



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISPERSIÓN ANÓMALA DE ONDAS ACÚSTICAS
EN ARREGLOS PERIÓDICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

DANIEL MONSIVAIS VELÁZQUEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TUTOR :
DR. MARCOS LEY KOO

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Monsivais
Velázquez
Daniel
55 95 02 49
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
401004443
2. Datos del tutor
Dr.
Marcos
Ley
Koo
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Raúl
Esquivel
Sirvent
4. Datos del sinodal 2
Dra.
Lucía
Medina
Gómez
5. Datos del sinodal 3
Dr.
Federico
Sabina
Císcar
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Arturo
Orozco
Santillán
7. Datos del trabajo escrito
Dispersión anómala de ondas acústicas en arreglos periódicos.
85 p.
2008

*Quiero dedicarla especialmente a mis padres,
a mis hermanos, a mi abuela Carmen y a Jeny,
por su apoyo, cariño y comprensión.*

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente al Dr. Marcos Ley Koo, por todo el tiempo y apoyo que me ha dado desde que lo conozco, especialmente lo brindado para la realización de este trabajo.

A los Drs. Raúl Esquivel Sirvent, Lucía Medina Gómez, Arturo Orozco Santillán y Federico Sabina Císcar, por los consejos y correcciones que hicieron sobre este trabajo.

A la mayor parte de los profesores y ayudantes con los que tomé clase en la Facultad de Ciencias, pues lo que me enseñaron, ha sido y me seguirá siendo de gran ayuda para todo lo que tenga que hacer en mi vida.

A todos los que de alguna manera u otra, me ayudaron a lo largo de la carrera.

Contenido

1. Introducción	1
2. Descripción del experimento	5
2.1. Guía de onda de diámetro modulado	7
2.2. Guía de onda con ramificaciones transversales	11
3. Procesamiento de señales	13
4. Bandas prohibidas en funciones de transmisión	25
4.1. Ruido Blanco	25
4.2. Análisis refinado de bandas	30
4.2.1. Guías de diámetro modulado	30
4.2.2. Guías con ramificaciones	40
5. Pulsos Gaussianos	45
5.1. Gaussiana a través del filtro de diámetro modulado	47
5.2. Gaussiana a través del filtro de ramificaciones	56
6. Análisis de resultados	61
6.1. Filtro de diámetro modulado	61
6.2. Filtro de ramificaciones transversales	68
7. Conclusiones	69
Apéndices	71
.1. Función de transmisión numérica	73
.2. Centroides y velocidad de grupo	75

Capítulo 1

Introducción

El estudio sobre la dispersión de ondas en estructuras periódicas ha sido de gran interés para la comunidad científica, principalmente desde el descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de las partículas a escala atómica, lo cual abrió grandes ramas de investigación que han llevado a grandes desarrollos tecnológicos, como el de los semiconductores. El conocimiento y manipulación de las propiedades del arreglo cristalino de un semiconductor, llevaron a la invención del transistor, el cual se encuentra en casi cualquier aparato electrónico, con principal participación en el desarrollo exponencial que han tenido las computadoras en el último cuarto de siglo.

Dentro de la parte acústica, se han realizado investigaciones de este tipo, aprovechando analogías con otras ramas de la física, por ejemplo, con el fenómeno de estructura de bandas en un semiconductor, en el cual los niveles electrónicos del semiconductor se agrupan en regiones de niveles permitidos (bandas permitidas), separadas por regiones de niveles prohibidos (bandas prohibidas o brechas)[3]. Si se manda un pulso acústico a través de un arreglo periódico, irá perdiendo algunas componentes debido a la estructura del arreglo, lo cual se verá reflejado en el espectro de frecuencias, donde se observaran zonas en las que su amplitud se fué a cero y otras que no se vieron afectadas, quedando un patrón similar a la estructura de bandas del semiconductor. Existen muchos tipos de arreglos en los cuales se puede realizar este tipo de experimentos. En algunos, el arreglo periódico consiste en una guía de onda, la cual es una estructura física que se utiliza para tener más control sobre la dirección de la perturbación (como un cilindro, un paralelepípedo rectangular, etc). Esta tesis enfocó su estudio al fenómeno de bandas, dispersando ondas acústicas en dos guías de onda unidimensionales.

La primera a estudiar consistió en una guía cilíndrica, cuyo diámetro cambia abruptamente, de un valor menor fijo a otro mayor fijo, y viceversa, con cada cambio de diámetro igualmente espaciado. Este tipo de guía fue descrita por Robertson[8]. Además, se estudió otra guía de onda cilíndrica, la cual tiene, espaciadas periódicamente, ramificaciones transversales al eje de la guía, también descrita por Robertson[7]. Ambas guías de onda, generan intervalos de frecuen-

cia en los cuales la transmisión está permitida y otros para los cuales no (en adelante nos podremos referir a la guía como filtro, debido a que estudiaremos las zonas en que dichas guías se comportan como tal).

La primera parte de esta tesis consistió en caracterizar dichas guías, vía la función de transmisión, la cual se obtiene comparando el espectro de dos pulsos; uno que atravesó la guía y otro que viajó la misma distancia, pero sin atravesar el arreglo. Debido a que los dos pulsos, originalmente eran iguales, cualquier diferencia entre los espectros estará asociado a la dispersión en la guía (capítulos 2 y 4).

Por otro lado, para ondas electromagnéticas en un medio dispersivo, la velocidad de grupo v_g , está dada por:

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}, \quad (1.1)$$

donde ω es la velocidad angular y k es el número de onda[1].

En términos de la parte real n_r del índice de refracción,

$$n_r = c/v_\phi = ck/\omega, \quad (1.2)$$

con $v_\phi = \omega/k$ la velocidad de fase y c la velocidad de la luz. Derivando con respecto a la frecuencia angular obtenemos

$$\frac{dn_r}{d\omega} = \frac{c}{\omega} \frac{dk}{d\omega} - \frac{ck}{\omega^2} = \frac{c}{\omega} \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_\phi} \right), \quad (1.3)$$

de modo que podemos expresar v_g como:

$$v_g = \frac{c}{n_r + \omega \frac{dn_r}{d\omega}}. \quad (1.4)$$

De la ecuación 1.4 se observa que en las zonas donde $n_r(\omega)$ crece despacio (dispersión normal), la velocidad de grupo va disminuyendo lentamente debido a que $dn_r/d\omega$ es pequeño. Ya que no hay ninguna restricción para la magnitud y signo de $dn_r/d\omega$, este puede tener efectos anormales en la velocidad de grupo, los cuales pueden ser superluminales ($v_g \gg c$, si $dn_r/d\omega < 0$) o de reducción drástica de dicha velocidad ($v_g \cong 0$, si $\omega dn_r/d\omega \ll n_r$). Este tipo de efectos pertenecen a otro tipo de dispersión, comúnmente llamada anómala.

El razonamiento que condujo a la ecuación 1.4 no es únicamente para ondas electromagnéticas, si no para cualquier tipo de ondas. Las guías de onda descritas por Robertson[7, 8], son ideales para estudiar la dispersión anómala, ya que en las bandas de transmisión prohibida que generan, la dispersión sufrida entre dos frecuencias relativamente cercanas puede ser muy grande, lo cual llevaría a grandes cambios en la velocidad de grupo. La segunda parte de esta tesis se basó en estudiar si en las guías caracterizadas en los primeros capítulos, existe el fenómeno de dispersión anómala (ch:gauss).

Esta tesis, en gran parte está basada en los trabajos de Robertson, en gran medida para tratar de verificar los resultados para la velocidad de grupo obtenidos por el, y en caso negativo, tratar de buscar las razones de las posibles

discrepancias. Además, se extendió el estudio del cambio en la velocidad de grupo para distintas configuraciones de la guía, ya que el artículo publicado por Robertson solo incluye una configuración, y esta permite variaciones.

Los resultados de las mediciones de Robertson en la guía de diámetro modulado, la cual un defecto en la periodicidad del arreglo lleva a una disminución en la velocidad de grupo, se reportó que está se redujo a cerca del 24% de la velocidad del sonido. Para el caso del arreglo de ramificaciones, se reporta para la configuración de 3, 4 y 5 ramificaciones, una velocidad de grupo alrededor de los 695 m/s, 720 m/s y 920 m/s respectivamente.

Para este tipo de mediciones en los cambios a la velocidad de grupo, en general, se ubican las bandas de transmisión prohibida que la guía genera, y se hace atravesar por ella un pulso cuyo ancho de banda queda dentro del intervalo de frecuencias de alguna banda prohibida. El pulso original es dispersado dentro de la guía, y se compara su velocidad de grupo, con la de un pulso de prueba, igual al original, que recorre la misma distancia sin haber sido dispersado. Esto puede hacerse de varias maneras, ya sea directamente de un experimento o de forma indirecta, obteniendo la función de transmisión de la guía generando un modelo teórico, y aplicando dicho modelo a un conjunto de datos que represente al pulso original, simulando la dispersión de la guía. Para hacer lo anterior, se obtiene la transformada de Fourier del pulso original y se multiplica por la función de transmisión obtenida del modelo teórico. A este producto se aplica la transformada inversa, y el pulso resultante simula la dispersión sufrida en la guía, y nuevamente, se compara la velocidad de grupo de este pulso, con la del pulso original. Independientemente de si se usa una forma directa o indirecta de comparar las velocidades de grupo, a lo largo de estos análisis, generalmente se aplica algún procesamiento de señales, y en la mayoría de los casos, no se indica la forma en que se realiza tal procesamiento, dejando libertad en la forma del manejo de la señal a conveniencia del que lo aplique, lo cual, como se verá en el capítulo 3, puede llevar a resultados e interpretaciones erróneas. Debido al gran decaimiento que sufre la señal, en muchos casos no puede evitarse aplicar técnicas de procesamiento de señales. El uso de este no debe alterar la información de la señal que contenga elementos relacionados al fenómeno. El capítulo 3 planteó los métodos de procesamiento de señales en este tipo de experimentos.

Capítulo 2

Descripción del experimento

Para generar las señales que después se emplearon para obtener las funciones de transmisión de cada guía, se utilizó el dispositivo esquematizado en la figura 2.1. En él, la bocina (STEREN modelo *BOC* – 810054 8Ω , 200 W, 4 pulgadas de diámetro) emite un pulso creado en un generador de señales (Stanford Research, modelo *DS345*). A la salida de la bocina, existe un tramo de 4 m de tubo de PVC de 0,019 m de diámetro. Al final de este, se colocó un tramo central intercambiable, el cual podía consistir en el filtro ó en un tramo de PVC sin variaciones, del mismo diámetro que el tramo anterior. El filtro y el segmento uniforme tienen el mismo largo, para mantener la longitud de todo el arreglo sin alterar al ser estos intercambiados. Después de este segmento central, se colocó otro segmento de 4 m de tubo, el cual tenía ubicado al final, un micrófono (RadioShack, modelo 33 – 3013). La señal captada por este, es amplificada (Stanford Research Systems, modelo *SR560*) y enviada a la tarjeta de adquisición de datos (Gagescop. modelo *COMPUSCOPE 8012A*) de una computadora, donde finalmente es almacenada. El motivo de tener el segmento central intercambiable, fue para analizar el efecto que la guía de onda ejerce a un pulso determinado. Comparando la señal obtenida cuando el pulso atravesó el segmento continuo y cuando lo hizo por el filtro, se puede observar la forma en que dispersa el filtro, ya que al mantener todo el resto del dispositivo sin alterar, cualquier modificación en el pulso, será debida a el filtro.

En este punto es importante hacer notar que puede existir una contribución extra en la señal captada, la cual es originada por el reflejo del pulso original al llegar al final de la guía. Este reflejo llegará a la entrada de la guía, donde sufrirá nuevamente una reflexión, y después de este viaje de ida y vuelta, un porcentaje del reflejo original arribará al micrófono, pudiéndose superponer con la parte final del pulso original, si este tiene una extensión temporal lo suficientemente grande como para cubrir el tiempo de ida y vuelta en la guía. Para evitar esta contribución extra, se colocaron los segmentos de 4 m a la entrada y a la sa-

lida del segmento central, alargando así el tiempo de este viaje de ida y vuelta. Se aseguró que el centro de la bocina, el del micrófono, el eje de los segmentos y el del filtro esten alineados, ya que de otra manera puede haber reflexiones extra en las paredes de la guía. Otro aspecto importante que se tomó en cuenta, fue la distancia en que se colocó la bocina (micrófono) de la entrada (salida) de la guía, ya que el pulso captado difería del esperado (ver capítulo 4, sección 4.1). Para la bocina, se encontró que a 27 cm de distancia se obtenía el mejor pulso, ya que a distancias menores, la deformación era mayor y distancias mayores, la amplitud del pulso decaía demasiado. Para el micrófono, la mejor ubicación era justo a la salida de la guía, ya que por dentro de la guía, el micrófono y el borde generaban reflejos que interferían con la señal, deformándola, y fuera de la guía la señal decaía bastante. La secciones 2.1 y 2.2, tratarán sobre el funcionamiento, dimensiones, bandas de frecuencias suprimidas y funciones de transmisión numéricas esperadas para la guía de onda de diámetro modulado.

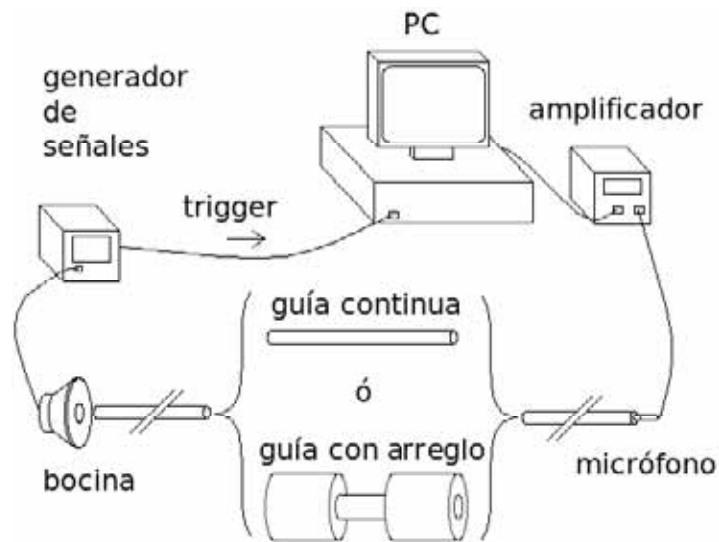


Figura 2.1: Esquema del experimento, la parte entre corchetes representa la posibilidad del tramo central de ser intercambiado

2.1. Guía de onda de diámetro modulado

En un trabajo hecho por J. N. Munday[6], se estudia la función de transmisión de una guía de onda, la cual tiene cambios discontinuos periódicos de diámetro entre dos posible valores. En una extensión del trabajo de Munday, Robertson[8] reporta que al incluirse un defecto que altera la periodicidad de este tipo de filtro modulado, se genera una propagación lenta del sonido (reducción drástica de la velocidad de grupo).

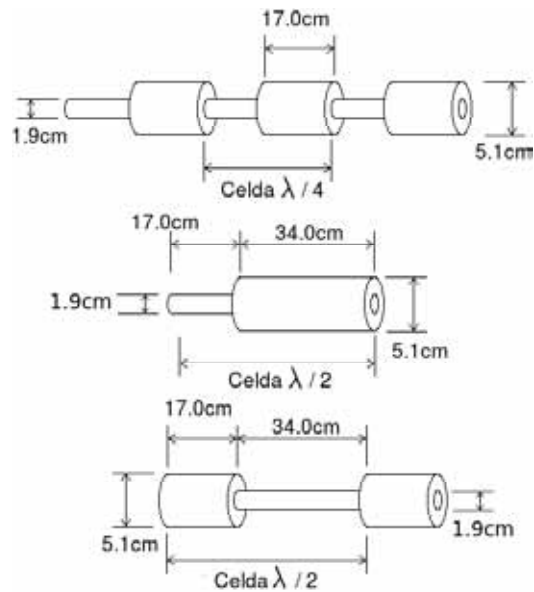


Figura 2.2: Filtro de diámetro modulado, el cual se va formando de celdas, las cuales consisten en la unión de dos segmentos de tubo de PVC de distinto diámetro (esquema superior). Los esquemas central e inferior muestran los dos tipos de defecto que se utilizarán más adelante.

El filtro estudiado en esta tesis, consiste en un tubo cilíndrico, el cual tiene cierta cantidad de variaciones de diámetro espaciadas cada 17,0 cm, pasando de un diámetro de 1,9 cm a uno de 5,1 cm y viceversa, tal y como lo muestra la figura 2.2. Una celda esta formada de dos tramos de la misma longitud, pero distinto diámetro. Para lograr esto, se utilizaron tubos de PVC de 1,9 cm y 5,1 cm, así como reductores de 5,1 cm a 1,9 cm. Para entender el funcionamiento de este tipo de filtro (dibujo superior de la figura 2.2), supongamos que por la primera celda, atraviesa un pulso monocromático de longitud de onda λ con una extensión temporal suficientemente grande para contener varias longitudes de onda. Al llegar la parte frontal del pulso al segundo cambio de diámetro, un porcentaje será reflejado, regresando hacia el primer cambio de diámetro. Al llegar a este punto, coincidirá con la parte posterior del pulso que apenas ingresa a la celda. Dependiendo de la distancia entre ambos cambios de diámetro, se pueden tener dos tipos de interferencia en dicho punto. Si la distancia corresponde a $\lambda/4$, la fase entre el reflejo y la parte posterior sera de $\lambda/4 + \lambda/4 = \lambda/2$, generando interferencia destructiva. Si por el contrario, la distancia entre los cambios de diámetro es $\lambda/2$, el reflejo y la parte posterior del pulso estarán en fase, por lo que interferirán constructivamente. Si ahora se manda a través del filtro un pulso con un gran contenido de frecuencias, que incluya pulsos monocromáticos de longitud de onda cercana a $\lambda/2$, $\lambda/4$ y armónicos de éstos, habrá algunas componentes que serán dispersadas y otras que no se verán afectadas, de modo que si se observa su espectro de frecuencias después de atravesar el filtro, se verá una serie de bandas transmitidas intercaladas con bandas suprimidas.

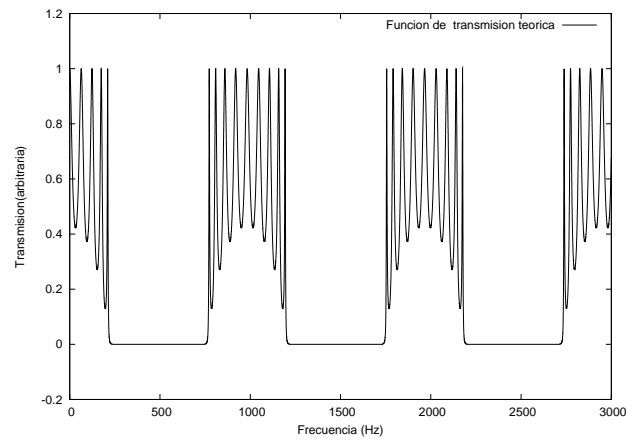


Figura 2.3: *Bandas de transmisión prohibida para el filtro de diámetro modulado de 5 celdas, según Munday[6]*

Se midió la velocidad del sonido v , colocando la bocina y el micrófono a una distancia fija, sin ningún objeto entre ambos, y se emitió un pulso con un pico muy pronunciado, midiéndose el tiempo de arribo de dicho pulso. Luego se desplazó el micrófono 5 metros, y se repitió la medida. A partir de la diferencia en tiempos de arribo Δt y la diferencia de distancias Δd , se obtuvo un valor para $v = \Delta d / \Delta t$ de 344,1 m/s, de modo que para este arreglo, con $\lambda/4 = 0,17$ m, se obtiene una frecuencia prohibida $\nu = v/\lambda = 506,02$ Hz. De acuerdo con Munday[6], el filtro genera una banda prohibida alrededor de los 500 Hz, como puede verse en la gráfica de la figura 2.3.

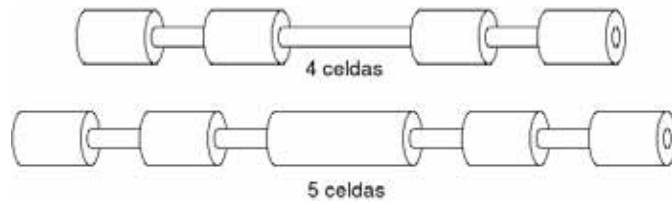


Figura 2.4: Filtros con defecto en la parte central: el superior consiste en 4 celdas, con defecto en el segmento de diámetro menor, mientras que el inferior está formado de 5 celdas, con defecto en segmento de diámetro mayor.

En un trabajo previo[2, 5], se había estudiado la función de transmisión de este tipo de arreglo, limitándose únicamente a una configuración de 5 celdas con ó sin defecto, para verificar los resultados obtenidos por Robertson[8]. Sin embargo, esta guía puede tener muchas posibles configuraciones, no únicamente un arreglo de 5 celdas, por lo que conocer como cambia la transmisión de una configuración a otra, fue la justificación para el desarrollo de esta tesis, en la cual se estudió el comportamiento del pulso en una celda, y el efecto de ir agregando, una a una, celdas al dispositivo. Por otro lado, se estudió el cambio de patrón al introducir un defecto en el arreglo. Recordemos que si la longitud de cada uno de los segmentos que forman la celda es $\lambda/2$, se rompe la interferencia destructiva al estar ahora los reflejos en fase. Debido a que la celda está formada por dos segmentos de distinto diámetro, se pueden generar distintos tipos de defecto en la celda, ya sea duplicando la longitud del segmento de menor diámetro, la del de mayor diámetro o ambas (figura 2.2). En este trabajo se estudió la celda con los dos primeros defectos, observando su influencia sobre el pulso, así como cual era su efecto al romper la periodicidad de los arreglos de 4 y 5 celdas, al colocarla en el centro, en lugar de una celda de tipo $\lambda/4$ (figura 2.4), esto debido a que se ha reportado que la inclusión de este defecto, genera una pequeña banda permitida dentro de las brechas, tal y como se muestra en la gráfica 2.5. El ancho de dicha banda va disminuyendo de tamaño al ir aumentando el número de celdas, de modo que para el arreglo de 5 celdas, esta banda es de alrededor de 1 Hz.

