UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

UNA APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE LA EXPOSICIÓN DEL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE SOLOW (1956)

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN ECONOMIA

PRESENTA:

MARLON RODRIGO NORIEGA TREJO

Asesora:
MTRA. NORA MARTÍNEZ MARTÍNEZ

MEXICO, D.F. JUNIO 2008

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Enrique e Isabel por el esfuerzo realizado cada día para apoyarnos siempre incondicionalmente.

A mis hermanos Enrique y Andrea por compartirme su vida.

A toda la familia Noriega y a la familia Trejo; especialmente a mi abuela Lola, a mi abuela Mace y mi abuelo Tacho.

A Paulina Abril por hacer de cada instante un momento especial, porque su ejemplo y amor han hecho posible la finalización de este trabajo, por exigirme ser mejor y sobre todo por creer en mí.

A mi maestro y amigo John por su apoyo y enseñanzas.

A mi familia adoptiva y adoptada: Triny, Oscarín, Pepe, Bruno, Mireya, Hugo, Lidia, Gerardo, Yazmín, René, Miguel, Guillermín, Eli, Sofía, Paty, Pedro, Oscar, Joaquín, Liz, Laura, Omar, Cesar, Alejandro, Ramón, Edgar…

A mi asesora la Maestra Nora Martínez por su apoyo y paciencia, sobretodo por la oportunidad que me brindó de laborar con ella.

A mis sinodales por enriquecer este trabajo: Lic. Hortensia Martínez Valdez, Lic. Miguel Cervantes Jiménez, Mtro. Horacio Catalán Alonso y Mtro. Carlos Martínez Fagundo.

Al Dr. Julio López y al Dr. Armando Sánchez Vargas por darme la oportunidad de iniciarme laboralmente y en la docencia.

A todos aquellos maestros que me han dado algo bueno de si mismos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por su grandeza.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es consecuencia del diplomado de “Matemáticas aplicadas a la economía” que imparte la Facultad de Economía a través del Centro de Educación Continua. Y es parte de los elementos necesarios para hacer válida la opción de titulación por diplomado dentro de la misma Facultad. El trabajo escrito se debe desarrollar en base a la temática revisada dentro del curso[1]. Y uno de los temas tratados fueron las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

El objetivo principal de esta tesina es presentar el uso de las ecuaciones diferenciales en el modelo de crecimiento económico de Solow elaborado en 1956.

Desde hace ya varios años se ha venido dando un uso cada vez mayor de las matemáticas en la ciencia económica. Sobretodo en los años posteriores a la segunda guerra mundial, cuando se reavivó el interés por el crecimiento económico, el progreso técnico y se dio inicio a la economía dinámica. Así también, se debe a un amplio desarrollo en la estadística y la econometría, que evidentemente, requiere de elementos matemáticos[2]. Su uso se ha venido desarrollando hacia temas cada vez más complejos de la matemática.

Como se mencionó uno de los temas de la ciencia económica donde se ha desarrollado un uso importante de las matemáticas, en particular de las

[1] Reglamento de exámenes profesionales (2005), artículo 6° y 17° fracción III.
[2] Katouzian, Homa; (1982). “ideología y método en economía”. H. Blume Ediciones. Madrid, España; pág. 202

ecuaciones diferenciales, ha sido en el crecimiento económico; especialmente en los planteamientos de lo que alguna vez se nombró teorías modernas del crecimiento económico, donde se incluye el modelo de Solow.

Muchos autores de economía matemática han tratado en sus textos el planteamiento de Solow como una aplicación de la temática de ecuaciones diferenciales. Tal es el caso de Chiang, Escobar, Gandolfo, Lomelí y Rumbos, Ostaszewski, Shone, Sydsaeter; que debido a que sus escritos contienen diversos temas o diversos modelos presentan una breve exposición del modelo aquí tratado.

Mientras que en los textos de crecimiento económico, como los elaborados por Romer, Ros, Thirlwall y el mismo Solow, se presenta la exposición del modelo sin hacer hincapié en lo que son las ecuaciones diferenciales y sus métodos de solución; y que evidentemente se debe a que no es parte del objetivo de sus trabajos.

Hasta nuestros días se continúan realizando un gran número de investigaciones sobre el sustento teórico de Solow. Y no sólo por la gran cantidad de adeptos, sino también por la oportunidad que brinda para aplicar los conocimientos de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la economía es que resulta apropiado realizar este trabajo. El cual se apoya en lo ya realizado y sólo pretende ampliar la exposición de la parte matemática que del modelo de Solow se ha hecho.

Este trabajo es de utilidad para aquellos interesados en hacer una revisión de la matemática del modelo presentado o para los que buscan una aplicación detallada de las ecuaciones diferenciales.

La manera de abordar el tema se presenta en cuatro capítulos. El primero es una revisión de los elementos básicos de las ecuaciones diferenciales, concepto, clasificación, trayectorias temporales y diagramas de fase. En el segundo se presentan diversos métodos de solución para las ecuaciones diferenciales de primer orden, yendo de lo más sencillo a lo más complejo. El tercer capítulo sirve como puente para establecer la relación entre las ecuaciones diferenciales y la teoría de crecimiento económico. Para que en el cuarto capítulo se desarrolle el modelo de Solow, desde sus antecedentes hasta los desarrollos empíricos que sobre él se continúan realizando en nuestros días. Finalmente se presentan las conclusiones.

1 ANOTACIONES GENERALES

1.1 Definiciones

Una ecuación es llamada a toda expresión matemática que presenta una relación de igualdad entre sus miembros. Así, existen ecuaciones algebraicas como:

i) $3x + 2 = y$

ii) $7w^2 - 2w + 5 = z$

Estas se caracterizan por utilizar términos algebraicos (x, y, w, z) llamados variables. Cada ecuación puede tener tantas variables como se requiera.

Además, estas ecuaciones expresan cómo se obtiene el segundo miembro (y y z) a partir del primero ($3x + 2$, $7w^2 - 2w + 5$). Así, en *i)* y se obtiene de la adición de $3x$ y 2; z es el resultado de operar $7w^2$ menos $2w$ más 5. Por lo que podemos decir de *i)* que y es la incógnita y x es la variable independiente. Es decir, conocer el valor de y depende del valor que x adopte. En *ii)* z es la variable incógnita o dependiente y w la variable independiente.

Claro está que, en las ecuaciones algebraicas, también se opera con multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces, logaritmos, exponenciales.

Otro tipo de ecuación son las ecuaciones diferenciales, las cuales utilizan derivadas o diferenciales para expresar una igualdad, relacionando una función con su derivada o derivadas. Por ejemplo:

iii) $\frac{dy}{dx}+y=0$

iv) $6\frac{dy}{dx}+8y=y^2$

De estas ecuaciones desconocemos la función involucrada en la derivada, es decir, a diferencia de las ecuaciones algebraicas, aquí nuestra incógnita es una función[8]. Encontrar esta función es el objetivo de las ecuaciones diferenciales.

Como sabemos, las derivadas expresan el cambio de una variable dependiente (*y*) con respecto a una variable independiente (*x*). Por lo que al escribir una derivada, como parte de una ecuación, estamos expresando el cambio de cosas, hechos o fenómenos con referencia a otras cosas hechos o fenómenos de los cuales dependen los primeros.

Se puede decir que la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dK}{dt}=c$$

[8] Toda ecuación cuya incógnita es una función se le conoce como ecuación funcional.

expresa que el cambio de un capital *K* con respecto a las variaciones en el tiempo *t* es igual a una constante *c.* O se puede expresar;

$$\frac{dY}{dL} = 0$$

como representación de los cambios en la producción *Y* con respecto a los cambios en la fuerza de trabajo *L* iguales a cero. Sólo faltaría comprobar si esto es verdad o bajo que condiciones puede serlo.

1.2 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales están clasificadas por tipo, orden, grado y linealidad[9].

1.2.1 Tipos de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales pueden ser de tipo ordinarias o parciales. Si una ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se conoce como ecuación diferencial ordinaria. Algunos ejemplos son:

i) $\frac{dy}{dx} + y = 0$

[9] Carmona Jover, Isabel; (1997). "Ecuaciones diferenciales". Longman de México Editores, S.A. de C.V. México, D.F.; pág. 23

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = x$

iii) $\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{x}{y}$

Si la ecuación contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a más de una variable independiente, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación que las contiene es una ecuación diferencial parcial. Tal es el caso de las siguientes ecuaciones:

i) $\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\delta y}{\delta z} = 0$

ii) $\frac{\delta y}{\delta z} - \frac{\delta z}{\delta w} = \frac{\delta y}{\delta x}$

1.2.2 Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial está dado por el número mayor de ocasiones en el que está derivada una función dentro de la ecuación. Así,

i) $\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = y$

es de segundo orden.

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + y = 0$

La ecuación anterior es, por tanto, de tercer orden.

1.2.3 Grado de una ecuación diferencial

El grado algebraico (potencia) de la derivada de más alto orden en la ecuación especifica el grado de una ecuación diferencial.

i) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

Esta ecuación es de segundo grado, ya que la potencia de la derivada de más alto orden es 2.

ii) $$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 + y^5 = x$$

Es una ecuación de tercer grado porque la potencia de la derivada de más alto orden es 3.

1.2.4 Linealidad de una ecuación diferencial

Cuando la variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado, no existen potencias mayores a uno, y además, cada uno de sus coeficientes depende solamente de la variable independiente, se dice que se tiene una ecuación diferencial lineal. Las siguientes ecuaciones son lineales porque son de primer grado (potencia uno) y porque el coeficiente de *y* depende exclusivamente de *x*.

i) $\frac{dy}{dx} + y = 5$

ii) $\frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0$

En la propiedad de linealidad nada tiene que ver la forma en la que se presente la variable independiente. Tal es el caso de:

iii) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

Sin importar que *x*, la variable independiente, esté expresada en e^x la ecuación anterior es lineal.

Toda ecuación diferencial lineal es de primer grado, pero no toda ecuación diferencial de primer grado es lineal.

iv) $\frac{dy}{dx} + zy = y$

v) $\frac{dy}{dx} + sen(y) = 0$

Las dos ecuaciones antes escritas son de primer grado, pero no son lineales. En la primera el coeficiente de *y* no depende exclusivamente de la variable independiente (*x*) y la segunda *sen(y)* no expresa una forma lineal.

Si una ecuación diferencial no cumple con las dos propiedades antes mencionadas se tiene una ecuación diferencial no lineal.

1.3 Diagramas de fase y trayectoria temporal

Se mencionó que una ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una variable independiente (ecuación diferencial ordinaria) o más variables independientes (ecuación diferencial parcial). En muchos usos en economía de las ecuaciones diferenciales, y sobre todo en este trabajo, la variable independiente es el tiempo.

Por ello se presenta en este apartado herramientas gráficas útiles para la comprensión de lo que las ecuaciones diferenciales aportan en un contexto económico de análisis de equilibrio, cuando la variable independiente de la ecuación diferencial es el tiempo.

Dada una ecuación diferencial de primer orden en la forma general;

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

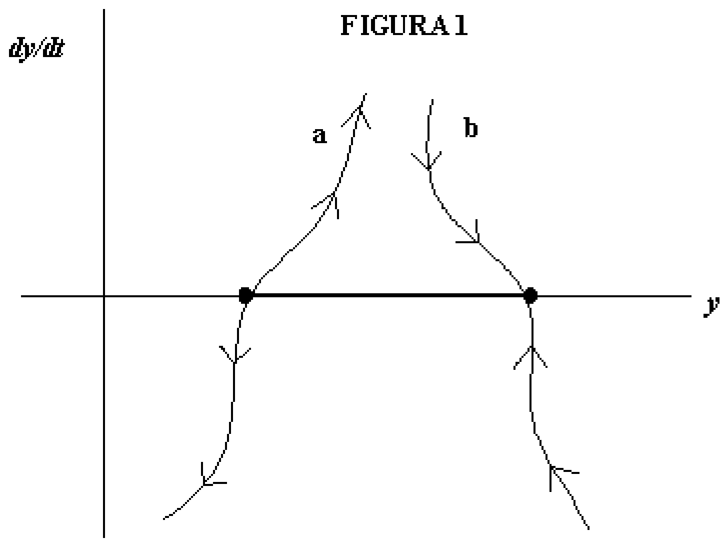
donde *t* denota el tiempo. Sea lineal o no lineal en la variable *y,* podemos graficar *dy/dt* contra *y*. Una representación geométrica de este tipo, factible siempre que *dy/dt* sea una función sólo de *y*, se llama diagrama de fase.

La utilidad de los diagramas de fase es visualizar un importante resultado de las ecuaciones diferenciales, la convergencia. La convergencia es la aproximación constante de una trayectoria, descrita por la solución de una ecuación diferencial, hacia un valor en particular o valor denominado de equilibrio. Repetidas veces se habla de valores de equilibrio en economía y en el análisis dinámico necesariamente se habla de convergencia o su opuesto la divergencia.

Por lo anterior, si hay un nivel de equilibrio de *y* en el tiempo, este sólo puede presentarse cuando *y* no presenta variación, es decir, puede presentarse sólo en el eje horizontal, donde $dy/dt=0$. Por otro lado, para verificar que *y* se mantiene o se acerca al nivel de equilibrio en el transcurso del tiempo debemos observar si, independientemente de la posición inicial de *y*, la línea del diagrama de fase o línea de fase siempre va a guiarlo hacia la posición de equilibrio en dicha intersección.

En el diagrama de fase, presentado en la figura 1, se muestra que en cualquier lado por arriba del eje horizontal (donde $dy/dt > 0$), *y* debe ser creciente con el tiempo, por lo que debe moverse de izquierda a derecha.

Por el contrario, cualquier punto que esté por debajo del eje horizontal debe asociarse con un movimiento hacia la izquierda de la variable *y*, ya que la negatividad de *dy/dt* significa que *y* disminuye con el tiempo.



Fuente: Chiang; pág. 496

Otra cosa que hay que notar es que las puntas de flecha de las líneas de fase apuntan uniformemente a la derecha, cuando están por arriba del eje horizontal. Por debajo del eje horizontal las líneas apuntan a la izquierda. Esto sin importar el signo algebraico de *y*.

Se aprecia para el ejemplo *a* de la figura 1 que la línea de fase presenta los valores positivos apuntando hacia la derecha y los valores negativos hacia la izquierda, indicando que los valores se alejan del equilibrio. Y para el ejemplo *b* la línea de fase presenta los valores positivos apuntando hacia la derecha y los valores negativos hacia la izquierda, los valores se dirigen al equilibrio.

