*, dejando fuera la posibilidad de que esta razón de cambio sea creciente.

Una conclusión que vertimos en el *cuarto capitulo* sobre este tema es que con *preferencias completas, transitivas, continuas, monótonamente fuertes y estrictamente convexas* sobre el conjunto de elección $\mathcal{X} = \Re^{k+}$ *la razón de cambio a lo largo del conjunto de indiferencia de la cesta* **x** *es la tasa marginal de sustitución a lo largo de la curva de indiferencia de la cesta* **x**.

También en esta sección de *conjuntos abiertos y cerrados en* $\Re^k$ del *Tercer Capítulo* incluimos dos *teoremas sobre vecindades. Teorema VI: Toda bola (vecindad) es convexa y el Teorema VII: Cada vecindad es un conjunto abierto.* El primero, para reforzar el concepto de conjunto convexo y, el segundo, por su importancia al ser usado en los *Teoremas XIV* y *XV* de este mismo capítulo. El *Teorema XIV* enuncia: *Sea* **C** *un espacio métrico. Si* $U_1, U_2, \ldots, U_k$ *son abiertos en* **C**, *entonces el conjunto* $U = \bigcap_{j=1}^{k} E_j$ *es abierto;* es decir, que la intersección finita de abiertos es un conjunto abierto. Por su parte el *Teorema XV* afirma que *Si* $U \subseteq \Re$ *un conjunto abierto, entonces existe una cantidad contable de intervalos abiertos* I_j *disjuntos dos a dos tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_j$.

Por último en esta sección de *conjuntos abiertos y cerrados en* $\mathfrak{R}^k$ agregamos dos teoremas sobre conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados, estos son el *Teorema IX:* $\mathfrak{R}$ *es abierto y cerrado,* y el *Teorema X:* $\mathfrak{R}^k$ *es abierto y cerrado*. Estos teoremas se vinculan con la sección de *conexidad* de este mismo *Tercer Capítulo*.

El *Tercer Capítulo* es el más extenso de esta Tesis por la necesidad de exponer en él conceptos, teoremas y demostraciones claves que están estrechamente vinculados al conjunto de elección. Dentro de esta lógica, otro tema importante lo incluimos en la sección de *conjuntos en espacios métricos y puntos límite*. Un primer postulado dentro de este apartado es el *Teorema XI: Sea el* ***C*** *espacio métrico y sea* $E \subset \boldsymbol{C}$. *Si p es un punto límite de un conjunto E entonces cada vecindad de p contiene una infinidad de puntos de E;* este Teorema junto con el *Teorema XII: Un conjunto finito de puntos no tiene puntos límite,* nos condujeron a *proponer y* por supuesto *demostrar* el *Teorema XIII* del *Tercer Capítulo* el cual afirma que: *El conjunto de elección* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ *tiene un número infinito de cestas.*

La importancia de los *Teoremas XI y XII* del *Tercer Capítulo* salta a la vista de nueva cuenta, ya que en el *Cuarto Capítulo* nos permitieron *proponer y demostrar* otro resultado propio de esta Tesis el *Teorema VII* que postula lo siguiente: *El conjunto de indiferencia de* **x** *no es un conjunto finito*. La conexión se halla en que según *hemos concluido*: bajo los Axiomas sobre las preferencias de completes, transitividad, continuidad y no saciedad local, para una $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$, el conjunto de indiferencia de la canasta **x** es un conjunto cerrado, por tanto $\sim(\mathbf{x})$ contiene sus puntos límite. Por el *Teorema XII* sabemos que un conjunto finito de puntos no tiene puntos límite y por el *Teorema XI* si la combinación de bienes **p** es punto límite del conjunto ~(**x**), como ~(**x**) es cerrado, entonces p $\in$ ~(**x**) y se cumple que V_ε(**p**) contiene una infinidad de combinaciones de bienes que pertenecen a ~(**x**).[8]

Ahora usando el concepto de *convergencia de una sucesión* expresado en el *Teorema XVII.iv* del *Tercer Capítulo* que dice: *Si E es un subconjunto del conjunto de elección* $\mathcal{X}$ *y si la canasta* ***m*** *es punto límite de E, entonces existe una secuencia de canastas* $\{M_n\}$ *en el conjunto de canastas E tal que la cesta* ***m*** *es igual al límite de la secuencia de combinaciones de bienes* $\{M_n\}$*, esto es* $\boldsymbol{m} = lim_{n\to\infty} M_n$.

Esto es, para el caso del *conjunto indiferente*, *toda sucesión de cestas convergentes enteramente contenidas en el conjunto indiferente posee un límite que pertenece al conjunto indiferente*, por que este *conjunto es cerrado*. Por tanto, el límite de una sucesión de cestas indiferentes entre sí, es una cesta indiferente.