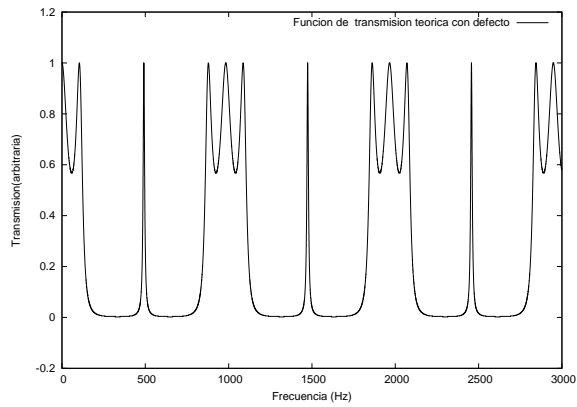


Figura 2.5: Al introducir un defecto que rompe la periodicidad del arreglo, se espera la aparición de pequeñas bandas permitidas por dentro de las brechas. La función de transmisión mostrada es para un arreglo de 3 celdas según Munday[6]. Se muestra el de 3 celdas y no los de 4 ó 5, ya que la banda de transmisión permitida por dentro de la brecha para éstos es muy pequeña, alrededor de 1 Hz.

2.2. Guía de onda con ramificaciones transversales

En un estudio realizado por Robertson[7], se describe experimentalmente una guía de onda unidimensional cilíndrica, la cual tiene espaciadas periódicamente, ramificaciones transversales al eje de la guía. Las propiedades dispersoras de esta guía fueron descritas por Kushwaha[4]. Para este filtro ramificado, se reporta la aparición de efectos superluminales (velocidad de grupo mucho mayor que la velocidad del sonido).

La guía de onda descrita en esta sección, consiste en un tubo cilíndrico horizontal de 1,9 cm de diámetro, el cual tiene, en la parte superior y perpendicularmente al eje de simetría, tubos del mismo diámetro y 17,0 cm de largo, espaciados cada 20,5 cm, como se muestra en la figura 2.6. Ésta se construye uniendo tubos de PVC de 1,9 cm de diámetro y conectores en "T".

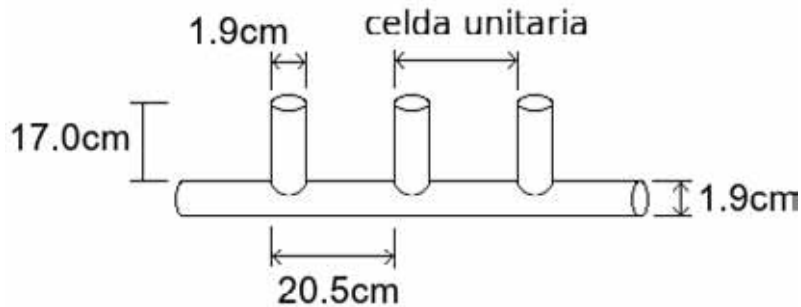


Figura 2.6: La celda en el arreglo de ramificaciones se forma entre pares de ramificaciones contiguas, el arreglo mostrado en la figura, muestra entonces, un filtro de 2 celdas (3 ramificaciones).

El funcionamiento de este filtro, es completamente distinto al de diámetro modulado (el cual depende de las reflexiones internas del pulso en los cambios de diámetro). En este filtro, las ramificaciones están ubicadas en la periferia del segmento horizontal y perpendiculares a la dirección de avance del pulso, por lo que este no se refleja en las paredes de la guía. La acción dispersora del filtro reside en la resonancia que existe en las ramificaciones, la cual se da cuando los cambios de presión en la zona donde se une la ramificación con el segmento horizontal, coinciden con la frecuencia de resonancia en la ramificación, ó dicho de otro modo, cuando la longitud de onda (λ) del pulso que atraviesa el filtro justo en la union, coincide con el doble de la longitud de la ramificación ($\lambda/2$), generando resonancia en esta, y transmitiendo energía en dirección perpendicular a la dirección original de transmisión. Para este arreglo, la longitud de la ramificación ($\lambda/2$) es de 17,0 cm, lo cual implica que se tendrá resonancia en ella a una frecuencia de aproximadamente 1012 Hz.

Robertson reporta, para una guía de estas dimensiones[7], brechas de 500 Hz de ancho, centradas en los 850 Hz y 1700 Hz. Parte del estudio de esta tesis sobre este tipo de filtro, se enfocó a la ubicación y delimitación de estas brechas, así como el efecto que cada ramificación agregada tenía sobre la función de transmisión, al pasar de una celda inicial (cada celda se forma entre 2 ramificaciones), hasta llegar a un arreglo de 6 celdas (7 ramificaciones).

Capítulo 3

Procesamiento de señales

Para todo fenómeno estudiado en la física que involucre el análisis de alguna señal captada, el procesamiento de los datos obtenidos (ventaneo) es necesario, y a veces imprescindible, para poder discernir entre la componente de la señal captada que pertenece ó se debe al fenómeno estudiado y la correspondiente al uso de dispositivos electrónicos en la medición, respuestas del medio al fenómeno, presencia de agentes externos al no poder aislar completamente el experimento, etc.

El estudio realizado en este trabajo sobre la dispersión sufrida por ondas acústicas al transitar por zonas cuya transmisión está prohibida, es propenso al error en el procesamiento de señales, debido a los siguientes factores:

1. El pulso que se quiere estudiar, el cual sigue una función continua, tiene que ser discretizado para ser introducido a un generador de señales, el cual crea una señal analógica, que sigue como patrón la función discreta. Dicha serie perturba una bocina, la cual dependiendo de esta serie y de la respuesta e inercia que presenta a dicha perturbación, emite un pulso continuo, el cual en algunas ocasiones no es muy parecido al original (capítulo 4, figura 4.1). Este nuevo pulso es captado por un micrófono, el cual aun teniendo una respuesta plana, altera ligeramente la perturbación recibida, al momento de traducirla en una corriente. Dicha corriente es enviada a un convertidor analógico-digital, lo cual genera una serie de voltajes escalonados de diferente valor, y después de todo este proceso de conversiones y modificaciones, genera la señal que se va a estudiar.
2. Existe en todo momento un ruido de fondo poco perceptible en comparación con el pulso estudiado. Sin embargo, es el principal problema en el procesamiento de señales utilizado en este trabajo, pues el fenómeno de dispersión es más notorio en guías con gran capacidad de atenuación. Así, los pulsos que pueden dar más información sobre este fenómeno, se atenúan tanto que su amplitud es del mismo orden de magnitud que la amplitud del ruido de fondo. Esto es lo que genera que los efectos sobre

el pulso de la guía se mezclen con otros efectos ajenos al fenómeno, y no sea sencillo manejarlos.

3. Como se verá en esta sección, para eliminar componentes acústicas que son ajenas al fenómeno, se puede recortar la señal en el tiempo y en el espacio de frecuencias. Ésto elimina el análisis de reflejos extras, así como la contribución de éstos al espectro de frecuencias. En la mayoría de los casos, independientemente de cual sea la forma en que se haga el recorte, no es muy obvio a partir de qué puntos se puede considerar que la señal captada es parte de la original y cual no, ya que una de las formas en que dispersan los filtros, principalmente en el arreglo de diámetro modulado, está basada en las reflexiones del pulso en la parte interna del arreglo, las cuales interfieren constructiva o destructivamente con la parte posterior del pulso. Debido a que estos reflejos pueden salir del filtro en la misma dirección que sale el pulso, esto ocasiona que aparezca un alargamiento al final del pulso captado (cola), el cual, para arreglos de pocas celdas, es muy pequeño comparado con la máxima amplitud del pulso. Sin embargo, para arreglos de mayor longitud, la amplitud máxima del pulso es del mismo orden que el de la cola. En este caso, de la misma manera que en el caso del ruido de fondo, es más difícil aún discernir qué parte pertenece al fenómeno, ya que los mismos reflejos que lo ocasionan, después generan parte de la cola de la señal captada.
4. Debido a que los arreglos utilizados en este trabajo filtran en varias zonas del espectro, se tiene que generar un pulso de un gran ancho de banda, para que abarque completamente las zonas a estudiar. Esto puede ocasionar que la aparición de armónicos influyan de manera significativa en la función de transmisión, ya que estos generan componentes acústicas a frecuencias distintas de la frecuencia fundamental que les corresponde, y dichas componentes pueden aumentar ó disminuir la amplitud de la función de transmisión, llevando a interpretaciones erróneas acerca de la dispersión generada por el filtro en zonas alrededor de las frecuencias armónicas.

Para tratar de solucionar todo lo anterior y establecer un criterio sobre el procesamiento de señales y su validez, se procedió a observar la modificación de las señales al aplicar algunos tipos de procesamiento. Esto arrojó información de los posibles efectos que no pertenecen al fenómeno y que aparecen al aplicarlos, así como saber que tanto influyen en la señal estudiada las partes que no pudieron ser eliminadas en el procesamiento.

Una señal captada en general, tiene siempre un ruido de fondo asociado. Las estudiadas en este trabajo no son la excepción, y el primer procesamiento utilizado fue captar 60 veces la señal (en algunos casos hasta 120) y obtener el promedio de éstas, espaciando la captura entre una señal y otra diez segundos para evitar cualquier remanente del pulso en la guía. La figura 3.1 muestra dos señales en el mismo intervalo de tiempo, las cuales tenían una amplitud máxima de 3 Volts. La superior pertenece a una las 60 señales captadas por el micrófono y

la inferior al promedio de éstas. En el caso de la señal sin promediar, la amplitud del ruido de fondo es pequeña pero perceptible, pues es aproximadamente 1,2 % de la máxima amplitud del pulso, mientras que para la señal promediada, el valor es cercano al 0,15 %. Esto ayudó mucho a los análisis posteriores, ya que casi eliminó el ruido de fondo, aunque el pequeño residuo que se mantuvo después de los 60 promedios, ya no es despreciable en los casos en que la configuración del filtro fue muy larga, lo que generó que la amplitud del pulso decayera a valores del orden de magnitud de la amplitud del ruido de fondo.

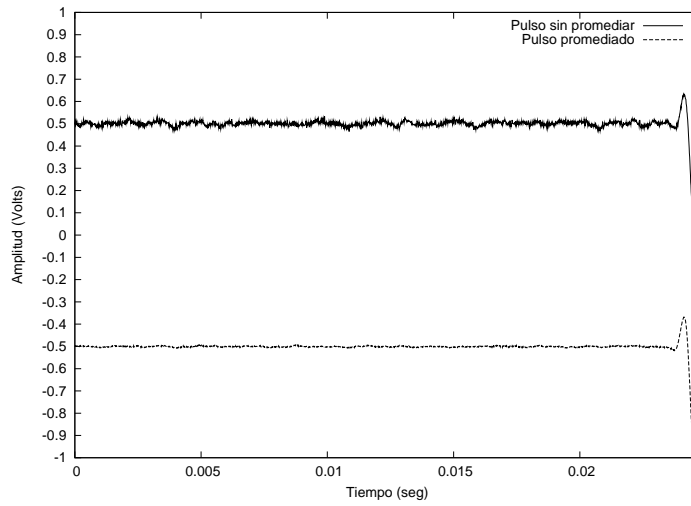


Figura 3.1: Promediar reduce la amplitud del ruido blanco, aunque sigue existiendo una pequeña señal, la cual no puede ser eliminada, aun aumentando el número de señales a promediar de 60 a 120 y 200 señales. Las señales han sido recorridas para facilitar su visualización.

En este primer procesamiento se redujo globalmente el ruido de fondo y no se altera la información relacionada al pulso, ya que en cada señal, el pulso inicial es el mismo al estar todo el sistema en las mismas condiciones, y cualquier posible variación entre una y otra, se debe al ruido de fondo, el cual es estocástico aleatorio, y si uno obtiene el valor promedio de N señales ($N \rightarrow \infty$), dicho valor tenderá a cero. Hacer $N \rightarrow \infty$ es imposible en la práctica, aunque se observó que con 60 adquisiciones este valor decae a valores razonablemente pequeños. Para los casos en los que la amplitud del pulso decayó bastante (cerca de $\frac{1}{30}$ de la amplitud original), el aumentar el número de señales a 120 sirvió para reducir la contribución del ruido de fondo a la amplitud de la señal captada, sin lograr desaparecer por completo su efecto. Cabe señalar que se obtuvo también el promedio para 200 señales, aunque ya no se observó ningún cambio significativo en la amplitud del ruido de fondo, por lo que por razones de tiempo y simplicidad, se mantuvo como 120 el número de señales a promediar en los casos que fuese necesario.

El segundo procesamiento de señales utilizado, consistió en tres pasos, los cuales fueron introducidos a lo largo de la aplicación de la transformada de Fourier a la señal promediada.

Como primer paso de este segundo procesamiento, se recortó la señal ya promediada, para eliminar del análisis cualquier elemento fuera del intervalo donde existió el pulso. Para recortar de una forma suave, evitando las posibles deformaciones en la transformada de Fourier que se generan por un cambio abrupto en la señal, se multiplicó la señal por una gaussiana al cubo en los intervalos fuera de la parte principal. Dicha función atenúa la señal en 0.004 seg, y su forma es la siguiente:

$$G(t) = \begin{cases} (e^{-(27940*(t-(T_1+,002))^2)})^3 & \text{si } t \leq T_1; \\ 1 & \text{if } T_1 < t \leq T_2; \\ (e^{-(27940*(t-(T_2-,002))^2)})^3 & \text{si } T_2 < t, \end{cases}$$

donde T_1 y T_2 son los tiempos entre los cuales la señal no se altera. Se utilizó esta función pues es casi plana en un intervalo grande, y el cambio de valores cercanos a la unidad a valores cercanos a cero es rápido. Las gráficas de la figura 3.2 muestran dos señales, la primera atravesó la guía continua, y la segunda corresponde al pulso que atravesó el filtro. En cada una se muestra, además, la función que atenúa y la multiplicación entre las dos. Es importante observar como para los pulsos que atravesaron guías continuas, ubicar los puntos T_1 y T_2 donde recortar es trivial, caso contrario para los que lo hicieron por los filtros, ya que en general se obtienen señales compuestas de varios pulsos semigaussianos, los cuales están dentro del intervalo en el que el correspondiente pulso de la guía continua existe. Cabe recalcar que un recorte indebido, ya sea antes o después del debido (suponiendo que existe un punto y una forma en el cual se deba recortar) puede arrojar señales muy distintas a las que en realidad se obtuvieron (figura 3.3).

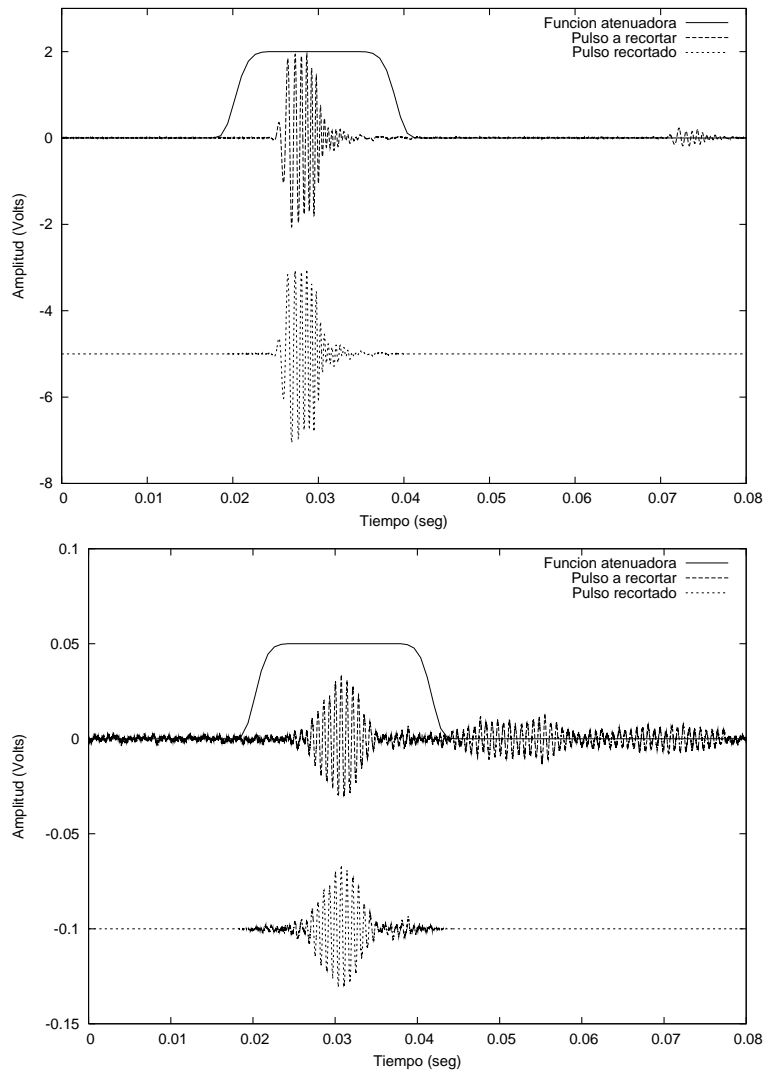


Figura 3.2: *En las dos gráficas se muestra el resultado de recortar la señal. En la superior, la guía era continua, de modo que se determina muy bien donde inicia y donde termina el pulso. La gráfica inferior muestra como, al utilizar la guía con filtro, éste sufre una gran dispersión, por lo que no es sencillo saber donde termina el pulso a recortar. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.*

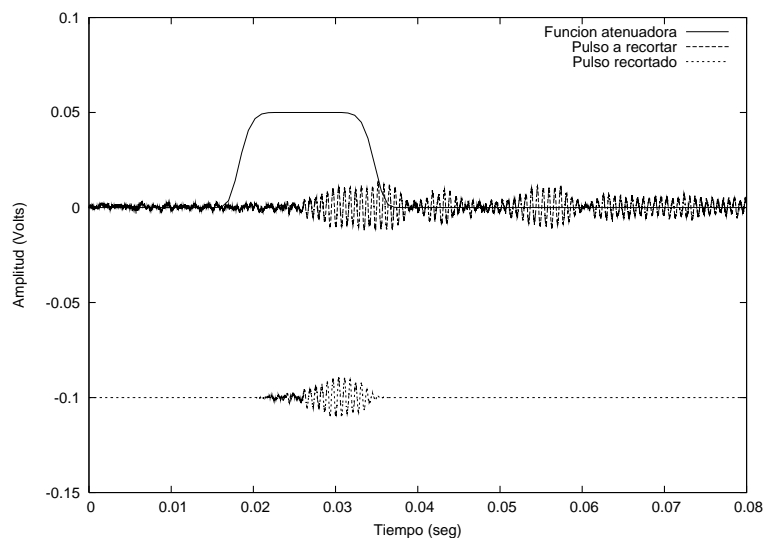


Figura 3.3: Debido a la libertad que se tiene en el recorte, uno puede tomar cualquier criterio de corte. La gráfica muestra, como un mal criterio, puede arrojar una señal muy distinta a la que se originalmente se obtuvo. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

El primer paso eliminó los reflejos en las extremos de la guía y el ruido de fondo en tiempos fuera del intervalo en el que existió el pulso. A partir de esto, se aplicó la transformada de Fourier, cuya norma nos da el espectro de frecuencias, y con este, es posible determinar cuales son las frecuencias contenidas en el pulso. Recordando que el análisis en este trabajo consiste en observar la transmisión que tiene un filtro, con respecto a una guía continua, mediante la comparación de sus respectivos espectros, y además, que la guía continua en principio no modifica el pulso original que la atraviesa, entonces cualquier frecuencia que este por fuera del ancho de banda del espectro del pulso original, y que aparezca en el espectro del pulso que atravesó el filtro, debe ser eliminada, pues no pertenece al original. Esto fue la base del siguiente paso en este procesamiento.

Se procedió, como segundo paso, a ubicar el punto inicial F_1 y el final F_2 del ancho de banda del pulso de la guía continua, y fuera de este intervalo, se recortó la transformada de Fourier, utilizando una función cuadrática, la cual atenuaba completamente en un intervalo de 130 Hz. Antes y después de este intervalo, se igualó la función a 0. Dicha función esta representada en la

siguiente ecuación,

$$G'(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq F_1 - 130; \\ \frac{(f-F_1+130)^2}{130} & \text{si } F_1 - 130 \leq f < F_1; \\ 1 & \text{si } F_1 \leq f < F_2; \\ \frac{(f-F_2-130)^2}{130} & \text{si } F_2 \leq f < F_2 + 130; \\ 0 & \text{si } f \geq F_2 + 130. \end{cases}$$

La figura 3.4 muestra esta función y su aplicación a la transformada de Fourier de una de las señales utilizadas en secciones posteriores. Al tener un pulso cuyo espectro esta bien definido, es sencillo discernir entre intervalos que contienen frecuencias del pulso y los que no, ya que las amplitudes asociadas a unos y otros son drásticamente diferentes, por lo menos para pulsos que atravesaron guías continuas. Esto permite hacer un recorte que decaiga más rapido que en el del primer paso de este procesamiento.