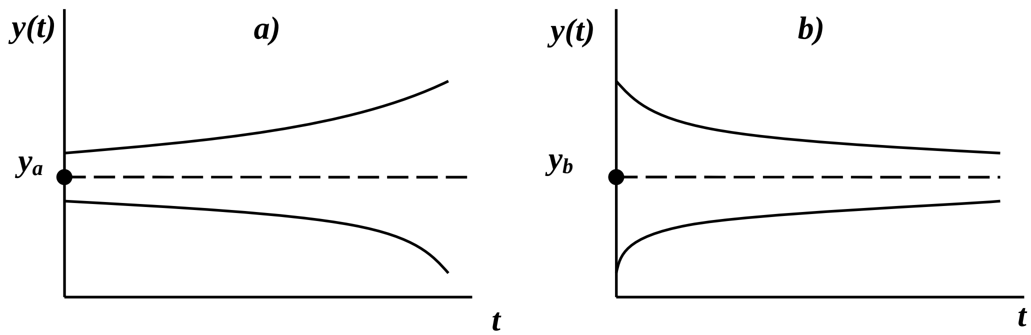
Entonces la manera de identificar la convergencia entre *a* y *b* se aprecia por la pendiente de estas. Como regla práctica podemos decir que:

a) si la línea de fase corta al eje *y* (en el equilibrio) con una pendiente positiva, el punto de equilibrio será inestable, es decir, *y* será divergente.
b) si la línea de fase corta al eje *y* (en el equilibrio) con una pendiente negativa, el punto de equilibrio será estable, es decir, *y* será convergente.

Una visualización implicada con la convergencia es la trayectoria temporal de *y*. Muestra de otra forma si *y* se mantiene, se acerca o se aleja del nivel de equilibrio a través del tiempo.

De acuerdo al comportamiento presentado en los diagramas de fase, pueden establecerse diferentes trayectorias temporales. El caso en que las líneas, del diagrama de fase, se alejan del equilibrio, tanto por arriba como por abajo, se muestra en el inciso *a)* de la figura 2 mediante trayectorias temporales de *y*. Donde el equilibrio se encuentra marcado por el punto y_a y las

Figura 2



Fuente: Chiang; pág. 497

trayectorias de tiempo se alejan del equilibrio ya sea en sentido ascendente o descendente; a pesar de que los valores en *y(0)* – los valores iniciales – estén cerca dicho punto.

El caso contrario se presenta cuando en el diagrama de fase las flechas se acercan al equilibrio. Representado por la trayectoria en el tiempo en el inciso *b)* donde *y* se va acercando al punto de equilibrio, en este caso y_b, a través del tiempo aunque *y(0)* sea diferente del valor de equilibrio.

De la forma general de una ecuación diferencial lineal;

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \qquad \text{o sea} \qquad \frac{dy}{dt} = -ay + b$$

se puede inferir que la pendiente del diagrama de fase está dado por $-a$. Con lo cual es posible determinar, observando el valor de a, cuando una ecuación diferencial es convergente o divergente. Si $a > 0$ tendremos en la línea de fase una pendiente negativa y se inferirá la presencia de convergencia. Si $a < 0$ habrá una pendiente positiva implicando una ecuación diferencial divergente. Por lo que no será necesario graficar un diagrama de fase o una trayectoria temporal para saber la conducta de una ecuación diferencial con respecto al equilibrio si conocemos el valor de a.

2 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

2.1 Solución de una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial implica obtener una función que sea expresada sin la presencia de derivadas y que además satisfaga a dicha ecuación, es decir, al ser sustituida en la ecuación original debe satisfacer la igualdad. La solución será la función de *f*, que nos indicará su trayectoria con respecto a la variable independiente. Para el caso de la ecuación diferencial lineal;

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \tag{2.1}$$

la solución implicaría encontrar la función de *y*, tal que satisfaga la igualdad. Si la derivada de la función que estamos buscando es $3x^2$ sabemos por el cálculo que integrando, aplicando la antiderivada, en ambos miembros de la ecuación podemos encontrar la función deseada. Así;

$$\int dy = \int 3x^2 dx$$

$$y = x^3 + c \tag{2.2}$$

sustituyendo *y* en la ecuación original tenemos;

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + c\right) = 3x^2$$

aplicando la derivada;

$$3x^2 = 3x^2$$

se obtiene una identidad. De esta manera comprobamos que la función *y* es la solución de la ecuación diferencial.

A esta función se le conoce como solución general, debido a que posee una constante arbitraria. Ya que c puede tomar cualquier valor, la presencia de la constante nos indica, que si la solución existe, hay infinitas soluciones.

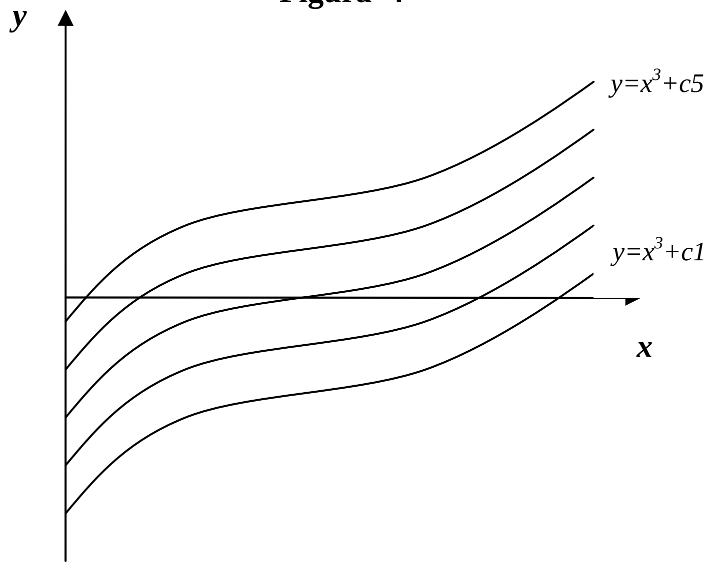
Geométricamente, la solución general representa una familia de curvas donde el valor de la constante dará el valor de la ordenada al origen para cada curva. Si en la solución las constantes arbitrarias toman un valor específico se le conoce como solución particular. En otras palabras, la solución particular es la curva, dentro de la familia de curvas solución, que se obtiene cuando las constantes arbitrarias toman un valor específico. A su representación grafica se le conoce como *curva integral*[5].

La figura 4 muestra una familia de curvas de la solución $y=x^3+c$, es decir, representa la solución general. Una de estas curvas, por ejemplo, donde la

[5] Sydsaeter, Knut y Hammond, Peter; (1995). "Mathematics for Economic Analysis". Prentice-Hall. New Jersey; pág. 761.

constante es c1 o c5 representa una solución particular para la ecuación diferencial.

Figura 4



Fuente: elaboración propia

Cabe aclarar que existen tantas soluciones particulares, de una ecuación diferencial, como valores sean asignados a la o las constantes arbitrarias; es decir, existen infinitas soluciones particulares.

El valor de la constante arbitraria, la solución particular, se obtendrá a causa de las condiciones iniciales. Una condición inicial es el primer valor que se le da, en un problema concreto, a la variable independiente y a la variable dependiente. Siguiendo con la exposición en que *x* es la variable independiente y *y* la variable dependiente la notación de la condición inicial es:

$$y(x_0) = y_0$$

o también

$$y|x = x_0 = y_0$$

El problema de encontrar la solución de una ecuación diferencial que satisface una condición inicial se conoce como *problema de Cauchy*[6].

Continuando con la función $y = x^3 + c$ damos la condición inicial $x = 2$ $y = 6$;

$$6 = 2^3 + c \qquad (2.3)$$

entonces la constante es:

$$c = 6 - 8 = -2$$

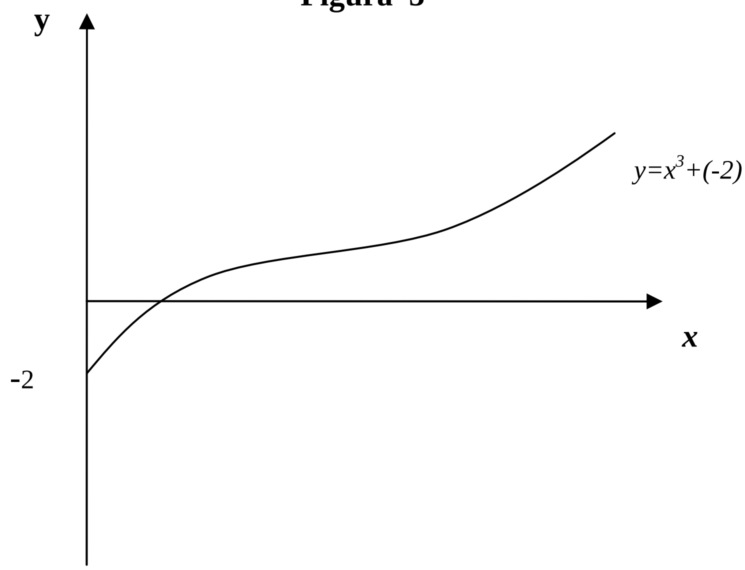
y la solución particular es:

$$y = x^3 + (-2) \qquad (2.4)$$

que se representa en la figura 5.

[6] Krasnov, M.L. et. al.; (2002). "Ecuaciones diferenciales ordinarias". Editorial URSS, Moscú; pág. 8

Figura 5



Fuente: elaboración propia

Se presenta un ejemplo más. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (2.5)$$

una posible solución es:

$$y = sen(x)$$

ya que;

$$\frac{d}{dx}(senx) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx^2}(senx) = -senx$$

sustituyendo en la ecuación original

$$-senx + senx = 0$$

se cumple la identidad.

Otras soluciones son:

$$y = \cos x$$

$$y = c_1 senx + c_2 \cos x$$

Por tanto, y reafirmando lo anteriormente dicho, las ecuaciones diferenciales pueden tener infinitas soluciones.

También es verdad que existen ecuaciones diferenciales con una única solución o que no poseen solución, como el caso de;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0 \qquad (2.6)$$

cuya única solución es $y = 0$.

Y la ecuación;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 + 1 = 0 \qquad (2.7)$$

la cual no tiene solución ya que;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 \geq 0$$

Entonces se vuelve importante saber si una ecuación diferencial posee o no solución.

2.2 Teorema de existencia y unicidad

Teorema[7]: dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$ si *f* es continua en un intervalo *I* y

$$x_0 \in I, y_0 \in R$$

[7] Carrillo Calvet, Humberto; (2000). "Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias". Notas para un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias; pág. 10

entonces existe una y sólo una solución, y(x), con la propiedad de que $y(x_0) = y_0$.

Lo que nos da el teorema anterior son las condiciones para que una ecuación diferencial de primer orden tenga solución y además ésta sea única. Estas condiciones son:

a) la función de *x*, *f(x)*, es continua en el intervalo *I*.
b) las condiciones iniciales están dentro de dicho intervalo

Si a) y b) se cumplen aseguran la existencia y la unicidad de la solución de la ecuación diferencial que se encuentre a prueba.

Para ejemplificar se tomará la función

$$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad \forall x \in (0,1) \tag{2.8}$$

donde se delimitará nuestro intervalo *I* de cero a uno. Como se hizo anteriormente se integrará en ambos lados de la ecuación para encontrar su función solución;

$$\int \frac{dy}{dx} dx = 2dx$$

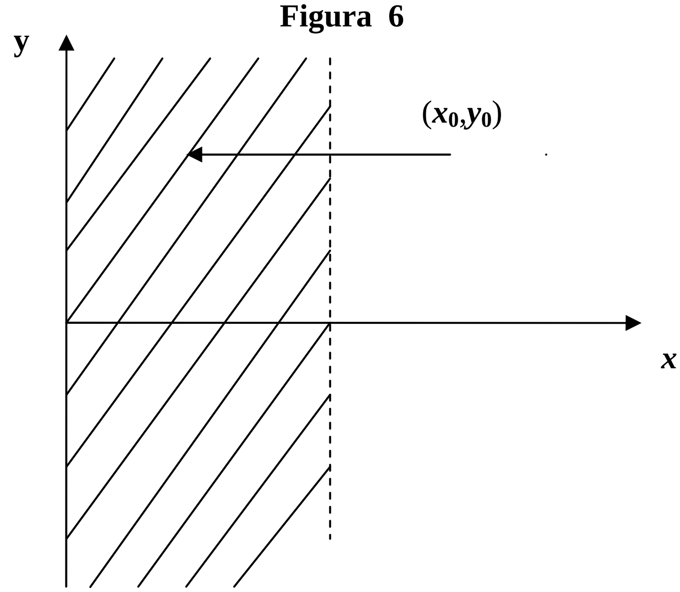
$$\int dy = 2dx$$

$$y = 2x + c$$

las soluciones de la ecuación cubren al área dentro del intervalo delimitado por las paralelas en *x = 0* y *x = 1*(ver figura 6).

Dado cualquier punto (x_0, y_0) dentro del intervalo *I* hay una solución que pasa por él, y ésta es única, pues hay sólo una recta de pendiente 2 que pasa por este punto.

Figura 6



Fuente: Carrillo Calvet, Humberto, pág. 10

La manera de solucionar las ecuaciones diferenciales está ligado a la forma que tengan éstas, por ello es importante hacer una revisión general de las formas que pueden adoptar. Comenzamos con las pertinentes a las ecuaciones diferenciales lineales de primer grado.

2.3 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

2.3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficiente y término constante

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se expresa de manera general a través de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + u(x)y = w(x) \tag{2.9}$$

donde *u* y *w,* así como *y,* son funciones de *x*. Estas funciones pueden ser tan complejas o tan simples como se quiera, incluso todas ellas pueden ser constantes.

Por motivos de exposición se consideran constantes las funciones *u* y *w,* utilizando *a* y *0* respectivamente.

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \tag{2.10}$$

Debido a que *u(x)* es el coeficiente de la variable dependiente y *0* es un término independiente (2.10) es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constante. Siendo este el caso homogéneo porque el término constante es igual a cero. “La característica que define un ecuación homogénea es que cuando todas las variables se multiplican por una constante dada, la ecuación permanece válida. Esta característica es válida si el término constante es cero, pero se pierde si el termino constante no es cero”[8].