Dentro del tema de *sucesiones* incluido en el *Tercer Capítulo* destaca el *Teorema XVI que condensa cuatro argumentos muy utilizados al tiempo emplear la convergencia de sucesiones,* que como vimos esta fuertemente vinculada al tema de *cerrados y abiertos en* $\mathfrak{R}^k$ y al *Axioma de continuidad sobre las preferencias.* Pues como afirma el *Teorema XVII*

[8] Demostraciones análogas se pueden realizar para los conjuntos “tan o más preferido que” y “tan o menos preferido que”.

parafraseado en *términos del conjunto de elección*, si $\{M_n\}$ es una secuencia de canastas contenida en el conjunto de elección $\mathcal{X}$: La sucesión $\{M_n\}$ converge a la cesta **m** $\in \mathcal{X}$ si y sólo si cada vecindad de la combinación de mercancías **m**, $V_\varepsilon(\mathbf{m})$ contiene todas las combinaciones de mercancías de la secuencia excepto un número finito de ellas. Si las canastas **m**, **m'** pertenecen a $\mathcal{X}$ y si la sucesión de canastas $\{M_n\}$ converge a la cesta **m** y también a la cesta **m**' entonces **m** y **m**' son la misma combinación de bienes. Si la sucesión de combinaciones de bienes $\{M_n\}$ converge, es decir si existe una canasta **m** en el conjunto de elección tal que **m** es límite de la sucesión $\{M_n\}$, entonces la sucesión de canastas $\{M_n\}$ es acotada. El que la sucesión de canastas sea acotada quiere decir que existe una $H > 0$ tal que las distancias de la cesta **m** a las cestas $\mathbf{m}_n$ para $n \in \{1, 2,\ldots\}$ son menores o iguales que H, concretamente $\{M_n\}$ es acotada si $\exists H > 0$ tal que $d(\mathbf{m}, \mathbf{m}_n) \leq H, \forall n \in \{1, 2,\ldots\}$. Si E es un subconjunto del conjunto de elección $\mathcal{X}$ y si la canasta **m** es punto límite de E, entonces existe una secuencia de canastas $\{M_n\}$ en el conjunto de canastas E tal que la cesta **m** es igual al límite de la secuencia de combinaciones de bienes $\{M_n\}$, esto es $\mathbf{m} = \mathit{lim}_{n\to\infty} M_n$.

En el *Tercer Capítulo* desarrollamos el tema que tarta la *conexidad* en espacios métricos, en una expresión simple un espacio métrico es *conexo* si podemos decir que ese espacio es de una sola pieza. La definición afirma que *un espacio métrico **C** es conexo si dados dos conjuntos A y B,* $A \cup B = \boldsymbol{C}$ *si y sólo si* $A' \cap B$ *ó* $A \cap B'$ *es no vacío.* Así en el

Tercer Capítulo incluimos las demostraciones de cuatro teoremas[9] sobre conexos, que abarcan del *Teorema XX al XXIII* y que nos permitieron *elaborar y demostrar* en el *Cuarto Capítulo* otro de los resultados propios de esta Tesis el *Teorema III: Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de todas las combinaciones de cantidades de bienes bajo los Axiomas de completes, transitividad y continuidad, entonces $\mathcal{X}$ es conexo.* En la demostración usamos el *Axioma de continuidad* sobre las preferencias, pues como ya demostramos dada una cesta $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ este Axioma y el *Teorema IV* del *Tercer Capítulo* implican que el conjunto de indiferencia es cerrado, luego su complemento los conjuntos $\succ(\mathbf{x})$ y $\prec(\mathbf{x})$ son abiertos. Por tanto para toda $\mathbf{x}$ en el conjunto de elección, pasa que $\mathcal{X}$ es la unión de los conjuntos $\sim(x)$, $\succ(\mathbf{x})$ y $\prec(\mathbf{x})$. Así concluimos que $\mathcal{X}$ es conexo ya que para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ se cumple que el conjunto de elección no es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos.

Entonces por la demostración del *Teorema III* del *Cuarto Capítulo* sabemos que $\mathcal{X}$ *es conexo* y por el *Teorema XXII* del *Tercer Capítulo* sabemos que *si X es conexo implica que* los únicos subconjuntos de $\mathcal{X}$ que son abiertos y cerrados son $\mathcal{X}$ y ϕ; también implica que $\mathcal{X}$ no puede ser expresado como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos; y además implica que no existe una función continua sobre $\mathcal{X}$ a un espacio discreto que contenga más de un punto. Bajo los supuestos del *Teorema III* del *Cuarto Capítulo* y por el *Teorema XXIII* del *Tercer Capítulo* se cumple que*: la imagen continua de $\mathcal{X}$ es conexa.*

[9] *Teorema XX:* La recta real es un espacio métrico conexo. *Teorema XXI:* Un espacio topológico **C** es conexo si y sólo si no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos. *Teorema XXII:* Sobre un espacio **C** son equivalentes las condiciones siguientes: **C** es conexo. Los únicos subconjuntos de **C** que son abiertos y cerrados son **C** y ϕ.**C** no puede ser expresado como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos. No existe una función continua sobre **C** a un espacio discreto que contiene más de un punto. *Teorema XXIII:* La imagen continua de un conexo es conexa.