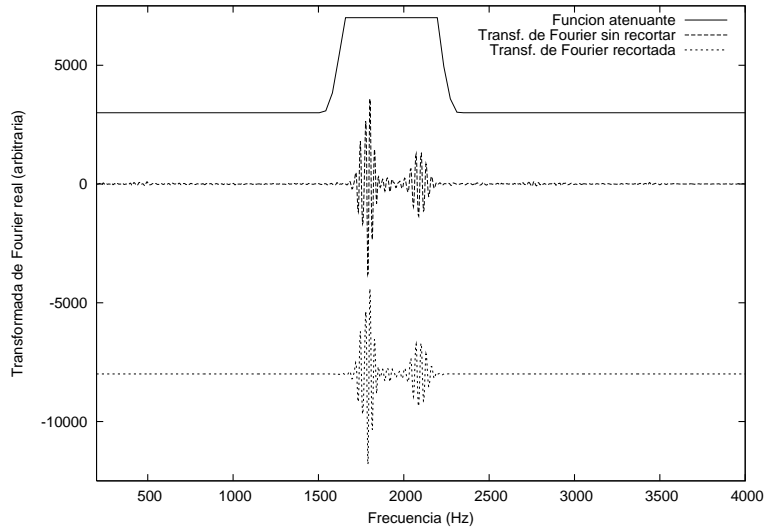


Figura 3.4: Se muestra la función utilizada para el recorte de la transformada de Fourier, y su aplicación. Cuando la amplitud máxima de dicha transformada es muy superior a las componentes que se encuentran fuera del ancho de banda, se espera que dentro del ancho de banda, la amplitud de cualquier cosa ajena al fenómeno tenga también una amplitud despreciable, de modo que el error obtenido al no poder eliminarlas del ancho de banda sea mínimo. Las transformadas han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

En este procesamiento, se elimina la componente del ruido de fondo y de otros factores que intervienen en la amplitud de la señal estudiada, pero no se hace de forma global; esto es, solo se elimina en regiones por fuera del ancho de banda del pulso, lo cual deja sin depurar dicho intervalo. Esto debe ser tomado en cuenta, principalmente, para los pulsos que atraviesen el filtro cuando tenga muchas celdas. En la figura 3.5 se muestra el caso extremo, el cual se dio en el filtro de ramificaciones con 6 celdas. Se envió un pulso gaussiano cuya frecuencia central era justo la frecuencia de máxima atenuación. Se puede ver en la gráfica como la amplitud de la transformada del ruido de fondo, a pesar de seguir siendo pequeña, ya no es despreciable con respecto a la de la transformada del pulso. En este caso, como en algunos otros, no poder despreciar y/o separar completamente la fracción de dicha amplitud que esta relacionada al ruido de fondo, lleva a preguntarse si en realidad se puede concluir mucho sobre el fenómeno de dispersión anómala estudiado cuando la señal ha decaído tanto.

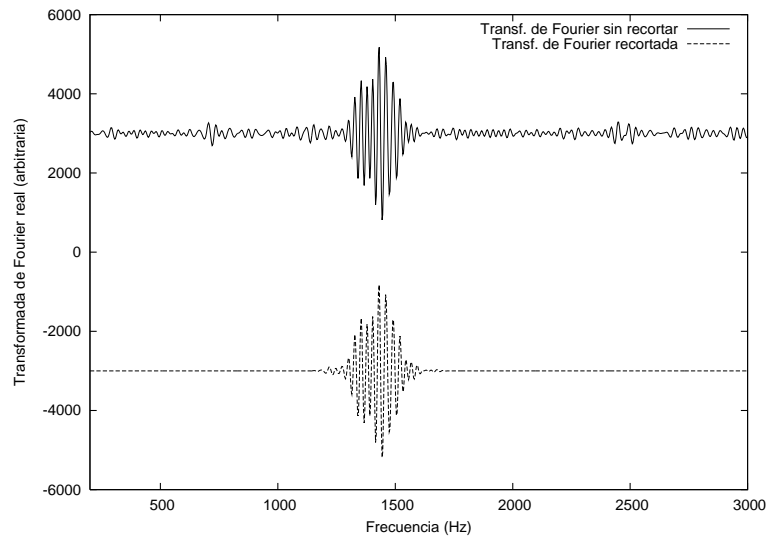


Figura 3.5: En esta gráfica se muestra el caso contrario al de la figura 3.4, ya que la amplitud de las componentes fuera del ancho de banda es cercana a la amplitud máxima dentro del ancho de banda en la transformada de Fourier, y aunque se tenga bien determinado donde recortar, por dentro del ancho banda las contribuciones ajenas al fenómeno influirán en mayor medida al no poder ser eliminadas. Las transformadas han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Independientemente de lo que suceda en el intervalo dentro del ancho de banda del pulso, uno se podría preguntar si las componentes fuera de éste, pertenecen completamente al ruido de fondo y otros factores, ó si pudieran ser parte del fenómeno, generadas por un gran corrimiento de frecuencia. Este posible caso fue investigado de la siguiente manera: se comparó la amplitud del espectro fuera del ancho de banda, tanto del pulso que atravesó la guía continua como del que lo hizo por el filtro. En la figura 3.6 se muestra lo anterior, y se observa como dicha amplitud es del orden de magnitud en los dos casos, lo cual indica que no se generó tal corrimiento de frecuencias, ó por lo menos, su efecto es demasiado pequeño, aun comparado con el ruido de fondo, para poder percibirlo.

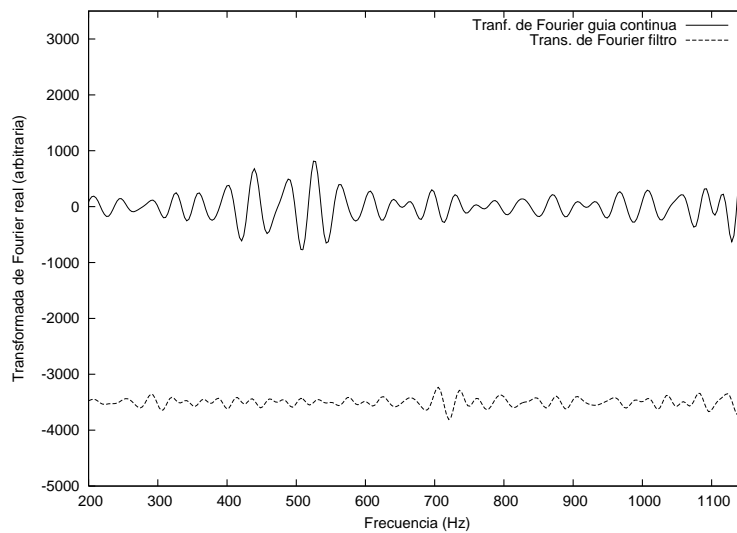


Figura 3.6: *Fuera del ancho de banda, las amplitudes podrían provenir de un gran corrimiento de frecuencias generado por el filtro. Aquí se puede ver, que las amplitudes, fuera del ancho de banda del pulso que atravesó la guía continua (sin dispersión) son, incluso mayores que las del pulso filtrado, por lo que tal corrimiento de frecuencias no es posible. Las transformadas han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.*

En este punto, ya con el espectro lo más limpio posible de contribuciones extras, se procedió a observar si se obtenía la misma función de transmisión al analizar pulsos distintos. Esto da indicios acerca de la existencia de efectos no lineales, pues en principio, la función de transmisión debe depender únicamente de la geometría del filtro y no de la perturbación en sí. Cualquier diferencia entre las transmisiones obtenidas de distintos pulsos, será producida por la distinta respuesta que el filtro y el medio puedan experimentar al recibir distinta perturbación. Para observar esto, se escogieron 2 pulsos de distinta forma, pero restringidos al mismo ancho de banda. Este fue escogido de modo que solo abarcara una banda permitida y parte de las 2 bandas prohibidas aledañas. Esto siguió dos motivos:

1. Al tener un ancho de banda pequeño, se evita la presencia en esa zona de armónicos de frecuencias inferiores, al no haber una frecuencia fundamental que los genere.
2. Si ambos pulsos tienen el mismo ancho de banda, la respuesta del filtro y del medio estarán sometidos a perturbaciones restringidas al mismo intervalo de frecuencias, evitando la influencia de efectos no lineales de otras zonas.

Las funciones de transmisión obtenidas para la guía de diámetro modulado de 2 celdas y para la guía de 3 ramificaciones, son mostradas en las gráficas de la figura 3.7. Las gráficas contienen, para cada tipo de filtro, las transmisiones obtenidas para los dos pulsos y la resta de estas dos funciones. En general, se obtuvo un patrón similar para cada par de transmisiones, lo cual se observa de la curva que representa la resta entre este par, la cual oscila alrededor de cero y su amplitud no es grande comparada con la máxima amplitud de la transmisión. Esto indica que no hay un efecto no lineal muy notorio, al cual se le puedan asociar totalmente estas discrepancias, ya que estas pueden provenir también del procesamiento de las señales, al eliminar éstas partes de la señal y frecuencias en el espectro, repercutiendo ligeramente en la transmisión, ya que al eliminar reflejos a la señal y otros efectos en la transformada de Fourier, estamos quitando parte de la energía total del pulso. El que las discrepancias fueran pequeñas comparadas con la amplitud de la transmisión, y además, que sus valores oscilarán alrededor de cero, nos permitirá suponer, salvo la aparición de armónicos, que la función de transmisión no cambia al cambiar el tipo de pulso.

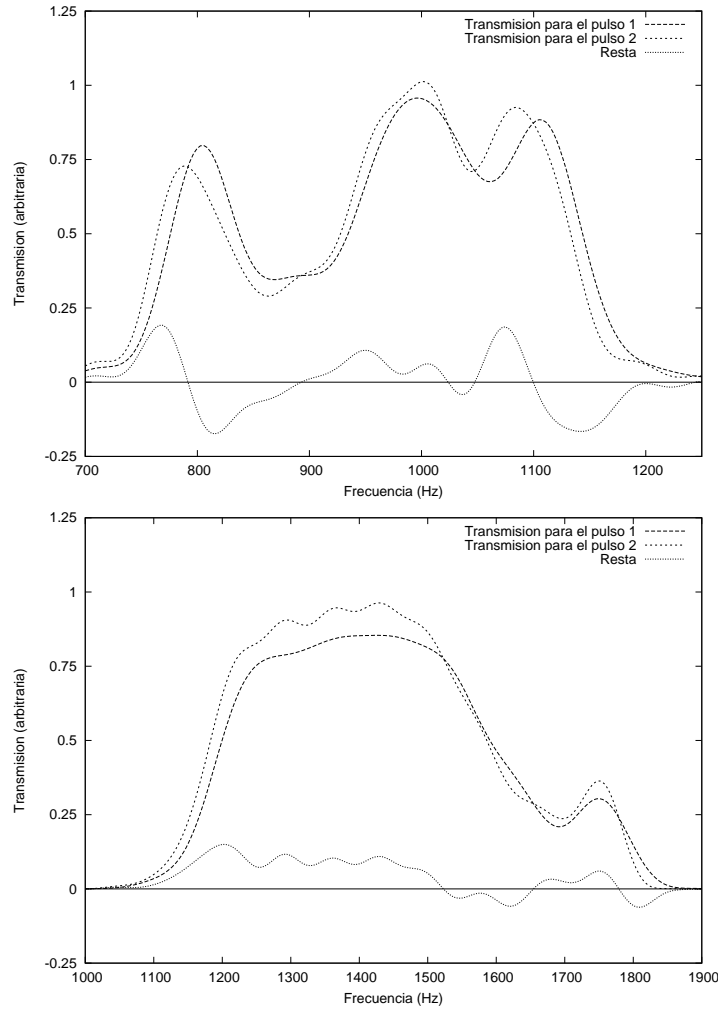


Figura 3.7: La gráfica superior (inferior) muestra las transmisiones obtenidas para pulsos distintos que atravesaron el arreglo de diámetro modulado (ramificaciones). En cada gráfica se agrega una tercera curva, la cual representa la diferencia entre las 2 transmisiones. En ambos casos, la curva oscila alrededor de cero y no tienen gran amplitud, lo cual descarta algún efecto no lineal notorio. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Una vez recortada la transformada de Fourier, se procedió a obtener la correspondiente señal, vía la transformada inversa (figura 3.8). A pesar de no haber podido eliminar toda lo ajeno al fenómeno, principalmente en frecuencias por dentro del ancho de banda, se observa como este procedimiento depuró en gran medida la señal, la cual queda bien definida con respecto a la captada por el micrófono. Esta serie de pasos indicó los criterios que se deben utilizar para procesar este tipo de señales sin alterar el fenómeno en sí, marcando además, cuales son sus limitantes. Trás todo este proceso, la señal final será utilizada para el estudio del fenómeno de dispersión anómala en los capítulos posteriores.

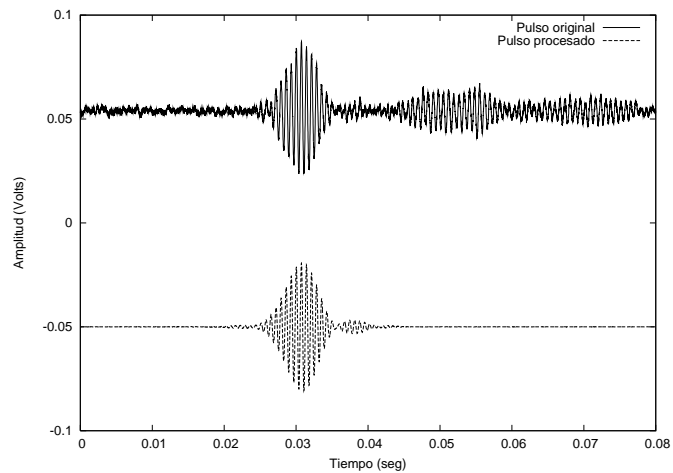


Figura 3.8: Forma final después del procesamiento de señales, en el cual se promedió la señal para reducir el ruido, se recortó la señal para eliminar los reflejos extras, se recortó la transformada de Fourier para eliminar componentes fuera del ancho de banda y se obtuvo una nueva señal usando la transformada inversa de Fourier.

Capítulo 4

Bandas prohibidas en funciones de transmisión

Como vimos en el capítulo 2, pulsos cuya longitud de onda coincidan con ciertos valores determinados por las dimensiones de los filtros, serán dispersados debido a la interferencia destructiva generada. Por otro lado, en general, un pulso acústico está formado por la superposición de pulsos monocromáticos de diferente frecuencia y fase entre sí, y un análisis del espectro de frecuencias derivado de la transformada de Fourier nos puede indicar cuales son estos pulsos superpuestos. Si se hace pasar a través del filtro uno de estos pulsos generados por superposición, cuyo contenido de frecuencias es lo suficientemente grande para contener frecuencias que generen interferencia destructiva y frecuencias que no, se esperaría que el pulso haya perdido algunas frecuencias al salir del filtro, de modo que al analizar el espectro de frecuencias, se observarían zonas en las que la amplitud tiende a cero y zonas en las que la amplitud no decayó. Esta capacidad del filtro de transmitir ó no componentes de un pulso superpuesto, se reflejará en la forma del pulso después de haber atravesado el filtro, la cual puede estar deformada con respecto a la forma original. Esto hace que la velocidad de todo el paquete (velocidad de grupo) pueda cambiar y depender de la frecuencia.

4.1. Ruido Blanco

Inicialmente, para observar bien los intervalos de frecuencias en los que existe interferencia destructiva, es necesario que el contenido de frecuencias del pulso abarque un intervalo grande, el cual incluya no solo frecuencias cuya longitud de onda correspondiente sea 2 ó 4 veces la longitud de la celda del filtro, sino también múltiplos enteros de éstas. Para esto se generó un pulso de ruido blanco, con un ancho de banda entre los 300 Hz y 2800 Hz. La función usada por el generador para crear el pulso consiste en un seno, modulado por una gaussiana que atenúa suavemente los extremos del pulso para evitar que un inicio (final) abrupto de la perturbación introduzca oscilaciones extra debido a la inercia

inicial (final) de la bocina. La frecuencia de la senoidal aumenta linealmente al aumentar el tiempo, desde los 300 Hz hasta los 2800 Hz. La siguiente expresión muestra dicha función,

$$f(t) = A * \sin(2\pi t * \nu(t)) * e^{-\frac{(t-0,005)^2}{10}} \quad 0 \leq t < 0,01 \quad (4.1)$$

$$\nu(t) = \left(300 + \frac{2500t}{0,01} \right). \quad (4.2)$$

La señal captada por el micrófono y la generada por computadora así como sus espectros, son mostrados en las figuras 4.1 y 4.2. En estas gráficas se puede observar que el pulso generado por computadora y el obtenido del sistema bocina-micrófono difieren.

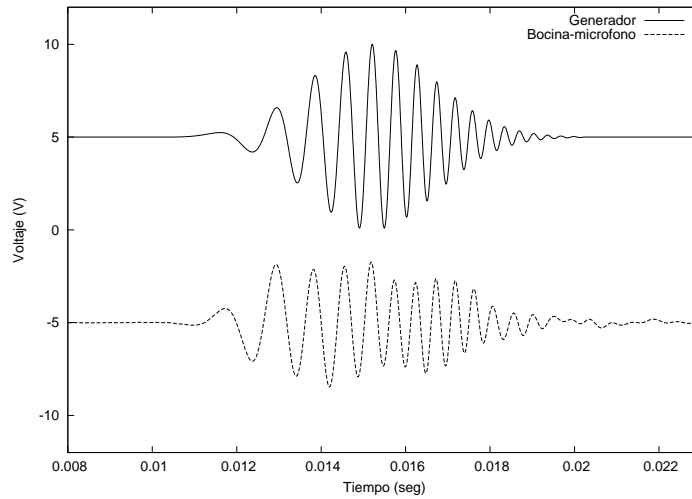


Figura 4.1: *El sistema bocina-micrófono no reproduce fielmente el pulso del generador, debido a que su respuesta no es plana y a la inercia que presenta al principio y al final de la perturbación. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.*

La diferencia está asociada a los siguientes dos factores:

1. La respuesta del sistema bocina-micrófono no es plana en dicho intervalo y habrá frecuencias en las que, tanto la bocina como el micrófono, responderán mejor, dando esto como resultado discrepancias en las amplitudes entre el pulso de computadora y el obtenido en del sistema bocina-micrófono.
2. La inercia que presenta el sistema, principalmente la bocina, altera la forma del pulso principalmente al inicio y al final de éste, pues ésta inten-

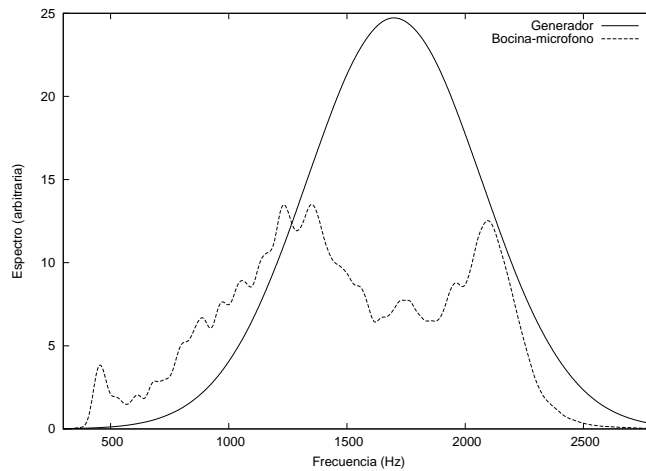


Figura 4.2: *A pesar de que los espectros difieren, en el intervalo estudiado, el espectro del pulso emitido por la bocina cubre perfectamente dicho intervalo, sin tener cambios abruptos o amplitudes cercanas a cero. Los espectros han sido recorridos verticalmente para facilitar su visualización.*

tará permanecer en estado de reposo (oscilación) al iniciar (finalizar) la perturbación.

A pesar de que estos dos factores ocasionen que el pulso captado no sea el que se quería analizar, se puede ver en la gráfica 4.2 que los anchos de banda de ambos pulsos coinciden, variando únicamente en la amplitud asociada a cada frecuencia en este intervalo. Se observa también que el espectro del pulso emitido por la bocina tiene un buen comportamiento, esto es, su amplitud no tiene cambios abruptos de una frecuencia a la siguiente, y además, no tiende a cero en la parte central del ancho de banda. Como el interés de este análisis es observar la dispersión generada por el filtro frecuencia a frecuencia, y la forma del pulso no importa si es que este contiene todas las frecuencias a analizar, se utilizará el pulso emitido por la bocina para la siguiente sección, ya que éste cumple con lo necesario para dicho análisis, a pesar de no ser el que originalmente emitió el generador.

Para detectar bien la ubicación de la banda, se analizó el comportamiento del pulso al atravesar la mayor cantidad de celdas posibles para cada arreglo, 5 en el de diámetro modulado y 6 en el de ramificaciones. Los resultados de propagar el pulso de ruido blanco a través de los 2 tipos de guías, se muestran en la figura 4.3. En ellas se puede observar la dispersión sufrida por los pulsos al atravesar las guías con filtro. Recordemos que se generó el pulso de modo que la frecuencia fuera incrementando linealmente en el tiempo, de modo que en el intervalo de tiempo en el que la frecuencia coincidiera con las frecuencias que el filtro atenúa, se debería ver una deformación notable en la forma del pulso. La gráfica muestra

este comportamiento justo en las zonas de interferencia destructiva que fueron señaladas en el capítulo 2. Además se observa un alargamiento al final de los pulsos que atravesaron guías con filtro con respecto a los pulsos que atravesaron guías continuas. Dicho alargamiento se genera a partir de las reflexiones que la parte inicial del pulso va sufriendo a lo largo del filtro, ya que una parte de estos reflejos terminan arribando al micrófono en el mismo intervalo de tiempo en el que la parte final del pulso lo hace, lo que aumenta un poco su amplitud y sigue generando una pequeña señal aun después de que el pulso original terminó.