La ecuación se puede resolver integrando cada diferencial. El proceso es el siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

despejando la derivada

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

agrupando *y* con su diferencial

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -a$$

pasando el diferencial de *x* al segundo miembro

[8] Chiang, Alpha; 2006. “Métodos fundamentales de economía matemática”. McGraw-Hill. México, D.F. p.476

$$\frac{1}{y}dy = -adx$$

integrando

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -adx$$

$$Lny = -ax + c$$

es válido y práctico juntar las constantes de integración en una sola. Ahora sólo falta despejar *y*, utilizando las leyes de los exponentes;

$$e^{Lny} = e^{-ax+c}$$

$$y = e^{-ax}e^{c}$$

Decimos que e^c=*A,* entonces:

$$y = e^{-ax}A$$

$$y = Ae^{-ax} \qquad (2.11)$$

Con (2.11) tenemos la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente constante y término igual a cero. Al querer solucionar una ecuación diferencial con las características mencionadas, simplemente ubicamos el coeficiente (incluyendo su signo positivo o negativo) y se sustituye en *a*.

Ejemplo:

Sea $\frac{dy}{dx} - 35y = 0$

su solución es

$$y = Ae^{-(-35)x}$$

$$y = Ae^{35x}$$

Ahora, ¿qué pasaría si el término independiente, aquí nombrado como *b,* fuera diferente de cero? Se tendrá el caso no homogéneo:

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \qquad (2.12)$$

cuya solución está compuesta por dos elementos, la función complementaria y la integral particular, que denotamos por y_c y y_p respectivamente. La función complementaria no es más que la solución general de la ecuación reducida, o sea, la solución de la ecuación homogénea. Por lo que el primer término es:

$$y_c = Ae^{-ax} \qquad (2.13)$$

La integral particular y_p es cualquier solución particular de la ecuación completa, o sea, la solución de la ecuación no homogénea. Al tener la posibilidad de ocupar cualquier solución particular es apropiado elegir el tipo más simple de solución, cuando *y* es una constante. ¿Cuál es la derivada de una constante? Cero. Así, queda (2.12) como:

$$ay = b \tag{2.14}$$

su solución es;

$$y = \frac{b}{a} \qquad \text{siempre que} \quad a \neq 0 \tag{2.15}$$

La suma de la función complementaria y de la integral particular constituye la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea (cuando $a \neq 0$).

$$y(x) = y_c + y_p = Ae^{-ax} + \frac{b}{a} \tag{2.16}$$

Si *A = 0* se tiene la solución *y(x) = b/a*, entonces se dice que *b/a* es el equilibrio de la ecuación[9]. Por lo revisado en el apartado 1.3, se puede establecer que si la constante *a* es positiva, entonces la solución (2.16) converge a *b/a* cuando $x \to \infty$. En este caso se dice que la solución es estable, porque toda solución de la ecuación converge al valor de equilibrio conforme *x* tienda a infinito.

[9] Sydsaeter, Knut y Hammond, Peter; (1995). “Mathematics for Economic Analysis”. Prentice-Hall. New Jersey; pág. 777.

Ejemplo: resolver $\frac{dy}{dx} - 5y = 7$

Sustituimos el coeficiente y el término en *a y b,* respectivamente, de la ecuación (2.16)

$$y = Ae^{-(-5)x} + \frac{7}{(-5)}$$

$$y = Ae^{5x} - \frac{7}{5}$$

Que es igual a sumar la función complementaria y la integral particular;

$$y_c = Ae^{5x}$$

$$y_p = -\frac{7}{5}$$

$$y(x) = y_c + y_p = Ae^{5x} - \frac{7}{5}$$

Se tiene una solución inestable, ya que diverge (*a>0)* del valor de equilibrio -7/5.

2.3.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficiente y término variable

Otra posibilidad dentro de las ecuaciones diferenciales lineales es cuando el coeficiente y el término son variables.

En el caso homogéneo,

$$\frac{dy}{dx} + u(x)y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -u(x) \tag{2.17}$$

para encontrar la solución se integra ambos lados de la ecuación respecto a *x*, así se tiene:

lado izquierdo $\qquad \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{dy}{y} = Lny + c$

lado derecho $\qquad \int -u(x)dx = -\int u(x)dx$

igualando ambos lados;

$$Lny = -c - \int u(x)dx$$

nuevamente recurrimos al exponente para despejar *y;*

$$y(x) = e^{Lny} = e^{-c}e^{-\int u(x)dx} = Ae^{-\int u(x)dx} \tag{2.18}$$

siendo $A = e^{-c}$ una constante arbitraria.

Como ejemplo se tiene:

$$\frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 0$$

el coeficiente variable es $2x^3$ el cual se sustituye en *u(x)* de la solución (2.18);

$$y(x) = Ae^{-\int 2x^3 dx}$$

después de integrar se obtiene:

$$y(x) = Ae^{-\left(\frac{1}{2}x^4 + c\right)}$$

$$y(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x^4} e^{-c}$$

debido a que e^{-c} es una constante arbitraria, este término se puede incluir en *A*;

$$y(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x^4} \ .$$

Como se observa es posible omitir la constante de integración *c* sin afectar el resultado final, por lo que cada vez que se presenta *A* como constante se hará la omisión de las constantes de integración.

Para encontrar la solución del caso no homogéneo se utilizará el llamado *método de variación de parámetros*[10], el cual consiste en considerar un parámetro como variable, aquí se considera a la constante arbitraria de la solución homogénea como una función de *x*, y posteriormente determinar su valor de tal forma que la solución se cumpla. Así;

$$y(x) = B(x)e^{-\int u(x)dx} \tag{2.19}$$

donde *B(x)* es una función que sustituye a *A* de (2.18). Al derivar (2.19) aplicando la regla del producto y de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[B(x)e^{-\int u(x)dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dB(x)}{dx}e^{-\int u(x)dx} - u(x)B(x)e^{-\int u(x)dx} \tag{2.20}$$

sustituyendo *dy/dx,* así como *y* en la forma general (2.9);

$$\frac{dy}{dx} + u(x)y = w(x)$$

$$\frac{dB(x)}{dx}e^{-\int u(x)dx} - u(x)B(x)e^{-\int u(x)dx} + u(x)B(x)e^{-\int u(x)dx} = w(x)$$

[10] Gandolfo, Giancarlo; (1976). "Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica". Tecnos. España, Madrid; pág. 343.

resulta;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dB(x)}{dx} e^{-\int u(x)dx} = w(x) \qquad (2.21)$$

despejando *B(x);*

$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{w(x)}{e^{-\int u(x)dx}} = w(x)e^{\int u(x)dx}$$

$$dB(x) = w(x)e^{\int u(x)dx}dx$$

$$B(x) = \int w(x)e^{\int u(x)dx}dx + c \qquad (2.22)$$

sustituyendo este resultado en (2.19);

$$y(x) = \left[\int w(x)e^{\int u(x)dx}dx + c\right]e^{-\int u(x)dx}$$

$$y(x) = Ae^{-\int u(x)dx} + e^{-\int u(x)dx}\int w(x)e^{\int u(x)dx}dx \qquad (2.23)$$

donde *A* = *c.*

Para ejemplificar este tipo de solución se presenta:

$$\frac{dy}{dx} + 5xy = x\,.$$

Se soluciona simplemente con la sustitución del coeficiente y el término en (2.23);

$$y(x) = Ae^{-\int 5xdx} + e^{-\int 5xdx} \int xe^{\int 5xdx} dx\,;$$

resolviendo las integrales (omitiendo las constantes);

$$y(x) = Ae^{-\frac{5}{2}x^2} + e^{-\frac{5}{2}x^2} \int xe^{\frac{5}{2}x^2} dx$$

usando la regla variante de integración de una función exponencial

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

o integrando por sustitución, resulta:

$$y(x) = Ae^{-\frac{5}{2}x^2} + \tfrac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}x^2}\, e^{\frac{5}{2}x^2}$$

$$y(x) = Ae^{-\frac{5}{2}x^2} + \tfrac{1}{5}$$

Ahora bien, ¿cómo se resolvería una ecuación diferencial con coeficiente constante y término variable? Siendo un caso de este tipo;

$$\frac{dy}{dx}+5y=x$$

se resuelve mediante (2.23) pero con la salvedad de que *u(x)* es una constante.

Así ;

$$y(x)=Ae^{-\int 5dx}+e^{-\int 5dx}\int xe^{\int 5dx}dx$$

$$y(x)=Ae^{-5x}+e^{-5x}\int xe^{5x}dx$$

ahora integrando xe^{5x} por partes;

$$\int vdu=uv-\int udv$$

$$\int xe^{5x}dx$$

$$v=x \qquad du=e^{5x}dx$$

$$dv=dx \qquad u=\int e^{5x}dx=\tfrac{1}{5}e^{5x}$$

$$\int xe^{5x}dx=\tfrac{1}{5}e^{5x}x-\int \tfrac{1}{5}e^{5x}dx$$

$$\int xe^{5x}dx=\tfrac{1}{5}e^{5x}x-\tfrac{1}{25}e^{5x}$$

sustituyendo en todo la solución;

$$y(x) = Ae^{-5x} + e^{-5x}\left(\tfrac{1}{5}e^{5x}x - \tfrac{1}{25}e^{5x}\right)$$

$$y(x) = Ae^{-5x} + \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{25}.$$

Si se presentara una ecuación en donde el coeficiente es variable y el término es constante, también se emplearía la solución (2.23).

2.4 Ecuaciones diferenciales no lineales

2.4.1 Ecuaciones de variables separables

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{2.24}$$

Donde *g(x)* y *h(y)* son productos de funciones que dependen cada una de una respectiva variable, se dice, que es separable o de variables separables.

Se sabe que (2.24) es no lineal porque los coeficientes no dependen exclusivamente de la variable independiente.

Cuando cada función se encuentra como coeficiente de su respectiva diferencial, se conoce, como ecuación de variables separadas. Para (2.24) se tiene:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx\,.$$

Siempre que exista una ecuación de la cual se puedan agrupar los diferenciales con su respectiva función, tendremos una ecuación de variables separables.

De esta forma se puede resolver la ecuación con integración directa.

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) + c_1 = G(x) + c_2$$

donde $H(y)$ representa la integral de $h(y)dy$ y $G(x)$ es la integral de $g(x)dx$, c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias que, por tal motivo, las podemos juntar en una sola constante;

$$H(y) = G(x) + c \qquad (2.25)$$

esta última es la solución general de una ecuación de variables separables.

Al tener una ecuación diferencial de variables separables o de la cual se pueda obtener una ecuación de este tipo, la manera de resolverse será expresar la ecuación en variables separadas e integrando cada miembro. Así, es como se resuelve una ecuación de variables separables.

2.4.2 Ecuaciones diferenciales exactas

En general una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.26)$$

donde *M(x, y)* es la derivada parcial de *u* con respecto a *x* y *N(x, y)* es la derivada parcial de *u* con respecto a *y,* es exacta si su primer miembro es la diferencial total de cierta función *u(x, y).*

Se sabe del cálculo diferencial que una diferencial total es la suma de las diferenciales parciales de cada una de las variables que compongan la función.

Para *u(x, y)* se tiene:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy$$

Así, la definición se expresa como:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv du \equiv \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy\,.$$

Para ejemplificar se utiliza la función:

$$u(x,y) = x^2y^2 - 3x + 4y \tag{2.27}$$

Se requiere su diferencial total. Primero se deriva parcialmente con respecto a *x;*

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2xy^2 - 3;$$

ahora, se obtiene la derivada parcial de *u* con respecto a *y;*

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 2x^2y + 4$$

así, se puede estar seguro que;

$$(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0 \tag{2.28}$$

es una ecuación diferencial exacta cuya forma general es (2.26).

Cuando se desea resolver una ecuación diferencial que creemos que es exacta, difícilmente se tiene de inicio la función *u* original. Por lo que se requiere de una regla que nos dé la seguridad de que la ecuación diferencial a trabajar es exacta.

Según el teorema de Young[11], dos derivadas parciales cruzadas (mixtas) serán iguales siempre que éstas sean continuas.

Si existe una ecuación diferencial exacta estará compuesta por primeras derivadas parciales;

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du$$

$$M(x, y) = \frac{\delta u}{\delta x} \qquad\qquad N(x, y) = \frac{\delta u}{\delta y}$$

y sus derivadas parciales cruzadas serán idénticas

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta u}{\delta x}) = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta u}{\delta y}) = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Por lo que el teorema sobre el criterio para determinar una ecuación diferencial exacta dice[12]:

Sean continuas *M(x, y)* y *N(x, y)*, con derivadas parciales continuas en una región rectangular, *R*, definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que *M(x, y)dx* + *N(x, y)dy* sea una diferencial exacta es que:

---

[11] Chiang, Alpha; (2006). "Métodos fundamentales de economía matemática". McGraw-Hill. México, D.F.; pág.487

[12] Kells, Lyman M.; (1970). "Ecuaciones diferenciales elementales". McGraw-Hill. México, D.F.; pág. 41

$$\frac{\delta M}{\delta y} \equiv \frac{\delta N}{\delta x}$$

la derivada parcial de *M* con respecto a *y* es idéntica a la derivada parcial de *N* con respecto a *x.*

Al querer resolver una ecuación diferencial que se supone exacta lo primero que se hará es asegurarse que la ecuación sea exacta, después se debe encontrar la función *u.* Debido a que *M(x, y)* es δ*u/*δ*x* es posible determinar *u* si se integra *M(x, y)* con respecto a *x,* manteniendo *y* constante porque así fue tratada en la diferenciación.

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + w(y) \qquad (2.28)$$

donde la función *w(y)* desempeña el papel de la constante de integración. Para encontrar la forma precisa de *w(y)* se supone que:

$$\frac{\delta u}{\delta y} = N(x,y)$$

ahora se deriva (2.29) con respecto a *y*, siguiendo el supuesto anterior;

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\int M(x,y)dx + w'(y) = N(x,y)$$

$$w'(y) = N(x,y) - \frac{\delta}{\delta y}\int M(x,y)dx \qquad (2.30)$$

Por último se integra (2.30) con respecto a *y* y se sustituye *w(y)* en (2.29).