El último tema del *tercer capitulo* es el que trata de *conjuntos compactos* en espacios métricos, lo incluimos como un apartado de carácter adicional en nuestro análisis del conjunto de elección ya que existen muchos interesantes resultados aplicables a $\mathcal{X}$ y también por lo sencillo de las pruebas de estos resultados. Comenzamos este apartado con la definición de *cubierta abierta* para poder ofrecer la definición de *conjunto compacto* y de inmediato aplicarlos a $\mathcal{X}$. Así una *cubierta abierta* de un conjunto de cestas K en el conjunto de elección $\mathcal{X}$ *es la colección* $\{G_\alpha\}$ *de subconjuntos abiertos de cestas en* $\mathcal{X}$ *tales que el conjunto K esta contenido en la unión de los conjuntos de cestas abiertos* G_α*, para* α *en un conjunto de índices,* $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$. Un *subconjunto de canastas K* del conjunto de elección $\mathcal{X}$*, es compacto si cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita que contiene a K. Esto es si* $\{G_\alpha\}$ *es una cubierta de K entonces existen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tales que* $K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$.

Las demostraciones de los *Teoremas XXIV-XXVII* del *Tercer Capítulo*[10] prueban, respectivamente, que para el conjunto de elección $\mathcal{X}$ se cumple:

- *Si C es un subconjunto finito combinaciones de bienes de* $\mathcal{X}$ *entonces el conjunto de cestas C es compacto.* Por lo que cada cubierta abierta de C (la colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de cestas en $\mathcal{X}$ tales que el conjunto C esta contenido en la

[10] *Teorema XXIV:* Sea **C** un espacio métrico entonces todo conjunto finito en **C** es compacto. *Teorema XXV:* Subconjuntos compactos en espacios métricos son cerrados. *Teorema XXVI:* Subconjuntos cerrados de conjuntos compactos en espacios métricos son compactos. *Teorema XXVII:* Si F es cerrado y K compacto entonces $F \cap K$ es compacto.

unión de los conjuntos de cestas abiertos G_α, para α en un conjunto de índices, contiene una subcubierta finita que contiene a C.

- *Si $E \subset \mathcal{X}$, y E es un conjunto de canastas compacto en $\mathcal{X}$ entonces E es un subconjunto de combinaciones de bienes cerrado.*

- *Sea $C \subset \mathcal{X}$, tal que C es compacto. Si B es un subconjunto de cestas cerrado del conjunto de elección $\mathcal{X}$, tal que $B \subset C$, entonces el conjunto de combinaciones de bienes B es compacto.* Esto es para toda cubierta abierta de B existe una subcubierta finita que contiene a B.

- *Sean F y K contenidos en el conjunto de elección $\mathcal{X}$, tales que el conjunto de cestas F es cerrado y el conjunto de cestas K es compacto entonces el conjunto de combinaciones de bienes $F \cap K$ es compacto.* Para $\{G_\alpha\}$ cubierta de K entonces existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tales que $F \cap K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$.

En el *Cuarto Capítulo empleamos implícita y explícitamente los conceptos, teoremas, demostraciones y conclusiones revisados a lo largo de esta Tesis* aplicando estas herramientas al estudio de las preferencias sobre el conjunto de elección.

Consideramos que *incluir* el tema de *las preferencias* es una *excelente forma para probar el vínculo existente entre los conceptos matemáticos y teóricos que rodean al conjunto de elección, comprobando así la hipótesis de esta Tesis.*

El *Cuarto Capítulo* lo comenzamos examinando el concepto de *preferencia* tomado de Villar y Geoffrey.[11] Concluimos que las preferencias son relaciones *sobre un conjunto,*[12] tema que se discutió en el *Primer Capítulo*. La *relación* $\succsim$ *sobre el conjunto de elección queda denotada por* $\succsim : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Dos relaciones binarias de preferencia sobre el conjunto $\mathcal{X}$ se desprenden de $\succsim$, una es la *relación de preferencia estricta* que se define como: *sea* $\mathcal{X}$ *el conjunto de elección y sea* $\succ$ *una relación binaria de preferencia tal que para todos* $\mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ *si y solo si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}$. La segunda relación es la *relación de indiferencia*: *Sea* $\mathcal{X}$ *el conjunto de elección y sea* $\sim$ *una relación de preferencia sobre* $\mathcal{X}$ *tal que para todos* $\mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{x'}$ *si y solo si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$.

Con base en estas definiciones *formulamos y demostramos* otro de los resultados propios de esta Tesis, el *Teorema I* del *Cuarto Capítulo* el cual enuncia lo siguiente: *Sea* $(\mathcal{X}, \succ)$ *entonces las siguientes definiciones son equivalentes:* $[\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ *si y solo si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}] \wedge [\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ *si y solo si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}]$. Comenzamos la demostración

11 **Villar, Antonio.** *Lecciones de Microeconomía,* España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulo III. **Geoffrey A Jehle y Philip Reny.** *Advanced Microeconomic Theory*, Estados Unidos, Editorial, Addison Wesley. Capítulo 1.