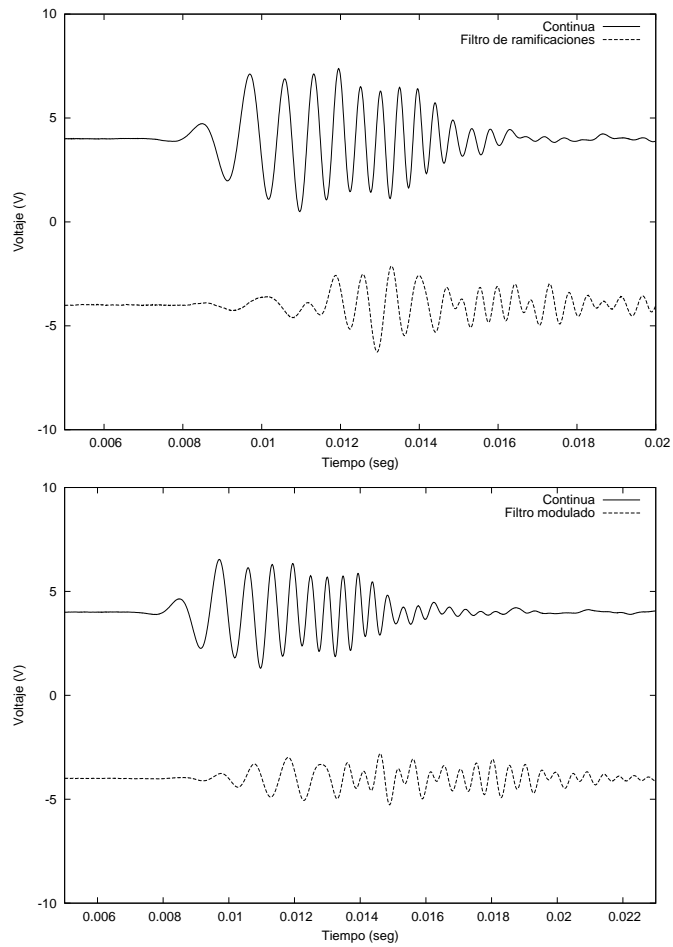


Figura 4.3: Las gráficas mostradas corresponden, la superior al arreglo de ramificaciones, y la inferior al de modulaciones. Se observa como cada filtro dispersa el pulso de manera distinta. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

La función de transmisión obtenida para los pulsos estudiados presenta regiones en la que la amplitud decae notablemente. En las gráficas de la figura 4.4 se muestran dichas brechas, y es interesante observar que la ubicación de cada banda corresponde a lo esperado según el capítulo 2. Esto es indicativo de, que en efecto, la distancia periódica de cada arreglo está relacionado con las frecuencias dispersadas, pues independientemente de la cantidad de celdas que se usaron, si la longitud de onda (frecuencia) de un pulso corresponde con las planteadas, se atenúa. La forma en que un pulso se atenúa al pasar por una configuración dada y como va variando esta forma al cambiar el número de celdas que tenga el arreglo, será el objetivo de las secciones posteriores.

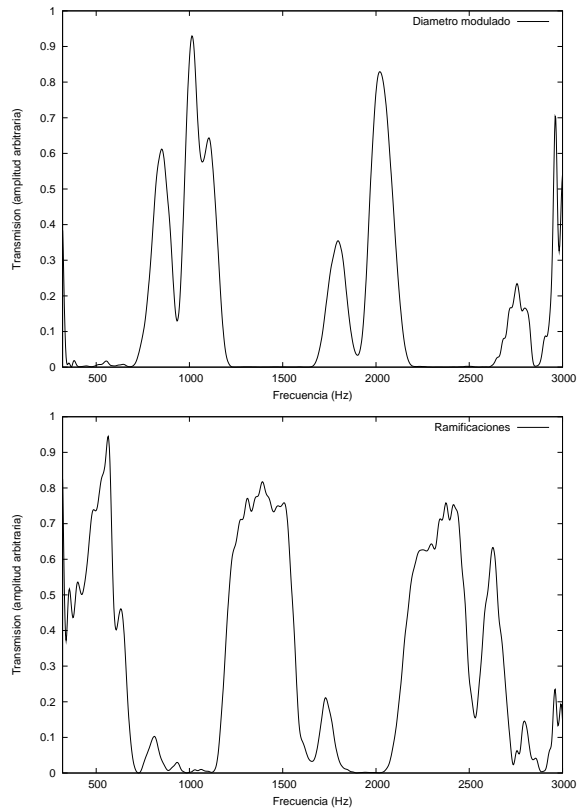


Figura 4.4: En las dos gráficas se observa las zonas en que la transmisión queda prohibida. Cada arreglo genera bandas prohibidas, colocadas a intervalos regulares. Dichas bandas corresponden con las planteadas en los artículos de referencia [7, 8] de la sección 2.1. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

4.2. Análisis refinado de bandas

Debido a que existen varias bandas de transmisión prohibida, el estudio de éstas es complicado, principalmente por que hay que generar un pulso de ruido blanco que tenga una ancho de banda lo suficientemente grande para abarcar muchas bandas, y generar un pulso con estas características, en la práctica, es complicado. Otra situación a tomar en cuenta es que la aparición de armónicos, pueda influir en la función de transmisión, pues ésta se genera a partir del espectro de los pulsos captados en el micrófono, y dichos espectros pueden contener para algunas frecuencias, la contribución extra de los armónicos de frecuencias inferiores. Para evitar todo lo anterior, se enfocó el análisis a una sola banda de transmisión prohibida, lo cual permitió reducir el ancho de banda del pulso de ruido blanco a un intervalo que abarcara solo la extensión de dicha banda y sus zonas aledañas. Con esto se logró evitar la presencia de la mayoría de los armónicos de frecuencias inferiores, los cuales no podrían aparecer si no existe la frecuencia fundamental que los pudiera generar.

4.2.1. Guías de diámetro modulado

Como vimos en la figura 4.4, este tipo de filtro genera bandas de transmisión prohibida alrededor de los 450 Hz, 1450 Hz y 2450 Hz. Para esta sección se enfocó el análisis a la banda alrededor de los 1450 Hz. Para esto se construyó un nuevo pulso cuyo ancho de banda es menor que los pulsos empleados en la sección anterior, con el fin de facilitar a la bocina el reproducirlo y evitar la aparición de armónicos explicada anteriormente. La función utilizada para generar este pulso es la misma que en la ecuación 4.1, cambiando unicamente los parámetros de la ecuación 4.2, redefiniendola como se muestra a continuación,

$$\nu(t) = \left(700 + \frac{2300t}{0,01} \right) \quad (4.3)$$

La figura 4.5 muestra el pulso emitido por el generador y el obtenido del sistema bocina-micrófono. Estos difieren en forma y extensión al igual que en secciones anteriores, sin embargo, el espectro del pulso mostrado en la figura 4.6 cubre completamente la banda alrededor de los 1450Hz, por lo que fué utilizado para esta sección.

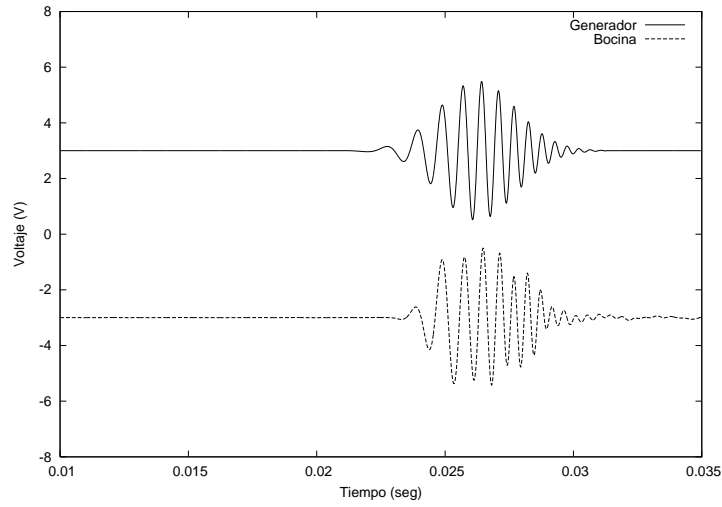


Figura 4.5: En la gráfica se observa nuevamente, la diferencia entre el pulso del generador y el del sistema bocina-micrófono. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

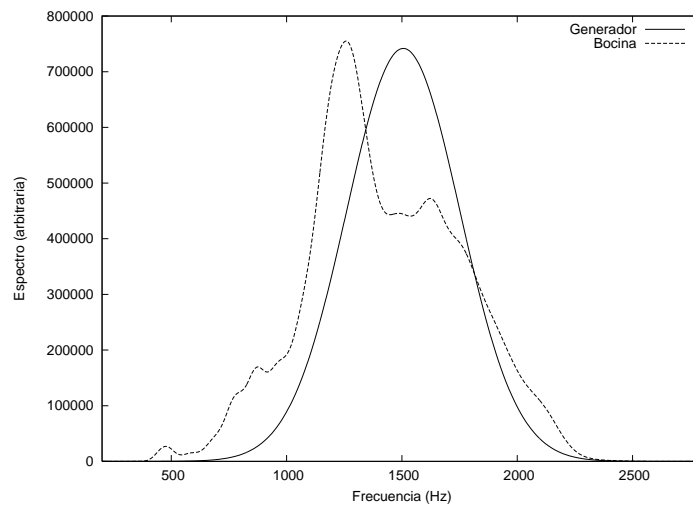


Figura 4.6: El espectro del pulso usado cubre perfectamente la banda a estudiar ($[1250 - 1700]$ Hz, aunque no tiene el mismo espectro que el del pulso creado por el generador. Los espectros han sido recorridos verticalmente para facilitar su visualización.

Por lo establecido en el capítulo 2, para el filtro de diámetro modulado hay 2 posibles configuraciones, una completamente periódica y otra con un defecto en la parte central. La periodicidad del arreglo genera interferencia destructiva en longitudes de onda tales que dicha longitud sea cuatro veces la distancia entre cada cambio de diámetro, y el motivo de romper la periodicidad al intercambiar el tramo central a uno del doble de largo que el original, es alterar la forma en que dispersa el filtro, pues con este nuevo tramo, genera interferencia constructiva al tener ahora la mitad de la longitud de onda. Esto debe crear una pequeña banda de transmisión permitida dentro de la brecha, la cual según el capítulo 2, debe de ser de unos cuantos hertz.

Lo primero a realizar fue observar el efecto que una sola celda, ya fuera de un cuarto de longitud de onda ($\lambda/4$) ó de media longitud de onda ($\lambda/2$), ejerce sobre el pulso, para buscar alguna relación de este efecto al momento de usar las 5 celdas. En la gráfica 4.7, se observa la forma distinta en que cada celda ($\lambda/4$ ó $\lambda/2$) dispersa el pulso, y la función de transmisión mostrada pone de manifiesto esta diferencia, pues a valores de frecuencias iguales, el arreglo de celda $\lambda/2$ presenta un mínimo por cada 2 que el de celda $\lambda/4$ genera, lo cual hace que justo a la frecuencia de mínima transmisión del arreglo de celda $\lambda/4$, en el arreglo de $\lambda/2$ se presente un máximo. Este máximo (~ 1480 Hz), es el que debe crear la pequeña banda permitida dentro de la brecha para los arreglos de 4 y 5 celdas con defecto central, planteada en el capítulo 2. Dicho máximo será buscado al final de esta sección.

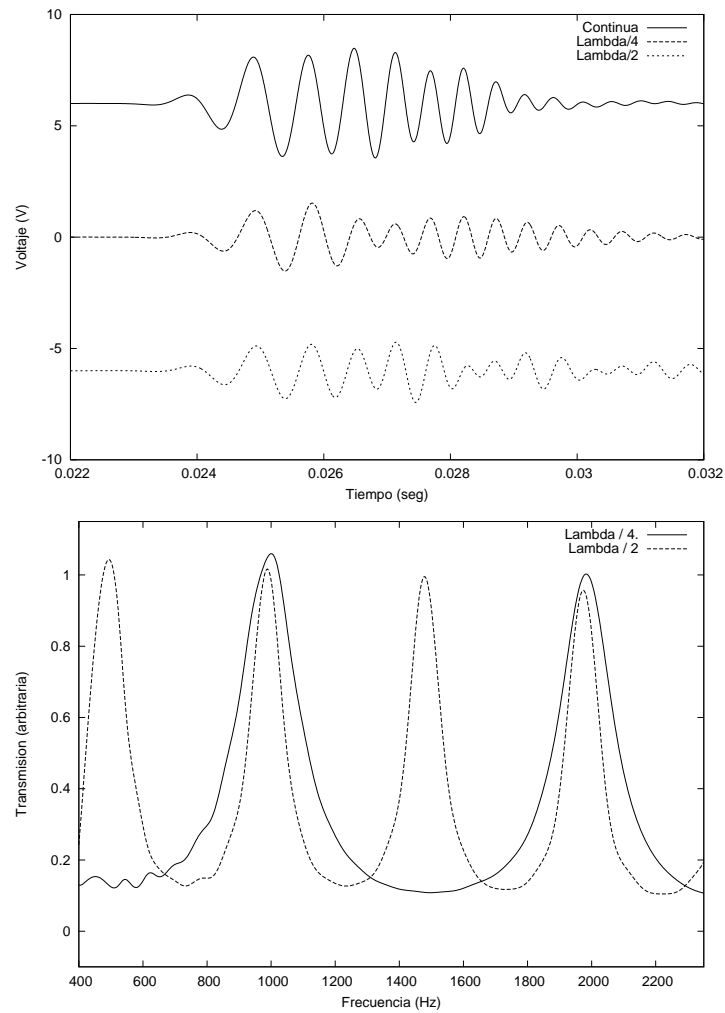


Figura 4.7: Defecto de diametro mayor: en la gráfica superior se observa como el haber introducido un defecto modifica notablemente la forma en que se dispersa el pulso, En la gráfica inferior, la función de transmisión del filtro con defecto presenta un máximo justo en el centro de la banda prohibida que el arreglo sin defecto genera. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

De la misma forma que el defecto puede corresponder a la parte de la celda de mayor diámetro, también puede ser que el defecto provenga del segmento de menor diámetro (sección 2.1). El resultado de propagar el pulso por esta configuración se muestra en la figura 4.8. Se observa claramente como cambia el efecto del filtro, pues en la parte central se reduce el número de oscilaciones del pulso con respecto al que atravesó el filtro sin defecto. Además se reduce ligeramente el tamaño de la cola del pulso. La función de transmisión muestra nuevamente zonas de transmisión permitida (máximos) a frecuencias en la que el filtro sin defecto prohíbe (mínimos), aunque el patrón obtenido para los dos arreglos ya no difiere tanto en las demás zonas, lo que parece indicar que al ir aumentando la longitud del arreglo, la influencia del defecto se va perdiendo.

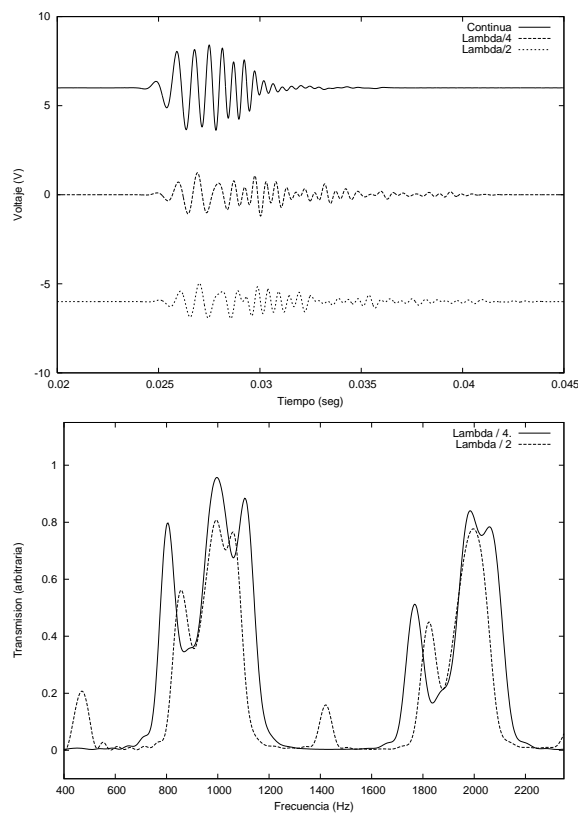


Figura 4.8: Defecto de diametro menor: a pesar de cambiar el tipo de defecto, se mantuvo la existencia de pequeñas bandas permitidas dentro de las brechas, aunque estas disminuyeron mucho su amplitud, lo cual puede indicar que este efecto se irá perdiendo al aumentar la longitud del arreglo, ya que el arreglo con defecto en el segmento de diámetro inferior es más largo que el del diámetro mayor (ver figura 2.2). Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Se procedió con el análisis de la influencia que cada celda agregada ejerce sobre el espectro del pulso de ruido blanco. A partir de una celda de longitud $\lambda/4$, se fueron agregando, una a una, celdas del mismo tamaño, hasta conseguir un arreglo de 5 celdas, captando cada vez, el pulso emitido por la bocina. En la gráfica 4.9 se observa la atenuación que va sufriendo el pulso con cada celda agregada, además del alargamiento final debido a las reflexiones en el interior del filtro.

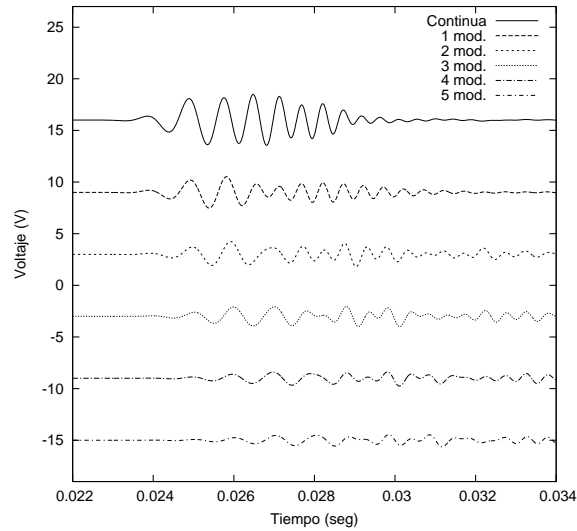


Figura 4.9: Cada vez que se agrega una celda, la parte frontal del pulso se atenúa más. El cambio del pulso de una configuración a otra es gradual, disminuyendo dicho cambio para los arreglos de mayor longitud. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

A partir del espectro de las señales mostradas en la figura 4.9, se obtuvieron las funciones de transmisión mostradas en la figura 4.10. Se observa claramente la brecha estudiada y como las amplitudes de los espectro van disminuyendo de amplitud al agregar celdas. Para este filtro no se obtuvo un patrón tan regular como el de la sección 4.2.2. Globalmente tienen un comportamiento similar, pues si uno no toma en cuenta las variaciones debidas a máximos y mínimos locales, las curvas de los espectros siguen el mismo patrón de variación, incrementando ó disminuyendo su amplitud en las mismas zonas. Localmente, los espectros tienen máximos y mínimos a distintas frecuencias y en distinta cantidad, pero esto se va perdiendo al ir agregando celdas. En esta gráfica se observa la notoria diferencia entre la función para el arreglo de una celda y las demás, ya que, a pesar de tener la brecha y las zonas permitidas en los mismos intervalos de frecuencias, el patrón seguido por esta no tiene protuberancias en la zona estudiada, y los dos picos que presenta son casi simétricos. Para los demás arreglos las bandas se acentúan, presentan protuberancias en todo el intervalo y la forma de la función es diferente a cada lado de la brecha. Solo en el arreglo de 5 celdas hay un parecido a ambos lados de la brecha. A partir de la tercer celda, cada función es similar a la anterior y a la siguiente, es decir que va cambiando gradualmente al ir aumentando celdas, y en la mayoría de los casos, las protuberancias que la función anterior mostraba, en la siguiente se redujeron ó desaparecieron.

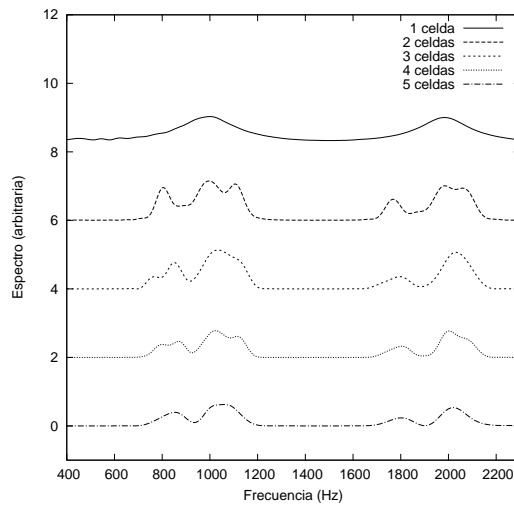


Figura 4.10: El efecto de agregar celdas es evidente en la función de transmisión. Para una celda se obtienen 2 picos casi simétricos, y al ir añadiendo celdas, los picos se ensanchan, la brecha se define más, de modo que para los arreglos más largos (4 y 5 celdas), el agregar celdas ya no cambia mucho la función transmisión. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Por último se observó el efecto de romper la periodicidad en los arreglos de 4 y 5 celdas mediante un defecto. Este defecto generaría una pequeña banda de transmisión permitida dentro de la brecha. Los pulsos captados al final se muestran en las figura 4.11. Se puede observar que no hay mucha diferencia entre los pulsos que pasaron por el arreglo periódico y los que lo hicieron por el otro. Las diferencias principalmente fueron en la amplitud de alguna oscilación en la parte media del pulso, y la creación ó eliminación de algunas oscilaciones en la parte final del pulso. A pesar de estas diferencia, el pulso no cambio notoriamente, lo que hace suponer que la inclusión del defecto no debe afectar mucho la función de transmisión.