Para enumerar cada uno de los pasos anteriores se considera la ecuación (2.28).

$$(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$$

Paso 1. Determinar si la ecuación es exacta

$$M(x,y) = (2xy^2 - 3) \qquad N(x,y) = (2x^2y + 4)$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 4xy \qquad \frac{\delta N}{\delta x} = 4xy$$

Paso 2. Integrar *M(x,y)* con respecto a *x*, tomando como constante a *y*, adicionado a la función de integración *w(y)* para determinar *u*

$$u(x,y) = \int M(x,y) + w(y)$$

$$u(x,y) = \int (2xy^2 - 3)dx + w(y)$$

$$u(x,y) = 2y^2\int xdx - 3\int dx + w(y)$$

$$u(x,y) = x^2y^2 - 3x + w(y)$$

Paso 3. Derivar la ecuación anterior con respecto a *y*

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(x^2 y^2 - 3x + w(y))$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 2x^2 y + w'(y)$$

Paso 4. Igualar con *N(x,y)* y despejar $w'(y)$

$$2x^2 y + w'(y) = N(x, y)$$

$$w'(y) = 2x^2 y + 4 - 2x^2 y = 4$$

Paso 5. Integrar *w'(y)* con respecto a *y*, tomando como constante *x,* y sustituir en el paso 2.

$$\int w'(y) = \int 4dy$$

$$w(y) = 4y$$

$$u(x, y) = x^2 y^2 - 3x + 4y$$

La solución es:

$$y = \left(\frac{3x - 4y}{x^2}\right)^{1/2}$$

Es posible que una ecuación que no es exacta lo sea, al encontrar una función *η(x, y)* tal que multiplicada por la función a tratar, ésta se vuelva exacta;

$$du = \eta M dy + \eta N dx$$

a dicha función se le conoce como *factor de integración o factor integrante*[13].

La ecuación

$$(2xy)dx + (3x^2)dy = 0 \tag{2.31}$$

no es exacta. Ya que

$$M(x, y) = 2xy \qquad N(x, y) = 3x^2$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 2x \qquad \frac{\delta N}{\delta x} = 6x$$

pero al multiplicar y^2 por *M(x,y)* y *N(x, y)*

$$y^2 M(x, y) = y^2(2xy) = 2xy^3$$

$$y^2 N(x, y) = y^2(3x^2) = 3x^2y^2$$

[13] Krasnov, M.L. et al; (2002). "Ecuaciones diferenciales ordinarias". Editotial URSS. Moscú; pág. 57.

se tendrá una ecuación diferencial exacta

$$(2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy = 0$$

$$\frac{\delta(y^2M)}{\delta y} = 6xy^2 \qquad \frac{\delta(y^2N)}{\delta x} = 6xy^2$$

Por lo que y^2 será el factor de integración. Siempre que se encuentre un factor de integración una ecuación no exacta se puede convertir en exacta.

2.4.3 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.32}$$

donde *P(x)* y *Q(x)* son cualquier función de *x;* mientras *n* es diferente de 0 y 1 (si *n* = 0 ó *n* = 1 la ecuación es lineal).

La forma de esta ecuación permite linealizarla, para lo cual se empieza con dividir entre y^n o lo que es lo mismo multiplicar por y^{-n};

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x) \tag{2.33}$$

haciendo un cambio de variable por;

$$z=y^{1-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)z=Q(x) \tag{2.34}$$

Debido a que

$$\frac{dz}{dy}=(1-n)y^{-n}$$

$$y^{-n}=\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dy}$$

el primer elemento de (2.34) queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x) \tag{2.35}$$

Sólo falta multiplicar por *(1-n)* para tener una ecuación diferencial lineal, así;

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \qquad (2.36)$$

se observa que esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden en la cual la variable *z* ha ocupado el lugar de *y*. Se puede solucionar la ecuación, y como paso final, convertir *z* nuevamente en *y* mediante la sustitución inversa.

De aquí que cualquier ecuación de Bernoulli se puede resolver con la ayuda del cambio anterior de la variable dependiente.

Se tiene el ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 5xy = 7xy^2$$

donde $P(x) = 5x$, $Q(x) = 7x$ y $n = 2$.

Al utilizar (2.36) se tiene:

$$\frac{dz}{dx} + (1-2)5xz = (1-2)7x$$

$$\frac{dz}{dx} - 5xz = -7x$$

una ecuación diferencial lineal con coeficiente y término variable, que se resuelve para *z* ocupando (2.23). Así;

$$z(x) = Ae^{-\int(-5x)dx} + e^{-\int(-5x)dx}\int(-7x)e^{\int(-5x)dx}dx$$

$$z(x) = Ae^{\frac{5}{2}x^2} + e^{\frac{5}{2}x^2}\int(-7x)e^{-\frac{5}{2}x^2}dx$$

$$z(x) = Ae^{\frac{5}{2}x^2} + e^{\frac{5}{2}x^2}\left(\tfrac{7}{5}e^{-\frac{5}{2}x^2}\right)$$

$$z(x) = Ae^{\frac{5}{2}x^2} + \tfrac{7}{5}$$

por último se hace el cambio de variable de *z* a *y.*

$$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

Por lo tanto, $y = \dfrac{1}{z} = z^{-1}$

la solución en *y* es:

$$y(x) = \left(Ae^{\frac{5}{2}x^2} + \tfrac{7}{5}\right)^{-1}$$

3 MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO Y ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1 Modelos

En la historia de la humanidad ha estado presente el deseo de comprender nuestra realidad, tanto nuestro entorno físico y social, como nuestra composición individual. Se ha ido en la tarea de comprender el movimiento de los astros, el ciclo de la vida; casi todo ha sido cuestionado con el objetivo de comprenderse, incluso aquello que no somos capaces de percibir con nuestros sentidos.

Debido a la gran cantidad de interrogantes se ha caído en la necesidad de estudiar la realidad en pequeñas porciones, limitando su estudio en áreas determinadas[14]. Hay quienes estudian a los seres vivos y les llamamos biólogos, hay quienes estudian los fenómenos físicos en la superficie de la Tierra y les llamamos geógrafos.

Pero la realidad, aún bien delimitada en un área del conocimiento específica, es tan compleja que tratar de entenderla por ella misma sería una tarea imposible. En las ciencias, como la economía, se hace uso de modelos que simplifican diferentes aspectos de una realidad en particular con el fin de entenderla y explicarla.

[14] Lomelí, Héctor y Rumbos, Beatriz; (2003). “Métodos dinámicos en economía”. International Thomson Editores, S.A. México, pág. 5.

Un modelo por definición es una simplificación de la realidad. Por lo que al construirse uno necesariamente implica un proceso de abstracción y simplificación. La elección de los modelos tiene una profunda influencia en la forma de tratar el objeto de estudio y en como se da forma a la solución. Los modelos se pueden representar en distintos niveles de detalle, los analistas se suelen centrar en el "qué", mientras que los diseñadores en el "cómo". Los mejores modelos se mantienen ligados a la realidad. Un único modelo no es suficiente. Cualquier situación que comprenda un conjunto de procesos se aborda mejor mediante un pequeño conjunto de modelos casi independientes, es decir, que se puedan construir y estudiar por separado pero que estén interrelacionados

3.2 Modelos económicos

Los economistas han desarrollado sus modelos con la finalidad de comprender la realidad económica, de comprender los procesos bajo los cuales las sociedades producen, distribuyen y consumen bienes bajo el contexto de escasez. El modelo se puede construir con diferentes niveles de agregación, detalle y complejidad según cual sea su objeto. Generalmente los modelos se construyen con dos finalidades:

- Explicación o descripción de las características y comportamiento de las variables económicas que intervienen en el ámbito económico.

- Predicción o capacidad de pronosticar los efectos de los cambios en algunas magnitudes de la economía.

La abstracción que un individuo haga de un fenómeno económico permite especificar las condiciones en las que resulta válido un modelo. Y su nivel de generalidad se aplicará sólo a los fenómenos económicos que estén bajo las mismas condiciones especificadas. Toda teoría es abstracta y general, pero ninguna teoría es universalmente válida ni en el tiempo ni en el espacio[15].

En general, los pasos principales en la abstracción de un típico proceso de modelación económica son[16]:

1) variables relevante y notación

La modelación requiere de la abstracción de los elementos esenciales de la realidad a explicar, omitiendo los demás elementos. Dada la imposibilidad de tomar en cuenta todos los aspectos de un objeto, se asume que ciertas variables son irrelevantes y se intenta identificar sólo las variables que producen el fenómeno que se desea explicar. Así, cada objeto tendrá su modelo e incluso sus modelos, de acuerdo a la forma en que el estudioso entienda la realidad del fenómeno de antemano.

Ya seleccionadas las variables que son esenciales para el entendimiento del fenómeno a explicar es apropiado utilizar una notación para cada una de ellas.

---

[15] Katouzian, Homa. (1982). “Ideología y método en economía”. H. Blume Ediciones. Madrid, España, págs. 194-196
[16] Lomelí, Héctor y Rumbos, Beatriz; (2003). “Métodos dinámicos en economía”. International Thomson Editores, S.A. México, págs. 19-20

Esta notación tanto puede ser propia, como puede tomarse de lo que comúnmente se establecen en la literatura económica.

2) Supuestos

Los supuestos son los principios de partida para la construcción de un modelo económico. Los supuestos son la base sobre la cual se construye el modelo. Son enunciados que pueden ser verdaderos o falsos, proposiciones, acerca de lo que es importante y de lo que puede ignorarse. Es decir, no están sujetos a una verificación de principios más básicos, son razonablemente verdaderos, pero no necesariamente comprobables y funcionan de base en el razonamiento para deducir las conclusiones. Los supuestos en economía, como señala Archibald, pueden referirse a[17]:

- proposiciones sobre las motivaciones, como las de maximización de la utilidad o los beneficios,
- proposiciones sobre el comportamiento real de los agentes económicos,
- proposiciones sobre la existencia y la estabilidad de ciertas relaciones funcionales,
- restricciones sobre el conjunto de variables a tener en cuenta, y;
- condiciones bajo las cuales se supone que la teoría es aplicable.

[17] En Blaug, Mark; (1985). “La metodología de la economía”. Alianza Editorial. Madrid, España, pág. 127

Mientras Melitz señala dos tipos de supuestos[18]:

- los supuestos auxiliares, que se usan con el objeto de deducir las consecuencias lógicas de una hipótesis; un supuesto auxiliar típico es la clausula *ceteris paribus* (todo los demás permanece constante), y;
- supuestos generativos que sirven para deducir la propia hipótesis, la maximización de los beneficios es un supuesto típico generativo.

Los supuestos del modelo dependen del propósito del mismo. El papel de los supuestos consiste en especificar el campo de aplicación del modelo[19]. Por lo que no se deberían examinar los supuestos de la teoría de la competencia perfecta para ver si ésta es aplicable a la industria de la telefonía en México, ya que sabemos de antemano que esta industria no se rige bajo este tipo de competencia.

3) relaciones entre las variables

El proceso de establecer las relaciones entre las variables está estrechamente vinculado con los supuestos que se establezcan. Y en general las relaciones entre variables se enuncian dentro de los supuestos del modelo. Las relaciones

[18] ibid; pág. 128
[19] ibidem; págs. 126-127

establecidas pueden generarse de un proceso intuitivo y de acuerdo con los hechos o en función de las teorías existentes acerca del fenómeno que se trata de estudiar.

Después de desarrollar los elementos del modelo, supuestos, variables y relaciones se requiere de un proceso de deducción a partir del modelo planteado. Es decir, se requiere obtener una serie de ideas mediante un razonamiento lógico a partir de los supuestos, las variables y las relaciones establecidas.

Por último se verifican las ideas resultantes y se hacen las conclusiones. La validez de un modelo se puede juzgar sobre la base de diversos criterios. Algunos opinan que el criterio para determinar si una teoría o un modelo es válido no radica en si realiza una descripción totalmente realista del fenómeno que pretende explicar, ya que ninguno lo hace, sino en si las predicciones derivadas del modelo son coherentes con la evidencia existente. Mientras otros creen que lo mejor que se puede esperar de un modelo es que la realidad que se pretende explicar esté correctamente representada.

3.3 Modelos económicos y matemáticas

La abstracción es un proceso, como ya se mencionó, para la modelación y a su vez es un proceso lógico. Por lo cual no es extraño o ajeno el uso de las matemáticas en los modelos económicos. Además, su uso es legítimo cuando ayuda al análisis, su exposición y/o su precisión. En la medida en que las formulaciones matemáticas ayuden a dar claridad en el desarrollo de los modelos económicos, estás son deseables.

Como una primera ventaja al utilizar las matemáticas se encuentra el hecho de tener un lenguaje simplificado y universal. En este sentido, se puede mencionar la crítica de Frisch[20] a los economistas anteriores a él que, al tratar una teoría repetían cada vez en su exposición la misma cosa con palabras distintas. En su lugar podrían haber establecido una ecuación o una serie de ecuaciones simplificando palabras y permitiendo una exposición con mayor claridad.

Además, la matemática es una forma especial de lógica, de razonamiento[21]. Con el cual se enriquece el análisis que se realice en el campo económico.

Otra ventaja que ofrece es que el tratamiento matemático de la relación entre variables, de acuerdo con las reglas matemáticas perfectamente definidas, ofrece una seguridad mayor frente a los errores lógicos. La aplicación de formulas de carácter general es una forma mas segura de abarcar todas las posibilidades, con sus condiciones correspondientes, que el tratamiento por medio de ejemplos numéricos y casos concretos.

[20] Zeuthen, F. (1960). "Teoría y método en economía". Ediciones Aguilar, S.A. Madrid, España; pág. 23.
[21] Allen, R.G.G.; (1965). "Economía matemática". Ediciones Aguilar, S.A. Madrid, España; pág. 5

Sin embargo, no se debe llegar a creer que la matemática le da la validez a las ideas económicas porque esto generaría un abuso de las matemáticas. Que en consecuencia podría excluir ideas del pensamiento económico las cuales no se puedan tratar matemáticamente, como el papel del estado en la economía, la relevancia del poder político y económico en las relaciones internacionales, etc.; en cuyo caso los desarrollos económicos se estarían subordinando a los desarrollos de la matemática aplicada.

3.4 Crecimiento económico y ecuaciones diferenciales

El crecimiento económico se ve reflejado en las tasas de incremento del Producto Interno Bruto y sugiere necesariamente un tratamiento en el que involucra el tiempo.

El aumento y la aceleración tienen una gran importancia económica cuando el crecimiento o el decrecimiento, así como la aceleración correspondiente, tienen lugar a través de un proceso económico temporal.

Si tomamos en consideración el transcurso del tiempo puede ser conveniente observar los acontecimientos en su sucesión cronológica y ver como los fenómenos del primer periodo forman la base para los del siguiente. En algunos casos es posible emplear un análisis continuo sin ninguna división fija en periodos.

Ya que el aumento indica una relación entre momentos diferentes, podemos hacer uso de ecuaciones para representarla. Y siendo o suponiendo esta relación de tiempo continuo la forma matemática de expresarlo será mediante ecuaciones diferenciales. Las cuales, como sabemos, incluyen derivadas que expresan cambios de hechos o fenómenos con referencia a otros hechos o fenómenos, como el tiempo.