12 Este vinculo entre las preferencias y las relaciones sobre un conjunto ya lo hemos considerado en estas conclusiones.

suponiendo que $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$, por la definición de preferencia estricta esto ocurre solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'}$ $\wedge$ $\mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}$. Por la definición de indiferencia es equivalente a $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge [\mathbf{x} \not\succsim \mathbf{x'} \vee \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}]$. Lo anterior sucede si y solo si: $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}$. Si y solo si por la definición de preferencia estricta $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$**.**

En el *Cuarto Capítulo* abordamos detenidamente uno a uno los seis *Axiomas de las preferencias sobre* $\mathcal{X}$, mismos que dieron nombre a los siguientes *apartados del Cuarto Capítulo*: *completes, transitividad, continuidad, no saciedad local, monotonicidad estricta* y *convexidad.* Los Axiomas actúan como un marco analítico clave para el desarrollo instrumental del modelo y son un referente de la forma en que el consumidor representativo estructura su elección sobre $\mathcal{X}$, donde para elegir necesita comparar, jerarquizar y ser consecuente con ese orden para al fin poder establecer que cestas prefiere a otras.

Por otra parte, a lo largo de este *Capítulo de Conclusiones hemos recalcado en detalle los nexos entre los tres primeros capítulos y los Axiomas sobre las preferencias,* por esta razón enseguida solo realizaremos una semblanza de los Axiomas incluyendo otros resultados que aún no hemos presentado en estas conclusiones.

El primer *Axioma* es el de *Completes*: *Sea* $(\mathcal{X}, \succsim)$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in \mathcal{X}$ *se cumple* $\boldsymbol{x} \succsim \boldsymbol{x'}$ *o* $\boldsymbol{x'} \succsim \boldsymbol{x}$, así la *completes* sobre $(\mathcal{X}, \succsim)$ implica que todos los elementos del conjunto de elección son comparables, esto es que sin importar que par de cestas se elijan siempre se sabrá cual cesta es tan o más preferida que la otra para nuestro consumidor. El *Axioma de Transitividad* afirma que: *Sea* $(\mathcal{X}, \succsim)$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathcal{X}$ *si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}''$ *entonces* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}''$. De esta forma explicamos que la transitividad implica que si al proceso de comparar se anexa una cesta más, el consumidor podrá establecer la jerarquía de esta cesta en relación a las otras dos. Si el consumidor es consecuente entonces sus preferencias sobre el conjunto de elección serán transitivas. Con estos los *Axiomas I y II* revisados fue que *elaboramos y demostramos el Teorema II* del *Cuarto Capítulo* que afirma: *Sea* $(X, \succsim)$ *bajo los Axiomas I y II entonces* $\succsim$ *constituye un preorden completo sobre el conjunto de elección.*

Los vínculos del *Axioma de Continuidad* que afirma: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, *los conjuntos* $\succsim(\mathbf{x})$ *y* $\precsim(\mathbf{x})$ *son cerrados*, los hemos estudiado ya ampliamente en estas conclusiones, así el objetivo teórico de este *Axioma* es asegurar que el *conjunto* $\sim(\mathbf{x})$ *sea cerrado*. Si el conjunto indiferente fuera *abierto* entonces para todo punto en el conjunto existiría una bola con centro en esa canasta y radio positivo enteramente contenida en el conjunto indiferente, lo que permitiría en principio que existieran zonas de indiferencia con respecto a **x**. Concluimos también que *aún si las preferencias son continuas*, es decir aún si el conjunto indiferente es cerrado, este conjunto puede tener *puntos interiores*, es decir la *continuidad en las preferencias no es suficiente para garantizar que no existan zonas de indiferencia*.

El *Axioma de Continuidad* sobre las preferencias tiene por consecuencia que: $\forall\varepsilon > 0 \wedge B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ *existe* $\mathbf{s} \in B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ *tal que* $s \in [\succsim(x)]^c$, *es decir que* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{s}$. En el caso en que **x'** sea un *punto interior* del conjunto $\succsim(\mathbf{x})$, *existe* $\mathbf{t} \in B(\mathbf{x'}, \varepsilon)$ *tal que* $\mathbf{t} \succsim \mathbf{x}$. Es decir, que las cestas muy cercanas a **x'** también serán preferidas a **x**. El Axioma de continuidad también implica que *para una sucesión convergente de cestas de consumo contenida en* $\sim(\mathbf{x})$ *el límite de esta sucesión es una cesta contenida en el mismo conjunto.*

Con el *Axioma de continuidad* del *Cuarto Capítulo* y el *Teorema IV* del *Tercer Capítulo propusimos y demostramos* el *Teorema III* del *Cuarto Capítulo* que dice: *Sea* $(\mathcal{X}, \succsim)$ *Axiomas I - III sobre las preferencias, entonces* $\mathcal{X}$ *es conexo.*

El *Axioma de no saciedad local* afirma que: $\forall\mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall\varepsilon > 0$ *existe* $\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ *tal que* $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$. Este *Axioma* deja fuera absolutamente la posibilidad de que existan zonas de indiferencia ya que establece que para toda cesta **x** en $\mathcal{X}$ y para todo radio ε, existe siempre una cesta estrictamente mas preferida a **x** que pertenece a la bola con centro en **x** y radio ε.

Como consecuencia del *Axioma de no saciedad local* y de dos conceptos del *Tercer Capítulo*: *conjunto denso* y *punto límite*, *propusimos y demostramos* en el *Teorema IV* del *Cuarto Capítulo* otro de los resultados propios de esta Tesis: *el conjunto "mas preferido que" es denso en* $\mathcal{X}$.