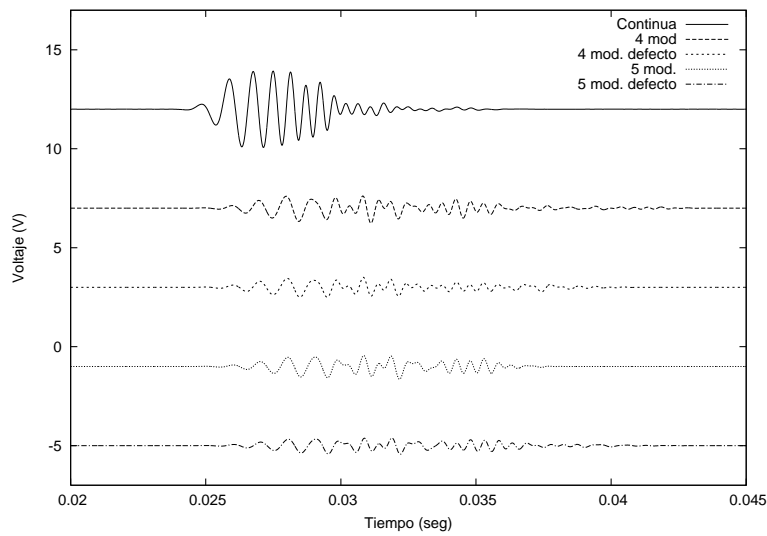


Figura 4.11: La gráfica muestra como la inclusión del defecto no cambia en mucho el comportamiento del pulso al transitar por el filtro. El principal cambio es en la amplitud de las oscilaciones, y solo al final se agregaron y desaparecieron algunas. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

En la figura 4.12 se muestra la función de transmisión obtenida para 4 y 5 celdas. Tal y como se supuso, la función transmisión tampoco tuvo cambio drásticos, aunque sí fueron notorios, por lo menos en las zonas de transmisión permitida. A simple vista, no se observa una banda de transmisión permitida en medio de la brecha. En los 2 recuadros de la figura aparece una ampliación de la parte central de la brecha. En estas sí se observa la diferencia entre colocar el defecto y no hacerlo. Para el arreglo de 5 celdas, el defecto hace que la parte central decaiga aun más, excepto por un pico alrededor de los 1510 Hz, el cual no existía cuando el arreglo no tenía el defecto, mientras que en el arreglo de 4 celdas, los máximos y mínimos locales se reubicaron y cambiaron de amplitud. En el de 4 celdas, aparece el mismo pico alrededor de los 1510 Hz, pero lo hace tanto para el arreglo con defecto como para el que no lo tiene. Tomando en cuenta lo anterior, y además que los recuadros mostrados fueron amplificados 30 veces, no se puede asegurar que este pico sea el debido a los efectos de interferencia constructiva inducidos por el defecto. Más aún, debido a la resolución en nuestras medidas (la mínima escala de frecuencias es de 3,517 Hz), al ancho del pico de transmisión permitida teórico (menor a 1 Hz), y a la gran atenuación sufrida en las guías, esta banda, en caso de existir, se perdió entre estos

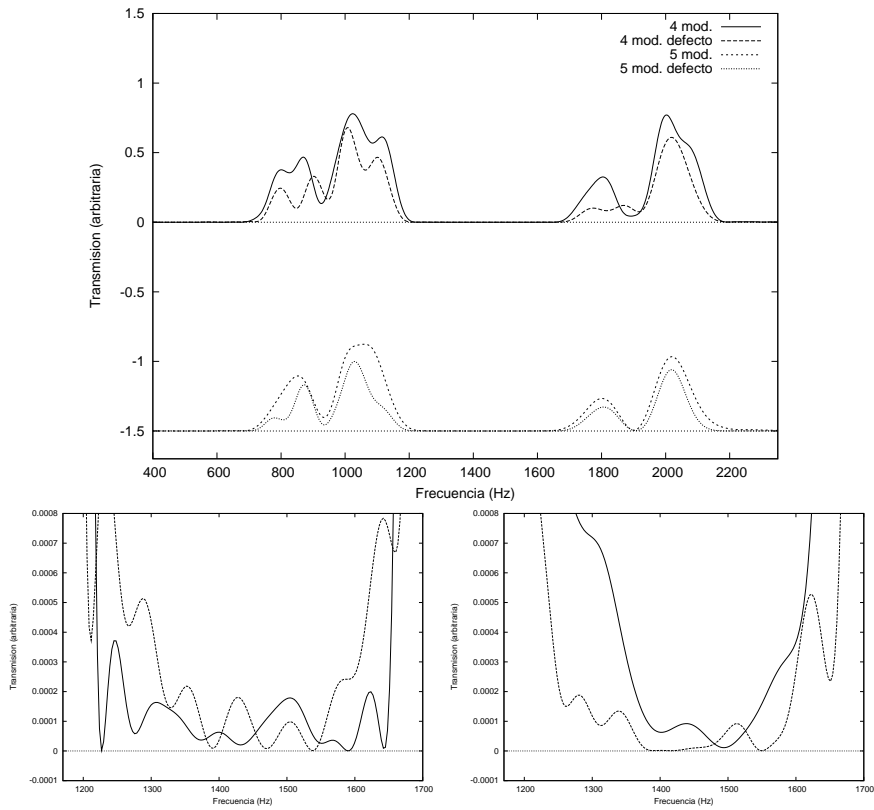


Figura 4.12: El cambio en la transmisión al incluir el defecto se observa en la gráfica inferior. Las dos gráficas inferiores son ampliaciones (30x) de la parte central de la respectiva brecha. No se observa un pico muy definido que pueda confirmar la existencia una pequeña banda permitida dentro de las brechas. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

4.2.2. Guías con ramificaciones

El arreglo con ramificaciones, analizado en la sección 4.1, genera brechas en la función de transmisión alrededor de los 950 Hz, 1900 Hz y los 2850 Hz. Para esta sección se enfocó el análisis a la banda comprendida entre los 1600 Hz y los 2200 Hz. Se utilizó un pulso con contenido de frecuencias de los 1100 Hz a los 2800 Hz, y al igual que en la sección anterior, el nuevo pulso tuvo la misma función que la ecuación 4.1, redefiniéndose $\nu(t)$ como sigue:

$$\nu(t) = \left(1100 + \frac{1900t}{0,01} \right). \quad (4.4)$$

En la figura 4.13 se muestra el pulso emitido por el generador y el obtenido por el sistema bocina-micrófono y sus respectivos espectros. Nuevamente se observa como el sistema no reproduce fielmente el pulso, lo cual no es problema, ya que en la gráfica de espectros se observa como el pulso del sistema bocina-micrófono cubre perfectamente la brecha a estudiar.

Al tener el pulso con las características necesarias, se procedió a analizar el comportamiento de éste al atravesar las posibles configuraciones del filtro. Independientemente de la separación que haya entre las dos ramificaciones que forman cada celda, la ramificación en sí es la principal fuente de dispersión para ciertas frecuencias. Debido a esto, se observó el efecto que el arreglo de una sola ramificación (0 celdas) ejerce sobre el pulso. En la figura 4.14, se muestra la deformación sufrida por el pulso, así como la transmisión asociada. Es notorio como la transmisión tiene mínimos alrededor de los 950 Hz, $950 * 2$ Hz, $950 * 3$ Hz, etc. lo cual fue descrito en el capítulo 2. El efecto de esta ramificación, en conjunto con el generado por la longitud de cada celda, será analizado en esta sección.

Además de la longitud de la ramificación, el número y la separación entre celdas influirán en el comportamiento del pulso. Para observar esto, se mandó el pulso por el filtro con una sola celda (2 ramificaciones) y se obtuvo el espectro y la función de transmisión para esta configuración. Después se agregó otra celda y se analizó la señal. Esto se repitió hasta obtener un arreglo con 6 celdas (7 ramificaciones). En las gráficas de la figura 4.15 se observa como, al añadir celdas, el pulso reduce su amplitud y se alarga en la parte final. Además, en todos los casos se observa como la parte central del pulso se colapsa. Esto es debido a que el pulso, al ir incrementando su frecuencia, empieza a tomar valores cercanos a la frecuencia prohibida por el filtro (centro de la brecha en la función de transmisión), y en ese intervalo el pulso debe atenuarse, siendo máxima la atenuación al tomar el valor de dicha frecuencia prohibida, para comenzar a incrementar su amplitud al alejarse de este valor.

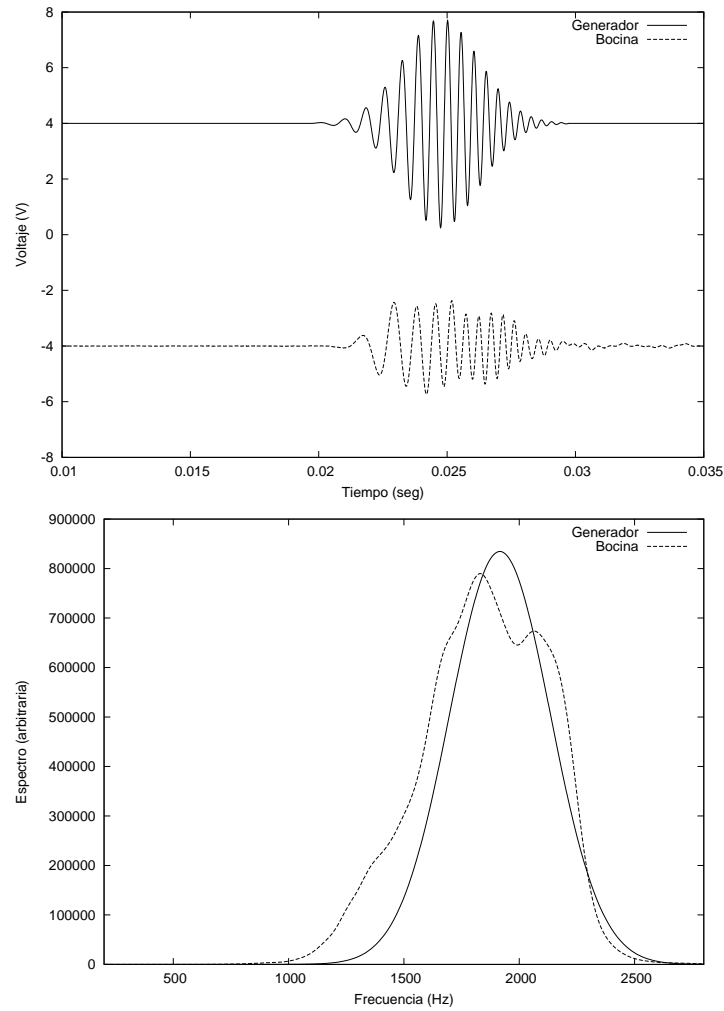


Figura 4.13: Se obtuvo nuevamente un pulso emitido por el sistema bocina-micrófono distinto al del generador. La banda a estudiar [1600–2200] Hz queda completamente cubierta por el espectro de la gráfica inferior. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

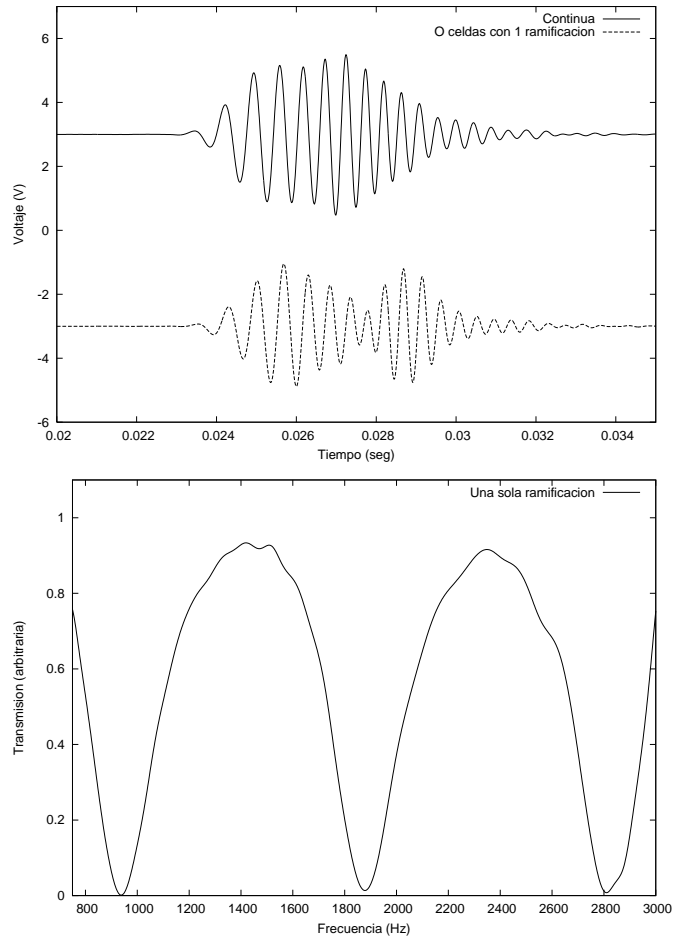


Figura 4.14: Se nota el decaimiento de la parte central del pulso, debido a la longitud de la ramificación. La transmisión muestra los máximos y mínimos espaciados periódicamente. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

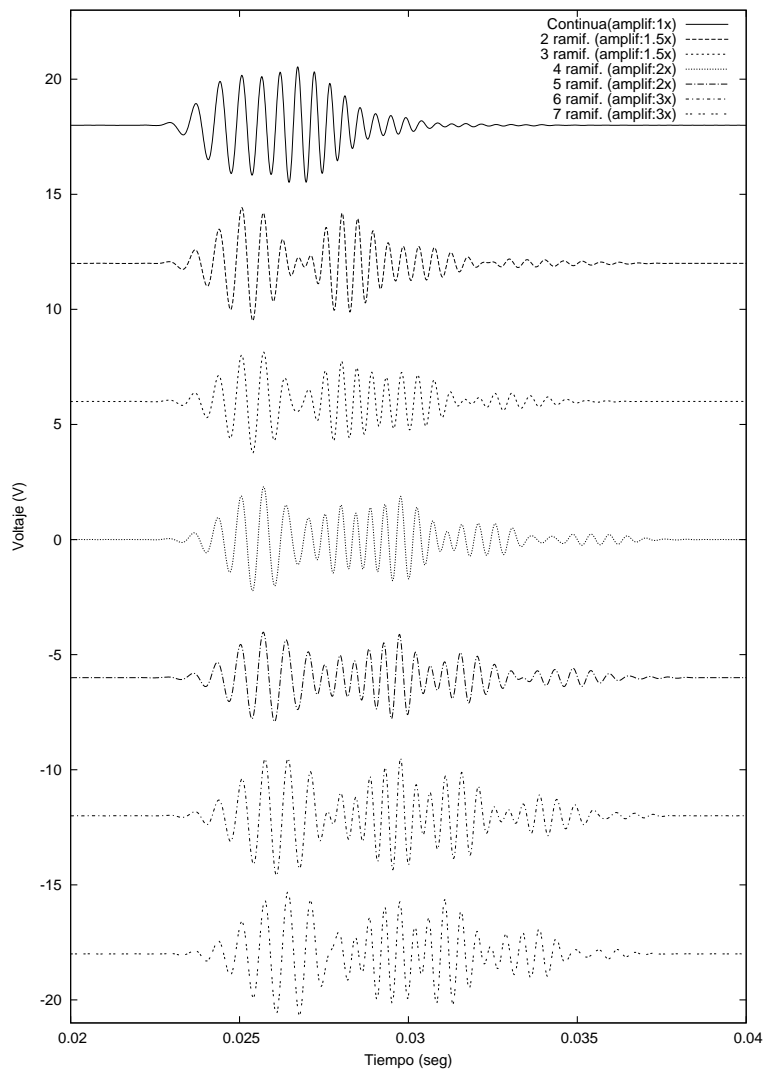


Figura 4.15: El efecto de agregar celdas es alargar el pulso y atenuar la parte central. En el intervalo en que se atenúa, el valor momentáneo de la frecuencia del pulso coincide con el de las frecuencias prohibidas por el filtro. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Haber reducido el ancho de banda del pulso de ruido blanco tuvo un efecto notable en los patrones de las funciones de transmisión. El comportamiento que cada una sigue es el mismo tipo de curva, con máximos y mínimos locales situados a frecuencias muy cercanas, los cuales van definiéndose más al ir agregando celdas. La figura 4.16 muestra lo anterior, y además, se observa que el efecto de agregar celdas va siendo menos notorio cada vez, pues para las primeras celdas el cambio de la función de una celda a otra es mayor que para las últimas, especialmente la quinta y sexta, en las cuales la función obtenida fue casi la misma.

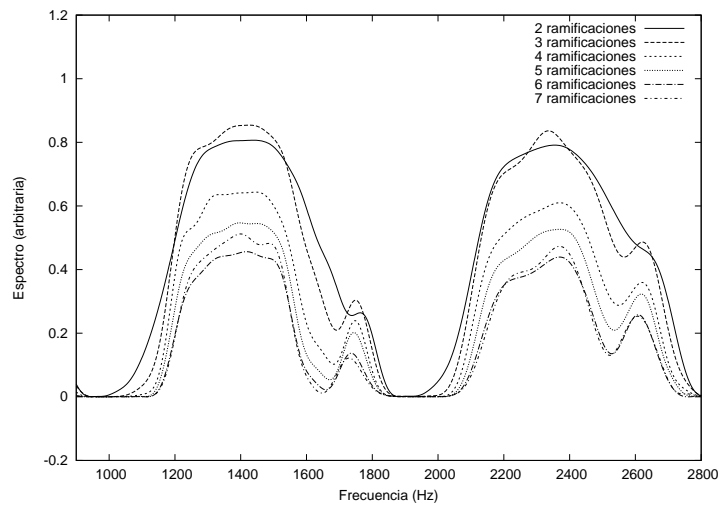


Figura 4.16: Se observa como la transmisión se va definiendo al ir aumentando celdas, al ir remarcándose la diferencia entre máximos y mínimos. El efecto va disminuyendo para arreglos largos (5 y 6 celdas), en los que la diferencia entre uno y otro es mínima. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Capítulo 5

Pulsos Gaussianos

Este capítulo consistió en ver la dispersión sufrida por pulsos con envolvente gaussiana al atravesar zonas donde su transmisión estaba prohibida. Para esto, se ubicó el centro de la brecha en las funciones de transmisión y dicho valor se usó como frecuencia central de los pulsos gaussianos. El centro de la brecha para el filtro de ramificaciones lo ubicamos en los 1947 Hz, y para el arreglo de diámetro modulado, dicho centro fue ubicado a los 1447 Hz. La expresión utilizada para dichos pulsos fue:

$$g(t) = A * \sin(2\pi t * \nu) * e^{-\frac{(t-0,01)^2}{10}}, \quad 0 \leq t < 0,01, \quad (5.1)$$

con $\nu \in \{1447, 1947\}$. En la gráfica 5.1, se muestra los pulsos generados y en la 5.2 sus espectros. En la gráfica de espectros se muestra además la banda a estudiar, y se observa como el ancho de banda de dichos pulsos queda justo en el centro de su respectiva brecha.

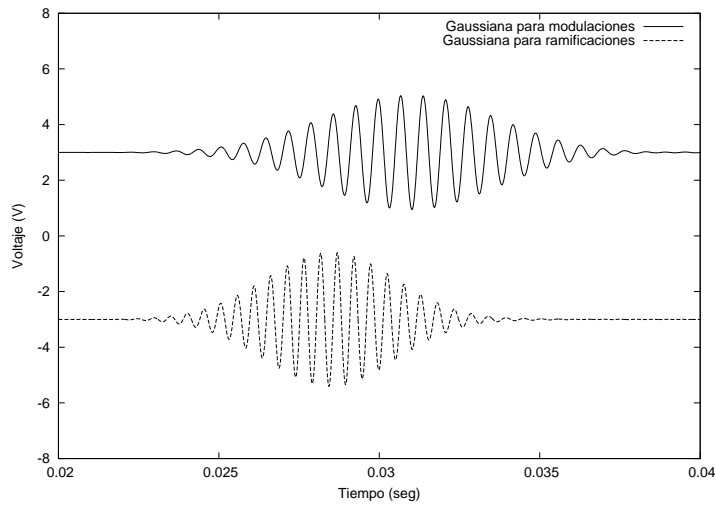


Figura 5.1: *Gaussianas utilizadas para esta sección. La superior corresponde al arreglo de modulaciones y la inferior al de ramificaciones. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.*

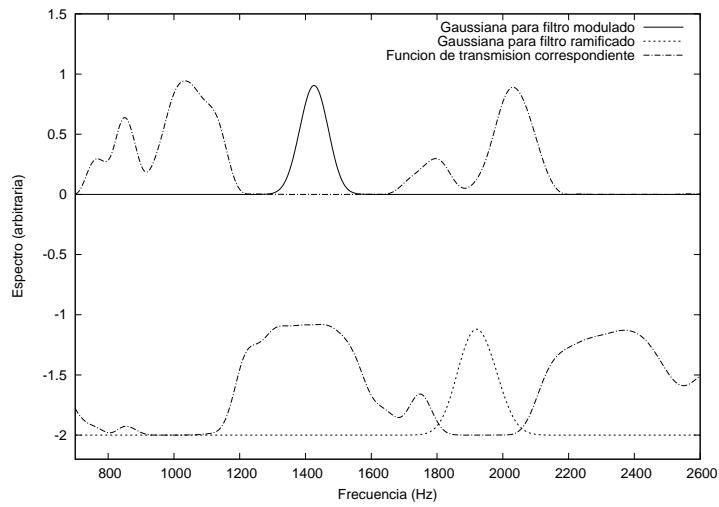


Figura 5.2: *Se muestra el espectro de las 2 gaussianas, con la función de transmisión respectiva para cada arreglo. Se observa como estan situadas en el centro de la brecha a estudiar. Los espectros han sido recorridos verticalmente para facilitar su visualización.*

5.1. Gaussiana a través del filtro de diámetro modulado

Nuevamente se analizó el comportamiento del pulso al atravesar la guía con una sola celda, la cual puede ser de dos tipos, $\lambda/2$ ó $\lambda/4$ (ver figura 2.2). Además, el defecto generado por la celda $\lambda/2$, puede generarse de dos maneras, ya que cada celda tiene 2 tipos de diámetros, así que se hará el análisis de estos dos posibles defectos, comenzando con el arreglo de diámetro mayor. Puede verse en la figura 5.3 como el efecto para cada tipo de celda es muy diferente. La celda $\lambda/4$, que genera interferencia destructiva a esas frecuencias, ocasionó una reducción en el ancho del pulso, y se observa como la amplitud disminuyó cerca del 60%. Además, la máxima amplitud del pulso se recorrió hacia la parte inicial del pulso, lo cual indica un incremento en la velocidad de grupo, aunque esto será tratado en el siguiente capítulo. Para $\lambda/2$ la amplitud del pulso casi no decayó, lo cual era de esperarse, ya que el arreglo no filtra en esas frecuencias, y se generó un alargamiento en la parte final de este. Se muestra además, los espectros correspondientes. El efecto de la celda se pone en evidencia inmediatamente, aunque este es diferente en cada caso. Para la celda $\lambda/4$, el espectro decayó notablemente, mientras que para la celda $\lambda/2$, el principal efecto fue generar un corrimiento de frecuencia de alrededor de 30 Hz.