El estudio del crecimiento económico va más haya de la descripción de cambios, se interesa por los procesos, la conducta de las variables que hacen posible el crecimiento. Por lo cual las soluciones y las representaciones graficas ligadas a las ecuaciones diferenciales pueden aportar mayores elementos para su exposición.

Esto no implica que siempre que se exista un modelo de crecimiento económico, las ecuaciones diferenciales estén o deban estar presentes. Como se mencionó, estas sólo pueden ser deseables si aportan claridad y ayudan al entendimiento del objeto en estudio.

4 EL MODELO DE CRECIMIENTO DE SOLOW

4.1 Antecedentes

El trabajo de Harrod "Un ensayo en teoría dinámica" escrito en 1939 y posteriormente el de Domar "Expansión de capital, tasa de crecimiento y empleo" de 1946 dieron inicio a lo que se denominó en los años sesentas teorías modernas de crecimiento económico[22]. Dentro de los cuales también se encuentran los trabajos de Tobin, Solow y Swan. A pesar de las diferencias que puedan existir entre los planteamientos teóricos de estos economistas, sus modelos poseen características comunes que los diferencian de los planteamientos sobre crecimiento económico de Adam Smith, David Ricardo, Malthus, Mill y Marx, los cuales pretendían encontrar la esencia de los procesos de crecimiento de todas las sociedades a través del tiempo, donde no sólo se incluían elementos económicos sino también políticos, sociológicos, psicológicos, de forma tal que se interrelacionaban para dar una visión global del proceso en el largo plazo. En cambio los modelos de las teorías modernas de crecimiento económico utilizan un número relativamente pequeño de variables económicas, definidas de forma precisa dentro de un modelo elaborado de manera formal sobre un aspecto particular del proceso de crecimiento[23].

---

[22] Stiglitz, Joseph y Uzawa, Hirofumi; (compiladores, 1969). "Readings in the modern Theory of Economic Growth". The MIT Press. London. England.
[23] Jones, Hiwell; (1988). "Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico". Antoni Bosch. Segunda edición. Barcelona, España; págs. 5-6.

Harrod y Domar desarrollaron sus ideas sobre conceptos y planteamientos keynesianos de corto plazo. Pero como una extensión del análisis de Keynes para el largo plazo. Su elaboración, al igual que los economistas de su época, se desarrolló de manera simplificada teóricamente y con preferencia a la búsqueda de un realismo descriptivo[24]. Ambos, aunque de manera independiente, buscaron dinamizar la "Teoría General" por lo que se enfocaron en explicar bajo que condiciones, bajo ciertos supuestos, una economía podía crecer de forma continua con pleno empleo.

Harrod se concentró en las condiciones necesarias para el equilibrio entre el ahorro y la inversión en términos agregados en una economía dinámica, es decir, en un estudio de la economía en el que se consideran los movimientos de las variables a través del tiempo. Partiendo de la igualdad entre el ahorro y la inversión plantea una tasa de crecimiento, *G(t)*, proporcional del producto, *Y(t)*, expresada como el cociente entre la proporción del producto destinado al ahorro, *S(t)*, y el incremento del capital, *K(t)*, en proporción al incremento del producto.

$$G(t) = \frac{dY/dt}{Y(t)} = \frac{\frac{S(t)}{Y(t)}}{\frac{dK/dt}{dY/dt}}$$

Suponiendo que en algún punto en el tiempo la proporción del ingreso destinado al ahorro corresponda a la propensión marginal a ahorrar de la comunidad y que el

[24] ibid, pág. 53

incremento del capital en proporción al incremento del producto satisfaga la demanda de inversión de los productores, entonces la tasa de crecimiento es una tasa de crecimiento en equilibrio, en el sentido que dejaría a los productores y ahorradores, de manera agregada, satisfechos.

Ahora bien si el ahorro está en función de la propensión marginal a ahorrar

$$S(t) = sY(t), \qquad 0 < s < 1$$

y la inversión, *I(t),* está en función del deseado incremento del capital en proporción al incremento del producto por su coeficiente de aceleración, *v*;

$$I(t) = v\frac{dY}{dt}; \qquad v > 0$$

se obtiene que la tasa de crecimiento es igual al cociente entre la propensión marginal a ahorrar y el coeficiente de aceleración.

$$I(t) = S(t)$$

$$v\frac{dY}{dt} = sY(t)$$

$$G(t) = \frac{dY/dt}{Y(t)} = \frac{s}{v}$$

Esta es la ecuación fundamental del modelo de Harrod. Iniciando desde un equilibrio y dados constantes y positivos *s* y *v* muestra que existe un único patrón de crecimiento del producto el cual satisface la condición de equilibrio macroeconómico de Keynes y a lo largo de este patrón todas las variables (el ahorro, la inversión y el producto) del sistema crecen a una tasa proporcional constante, lo que significa que la economía presenta un crecimiento sostenido (steady state)[25]. Esta tasa de crecimiento del producto, llamada garantizada hace que los empresarios se consideren satisfechos por haber invertido las cantidades correctas.

Pero esta tasa no necesariamente satisface un equilibrio de pleno empleo. Confirmando así, una de las afirmaciones de Keynes, la posibilidad de un equilibrio con desempleo.

Evidentemente no existe razón para pensar que una economía crece a una tasa garantizada, esto depende de las expectativas y las decisiones de todos los individuos de una economía.

Incluyendo el mercado de trabajo, Harrod supone que la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo, λ, y de la productividad laboral, τ, son tasas constantes y exógenas al modelo. Entonces las condiciones necesarias y suficientes para mantener el pleno empleo son: la existencia de pleno empleo en el punto inicial y segundo que la tasas de crecimiento del producto sea igual a la suma de λ y τ.

[25] Esto no es algo que se presente en la realidad, pero es un concepto que sirve para analizar algunos problemas del crecimiento económico. Ibidem, pág. 49

Si se define la tasa natural de crecimiento, *n,* del producto como una tasa que permite la continuidad del pleno empleo, entonces en el sistema de Harrod esta tasa natural esta dada por la suma de la tasa del crecimiento de la fuerza de trabajo y la tasa de crecimiento de la productividad de ésta. Si se define un patrón de crecimiento en equilibrio en el cual esten el crecimiento garantizado y el natural, entonces en el modelo de Harrod habrá un único patrón de crecimiento.

$$G(t) = \frac{s}{v} = n = \lambda + \tau$$

El cual satisface las condiciones del crecimiento del estado estacionario, el cual es un patrón de largo plazo en el que cada agregado económico crece a una tasa constante a través del tiempo.

Aunque el crecimiento sostenido con pleno empleo es posible en el modelo de Harrod es altamente improbable, debido a que un movimiento mínimo de *s/*v diferente de *n,* el equilibrio continuo entre el ahorro y la inversión no se traduciría en pleno empleo. Lo cual pone en duda la existencia del equilibrio en estado estacionario, siendo su primer conclusión.

Otra conclusión a la que llegó Harrod fue la existencia de inestabilidad en la tasa garantizada de crecimiento. La divergencia entre la tasa de crecimiento del producto y la tasa garantizada es mayor a lo largo del tiempo.

Si la tasa de crecimiento del producto es menor que la tasa garantizada, implicaría que cada propietario de ingresos ahorrará menos de lo que ellos desearían o los productores estarían acumulando más capital del que ellos requieren, o ambos. Cualquiera de las acciones que se realicen para solucionar estas discrepancias serán contraccionistas. Unos ahorrarán más o los productores invertirán menos; cualquier acción reducirá el producto.

De manera similar un crecimiento del producto mayor a la tasa garantizada generará un incremento en la divergencia de la tasa de crecimiento y la tasa garantizada.

Lo que el principio de inestabilidad sugiere es que en el momento en que el crecimiento de una economía salga de la tasa de crecimiento garantizada no hay nada que evite una depresión o un incremento pronunciado de la inflación. Por lo que será necesaria la intervención del gobierno para evitar los grandes desequilibrios que se pueden generar.

Evidentemente estos resultados tuvieron diversas críticas. Entre estas se encuentra la de Solow que pone en duda el uso del supuesto de una relación capital producto constante. Argumentando que el uso de este supuesto implicaría la no sustitución entre el capital y el trabajo; y en un contexto de largo plazo resulta, desde su perspectiva, inapropiado.

Así, Solow en su artículo "Una contribución a la teoría del crecimiento económico" de 1956 se propuso examinar la oposición entre la tasa natural y la garantizada. Por lo que Solow retoma los supuestos del modelo de Harrod y cambia el supuesto de proporciones fijas del capital y el trabajo por proporciones variables.

4.2 El modelo de crecimiento de Solow[26]

4.2.1 Supuestos del modelo

El modelo de Solow presentado gira en torno a cuatro variables[27]:

- La producción *Y*
- El capital *K*
- El trabajo *L*
- La tecnología o eficacia del trabajo *A*

Se supone que la economía dispone, en todo momento, de ciertas dotaciones de factores productivos, *(K, L, A)*, que se combinan en el proceso de producción. La combinación de dichos factores se expresa en la función:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)A(t)) \qquad (4.1)$$

[26] Solow, Robert; (1956)."A contribution to the theory of economic growth". Quarterly jornal of economics, no. 70 (febrero). Publicado en Sen, Amartya; (1979)."Economía del crecimiento". Fondo de Cultura Económica; México; D.F.

[27] Originalmente Solow sólo considera tres variables: la producción, el capital y el trabajo.

donde *t* denota el tiempo. Lo que nos indica, que Solow no sólo está interesado en las condiciones que generan la producción, sino también, en el comportamiento que tiene ésta y los factores productivos a través del tiempo. Es aquí cuando podemos notar la necesidad de una representación matemática que exprese el cambio de las variables a través del tiempo. Debido a que el modelo presupone que el tiempo es continuo, esta representación es posible con las ecuaciones diferenciales, donde cualquier variable es dependiente del tiempo. Así;

$$\frac{dK}{dt}, \quad \frac{dL}{dt}, \quad \frac{dA}{dt}$$

representan el cambio del capital (K), el trabajo (L) y la tecnología (A) en el tiempo, respectivamente. Y una forma de analizar el comportamiento de estas es con el uso de diagramas de fase.

Las variables exógenas, los factores productivos, son consideradas crecientes. Además, está implicado el supuesto de pleno empleo de los factores productivos, lo que quiere decir, que tanto el capital como la fuerza de trabajo serán absorbidos, en todo momento, por la economía. Esto implica que en los mercados de factores haya una sucesión de equilibrios mientras se da el crecimiento, todos ellos de pleno empleo. El pleno uso del capital ya acumulado, dentro de un periodo, queda asegurado por el supuesto de que este factor puede combinarse en proporciones variables con los demás factores, de acuerdo a las conveniencias del empresario.

La función considera un solo bien, donde *Y* es el volumen del conjunto de la producción. Como se admite que los factores se usan plenamente, durante un periodo el nivel del producto dependerá de la cantidad de recursos que haya disponibles; en el periodo siguiente, dependerá de la nueva dotación de recursos y el avance técnico logrado. Lo anterior significa que, para que haya crecimiento del producto *(Y)* es necesario que aumente la dotación de capital *(K),* de trabajo *(L)* y/o mejore la tecnología o eficacia del trabajo *(A)*.

Además, una parte de la producción se consume y el resto se ahorra (*s*) e invierte. La inversión se supone igual al ahorro por lo que no hay problemas de demanda efectiva.

La función de producción posee dos características:

La primera es que el nivel de producción no varía si no hay cambios en los factores productivos; con lo que se debería saber cómo deben variar éstos para que la producción aumente. Aunque este punto se tratará mas adelante podemos decir en este momento que al considerar a los factores productivos como exógenos Solow supone que las dotaciones iniciales de capital, trabajo y tecnología están dadas.

La segunda característica es que *A* y *L* aparecen en la función de producción en forma de producto. *AL* es el trabajo efectivo, es decir, qué tanto se produce con los niveles de trabajo y conocimientos disponibles. Esta manera de introducir *A* en la función de producción, junto con los restantes supuestos del modelo, implica que el cociente capital-producción, *K/Y*, se estabiliza al cabo de un cierto tiempo.

Un supuesto fundamental del modelo es que la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala en los factores, capital y trabajo. Al aumentar los insumos trabajo y capital en una determinada proporción, el producto se incrementa en la misma proporción. Por lo tanto, matemáticamente la función de producción es homogénea de grado uno. Esto significa que la elevación de todos los factores (variables independientes) *c* veces siempre va a elevar el producto (el valor de la función) exactamente *c* veces.

Lo cual podemos expresar como:

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \qquad \text{para todo } c \geq 0$$

Este supuesto se puede sostener de la combinación de otros dos:

Uno es que la economía se encuentra en un nivel tal que cualquier cantidad adicional de factores incorporados en el proceso productivo darán los mismos resultados que los factores ya existentes. Haciendo referencia a economías grandes donde la especialidad no generará un aumento de la producción mayor a la proporción de las cantidades aumentadas de capital y trabajo.

El otro supuesto es que los factores productivos como la tierra y los recursos naturales, son relativamente irrelevantes. Si la tierra se considerara relevante, éste recurso debería tener la posibilidad de aumentar el producto en la misma proporción en que se aumentaran los demás factores, como lo expresaría una función homogénea de grado uno. Ya que no es posible que los recursos naturales aumenten, la consideración de los recursos naturales en la función de producción generaría rendimientos decrecientes. Omitiendo este factor se mantiene así, la hipótesis de que la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala en los factores productivos *K* y *L.* De manera general, esta hipótesis nos hace suponer que no hay ningún recurso escaso que no pueda aumentar.

El supuesto de rendimientos constantes a escala nos permite operar con una función de producción intensiva, es decir, una función que esté expresada en unidades de trabajo efectivo.

Si definimos

$$c = \frac{1}{AL} \tag{4.2}$$

la función de producción se puede expresar como:

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \tag{4.3}$$

$$F\left(\frac{K}{AL},1\right)=\frac{1}{AL}F(K,AL)$$

donde *K/AL* es la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo

$\frac{F(K,AL)}{AL}=\frac{Y}{AL}$ es el producto por unidad de trabajo efectivo.

Al definir

$$k=\frac{K}{AL} \qquad y=\frac{Y}{AL} \qquad f(k)=F(k,1)$$

se rescribe la función de producción como:

$$y=f(k) \tag{4.4}$$

es decir, expresa la producción por unidad de trabajo efectivo como una función del capital por unidad de trabajo efectivo. Expresando que el volumen de producción por unidad de trabajo efectivo depende exclusivamente de la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo, y no del tamaño total de la economía.