Otra conclusión que obtuvimos como consecuencia del *Axioma de no saciedad local* es que *los puntos del conjunto indiferente son puntos limite del conjunto* $\succ(\mathbf{x})$. Ya que según la *definición de punto limite:* $\mathbf{x}$ *es punto límite de* $\succ(\mathbf{x})$ *si* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ *tal que* $\mathbf{x}' \in B°(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \succ(\mathbf{x})$.

Además como ya explicamos, el conjunto indiferente es cerrado por consecuencia del Axioma de *continuidad sobre las preferencias* y por el *Teorema III* del *Tercer Capítulo,* luego como el conjunto indiferente no posee puntos interiores por *la no saciedad local* entonces *todos los puntos del conjunto indiferente son puntos frontera*. Esto en términos de notación es: $\mathbf{x}' \in \sim(\mathbf{x})$ *si y solo si* $\mathbf{x}' \in fr[\sim(\mathbf{x})]$. Por lo tanto, *el conjunto indiferente es una curva en el conjunto de elección.*

Un resultado relacionado con los *Axiomas de completes, transitividad, continuidad y no saciedad local,* es el que plasmamos al *proponer y demostrar* el *Teorema V: Bajo los Axiomas de las preferencias I al VI, las relaciones de preferencia* $\{\prec, \sim, \succ\}$ *establecen una partición sobre* $\mathcal{X}$. Entonces probamos que las relaciones $\{\prec, \sim, \succ\}$ dividen a $\mathcal{X}$ en tres subconjuntos disjuntos entre sí cuya unión es el conjunto de elección.[13]

[13] En el *Cuarto Capítulo* aclaramos que $\{\prec, \sim, \succ\}$ no es la única partición generada por las relaciones de preferencia sobre el conjunto de elección pues también esta la formada por $\{\succsim, \prec\}$ que dividen al conjunto de elección $\mathcal{X}$ en $\succsim(\mathbf{x})$, y en su complemento $\prec(\mathbf{x})$, y por esa razón $\succsim(\mathbf{x})\cap\prec(\mathbf{x}) = \phi \ \wedge\ \succsim(\mathbf{x})\cup\prec(\mathbf{x}) = \mathcal{X}$.

El *Teorema VI* del *Cuarto Capítulo* es también fruto de esta Tesis pues con los elementos topológicos revisados en el *Tercer Capítulo* aplicados al conjunto de elección bajo unas preferencias que cumplan los *Axiomas de completes, transitividad, continuidad y no saciedad local,* nosotros *propusimos y demostramos,* en el *Teorema VI,* que *el conjunto de indiferencia de la cesta **x** es un conjunto perfecto.*

El *Teorema VII* del *Cuarto Capítulo* lo *formulamos y probamos* para esta Tesis. La idea de este Teorema se basa en que, dada una cesta cualquiera **x** que pertenece a $\mathcal{X}$, entonces ~(**x**) es un conjunto infinito de cestas. El *Teorema VII* afirma que: *Sea* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, *con preferencias que cumplen los Axiomas I-IV. Entonces el conjunto de indiferencia de la cesta **x**, esto es ~(**x**), no es un conjunto finito.*

El *Axioma de monotonicidad estricta*, fue el quinto revisado en el *Cuarto Capítulo* y este Axioma afirma que: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X}$, *si* $\mathbf{x'} \geq \mathbf{x}$ *entonces* $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$. *Mientras que si* $\mathbf{x'} \gg \mathbf{x}$ *entonces* $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$. Es decir, que para todo par de canastas del conjunto de elección **x** y **x'**, si **x'** tiene en alguna (o algunas) de las k-mercancías una cantidad mayor a la que tiene la canasta **x** entonces **x'** será *tanto o más preferida* que la canasta **x**. Pero si la canasta **x'** tiene en todas y cada una de las k-mercancías cantidades mayores que las que tiene respectivamente en cada una de las k-mercancías la cesta **x,** entonces la cesta **x'** es *estrictamente mas preferida* que la cesta **x**.

Una conclusión importante relacionada con el *Axioma de monotonicidad estricta*, es que hasta este Axioma, el consumidor podría haber preferido cestas que tuvieran menos de alguna e incluso de todas las k-mercancías sin romper con la estructura axiomática que se había planteado. Con el *Axioma de monotonicidad estricta* queda fuera la posibilidad de que las curvas de indiferencia con respecto a una cesta dada **x**, esto es el conjunto ~(**x**), tenga tramos que suban formando montañas. *La monotonicidad estricta asegura que el conjunto "mas preferido que" esta por arriba del conjunto "menos preferido que".*

Incluimos en este apartado la *demostración* del *Teorema VIII*, que afirma: *Monotonicidad estricta implica no saciedad local.* La demostración la realizamos proponiendo una $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y una $\varepsilon > 0$ arbitrarias, para que al utilizar el *Axioma de monotonicidad estricta* la existiera una cesta $\mathbf{x''} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$, tal que $\mathbf{x''} \gg \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x''} \succ \mathbf{x}$. Por lo que esta afirmación vale para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y para toda $\varepsilon > 0$, lo que implica que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0$ existe $\mathbf{x''} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{x''} \succ \mathbf{x}$, donde este argumento es justo el *Axioma de no saciedad local*.