Para la celda con defecto en el diámetro pequeño, se repitió el análisis anterior. En la figura 5.4 se muestra las señales obtenidas para los dos tipos de configuraciones. Por las amplificaciones (3 veces para la celda con defecto y 12 para la otra), se observa que la celda $\lambda/2$ (defecto) contribuyó a que el pulso no se atenuara demasiado, pero también generó que el pulso se alargara a más del doble de la extensión original. En los espectros mostrados en la figura 5.5, se observa además que el efecto generado por este defecto (menor diámetro), tuvo un comportamiento opuesto al que generó el defecto analizado antes (mayor diámetro), pues este generó un corrimiento de frecuencias hacia la izquierda de la frecuencia central, distinto al corrimiento hacia la derecha que ocasionó el otro (figura 5.3).

Al ir añadiendo celdas, el pulso gaussiano fue decayendo notablemente, de modo que para cinco celdas, este era casi imperceptible, de modo que se tuvo que incrementar el número de archivos a promediar a 120. Las señales captadas para todas las configuraciones de celdas de tamaño $\lambda/4$ se muestran en la figura 5.6, en la cual, debido a la gran atenuación generada, las señales de los arreglos de 1, 2, 3, 4 y 5 celdas tuvieron que ser amplificadas 3, 15, 60, 200 y 200 veces respectivamente. Puede verse, para las 3 primeras celdas, el filtro deforma el pulso, recorriendo el máximo hacia la parte frontal. Para el de tres celdas, aparece un pequeño pulso extra al final del pulso, y al seguir agregando celdas, el pulso frontal se ha atenuado tanto, que ya no se puede saber si es un solo pulso, ó es la superposición de un pulso frontal, con el o los pulsos extras formados al final de éste.

En los espectros mostrados en la gráfica 5.7 se observa como para las 2 celdas iniciales, el espectro mantiene la misma forma, y el efecto de la celda es

únicamente atenuar la amplitud del espectro. A partir de la tercera celda, los espectros ya no siguen la misma forma que la original, al deformarse la parte central del espectro. Para la tercera celda se generó un pequeño aplastamiento en la parte central, mientras que para 4 y 5 celdas se generó un valle a la izquierda del punto medio del espectro.

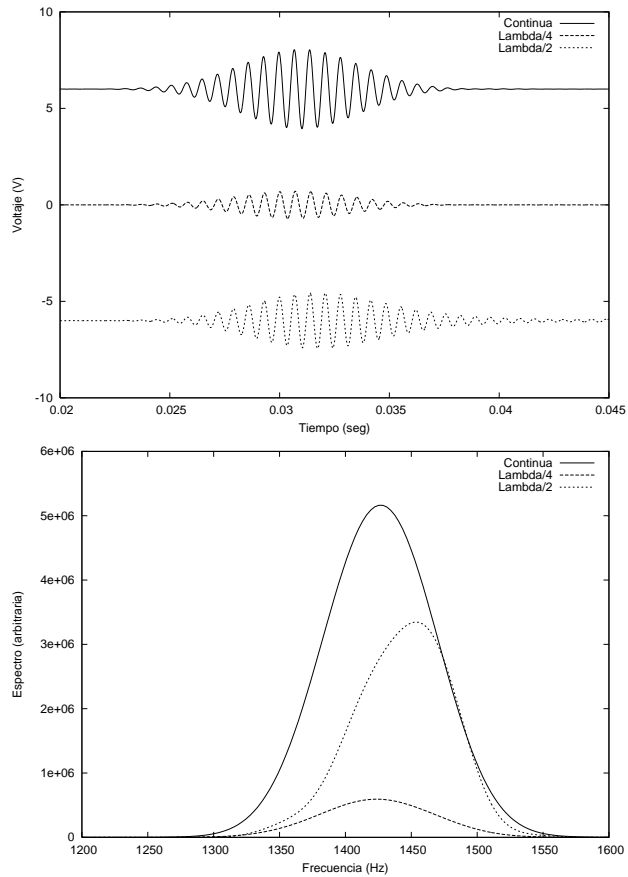


Figura 5.3: Defecto de diámetro mayor: el pulso que atravesó la celda $\lambda/4$ se acortó y se atenuó bastante, mientras que el arreglo de celda $\lambda/2$ solo tuvo un alargamiento al final. En la gráfica inferior se muestra el cambio en los espectros, mientras que para el de $\lambda/2$ tuvo un corrimiento de frecuencia, el de $\lambda/4$ mantuvo el mismo patrón al reducir su tamaño. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

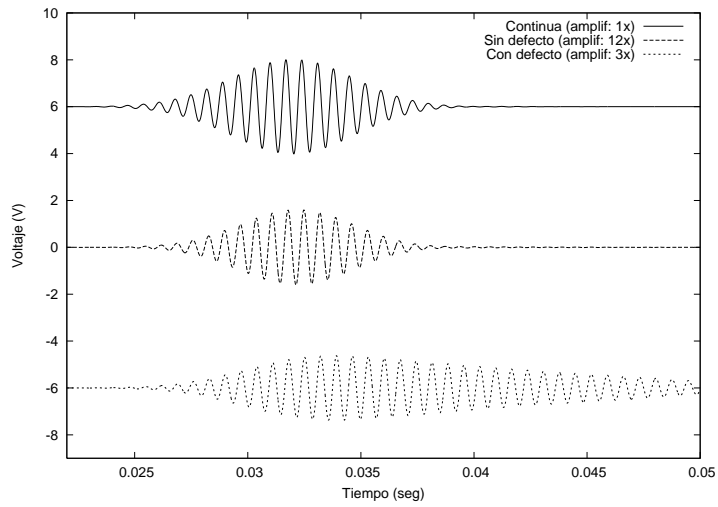


Figura 5.4: Defecto de diámetro menor: Se observa el alargamiento generado por la celda con defecto. Además por las amplificaciones de cada señal mostrada se pone de manifiesto como el defecto disminuye la atenuación del pulso. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

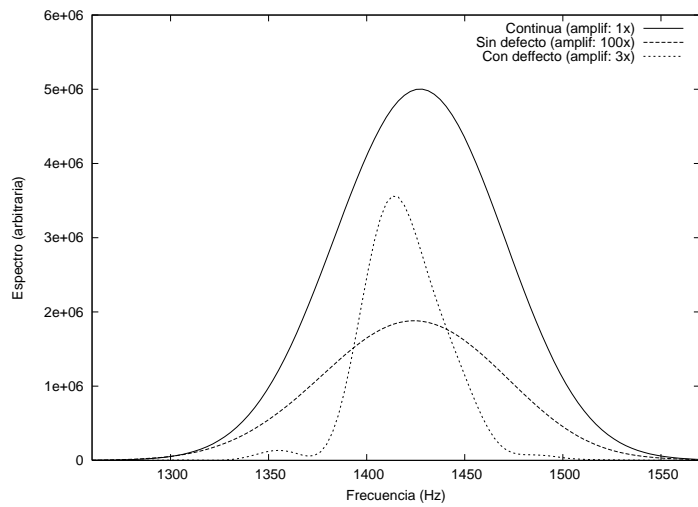


Figura 5.5: Defecto de diámetro menor: el espectro del pulso que paso por la celda con defecto ocasionó un corrimiento de frecuencia hacia frecuencias bajas, opuesto al que generó el defecto de diámetro mayor (fig. 5.3)

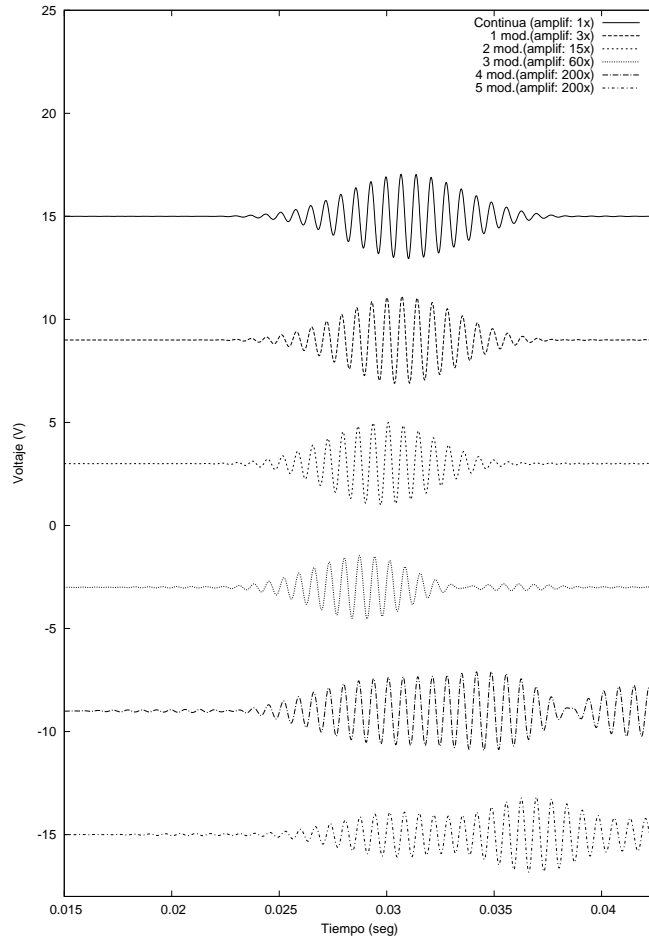


Figura 5.6: Se observa en la gráfica como, al ir agregando celdas, el pulso se contrae hacia la parte frontal, pero a partir de 3 celdas, la amplitud a decaído tanto que la cola del pulso originada de los reflejos internos, ya es del orden de la amplitud del pulso, lo cual no permite hacer un buen análisis de configuraciones largas. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

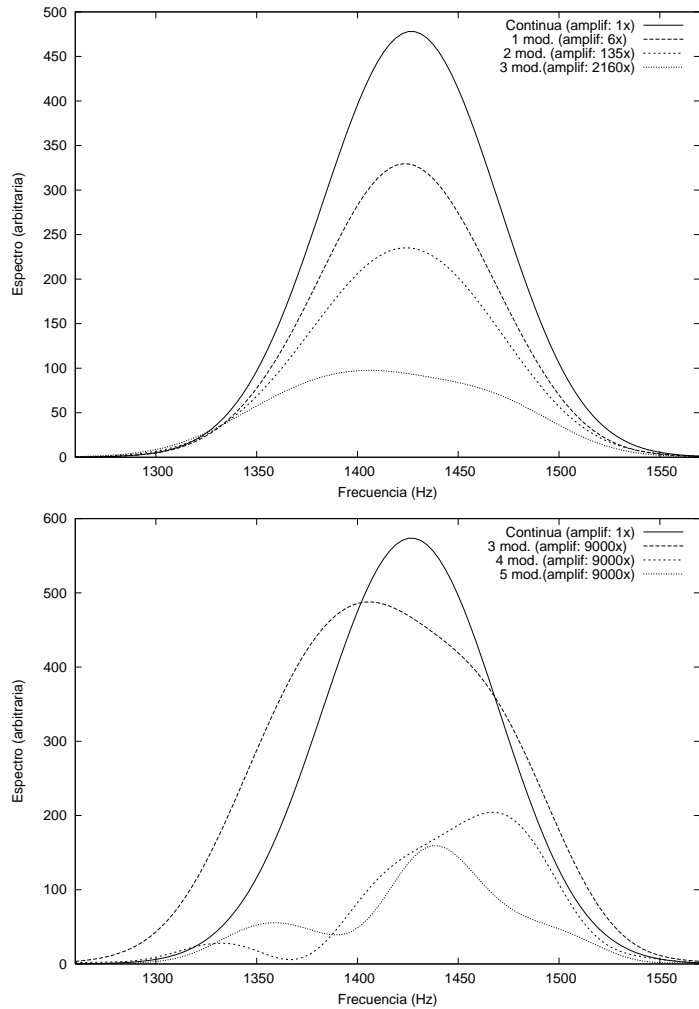


Figura 5.7: Se muestra el cambio del espectro al ir aumentando celdas. La gráfica superior corresponde a las 3 primeras celdas, en las que relativamente se mantiene la forma del espectro. En la gráfica inferior se muestra el espectro para 3, 4 y 5 celdas. aquí el cambio es mucho más notorio para 4 y 5 celdas, no únicamente en amplitud, sino también en el patrón seguido. Los espectros han sido recorridos verticalmente para facilitar su visualización.

Como vimos en la sección 4.2, el tener un defecto en la parte central del arreglo, ocasionó que la función de transmisión fuera distinta para las configuraciones de 4 y 5 celdas, cuando éstas tenían ó no dicho defecto (figura 4.11). Esta diferencia debería de influir de manera distinta al pulso gaussiano estudiado en esta sección. En la figura 5.8 se muestran los pulsos que atravesaron las guías de 4 y 5 celdas, ya sea con defecto ó sin el. La mayor influencia se obtuvo para el de 4 celdas, en el cual, paso de generar un pulso alargado y no gaussiano, a dos pulsos parecidos a gaussianas al colocar el defecto. Para el de 5 celdas el efecto fue menor, solamente recorriendo el máximo global del pulso, y definiendo un poco más los dos lóbulos que el pulso tenía, sin lograr completamente generar las 2 gaussianas que el de 4 celdas hizo. Es importante que la amplificación utilizada en dicha gráfica para los pulsos que atravesaron el filtro fue bastante grande (400 en el caso máximo). Esto hace difícil poder hacer un análisis, y se tendrá que tomar en cuenta al momento de analizar resultados y sacar conclusiones, pues habrá que distinguir la parte que corresponde a las colas del pulso inicial y los reflejos extras que este pueda tener.

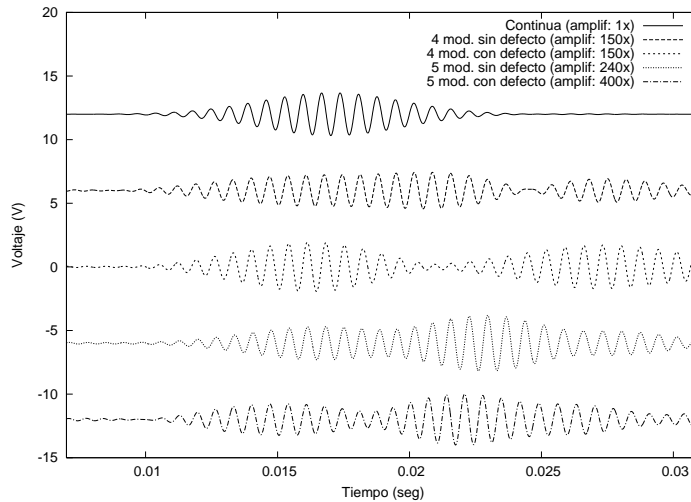


Figura 5.8: En esta gráfica se puede observar como cambian las propiedades del filtro al incluir el defecto. Para 4 modulaciones se contrajo la parte frontal, dejando un pulso similar a dos gaussianas, una detrás de otra. Para 5 celdas también se contrajo la parte frontal, pero la forma del pulso obtenido entre el arreglo con defecto ó sin el fue básicamente la misma. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

La figura 5.9, muestra los espectros obtenidos para los arreglos de 4 y 5 celdas, y es notoria la diferencia. En el arreglo de 4 celdas, el espectro del pulso que atravesó el filtro sin defecto, tiene un valle cerca de la parte central, mientras que en el espectro del arreglo con defecto, este valle desaparece. Además el arreglo sin defecto generó un máximo local a la izquierda del valle, el cual solo

se observa como una pequeña protuberancia en el espectro obtenido del arreglo con defecto. Esto muestra como, al romper la periodicidad, las frecuencias más atenuadas, que correspondían al centro de la brecha que generaba el filtro de celdas $\lambda/4$, ahora son un poco más favorecidas por la celda de longitud $\lambda/2$, haciendo que el espectro sea más parecido al del pulso que atravesó la guía continua, como pasaba con las 2 primeras celdas. Para el arreglo de 5 celdas, el efecto de colocar el defecto fue recorrer los máximos y mínimos locales. Al igual que para 4 celdas, las frecuencias más atenuadas en el arreglo sin defecto (mínimo local), se vieron favorecidas en el filtro con defecto, ocupando ahora un máximo local. Sin embargo ya no se obtuvo un espectro similar al que atravesó la guía continua, pues siguió existiendo un mínimo en el centro del espectro, desplazado respecto del correspondiente al filtro sin defecto.

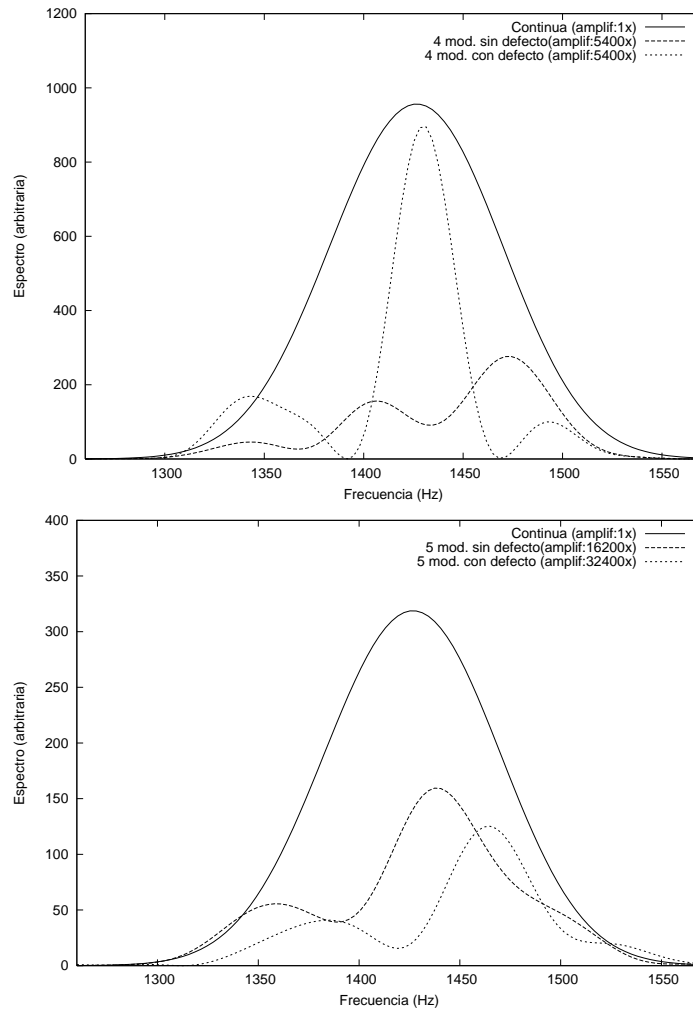


Figura 5.9: En las dos gráficas se puede ver la influencia al introducir el defecto. Para la de 4 ramificaciones (superior) se creó un pico muy pronunciado, cuya frecuencia era muy cercana a la del pulso gaussiano original (guía continua). Para 5 celdas existe desfaseamiento de los máximos y mínimos locales. Los espectros han sido recorridos verticalmente para facilitar su visualización.

5.2. Gaussiana a través del filtro de ramificaciones

Utilizando el pulso mostrado en la figura 5.11, se procedió a ver el efecto que una sola ramificación (0 celdas) ejercería sobre el pulso gaussiano. Como puede verse en la figura 5.10, dicho efecto fue notable, atenuando la amplitud del pulso alrededor del 50% en la parte central, y amplificando casi en el mismo factor la parte final, lo cual hace que el pulso se asemeje a la superposición de 2 pulsos gaussianos, desfazados uno detrás del otro. La gráfica de espectros muestra un valle central, cuya mínima frecuencia corresponde con el mínimo de la función de transmisión correspondiente (0 celdas) visto en la sección 4.2.2 (figura 4.14), la cual se incluye en esta gráfica para ilustrar la correspondencia

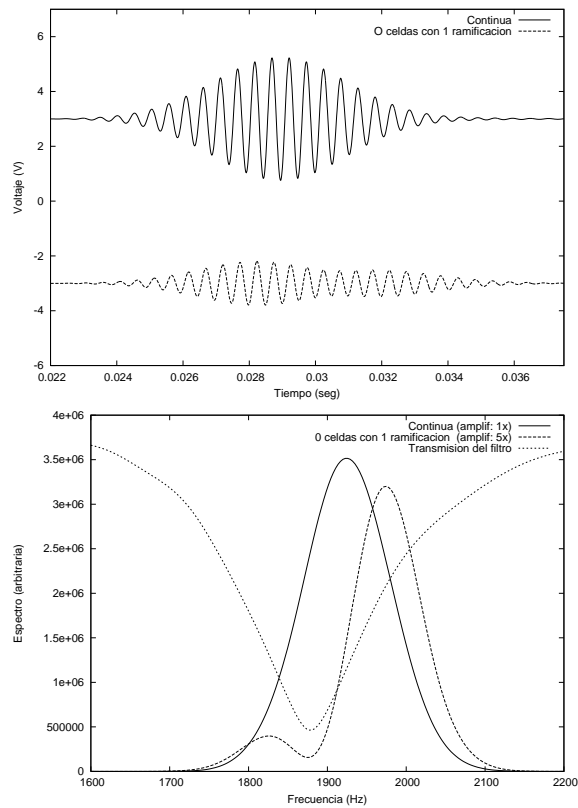


Figura 5.10: La función de transmisión incluida en gráfica de espectros muestra la correspondencia entre el pulso original y el que atravesó el filtro. El mínimo en el centro del espectro está ubicado a la misma frecuencia que el mínimo de la función de transmisión. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

A partir de lo anterior, se observó el efecto del filtro sobre este, al ir agregando ramificaciones. Las señales obtenidas para todas las posibles configuraciones del filtro se muestran en las gráficas inferiores. La influencia de la primer celda, es dividir el pulso original en dos más pequeños, los cuales tienen casi el mismo ancho. Agrega además, una cola extensa al final del pulso, ocasionada por los reflejos internos en la celda. Al agregar una celda al arreglo, aparece un módulo después del segundo, cuyo ancho otra vez es similar a los que le preceden, y menor que el obtenido para el arreglo de una celda. La cola se desplazó al final del tercer módulo y se alargó nuevamente. Este efecto de agregar módulos y disminuir su ancho, continuó al ir agregando celdas, por lo que para el arreglo de seis celdas se tuvo una señal de 7 módulos. Las señales mostradas fueron amplificadas 6, 10, 15, 20, 30 y 30 veces para las configuraciones de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 celdas respectivamente. Para los arreglos con mayor cantidad de celdas, la señal decayó mucho, lo cual hizo que la amplitud de los módulos fuera del orden de la amplitud de la cola, de modo que el último módulo quedó ligeramente oculto al superponerse con esta.