El modelo supone que la forma intensiva de la función de producción, *f(k)*, satisface que:

$$f(0)=0, \frac{dk}{dt}>0, \frac{d^2k}{dt^2}<0$$

La función parte del origen, la primera derivada es positiva y la segunda es negativa; caracterizando así la existencia de un punto máximo que asegura la productividad marginal decreciente del capital y de los factores en general.

Como *F(K,AL)* es igual a *ALf(K/AL)*

La productividad marginal del capital

$$\frac{\delta F(K, AL)}{\delta K}$$

es igual a $AL\frac{d(K/AL)}{dt}\frac{1}{AL}$ que es *dk/dt*

Cada incremento del capital en una unidad causa en la producción un aumento menor que el derivado de la unidad de capital anterior. Esto significa que cuando se dispone sólo de un pequeño capital, una unidad adicional de capital es muy útil y añade una gran cantidad de producción; cuando el capital es muy grande, en cambio, una unidad adicional es menos útil y acrecienta sólo un poco la producción.

Se supone, además, que *f(k)* satisface las condiciones de Inada, las cuales son:

1) En el límite cuando *k* tiende a cero la derivada de *k* respecto al tiempo es igual a infinito

$\lim_{k \to 0} dk/dt = \infty$

es decir, la productividad marginal del capital por unidad de trabajo efectivo es elevada cuando el stock de capital es lo suficientemente pequeño.

2) En el límite cuando *k* tiende a infinito la derivada de *k* en el tiempo es igual a cero

$\lim_{k \to \infty} dk/dt = 0$

es decir, la productividad marginal del capital se vuelve muy pequeña a medida que el stock de capital aumenta.

Estas condiciones permiten garantizar que la evolución de la economía no sea divergente.

Ya se mencionó que Solow supone que los niveles de los factores productivos están dados. Ahora, con respecto a las tasas de cambio, dice que el trabajo y la tecnología crecen a tasas constantes

$$\frac{dL}{dt} = nL(t) \tag{4.5}$$

$$\frac{dA}{dt} = gA(t) \tag{4.6}$$

donde n y g son parámetros exógenos. Se supone que tanto L como A crecen exponencialmente.

La producción se destina al consumo o a la inversión. Debido a que el ahorro es igual a la inversión, el volumen de inversión es $sY(t)$. Además, el capital existente se deprecia a una tasa δ. Por consiguiente,

$$\frac{dK}{dt} = sY(t) - \delta K(t) \qquad (4.7)$$

la tasa de crecimiento del capital es igual a la inversión neta, que es el volumen de inversión menos la depreciación del capital.

Aunque n, g y δ no están sometidas a ninguna restricción de manera individual, su suma se supone positiva.

Lo que en última instancia hace que la función de producción dependa de las tasas de crecimiento del capital *(dK/dt)*, el trabajo *(dL/dt)* y la tecnología o eficacia del capital *(dA/dt)*.

4.2.2 La dinámica del modelo

Ya que las tasas de crecimiento del trabajo y del progreso técnico ya se han supuesto, sólo nos queda averiguar la tasa de crecimiento del capital para describir el comportamiento de la producción en esta economía.

Se puede tener una mejor interpretación del modelo si lo realizamos en base a la función de producción intensiva, revisando el comportamiento del capital en unidades de trabajo efectivo, *k*.

Se sabe que una tasa de cambio, o en este contexto una tasa de crecimiento, es una derivada. Por lo tanto, al derivar *k* obtendremos el comportamiento del modelo a través del cambio en el tiempo del capital por unidad de trabajo efectivo *(k).*

Dado que $k = K/AL$, la aplicación de la regla de la cadena en el cálculo diferencial nos permite expresar que:

la derivada de la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo (*k*) en el tiempo es igual a la derivada del capital (*K*) en tiempo por el producto *AL* (trabajo efectivo) menos el capital (*K*) por la derivada del producto *AL*, todo lo anterior dividido por *AL* al cuadrado.

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt} A(t)L(t) - K(t)\left[A(t)\frac{dL}{dt} + \frac{dA}{dt}L(t)\right]}{\left[A(t)L(t)\right]^2} \qquad (4.8)$$

acomodando en dos cocientes

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}A(t)L(t)}{[A(t)L(t)]^2} - \frac{K(t)\left[A(t)\frac{dL}{dt} + \frac{dA}{dt}L(t)\right]}{[A(t)L(t)]^2}$$

simplificando

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)\left[A(t)\frac{dL}{dt} + \frac{dA}{dt}L(t)\right]}{[A(t)L(t)]^2}$$

expresando en forma de cocientes

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)A(t)\frac{dL}{dt}}{A(t)^2L(t)^2} - \frac{K(t)\frac{dA}{dt}L(t)}{A(t)^2L(t)^2}$$

simplificando y expresando las potencias en forma de producto

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)\frac{dL}{dt}}{A(t)L(t)L(t)} - \frac{K(t)\frac{dA}{dt}}{A(t)A(t)L(t)}$$

K / AL es simplemente *k*. Sabemos que *(dL/dt)/L* y *(dA/dt)/A* son, respectivamente, *n* y *g*. *(dK/dt)*, por su parte es igual a *sY(t)* - *δK(t)*. Al sustituir ahora estas variables se tiene:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)g - k(t)n \qquad (4.9)$$

nuevamente al expresar en forma de cociente y sustituyendo;

$$\frac{dk}{dt} = \frac{sY(t)}{A(t)L(t)} - \frac{\delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)g - k(t)n$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{sY(t)}{A(t)L(t)} - k(t)\delta - k(t)g - k(t)n$$

finalmente, al tener en consideración que *Y / AL* viene dado por *f(k)*, se tiene

$$\frac{dk}{dt} = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t)\ . \tag{4.10}$$

Esta última es la ecuación fundamental del modelo de Solow. La cual determina la ruta temporal de acumulación de capital en unidades de trabajo efectivo que debe seguirse para el empleo de toda la mano de obra disponible. Así, conociendo la ruta temporal de acumulación de capital, de la fuerza de trabajo y la tecnología, podemos obtener de la función de producción la ruta temporal de la producción correspondiente.

La solución, que se presenta enseguida, de esta ecuación diferencial nos dará el único perfil temporal del capital de la economía que empleará la totalidad de la mano de obra disponible.

4.2.3 Interpretación y solución

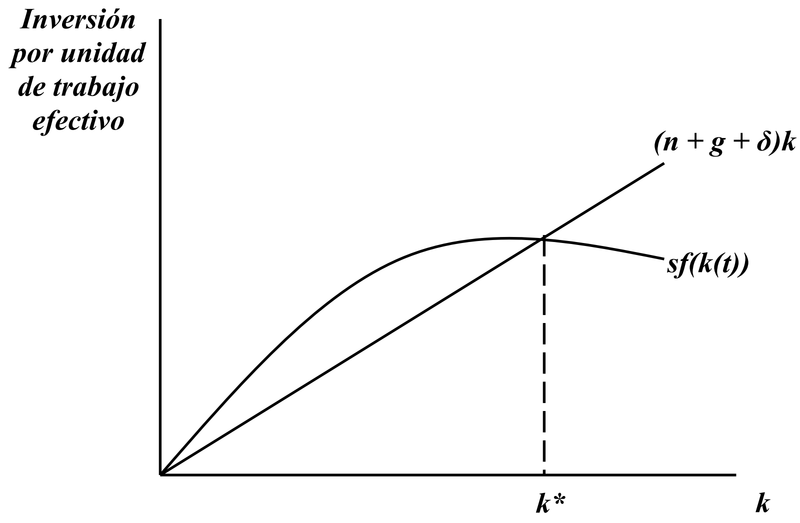
La ecuación fundamental del modelo de Solow dice que la manera en que cambia el capital por unidad de trabajo efectivo en el tiempo es igual a la diferencia entre la inversión realizada por unidad de trabajo efectivo, $sf(k)$, y la inversión de reposición, $(n + g + \delta)k$, que es la inversión necesaria para mantener a k constante.

Hay dos razones por las que se precisa un cierto nivel de inversión para evitar que k disminuya:

- la depreciación; y
- la cantidad de trabajo efectivo creciente.

Es conocido que el capital se deprecia y se ha supuesto que la tasa a la que se deprecia es una tasa constante denominada δ. También la cantidad de trabajo efectivo aumenta a una tasa $n + g$, por lo que es necesaria la inversión para mantener constante el stock de capital por unidad de trabajo efectivo.

Figura 7



Fuente: Romer; pág. 10

La figura 7 muestra mediante una curva la inversión realizada por unidad de trabajo efectivo, *sf(k(t))*, la cual a medida que se incrementa el stock de capital por unidad de trabajo efectivo presenta una tasa decreciente del nivel de inversión. También se observa de manera inicial valores mayores para la inversión por unidad de trabajo efectivo que los presentados para la inversión de reposición, $(n + g + \delta)k$, representada por una línea recta con pendiente $(n + g + \delta)$, la suma de las tasas de crecimiento del trabajo, la tecnología y la depreciación. Cuando la inversión realizada por unidad de trabajo efectivo es mayor que la inversión de reposición, k aumenta; si es inferior, por el contrario, k disminuye. Cuando la inversión realizada es igual a la de reposición, k es constante. De este modo se demuestra la estabilidad.

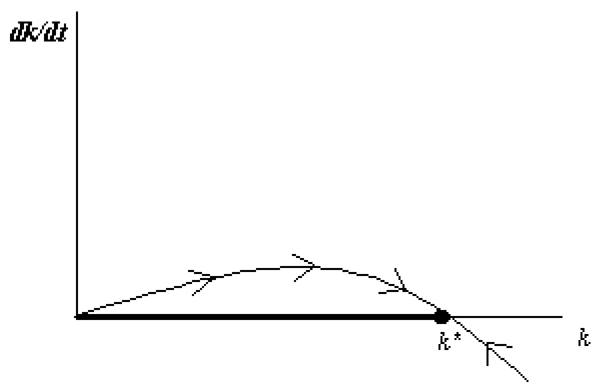
La diferencia en inversión tiene un punto de intersección en el punto k^* marcando la relación del capital y el trabajo efectivo de equilibrio en el tiempo. Cuya relación establece que a partir del momento de intersección en k^*, el capital debe crecer a una tasa idéntica en que lo hace el trabajo efectivo. Estableciendo que la economía por si sola puede alcanzar una tasa de crecimiento uniforme donde la inversión va a crecer a la misma tasa que el capital y el trabajo efectivo. Y en consecuencia, tan mencionada tasa será la misma que la del crecimiento económico reflejado en *Y.* En este estado de crecimiento sostenido, la tasa de crecimiento de la producción por trabajador depende exclusivamente de la tasa de crecimiento del progreso técnico.

La convergencia al equilibrio en este modelo se puede observar con un diagrama de fase. Para el cual es útil basarse en la distancia generada entre la curva de $sf(k(t))$ y la recta $(n + g + \delta)k$ para graficar los valores de dk/dt contra k. Confirmando la presencia de equilibrio en el cruce del eje horizontal donde k no presenta variación y confirmando la convergencia por la pendiente negativa que presenta la línea de fase (ver figura 8).

Por lo revisado en el capítulo 1, vemos que en los valores por arriba del eje horizontal, donde dk/dt es positiva, k debe ser creciente con el tiempo y los valores por debajo del eje horizontal donde hay valores negativos de dk/dt nos indica que k disminuye con el tiempo. Así, la variación del capital por unidad de trabajo efectivo justo en el eje horizontal, donde $dk/dt=0$ converge al equilibrio, al llamado valor de estabilidad.

Esto permite explicar la dinámica transitoria de una economía hacia su estado estable o de crecimiento sostenido: si *k* es inferior a *k**, la productividad marginal del capital es igual a la tasa de interés y esto es superior a la tasa de depreciación efectiva del stock de capital por unidad de trabajo efectivo. De esta manera es razonable pensar que a esa economía le hace falta capital y, por lo tanto, capital por unidad de trabajo efectivo.

FIGURA 8



Fuente: Romer; pág. 11

Por otra parte, permite deducir indicaciones en términos de distribución del ingreso cuando una economía no se encuentra en el estado estable: si el nivel de *k* es menor a *k**, también la productividad marginal del trabajo es igual al salario, el cual es menor que el salario de equilibrio. Si se admite que se remuneran los factores de acuerdo a su productividad marginal, las conclusiones derivadas en términos de distribución del ingreso son: la rentabilidad del capital debe mejorar (incentivando al alza la inversión), la remuneración del trabajo, por su parte, debe provisionalmente mantenerse por debajo de la remuneración que se derivaría en un régimen de crecimiento en estado estacionario. Ahora, una vez que el rendimiento del capital haya alcanzado un nivel suficiente para que las capacidades de producción necesarias al pleno empleo sean instaladas, la totalidad del excedente derivado de la productividad podrá ser entregada al factor trabajo.

Ahora, se apoyarán estos resultados mediante aspectos cuantitativos, obteniendo la solución de la ecuación fundamental del modelo. Recordando que la solución de una ecuación diferencial nos indica la trayectoria temporal. Para la cual hay que mencionar que Solow elabora tres ejemplos. Que representan funciones de producción con rendimientos constantes a escala y cada una de ellas representan una posibilidad tecnológica particular. De los ejemplos, el que presenta características más convenientes es el realizado con una función de producción de tipo Cobb-Douglas, que entre otras cosas en este tipo de función nunca habrá el denominado filo de navaja. Y por ese mismo motivo es el que vamos a revisar a continuación.

Primeramente es útil señalar las características de una función de producción Cobb-Douglas que la hacen tan especial.

La forma matemática de la función de producción Cobb-Douglas está dada por

$$Y = f(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{\beta}$$

donde *α* y *β* son constantes positivas.

La función Cobb-Douglas puede mostrar cualquier grado de rendimientos de escala dependiendo de los valores de *α* y *β*. Si se multiplicaran todos los factores por *m*; se tendría

$$f(mK, mAL) = (mK)^{\alpha}(mAL)^{\beta}$$

$$= m^{\alpha+\beta} K^{\alpha} AL^{\beta}$$

$$= m^{\alpha+\beta} f(K, AL)$$

por lo tanto, si *α* + *β* = 1, la función Cobb-Douglas muestra rendimientos constantes de escala, ya que la producción también se multiplica por *m*. Si *α* + *β* > 1, la función muestra rendimientos crecientes de escala, mientras que *α* + *β* < 1 corresponde al caso de rendimientos decrecientes de escala.