El último tema del *Cuarto Capítulo* es el *Axioma de convexidad*, en sus dos versiones *convexidad*: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \forall \lambda \in [0, 1]$, *si* $\mathbf{x'} \succsim \mathbf{x}$ *entonces* $\lambda\mathbf{x'} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \in \mathcal{X}$; y *convexidad estricta*: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x'} \in \mathcal{X} \wedge \forall \lambda \in (0, 1)$, *si* $\mathbf{x'} \succ \mathbf{x}$ *entonces* $\lambda\mathbf{x'} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succ \mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Este Axioma[14] es de carácter analítico pues como explicamos al tratar el tema de conjuntos convexos en estas conclusiones, el Axioma de convexidad estricta asegura que la pendiente de la curva de indiferencia sea no positiva, garantiza que *la forma del conjunto de indiferencia tenga una ligera curvatura opuesta al origen*. Asegura que la *razón de cambio*, a la que está dispuesto a intercambiar el consumidor una unidad de la mercancía *i* por una de alguna de las otras *k-1* mercancías, *es constante o decreciente*, dejando fuera la posibilidad de que esta razón de cambio sea creciente.

Por lo tanto, con *preferencias completas, transitivas, continuas, monótonamente fuertes y estrictamente convexas* sobre $\mathcal{X}$ *la razón de cambio a lo largo del conjunto de indiferencia de la cesta* ***x*** *es la tasa marginal de sustitución a lo largo de la curva de indiferencia de la cesta* ***x***.

Con estos resultados concluimos esta Tesis dedicada *al conjunto de elección de k-mercancías del consumidor representativo, para un periodo de tiempo y espacio dados. Esta Tesis tuvo como objetivo* en todo momento *hacer patente el fuerte nexo que existe entre la formalidad matemática y la intuición económica que rodean al conjunto de elección, exhibiendo la importancia de este nexo como base para proponer y demostrar los diez teoremas presentados en la hipótesis de esta Tesis.*

[14] Una interpretación del Axioma de convexidad, es que éste expresa el gusto de los consumidores por la variedad. Si la canasta **x’** es tanto o más preferida que la canasta **x** entonces una combinación entre estas dos es tanto o más preferida que la cesta **x**.

LISTADO DE TEOREMAS

PRIMER CAPÍTULO

CONJUNTOS Y RELACIONES BINARIAS.

I. Si dos clases de equivalencia contienen el mismo elemento entonces son la misma clase.

II. Sea ~ una relación de equivalencia sobre X. Entonces X/~ es una partición de X.

III. Si $\sim$ es una relación de equivalencia definida sobre $A \neq \phi$, entonces existe un subconjunto $I \subset A$, tal que para cualquier $a \in I$ existe $[a] \subset A$, tal que se cumple:

i. $a \in I \Rightarrow [a] \neq \phi$.

ii. $a \sim a' \Leftrightarrow$ pertenecen a la misma $[a]$.

iii. $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$.

iv. $a \neq b \Rightarrow [a] \cap [b] = \phi$.

v. $\forall x \in A, \exists a \in I$ tal que $x \in [a]$.

IV. Sea (A, ***R***) si la relación ***R*** es transitiva y lineal entonces ***R*** es reflexiva.

SEGUNDO CAPÍTULO

EL CONJUNTO DE MERCANCÍAS.

I. Ningún racional tiene un cuadrado igual a 2.

II. Sean $r \in \mathfrak{Q}$ con $r \neq 0$ y x irracional. Entonces r+x y rx son irracionales.

III. Sea *i* una mercancía y p_i un racional entonces $p_i x_i$ es un real.

IV. Supongamos que S es un conjunto ordenado con la propiedad de mínima cota superior supongamos que $B \subset S$, $B \neq \phi$, B es acotado inferiormente. Sea L el conjunto de todas las cotas inferiores de B. Entonces $\alpha = \inf B$.

V. Existe un campo ordenado $\mathfrak{R}$ el cual tiene la propiedad de mínima cota superior, además $\mathfrak{R}$ contiene a los racionales $\mathfrak{Q}$ como subcampo.

VI. Si $x, y \in \mathfrak{R}$, $x > 0$, entonces existe un entero positivo n tal que: $nx > y$. Lo anterior recibe el nombre de propiedad arquimediana. Si $x, y \in \mathfrak{R}$ con $x < y$

entonces $\exists p \in \mathbb{Q}$ tal que: $x < p < y$. Esta propiedad se nombra densidad de $\mathbb{Q}$ en $\Re$.

VII. Sean $\boldsymbol{f}: A \rightarrow B \wedge \boldsymbol{g}: B \rightarrow C$ funciones, entonces $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es una función $\wedge\ D_{\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}} = D\,\boldsymbol{f} \cap \boldsymbol{f}^{-1}(D_{\boldsymbol{g}})$.

VIII. Una función es invertible si sólo si es inyectiva.

IX. Si **M** es el conjunto de mercancías, $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros no negativos, $J_k = \{1, 2, \ldots, k\} \subset \mathbb{Z}^+$ y es $\boldsymbol{f}$ una función tal que $\boldsymbol{f}: \mathbf{M} \rightarrow J_k$, entonces $\boldsymbol{f}$ es una biyección.