La forma en que el espectro del pulso se fue modificando al ir añadiendo celdas se muestra en las 2 gráficas de la figura 5.12. Para una sola celda, el espectro decae en el centro, generando una brecha, y dicha división, marcará distintos efectos al ir incrementando el número de celdas, para frecuencias que estén de un lado u otro de esta. En la gráfica de las 3 primeras celdas, se observa como la curva que sigue el espectro casi no cambia a frecuencias menores a la brecha, y después de esta, a frecuencias altas, los máximos y mínimos locales que sigue esta curva van siendo menos pronunciados al aumentar las celdas. Para las configuraciones más largas, a frecuencias por encima de la brecha, el espectro decayó tanto, que casi ha desaparecido, y la diferencia entre los espectros para 5 y 6 celdas fue mínima. Sin embargo del otro lado de la brecha (frecuencias bajas), el espectro, que había mantenido la misma forma al aumentar el número de celdas, a partir de la configuración de 4 celdas, empezó a cambiar, desarrollando una pequeña protuberancia del lado izquierdo, la cual terminó generando un máximo y un mínimo local.

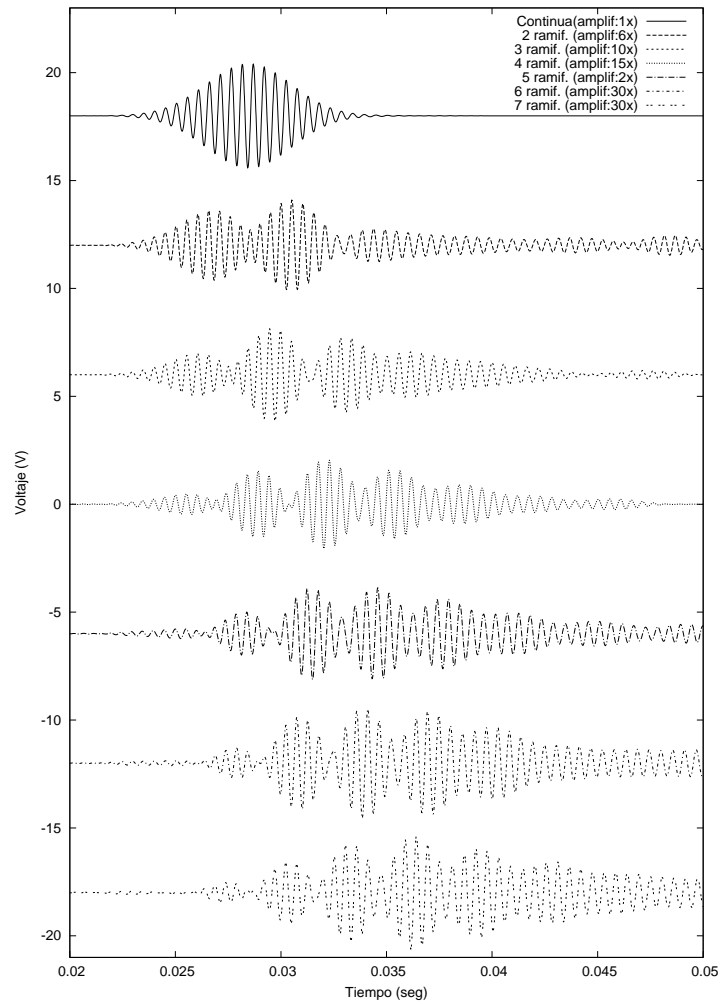


Figura 5.11: *En esta gráfica se pone en evidencia el efecto de agregar celdas. A cada celda agregada le corresponde la formación de un nuevo módulo, al final del último. Además, cada vez que aparece un nuevo módulo, la extensión temporal de cada uno de éstos se reduce. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.*

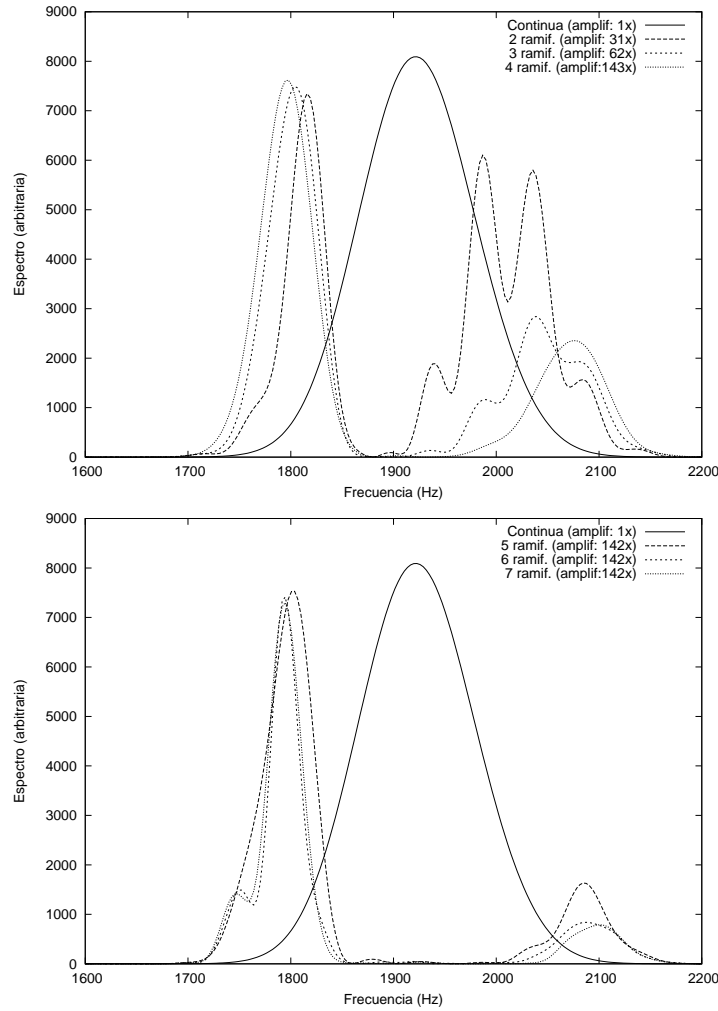


Figura 5.12: A partir de la gráfica, se puede observar como el efecto al ir agregando celdas va cambiando. Para las tres primeras (gráfica superior), el espectro cambia de un arreglo a otro a frecuencias mayores que la del centro de la brecha, mientras que a frecuencias bajas se obtiene casi el mismo espectro. Para las 3 siguientes (gráfica inferior), el espectro también empieza a variar a frecuencias bajas al ir aumentando el número de celdas, manteniéndose el cambio para frecuencias altas, aunque este es menos notorio. Los espectros han sido recorridos verticalmente para facilitar su visualización.

Capítulo 6

Análisis de resultados

En las secciones anteriores, se estudió experimentalmente, el comportamiento de la función transmisión al ir variando el número de celdas del arreglo. En el capítulo 2, para el arreglo de diámetro modulado, se mostró la función de transmisión planteada por Munday, Bennett y Robertson, sobre la guía aquí estudiada. Parte de la motivación para realizar este trabajo, fue verificar si el modelo teórico utilizado en dicho artículo, correspondía con la parte experimental. Dentro de la misma literatura, se reporta que la transmisión de pulsos senoidales con envolvente gaussiana a través de las guías aquí descritas (Robertson, Kushwaha), genera grandes cambios a la velocidad de grupo de dichos pulsos, por lo que otra parte de este trabajo se enfocó a este fenómeno. En las siguientes secciones se presentara el análisis de los resultados obtenidos y la comparación con las referencias utilizadas.

6.1. Filtro de diámetro modulado

La figura 6.1 muestra las transmisiones obtenidas para el arreglo de diámetro modulado periódico, desde una hasta cinco celdas. Con cada función de transmisión obtenida experimentalmente, se añade la función numérica esperada. De esta gráfica, puede observarse, que para todas las configuraciones del arreglo, la ubicación de las bandas obtenidas del experimento coinciden con las numéricas, no así en el comportamiento de cada función. Al igual que en el capítulo 4, si el número de celdas es pequeño, los resultados obtenidos son similares a los esperados, ya que para el arreglo de una celda se obtuvo casi el mismo patrón y para el de dos celdas se obtuvieron máximos y mínimos locales casi en la misma zona. A partir del arreglo de tres celdas, cualquier similitud se pierde, quedando únicamente la correspondencia en la ubicación de las bandas. Cabe señalar, que se buscó utilizar otro modelo, el cual nos diera otra función de transmisión teórica con la cual cotejar. Para esto se utilizó una descrita por Raul Esquivel-Sirvent[9], pero la función obtenida arrojó el mismo resultado que la planteada por J. N. Munday[6].

Para la configuración aperiódica, se estudiaron dos tipos de celdas, una con defecto en el tubo de diámetro inferior y otra en el de diámetro mayor (ver figura 2.2). En ambos casos, se obtuvo una similitud entre la transmisión experimental y la teórica para el arreglo de una celda, y nuevamente, esto se perdió al comparar los resultados para el arreglo de 5 celdas (figura 6.2). La banda permitida es solo visible en los 2 arreglos de una sola celda, y es imperceptible cuando se introduce el defecto en los arreglos de 4 y 5 celdas. Esto era de esperarse, ya que aun en la función de transmisión teórica, su ancho es demasiado pequeño, siendo inferior a 1 Hz para el arreglo de 5 celdas (la mínima resolución que se obtuvo para este trabajo fue de 3,0527 Hz), así que cualquier posible efecto que tuviera esta pequeña banda sobre el pulso es completamente despreciable, y no se espera que su inclusión pueda generar la propagación lenta del sonido que reporta Robertson, mencionada en el capítulo 2. En base a todo lo anterior, se puede concluir que el modelo utilizado para describir la transmisión de esta guía, es un modelo incompleto, ya que solo se aproxima si el arreglo tiene pocas celdas. El problema con este modelo puede estar asociado a que solo considera la reflexión inicial en cada cambio de diámetro y no toma en cuenta que la parte que se reflejó puede hacerlo nuevamente en otra parte de la guía, generando interferencia a lo largo de toda ésta, lo cual deja abierta la búsqueda e investigación de nuevos modelos que predigan mejor la transmisión de esta guía.

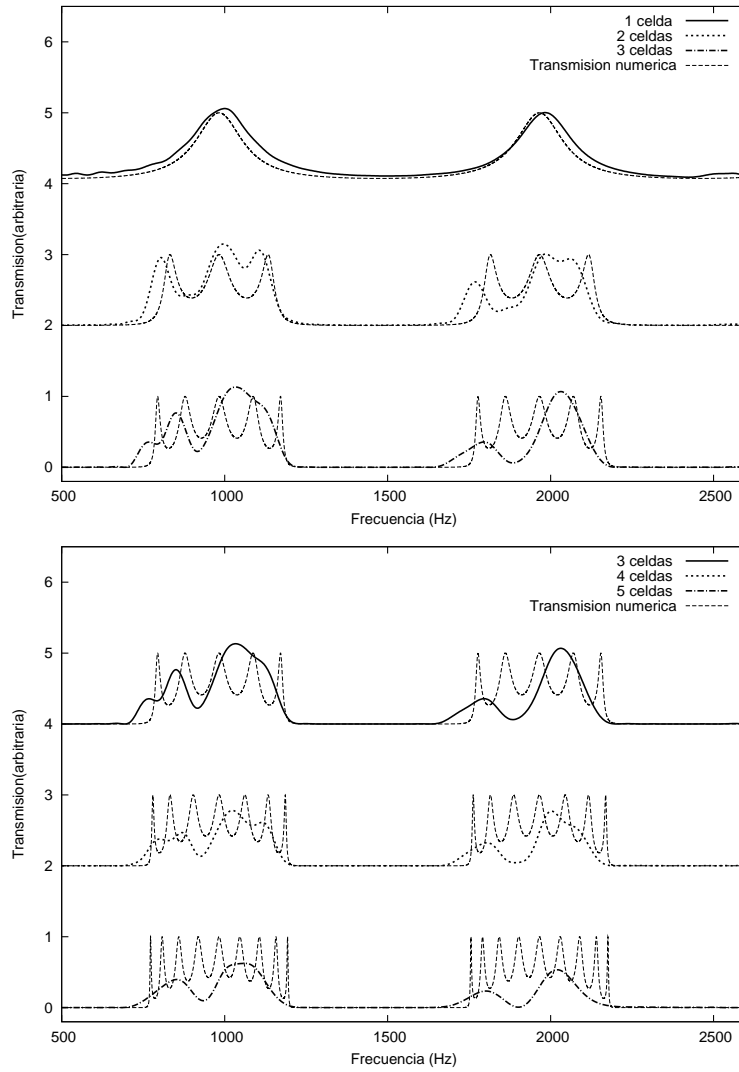


Figura 6.1: Usando la función de transmisión mencionada obtenida por Munday[6], se compara ésta, con los resultados experimentales obtenidos en este trabajo. En todos los casos, las bandas prohibidas coinciden en ubicación, pero solo para los arreglos 1 y 2 celdas hay una correspondencia en el patrón seguido, por lo menos, en la ubicación de máximos y mínimos. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

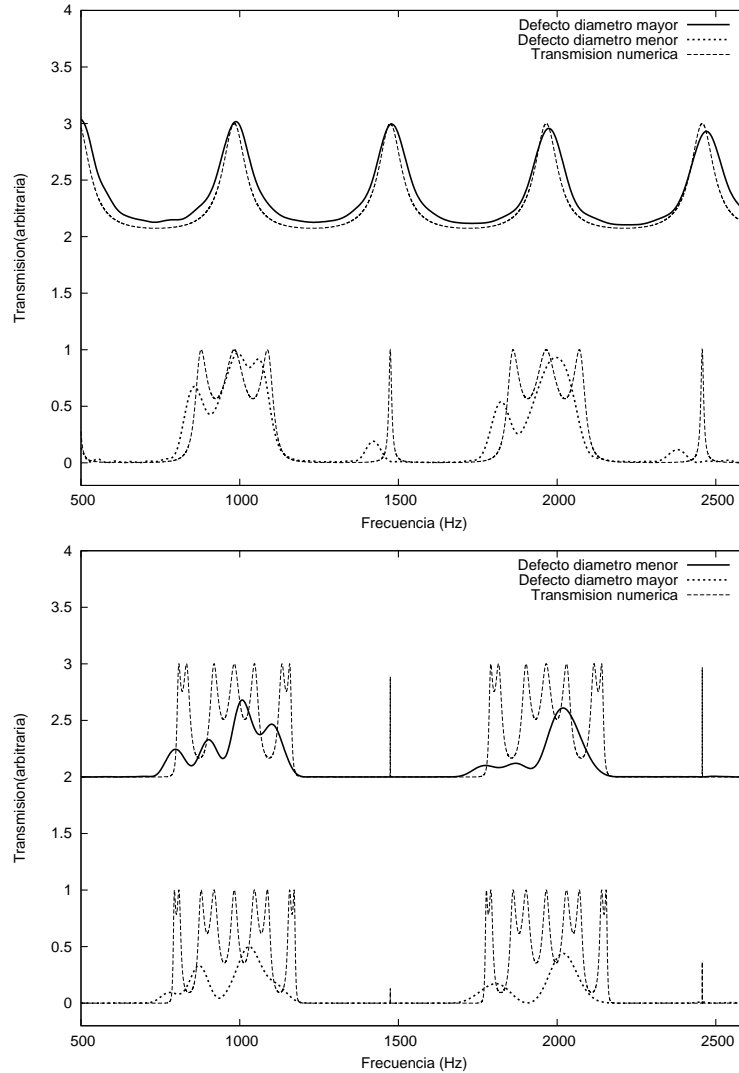


Figura 6.2: Al igual que en la figura 6.1, para los arreglos con defecto se obtiene correspondencia en el patrón cuando el arreglo tiene 1, 2 y 3 celdas. Para los arreglos de 4 y 5 celdas, solamente coincide la ubicación de la banda. Además, para éstos, la banda pequeña permitida dentro de la brecha solo aparece en los arreglos de menor cantidad de celdas. Las transmisiones han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

Para analizar el comportamiento de la velocidad de grupo, se estudió en el capítulo 5, la deformación sufrida por un pulso senoidal de envolvente gaussiana al atravesar la guía. La frecuencia central de este pulso (1447 Hz) se ajustaba a la del centro de la banda prohibida alrededor de ese mismo valor, haciendo competir la gran capacidad dispersora del filtro a esas frecuencias, contra la posibilidad del pulso de transmitirse en zonas prohibidas. En la gráfica 5.6, mostrada anteriormente en la sección 5.1, se observa el comportamiento del pulso a través de las posibles configuraciones del filtro. En este caso, se puede ver como para una cantidad pequeña de celdas, el pulso aun no ha decaído ni se ha deformado lo suficiente como para perder la forma original de su envolvente. Al distinguirse bien la ubicación de los máximos globales de ambos pulsos (el de la guía continua y el del filtro), se podría tomar la diferencia de tiempo Δt entre estos para calcular la nueva velocidad de grupo v_g , según la ecuación 6.1

$$v_g = \frac{dv_s}{d - v_s \Delta t}, \quad (6.1)$$

donde v_s es la velocidad de fase (344 m/s) y d la longitud del filtro.

Desafortunadamente, el máximo no siempre es representativo de la velocidad de grupo del pulso, en este caso debido a la pérdida de simetría alrededor de él, por lo que no en todos los casos se puede utilizar este método. Otra manera de calcularlo es ubicar el centroide de cada pulso y obteniendo nuevamente la diferencia en tiempo entre éstos, conocer el cambio en la velocidad de grupo (ver apéndice 2). Los resultados para las tres primeras celdas se muestra en la tabla. Para cuatro y cinco celdas, el pulso ha decaído hasta amplitudes del orden de magnitud del ruido de fondo y de un segundo pulso que aparece al final de éste (en el arreglo de 3 celdas se nota un pequeño pulso al final del pulso principal). El problema con este segundo paquete, es que debe ser tomado en cuenta, ya que en el intervalo de tiempo que existe, el pulso que atravesó la guía continua aun no ha terminado de oscilar, por lo que no se puede diferenciar si es producto de reflejos internos ó es aun la parte final del pulso original.

En los resultados mostrados en la tabla 6.1, se observa como la velocidad de grupo del pulso se incrementa al atravesar este tipo de guía. Según el trabajo de Robertson[8] mencionado en el capítulo 2, se plantea la posibilidad de obtener velocidades de grupo inferiores a la velocidad del sonido, si uno introduce un defecto de longitud $\lambda/2$ en la parte central de un arreglo de 5 celdas. En capítulos anteriores se estudió este posible efecto, en dos arreglos, uno cuyo defecto correspondía con el segmento de diámetro inferior de la celda, y el otro con defecto en el diámetro mayor. En la sección 5.1 se hicieron pasar los mismos pulsos de envolvente gaussiana a través de estos arreglos para medir los cambios en la velocidad de grupo. Las señales captadas se muestran en la figura 6.3. Se puede observar que para los dos arreglos de una sola celda, el pulso se recorre hacia la parte final del pulso, lo cual indica una disminución en la velocidad de grupo (últimos 2 renglones de la tabla 6.1), aunque el efecto fue diferente para cada tipo de defecto. Para el de diámetro mayor, se mantuvo la envolvente gaussiana, caso contrario para el defecto de diámetro menor, en el cual se pierde

Número de Celdas	Δt (seg)	d (m)	v_g (m/s)
1	0.000289	0.17	805.7
2	0.001233	0.51	1910.1
3	0.002077	0.85	2009.5
Def. diám. mayor	-0.001754	0.34	124.0
Def. diám. menor	-0.006418	0.68	81.0

Tabla 6.1: Velocidades de grupo obtenidas para los arreglos de 1,2 y 3 celdas sin defecto y para los arreglos de una celda con defecto. Para los demás arreglos, la gran dispersión ha destruido la envolvente gaussiana original, dejando una serie de pulsos no gaussianos muy atenuados y alargados hacia la parte posterior. Cuando no hubo defecto, el pulso aumentó su velocidad de grupo, mientras que al tenerlo, se registró una disminución en dicha velocidad, aunque para el defecto de diámetro menor, el pulso se extendió demasiado hacia la parte final, perdiéndose parcialmente la envolvente gaussiana (ver figura 6.3)

simetría alrededor del máximo del pulso, al presentarse un gran alargamiento al final del pulso. Estos grandes cambios en la velocidad de grupo, deben de ser tomados con cuidado, ya que solo están relacionados a la forma en que se atenúa el pulso, y no a algún cambio en la velocidad de fase de las componentes del pulso original. La figura 6.4 muestra los pulsos gaussianos para los arreglos de 1, 2 y 3 celdas, pero sin ser amplificados, y puede verse como en todo momento, la amplitud del pulso que atravesó la guía continua, es mucho mayor que la de los pulsos dispersados en la guía con filtro, lo cual muestra que no existe para este tipo de experimento, alguna redistribución en la energía del pulso, que generará que la amplitud del pulso dispersado fuera mayor a la del pulso original, y cualquier cambio en la velocidad de grupo, es debido únicamente a la deformación de la envolvente al atenuarse el pulso.