Dado que el modelo plantea el supuesto básico de los rendimientos constantes de escala en la función de producción, se asegurará de que *α* + *β* = 1 haciendo *β* = 1 – *α*. Así,

$$F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \tag{4.11}$$

$$= K^{\alpha} \frac{AL}{(AL)^{\alpha}}$$

$$= AL\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}$$

$$= ALk^{\alpha}$$

de tal forma que;

$$f(k) = F(k,1)$$

$$y = f(k)$$

$$y = k^{\alpha} \tag{4.12}$$

entonces de la ecuación fundamental;

$$\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha} - (n + g + \delta)k$$

haciendo un reacomodo;

$$\frac{dk}{dt} + (n + g + \delta)k = sk^{\alpha} \tag{4.13}$$

se tiene claramente una ecuación de Bernoulli, donde *(n + g + δ)* y *s* son funciones de la variable independiente, *t*.

Para resolverla se sabe que es posible linealizarla, comenzando con dividir entre k^{α}

$$k^{-\alpha}\frac{dk}{dt}+(n+g+\delta)k^{1-\alpha}=s$$

se hace el cambio de variable por

$$z=k^{1-\alpha}$$

teniendo de esta forma

$$k^{-\alpha}\frac{dk}{dt}+(n+g+\delta)z=s$$

se recuerda que

$$\frac{dz}{dk}=(1-\alpha)k^{-\alpha}$$

$$k^{-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dk}$$

quedando con la sustitución

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dk}\frac{dk}{dt}+(n+g+\delta)z=s$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dt}+(n+g+\delta)z=s$$

y finalmente multiplicamos por (1 – α)

$$\frac{dz}{dt}+(1-\alpha)(n+g+\delta)z=(1-\alpha)s \qquad (4.14)$$

ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constante. Cuya solución de este tipo de ecuaciones diferenciales se revisó que es:

$$z(t)=Ae^{-(1-\alpha)(n+g+\delta)t}+\frac{s}{n+g+\delta}\,. \qquad (4.15)$$

Invirtiendo el cambio de variable;

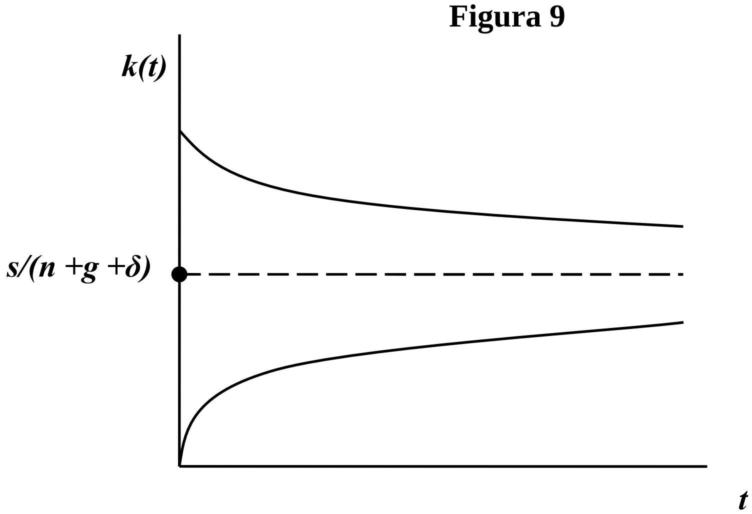
$$z=k^{1-\alpha} \qquad\qquad k=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$k(t)=\left[Ae^{-(1-\alpha)(n+g+\delta)t}+\frac{s}{n+g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (4.16)$$

Debido a que α y 1 – α son valores positivos y que el modelo de Solow es un modelo de largo plazo es válido pensar en valores cada vez mayores de *t* afirmando que k tenderá hacia su valor de equilibrio. Tomando la solución final vemos que cuando *t*→∞ la expresión exponencial se aproxima a cero.

Haciendo que sin importar cual sea el punto de partido (mostrado en el figura 9 bajo dos alternativas) el capital por unidad de trabajo efectivo converja hacia un valor de equilibrio que varía directamente con la propensión al ahorro e inversamente con las tasas de crecimiento del trabajo, la tecnología y la depreciación. Este valor de *k* de equilibrio generará un crecimiento uniforme donde la inversión va a crecer a la misma tasa que el capital y el trabajo efectivo. Es decir, hacia la senda de crecimiento sostenido, los aumentos en la tasa de ahorro o mejor dicho de la inversión aumentarán, manteniendo las demás tasas en igual o menor valor, el producto por trabajador y cuando la suma de las tasas de crecimiento del trabajo, la tecnología y la depreciación aumenten, manteniendo en un nivel constante o menor la tasa de ahorro o inversión, el producto por trabajador disminuirá.

Figura 9



Fuente: elaboración propia

La conclusión principal en el modelo que bajo las condiciones neoclásicas comunes de proporciones variables y bajo una función de rendimientos constantes, en particular una de tipo Cobb-Douglas, nunca se presentará una situación de filo de navaja. Por el contrario, a cualquier tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo y de la tecnología la economía se aproximará a un estado de crecimiento con pleno empleo de los factores.

4.3 *Estudios empíricos*

Los desarrollos que se han elaborado a partir del planteamiento teórico de Solow en las últimas dos décadas se concentran principalmente en estudios empíricos. Muchos de los cuales utilizan la versión desarrollada por Mankiw, Romer y Weil (MRW) de 1990. Este artículo examina que tanto el modelo de Solow es consistente con la variación internacional en los niveles de vida.

Los autores hacen una extensión del modelo de Solow agregando, el factor que ellos consideran clave dentro de las variables omitidas, el capital humano. Entendiendo este concepto como las habilidades y conocimientos adquiridos por el trabajador. Suponen una función de producción de la siguiente forma:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta} \qquad \alpha + \beta < 1, \qquad (4.20)$$

donde H es el capital humano. Como antes, la función de producción presenta rendimientos constantes de escala por lo que la desigualdad $\alpha + \beta < 1$ asegura esta característica. Cambiando (4.20) en unidades de trabajo efectivo:

$$y = \frac{Y}{AL} \qquad k = \frac{K}{AL} \qquad h = \frac{H}{AL}$$

$$y = (k)^{\alpha}(h)^{\beta} \tag{4.21}$$

Se observa que y el producto por trabajado efectivo depende ahora de las habilidades del trabajador *(h)* en conjunción al capital por trabajador efectivo *(k).* MRW tratan al capital físico y humano de la misma forma, ellos suponen que ambos tipos de capital se deprecian a la misma tasa (δ) y que la sociedad invierte una fracción, S_H, de su ingreso total en capital humano.

Las ecuaciones de acumulación para el capital humano y físico (en términos de sus proporciones de trabajo efectivo) son entonces:

De (4.10)

$$\frac{dk}{dt} = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t)$$

$$\frac{dk}{dt} = sy - (n + g + \delta)k(t) \tag{4.22}$$

y de forma similar

$$\frac{dh}{dt} = S_H y - (n + g + \delta)h(t)\,. \qquad (4.23)$$

Siendo ahora dos las que podríamos llamar ecuaciones fundamentales del modelo. A partir de las cuales se presenta nuevamente convergencia.

MRW analizan 75 países para un periodo que va de 1960 a 1985. El modelo explica cerca del 80% de la variación internacional en el ingreso per capita. La evidencia sostiene que manteniendo el crecimiento de la población y de la acumulación de capital constante los países convergen alrededor de la tasa que el modelo de Solow aumentado con el capital humano predice. Obteniendo una tasa anual de convergencia en promedio del 2%. Para la obtención de sus resultados utilizan técnicas econométricas que seleccionan un grupo de países con series de tiempo que presentan las mismas propiedades estotásticas para hacer posibles las estimaciones de la proporción en capital físico. Estimaciones realizadas bajo datos de sección cruzada.

Solow nos dice que entre más alta sea la tasa de ahorro, más rico será el país, y entre más alta sea la tasa de población más pobre el país.

Para cualquier tasa de crecimiento de acumulación del capital humano altas tasas de ahorro o bajas tasas de crecimiento poblacional conducen a un nivel alto de ingreso y de esta forma a un nivel alto de capital humano, en consecuencia, la acumulación de capital físico y el crecimiento de la población tiene grades impactos en el ingreso cuando la acumulación de capital físico es tomado en cuenta. La acumulación de capital humano puede estar correlacionado con la tasa de ahorro y la tasa de crecimiento de la población, esto implicaría que omitiendo la acumulación de capital humano afectaría la estimación de los coeficientes del crecimiento del ahorro y de la población. MRW encontraron que la acumulación de capital humano es un factor que esta correlacionado con el crecimiento del ahorro y de la población.

Rao et. al. (2008) utilizando los índices Dreher extienden el modelo de Solow para derivar estimaciones específicas por países de la tasa de crecimiento sostenido para Malasia, Singapur, Tailandia, India y Filipinas. Dreher desarrollo en 2006 una medida del nivel de globalización, la cual tiene la ventaja de reducir la controversia de su medición. Su medida usa el método de componentes principales para combinar diferentes variables desde las económicas hasta las políticas y sociales. El índice de globalización de Dreher para 123 países se puede obtener de su página web. El efecto de crecimiento de sus medidas de globalización son significativos, implicando que los países con un alto nivel de globalización crecen más rápido. Pero sus estimaciones son pobres para la tasa de crecimiento sostenido. Por lo que los autores prefieren tomar una metodología de series de tiempo.

Eligen la función de producción del modelo de Solow, primeramente porque posee retornos constantes de escala, en segundo lugar porque no existe evidencia convincente de que los modelos endógenos muestren un mejor comportamiento que el modelo de Solow.

Realizan su estimación para el periodo 1974 – 2004 mediante mínimos cuadrados no lineales en dos etapas y los valores rezagados son utilizados como las variables instrumentales

Sus resultados muestran que los países con muchas políticas de globalización tienen altas tasas de crecimiento sostenido pero los efectos del crecimiento sobre las tasas de crecimiento sostenido son más pequeñas que en muchos estudios. También muestran que los efectos permanentes de crecimiento de la globalización no son uniformes entre todos los países estudiados. La globalización tiene un mayor efecto en la India y un menor efecto en Filipinas.

Otros estudios donde se realizan estimaciones con datos de sección cruzada, como el de Joao Tovar Jalles (2007) que revisa 64 países para un periodo de 1960 a 1997, obtienen sus resultados con ecuaciones restringidas y ecuaciones sin restringir. Llegando básicamente a las mismas conclusiones que MRW. Mientras que el estudio de Steven Durlauf y Paul Johnson (1992) donde evalúan 121 países en 3 diferentes grupos para los años 1960-1985, argumentan que el crecimiento entre países es mejor explicado por un modelo de convergencia local contra convergencia global, los países que convergen localmente, es decir, las economías con condiciones similares iniciales tienden a convergir de una a otra. Sin embargo, encontraron una pequeña evidencia de convergencia entre países con diferencias iniciales sustanciales como la medida del producto per capita o tasas de alfabetismo.

Por otro lado, obtuvieron que el impacto de la formación de capital en el producto agregado se incrementa con el nivel de desarrollo económico. Estos resultados son consistentes con modelos de equilibrio múltiple en el comportamiento de largo plazo. Sus resultados sugieren la necesidad de complementar el modelo de Solow con una teoría de diferentes funciones de producción agregadas con el propósito de explicar completamente los patrones de crecimiento internacional.

También existen artículos basados en estimaciones de datos panel. Algunos de ellos, como Islam (1995), son el resultado de la crítica al uso de una regresión de sección cruzada por parte de MRW. Caselli et al. (1996) recomiendan trabajar con datos panel mediante el método generalizado de momentos para tomar en cuenta las variables omitidas y tendencia endógena en las regresiones de crecimiento entre países. Norman Loayza (1994) utilizando el modelo neoclásico de Solow estima la tasa de convergencia para el estado estacionario bajo una muestra de 98 países bajo intervalos de cinco años de 1965 a 1985. Estimando una tasa de convergencia de 0.0494, que implica alrededor de 14 años. También estima la porción de capital en producción en un 0.347 argumentando que sus tasas de convergencia estimadas proveen evidencia a favor del modelo neoclásico de Solow en el cual el capital físico sólo puede ser acumulado.

Ding y Knight (2008) analizan datos panel para 146 países en el periodo 1980-2000 con el objetivo de examinar hasta que punto la diferencia de crecimiento entre China y otros países puede ser explicado por el modelo de Solow aumentado. Las estimaciones se basan en el método generalizado de momentos, el cual permite para efectos inobservados de países específicos medir el error y los problemas de endogeneidad de los regresores. Ellos encontraron, bajo los supuestos concernientes, que el modelo de Solow aumentado provee una buena medida de la variación internacional en el crecimiento económico.

En particular, la inversión en capital físico, cambia en la estructura del empleo, las condiciones de convergencia y el crecimiento poblacional son las principales fuentes de las diferencias de crecimiento entre China y muchos otros países. Encontraron que el modelo de Solow aumentado predice la tasa de crecimiento de China de manera precisa. La formación de capital juega un papel importante en el crecimiento económico de China y la perspectiva del manejo de la inversión creciente no contradice la salida del equilibrio de la teoría neoclásica de crecimiento.

La convergencia condicional también contribuye significativamente a las diferencias de crecimiento entre China y otros países. Por último la baja tasa de crecimiento poblacional hace una importante contribución al crecimiento de China a diferencia de otros países en desarrollo.

Otro autor que considera el método generalizado de momentos para datos panel es Vidyattama (2007) quien realiza sus estimaciones para las 26 provincias de Indonesia en el periodo 1983 – 2003. Obteniendo un aplicación diferente a nivel nacional que entre países, ya que dentro de un país se puede considerar, y lo hace, las políticas nacional y la interacción entre las regiones.

Ikonen (1999) examina el modelo de Solow aumentado con capital humano mediante datos panel de observaciones anuales desde 1960 hasta 1993 para 29 países. La principal contribución es permitir la variación del progreso técnico entre países. Así, como el uso de diferentes medidas del capital humano. Específicamente este trabajo relaja los supuestos del modelo y permite la variación del progreso técnico entre países. Concluye que el modelo de Solow aumentado no es consistente con la realidad a pesar de relajar algunos supuestos, como lo es permitiendo la variación del progreso técnico entre países. Particularmente las estimaciones de la tasa de convergencia dada por la regresión están muy lejos de valor predicho por el modelo. Es claro que el modelo debe ser modificado o un modelo nuevo debe ser desarrollado. En la ecuación de crecimiento el signo del coeficiente para cada variable del capital humano se encuentra positivo y estadísticamente significativo. Sin embargo, las conclusiones son solamente sugerencias.