X. Cada subconjunto infinito de un conjunto contable A es contable.

XI. Sea $\{En\}$, $n = \{1, 2, \ldots\}$, una secuencia de conjuntos contables y sea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces S es contable.

XII. Supongamos que A es a lo más contable y para cada $\alpha \in A$, B_α es a lo mas contable. Si $T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, entonces T es a lo mas contable.

XIII. Sea A un conjunto contable y sea B_n el conjunto de todas las n-adas $(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ donde $\alpha_k \in A$, con $k \in \{1, 2,\ldots, n\}$ y los elementos $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ no necesitan ser distintos. Entonces B_n es contable.

XIV. El conjunto de los números racionales es contable.

XV. Sea A el conjunto de todas las secuencias cuyos elementos son los dígitos 0 y 1. El conjunto A es no contable.

XVI. La equipotencia es una relación de equivalencia.

XVII. Sea $\boldsymbol{f}$: $X \rightarrow Y$ una función donde Y es numerable. Supongamos que $\boldsymbol{f}^{-1}$ es numerable para cada $y \in Y$. Entonces X es numerable.

TERCER CAPÍTULO

EL CONJUNTO DE ELECCIÓN.

I. $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ es un espacio vectorial.

II. El conjunto de elección $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ no es un subespacio vectorial de $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$.

III. Sea **C** un espacio métrico. Si U_α es un conjunto abierto, para α en algún conjunto de índices A (probablemente no contable). Entonces $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ es abierto.

IV. Sea **C** un espacio métrico. Si F_β son conjuntos cerrados para β en algún conjunto de índices B. Entonces $F = \bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ es cerrado.

V. El conjunto de elección $\mathcal{X}$ es convexo.

VI. Toda bola (vecindad) es convexa.

VII. Cada vecindad es un conjunto abierto.

VIII. Existe un conjunto B en el conjunto de elección $\mathcal{X}$ tal que B es cerrado.

IX. $\mathfrak{R}$ es abierto y cerrado.

X. $\mathfrak{R}^{\mathbf{k}}$ es abierto y cerrado

XI. Sea el **C** espacio métrico y sea $E \subset \mathbf{C}$. Si p es un punto límite de un conjunto E entonces cada vecindad de p contiene una infinidad de puntos de E.

XII. Un conjunto finito de puntos no tiene puntos límite.

XIII. El conjunto de elección $\mathcal{X}$ tiene un número infinito de cestas.

XIV. Sea **C** un espacio métrico. Si $U_1, U_2, \ldots, U_k$ son abiertos en **C**, entonces el conjunto $U = \bigcap_{j=1}^{k} E_j$ es abierto.

XV. Sea $U \subseteq \mathfrak{R}$ un conjunto abierto, entonces existe una cantidad contable de intervalos abiertos I_j disjuntos dos a dos tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_j$.

XVI. Si **C** es un espacio métrico y $E \subset$ **C**, entonces:

i. $\bar{E}$ es cerrado.

ii. $E = \bar{E}$ si y sólo si E es cerrado.

iii. $\bar{E} \subset F$ para cada conjunto cerrado $F \subset$ **C** tal que $E \subset F$.

Entonces a $\bar{E}$ se le conoce como la cerradura de E y es en conjunto cerrado más pequeño que contiene a E.

XVII. Sea $\{P_n\}$ en un espacio métrico **C**.

i. $\{P_n\}$ converge a $p \in$ **C,** si y sólo si cada vecindad de p contiene todos los términos de la secuencia excepto un número finito de ellos.

ii. Si $p \in$ **C** y $p' \in$ **C** y si $\{P_n\}$ converge a p y a p', entonces p = p'.

iii. Si $\{P_n\}$ converge, entonces es acotada.

iv. Si $E \subset$ **C** y si p es punto límite de E, entonces existe una secuencia $\{P_n\}$ en E tal que $p = lim_{n\to\infty} P_n$.

XVIII. Supongamos que $\mathbf{x}_n \in \Re^{\mathbf{k}}$, con $n \in \{1, 2,\ldots\}$ donde $\mathbf{x}_n = (\alpha_{1n},\ldots, \alpha_{kn})$. Entonces $\{G_n\}$ converge a $\mathbf{x} = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \alpha_{jn} = \alpha_j$ con $j \in \{1,\ldots, k\}$.

XIX. Supongamos que $\{S_n\}$ es monótona, entonces $\{S_n\}$ converge si y sólo si es acotada.

XX. La recta real es un espacio métrico conexo.

XXI. Un espacio topológico **C** es conexo si y sólo si no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos.

XXII. Sobre un espacio **C** son equivalentes las condiciones siguientes:

i. **C** es conexo.

ii. Los únicos subconjuntos de **C** que son abiertos y cerrados son **C** y ϕ.

iii. **C** no puede ser expresado como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos.

iv. No existe una función continua sobre **C** a un espacio discreto que contiene más de un punto.