Para los arreglos de muchas celdas (4 ó 5) con defecto en la parte central, la envolvente gaussiana se rompe completamente, dejando una serie de pulsos, sin envolvente gaussiana en general, desfazados entre sí. Debido a esta división del pulso original y a que el resultante se atenuó demasiado (la amplificación fue 120 y 300 veces para los de 4 y 5 celdas respectivamente), el cambio de la velocidad de grupo no tiene mucho sentido, pues la señal original, como tal, casi se ha perdido, y el resultado es una mezcla de ésta con los reflejos extras en el filtro, ya que la amplitud de éstos es del mismo orden de magnitud. Si se intenta medir la velocidad de grupo, no hay forma de distinguir qué punto se puede tomar como el final de la señal, por lo que cualquier medición registraría una gran disminución de dicha velocidad, al tomar en cuenta el gran alargamiento sufrido en la parte final. Esto no permite verificar una de las intenciones originales de este trabajo, el cual era obtener un velocidad de grupo cercana a la obtenida por Robertson (24% de la velocidad del sonido) para el arreglo de 5 celdas con defecto central en el tubo de diámetro menor.

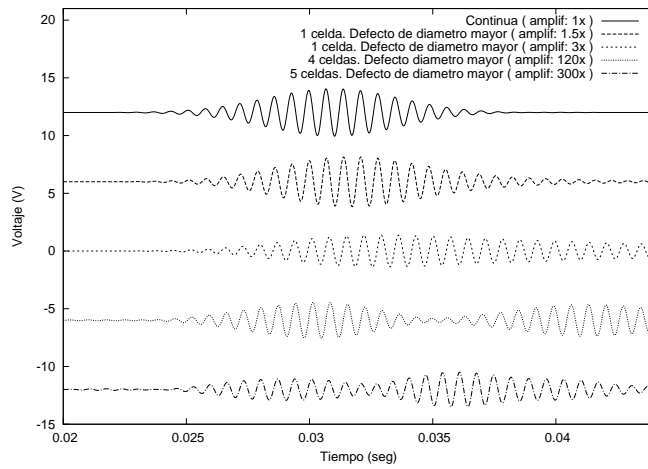


Figura 6.3: En la gráfica se observa como la dispersión sufrida por pulso varía de un defecto a otro. Solo para el arreglo de una celda con defecto de diámetro mayor se mantiene una envolvente gaussiana. Para los demás, al perderse tal envolvente, nuevamente no tiene caso buscar la velocidad de grupo, pues al tenerse grandes alargamientos al final, se obtendrá una gran reducción en la velocidad de grupo. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

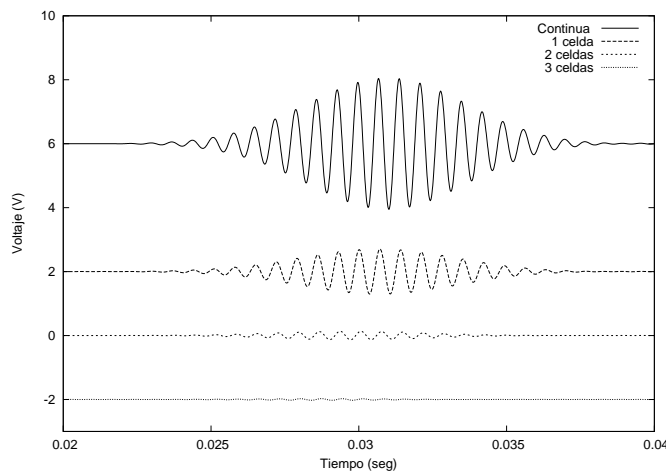


Figura 6.4: En esta gráfica se observa como la amplitud de todos los pulsos dispersados es siempre menor que la del pulso original. Con esto se muestra, que si bien es cierto que la velocidad de grupo cambio drásticamente, solo fue producto de la deformación en la envolvente al atenuarse. Las señales han sido recorridas verticalmente para facilitar su visualización.

6.2. Filtro de ramificaciones transversales

En la sección 4.2.2 se estudió el efecto ejercido por cada ramificación agregada al arreglo en cuestión. Inicialmente, cuando el arreglo tenía una ramificación (cero celdas, figura 4.14), se obtuvo un patrón con bandas alrededor los 950 Hz, 1900 Hz y 2800 Hz. Recordando del capítulo 2 que este arreglo filtraba debido a la resonancia en las ramificaciones, cuando la longitud de dichas ramificaciones (0,170 m) era igual a media longitud de onda, se esperaba que se generaran brechas alrededor de los 1012 Hz, lo cual da una diferencia de alrededor de 70 Hz de los resultados obtenidos. Si se utiliza la frecuencia a la cual la transmisión obtenida tuvo el valor más bajo (940 Hz), la longitud de onda correspondiente es $\lambda = 36,6 \text{ cm} = 2 * 18,3 \text{ cm}$. Esto implica que, a pesar de medir 17 cm, la ramificación tiene una longitud aparente de 18,3 cm, es decir, 1,3 cm por debajo del punto de unión entre el tubo principal y la ramificación. Se plantea que esto puede ser explicado si se toma en cuenta que para describir la resonancia en tubo cilíndrico de sección transversal πa^2 y longitud L , se debe hacer una corrección de borde en la longitud. En los casos en que $a \ll \lambda \ll L$, si la salida del tubo es abierta, la corrección a la longitud es $0,6a$. Si la salida del tubo tiene acoplada una pestaña, la corrección es $0,85a$, lo cual daría una longitud corregida de $L + (0,85 + 0,6)a = 17 \text{ cm} + 1,45 * 1,9 \text{ cm} = 18,37 \text{ cm}$, lo cual corresponde con lo medido en el experimento. Sin embargo, esto puede no ser del todo cierto, pues hay que tomar en cuenta dos situaciones:

1. Esta corrección es válida, si $L \gg \lambda$, lo cual no es nuestro caso, ya que el largo de la ramificación (17 cm) es del orden de magnitud de la longitud de onda (36,6 cm).
2. En la zona de unión de la ramificación con la guía, no es muy claro si se puede utilizar la corrección de tubo con pestaña, pues ésta supone simetría alrededor del eje del tubo, y la unión de la guía y la ramificación no lo es.

Para la banda estudiada, situada alrededor de los 1900 Hz, cada ramificación agregada, fue definiendo más la función de transmisión, variando muy poco de un arreglo al siguiente, de modo que para seis y siete ramificaciones, el cambio fue mínimo (figura 4.16, sección 4.2.2).

La intención de analizar este filtro se basó en dos motivaciones. La primera fue describir experimentalmente, la función de transmisión del filtro, sus mecanismos de acción, así como el cambio de comportamiento al cambiar el número de celdas. La segunda motivación fue la de verificar si este tipo de filtro, generaba que pulsos senoidales de envolvente gaussiana pudieran tener incrementos en la velocidad de grupo de hasta tres veces la velocidad de grupo, como menciona Robertson[7]. Para todos los casos, desde una hasta siete ramificaciones, la envolvente gaussiana se perdió, dejando una serie de pulsos más pequeños superpuestos, e igual que para las configuraciones largas del filtro de diámetro modulado, el centroide de estos pulsos deformados estaría muy rezagado con respecto al de los pulsos que atravesaron la guía sin filtro (ver figura 5.11, sección 5.2), lo cual se traduce en una disminución de la velocidad de grupo y no en un incremento, como reporta Robertson.

Capítulo 7

Conclusiones

Se planteó un método de procesamiento de señales general para este tipo de experimentos, en el que se conoce su alcance y la validez de la señal obtenida, dependiendo del nivel de atenuación del pulso filtrado con respecto al pulso que atravesó la guía continua.

En los dos tipos de guías de onda estudiadas, se encontró la estructura de bandas esperada en la función de transmisión. La diferencia de una función a otra fué disminuyendo al ir aumentando el número de celdas, de modo que entre el arreglo de 4 y 5 celdas para diámetro modulado, y el de 5 y 6 celdas para la guía ramificada, la diferencia fué mínima. Esto debe servir como referencia para cualquier modelo que describa alguna de las dos guías, el cual debiera tener un comportamiento asintótico para un número de celdas grande.

Para la guía de diámetro modulado, en general, el comportamiento de la transmisión no fue el esperado según el modelo planteado, únicamente para la configuración de una celda (con o sin defecto). Debido a la gran dispersión generada en los arreglos de 4 y 5 celdas, no se encontró ninguna banda pequeña de transmisión permitida dentro de la brecha.

Para esta misma guía se midió el cambio en la velocidad de grupo de pulsos senoidales de envolvente gaussiana, solo en los casos en que el pulso mantuvo la forma de la envolvente y/o su amplitud era suficiente para distinguirlo de los reflejos extras en la guía, obteniéndose, vía la deformación del pulso, velocidades de grupo mucho mayores a la velocidad del sonido en aire (hasta alrededor de 6 veces dicha velocidad). Se esperaba que introducir un defecto en la periodicidad del arreglo, ocasionaría una reducción drástica en la velocidad de grupo, la cual se obtuvo únicamente cuando se propagó el pulso solo por el defecto, sin embargo, para los arreglos de cuatro y cinco celdas con el defecto en el centro, (especialmente el de cinco, estudiado por Robertson), el pulso perdió la envolvente gaussiana y decayó a 1/300 de la máxima amplitud inicial, lo cual impide distinguir entre éste y el ruido de fondo o los reflejos extras que el procesamiento de señales no pudo separar, de modo que no se puede decir mucho sobre una disminución drástica en la velocidad de grupo sin caer errores de interpretación.

Para el arreglo de ramificaciones, la velocidad de grupo no fué cuantificada,

Apéndice

1.1. Función de transmisión numérica

Cuando se tiene dos segmentos cilíndricos de distinta sección transversal unidos, existe una diferencia en la impedancia acústica a cada lado de la unión. Cada impedancia puede ser modelada, en el límite de longitud de onda larga, como $Z = \rho c/S$, donde ρ , c y S son la densidad, la velocidad de propagación del medio y el área de la sección transversal respectivamente. En este modelo, el coeficiente de amplitud reflejada $\mathbf{r}_{i,j}$ en la unión se define como

$$\mathbf{r}_{i,j} = \frac{Z_i - Z_j}{Z_i + Z_j} \quad (1)$$

el cual, no depende de la frecuencia.

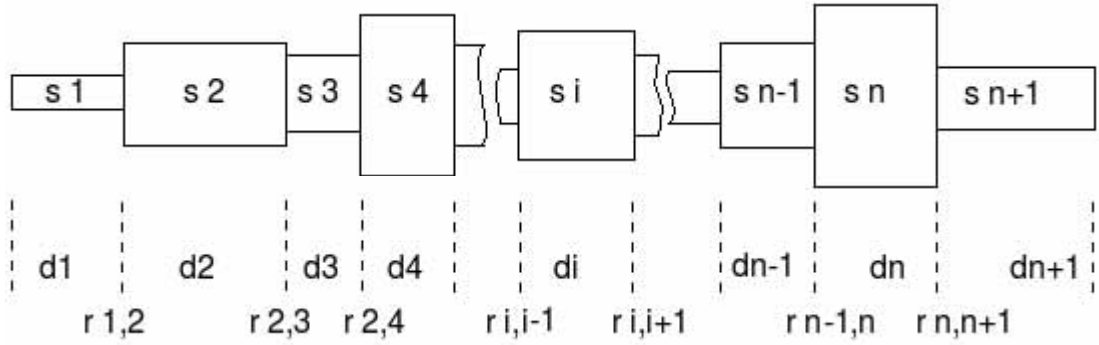


Figura 1:

Para obtener un nuevo coeficiente, que incluya las reflexiones en una segunda interfaz, a una distancia d , se utiliza

$$\mathbf{r}_{1,2,3} = \frac{\mathbf{r}_{1,2} + e^{2kd_1} \mathbf{r}_{2,3}}{1 + e^{2kd_1} \mathbf{r}_{1,2} \mathbf{r}_{2,3}} \quad (2)$$

donde $k = \omega/c$, ω la frecuencia angular del pulso incidente.

Para una guía compuesta de $n+1$ segmentos de longitud d_i y sección transversal S_i , con n cambios de sección y n coeficientes de amplitud reflejada $\mathbf{r}_{i,j}$ (figura 1), se puede demostrar que, el coeficiente de amplitud reflejada global del sistema $\mathbf{r}_{1,2,\dots,n}$ está dado por

$$\mathbf{r}_{1,2,\dots,n} = \frac{\mathbf{r}_{1,2} + e^{2kd_1} \mathbf{r}_{2,3,\dots,n}}{1 + e^{2kd_1} \mathbf{r}_{1,2} \mathbf{r}_{2,3,\dots,n}} \quad (3)$$

con

$$\mathbf{r}_{2,3,\dots,n} = \frac{\mathbf{r}_{2,3} + e^{2kd_2} \mathbf{r}_{3,4,\dots,n}}{1 + e^{2kd_2} \mathbf{r}_{2,3} \mathbf{r}_{3,4,\dots,n}} \quad (4)$$

$$\cdot \quad (5)$$

$$\cdot \quad (6)$$

$$\cdot \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_{n-3,n-2,n-1,n} = \frac{\mathbf{r}_{n-3,n-2} + e^{2kd_{n-3}} \mathbf{r}_{n-2,n-1,n}}{1 + e^{2kd_{n-3}} \mathbf{r}_{n-3,n-2} \mathbf{r}_{n-2,n-1,n}} \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{n-2,n-1,n} = \frac{\mathbf{r}_{n-2,n-1} + e^{2kd_{n-2}} \mathbf{r}_{n-1,n}}{1 + e^{2kd_{n-2}} \mathbf{r}_{n-2,n-1} \mathbf{r}_{n-1,n}}, \quad (9)$$

con

$$\mathbf{r}_{n-1,n} = \frac{Z_{n-1} - Z_n}{Z_{n-1} + Z_n}. \quad (10)$$

Para este modelo, no hay pérdida de energía, por lo que la transmisión, está dada por $1 - R$, donde $R = |\mathbf{r}_{1,2,3,\dots,n}|^2$.

De modo que, para obtener numéricamente la función de transmisión de un arreglo de $N + 1$ segmentos, donde el I elemento tiene una sección transversal $SECC[I]$, impedancia $IMP[I]$, separación $DIST[I]$ entre este segmento y el segmento $I + 1$ y con coeficiente de amplitud reflejada $C_REFL[I]$ en la I interfaz, y un coeficiente de amplitud reflejada global $GLOB_REF$, se puede utilizar los siguientes pasos :

Ciclo desde $I=1$ hasta N

$$IMP[I] = \frac{\rho * c}{SECC[I]}$$

Fin ciclo

Ciclo desde $I=1$ hasta N

$$C_REF[I] = \frac{IMP[I] - IMP[I+1]}{IMP[I] + IMP[I+1]}$$

Fin ciclo

$$GLOB_REF = IMP[N]$$

Ciclo desde $I=1$ hasta $N-1$

$$GLOB_REF = \frac{C_REF[N-I] + GLOB_REF * EXP(2 * K * DIST[N-1])}{1 + C_REF[N-I] * GLOB_REF * EXP(2 * K * DIST[N-1])}$$

Fin ciclo

$$TRANS = 1 - |GLOB_REF|^2.$$

.2. Centroides y velocidad de grupo

El cálculo de la velocidad de grupo de un pulso, se puede obtener si se considera el pulso como una figura con cierta área, la cual se va moviendo en línea recta. Medir la velocidad que lleva el centroide de dicha figura, nos dará la velocidad de grupo del grupo del pulso (figura 2). El centroide de una figura, a un tiempo t , se obtiene mediante la sig fórmula

$$\bar{X}_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xY(x, t)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} Y(x, t)dx}, \quad Y(x, t) = \begin{cases} Y_0(x) & \text{si } t = t_0; \\ Y_1(x) & \text{si } t = t_1; \end{cases}$$

de modo que, si al tiempo t_0 , el centroide de la figura descrita por Y_0 estaba en un punto L_0 , y a t_1 la figura ahora es descrita por Y_1 , con centroide en un punto L_1 , la velocidad v de dicho centroide, se obtiene mediante $v = (L_1 - L_0)/(t_1 - t_0) = d/\Delta t$.

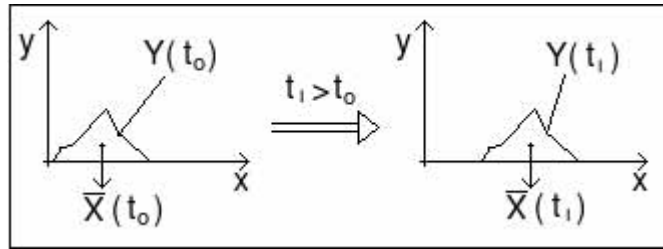


Figura 2: En el tiempo t_0 , el centroide la figura encerrada por la función Y_0 , se encuentra en la posición $\bar{X}(t_0)$. Al tiempo t_1 , la figura es descrita ahora por una función Y_1 , con el respectivo centroide $X_1(t_1)$.

Esta analogía puede llevar a cálculos erróneos, si no se toma en cuenta que el pulso tiene amplitudes negativas, y esto implicaría valores de área negativos. Veamos esto en el siguiente caso. Supongamos que el pulso es una función $\text{seno}(x)$ de una sola oscilación, como se ve en la figura 3. Supongamos que al tiempo cero, el origen de coordenadas (xy) y la parte frontal del pulso coinciden. La siguiente ecuación calcula la posición del centroide del pulso de la figura 3, el cual está claramente en el punto $x = \pi$, sin embargo se obtiene un resultado erróneo.

$$\bar{X}_0 = \frac{\int_0^{2\pi} x \text{sen}(x) dx}{\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx} = \frac{-2\pi}{0} \quad (11)$$

Esto es debido a que para el calculo de centroides, no se pueden tomar áreas negativas ó cero, pues pierde sentido el resultado. Para resolver este problema, se deben tomar solo funciones positivas, de modo que se tiene que al cambiar la función $\text{seno}(x)$ por $|\text{seno}(x)|$ (figura 4), se soluciona el problema, como lo muestra la siguiente ecuación.

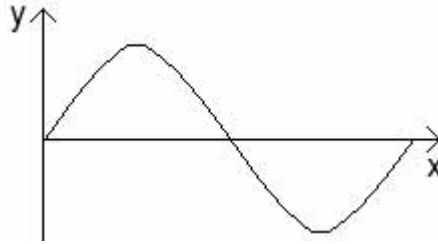


Figura 3: La función $\text{seno}(x)$, al tomar valores negativos, no se puede utilizar para obtener el centroide de la figura que encierra, ya que esto representaría áreas negativas, las cuales no tienen sentido para el calculo de dicho punto.

$$\bar{X}_0 = \frac{\int_0^{2\pi} x|\text{sen}(x)|dx}{\int_0^{2\pi} |\text{sen}(x)|dx} = \frac{\int_0^{\pi} x\text{sen}(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\text{sen}(x)dx}{\int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(x)dx} = \frac{4\pi}{4} = \pi \quad (12)$$

Así, que para obtener una expresión correcta de la posición del centroide, la ecuación .2, queda

$$\bar{X}_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x|Y_0(x)|dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |Y_0(x)|dx}. \quad (13)$$

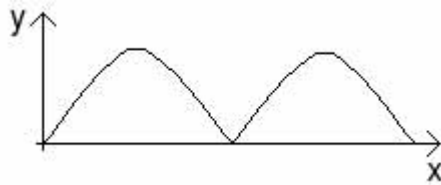


Figura 4: Si se utiliza una función positiva, no hay inconsistencias, y el centroide queda bien determinado.

Si un pulso atraviesa una zona de longitud d en un tiempo t_i , y dicha zona puede ó no tener algún mecanismo que deforme el pulso, la diferencia en tiempo $\Delta t = t_1 - t_2$ entre el centroide del pulso cuando atravesó la zona sin deformarse (t_1) y cuando la atravesó con el mecanismo deformante(t_2), se relaciona con las velocidades de grupo v_{g1} , v_{g2} mediante

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{d}{v_{g1}} - \frac{d}{v_{g2}}, \quad (14)$$

y tomando v_{g1} , como v_s la velocidad de fase, ya que al atravesar la zona que no tiene ningun mecanismo de deformación (dispersión) estas dos velocidades coinciden, se llega a la expresión para la velocidad de grupo en el medio deformante (filtro) como función de la velocidad de fase v_s , la longitud del medio d y la diferencia de tiempos Δt entre los centroides,

$$v_{g2} = \frac{d}{\frac{d}{v_s} - \Delta t} = \frac{dv_s}{d - v_s \Delta t}. \quad (15)$$

Bibliografía

- [1] L. Brillouin and A Sommerfeld. *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Press, 1960.
- [2] Jeffrey W. Eischen and Guillermo Monsivais Galindo, editors. *Ninth Pan-American Congress of Applied Mechanics*, Mérida, Yucatán, México, January 6, 2006. <http://www.mae.ncsu.edu/pacamix/docs/PROGRAM.pdf>.
- [3] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*, pages 192–232. John Wiley and Sons, Seventh edition, 1996.
- [4] M.S. Kushwaha, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, and J.O. Vasseur. Acoustic spectral gaps and discrete transmission in slender tubes. *Solid State Communications*, 106:659–663, 1998.
- [5] Daniel Monsivais, Marcos Ley Koo, and Raul Esquivel Sirvent. Sound propagation in waveguides with periodic arrays. In Eischen and Galindo [2], page 70. <http://www.mae.ncsu.edu/pacamix/docs/PROGRAMPDF40.pdf>.
- [6] J. Munday, C. B. Bennett, and W. M. Robertson. Band gaps and defect modes in periodically structured waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4):1353–1358, 2002.
- [7] W. M. Robertson, J. Ash, and J. M. McGaugh. Breaking the sound barrier: Tunneling of acoustic waves through the forbidden transmission region of a one-dimensional acoustic band gap array. *Am. J. Phys.*, 70(7):689–693, 2002.
- [8] W. M. Robertson, C. Baker, and C. Brad Bennett. Slow group velocity propagation of sound via defect coupling in a one-dimensional acoustic band gap array. *Am. J. Phys.*, 72(2):255–257, 2004.
- [9] R. Esquivel-Sirvent y G. H. Coccoletzi. Band structure for the propagation of elastic waves in superlattices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(1):86–90, 1994.