Ledyaeva y Linden (2006) examinan el impacto de la inversión extranjera directa (IED) ennel crecimiento económico de corto plazo en las regiones de Rusia en el periodo 1996 – 2003. Utilizando como base teórica el modelo de Solow y ocupando la metodología del panel dinámico. Los resultados sugieren que la IED es fuertemente un factor significativo en la explicación del crecimiento económico de Rusia a nivel regional. Encontraron que la alta correlación entre la inversión nacional, exportaciones y los recursos naturales puede reducir la confiabilidad de los estimadores de los factores mencionados. Este problema es realmente serio para las regiones ricas, las cuales son en general casi el doble tanto en la abundancia de recursos como de las regiones pobres. Un interesante resultado es que la crisis de 1998 fue más perjudicial para las regiones de bajos ingresos que para las regiones de altos ingresos. La convergencia entre las regiones pobres y las ricas fue encontrado para el periodo en estudio. Sin embargo, la IED no juega un papel importante en el proceso de convergencia.

Otro trabajo en el que se revisa convergencia en un país es el realizado por Ralhan y Dayanandan (2005) quienes prueban la convergencia del ingreso condicional e incondicional entre las provincias de Canadá en los años 1981 – 2001. Estos autores aplicaron el método generalizado de momentos en primera diferencia para el modelo de crecimiento dinámico de Solow y comparan los resultados con otras aproximaciones de datos panel como los efectos fijos y los efectos aleatorios. El método usado no sólo es para los niveles iniciales de tecnología de provincias específicas sino también para la tasa de heterogeneidad del progreso tecnológico entre las provincias ricas y no tan ricas de Canadá. Uno de los principales resultados es que las provincias de Canadá no muestran una tasa de progreso tecnológico común y una función de producción homogénea.

Además los resultados sugieren que la tasa de convergencia es de alrededor de 6%.

Para el caso mexicano Cabrera (2002) analiza la evidencia empírica existente para el caso de los estados de la República en el periodo de 1970 – 1995 para determinar la convergencia entre los estados utiliza, a partir del modelo de Solow, regresiones por mínimos cuadrados no lineales. Constatando la presencia de convergencia absoluta entre los estados de México durante el periodo analizado, aunque con mayor velocidad de convergencia en los últimos años. La velocidad a que se da la convergencia es ligeramente superior al 1% para el periodo completo y de alrededor de 3% para los últimos 15 años. Lo anterior implicaría, bajo los supuestos habituales del modelo, alcanzar la mitad de la distancia al estado estacionario en 62 años si se considera el crecimiento observado en la muestra completa. Y si se considera el periodo 1980 – 1995 se cubriría la distancia en alrededor de 21 años.

Para la región de América Latina Barrientos (2007) trata de cubrir el vacío teórico, histórico y de evidencia estadística de convergencia de la región durante 106 años de 1900 a 2005. Para lo cual construye un modelo de crecimiento neoclásico basado en los modelos de Solow y Ramsey. Después de revisar la historia económica de 32 países estos los agrupa de forma que entre ellos exista la convergencia. Sin embargo, los grupos que convergieron bajo todos los conceptos de convergencia fueron aquellos compuestos por países que fueron exitosos en su proceso de industrialización y han sido capaces de construir instituciones fuertes que podrían traer beneficios y crecimiento económico en un contexto de globalización. La velocidad de convergencia de estos países es de alrededor del 2%. También se encontró que el proceso de integración no ha ayudado a acelerar la convergencia.

Milton Barossi-Filho, Ricardo Goncalvez Silva y Eliécer Martins Diniz (2005) realizan un trabajo mediante panel dinámico concluyendo que la evidencia apoya el resultado de que en general el valor esperado de crecimiento del ingreso entre países es negativo mientras que la diferencia entre el ingreso inicial es positiva. Al mismo tiempo, la existencia de un término de corrección de error, implica en el largo plazo, que el sistema es de orden de integración 1, así que la ausencia de raíces unitarias es consistente con la hipótesis de convergencia bajo la estructura de las series de tiempo del modelo. Con el término corrector de error se asume como variable aproximada a la velocidad de convergencia, que en promedio se estimó en una tasa anual de 7.42%.

A su vez estos autores comparan algunos resultados entre datos de sección cruzada y datos panel, argumentando que, en general, los resultados de la tasa de convergencia derivados de datos panel son más volátiles, con valores de 3.8 a 9.1% (Islam, 1995) de 30% (Lee, Pesaran y Smith, 1997) y de 10% (Caselli, Esquivel y Lefort, 1996) comparado con los datos de sección cruzada obtenidos por MRW con un promedio anual de 2%.

Un último grupo de artículos basados en el modelo de Solow son los estimados mediante regresiones múltiples, tal es el caso de Bhaskara Rao (2007) quien trabajo con datos para Fiji, mostrando que la apertura comercial y el capital humano tienen significativos y permanentes efectos de crecimiento. Sin embargo, estos efectos de crecimiento son pequeños y eventualmente convergen en el tiempo. Petre Cariani (2007) hace una estimación del modelo de Solow para la economía rumana, mostrando que el modelo de Solow provee una buena aproximación de la dinámica de la economía rumana para el periodo 1990-2004, con respecto a la dinámica del agregado PIB y las proporciones de las principales variables macroeconómicas, como producción por trabajador, proporción capital producto o capital por trabajador. Y Haciendo un pronóstico para el año 2030 del crecimiento potencial del 3%. Erich Gundlach (2006) argumenta que las diferencias internacionales en el producto por persona del estado estacionario se deben a las diferencias internacionales en tecnología tal como la proporción producto capital es constante para las diferencias internacionales en las intensidades del estado estacionario del capital. Su trabajo muestra que la información entre países puede en una sola especificación empírica alternativa que usa una medida de tecnología institucional como una variable explicativa y trata la proporción producto capital como parte de la constante de regresión.

CONCLUSIONES

En este trabajo se expuso el modelo de crecimiento económico de Solow (1956) con la finalidad de ejemplificar el uso de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la economía. Por lo cual se prestó mayor atención en el desarrollo matemático que se plantea en el modelo.

Las ecuaciones diferenciales son igualdades que presentan en sus elementos derivadas. Con las cuales se expresan cambios continuos en una variable con respecto a otra, bien sea el ahorro con referencia al ingreso, el producto con respecto al tiempo o cualquier otro par de variables.

Resolver una ecuación diferencial implica encontrar una función que se exprese sin derivadas. Obteniendo así la forma en que cambia la variable, es decir, la trayectoria de la variable dependiente con respecto a la variable independiente. Cuando esta última es el tiempo, es posible visualizar la solución con el uso de la herramienta gráfica llamada trayectoria temporal.

Las diferentes ecuaciones diferenciales poseen varios métodos de solución, de acuerdo al tipo, orden, grado y si son o no lineales. Por lo que saber identificar cada una de ellas es el primer paso para poder resolverlas. La exposición de diversos métodos de solución, además de ayudar a entender las ecuaciones diferenciales, brinda la manera adecuada con la cual se resuelve la ecuación fundamental del modelo de Solow. Esta ecuación es una ecuación de Bernoulli que se resuelve mediante un proceso de linealización y después se resuelve con el método lineal de coeficiente y término constante.

Cada parte del modelo se construye con diversas expresiones matemáticas, propias del álgebra, del cálculo infinitesimal y de ecuaciones diferenciales; para manifestar las relaciones de las variables relevantes y los supuestos respecto al comportamiento de la producción, el capital, el trabajo y la tecnología. Con el uso de una ecuación diferencial y su solución, Solow muestra la convergencia de su modelo y se aprecia ésta con el uso de un diagrama de fase.

La exposición realizada del modelo de Solow presenta los elementos que conforman la construcción del modelo. Comenzando con los supuestos, donde se establecen las variables relevantes, su notación, su comportamiento, su relación; en general, se establecen las condiciones de la economía planteada. Siempre que es posible los supuestos se representan mediante expresiones matemáticas. Además el desarrollo del modelo se realiza mediante operaciones algebraicas, el uso de reglas de diferenciación y por métodos de solución de ecuaciones diferenciales.

Obteniendo como resultado la existencia y la convergencia a un crecimiento proporcional en la economía planteada. Estableciendo que la economía por si sola puede alcanzar una tasa de crecimiento uniforme donde la inversión va a crecer a la misma tasa que el capital y el trabajo efectivo.

En el modelo de Solow las ecuaciones diferenciales y toda la matemática utilizada aportan elementos esenciales para la obtención de los resultados deseados.

Sin embargo, no hay que pensar que el uso de las matemáticas demuestra, por el simple hecho de estar ahí, la validez de un modelo porque ésta se confirma con la realidad y no con una manera en particular de expresar una idea que pretende explicar un aspecto de la realidad.

Ya que Solow utiliza las matemáticas para afirmar sus ideas y no para demostrar la validez de estas no se debe juzgar tanto la validez de los resultados matemáticos sino la validez de las ideas.

Se puede presentar una ecuación diferencial muy sencilla o una muy compleja en un modelo económico, pero su importancia en la ciencia económica se va a medir en la manera en que nos ayude a expresar una idea. Si aporta claridad a la exposición, entonces su uso estará justificado. Pero en ningún momento su uso estará obligado.

BIBLIOGRAFÍA

- Allen, R.; (1965). “Economía matemática”. Ediciones Aguilar. Madrid, España.
- Barossi Filho, Milton; et. al. ;(2005). “The Empirics of the Solow Growth Model: Long-Term Evidence”. Jornal of Applied Economics; Vol. VIII, No.1
- Barrientos, Paola; (2007). “Theory, History and Evidence of Economic Convergence in Latin America”. Institute for Advanced Development Studies, Development Research Working Paper Series No.13.
- Blaug, Mark; (1985). “La metodología de la economía”. Alianza Universidad. Madrid, España.
- Cabrera Castellanos, Luis F.; (2002). “Convergence and Regional Economic Growth in Mexico: 1970-1995”. Munich Personal RePEc Archive, Paper No. 4026.
- Carmona Jover, Isabel; (1997). “Ecuaciones diferenciales”. Longman de México Editores, S.A. de C.V. México, D.F.
- Carrillo Calvet, Humberto; (2000). “Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias”. Notas para un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Chiang, Alpha; (2006). “Métodos fundamentales de economía matemática”. McGraw-Hill. México, D.F.
- Ding, Sai y Knight, John; (2008). “Can the Augmented Solow Model Explain China´s Economic Growth? A Cross-Country Panel Data Analysis”.

Department of Economics, University of Oxford. Discussion Paper Series No. 380.

- Escobar Uribe, Diego; (2001). “Economía matemática”. Alfaomega S.A. Colombia.
- Gandolfo, Giancarlo; (1976). “Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica”.Tecnos. España, Madrid.
- Gundlach, Erich; (2006). “The Solow Model in the Empirics of Cross-Country Growth”. AEA Conference Papers.
- Haache, Graham; (1979). “The Theory of Economic Growth. An Introduction”. St. Martin‘s Press. New York.
- Heading, J.; (1974). “Ecuaciones diferenciales ordinarias”. Volumen 1. Editorial Limusa. México, D.F.
- Jones, Hywel; (1988). “Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico”. Bosch, casa editorial. Barcelona, España.
- Katouzian; Homa; (1982). “Ideología y método en economía”. H. Blume Ediciones. Madrid, España.
- Kells, Lyman M.; (1970). “Ecuaciones diferenciales elementales”. McGraw-Hill. México, D.F.
- Krasnov, M.L. et. al.; (2002). “Ecuaciones diferenciales ordinarias”. Editorial URSS, Moscú.
- Ledyaeva, Suetana y Linden, Mikel; (2006). “Foreign Direct Investment and Economic Growth: Empirical Evidence from Russian Regions”. Bank of Finland, BOFIT. Discussion Papers No. 17

- Loayza; Norman V. (1994). “A test of the International Convergence Hypothesis Using Panel Data”. The World Bank, Policy Research Department, Macroeconomics and Growth Division. Policy Research Working Paper 1333.
- Lomelí, Héctor y Rumbos, Beatriz; (2003). “Métodos dinámicos en economía”. Internacional Thomson Editores, S.A. México.
- Mankiw, N. Gregory; Romer, David; Weil, David N.; (1990). “A Contribution to the Empirics of Economic Growth”. NBER Working Papers Series No. 3541.
- Ostaszewski, Adam; (1993). “Mathematics in Economics”. Blackwell Publishers. Oxford, U.K.
- Rainville, Earl; (1976). “Ecuaciones diferenciales elementales”. Editorial Trillas. México, D.F.
- Rao, B. Bhaskara; Tamazian, Artur y Vadlamannati, Krishna Chaitanya; (2008). “Growth Effects of a Comprenhensive Measure of Globalization with Country Specific Time Series Data”. Munich Personal RePEc Archive, Paper No. 7917.
- Romer, David; (2002). “Macroeconomía avanzada”. McGraw-Hill. España.
- Ros, Jaime; (2001). “Development theory and the economics of growth”. The University of Michigan Press. Estados Unidos.
- Schwarzenberger, R.; (1972). “Ecuaciones diferenciales elementales”. Editorial Trillas. México, D.F.

- Sen, Amartya; (1979). “Economía del crecimiento”. Fondo de Cultura Económica. México, D.F.
- Shone, Ronald; (1997). “Economic Dynamics”. Cambridge University Press. U.K.
- Solow, Robert M.; (1976). “La teoría del crecimiento”. Fondo de Cultura Económica. México, D.F.
- Spiegel M.R.; (1965). “Ecuaciones diferenciales aplicadas”. UTEHA. Barcelona, España.
- Stiglitz, Joseph y Uzawa, Hirofumi; (1970). “Readings in the Modern Theory of Economic Growth”. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts.
- Sydsaeter, Knut y Hammond, Peter; (1995). “Mathematics for Economic Analysis”. Prentice-Hall. New Jersey.
- Thirlwall, A.P.; (1999). “Growth and Development”. MacMillan. Great Britain.
- Tovar Jalles, Joäo; (2007). “Empirical Applications of Neoclassical Growth Models. The “Fit” of the Solow Augmented Growth Model”. FEUNL Working Paper Series No. 520
- Zeuthen, F.; (1960). “Teoría y método en economía”. Ediciones Aguilar, S.A. Madrid, España.
- Zill, Dennos; (2002). “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado”. International Thomson Editores, S.A., México.