XXIII. La imagen continua de un conexo es conexa.

XXIV. Sea **C** un espacio métrico entonces todo conjunto finito en **C** es compacto.

XXV. Subconjuntos compactos en espacios métricos son cerrados.

XXVI. Subconjuntos cerrados de conjuntos compactos en espacios métricos son compactos.

XXVII. Si F es cerrado y K compacto entonces $F \cap K$ es compacto.

CUARTO CAPÍTULO

LAS PREFERENCIAS SOBRE EL CONJUNTO DE ELECCIÓN.

I. Sea $(\mathfrak{X}, \succ)$ entonces los siguientes definiciones son equivalentes

i) $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \not\succsim \mathbf{x}$.

ii) $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$ si y solo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x'} \wedge \mathbf{x'} \nsim \mathbf{x}$.

II. Sea una relación de preferencia sobre el conjunto de elección tal que la relación de preferencia es completa y transitiva. Entonces $\mathcal{X}$ bajo la relación de preferencia es un preorden completo.

III. Sea $\mathcal{X}$ bajo los Axiomas de completes, transitividad y continuidad, entonces $\mathcal{X}$ es conexo.

IV. Sea $(\mathcal{X}, \succsim)$ bajo el axioma de no saciedad local. Entonces el conjunto "mas preferido que" es denso en $\mathcal{X}$.

V. Las relaciones de preferencia $\{\prec, \sim, \succ\}$ establecen una partición sobre $\mathcal{X}$.

VI. El conjunto de indiferencia es un conjunto perfecto bajo los Axiomas I-IV.

VII. El conjunto de indiferencia de **x**, no es un conjunto finito.

VIII. Monotonicidad estricta implica no saciedad local.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

1. **AMOR MONTAÑO, JOSÉ ALFREDO.** *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*, México, Facultad de Ciencias de la UNAM, primera edición, 2005, Introducción y capítulo I y pp. 61-64.

2. **BARTLE, ROBERT G. Y DONALD R SHERBERT.** *Introduction to Real Analysis*, Estados Unidos, John Wiley & Sons, Inc., segunda edición, 1992, capítulos I-V, X.

3. **BARTLE, ROBERT G.** *The elements of integration and Lebesgue Measure*, Estados Unidos, John Wiley & Sons, Inc., primera edición, 1995, capítulos III y XV.

4. **COHN, FRS.** *Algebra volume I*, Gran Bretaña, Editorial John Wiley & Sons, 1989, pp. 1-21.

5. **DONALD, J. LEWIS.** *Introducción al Álgebra*, México, Editorial Harpier & rowpublishers, 1970, pp. 40-65.

6. **GEOFFREY A JEHLE Y PHILIP RENY.** *Advanced Microeconomic Theory*, Estados Unidos, Editorial, Addison Wesley. Capitulo 1.

7. **HAASER, NORMAN; LA SALLE, JOSEPH & SULLIVAN, JOSEPH.** *Análisis Matemático, Curso de Introducción*,Vol 1, Mexico, 2003, capítulos I-III.

8. **HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, FERNANDO.** *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*, Aportaciones Matemáticas número 13, México, Sociedad Matemática Mexicana, UNAM-CONACYT, segunda edición, 2003, capítulos I-IV, VII.

9. **J. DE BURGOS, ROMAN.** *Curso de Álgebra y Geometría,* España, Editorial Alambra, 1980, páginas 24-54.

10. **KOLMOGOROV, A. N. Y S. V. FOMIN.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional,* URRS, Editorial Mir, 1975, segunda edición, capítulos I-III.

11. **LELONG-FERRAND, JACQUELINE Y ARNAUDIES, JEAN MARIE.** *Curso de Mátemáticas Tomo I. Álgebra,* España, Editorial Reverté,1979, capítulo I.

12. **Lomelí, Hector y Beatríz Rumbos.** *Métodos Dinámicos en Economía. Otra Búsqueda del Tiempo Perdido,* México, Thomson, primera edición, 2003, capítulos I, IX-X.

13. **Mas-Colell, Andreu; Winston, Michael D. & Green, Jerry R.** *Microeconomic Theory,* Estados Unidos, Oxford University Press, 1995, capítulos I y II.

14. **Rojo, Armando O.** *Álgebra I,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1987, capítulos II y III.

15. **Rojo, Armando O.** *Álgebra II,* Argentina, Editorial Librería el Ateneo, 1991, capítulos I, II y X.

16. **Rudin, Walter.** *Principios de Análisis Matemático,* México, Mc Graw Hill, tercera edición, 1980, capítulos I-IV.

17. **Rudin, Walter.** *Real Analysis,* Estados Unidos, Mcmillan, segunda edición, 1968, capítulos: set theory, part one sección I, part tow secciones VI-VIII.

18. **Suppes, Patrick.** *Introducción a la lógica simbólica,* México, Compañía Editorial Continental, 1980, capítulo I.

19. **Suppes, Patrick & Hill, shirley.** *Introducción a la lógica matemática,* España, Editorial Reverté, 1980, capítulo I.

20. **VARIAN, HALL R.** *Microeconomics Analysis*, España, W.W. Norton & Company, 1992, capítulo VII.

21. **VILLAR, ANTONIO.** *Lecciones de Microeconomía,* España, Antoni Bosh Editor, 1999, capítulos II, III y Apéndice Matemático.